

**В. Б. ВИЛКОВ
В. С. КАЛЬНИЦКИЙ
И. Е. МОЛОКОВ**

**НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ
МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Монография

Санкт-Петербург
 Астерион
2022

УДК 519.872
ББК 22.172
В 44

Рецензенты:

В. М. Нежинский – профессор, доктор физико-математических наук Санкт-Петербургского государственного университета,
Н. В. Кузнецов – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

В 44

Вилков В. Б., Кальницкий В. С., Молоков И. Е. Нечеткие системы массового обслуживания : монография. – СПб. : Астрион, 2022. – 184 с.

ISBN 978-5-00188-257-2

Теория массового обслуживания сначала развивалась как часть теории случайных процессов, но с появлением теории нечетких множеств к исследованию задач массового обслуживания стали привлекать и эту теорию. Предметом теории массового обслуживания является анализ систем, предназначенных для удовлетворения массового спроса на обслуживание определенного типа, ее цель – создание методов, позволяющих оценить качество организации процесса функционирования таких систем. Данная монография посвящена как раз рассмотрению вопросов использования теории нечетких множеств и нечеткой логики для исследования систем массового обслуживания, в которых исходная информация носит нечетких характер.

УДК 519.872
ББК 22.172

© В. Б. Вилков, В. С. Кальницкий,
И. Е. Молоков, СПбГУ, 2022

ISBN 978-5-00188-257-2

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	6
Введение	8
ГЛАВА 1. Элементы теории нечетких множеств и нечеткой логики....	10
§ 1.1. Нечеткие множества.....	10
1.1.1. Историческая справка.....	10
1.1.2. Понятие нечеткого множества.....	12
1.1.3. Действия с нечеткими множествами.....	15
1.1.4. Фаззификация и дефаззификация нечеткого множества.....	21
§ 1.2. Элементы нечеткой логики.....	24
1.2.1. Основные понятия.....	24
1.2.2. Нечеткий логический вывод.....	26
ГЛАВА 2. Необходимые сведения из теории массового обслуживания.....	33
§ 2.1. Предмет и основные понятия теории массового обслуживания... 33	
2.1.1. Предмет и области применения теории массового обслуживания.....	33
2.1.2. Основные понятия теории массового обслуживания.....	35
2.1.3. Элементы теории случайных процессов.....	37
2.1.4. Классификация случайных процессов.....	38
2.1.5. Процессы размножения и гибели.....	40
2.1.6. Классификация систем массового обслуживания.....	42
§ 2.2. Математический аппарат теории массового обслуживания.....	44
2.2.1. Основные показатели качества организации систем массового обслуживания.....	44
2.2.2. Открытая система массового обслуживания.....	46
2.2.3. Закрытые системы массового обслуживания.....	49
2.2.4. Порядок вычисления показателей качества организации СМО.....	49
2.2.5. Анализ систем массового обслуживания общего вида.....	50
ГЛАВА 3. Метод статистических испытаний при моделировании задач теории массового обслуживания.....	53
§ 3.1. Предмет метода статистических испытаний.....	53
3.1.1. Общее понятие о методе Монте-Карло.....	53
3.1.2. Примеры применения метода Монте –Карло.....	55
§ 3.2. Основные элементы метода Монте-Карло.....	57
3.2.1. Приемы моделирования значений случайной величины с заданным законом распределения.....	57
3.2.2. Определение необходимого числа испытаний.....	61
3.2.3. Приближенное вычисление кратных интегралов с использованием метода Монте-Карло.....	64
§ 3.3. Обзор литературы.....	66
Глава 4. Системы массового обслуживания с нечеткими	68

интенсивностями.....	
§ 4.1. Задачи о максимальной (минимальной) надежности значений показателей работы СМО.....	68
4.1.1. Вводные замечания.....	68
4.1.2. Минимальное значение надежности того, что одноканальная СМО работает без очереди.....	69
4.1.3. Максимально возможное среднее время ожидания в очереди в одноканальной СМО.....	74
4.1.4. Максимально возможное значение надежности того, что среднее время ожидания в очереди в одноканальной СМО равно заданной величине.....	77
4.1.5. Очередь в многоканальной СМО.....	79
4.1.6. Задача о надежности того, что свободны k каналов.....	84
4.1.7. Надежность отказа в обслуживании.....	85
4.1.8. Открытая система массового обслуживания с отказами.....	86
4.1.9. Минимальная очередь при заданной надежности.....	94
4.1.10. Сеть этапов обслуживания.....	98
§ 4.2. Нечеткая логика в задачах теории массового обслуживания.....	111
4.2.1. Вводные замечания.....	111
4.2.2. Использование центра тяжести для вербальной оценки качества системы массового обслуживания.....	112
4.2.3. Оценка качества СМО с использованием нечеткого логического вывода.....	115
4.2.4. Использование обобщенного значения (центра тяжести) интенсивностей входящего потока и обслуживания.....	120
4.2.5. Случай, когда значениями входных лингвистических переменных являются центры тяжести некоторых нечетких множеств.....	123
4.2.6. Оценка качества системы по двум критериям эффективности.....	126
4.2.7. Системы массового обслуживания с нечеткими интенсивностями, с простейшим входящим потоком и показательным временем обслуживания.....	131
4.2.8. Учет оперативного и экономического показателя в случае простейшего входящего потока и показательным временем обслуживания с нечеткими интенсивностями.....	134
§ 4.3. Системы массового обслуживания с нечетким числом каналов и (или) клиентов.....	141
4.3.1. Вводные замечания.....	141
4.3.2. Системы массового обслуживания с нечеткими интенсивностями и нечетким числом каналов.....	142
4.3.3. Системы массового обслуживания с нечеткими интенсивностями и нечетким числом клиентов.....	146

