

© 2022 г.

М. А. Лялинов\*

ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА В ПОЛУПЛОСКОСТИ  
С УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА  
НА ГРАНИЦЕ И СИНГУЛЯРНЫМ  
 $\delta$ -ПОТЕНЦИАЛОМ, СОСРЕДОТОЧЕННЫМ  
НА ДВУХ ЛУЧАХ, И СИСТЕМЫ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучается асимптотика по расстоянию для собственной функции оператора Шредингера в полуплоскости с сингулярным  $\delta$ -потенциалом с носителем, сосредоточенным на двух лучах. Оператор такого типа встречается в задачах рассеяния трех одномерных квантовых частиц с точечным парным взаимодействием при некоторых дополнительных ограничениях, а также в задачах дифракции волн в клиновидных и конусовидных областях. С помощью представления Конторовича–Лебедева задача построения собственной функции оператора сводится к изучению системы однородных функционально-разностных уравнений с характеристическим (спектральным) параметром. Изучены свойства решений такой системы однородных функционально-разностных уравнений второго порядка с потенциалом из специального класса. В зависимости от значений характеристического параметра в уравнениях описаны их нетривиальные решения, собственные функции уравнения. Исследование этих решений основано на сведении системы к интегральным уравнениям с самосопряженным ограниченным оператором, который является вполне непрерывным возмущением матричного оператора Мёлера. Предложены достаточные условия существования дискретного спектра правее существенного для возмущенного оператора Мёлера. Изучены условия конечности дискретного спектра. Эти результаты применяются в рассматриваемой задаче в полуплоскости. С помощью перехода от представления Конторовича–Лебедева к интегральному представлению Зоммерфельда построена асимптотика по расстоянию собственной функции рассматриваемого оператора Шредингера.

**Ключевые слова:** функционально-разностные уравнения, спектр, возмущение оператора Мёлера, асимптотика собственных функций.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10319>

Исследование выполнено, в частности, за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00070, <https://rscf.ru/project/22-11-00070/>.

\* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.  
E-mail: [lyalinov@yandex.ru](mailto:lyalinov@yandex.ru), [m.lyalinov@spbu.ru](mailto:m.lyalinov@spbu.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Основными целями работы являются исследование задачи о построении собственной функции и ее асимптотики для оператора Шредингера специального типа и изучение связи этой канонической задачи с некоторыми спектральными свойствами системы функционально-разностных (ФР) уравнений с мероморфным матричным потенциалом. Важным вспомогательным обстоятельством является недавно обнаруженная возможность изучения спектральных свойств систем ФР уравнений посредством редукции к интегральным уравнениям с так называемым возмущенным оператором Мёлера. Кроме того, наше исследование мотивировано многочисленными приложениями, некоторые из которых обсуждаются ниже.

Отметим интерес к операторам Шредингера с сингулярным  $\delta$ -потенциалом, имеющим носитель на поверхностях в пространстве  $\mathbb{R}^d$  (см. [1]–[3] и ссылки в этих работах), который проявился в эффективной возможности качественного исследования спектров соответствующих самосопряженных операторов. Используются общие подходы спектральной теории [4], [5], причем традиционно соответствующие самосопряженные операторы задаются с помощью полуограниченных полуторалинейных замыкаемых форм. Однако если поверхность носителя потенциала такова, что допускается неполное разделение переменных (например, круговой конус или клин), то задача о собственных функциях и собственных числах может быть сведена к изучению спектральных свойств ФР уравнений [6]–[8]. Замечательным обстоятельством является то, что в этом случае удается не только качественно описать спектр, но и получить эффективные интегральные представления для собственных функций, описать асимптотики собственных функций на больших расстояниях.

В работе [6] изучаются собственные функции и их асимптотическое поведение на больших расстояниях для оператора Лапласа с сингулярным потенциалом, носитель которого находится на конической поверхности в трехмерном пространстве. В рамках неполного разделения переменных получено интегральное представление типа Конторовича–Лебедева для собственных функций в терминах решения вспомогательного ФР уравнения с мероморфным потенциалом. Решения ФР уравнения изучаются путем сведения его к интегральному уравнению с ограниченным самосопряженным интегральным оператором. Этот интегральный оператор является возмущением скалярного оператора Мёлера.

В статье [7] мы изучили собственные функции, которые описывают собственные колебания акустических волн в угловых областях с “полупрозрачными” граничными условиями. Для некоторых значений спектрального параметра в краевой задаче мы исследовали существенный и дискретный спектры уравнения и описали свойства соответствующих решений. Исследование основано на сведении ФР уравнений к интегральным уравнениям типа Мёлера с симметричным ядром.

В отличие от работ [6], [7], где изучаются скалярные ФР уравнения, в настоящей работе для построения собственных функций исследуется система двух ФР уравнений с мероморфным потенциалом, а класс рассматриваемых матричных потенциалов мотивирован различными приложениями. Одно из таких приложений подробно обсуждается в настоящей работе. Стоит отметить, что обобщение нашего подхода на системы ФР уравнений произвольного размера не вызывает затруднений.

Изучение свойств решений ФР уравнений проводилось в последние десятилетия в различных направлениях и было связано с развитием для этого новых подходов

и методов, а также с многочисленными приложениями. Среди наиболее интересных и многообещающих отметим метод монодромизации [9], [10], который был применен, например, для описания геометрии спектра ФР уравнения Харпера. Интерес представляют и квазиклассические конструкции, связанные с разностными уравнениями (см. [11] и ссылки в этой работе). Среди многочисленных приложений упомянем задачи рассеяния волн (акустических, электромагнитных) в клиновидных или конусовидных областях [12]–[18]. В связи с этими работами отметим использование разнообразных интегральных представлений (Конторовича–Лебедева, Зоммерфельда–Малюжинца, Меллина, Фурье), которое приводит к различным ФР уравнениям с мероморфными коэффициентами. Волны на поверхности воды в прибрежном клине изучаются в работах [19], [20] посредством сведения к функциональным уравнениям типа Малюжинца [9]. Как эффективное средство исследования, ФР уравнения известны и в квантовой теории, в частности при изучении процессов распада частиц, многочастичного квантового рассеяния и т. п. [21]–[24].

Раздел 2 посвящен обсуждению основного примера, связанного с самосопряженным оператором Шредингера  $A_s$  с сингулярным потенциалом и приводящего к изучению системы ФР уравнений. Результаты разделов 3–6 используются для построения собственных функций оператора  $A_s$  и изучения их поведения на больших расстояниях. Для этого, в частности, используются интегральные представления для решений в виде интегралов Конторовича–Лебедева и Зоммерфельда. Полезно отметить, что оператор  $A_s$  можно связать с квантово-механической задачей рассеяния трех нейтральных частиц с парным взаимодействием в виде  $\delta$ -функции, движущихся по прямой, при некоторых дополнительных ограничениях на характер их взаимодействия. Похожий оператор возникает и в задаче дифракции волн на системе полупрозрачных экранов в акустике или электродинамике.

Мы рассматриваем постановку задачи о спектре и собственных функциях (в том числе, обобщенных) системы двух ФР уравнений, описываем рассматриваемый класс потенциалов. Здесь же произведена редукция системы к интегральным уравнениям на отрезке. Матричный интегральный оператор  $\mathbf{K}$  ограничен и самосопряжен, но не вполне непрерывен. Этот оператор представим в виде суммы так называемого матричного оператора Мёлера  $\mathbf{M}$  и его компактного возмущения  $\mathbf{V}$ . Тем самым изучение спектральных свойств системы двух ФР уравнений сводится к описанию спектральных свойств матричного интегрального оператора.

В приложении А исследуется простейший матричный аналог  $\mathbf{M}$  скалярного самосопряженного оператора Мёлера  $M$ , обсуждаются его спектр и собственные функции, вычисляются резольвента и разложение единицы. Изучены свойства ядра резольвенты и получены необходимые для дальнейшего оценки. (Результаты являются прямым следствием классических формул Мёлера 1881 года.) Эти вспомогательные результаты и используются далее для изучения систем ФР уравнений с характеристическим параметром.

В разделе 4 показано, что существенный спектр возмущенного оператора Мёлера  $\mathbf{K}$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ . Оператор  $\mathbf{K}$  положителен, поэтому дискретная компонента спектра может быть расположена правее единицы. Выписаны достаточные условия существования дискретной компоненты спектра оператора в терминах потенциала. С помощью принципа Бирмана–Швингера предложен признак

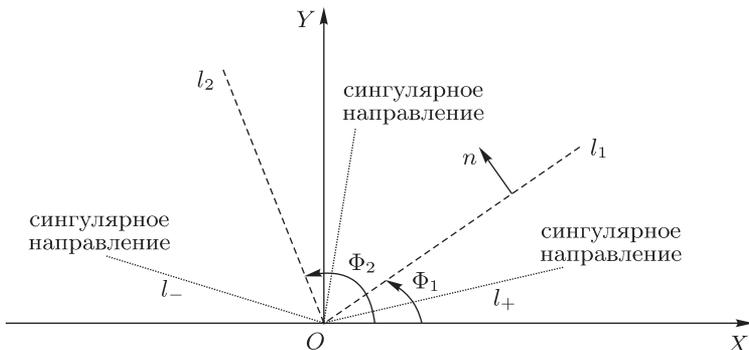


Рис. 1. Область и носитель потенциала в  $\mathbb{R}_+^2$ .

конечности дискретного спектра, который аналогичен признаку, полученному в работе [25] для возмущения оператора Карлемана операторами Ханкеля.

Результаты, касающиеся спектра оператора  $\mathbf{K}$ , применяются для описания спектральных свойств ФР уравнений. Введено понятие множества характеристических чисел системы уравнений и существенного характеристического множества. Получены оценки, описывающие поведение мероморфных решений (“собственных функций”) на бесконечности вдоль мнимой оси.

Работа завершается построением эффективных формул для асимптотики собственных функций. Для этого использованы интегральное представление Зоммерфельда и традиционные асимптотические методы типа метода перевала и его “равномерный” вариант.

## 2. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

**2.1. Формулировка.** Мы определим самосопряженный оператор Шредингера  $A_s$ , который рассматривается в качестве примера, его полуторалинейной формой  $a_s$  в  $L_2(\mathbb{R}_+^2)$ , которая полуограничена, плотно определена и замыкаема<sup>1)</sup>. Рассмотрим разбиение полуплоскости  $\Omega = \mathbb{R}_+^2$  ( $x = (X, Y) \in \Omega$ ) на три части  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , лучами  $l_1$  и  $l_2$  (см. рис. 1). Введем полярные координаты  $X = r \cos \varphi$ ,  $Y = r \sin \varphi$  и

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < \Phi_1\}, \\ \Omega_2 &= \{(r, \varphi) : r > 0, \Phi_1 < \varphi < \Phi_2\}, \\ \Omega_3 &= \{(r, \varphi) : r > 0, \Phi_2 < \varphi < \pi\}, \end{aligned}$$

где  $0 < \Phi_1 < \Phi_2 < \pi$ . Соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$a_s[U, U] = \int_{\Omega} \nabla U \cdot \overline{\nabla U} \, dx - \gamma_1 \int_{l_1} |U|^2 \, ds - \gamma_2 \int_{l_2} |U|^2 \, ds,$$

где  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  – параметры Робэна,  $\text{Dom}[a_s] = H^1(\Omega)$ ,  $\Omega = \Omega_1 \cup l_1 \cup \Omega_2 \cup l_2 \cup \Omega_3$ .

<sup>1)</sup> Напомним, что, как указано в разделе 1, этот оператор можно связать при определенных условиях с задачей квантового рассеяния трех одномерных частиц с точечным парным взаимодействием.

Оператор  $A_s$ , порожденный формой  $a_s$ , самосопряжен и полуограничен. Он реализуется как лапласиан с сингулярным  $\delta$ -потенциалом, имеющим носитель на  $l = l_1 \cup l_2$ , т. е.  $A_s = -\Delta - \gamma\delta_l(x)$  [1]. В дальнейшем мы используем его классическую реализацию в терминах уравнения и краевых условий. Мы изучаем уравнение

$$A_s U = EU,$$

где спектральный параметр  $E$  считается отрицательным,  $E < 0$ . Известно, что существенный спектр  $\sigma_e(A_s)$  оператора  $A_s$  совпадает с  $[-\gamma^2/4, \infty)$ , где  $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$  (мы считаем далее, что  $\gamma_1 \geq \gamma_2$ ). Имеется также дискретная часть спектра  $\sigma_d(A_s)$ . Наша цель – предложить интегральные представления для собственных функций дискретного спектра  $\sigma_d(A_s)$  оператора  $A_s$  и проиллюстрировать использование результатов разделов 3–6, в частности найти значения  $\sigma_d(A_s)$ , убедиться, что дискретный спектр не пуст при определенных условиях. Эти условия мы сформулируем в терминах потенциала ФР уравнений, которые связаны с рассматриваемым примером.

**2.2. Классическая постановка и основные результаты.** Мы ищем классическое решение  $u = u_j$  в  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , удовлетворяющее уравнениям ( $E < 0$ )

$$\begin{aligned} -\Delta u_1(r, \varphi) - E u_1(r, \varphi) &= 0, & (r, \varphi) \in \Omega_1, \\ -\Delta u_2(r, \varphi) - E u_2(r, \varphi) &= 0, & (r, \varphi) \in \Omega_2, \\ -\Delta u_3(r, \varphi) - E u_3(r, \varphi) &= 0, & (r, \varphi) \in \Omega_3, \end{aligned} \tag{1}$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{Y=0} &= 0, \tag{2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{l_1} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{l_1} &= \gamma_1 u_1|_{l_1}, & u_1|_{l_1} = u_2|_{l_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{l_2} - \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{l_2} &= \gamma_2 u_2|_{l_2}, & u_2|_{l_2} = u_3|_{l_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

где единичная нормаль  $n$  направлена против часовой стрелки. С другой стороны, условие  $u \in H^1(\Omega)$  подразумевает, что

$$u(r, \varphi) = C + O(r^{\delta_*}), \quad \delta_* > 0, r \rightarrow 0, \tag{4}$$

равномерно по  $\varphi$ . Мы предполагаем, что нетривиальные решения задачи (собственные функции) (1)–(4) экспоненциально убывают при  $r \rightarrow \infty$ , а следующий интеграл ограничен:

$$\int_{\Omega} |u(r, \varphi)|^2 e^{2dr} r dr d\varphi < \infty \tag{5}$$

для некоторого положительного  $d$ . Отметим, что такие решения, удовлетворяющие (1)–(4), существуют для некоторых  $E < -\gamma^2/4$ , однако если  $E \geq -\gamma^2/4$ , соответствующие нетривиальные решения (т. е. на непрерывном спектре) нарушают условие (5).

Основные новые результаты, которые подробно обсуждаются в настоящей статье, состоят в следующем. Во-первых, мы изучаем достаточные условия существования дискретной компоненты спектра оператора  $A_s$ , исследование которого

посредством интегралов Конторовича–Лебедева сведено к описанию характеристических значений  $\Lambda = \Lambda_m$  соответствующих ФР уравнений вида  $\mathbf{h}(\nu + 1) - \mathbf{h}(\nu - 1) - 2i\Lambda \mathbf{W}_*(\nu)\mathbf{h}(\nu) = \mathbf{0}$ , связанных с задачей  $(\mathbf{W}_*(\nu) - \text{мероморфный матричный потенциал, определенный в п. 2.3 явно в терминах отношений синусов и косинусов})$ . С ФР уравнением ассоциировано интегральное уравнение  $\mathbf{r}(x) = \Lambda(\mathbf{K}\mathbf{r})(x)$  с оператором (который мы называем возмущенным оператором Мёлера)

$$(\mathbf{K}\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{x+y} \sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)} \mathbf{r}(y),$$

$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(it)|_{t=\frac{1}{\pi} \ln(1/x + \sqrt{1/x^2 - 1})} > 0, t > 0, \mathbf{a}$  – постоянная диагональная матрица.

Достаточные условия существования дискретного спектра  $\mu_m = \Lambda_m^{-1}$  этого оператора (тем самым и спектра  $E_m = -[\gamma_1/2\Lambda_m]^2$  оператора  $A_s$ ) описываются следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 2.1.** Пусть  $\mathbf{V}$  – самосопряженный компактный оператор в пространстве  $\mathcal{H} = L_2((0, 1); \mathbb{C}^2)$  и для некоторого  $n$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)} - \mathbf{a}}{y+x} \mathbf{u}_n(y) \overline{\mathbf{u}_n(x)} > \varepsilon_n, \tag{6}$$

тогда возмущенный оператор Мёлера  $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V}$  имеет нетривиальный дискретный спектр справа от  $\sigma_e(\mathbf{K}) = [0, 1]$  (в неравенстве можно взять  $\varepsilon_n = 1/n$ ).

В этой теореме  $\mathbf{u}_n(x)$  – сингулярная последовательность Вейля, которая строится явно по невозмущенному оператору  $\mathbf{M} = \mathbf{K} - \mathbf{V}$  и отвечает концу существенного спектра  $\mu = 1$  этого оператора. Более простое достаточное условие задается неравенством (21).

Во-вторых, на основе принципа Бирмана–Швингера получено условие конечности дискретной компоненты спектра в терминах потенциала в системе ФР уравнений. А именно, справедлива

**ТЕОРЕМА 2.2.** Пусть  $\alpha > 3/2$ , оператор  $\mathbf{V} \geq 0, \mathbf{V} \in S_2$ , принадлежит классу Гильберта–Шмидта, кроме того, оператор  $\mathbf{Q}^\alpha \mathbf{V} \mathbf{Q}^\alpha \in S_\infty$  компактен. Тогда полное число  $N(1)$  собственных значений оператора  $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V}$ , больших  $\mu = 1$ , конечно и удовлетворяет оценке

$$N(1) \leq (\|\mathbf{V}\|_2 + G_\alpha \|\mathbf{Q}^\alpha \mathbf{V} \mathbf{Q}^\alpha\|)^2, \tag{7}$$

$G_\alpha$  – постоянная,  $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}\mathbf{I}, [\mathbf{Q}f](t) := \langle \ln t \rangle f(t), \langle \ln t \rangle = \ln(2/t), f \in L_2(0, 1)$ .

Если дополнительно выполнены достаточные условия (6) или (23) (или (21)), то дискретный спектр оператора  $\mathbf{K}$  правее  $\mu = 1$  не пуст.

Наконец, вычислена асимптотика поведения собственной функции, показано ее экспоненциальное убывание.

**ЛЕММА 2.1.** Собственная функция  $u_m$  экспоненциально убывает при  $r \rightarrow \infty$  (в соответствии с (44), (45) вне сингулярных направлений в  $\Omega_1$ ), в противном случае в окрестности сингулярных направлений асимптотика имеет вид (46) (в  $\Omega_1$ ) и зависит от интеграла типа Френеля. Похожая структура асимптотики справедлива в области  $\Omega_{2,3}$ .

Тем самым также установлено существование так называемых сингулярных направлений, в окрестности которых изменяется характер экспоненциального убывания собственной функции.

**2.3. Интегралы Конторовича–Лебедева и сведение к ФР уравнениям.** Мы ищем классическое решение уравнений (1) при  $0 < \varphi < \pi$  в форме интегралов

$$\begin{aligned}
 u_1(r, \varphi) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\pi\nu) K_\nu(\kappa r) \frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos(\Phi_1\nu)} H_1(\nu) d\nu, & \varphi \in [0, \Phi_1], \\
 u_2(r, \varphi) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\pi\nu) K_\nu(\kappa r) \left( \frac{\cos(\nu[\Phi_2 - \varphi])}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} H(\nu) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin(\nu[\Phi_1 - \varphi])}{\sin(\nu[\Phi_1 - \Phi_2])} \tilde{h}(\nu) \right) d\nu, & \varphi \in [\Phi_1, \Phi_2], \\
 u_3(r, \varphi) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\pi\nu) K_\nu(\kappa r) \frac{\cos(\nu[\pi - \varphi])}{\cos(\nu[\pi - \Phi_2])} H_3(\nu) d\nu, & \varphi \in [\Phi_2, \pi],
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где  $\kappa = \sqrt{-E}$ . Представление Конторовича–Лебедева (8) разделяет переменные  $r$  и  $\varphi$ ,  $\nu$  – переменная разделения. Если интегралы равномерно и быстро сходятся, то уравнения выполнены, так как можно проверить, что

$$(\kappa r)^2 \left\{ \frac{d^2}{d(\kappa r)^2} + \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{d\kappa r} - \left( 1 + \frac{\nu^2}{(\kappa r)^2} \right) \right\} K_\nu(\kappa r) u_\nu(\varphi) + \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + \nu^2 \right) u_\nu(\varphi) K_\nu(\kappa r) = 0,$$

где  $u_\nu(\varphi) = \cos(\nu\varphi)$  или  $u_\nu(\varphi) = \sin(\nu\varphi)$ . Мы выбрали подынтегральные выражения в (8) так, что условия Неймана (2) выполнены. Обратимся к краевым условиям (3). Сначала мы действуем формально так, чтобы сформулировать достаточные условия для неизвестных  $H_1(\nu)$ ,  $H(\nu)$ ,  $\tilde{h}(\nu)$  и  $H_3(\nu)$ , т. е. описать подходящий класс функций. Условия непрерывности  $u$  на  $l_{1,2}$  в (3) приводят к равенствам

$$\begin{aligned}
 H_1(\nu) &= H(\nu), \\
 \frac{1}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} H(\nu) + \tilde{h}(\nu) &= H_3(\nu),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

так что только две функции являются независимыми, например  $H(\nu)$  и  $H_3(\nu)$ , тогда как остальные через них выражаются (9). Из условий типа Робэна (3) имеем

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\kappa r} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\Phi_1} - \gamma_1 u_1 \Big|_{\varphi=\Phi_1} = \\
 &= \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu \sin(\pi\nu) \left\{ \frac{K_\nu(\kappa r)}{\kappa r} \left[ H(\nu) \frac{-\nu \sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} + \tilde{h}(\nu) \frac{-\nu}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - H(\nu) \nu \operatorname{tg}(\Phi_1\nu) \right] - \frac{\gamma_1}{\kappa} H_1(\nu) K_\nu(\kappa r) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{K_\nu(z)}{z} = \frac{K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z)}{2\nu}$$

и найдем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu (-\sin(\pi\nu)) \left\{ \frac{K_{\nu+1}(\kappa r) - K_{\nu-1}(\kappa r)}{2} \left[ H(\nu) \left( \frac{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} + \operatorname{tg}(\Phi_1\nu) \right) + \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \tilde{h}(\nu) \frac{1}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} \right] + \frac{2\gamma_1}{\kappa} H(\nu) \frac{K_\nu(\kappa r)}{2} \right\} = \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty+1}^{i\infty+1} d\nu \sin(\pi\nu) K_\nu(\kappa r) h_1(\nu-1) - \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty-1}^{i\infty-1} d\nu \sin(\pi\nu) K_\nu(\kappa r) h_1(\nu+1) - \\ & \quad - \frac{2\gamma_1}{\kappa} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu \sin(\pi\nu) H(\nu) K_\nu(\kappa r) = 0, \end{aligned}$$

где мы заменили переменные интегрирования  $\nu \pm 1 \rightarrow \nu$  и ввели

$$h_1(\nu) := H(\nu) (\operatorname{tg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1]) + \operatorname{tg}(\Phi_1\nu)) + \frac{\tilde{h}(\nu)}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])},$$

где  $\tilde{h}(\nu)$  выражается через  $H(\nu)$  и  $H_3(\nu)$  посредством (9). Деформируем контуры интегрирования на мнимую ось в первых двух интегралах выше, придем к равенству

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu \sin(\pi\nu) K_\nu(\kappa r) \left[ h_1(\nu-1) - h_1(\nu+1) - \frac{2\gamma_1}{\kappa} H(\nu) \right] = 0.$$

В результате заключаем, что если выполнено уравнение

$$h_1(\nu+1) - h_1(\nu-1) + \frac{2\gamma_1}{\kappa} H(\nu) = 0,$$

то справедливо условие Робэна на  $l_1$  в (3). Аналогично, из краевого условия на  $l_2$ , учитывая сказанное выше, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} h_1(\nu+1) - h_1(\nu-1) + \frac{2\gamma_1}{\kappa} H(\nu) &= 0, \\ h_2(\nu+1) - h_2(\nu-1) + \frac{2\gamma_2}{\kappa} H_3(\nu) &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$h_2(\nu) := H_3(\nu) (\operatorname{tg}(\nu[\pi - \Phi_2]) - \operatorname{ctg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])) + \frac{H(\nu)}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])}.$$

Запишем систему (10) в терминах неизвестного 2-вектора  $\mathbf{h}(\nu) = (h_1(\nu), h_2(\nu))^T$ . Мы приходим к уравнению вида (11), которое изучается в разделе 3,

$$\mathbf{h}(\nu+1) - \mathbf{h}(\nu-1) - 2i\Lambda\mathbf{a}\mathbf{W}(\nu)\mathbf{h}(\nu) = \mathbf{0}, \tag{11}$$

где введены обозначения  $\Lambda = \gamma_1/(2\kappa)$  и  $\mathbf{H}(\nu) = (H(\nu), H_3(\nu))^T$ ,

$$\mathbf{T}(\nu) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1]) + \operatorname{tg}(\Phi_1\nu) - \frac{\sec(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} & \frac{1}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} \\ \frac{1}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} & \operatorname{tg}(\nu[\pi - \Phi_2]) - \operatorname{ctg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1]) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

где  $a := \gamma_2/\gamma_1 < 1$ , и

$$\mathbf{W}(\nu) = 2i\mathbf{T}^{-1}(\nu) = \frac{2i}{D(\nu)} \times \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(\nu[\pi - \Phi_2]) - \operatorname{ctg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1]) & \frac{-1}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} \\ \frac{-1}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} & \left( \operatorname{tg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1]) + \operatorname{tg}(\Phi_1\nu) - \frac{\sec(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])}{\sin(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} \right) \end{pmatrix},$$

где

$$D(\nu) := \det \mathbf{T}(\nu) = (\operatorname{tg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1]) + \operatorname{tg}(\Phi_1\nu))(\operatorname{tg}(\nu[\pi - \Phi_2]) - \operatorname{ctg}(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])) - \frac{2 \operatorname{tg}(\nu[\pi - \Phi_2])}{\sin(2\nu[\Phi_2 - \Phi_1])}.$$

Мы говорим, что вектор  $\mathbf{h}(\nu)$  принадлежит классу  $\mathcal{M}$  мероморфных векторов, если его компоненты  $h_j(\nu)$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяют условиям

- $h_j(\nu) = h_j(-\nu)$ ;
- $h_j$  голоморфна в  $\Pi_{1+\delta} \setminus \{\pm 1\}$ ,  $\Pi_{1+\delta} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \nu| < 1 + \delta\}$  для некоторого  $\delta > 0$ ;
- $|h_j(\nu)| < \operatorname{const} |\exp(i\nu[\pi/2 + \delta_0])|$ ,  $\nu \rightarrow i\infty$ ,  $\nu \in \Pi_{1+\delta}$  при  $\delta_0 \in (0, \pi/2)$ .

Далее мы полагаем, что  $\mathbf{h}(\nu)$  принадлежит классу  $\mathcal{M}$ , а потенциал из  $\mathcal{W}$  удовлетворяет оценке  $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(e^{\pm iq_*\nu})$  (у нас  $q_* = 2 \min\{\Phi_2 - \Phi_1, \Phi_1, \pi - \Phi_2\} > 0$ ). Явное описание класса потенциалов  $\mathcal{W}$  мы обсудим в разделе 3.

Решения из класса  $\mathcal{M}$  обеспечат равномерную сходимость интегралов в (8) ввиду асимптотики

$$K_\nu(z) \sim \operatorname{const} \frac{\nu^{-1/2} \cos(\nu[\pi/2 + |\arg(z)|])}{\sin(\pi\nu)}$$

при  $\nu \rightarrow i\infty$  и  $\operatorname{Re}(\nu) = 0$ ,  $|\arg z| \leq \pi/2$ ,  $|z|$  фиксирован. Мы приходим к следующему утверждению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** Пусть  $\mathbf{h}(\cdot)$  принадлежит классу  $\mathcal{M}$  и доставляет нетривиальное решение уравнения (11) для некоторого  $\Lambda$ . Тогда интегралы Конторовича–Лебедева в (8) задают классическое решение задачи (1)–(3) для соответствующего  $E = -\gamma_1^2/4\Lambda^2$ .