§ 4.4. Применение кратных интегралов для вычисления значений показателей работы нечеткой системы массового обслуживания.....	147
4.4.1. Постановка задачи.....	147
4.4.2. Использование кратных интегралов.....	148
§ 4.5. Системы массового обслуживания и метод Монте-Карло.....	155
4.5.1. Вводные замечания.....	155
4.5.2. Метод Монте-Карло и задачи поиска центра тяжести нечеткого множества значений показателя эффективности систем массового обслуживания с нечеткими исходными данными.....	156
4.5.3. Критерий эффективности – суммарное время, проведенное требованиями в очереди.....	160
4.5.4. Центр тяжести нечеткого множества «суммарное время, когда длина очереди равна нулю».....	164
4.5.5. Центр тяжести нечеткого множества «доля отказов в обслуживании».....	166
4.5.6. Сети СМО с нечеткими интенсивностями.....	168
§ 4.6. Смешанные системы массового обслуживания.....	170
4.6.1. Вводные замечания.....	170
4.6.2. Системы с нечетким входящим потоком и случайным временем обслуживания.....	171
4.6.3. Кратные интегралы в задаче теории массового обслуживания с нечетким входящим потоком и случайным временем обслуживания.....	174
4.6.4. Системы с нечетким временем обслуживания и случайным входящим потоком.....	175
Приложения.....	176
Обозначения.....	179
Литература.....	181

Предисловие

Предметом теории массового обслуживания является анализ систем предназначенных для удовлетворения массового спроса на обслуживание определенного типа, ее цель – создание методов, позволяющих оценить качество организации процесса функционирования таких систем. Следует иметь в виду, что речь идет именно об оценке качества организации обслуживания, а не о качестве самого обслуживания. При этом термин “обслуживание” понимается весьма широко. Обслужить, это вовсе не обязательно сделать что-то полезное клиенту, нуждающемуся в обслуживании данного вида. В зависимости от ситуации под обслуживанием понимается, например, ремонт машины, проведение занятия, обстрел самолета, проведение контрольного опроса и т.д.

Круг задач, для решения которых может быть привлечена эта теории весьма и весьма широк. В повседневной практической деятельности постоянно приходится сталкиваться с тем, что кто-то (что-то) обслуживает нас или мы обслуживаем кого-то (что-то). В таких ситуациях возникает необходимость создания системы обслуживания, удовлетворяющей возникающий спрос. Повышение пропускной способности системы обслуживания уменьшает потери клиентов, но ведет к увеличению ее стоимости. Отсюда возникает задача по выбору более предпочтительного варианта системы обслуживания, а для этого надо уметь оценивать качество имеющихся вариантов, чем и занимается теория массового обслуживания.

Теория массового обслуживания сначала развивалась как часть теории случайных процессов, но с появлением теории нечетких множеств к исследованию задач массового обслуживания стали привлекать и эту теорию. Данная монография посвящена как раз рассмотрению вопросов использования теории нечетких множеств и нечеткой логики для исследования систем массового обслуживания, в которых исходная информация носит нечетких характер.

Представленная монография содержит четыре главы. Первая глава вводит в круг необходимых для дальнейшего понятий теории нечетких множеств и элементы нечеткой логики. Во второй главе приводятся необходимые сведения из теории массового обслуживания, вводится необходимый математический аппарат, для оценки качества СМО вводится специальный показатель и рассматривается ряд моделей, его использующих.

В третьей главе модели обслуживания изучаются с позиций метода Монте-Карло, дано детальное описание его основных элементов. В четвертой главе СМО обсуждаются с позиций идей нечеткого логического вывода, нечеткими предполагаются интенсивности поступления требований и интенсивности их обслуживания. В заключение

рассматриваются смешанные модели СМО с различными типами входящих потоков и обслуживания.

Рассмотренные модели, ряд из которых являются оригинальными, сопровождаются анализом интересных с практической точки зрения примеров.