Отметим, что условие (4) можно проверить, используя представления Конторовича–Лебедева (см. 5.2.2 в [18]). Однако проверка оценки (5) более сложная и следует из асимптотики, которую мы получим для собственной функции ниже.

### 3. ФР УРАВНЕНИЯ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРОМ И РЕДУКЦИЯ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Изучим системы двух связанных ФР уравнений (11) для неизвестного вектора  $\mathbf{h}(\nu) = (h_1(\nu), h_2(\nu))^T \in \mathcal{M}$ ,  $\Lambda$  – характеристический (вообще говоря, комплексный) параметр<sup>2)</sup>,  $\mathbf{W}(\cdot)$  – потенциал, матрица с мероморфными коэффициентами.

Оказывается, что при определенных условиях на потенциал  $\mathbf{W}$  уравнение имеет нетривиальные решения из указанного класса, причем эти решения существуют лишь для некоторых вещественных значений  $\Lambda$ , образующих дискретное множество  $C_d$ , конечное или бесконечное. По определению мы называем этот дискретный набор множеством характеристических значений  $\Lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , уравнения (11). Соответствующие решения из  $\mathcal{M}$  мы называем собственными вектор-функциями  $\mathbf{h}_m$  уравнения. В дальнейшем мы определим также множество существенных значений  $C_e$  характеристического параметра  $\Lambda$ . Однако основное внимание будет уделено множеству характеристических значений  $C_d$ . Описание множества характеристических значений  $C_d$  и существенного характеристического множества  $C_e$  для уравнения (11), а также соответствующих решений мы называем описанием спектральных свойств уравнения (11). Оказывается, эти множества естественным и каноническим образом связаны со спектром некоторого самосопряженного интегрального оператора  $\mathbf{K}$ .

Рассматривается класс  $\mathcal{W}$  мероморфных потенциалов  $\mathbf{W}(\cdot)$  таких, что

- $\mathbf{W}(\nu) = -\mathbf{W}(-\nu)$  нечетный;
- $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + o(1)$  при  $\nu \rightarrow \pm i\infty$  вдоль мнимой оси;
- $\mathbf{W}(\nu) \sim \mathbf{C}\nu^{-1}$  при  $\nu \rightarrow 0$ , где  $\mathbf{C}$  – некоторая постоянная матрица;
- $\mathbf{W}(it) > 0$  при  $t > 0$ .

Для дальнейшего существенно, что потенциал  $\mathbf{W}$  положителен на положительной части мнимой оси. В приложениях справедлива более сильная оценка  $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(e^{-b|\nu|})$  при  $\nu \rightarrow i\infty$  (или  $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(1/\nu)$ ) вдоль мнимой оси,  $b > 0$ . Следующая лемма используется для получения интегральных уравнений (см. доказательство в [7]) из ФР уравнений.

**ЛЕММА 3.1.** Пусть  $q(\nu)$  голоморфна для  $\nu \in \Pi_\delta$  при  $\delta > 0$  и  $|q(\nu)| \leq c_q e^{-\kappa_* |\nu|}$ ,  $|\nu| \rightarrow \infty$ ,  $\kappa_* > 0$  в этой полосе функция  $q$  нечетна,  $q(\nu) = -q(-\nu)$ , и мероморфна. Тогда четное решение  $s(\cdot)$  уравнений

$$s(\nu \pm 1) - s(-\nu \pm 1) = \pm 2iq(\nu),$$

которое регулярно (голоморфно) в полосе  $\nu \in \Pi_{1+\delta} \setminus \{\pm 1\}$  ( $\nu = 0$  простой полюс функции  $q$ ) и экспоненциально убывает, если  $|\nu| \rightarrow \infty$  в ней, задается выражением

$$s(\nu) = -\frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau q(\tau) \frac{\sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu}, \quad \nu \in \Pi_{1+\delta},$$

при этом  $s(\nu)$  продолжается как мероморфная функция посредством ФР уравнений.

<sup>2)</sup> Имея в виду приложения, удобно выделить постоянную матрицу  $\mathbf{a}$  перед матричным потенциалом.

Применим лемму 3.1 к уравнению (11), принимая во внимание свойства  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{h}$ , получим

$$\mathbf{h}(\nu) = -\frac{\Lambda}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \frac{\sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} \mathbf{a}\mathbf{W}(\tau)\mathbf{h}(\tau), \quad \nu \in \Pi_{1+\delta}. \quad (12)$$

Воспользуемся четностью подынтегрального выражения в (12), сводя интегрирование на полюсь  $[0, i\infty)$ , затем введем новый неизвестный вектор

$$\mathbf{q}(\nu) = \sqrt{\mathbf{W}(\nu)}\mathbf{h}(\nu), \quad \mathbf{W}(\nu) > 0, \quad \nu \in [0, i\infty), \quad (13)$$

и получим искомое уравнение

$$\mathbf{q}(\nu) = -\Lambda \int_0^{i\infty} d\tau \frac{\sin \pi\tau}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} \sqrt{\mathbf{W}(\nu)}\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{W}(\tau)}\mathbf{q}(\tau), \quad (14)$$

где  $\nu \in [0, i\infty)$ .

Процедура восстановления неизвестного мероморфного вектора  $\mathbf{h}(\nu)$  из класса  $\mathcal{M}$  по его значению на полуоси  $[0, i\infty)$  следующая. Пусть имеется интегрируемое (и, значит, непрерывное) решение  $\mathbf{q}(\nu)$  интегрального уравнения (14) на  $[0, i\infty)$  для некоторого  $\Lambda$ , которое экспоненциально убывает на бесконечности. Воспользуемся нечетностью и определим  $\mathbf{q}(\nu)$  на всей мнимой оси. Определив  $\mathbf{h}(\nu)$  на мнимой оси согласно (14), продолжим его в полосу  $\Pi_\delta$  для некоторого  $\delta > 0$ . Интегральное представление (12) позволяет вычислить значения  $\mathbf{h}(\nu)$  в полосе  $\Pi_{1+\delta}$  регулярности. Действительно, вычислив  $\mathbf{h}(\nu)$  в некоторой окрестности мнимой оси, мы убеждаемся, что интеграл в правой части (12) задает голоморфную функцию в полосе  $\Pi_{1+\delta}$ , так как знаменатель не имеет нулей в этой полосе, а интеграл сходится экспоненциально и равномерно по  $\nu$ . (Действительно, сдвигаем контур  $i\mathbb{R}$  в полосу  $\Pi_\delta$  так, что  $h(\nu)$  в левой части (12) голоморфен в полосе  $\Pi_{1+\delta}$ .) Вектор  $\mathbf{h}(\nu)$  продолжается как мероморфная функция на всю плоскость  $\mathbb{C}$  посредством ФР уравнения (11).

*ЛЕММА 3.2. Пусть  $\mathbf{q}$  – интегрируемое на  $[0, i\infty)$  решение интегрального уравнения (14) для некоторого  $\Lambda$ , которое экспоненциально убывает на бесконечности. Тогда существует соответствующее нетривиальное решение  $\mathbf{h}(\cdot) \in \mathcal{M}$  ФР уравнения (11).*

Лемма 3.2 показывает, что необходимо изучать нетривиальные решения интегрального уравнения (14) для некоторого характеристического значения параметра  $\Lambda$ . Для этого удобно преобразовать уравнение к некоторой его форме с интегрированием по конечному отрезку. Введем новую переменную интегрирования и новую неизвестную функцию:

$$x = \frac{1}{\cos(\pi\nu)}, \quad y = \frac{1}{\cos(\pi\tau)}, \quad x \in [0, 1],$$

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{q}(it) \Big|_{t=\frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)}, \quad t > 0.$$

Мы приходим к уравнению

$$\mathbf{r}(x) = \Lambda(\mathbf{K}\mathbf{r})(x), \quad (15)$$

где  $\mathbf{K}$  – интегральный оператор в  $L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ ,

$$(\mathbf{K}\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{x+y} \sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)} \mathbf{r}(y),$$

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(it) \Big|_{t=\frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)}, \quad t > 0.$$

Вместе с характеристическим параметром  $\Lambda$  мы введем спектральный параметр  $\mu = \Lambda^{-1}$  и уравнение

$$(\mathbf{K}\mathbf{r})(x) = \mu \mathbf{r}(x), \quad (16)$$

в  $L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ .

Теперь естественно изучить свойства оператора  $\mathbf{K}$  с симметричным ядром, который может быть представлен в виде

$$\sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)} = \mathbf{a} + \mathbf{o}(1), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

где в приложениях вместо  $\mathbf{o}(1)$  справедлива более сильная оценка вида  $\mathbf{O}(x^b + y^b)$ , где  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,  $b > 0$ , т.е. матрица имеет элементы, убывающие как  $\mathbf{O}(x^b + y^b)$  при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Заметим также, что  $\mathbf{w}(x)$  ведет как  $O(1/\sqrt{1-x})$  при  $x \rightarrow 1$ . Это позволяет утверждать, что верна

**ЛЕММА 3.3.** *Оператор  $\mathbf{K}: L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$  в (16) ограничен и самосопряжен.*

Мы назовем оператор  $\mathbf{K}$  возмущением ограниченного самосопряженного матричного оператора  $\mathbf{M}$ , где  $\mathbf{M}$  – так называемый оператор Мёлера<sup>3)</sup>, определенный в  $L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$  выражением

$$(\mathbf{M}\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{x+y} \mathbf{a} \mathbf{r}(y).$$

Действительно, оператор  $\mathbf{K}$  представим в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V} \quad (17)$$

в соответствии с представлением ядра

$$\frac{\sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)}}{x+y} = \frac{\mathbf{a}}{x+y} + \frac{\mathbf{v}(x, y)}{x+y},$$

где  $\mathbf{v}(x, y) := \sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)} - \mathbf{a} = \mathbf{o}(1)$  (в нашем приложении  $\mathbf{O}(x^b + y^b)$ ) при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ,  $b > 0$ . Интегральный оператор  $\mathbf{V}$  в (17) определен выражением

$$(\mathbf{V}\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{x+y} \mathbf{v}(x, y) \mathbf{r}(y)$$

в  $L_2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$ . В дальнейшем предполагается, что этот оператор  $\mathbf{V}$  принадлежит классу Гильберта–Шмидта  $S_2$ , что обеспечено свойствами функции  $\mathbf{v}(x, y)$ , в частности если  $\mathbf{v}(x, y) = \sqrt{\mathbf{w}(x)} \mathbf{a} \sqrt{\mathbf{w}(y)} - \mathbf{a} = \mathbf{O}(x^b + y^b)$  при  $x, y \rightarrow 0$ .

<sup>3)</sup> Здесь мы следуем терминологии, предложенной Д. Р. Яфаевым.

В приложении А мы изучаем спектральные свойства невозмущенного оператора Мёлера  $\mathbf{M}$  и явно диагоналируем его. Содержание приложения фактически следует из известных формул Мёлера 1881 года [26]. Скалярный оператор  $M$ ,

$$(Mu)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{x+y} u(y),$$

имеет простой абсолютно непрерывный спектр  $\sigma_a(M) = [0, 1]$ , и собственные функции непрерывного спектра найдены явно (см. [27], а также [28]):

$$\mathcal{P}_p(x) := \frac{\sqrt{p \operatorname{th}(\pi p)}}{x} P_{ip-1/2}(1/x),$$

$P_{ip-1/2}(\cdot)$  – функция Лежандра.

Оператор  $\mathbf{K}$  является компактным возмущением оператора Мёлера, что позволяет исследовать его спектральные свойства, которые нам необходимы для изучения ФР уравнений, традиционными методами.

#### 4. СПЕКТР ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА МЁЛЕРА $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V}$ , ДИСКРЕТНАЯ КОМПОНЕНТА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА $\mathbf{K}$ И ЕЕ КОНЕЧНОСТЬ

Напомним, что предполагается, что возмущение  $\mathbf{V}$  принадлежит классу Гильберта–Шмидта  $S_2$  и  $\sigma_e(\mathbf{M}) = [0, 1]$ . Воспользуемся теоремой Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях, в результате приходим к следующему утверждению.

*ЛЕММА 4.1. Существенный спектр  $\sigma_e(\mathbf{K})$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ , если возмущение  $\mathbf{V}$  компактно.*

Из свойств ядра следует, что оператор  $\mathbf{K}$  положительный. Следовательно, он может иметь дискретную компоненту спектра лишь правее  $\sigma_e(\mathbf{K})$ . Существование дискретной компоненты  $\mathbf{K}$  представляет особый интерес, так как каждая точка  $\mu_*$  этой компоненты соответствует существованию нетривиального решения из заданного класса для ФР уравнения (11) для соответствующего  $\Lambda_* = 1/\mu_*$ . В этом разделе мы рассмотрим некоторые достаточные условия, сформулированные в терминах возмущения  $\mathbf{V}$  и, возможно, также с помощью спектральных характеристик оператора  $\mathbf{M}$ . Эти достаточные условия обеспечивают то, что дискретная часть спектра  $\sigma_d(\mathbf{K})$  не пуста.