В монографии рассмотрены далеко не все возможные, интересные с практической точки зрения, модели. Круг рассмотренных в данной работе определяется научными интересами авторов и областями практических задач, с которыми авторам доводилось иметь дело.

Изучение монографии следует начинать с освоения материала первой и второй глав, так как в них дается материал, необходимый для изучения остальных глав.

Содержание, список обозначений, список терминов и литература представлены в конце монографии.

Наконец, укажем, что номера пунктов, формул, рисунков, таблиц, теорем, примеров и т.д., внутри параграфа состоят из трех чисел – номера главы, номера параграфа и порядкового номера внутри параграфа.

Введение

Теория нечетких множеств используется в широком круге практических вопросов в разных отраслях науки и техники, таких как: управление производством, медицинская диагностика, поиск полезных ископаемых, химический синтез, управление дорожным движением, автотранспортом и сложной строительной техникой, криминалистика, оборонные системы, создание баз данных, компьютерные разработки.

К настоящему времени сложились целые научные школы, основой для которых послужили труды Л. Заде, Р. Беллмана, М. Герца, Д. Дюбуа и Х. Прада, Р. Ягер, Х. Циммермана и др. Литература, посвященная нечетким множествам, уже исчисляется тысячами.

Мощным толчком в развитии теории нечетких множеств стала программа создания в начале восьмидесятых годов электронных систем, использующих нечеткие управляющие алгоритмы, преодолевшая довольно сильное сопротивление нарождавшейся теории, основывающееся именно на отсутствии прикладных результатов. И уже к концу 80-х начался бум практического применения теории нечеткой логики в разных сферах науки и техники. Зародилась первая волна в Японии в трудах Мамдани, Сугено, Такаги, затем захлестнула Корею и Европу. Первые прикладные задачи решали насущные вопросы управления поездами метро, подъемными кранами, лифтами и т.д.

Математические модели, отображающие нечеткий характер взаимодействия различных субъектов и техники, позволяют решать совершенно разные задачи: планирование оптимального ассортимента предприятия, моделирование складских операций, ценообразование, оптимизация транспортных перевозок, вексельные схемы и т.д. Смещение центра исследований нечетких систем в сторону практических применений привело, в частности, к проблемам расчета и разработки нечетких систем управления. Многие задачи сейчас воспринимаются не просто как эталонные тестовые проблемы нечеткой теории, а выступают как синоним приложений нечетких множеств.

В 60-е годы в период быстрого развития компьютерной техники и возрастания вычислительных мощностей научное сообщество вдохновлялось идеей логического (традиционного) описания «всего» и на фоне этого воодушевления появление нечеткой логики было практически не замечено. Однако, именно приверженцы двоичной логики первыми обратились к нечеткой логике, так как столкнулись с принципиальными сложностями в решении определенного круга задач, даже при наличии неограниченных вычислительных мощностей. Потребовалась новая методика построения математических моделей, которая и была основана на новом нечетком подходе.

Началом практического применения теории нечетких множеств можно считать 1975 год, когда Мамдани и Ассилиан построили первый нечеткий контролер для управления простым паровым двигателем [4]. В 1982 году Холмблад и Остергад разработали первый промышленный нечеткий контроллер, который был внедрен в управление процессом обжига цемента на заводе в Дании. Успех первого промышленного контролера, основанного на нечетких лингвистических правилах “Если-то” привел к всплеску интереса к теории нечетких множеств среди математиков и инженеров. Несколько позже Бартоломео Коско была доказана теорема о нечеткой аппроксимации [5], согласно которой любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике. Другими словами, с помощью естественно-языковых высказываний-правил “Если-то”, с последующей их формализацией средствами теории нечетких множеств, можно сколько угодно точно отразить произвольную взаимосвязь “входы - выход” без использования сложного аппарата дифференциального и интегрального исчисления, традиционно применяемого в управлении и идентификации.

Теория нечетких множеств вызывает сегодня большой интерес. В 1993 году насчитывалось уже от 15 до 16 тысяч публикаций, связанных с этой тематикой. На 2000 год число публикаций превысило 27 тысяч и продолжало интенсивно расти.

В данной монографии авторы собрали в соответствии со своими научными интересами многочисленные прикладные задачи ТМО и реализовали при их решении подход, использующий теорию нечетких множеств и нечеткую логику, существенно повысив достоверность и качество результата.

ГЛАВА 1. Элементы теории нечетких множеств и нечеткой логики

§ 1.1. Нечеткие множества

1.1.1. Историческая справка

Теория нечетких множеств – это попытка разрешения противоречия между точными математическими рассуждениями и неточностями при описании реального мира, неточностью языка, который используется при таком описании. Создатель этой теории, американский ученый азербайджанского происхождения Лотфи Заде в предисловии к книге Кофмана [1] отмечает, что “теория нечетких множеств – это, по сути дела, шаг на пути к сближению точности классической математики и всепроникающей неточности реального мира, к сближению, порожденному непрекращающимся человеческим стремлением к лучшему пониманию процессов мышления и познания”.

Свою работу [2], послужившую толчком к развитию теории во всем мире, Лотфи Заде опубликовал в 1965 году. Название статьи Fuzzy Sets получило у нас перевод «нечеткие множества».

Основная идея создателя теории нечетких множеств состояла в следующем [3]: способ рассуждений, базирующийся на естественном языке, не может быть описан с помощью имеющихся математических формализмов. Множество (группа элементов) – это основное понятие математики, предполагается, что рассматриваемый объект может либо быть элементом данного множества, либо не быть таковым. Такой подход далеко не всегда оказывается обоснованным, в реальной жизни далеко не всегда мы можем судить о чем-то с полной уверенностью. Использование нечетких множеств, по мнению Заде, должно способствовать созданию формализма для моделирования ситуаций, в которых существенную роль играет нечеткость: нечеткость в описании исходных условий, рассматриваемых связей, приемов логического вывода и т.д.

Следует отметить, что концепция нечетких множеств в первые годы после своего появления вызвала противоречивый отклик со стороны ученых. Число сторонников идей Заде постоянно росло, но было и много противников этих идей. Однако, программа построения нечеткой математики вскоре нашла отклик среди исследователей разных стран мира. Стали созываться многочисленные национальные и международные симпозиумы и конференции, посвященные нечетким множествам и их приложениям в науке и технике.

В 1984 году создана международная организация по этим проблемам. В нашей стране также наблюдается большой интерес к работам в этом направлении. В 1990 в нашей стране была создана «Советская ассоциация нечетких систем». Многие журналы публикуют статьи на эту тему, стали появляться монографии, в которых обсуждаются

те или иные аспекты, связанные с построением моделей рассуждений и принятия решений, характерных для людей.

Достаточно точные данные о рассматриваемом процессе (объекте) могут быть получены только с использованием высокоточных измерительных устройств. Человек же часто способен, рассматривая некоторый показатель, например, время обслуживания t (в минутах), оценивать его величину как “малое”, “приемлемое”, “большое”. Отнесение конкретных затрат времени к тому или иному из указанных классов в теории нечетких множеств осуществляется путем применения функций принадлежности (рис.1.1.1). Такие классы (см., например, [6]) называют информационными гранулами.

Для удовлетворения требований по точности в нашем случае можно добавить еще несколько гранул, например, рассмотреть следующий набор гранул “очень малое”, “малое”, “среднее”, “приемлемое”, “большое”, “не приемлемое”. Если надо, то число гранул можно и уменьшить.

Исследования по психологии показывают, что человек, в среднем, способен одновременно удерживать в сознании 7 ± 2 характеристики, поэтому число гранул разумно задавать в этих пределах. Заметим, что даже при управлении сложными системами (самолетами) этого вполне достаточно.

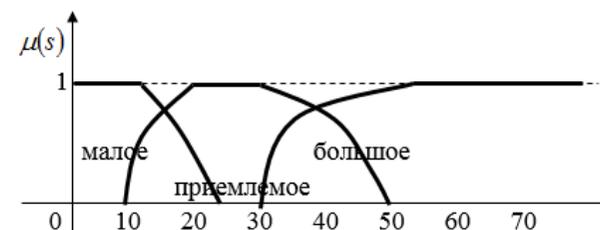


Рис. 1.1.1. Время обслуживания t мин.

Увеличение числа гранул ведет к повышению точности оценки, но приводит к различного рода затруднениям. Признавая это противоречие, Л. Заде сформулировал **принцип несовместимости** [7]:

“По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные и при этом осмысленные утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за пределами которого точность и смысл становятся практически взаимоисключающими характеристиками”.

Системы, основанные на нечетких множествах, разработаны и успешно внедрены в таких областях, как: управление технологическими процессами, управление транспортом, медицинская диагностика, техническая диагностика, финансовый менеджмент, биржевое прогнозирование, распознавание образов. Спектр приложений очень

широкий - от видеокамер и бытовых стиральных машин до средств наведения ракет ПВО и управления боевыми вертолетами. Практический опыт разработки систем нечеткого логического вывода свидетельствует, что сроки и стоимость их проектирования значительно меньше, чем при использовании традиционного математического аппарата, при этом обеспечивается требуемый уровень помехоустойчивости и прозрачности моделей.