**4.1. Простое достаточное условие для  $\sigma_d(\mathbf{K}) \neq \emptyset$ .** Найдем такое  $\mathbf{u}$ , что  $(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}} = 1$  ( $\mathcal{H} = L_2([0, 1], \mathbb{C}^2)$ ) и

$$(\mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}} > 1. \tag{18}$$

Неравенство (18) означает, что дискретная компонента спектра не пуста. Идея его проверки проста – мы предложим простой двумерный нормированный вектор, для которого при определенных условиях на потенциал верно неравенство (18). Выбор

такого вектора напрямую связан со специальным видом ядра интегрального оператора  $\mathbf{K}$ . Возьмем нормированный вектор  $\mathbf{u} = C(\mathbf{aw})^{-1/2}\mathbf{u}^0$ , где  $C = \|(\mathbf{aw})^{-1/2}\mathbf{u}^0\|^{-1}$  и  $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{C}^2$  – постоянный вектор. Напомним, что  $\mathbf{w} > 0$ . Замечая, что

$$\sqrt{\mathbf{w}(x)}\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{w}(y)} = (\sqrt{\mathbf{aw}(x)})^* \sqrt{\mathbf{aw}(y)},$$

мы найдем, таким образом,

$$(\mathbf{Ku}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\langle \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0 \rangle_{\mathbb{C}^2}}{x+y} > 1,$$

где  $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{C}^2$  – постоянный вектор с комплексными координатами,  $\mathbf{u}^0 = (r_1 + ig_1, r_2 + ig_2)^T$ , так что предыдущее неравенство записывается в виде

$$\frac{2 \ln 2}{\pi} (r_1^2 + g_1^2 + r_2^2 + g_2^2) > 1. \quad (19)$$

Условие нормировки приобретает форму равенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}} &= ((\mathbf{aw})^{-1}\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0)_{\mathcal{H}} = \\ &= \int_0^1 dx \langle (\mathbf{aw})^{-1}(x)\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0 \rangle = \langle \mathbf{Bu}^0, \mathbf{u}^0 \rangle_{\mathbb{C}^2} = 1, \end{aligned}$$

где элементы  $b_{ik}$  положительной симметричной матрицы  $\mathbf{B} > 0$  таковы:

$$b_{ik} := \int_0^1 dx \{(\mathbf{aw})^{-1}(x)\}_{ik}.$$

Наконец, это условие запишется в виде

$$b_{11}(r_1^2 + g_1^2) + 2b_{12}(r_1r_2 + g_1g_2) + b_{22}(r_2^2 + g_2^2) = 1. \quad (20)$$

Естественно искать такой вектор  $(r_1, g_1, r_2, g_2)^T \in \mathbb{R}^4$ , который доставляет абсолютный максимум левой части (19) при условии (20). Это классическая задача на условный экстремум, которая решается с использованием множителей Лагранжа, в нашем случае одного множителя  $L$ , и введением функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(r_1, g_1, r_2, g_2) = (r_1^2 + g_1^2 + r_2^2 + g_2^2) - L[b_{11}(r_1^2 + g_1^2) + 2b_{12}(r_1r_2 + g_1g_2) + b_{22}(r_2^2 + g_2^2) - 1].$$

Принимая во внимание необходимое условие экстремума для  $\mathcal{L}$  (т. е.  $\nabla \mathcal{L} = 0$ ), которое принимает вид системы линейных уравнений

$$L\mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad L\mathbf{B}\mathbf{g} = \mathbf{g},$$

находим с необходимостью, что  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$  и  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$  должны совпадать с собственным вектором симметричной матрицы  $\mathbf{B} > 0$  в  $\mathbb{R}^2$ ,  $L^{-1} =: \omega$  – спектральный параметр. Каждому из двух положительных собственных значений  $\omega = \omega_{\min}(\mathbf{B})$  или  $\omega = \omega_{\max}(\mathbf{B})$  отвечает собственный вектор. Рассмотрим минимальное собственное число  $\omega = \omega_{\min}$  и соответствующий собственный вектор  $\mathbf{e}$ . Чтобы получить наибольшее значение в левой части (19), мы возьмем  $\mathbf{r} = \mathbf{e}$  и  $\mathbf{g} = \mathbf{e}$ , затем подставим в условие (20). Таким образом, из условия нормировки (20) имеем  $2\langle \mathbf{B}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$  или

$$\omega_{\min}(\mathbf{B})(r_1^2 + g_1^2 + r_2^2 + g_2^2) = 1.$$

В результате достаточное условие (19) принимает вид

$$\frac{2 \ln 2}{\pi} > \omega_{\min}(\mathbf{B}). \tag{21}$$

Условие (21) определяется матрицей  $\mathbf{B}$ , так что на самом деле управляется потенциалом  $\mathbf{W}$ . Аналог этого условия в “скалярном” случае одного уравнения был использован в работе [7], где оно было численно проверено для конкретного потенциала в рассматриваемой задаче. Далее мы воспользуемся условием (21) на примере мероморфного потенциала, зависящего от параметров рассматриваемой задачи, и также проверим его численно.

**4.2. Альтернативное достаточное условие для  $\sigma_d(\mathbf{K}) \neq \emptyset$ .** Как и в п. 4.1, мы начнем с условия (18) и подставим нормированную последовательность  $\mathbf{u}_n$ , предполагая, что для некоторого  $n$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n$  это условие выполнено. Это будет означать, что дискретная компонента не пуста. Для построения такой последовательности рассмотрим сингулярную последовательность (Вейля)  $\mathbf{u}_n \in \mathcal{H}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , соответствующую точке  $\mu = 1$  существенного спектра оператора Мёлера  $\mathbf{M}$ , например  $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ ,  $\mathbf{u}_n$  – ортогональная последовательность, т.е.  $\mathbf{u}_n \rightarrow 0$  (слабо), такая что  $\|\mathbf{M}\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Очевидно, мы получим

$$([\mathbf{M} + \mathbf{V}]\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \|\mathbf{u}_n\|^2 + ([\mathbf{M} + \mathbf{V} - \mathbf{I}]\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = 1 + ([\mathbf{M} + \mathbf{V} - \mathbf{I}]\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)$$

и из (18) заключаем, что неравенство

$$([\mathbf{M} + \mathbf{V} - \mathbf{I}]\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) > 0, \tag{22}$$

справедливое для некоторого  $n$ , является достаточным условием непустоты дискретного спектра при  $\mu > 1$ . Важно, что, имея разложение единицы  $\mathbf{E}_t$  для оператора Мёлера  $\mathbf{M}$ , можно построить сингулярную последовательность явно.

Рассмотрим числовую последовательность  $\varepsilon_n > 0$  ( $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$ ),  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  (например,  $\varepsilon_n = 1/n$ ) и

$$\delta_n = (1 - \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_{n+1}), \quad |\delta_n| = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Выберем ортонормированную последовательность  $\mathbf{u}_n$  так, что  $\mathbf{u}_n \in \mathbf{E}(\delta_n)\mathcal{H}$ , заметив, что  $\dim \mathbf{E}(\delta_n)\mathcal{H} = \infty$ , где  $\mathbf{E}(\delta) = \mathbf{E}_{b-0} - \mathbf{E}_{a+0}$ ,  $\delta = (a, b)$ . Используя спектральную теорему, находим

$$([\mathbf{M} - \mathbf{I}]\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - 1) d(\mathbf{E}_t \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \int_{\delta_n}^{\infty} (t - 1) d(\mathbf{E}_t \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n),$$

так как  $\mathbf{E}_t \mathbf{u}_n = \mathbf{E}_t \mathbf{E}(\delta_n) \mathbf{h} / \|\mathbf{E}(\delta_n) \mathbf{h}\| = 0$  при  $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$  и  $\delta_n \cap (-\infty, t) = \emptyset$ , напомним также, что  $\sigma(\mathbf{M}) = [0, 1]$ . Имеем

$$([\mathbf{V} + \mathbf{M} - \mathbf{I}]\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \bar{\mathbf{u}}_n(x) \int_0^1 dy \frac{\mathbf{v}(x, y)}{y + x} \mathbf{u}_n(y) - \varepsilon_n (\mathbf{E}(\delta_n) \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n),$$

замечая, что  $1 - t \leq \varepsilon_n$  при  $t \in [1 - \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_{n+1}]$  и

$$- \int_{\delta_n} (t - 1) d(\mathbf{E}_t \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \leq \varepsilon_n (\mathbf{E}(\delta_n) \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \varepsilon_n (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \varepsilon_n.$$

С учетом (22) мы приходим к теореме 2.1 из п. 2.2.

Введем

$$\mathbf{Q}_n(x, y) = \mathbf{v}(x, y)\mathbf{u}_n(y) - \varepsilon_n \pi(x + y)\mathbf{u}_n(x).$$

Условие (6) может быть записано в эквивалентном виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\langle \mathbf{Q}_n(x, y), \mathbf{u}_n(x) \rangle_{\mathbb{C}^2}}{y + x} > 0 \quad (23)$$

для некоторого  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mathbf{u}_n$  – последовательность Вейля, отвечающая  $\mu = 1$ ,  $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Условия (22), (21) или (19) являются достаточными для существования дискретной компоненты спектра справа от  $[0, 1]$ . Заметим, что эти условия зависят от потенциала  $\sqrt{\mathbf{w}(x)\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{w}(y)} - \mathbf{a}$  возмущения, а также от сингулярной последовательности  $\mathbf{u}_n$ , в то время как она может быть эффективно построена и ввиду того, что спектральная мера оператора Мёлера  $\mathbf{M}$  известна. После некоторых вычислений мы находим последовательность

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{z}_n / \|\mathbf{z}_n\|,$$

которая ортономирована, причем  $\mathbf{z}_n = \mathbf{E}(\delta_n)\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} = (h^1, h^2)^\top \in \mathcal{H}$  и

$$\mathbf{z}_n(x) = (z_n^1(x), z_n^2(x))^\top,$$

где

$$z_n^1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{p_{n+1}}^{p_n} dp \mathcal{P}_p(x)(h^1)^*(p), \quad (24)$$

$$z_n^2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{p_{n+1/a}}^{p_n/a} dp \mathcal{P}_p(x)(h^2)^*(p), \quad (25)$$

причем

$$p_n = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1}{[1 - \varepsilon_n]} + \sqrt{\frac{1}{[1 - \varepsilon_n]^2} - 1} \right) = O(\sqrt{\varepsilon_n})$$

и  $h^*(\cdot)$  – модифицированное преобразование Мёлера–Фока для  $h(\cdot)$  (см. приложение А).

Заметим, что достаточные условия определяются потенциалом  $\mathbf{w}$ , который зависит от параметров задачи. В нашем примере ниже это  $a = \gamma_2/\gamma_1$ ,  $\Phi_1, \Phi_2$ . Естественно ожидать, это проверено численно, что существует область значений этих параметров такая, что дискретный спектр оператора  $\mathbf{K}$  действительно существует. В похожей “скалярной” задаче [7] мы также проверили аналогичное достаточное условие численно для некоторой области изменения параметров.

### 4.3. Принцип Бирмана–Швингера и конечность дискретного спектра.

Обсудим теперь вопрос о том, когда дискретный спектр конечен. Подход, используемый в этом разделе, вполне аналогичен подходу, предложенному для возмущений оператора Карлемана операторами Ханкеля в работе [25], и основан на применении принципа Бирмана–Швингера. В нашем случае этот принцип принимает вид следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть  $M_0$  – ограниченный самосопряженный оператор такой, что  $M_0 \leq 1$ . Пусть  $V_0 \geq 0$  и  $V_0 \in S_\infty$  (т.е. компактен). Тогда полное число собственных (т.е. с учетом кратности) значений оператора  $K_0 = M_0 + V_0$ , которые больше  $\mu$  ( $\mu \geq 1$ ), равно полному числу собственных чисел оператора  $B(\mu) = V_0^{1/2}[\mu - M_0]^{-1}V_0^{1/2}$ .

Используя представление для резольвенты (50), имеем

$$\mathbf{B}(\mu) = \mu^{-1}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^{1/2}\mathbf{A}_\mu\mathbf{V}^{1/2}). \tag{26}$$

Введем оператор

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{I}, \quad [Qf](t) = \langle \ln t \rangle f(t),$$

где  $\langle \ln t \rangle = \ln(2/t)$ ,  $f \in L_2(0, 1)$ . Естественно определить  $\mathbf{Q}^\beta = Q^\beta\mathbf{I}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Согласно (50) оператор  $\mathbf{A}_1$  является интегральным оператором с ядром  $\mathbf{a}(x, y; 1)$ , допускающим оценку (51) с  $\mu = 1$ . Справедлива

ЛЕММА 4.2. Пусть  $\alpha > 3/2$ , тогда

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} \|\mathbf{Q}^{-\alpha}(\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_1)\mathbf{Q}^{-\alpha}\|_2 = 0 \tag{27}$$

в операторной норме Гильберта–Шмидта.

Для доказательства надо проверить, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} \int_0^1 \int_0^1 \langle \ln t \rangle^{-2\alpha} \|\mathbf{a}(x, t, \mu) - \mathbf{a}(x, t, 1)\|_{\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2}^2 \langle \ln x \rangle^{-2\alpha} dx dt = 0.$$

Согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла достаточно убедиться в существовании суммируемой мажоранты подынтегрального выражения. Согласно оценке (51) мажоранта имеет вид

$$C \langle \ln t \rangle^{-2\alpha} \frac{\langle \ln t \rangle^2 \langle \log x \rangle^2}{tx} \langle \ln x \rangle^{-2\alpha}$$

и, очевидно, принадлежит  $L_1((0, 1) \times (0, 1))$  при  $2\alpha > 3$ . Из леммы 4.2 следует

ЛЕММА 4.3. Пусть  $\alpha > 3/2$ , самосопряженный оператор  $\mathbf{V} \geq 0$ ,  $\mathbf{V} \in S_2$ , принадлежит классу Гильберта–Шмидта, кроме того, оператор  $\mathbf{Q}^\alpha\mathbf{V}\mathbf{Q}^\alpha \in S_\infty$  компактен. Тогда оператор  $\mathbf{B}(\mu)$  (26) имеет предел

$$\mathbf{B}(1) = \mathbf{V} + \mathbf{V}^{1/2}\mathbf{A}_1\mathbf{V}^{1/2} \tag{28}$$

по норме Гильберта–Шмидта  $\|\cdot\|_2$  при  $\mu \rightarrow 1$ .

Доказательство получается из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mu) - \mathbf{B}(1)\|_2^2 &= \|\mathbf{V}^{1/2}\mathbf{Q}^\alpha\mathbf{Q}^{-\alpha}(\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_1)\mathbf{Q}^{-\alpha}\mathbf{Q}^\alpha\mathbf{V}^{1/2}\|_2^2 = \\ &= \|\mathbf{Q}^\alpha\mathbf{V}\mathbf{Q}^\alpha\mathbf{Q}^{-\alpha}(\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_1)\mathbf{Q}^{-\alpha}\|_2^2, \end{aligned}$$

где  $\|A\|_2^2 = \langle A, A \rangle_{S_2}$ ,  $\langle A, B \rangle_{S_2} := \text{Tr}(B^*A) = \text{Tr}(AB^*)$ , и леммы 4.2.