1.1.2. Понятие нечеткого множества

Нечеткие множества - это понятие, которое было привлечено Л. Заде для формализации нечеткой информации при построении математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной мере и, следовательно, принадлежать к данному множеству элементов с различной степенью определенности. При такой точке зрения, говоря о том, что некоторый конкретный элемент принадлежит данному множеству, необходимо указать с какой степенью этот элемент обладает свойствами данного множества, "насколько сильно" он обладает свойствами, определяющими данное множество. Например, рассмотрим множество чисел, обладающих в той или иной степени свойством "около к пяти". Скажем, число три близко или нет к числу пять. Очевидно, что степень близости здесь может быть разной в зависимости от того, о чем идет речь. Так сумму денег в три рубля можно считать близкой к сумме в пять рублей. Семья же с тремя детьми, с точки зрения многодетности, весьма далека от семьи с пятью. Поэтому, говоря о том, что число три принадлежит множеству чисел "около пяти" надо указать и степень справедливости (истинности) такого утверждения.

Далее приводятся понятия и результаты теории нечетких множеств и нечеткой логики, которые потребуются нам в дальнейшем, они заимствованы из [1-7].

Определение 1.1.1. *Универсальным называется некоторое обычное (четкое) множество.*

Содержательный смысл его элементов зависит от рассматриваемой задачи. Так, если речь идет о времени обслуживания клиента в мастерской, то универсальным множеством может быть множество чисел (возможных значений для временных интервалов обслуживания), скажем отрезок $[0, t_{\max}]$, где t_{\max} - длина некоторого интервала, не меньшая самых больших возможных затрат времени на обслуживание. Если мы говорим об оценке знаний по пятибалльной системе, то универсальным может быть множество $\{1,2,3,4,5\}$ и т.д.

Определение 1.1.2. *Нечетким множеством \hat{A} на универсальном множестве U называется совокупность пар $(\mu_{\hat{A}}(y), y)$, где $\mu_{\hat{A}}(y)$ - степень принадлежности элемента $y \in U$ к нечеткому множеству \hat{A} .*

Степень принадлежности - это число из отрезка $[0, d]$, часто считается, что $d = 1$. Мы в дальнейшем всегда будем исходить из того, что указанный отрезок есть отрезок $[0, 1]$. Чем больше степень принадлежности, тем больше элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества, тем более уверенно мы можем считать, что он принадлежит этому множеству.

Определение 1.1.3. *Функцией принадлежности называется функция, которая позволяет вычислить степень принадлежности произвольного элемента универсального множества к нечеткому множеству.*

Для обычных (четких) множеств функция принадлежности называется характеристической функцией, она может принимать только два значения - 0 или 1. Если для некоторого элемента значение характеристической функции данного множества равно нулю, то это означает, что этот элемент не принадлежит данному множеству, если единице - то принадлежит. В теории же нечетких множеств элемент может принадлежать данному нечеткому множеству в некоторой степени. Как правило, предполагается, что функция принадлежности принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Вопросы, связанные с определением вида функции принадлежности и их построения, изучаются, например, в [8,9,10].

В дальнейшем мы часто вместо словосочетания «значение функции принадлежности» будем использовать словосочетания «**степень принадлежности**», «**надежность**» и т.п.

Пусть универсальное множество U является дискретным и состоит из конечного количества элементов u_1, u_2, \dots, u_n : $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда нечеткое множество \hat{A} , определенное на этом множестве, записывается в виде

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n \mu_{\hat{A}}(u_i) / u_i$$

или в виде

$$\hat{A} = \{ \mu_{\hat{A}}(u_1) / u_1, \mu_{\hat{A}}(u_2) / u_2, \dots, \mu_{\hat{A}}(u_n) / u_n \}.$$

Если множество U есть непрерывное числовое множество, то используют обозначение

$$\hat{A} = \int_U \mu_{\hat{A}}(u) / u.$$

Замечание 1.1.1. Знаки \sum и \int в этих формулах означают соответствующие совокупности пар u и $\mu_{\hat{A}}(u)$.

Пример 1.1.1. Пусть универсальным множеством для показателя “число обслуженных за смену покупателей” является множество $U = \{155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190\}$.

Представить в виде нечеткого множества \hat{A} понятие “число обслуженных покупателей среднее”.

Решение:

$$\hat{A} = \{0/155; 0,1/160; 0,3/165; 0,8/170; 1/175; 1/180; 0,5/185; 0/190\}.$$

Эта запись означает, что, например, наша уверенность в том, что среднее число обслуженных за смену покупателей будет 165 человек равно 0,3, а уверенность в том, что среднее число обслуженных за смену покупателей будет 190 человек равно нулю и т.д.

Пример 1.1.2. Рассмотрим универсальное множество значений интервалов времени между моментами поступления клиентов в некоторую систему обслуживания. Будем предполагать, что значения этих интервалов могут принимать значения от 10 до 100 минут, т.е., что универсальное множество в данном случае равно $[10,100]$. Рассмотрим нечеткое множество \hat{A} - «длина интервала около 60 минут». Возможный график функции принадлежности этого нечеткого множества представлен на рисунке 1.1.2.

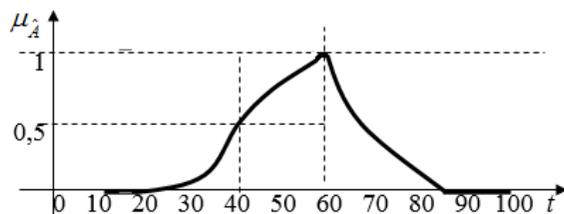


Рис.1.1.2. График функция принадлежности нечеткого множества из примера 1.1.2.

Из графика на рисунке 1.1.2. видно степень нашей уверенности (надежность) в том, что интервал времени между моментами поступления двух требований будет 40 минут, равна 0,5.

Пример 1.1.3. Оценка качества функционирования мастерской по ремонту техники может принимать значения от нуля до ста. Характеризовать уровень обслуживания будем терминами «низкий», «средний», «хороший», «отличный». Эти термины будем описывать (формализовать) нечеткими множествами с такими же названиями, заданными на универсальном множестве возможных оценок, т.е. на

множестве $[0,100]$. Графики функций принадлежности этих нечетких множеств представлены на рисунке 1.1.3, на нем k - оценка в баллах.

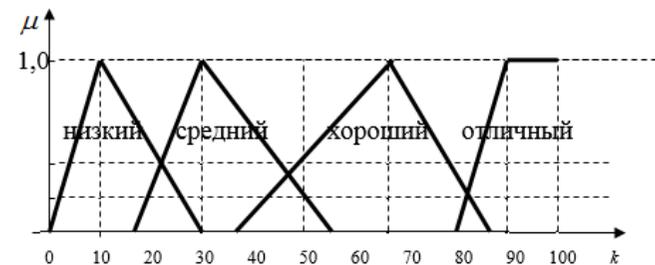


Рис.1.1.3. Графики функций принадлежности нечетких множеств, описывающих термины уровня обслуживания.

Анализ графиков на рисунке 1.1.3. показывает, что оценку в 50 баллов мы не можем классифицировать однозначно. С надежностью 0,2 мы относим ее к среднему уровню обслуживания и с надежностью 0,6 – к хорошему.

1.1.3. Действия с нечеткими множествами.

Над обычными множествами вводится ряд операций: объединение, пересечение, дополнение и другие. Определения аналогичных нечетких теоретико-множественных операций могут быть обобщены из обычной теории множеств. В теории нечетких множеств степень принадлежности не ограничена лишь значениями 0 и 1 - она может принимать значения из интервала $[0, 1]$. Поэтому, нечеткие теоретико-множественные операции могут быть определены по-разному. Ясно, что выполнение нечетких операций объединения, пересечения и других над нечеткими множествами должно дать такие же результаты, как и при использовании обычных канторовых теоретико-множественных операций. Ниже приведены определения нечетких теоретико-множественных операций, предложенные Л. Заде.

Определение 1.1.4. Дополнением нечеткого множества \hat{A} , заданного на универсальном множестве U , называется нечеткое множество $\bar{\hat{A}}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\bar{\hat{A}}}(u) = 1 - \mu_{\hat{A}}(u) \text{ для всех } u \in U.$$

На рис. 1.1.4. приведен пример выполнения операции нечеткого дополнения.

Определение 1.1.5. Пересечением нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , заданных на универсальном множестве U , называется нечеткое множество $\hat{C} = \hat{A} \cap \hat{B}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{C}}(u) = \min \{ \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) \} \quad (1.1.1)$$

для всех $u \in U$.

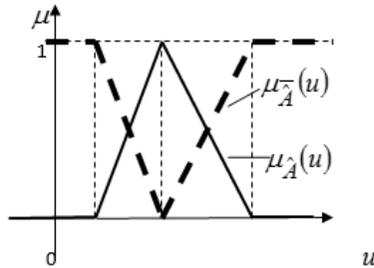


Рис. 1.1.4. Дополнение нечеткого множества.

На рисунке 1.1.5а жирной линией выделен график функции принадлежности пересечения нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} .

Операция нахождения минимума также обозначается знаком \wedge , т.е.

$$\mu_{\hat{C}}(u) = \mu_{\hat{A}}(u) \wedge \mu_{\hat{B}}(u).$$

Определение 1.1.6. Объединением нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , заданных на универсальном множестве U , называется нечеткое множество $\hat{D} = \hat{A} \cup \hat{B}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{D}}(u) = \max \{ \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) \} \quad (1.1.2)$$

для всех $u \in U$.

На рисунке 1.1.5б жирной линией выделен график функции принадлежности объединения нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} .