Пусть  $N(\mu)$  – полное количество собственных чисел оператора  $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{V}$ , находящихся правее  $\mu$ ,  $\mu \geq 1$ . Из принципа Бирмана–Швингера мы получаем, что  $N(\mu) \leq \|\mathbf{B}(\mu)\|_2^2$ , тогда лемма 4.3 приводит к оценке

$$N(1) \leq \|\mathbf{B}(1)\|_2^2.$$

Далее, используя (28), находим

$$\|\mathbf{B}(1)\|_2 \leq (\|\mathbf{V}\|_2 + \|\mathbf{Q}^\alpha \mathbf{V} \mathbf{Q}^\alpha\| \|\mathbf{Q}^{-\alpha} \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{-\alpha}\|).$$

Воспользуемся свойствами ядра  $\mathbf{a}(x, t, 1)$ , введем

$$G_\alpha^2 := \int_0^1 \int_0^1 \langle \ln t \rangle^{-2\alpha} \|\mathbf{a}(x, t, 1)\|_{\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2}^2 \langle \ln x \rangle^{-2\alpha} dx dt.$$

Это приводит к оценке

$$N(1) \leq (\|\mathbf{V}\|_2 + G_\alpha \|\mathbf{Q}^\alpha \mathbf{V} \mathbf{Q}^\alpha\|)^2 \quad (29)$$

и к теореме 2.2, сформулированной в п. 2.2.

Заметим, что если вместо условия  $\alpha > 3/2$  в теореме 2.2 взять  $\alpha \leq 3/2$ , то спектр правее  $\mu = 1$  бесконечен.

## 5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФР УРАВНЕНИЯ (11)

Мы применим результаты, полученные выше для возмущенного оператора Мёлера  $\mathbf{M} + \mathbf{V}$ , к системе ФР уравнений. Предположим теперь, что одно из достаточных условий (23) или (21) (см. также (6)) выполнено и  $\mu_m = \Lambda_m^{-1} \in \sigma_d(\mathbf{M} + \mathbf{V})$  – собственное число, отвечающее собственной функции  $\mathbf{r}_m(x)$ . Тогда соответствующее решение  $\mathbf{h}_m(\nu) = \mathbf{W}^{-1/2}(\nu) \mathbf{r}_m(x)|_{x=1/\cos(\pi\nu)}$  (см. (13)) удовлетворяет уравнению (12) для  $\Lambda = \Lambda_m$ . Более того, как было описано выше, решение  $\mathbf{h}_m$  продолжается как мероморфная функция, является решением уравнения (11) и допускает оценку

$$\int_0^{i\infty} |\sin \pi \tau| \|\sqrt{\mathbf{W}(\tau)} \mathbf{h}_m(\tau)\|_{\mathbb{C}^2}^2 |d\tau| < \infty. \quad (30)$$

Здесь мы также покажем, что вместе с оценкой (30) решение  $\mathbf{h}_m$  удовлетворяет вдоль мнимой оси более точной оценке

$$\mathbf{h}_m(\nu) = O(e^{i\nu[\pi - \tau_m]}), \quad \nu \rightarrow i\infty, \quad (31)$$

где  $\tau_m \in (0, \pi/2)$  однозначно находится из уравнения  $\sin \tau_m = \Lambda_m$ . Асимптотическая оценка (31) используется далее для получения асимптотики собственной функции оператора  $A_s$ .

Воспользуемся преобразованием Фурье вдоль мнимой оси

$$\chi(\zeta) = \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} h(\nu) d\nu, \quad h(\nu) = -\frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-i\zeta\nu} \chi(\zeta) d\zeta$$

и учтем уравнение (11). Для преобразования Фурье  $\mathbf{H}(\cdot)$  от  $\mathbf{h}(\cdot)$  получаем

$$[\sin \zeta \mathbf{I} - \Lambda \mathbf{a}] \mathbf{H}(\zeta) + \Lambda \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} [\mathbf{a} \mathbf{W}(\nu) + \mathbf{a}] \mathbf{h}(\nu) d\nu = 0,$$

затем, напоминая, что  $\Lambda = \Lambda_m \in (0, 1)$ , введем  $\tau_m \in (0, \pi/2)$ ,  $\sin \tau_m := \Lambda_m$  и придем к равенству

$$\mathbf{H}(\zeta) = -\sin \tau_m [\sin \zeta \mathbf{I} - \sin \tau_m \mathbf{a}]^{-1} \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} [\mathbf{a}\mathbf{W}(\nu) + \mathbf{a}]\mathbf{h}(\nu) d\nu. \tag{32}$$

Представление (32) позволяет определить полосу на комплексной плоскости  $\zeta$ , где  $\mathbf{H}(\zeta)$  – голоморфная функция. Нам известно, что  $\mathbf{h}(\nu)$  допускает оценку  $|\mathbf{h}(\nu)| \leq C e^{-\pi|\nu|/2}$  на мнимой оси при  $\nu \rightarrow \pm i\infty$ , означающую, что функция  $\mathbf{H}(\zeta)$  голоморфна в полосе  $\Pi(-\pi/2, \pi/2) := \{\zeta \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \text{Re}(\zeta) < \pi/2\}$ . Наша цель состоит в том, чтобы показать, что она голоморфна в некоторой более широкой полосе, а именно в  $\Pi(-\pi + \tau_m, \pi - \tau_m)$ , где  $\tau_m \in (0, \pi/2)$  определено выше. Отметим, что  $\mathbf{H}(\zeta)$  четно, так как  $\mathbf{h}(\nu)$  четно. В результате достаточно указать полосу регулярности интеграла в правой части (32) только для  $\text{Re}(\zeta) > 0$ . Рассмотрим правую часть представления (32). Очевидно, что матрица  $[\sin \zeta \mathbf{I} - \sin \tau_m \mathbf{a}]^{-1}$  имеет простые полюсы в  $\zeta = \pi - \tau_m$  для первой строки и в  $\zeta = \pi - t_m$  для второй строки, где  $\sin t_m = a \sin \tau_m$  и  $t_m \in (0, \pi/2)$ ,  $t_m \leq \tau_m$ . Заметим, что эти полюсы являются ближайшими к мнимой оси для этого множителя в правой части представления (32). Теперь обратимся к интегралу в правой части (32). Оказывается, что он голоморфен в более широкой полосе, чем  $\Pi(-[\pi - \tau_m], \pi - \tau_m)$ . Для проверки этого воспользуемся представлением ( $\text{Re}(\zeta) > 0$ ) для

$$\begin{aligned} \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} [\mathbf{a}\mathbf{W}(\nu) + \mathbf{a}]\mathbf{h}(\nu) d\nu &= \\ &= \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} [\mathbf{a}\mathbf{W}(\nu) + ia \operatorname{tg}(b\nu)]\mathbf{h}(\nu) d\nu + \\ &+ \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} [-ia \operatorname{tg}(b\nu) + \mathbf{a} \operatorname{sign}(i\nu)]\mathbf{h}(\nu) d\nu + \\ &+ \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} [-\mathbf{a} \operatorname{sign}(i\nu) + \mathbf{a}]\mathbf{h}(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

В последнем слагаемом интегрирование идет вдоль  $i\mathbb{R}_+$ , так как  $[-\mathbf{a} \operatorname{sign}(i\nu) + \mathbf{a}] = 0$  на отрицательной части мнимой оси, поэтому интеграл голоморфен при  $\text{Re}(\zeta) > 0$ . Считая, что верна асимптотика  $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(e^{\pm iq_*\nu})$  (в нашем примере ниже  $q_* = 2 \min\{\Phi_2 - \Phi_1, \Phi_1, \pi - \Phi_2\} > 0$ ) при  $\nu \rightarrow \pm i\infty$  вдоль мнимой оси, находим, что первый интеграл регулярен в полосе  $\Pi(-\pi + \tau_m - q_*, \pi - \tau_m + q_*)$ ; мы полагаем, что  $b > q_*$ . Если взять  $b > 0$  достаточно большим, находим, что второй интеграл голоморфен в  $\Pi(-[2b + \pi - \tau_m], 2b + \pi - \tau_m)$ . Мы видим, что  $\mathbf{H}(\cdot)$  – голоморфная функция в  $\Pi(-\pi + \tau_m, \pi - \tau_m)$ , тогда, используя обратное преобразование Фурье, получаем, что справедлива следующая лемма.

**ЛЕММА 5.1.** *Вектор  $\mathbf{H}(\cdot)$  голоморфен в полосе  $\Pi(-\pi + \tau_m, \pi - \tau_m)$ , тогда  $\mathbf{h}(\nu)$  имеет асимптотику*

$$\mathbf{h}(\nu) = O(e^{i\nu[\pi - \tau_m]}), \quad \nu \rightarrow i\infty,$$

в окрестности мнимой оси, если  $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(e^{iq_*\nu})$ ,  $q_* > 0$ .

Заметим, что лемма 5.1 справедлива и при ослаблении ограничений на поведение потенциала на бесконечности, например если  $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(1/\nu)$ . Также верна

оценка  $\|\mathbf{H}(\zeta)\| < Ce^{-\alpha_0|\zeta|}$ ,  $\alpha_0 > 1$  и  $\text{Im}(\zeta) \rightarrow \infty$ , так как функция  $\mathbf{h}$  голоморфна в полосе  $\Pi(-1 - \delta, 1 + \delta)$ .

Опишем теперь характеристическое множество  $C_d \cup C_e$  значений  $\Lambda$  для уравнения (11), т. е. таких значений  $\Lambda$ , для которых уравнение имеет нетривиальное решение из соответствующего класса. Множество характеристических значений  $C_d$  не пусто и конечно тогда и только тогда, когда это верно для  $\sigma_d(\mathbf{K})$ . Утверждения из предыдущих разделов описывают достаточные условия для этого<sup>4)</sup>. По определению  $\Lambda_m = 1/\mu_m$  принадлежит множеству  $C_d$  характеристических значений уравнения (11), если  $\mu_m = (\sin \tau_m)^{-1} \in \sigma_d(\mathbf{K})$ . Очевидно, что  $C_d \subset [0, 1]$ . Аналогично  $\Lambda \in C_e = [1, \infty)$ , т. е. по определению принадлежит существенному характеристическому множеству, если  $\mu = \Lambda^{-1} \in \sigma_e(\mathbf{K}) = [0, 1]$ , где  $\mathbf{M} + \mathbf{V}$  – возмущение оператора Мёлера, связанное с уравнением (11) с потенциалом  $\mathbf{W} \in \mathcal{W}$ . В этом случае имеем  $|H(\nu)| < \text{const} |e^{i\nu\pi/2}|$ ,  $\nu \rightarrow i\infty$ ,  $\nu \in \Pi_{1+\delta}$ . Используя результаты предыдущих разделов, приходим к следующему утверждению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1.** *Множество  $C_d$ , образованное характеристическими значениями уравнения (11), не является пустым, если потенциал  $\mathbf{w}(x) = \mathbf{W}|_{x=1/\cos \pi\nu}$  (и потенциал  $\mathbf{v}(x, y) := \sqrt{\mathbf{w}(x)}\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{w}(y)} - \mathbf{a}$ ) удовлетворяет достаточным условиям (21) или (23), (6). В условиях теоремы 2.2 это множество конечно. Для соответствующих решений верны оценки (31), и решения принадлежат классу  $\mathcal{M}$ .*

**5.1. Разрешимость ФР уравнения для характеристических значений и собственные числа оператора  $A_s$ .** Воспользуемся достаточным условием существования характеристических чисел уравнения (11), полученным выше, и убедимся в его справедливости для некоторой области параметров. Условие (21) задается матрицей  $\mathbf{B}$ , так что на самом деле потенциалом  $\mathbf{W}$ . Аналог данного условия в “скалярном” случае использовался в работе [7], где оно было численно проверено для некоторой области параметров задачи.

Таблица 1. Значения  $F(\Phi_1) = 2 \ln 2/\pi - \omega_{\min}(\mathbf{B}[\Phi_1])$ . Дискретный спектр существует при  $F(\Phi_1) > 0$  в соответствии с условием (21). Например,  $a := \gamma_2/\gamma_1 = 0.5$ ,  $\Phi_2 = 2\pi/3 \approx 2.094$  (см. рис. 1).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Phi_1$	1.885	1.676	1.466	1.257	1.047	0.8378	0.5236	0.3142	0.1047
$F(\Phi_1)$	0.0506	0.0299	0.0125	-0.0008	-0.0092	-0.012	-0.0043	0.0092	0.029

Аналогичная проверка достаточного условия (21) для потенциала  $\mathbf{W}(\nu)$  представлена в табл. 1. Показаны результаты вычислений величины  $F(\Phi_1) = 2 \ln 2/\pi - \omega_{\min}(\mathbf{B}[\Phi_1])$  в зависимости от значения  $\Phi_1$ , причем положительным значениям отвечает случай, когда дискретная компонента  $\sigma_d(K)$  не пуста. Параметр  $\Phi_2 = 2\pi/3$  фиксирован и  $a = 0.5$ . Очевидно, что имеется область значений  $\Phi_1$ , для которых условие (21) не выполнено, т. е.  $F(\Phi_1) < 0$ . Таким образом, существует набор значений  $\Lambda_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_l$  (в нашем случае конечный в соответствии с теоремой 2.2,

<sup>4)</sup> Решения (11), которые отвечают  $\Lambda = \mu^{-1}$  и  $\mu \in \sigma_e(M + V)$ , т. е. существенному спектру, также могут быть описаны.

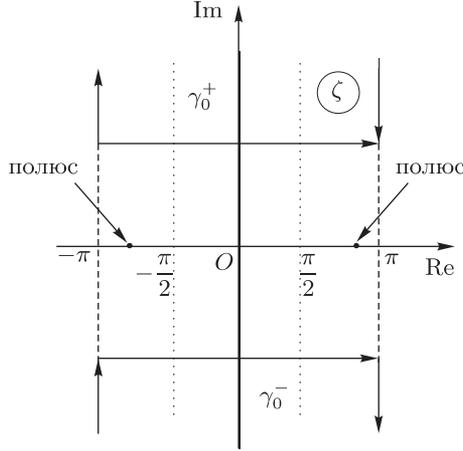


Рис. 2. Контур интегрирования  $\gamma_0 = \gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$  и особенности.

примененной к потенциалу  $\mathbf{W}(\nu)$ ), и определены собственные числа  $E_m$  оператора  $A_s$ ,

$$E_m = - \left[ \frac{\gamma_1}{2\Lambda_m} \right]^2.$$

Мы переходим к изучению асимптотики собственной функции оператора  $A_s$ , отвечающей собственному числу  $E_m$ .

## 6. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

**6.1. Интегральные представления Зоммерфельда для собственных функций оператора  $A_s$ .** Для проверки того, что представление (8) является собственной функцией, изучим его поведение при  $r \rightarrow \infty$ . Вычислив асимптотику, мы покажем, что имеется экспоненциальное убывание. Однако прямая замена функции Макдональда ее асимптотикой под интегралом  $K_\nu(\kappa r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa r}$  приводит к расходимости интеграла, так что такой прямой путь не приводит к результату. Вместо этого мы воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда

$$K_\nu(\kappa r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} \frac{\sin \nu \zeta}{\sin \pi \nu},$$

где контур интегрирования показан на рис. 2, и подставим его в интеграл, затем поменяем порядок интегрирования. Мы получаем в  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

$$\begin{aligned} u_{1m}(r, \varphi) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa_m r \cos \zeta} F_1(\zeta, \varphi), \\ u_{2m}(r, \varphi) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa_m r \cos \zeta} F_2(\zeta, \varphi), \\ u_{3m}(r, \varphi) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa_m r \cos \zeta} F_3(\zeta, \varphi), \end{aligned} \tag{33}$$

углы имеют значения  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2 - \Phi_1$ ,  $\pi - \Phi_2$  соответственно и

$$\begin{aligned} F_1(\zeta, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\zeta\nu) \frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos(\Phi_1\nu)} H_{1m}(\nu) d\nu, \\ F_2(\zeta, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\zeta\nu) \left( \frac{\cos(\nu[\Phi_2 - \varphi])}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} H_m(\nu) d\nu + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\nu[\Phi_1 - \varphi])}{\sin(\nu[\Phi_1 - \Phi_2])} \tilde{h}_m(\nu) \right) d\nu, \\ F_3(\zeta, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \sin(\zeta\nu) \frac{\cos(\nu[\pi - \varphi])}{\cos(\nu[\pi - \Phi_2])} H_{3m}(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (34)$$

Мы будем опускать индекс  $m$  в обозначениях, если это не ведет к неопределенности.

Мы изучаем асимптотическое поведение интегралов Зоммерфельда (33), считая, что подынтегральные выражения в (34) известны посредством решения ФР уравнений (11). Идея такого исследования традиционна. В рамках метода перевала контур интегрирования  $\gamma_0$  в (33) следует продеформировать в контуры наибоыстрейшего спуска  $\gamma_0^{\pm\pi} = \{\zeta: \operatorname{Re}(\zeta) = \pm\pi\}$ . В процессе такой деформации могут быть пересечены особенности подынтегрального выражения (полюсы), которые дают вклад в асимптотику вместе с точками перевала  $\zeta = \pm\pi$ . Вследствие этого необходимо изучить поведение функций  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  на комплексной плоскости  $\zeta$ , в частности найти особенности, которые захватываются в процессе деформации контура.

**6.2. Аналитические свойства  $F_1(\zeta, \varphi)$ ,  $F_2(\zeta, \varphi)$ ,  $F_3(\zeta, \varphi)$ .** Удобно преобразовать интегральные представления (34), начиная с  $F_1(\zeta, \varphi)$ ,

$$\begin{aligned} F_1(\zeta, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\nu[\zeta + \varphi])}{\cos(\Phi_1\nu)} + \frac{\sin(\nu[\zeta - \varphi])}{\cos(\Phi_1\nu)} \right) H_1(\nu) d\nu = \\ &= f_1(\zeta + \varphi) + f_1(\zeta - \varphi), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\sin(\nu\zeta)}{\cos(\Phi_1\nu)} H_1(\nu) d\nu = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{i\nu\zeta}}{i \cos(\Phi_1\nu)} H_1(\nu) d\nu \quad (36)$$

и функция  $f_1(z)$  нечетна,  $f_1(z) = -f_1(-z)$ . Таким же образом мы находим

$$\begin{aligned} F_3(\zeta, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\nu[\zeta + (\pi - \varphi)])}{\cos(\nu[\pi - \Phi_2])} + \frac{\sin(\nu[\zeta - (\pi - \varphi)])}{\cos(\nu[\pi - \Phi_2])} \right) H_3(\nu) d\nu = \\ &= f_3(\zeta + [\pi - \varphi]) + f_3(\zeta - [\pi - \varphi]), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$f_3(\zeta) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\sin(\nu\zeta)}{\cos(\nu[\pi - \Phi_2])} H_3(\nu) d\nu = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{i\nu\zeta}}{i \cos(\nu[\pi - \Phi_2])} H_3(\nu) d\nu \quad (38)$$

и функция  $f_3(z)$  нечетна,  $f_3(z) = -f_3(-z)$ . Мы также имеем

$$\begin{aligned} F_2(\zeta, \varphi) &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu \sin(\nu\zeta) (\cos(\nu\varphi) Q_1(\nu) + \sin(\nu\varphi) i Q_2(\nu)) = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu \sin(\nu\zeta) e^{i\nu\varphi} (Q_1(\nu) + Q_2(\nu)), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$Q_1(\nu) = \frac{\cos(\nu\Phi_2)}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} H(\nu) + \frac{\sin(\nu\Phi_1)}{\sin(\nu[\Phi_1 - \Phi_2])} \tilde{h}(\nu),$$

$$Q_2(\nu) = \frac{1}{i} \left( \frac{\sin(\nu\Phi_2)}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} H(\nu) - \frac{\cos(\nu\Phi_1)}{\sin(\nu[\Phi_1 - \Phi_2])} \tilde{h}(\nu) \right).$$

Из выражения (39) получаем

$$F_2(\zeta, \varphi) = f_2(\zeta + \varphi) - f_2(-\zeta + \varphi),$$

где

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\zeta} \frac{1}{i} (Q_1(\nu) + Q_2(\nu)) d\nu. \tag{40}$$

Из представлений (35)–(40) очевидно, что функции  $f_1, f_2, f_3$  являются преобразованиями Фурье вдоль мнимой оси некоторых мероморфных функций на комплексной плоскости  $\nu$  и мероморфны. В результате асимптотики  $H_1, H, H_3, \tilde{h}$  при  $\nu \rightarrow i\infty$  связаны с положением особенностей (полюсов) функций  $f_1, f_2, f_3$ . Как отмечалось выше, полюсы  $f_1, f_2, f_3$  могут дать вклад в асимптотику. Из (33) имеем

$$u_1(r, \varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} (f_1(\zeta + \varphi) - f_1(-\zeta + \varphi)), \quad \varphi \in [0, \Phi_1],$$

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} (f_2(\zeta + \varphi) - f_2(-\zeta + \varphi)), \quad \varphi \in [\Phi_1, \Phi_2], \tag{41}$$

$$u_3(r, \varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} (f_3(\zeta + [\pi - \varphi]) - f_3(-\zeta + [\pi - \varphi])), \quad \varphi \in [\Phi_2, \pi].$$

Для описания особенностей функций  $f_1, f_2$  и  $f_3$  в (36), (38), (40) мы сначала найдем соответствующие полюсы на комплексной плоскости, где эти мероморфные функции голоморфны. Начнем с вычисления старших членов асимптотик  $H_1, H, H_3, \tilde{h}$  при  $\nu \rightarrow i\infty$ . Это можно сделать с помощью асимптотик  $h_1, h_2$ , которые являются решениями уравнения (11), вспоминая, что эти решения напрямую задают  $H_1, H, H_3, \tilde{h}$  явными линейными соотношениями (9). Из этих формул находим асимптотики при  $\nu \rightarrow i\infty$ :

$$H_m(\nu) = O(e^{i\nu[\pi - \tau_m]}),$$

$$H_{1m}(\nu) = O(e^{i\nu[\pi - \tau_m]}),$$

$$H_{3m}(\nu) = O(e^{i\nu[\pi - \tau_m]}),$$

$$\tilde{h}_m(\nu) = O(e^{i\nu[\pi - \tau_m]})$$

в полосе  $\Pi(-\delta, \delta)$  для некоторого  $\delta > 0$ . Примем во внимание, что мероморфные функции  $f_1, f_2$  и  $f_3$  связаны с  $H_1, H, H_3, \tilde{h}$  преобразованием типа Фурье (36), (38), (40), тогда из леммы 5.1 мы видим, что справедлива

**ЛЕММА 6.1.** Мероморфные функции  $f_1, f_2$  и  $f_3$  голоморфны в полосах  $\Pi(-[\pi - \tau_m + \Phi_1], \pi - \tau_m + \Phi_1), \Pi(-[\pi - \tau_m + \Phi_1], \pi - \tau_m + \Phi_2), \Pi(-[\pi - \tau_m + \pi - \Phi_2], \pi - \tau_m + \pi - \Phi_2)$  соответственно на комплексной плоскости  $\zeta$ .

Заметим, что  $f_2$  имеет представление в полосе  $\Pi(-[\pi - \tau_m] + \Phi_1, [\pi - \tau_m] + \Phi_2)$ :

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{4i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{i} \left( \frac{H(\nu)e^{i\nu[\zeta - \Phi_2]}}{\cos(\nu[\Phi_2 - \Phi_1])} + \frac{i\tilde{h}(\nu)e^{i\nu[\zeta - \Phi_1]}}{\sin(\nu[\Phi_1 - \Phi_2])} \right) d\nu.$$

Из леммы 6.1 заключаем, что  $f_1(\zeta)$  имеет полюсы в точках  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \Phi_1]$ ,  $f_3(\zeta)$  – в  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \pi - \Phi_2]$ , которые являются ближайшими к мнимой оси особенностями, тогда как  $f_2(\zeta)$  имеет такие полюсы в точках  $\zeta = -[\pi - \tau_m] + \Phi_1$  и  $\zeta = [\pi - \tau_m] + \Phi_2$ . Напомним, что в полосах между этими полюсами, параллельных мнимой оси, функции  $f_1, f_2, f_3$  регулярны (голоморфны). Остальные полюсы также вещественны.

Дальнейшие конструкции и вывод функциональных уравнений Малюжинца в нашей задаче вполне аналогичны предложенным в работе [7]. В частности, уравнения Малюжинца, которые приведены в приложении Б, позволяют продолжить трансформанты  $f_1, f_2, f_3$  из полос голоморфности в комплексную плоскость и убедиться в вещественности их полюсов.

**6.3. Полюсы трансформант Зоммерфельда  $f_1, f_2, f_3$  и асимптотика интегралов.** Для вычисления асимптотики интегралов Зоммерфельда в (41) в соответствии с известной процедурой мы деформируем контур интегрирования  $\gamma_0$  на рис. 2 в контуры наискорейшего спуска  $\gamma_0^{\pm\pi} = \{\zeta : \text{Re}(\zeta) = \pm\pi\}$ , которые проходят через точки  $\pm\pi$  соответственно. В процессе деформации захватываются полюсы подынтегральных выражений в (41). Положение полюсов зависит от угла наблюдения  $\varphi$ , однако они расположены вне замкнутой полосы  $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$ . Это означает, что захваченные полюсы порождают экспоненциально малые члены в асимптотике при  $r \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство справедливо, поскольку  $e^{\kappa r \cos \zeta}$  под интегралом (41) убывает, если  $\pi/2 < |\text{Re}(\zeta)| < 3\pi/2$ , и все захваченные полюсы в этой полосе порождают убывающие экспоненты. Дополнительный быстро убывающий вклад (порядка  $O(e^{-\kappa r}/\sqrt{r})$ ) доставляют седловые точки в  $\zeta = \pm\pi$  (см. [29]). Однако для некоторых углов наблюдения  $\varphi$  отдельные полюсы  $\zeta_p(\varphi)$  трансформант могут быть расположены в узкой окрестности седловых точек и пересекают их при изменении  $\varphi$ . Это означает, что асимптотическая оценка интеграла должна быть модифицирована. В этом случае асимптотика выражается посредством интеграла типа Френеля. Направления  $\varphi$ , для которых такое слияние точки перевала и полюса происходит, называются *сингулярными*. В этих направлениях асимптотический режим убывания переключается с одного на другой. Рассмотрим теперь соответствующие вычисления более подробно.

Рассмотрим  $u_1$  в (41) ( $0 \leq \varphi \leq \Phi_1$ ) и перепишем как

$$u_1(r, \varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} 2f_1(\zeta + \varphi).$$

В окрестности полюса в  $-\varphi + [\pi - \tau_m + \Phi_1]$  трансформанта  $f_1$  представима в виде

$$f_1(\zeta + \varphi) = \frac{A_1^+}{\zeta + \varphi - [\pi - \tau_m + \Phi_1]} + \dots$$

Этот полюс пересекает седловую точку  $\pi$  и захватывается, если  $\varphi$  изменяется в сегменте  $[0, \Phi_1]$  и  $\tau_m < \Phi_1$ . Значит, по теореме о вычетах появляется вклад, если

$$\frac{\pi}{2} < -\varphi + [\pi - \tau_m + \Phi_1] \leq \pi - \frac{C}{(\kappa r)^{1/2+\epsilon}}, \quad C > 0, \kappa r \rightarrow \infty.$$

Имеем  $(\varphi + \tau_m - \Phi_1 > C/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$

$$u_1(r, \varphi) = 2A_1^+ e^{-\kappa r \cos(\varphi + \tau_m - \Phi_1)} + u_1^*(r, \varphi) + \dots, \quad (42)$$

где вклад от седловых точек  $\pm\pi$  имеет вид

$$u_1^*(r, \varphi) = 2[f_1(-\pi + \varphi) - f_1(\pi + \varphi)] \frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{2\pi\kappa r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right)\right).$$

Заметим, что этот полюс не близок к  $\pi$ , т.е.  $\varphi$  вне области

$$|\varphi + \tau_m - \Phi_1| \leq O\left(\frac{1}{(\kappa r)^{1/2+\epsilon}}\right), \quad (43)$$

описывающей окрестность сингулярного направления  $\varphi = \Phi_1 - \tau_m$ , для малого  $\epsilon > 0$  и при  $\tau_m \in (0, \Phi_1)$ . Однако если  $\pi/2 > \tau_m > \Phi_1$ , соответствующий полюс не пересекает седловую точку  $\pi$  и не существует сингулярного направления, связанного с этим полюсом. Многоточие в (42) означает возможный вклад других полюсов, которые могут быть захвачены в процессе деформации  $\gamma_0$  в перевальные контуры  $\gamma_0^{\pm\pi}$ . Очевидно, что реальный набор захваченных полюсов зависит также от  $\Phi_1, \Phi_2$ . Таким же образом трансформанта  $f_1$  представима как

$$f_1(\zeta + \varphi) = \frac{A_1^-}{\zeta + \varphi + [\pi - \tau_m + \Phi_1]} + \dots$$

в окрестности полюса  $\zeta = -\varphi - [\pi - \tau_m + \Phi_1]$ . Этот полюс дает вклад в асимптотику, если

$$-\frac{\pi}{2} > -\varphi - [\pi - \tau_m + \Phi_1] \geq -\pi + \frac{C}{(\kappa r)^{1/2+\epsilon}}, \quad C > 0, \kappa r \rightarrow \infty,$$

или  $\varphi - \tau_m + \Phi_1 \leq -C/(\kappa r)^{1/2+\epsilon}$ . Это неравенство справедливо при  $\tau_m > \Phi_1$  и для некоторых  $\varphi \in (0, \Phi_1)$ . Имеем

$$u_1(r, \varphi) = 2H(\varphi + \tau_m - \Phi_1)A_1^+ e^{-\kappa r \cos(\varphi + \tau_m - \Phi_1)} + 2[f_1(-\pi + \varphi) - f_1(\pi + \varphi)] \frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{2\pi\kappa r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right)\right) + \dots \quad (44)$$

при  $\tau_m < \Phi_1$  и  $|\varphi + \tau_m - \Phi_1| \geq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$ .