Операция нахождения максимума обозначается знаком \vee , т.е.

$$\mu_{\hat{D}}(u) = \mu_{\hat{A}}(u) \vee \mu_{\hat{B}}(u).$$

Как уже отмечалось, эти определения являются обобщениями аналогичных понятий для обычных “четких” множеств. Приведем еще некоторые соображения по поводу обоснования так введенных операций [11].

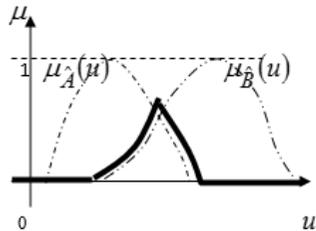


Рис.1.1.5а. Пересечение нечетких множеств

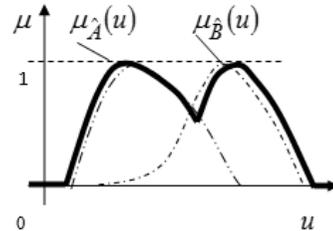


Рис. 1.1.5б. Объединение нечетких множеств

Рассмотрим отображение $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u))$, заданное на множестве функций принадлежности и определяющее функцию принадлежности $\mu_{\hat{C}}(u)$ некоторого нечеткого множества \hat{C} :

$$\mu_{\hat{C}}(u) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)).$$

Теорема 1.1.1. Для того чтобы отображение $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u))$ определяло функцию принадлежности $\mu_{\hat{C}}(u)$ нечеткого множества \hat{C} , являющегося пересечением, в смысле определения 1.1.5, нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , необходимо и достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло условиям:

1. $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = F(\mu_{\hat{B}}(u), \mu_{\hat{A}}(u))$.
2. Если $\mu_{\hat{A}}(u) = 0$, то $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = 0$.
3. Если $0 \leq \mu_{\hat{A}}(u) + \delta \leq 1$ и $0 \leq \mu_{\hat{B}}(u) + \delta \leq 1$, то

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) + \delta.$$

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы очевидна. Докажем его достаточность. Пусть имеется два нечетких множества \hat{A} и \hat{B} с функциями принадлежности $\mu_{\hat{A}}(u)$ и $\mu_{\hat{B}}(u)$ соответственно. Пусть $u \in U$ и пусть для определенности $\mu_{\hat{A}}(u) \leq \mu_{\hat{B}}(u)$. По второму свойству

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u)) = 0.$$

По третьему свойству получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{C}}(u) &= F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = F(\mu_{\hat{A}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u)) + \mu_{\hat{A}}(u) = \\ &= \mu_{\hat{A}}(u) = \min \{ \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) \}. \end{aligned}$$

Если $\mu_{\hat{A}}(u) \geq \mu_{\hat{B}}(u)$, то используя первое свойство, получаем уже рассмотренный случай. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 1.1.2. Для того чтобы отображение $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u))$ определяло функцию принадлежности $\mu_{\hat{C}}(u)$ нечеткого множества \hat{C} , являющегося объединением, в смысле определения 1.1.6, нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , необходимо и достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло условиям:

1. $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = F(\mu_{\hat{B}}(u), \mu_{\hat{A}}(u))$.
2. Если $\mu_{\hat{A}}(u) = 1$, то $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = 1$.
3. Если $0 \leq \mu_{\hat{A}}(u) + \delta \leq 1$ и $0 \leq \mu_{\hat{B}}(u) + \delta \leq 1$, то

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) + \delta.$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть имеется два нечетких множества \hat{A} и \hat{B} с функциями принадлежности $\mu_{\hat{A}}(u)$ и $\mu_{\hat{B}}(u)$ соответственно. Пусть $u \in U$ и пусть для определенности $\mu_{\hat{A}}(u) \leq \mu_{\hat{B}}(u)$ и $1 - \mu_{\hat{B}}(u) = \delta$.

С учетом второго свойства

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, 1) = 1.$$

По третьему свойству и из сказанного получаем, что

$$F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) + \delta = F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = 1.$$

Тогда

$$\mu_{\hat{C}}(u) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = 1 - \delta = \mu_{\hat{B}}(u) = \max\{\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)\}.$$

Если $\mu_{\hat{A}}(u) \geq \mu_{\hat{B}}(u)$, то используя первое свойство, получаем уже рассмотренный случай. Это завершает доказательство теоремы.

Нечеткие множества в случае, когда универсальным множеством является числовая ось, принято называть *нечеткими величинами*. Нечеткая величина, функция принадлежности которой кусочно-непрерывна и выпукла, называется *нечетким числом*. Часто при решении практических задач используются треугольные нечеткие числа, являющиеся, по существу, линейным приближением нечетких чисел более сложного вида. Мы в дальнейшем будем, как правило, использовать такого типа линейные приближения.