При  $\tau_m > \Phi_1$  получим

$$u_1(r, \varphi) = 2H(-[\varphi - \tau_m + \Phi_1])A_1^- e^{-\kappa r \cos(\varphi - \tau_m + \Phi_1)} + 2[f_1(-\pi + \varphi) - f_1(\pi + \varphi)] \frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{2\pi\kappa r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right)\right) + \dots \quad (45)$$

для  $|\varphi - \tau_m + \Phi_1| \geq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$ ,  $H(\cdot)$  – функция Хевисайда. Многоточие в асимптотиках (44), (45) отвечает вкладу других возможно захватываемых полюсов, который убывает быстрее по сравнению с явно вычисленными слагаемыми. Асимптотики (44), (45) неравномерны по  $\varphi$ . Если неравенства  $|\varphi + \tau_m - \Phi_1| \geq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$  для (44) или  $|\varphi - \tau_m + \Phi_1| \geq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$  для (45) нарушаются, асимптотические выражения необходимо модифицировать с помощью интегралов типа Френеля, как было отмечено выше.

**6.4. Асимптотика вблизи сингулярных направлений.** Для определенности положим  $\tau_m < \Phi_1$  и рассмотрим окрестность сингулярных направлений  $\varphi = \Phi_1 - \tau_m$ , т. е. область (43). В этом случае полюс  $f_1$  в  $\zeta = \zeta_m(\varphi) := -\varphi + [\pi - \tau_m + \Phi_1]$  может пересечь седловую точку  $\pi$ , когда  $\varphi$  меняется в  $[0, \Phi_1]$  (см. также раздел 4.2 работы [7] для похожей ситуации). Рассмотрим круг  $B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon})$  с центром в  $\zeta = \pi$  и малым радиусом порядка  $O([\kappa r]^{-1/2+\epsilon})$ . Полюс  $\zeta_m(\varphi)$  находится в этом круге, мы имеем представление ( $|\varphi + \tau_m - \Phi_1| \leq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$ , считая  $-\varphi + \pi - \tau_m + \Phi_1 > \pi$ )

$$u_1(r, \varphi) = \frac{1}{i\pi} \int_{B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon}) \cap \gamma_0^\pi} d\zeta f_1(\zeta + \varphi) (\zeta - \zeta_m(\varphi)) \frac{e^{\kappa r \cos \zeta}}{\zeta - \zeta_m(\varphi)} - 2f_1(-\pi + \varphi) \frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{2\pi\kappa r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right)\right) + \delta u_1(r, \varphi),$$

где

$$\delta u_1(r, \varphi) = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_0^\pi \setminus B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon})} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} f_1(\zeta + \varphi),$$

$\delta u_1(r, \varphi)$  – остаток, который легко оценивается. Обратимся к оценке интеграла по асимптотически малой части контура  $\gamma_0^\pi$ , лежащей в круге  $B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon}) \cap \gamma_0^\pi$ . Функция  $D(\zeta, \varphi) := f_1(\zeta + \varphi)(\zeta - \zeta_m(\varphi))$  регулярна в этом круге. В этом круге мы воспользуемся приближением  $\cos \zeta = -1 + [\zeta - \pi]^2/2 + \dots$  и введем новую переменную  $t = i(\zeta - \pi)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} \int_{B_\pi([\kappa r]^{-1/2+\epsilon}) \cap \gamma_0^\pi} d\zeta D(\zeta, \varphi) \frac{e^{\kappa r \cos \zeta}}{\zeta - \zeta_m(\varphi)} &= \\ &= -\frac{D(\pi, \varphi)e^{-\kappa r}}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-\kappa r t^2/2}}{t - i[\zeta_m(\varphi) - \pi]} (1 + O([\kappa r]^{-1/2+\epsilon})), \end{aligned}$$

где мы вынесли  $D(\zeta, \varphi)$  из-под интеграла, полагая  $\zeta = \pi$  и заменяя пределы интегрирования на  $\pm\infty$ , что дает экспоненциально малую относительную погрешность. В последнем интеграле полюс в  $i[\zeta_m(\varphi) - \pi]$  обходится контуром снизу. В частности, если  $\text{Im}[i[\zeta_m(\varphi) - \pi]] \leq 0$ , контур интегрирования обходит полюс, проходя по дуге малого радиуса снизу. Полученный интеграл выражается в терминах интеграла типа Френеля в соответствии с § 6.3.1 в [29],

$$\Psi(z; s) := \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-zt^2}}{t - s} = \pi i e^{-zs^2} [1 - \mathcal{F}(-is\sqrt{z})],$$

где

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-t^2} dt.$$

В результате в окрестности сингулярного направления, т. е. если  $|\varphi + \tau_m - \Phi_1| \leq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$ , находим

$$u_1(r, \varphi) = -D(\pi, \varphi) \frac{e^{-\kappa r}}{i\pi} \Psi\left(\frac{\kappa r}{2}; i[\Phi_1 - \varphi - \tau_m]\right) - 2f_1(-\pi + \varphi) \frac{e^{-\kappa r}}{\sqrt{2\pi\kappa r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\kappa r}\right)\right) + \delta u_1(r, \varphi), \quad (46)$$

где  $\delta u_1(r, \varphi)$  – вклад других, возможно, захваченных полюсов. В окрестности сингулярного направления интеграл типа Френеля  $\Psi$  в (46) играет роль переходной функции, которая переключает асимптотические режимы экспоненциального убывания собственной функции в области  $\Omega_1$ . Стоит отметить, что асимптотика в областях  $\Omega_3$  и  $\Omega_2$  исследуется похожим образом. В этом случае мы рассматриваем полюсы  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \Phi_1]$ ,  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \pi - \Phi_2]$  и вычисляем асимптотику в  $\Omega_2$ , тогда как в области  $\Omega_3$  мы рассматриваем “главный” полюс в  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \pi - \Phi_2]$ . Соответствующие вычисления очень похожи на вычисления, описанные выше для области  $\Omega_1$ . Мы приходим к лемме 2.1.

На рис. 1 символически показаны сингулярные направления. В области  $\Omega_1$  угол  $\varphi$  изменяется в  $[0, \Phi_1]$ . Количество сингулярных направлений определяется параметрами  $\Phi_1, \Phi_2$ , а также  $\gamma_1, \gamma_2$  посредством  $\tau_m$ . Каждый полюс, если  $\varphi$  меняется и проходит через седловую точку, порождает соответствующее сингулярное направление. Если  $\varphi$  мало и мы рассматриваем  $\Omega_1$ , асимптотика определяется вкладом седловых точек  $\pm\pi$  (см. (44)), где  $H(\varphi + \tau_m - \Phi_1) = 0$ , так что  $u_{1m} \sim e^{-\kappa r}/\sqrt{\kappa r}$ . С ростом  $\varphi$  полюс в  $\zeta = \zeta_m(\varphi)$  приближается к точке перевала  $\pi$  справа и, если  $|\varphi + \tau_m - \Phi_1| \leq O(1/(\kappa r)^{1/2+\epsilon})$ , т. е. в окрестности сингулярного направления (показано в  $\Omega_1$ , рис. 1), асимптотика описывается выражением (46) с интегралом типа Френеля. Полюс проходит через точку перевала  $\pi$  с увеличением  $\varphi$  и захватывается контуром, что приводит к асимптотике (44), где  $H(\varphi + \tau_m - \Phi_1) = 1$ ,  $\varphi + \tau_m - \Phi_1 \geq C/(\kappa r)^{1/2+\epsilon}$ . Захваченный полюс  $\zeta = \zeta_m(\varphi)$  порождает вклад в виде убывающей экспоненты  $2A_1^+ e^{-\kappa r \cos(\varphi + \tau_m - \Phi_1)}$ , тогда как вклад от точек перевала имеет порядок  $O(e^{-\kappa r}/\sqrt{\kappa r})$ . Лемма 2.1 означает, что решения  $u_m$  квадратично интегрируемы и удовлетворяют оценке (5). Используя интегральное представление Зоммерфельда, можно также показать, что  $u_m(r, \varphi) = C_m + O(r^{\delta_*})$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $\delta_* > 0$  и, значит,  $u_m \in H^1(\omega)$ , что завершает построение собственной функции в нашем примере.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Диагонализация матричного оператора Мёлера М. Спектральные свойства скалярного оператора Мёлера

Результаты приложения основаны на известных формулах, связанных с классическим преобразованием Мёлера–Фока, в основе которого лежат формулы Мёлера 1881 года [27].

В соответствии с определением матричный оператор Мёлера  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & aM \end{pmatrix},$$

где  $M$  – “скалярный” оператор Мёлера<sup>5)</sup>,

$$(M\rho)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dy \rho(y)}{x+y},$$

который ограничен и самосопряжен в  $L_2([0, 1])$ ,  $0 < a < 1$ . Очевидно, что спектральные свойства оператора  $\mathbf{M}$  определяются свойствами его “скалярных” компонент,  $\mathbf{M} = M \oplus (aM)$ . Оператор  $M$  мы называем скалярным оператором Мёлера и его свойства обсуждаются в работе [28].

**Оператор  $\mathbf{M}$  и его резольвента.** Имея информацию о скалярном операторе Мёлера  $M$ , обратимся к его матричному аналогу  $\mathbf{M}$ . Начнем с выражения (56) (см. ниже), имеем

$$\frac{a}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathcal{P}_q(y)}{x+y} dy = \frac{a\mathcal{P}_q(x)}{\operatorname{ch}(\pi q)},$$

и свяжем параметр  $p$  в (57) и  $q$  в последнем уравнении формулой

$$\operatorname{ch}(\pi q) = a \operatorname{ch}(\pi p), \quad a = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \leq 1. \quad (47)$$

Трансцендентное уравнение (47) допускает решение

$$q(p) := \frac{1}{\pi} \operatorname{arch}(a \operatorname{ch}(\pi p)),$$

ветвь которого определяется следующим образом. Рассмотрим набор разрезов  $b_* + im$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $b_* = [-a_*/\pi, a_*/\pi]$  ( $a_* = \operatorname{arch}(a^{-1})$ ) на комплексной плоскости  $p$ . Определим голоморфную функцию  $q(p)$ , задаваемую в (47), которая отображает область вне этой периодической системы разрезов на комплексную плоскость переменной  $q$  с периодической системой разрезов вдоль  $b^* + im$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $b^* = [-ia^*/\pi, ia^*/\pi]$  ( $a^* = \operatorname{arccos}(a)$ ). Отображение  $q(\cdot)$  обладает следующими свойствами:

- $q(p) = -q(-p)$ ;
- $q(p + im) = q(p) + im$ ;
- $q(p) = p + \frac{1}{\pi} \ln a + O(p^{-1})$ ,  $p \rightarrow \infty$ .

Теперь мы находим

$$\mathbf{P}_p(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_p(x) \\ \mathcal{P}_{q(p)}(x) \end{pmatrix} \quad (48)$$

– (обобщенную) собственную функцию оператора  $\mathbf{M}$ , которая соответствует  $\mu(p) = 1/\operatorname{ch}(\pi p)$ , так что

$$\mathbf{M}\mathbf{P}_p(x) = \mu(p)\mathbf{P}_p(x). \quad (49)$$

Когда параметр  $p$  пробегает все неотрицательные значения, спектральный параметр  $\mu(p) = 1/\operatorname{ch}(\pi p)$  принимает все значения на отрезке  $[0, 1]$ . Существенный (абсолютно непрерывный) спектр  $\sigma_e(\mathbf{M}) = [0, 1]$  оператора  $\mathbf{M}$  имеет кратность 2, так

<sup>5)</sup> В работе [27] был изучен в других терминах похожий оператор. Оператор  $M$  рассматривался в связи с интегральным уравнением Диксона в монографии [30].

как оператор представляется ортогональной суммой  $M \oplus (aM)$ . Собственный вектор (48), очевидно, представим ортогональной суммой векторов вида  $(0, \mathcal{P}_q(x))^\top$  и  $(\mathcal{P}_p(x), 0)^\top$ .

Формула для резольвенты оператора  $\mathbf{M}$  напрямую следует из результатов [28],

$$\mathbf{u}(x) = [\mathbf{M} - \mu \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{f}(x) = -\frac{1}{\mu} \{\mathbf{I} + \mathbf{A}_\mu\} \mathbf{f}(x), \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu \mathbf{f}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathbf{a}(x, y; \mu) \mathbf{f}(y) dy, \\ \mathbf{a}(x, y; \mu) &= \begin{pmatrix} a_\mu(x, y) & 0 \\ 0 & a_{\mu/a}(x, y) \end{pmatrix}, \\ a_{\mu/a}(x, y) &= \pi \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}_q(x) \mathcal{P}_q(y)}{a^{-1} \mu \operatorname{ch}(\pi q) - 1} dq. \end{aligned}$$

Используя оценку из [28], имеем

$$\|\mathbf{a}(x, y, \mu)\|_{\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2} \leq C \frac{|\ln(2/x) \ln(2/y)|}{\sqrt{xy}} \tag{51}$$

равномерно по  $\mu$ , считая, что  $\mu \in \mathcal{B}_1$ , т. е. в окрестности конца спектра  $\mu = 1$ .

Разложение единицы  $\mathbf{E}_t$  принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t \mathbf{g}(x) &= 0, & t \leq 0, \\ \mathbf{E}_t \mathbf{g}(x) &= \mathbf{g}(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathbf{e}(x, y; t) \mathbf{g}(y) dy, & t \in (0, 1], \\ \mathbf{E}_t \mathbf{g}(x) &= \mathbf{g}(x), & t > 1, \end{aligned} \tag{52}$$

где

$$\mathbf{e}(x, y; t) = \begin{pmatrix} e(x, y; t) & 0 \\ 0 & e_a(x, y; t) \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$e_a(x, y; \mu) = e(x, y; \mu/a)$  при  $\mu/a \in (0, 1]$  и  $e_a(x, y; \mu) = 0$  при  $\mu/a > 1$ . Ядро  $e(x, y; \mu)$  имеет вид

$$\begin{aligned} e(x, y; \mu) &= - \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau} \frac{H(\tau - \mu)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \mathcal{P}_{p(\tau)}(x) \mathcal{P}_{p(\tau)}(y), & \mu \in (0, 1), \\ p(\tau) &= \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 1} \right), & p(\tau) \geq 0, & p(\tau) \rightarrow \infty \text{ при } \tau \rightarrow 0+. \end{aligned} \tag{54}$$

Имея необходимую информацию о невозмущенном операторе  $\mathbf{M}$ , применяем традиционные методы для описания его возмущения компактным самосопряженным оператором  $\mathbf{V}$ . В нашем случае относительно гладкое возмущение  $\mathbf{V}$  является интегральным оператором.

С помощью этих результатов, а также некоторых дополнительных соображений несложно диагонализировать скалярный оператор Мёлера  $M$ . Известно, что  $M$  имеет простой абсолютно непрерывный спектр  $\sigma_a(M) = [0, 1]$  и собственные функции

непрерывного спектра найдены явно (см. [28]):

$$\mathcal{P}_p(x) := \frac{\sqrt{p \operatorname{th}(\pi p)}}{x} P_{ip-1/2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

с асимптотикой (см. [31], 8.772(1))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p(x) = & \frac{\sqrt{p \operatorname{th}(\pi p)}}{x} \left( \frac{\Gamma(-ip)}{\Gamma(-ip+1/2)} \left[\frac{x}{2}\right]^{1/2-ip} + \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip+1/2)} \left[\frac{x}{2}\right]^{1/2+ip} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(x^2) \right), \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0+$ ,  $p > 0$ , и  $\mathcal{P}_p(x) = O(1)$  при  $p \rightarrow \infty$ ,  $1 \geq x > 0$ . Функции  $\mathcal{P}_p(x)$  вещественны при  $p \geq 0$ , в частности  $\mathcal{P}_0(x) > 0$ . Мы используем следующее утверждение [28].

**ТЕОРЕМА А.1.** *Модифицированное преобразование Мёлера–Фока, определяемое формулами*

$$F(x) = \int_0^\infty \mathcal{P}_p(x) F^*(p) dp, \quad (55)$$

$$F^*(p) = \int_0^1 \mathcal{P}_p(x) F(x) dx, \quad (56)$$

является унитарным,  $\mathcal{U}: L_2(0, \infty) \rightarrow L_2(0, 1)$ . Преобразование Мёлера–Фока диагонализует оператор Мёлера  $M$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathcal{P}_p(y)}{x+y} dy = \frac{\mathcal{P}_p(x)}{\operatorname{ch}(\pi p)}. \quad (57)$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Функциональные уравнения Малюжинца для $f_1$ , $f_2$ и $f_3$

Интегральные представления решений (41) задачи на собственные функции удовлетворяют уравнению  $-\Delta u = Eu$  в  $\Omega$ , и их можно подставить в краевые условия. На этом пути мы получим функциональные уравнения, называемые уравнениями Малюжинца для трансформант Зоммерфельда  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ . Они, в частности, позволят продолжить функции  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  из полос регулярности, описанных в лемме 6.1, на всю комплексную плоскость. Кроме того, оказывается, что все полюсы расположены на вещественной оси. Из условия Неймана на лучах  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  с необходимостью получаем

$$f_1(\zeta) = -f_1(-\zeta), \quad f_3(\zeta) = -f_3(-\zeta), \quad (58)$$

что уже было установлено выше. Условие непрерывности на  $l_1$  дает (см. детали вычислений в похожей ситуации в [7])

$$f_1(\zeta + \Phi_1) - f_1(-\zeta + \Phi_1) = f_2(\zeta + \Phi_1) - f_2(-\zeta + \Phi_1). \quad (59)$$

Обратимся ко второму условию на  $l_1$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa r} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\Phi_1} - \frac{\gamma_1}{\kappa} u_1(r, \Phi_1) = \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta \frac{e^{\kappa r \cos \zeta}}{\kappa r} (f'_1(\zeta + \Phi_1) - f'_1(-\zeta + \Phi_1) - [f'_1(\zeta + \Phi_1) - f'_1(-\zeta + \Phi_1)] - \\ & \quad - \frac{\gamma_1}{\kappa} [f_1(\zeta + \Phi_1) - f_1(-\zeta + \Phi_1)]) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} d\zeta e^{\kappa r \cos \zeta} (\sin \zeta (f_1(\zeta + \Phi_1) + f_1(-\zeta + \Phi_1) - [f_1(\zeta + \Phi_1) + f_1(-\zeta + \Phi_1)]) - \\ & \quad - 2\Lambda [f_1(\zeta + \Phi_1) - f_1(-\zeta + \Phi_1)]) = 0. \end{aligned}$$

Согласно теореме об обращении интеграла Зоммерфельда (см. [17], раздел 3.4), используя уравнение (59), имеем

$$\begin{aligned} & (\sin \zeta - \sin \tau_m) f_1(\zeta + \Phi_1) - (-\sin \zeta - \sin \tau_m) f_1(-\zeta + \Phi_1) = \\ & = (\sin \zeta + \sin \tau_m) f_2(\zeta + \Phi_1) - (-\sin \zeta + \sin \tau_m) f_2(-\zeta + \Phi_1). \end{aligned} \quad (60)$$

Аналогично из граничного условия на  $l_2$  находим

$$f_2(\zeta + \Phi_2) - f_2(-\zeta + \Phi_2) = f_3(\zeta + \pi - \Phi_2) - f_3(-\zeta + \pi - \Phi_2) \quad (61)$$

и

$$\begin{aligned} & (\sin \zeta - a \sin \tau_m) f_2(\zeta + \Phi_2) - (-\sin \zeta - a \sin \tau_m) f_2(-\zeta + \Phi_2) = \\ & = (\sin \zeta + a \sin \tau_m) f_3(\zeta + \pi - \Phi_2) - (-\sin \zeta + a \sin \tau_m) f_3(-\zeta + \pi - \Phi_2). \end{aligned} \quad (62)$$

Напомним, что  $a = \gamma_2/\gamma_1$ ,  $a \sin \tau_m =: \sin t_m$ . Функциональные уравнения Малюжинца (58)–(62) позволяют продолжить трансформанты на всю комплексную плоскость как мероморфные функции. Они также позволяют утверждать, что все полюсы находятся на вещественной оси. Это следствие того, что сдвиги в аргументах в уравнениях направлены вдоль вещественной оси, тогда как ближайшие к мнимой оси полюсы  $f_1, f_3$  вещественны и расположены симметрично в точках  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \Phi_1]$ ,  $\zeta = \pm[\pi - \tau_m + \pi - \Phi_2]$  соответственно. Это же верно и для  $f_2(z)$  по отношению к линии  $\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) + i\mathbb{R}$  для полюсов в  $\zeta = -[\pi - \tau_m] + \Phi_1$  и  $\zeta = [\pi - \tau_m] + \Phi_2$ . Заметим, что трансформанты  $f_1, f_2, f_3$  ограничены в  $\pm i\infty + \text{Re}(\zeta)$  для фиксированного<sup>6)</sup>  $\text{Re}(\zeta)$ . Теперь задача для  $f_1, f_2, f_3$ , удовлетворяющих уравнениям Малюжинца (58)–(62), состоит в нахождении  $\Lambda_m = \sin \tau_m$  и нетривиальных решений, регулярных в полосах из леммы 6.1 и ограниченных на бесконечности. В правильной интерпретации эта задача равносильна спектральной задаче для ФР уравнений (11). Имея соответствующие нетривиальные решения, можно восстановить собственные функции посредством интегралов Зоммерфельда (41). Однако мы уже убедились в существовании  $\Lambda = \sin \tau_m$  и соответствующих  $H_{1m}, H_m, H_{3m}, \tilde{h}_m$ , определяющих трансформанты  $f_1, f_2, f_3$  в (36), (38), (40), которые являются мероморфными функциями с вещественными полюсами.

<sup>6)</sup> Ограниченность обеспечивает надлежащее поведение  $u$  при  $r \rightarrow 0$ .

**Конфликт интересов.** Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] B. Behrndt, P. Exner, V. Lotoreichik, “Schrödinger operators with  $\delta$ - and  $\delta'$ -interactions on Lipschitz surfaces and chromatic numbers of associated partitions”, *Rev. Math. Phys.*, **26**:8 (2014), 1450015, 43 pp.
- [2] B. Behrndt, P. Exner, V. Lotoreichik, “Schrödinger operators with  $\delta$ -interactions supported on conical surfaces”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:35 (2014), 355202, 16 pp.
- [3] M. Khalile, K. Pankrashkin, “Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors”, *Math. Nachr.*, **291**:5–6 (2018), 928–965.
- [4] М. Ш. Бирман, М. З. Саломьяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980.
- [5] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, 1995.
- [6] M. A. Lyalinov, “Functional difference equations and eigenfunctions of a Schrödinger operator with  $\delta'$ -interaction on a circular conical surface”, *Proc. Roy. Soc. A*, **476**:2241 (2020), 20200179, 23 pp.
- [7] M. A. Lyalinov, “Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations”, *Eur. J. Appl. Math.*, **33**:3 (2022), 538–559.
- [8] М. А. Лялинов, “Комментарий о собственных функциях и собственных числах оператора Лапласа в угле с краевыми условиями Робэна”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **483** (2019), 116–127.
- [9] А. А. Федотов, “Метод монодромизации в теории почти-периодических уравнений”, *Алгебра и анализ*, **25**:2 (2013), 203–235.
- [10] A. A. Fedotov, F. Sandomirskiy, “An exact renormalization formula for the Maryland model”, *Commun. Math. Phys.*, **334**:2 (2015), 1083–1099, arXiv:1311.6930.
- [11] A. Fedotov, F. Klopp, “A complex WKB method for adiabatic problems”, *Asymptot. Anal.*, **27**:3–4 (2001), 219–264.
- [12] Г. Д. Малюжинец, “Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней”, *Докл. АН СССР*, **121**:3 (1958), 436–439.
- [13] W. E. Williams, “Diffraction of an  $E$ -polarised plane wave by an imperfectly conducting wedge”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **252**:1270 (1959), 376–393.
- [14] J.-M. L. Bernard, *Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d’ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d’impédance constante*, Rapport CEA-R-5764, Editions Dist Saclay, Paris, 1997; J.-M. L. Bernard, *Advanced Theory of Diffraction by a Semi-infinite Impedance Cone*, Alpha Science Series on Wave Phenomena, Alpha Science, Oxford, 2014.
- [15] M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, “Acoustic scattering by a circular semi-transparent conical surface”, *J. Eng. Math.*, **59**:4 (2007), 385–398.
- [16] M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, V. P. Smyshlyaev, “Scattering of a plane electromagnetic wave by a hollow circular cone with thin semi-transparent walls”, *IMA J. Appl. Math.*, **75**:5 (2010), 676–719.
- [17] V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*, Alpha Science Series on Wave Phenomena, Alpha Science, Oxford, 2007.
- [18] M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions*, Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication, SciTech-IET, Edison, NJ, 2012.
- [19] M. Roseau, “Short waves parallel to the shore over a sloping beach”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**:4 (1958), 433–493.
- [20] J. B. Lawrie, A. C. King, “Exact solution to a class of the functional difference equations with application to a moving contact line flow”, *Eur. J. Appl. Math.*, **5**:2 (1994), 141–157.

- [21] R. Jost, “Mathematical analysis of a simple model for the stripping reaction”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **6** (1955), 316–326.
- [22] S. Albeverio, “Analytische Lösung eines idealisierten Stripping- oder Beugungsproblems”, *Helv. Phys. Acta*, **40** (1967), 135–184.
- [23] M. Gaudin, B. Derrida, “Solution exacte d’un problème modèle à trois corps. Etat lié”, *J. Phys. France*, **36**:12 (1975), 1183–1197.
- [24] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Yu. Volkov, “Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality”, *Commun. Math. Phys.*, **219**:1 (2001), 199–219, arXiv: hep-th/0006156.
- [25] D. R. Yafaev, “Spectral and scattering theory for perturbations of the Carleman operator”, *Алгебра и анализ*, **25**:2 (2013), 251–278.
- [26] I. N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [27] G. G. Mehler, “Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Electricitätsvertheilung”, *Math. Ann.*, **18**:2 (1881), 161–194.
- [28] M. A. Lyalinov, “Functional-difference equations and their link with perturbations of the Mehler operator”, *Russian J. Math. Phys.*, **29**:3 (2022), 379–396.
- [29] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [30] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Chelsea Publ., New York, 1986.
- [31] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию 1.06.2022,  
после доработки 15.07.2022,  
принята к публикации 19.07.2022