Определение 1.1.7. *Треугольным нечетким числом \hat{A} называется тройка $\langle a, b, c \rangle$ действительных чисел, где $a \leq b \leq c$.*

Если $a < b < c$, то функция принадлежности $\mu_{\hat{A}}$ определяется следующим образом:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b], \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c], \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

если $a = b < c$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in (b, c], \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

если $a < b = c$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

если $a = b = c$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = b, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Второе число тройки $\langle a, b, c \rangle$ обычно называют *модой* или четким значением нечеткого треугольного числа, $\mu_{\hat{A}}(b) = 1$. Числа a и c характеризуют степень размытости (нечеткости) четкого числа b (рис. 1.1.6).

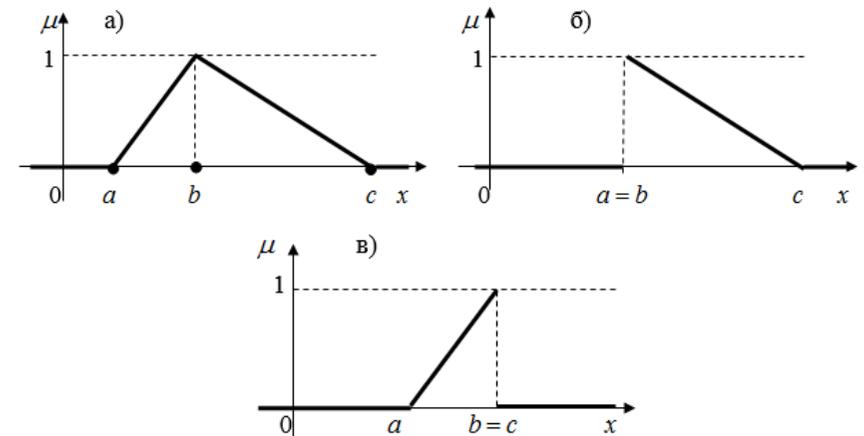


Рис. 1.1.6. Треугольные числа (здесь универсальное множество – вся числовая ось)

Например, на рис. 1.1.7 изображен график функции принадлежности нечеткого треугольного числа $A = \langle 2, 4, 7 \rangle$, которое лингвистически можно проинтерпретировать как "около 4" или "приблизительно 4".

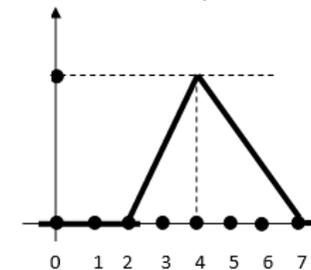


Рис. 1.1.7. Приблизительно 4 (здесь универсальное множество – вся числовая ось)

Определение 1.1.8. Трапецидальным нечетким число будем называть четверку действительных чисел $\langle a, b, c, d \rangle$, где $a \leq b \leq c \leq d$.

Если $a < b \leq c < d$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 1, & \text{если } x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{если } x \in [c, d] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что здесь также как и с треугольными числами возможны аналогичные случаи, связанные с нарушением условия $a < b \leq c < d$.

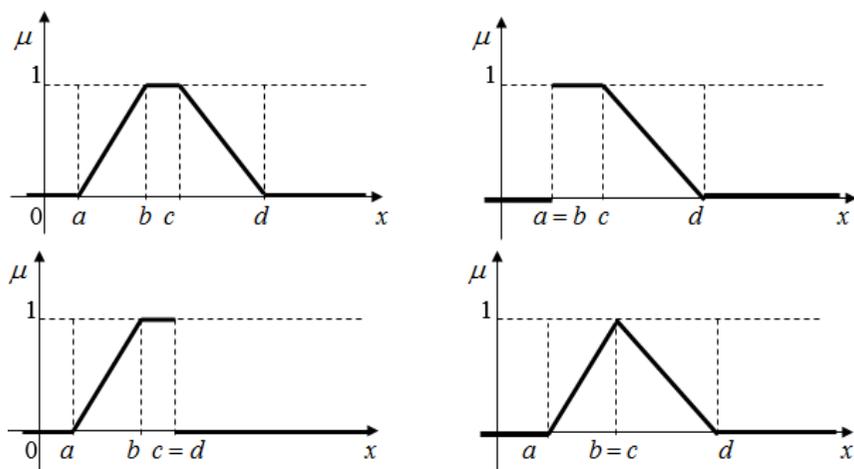


Рис. 1.1.8. Трапецидальные числа (здесь универсальное множество – вся числовая ось)

Пример 1.1.4. Для характеристики затрат времени t на ожидание обслуживания в очереди, воспользуемся нечеткими числами, формализуемыми нечеткими множествами “быстро”, “средне”, “долго”, определенными на универсальном множестве от нуля до пятидесяти минут. Графики функций принадлежности этих множеств представлены на рисунке 1.1.9.

Нам в дальнейшем потребуются операции преобразования четкого множества в нечеткое и преобразование нечеткого множества в четкое число. Эти операции называются соответственно фаззификация и дефаззификация.

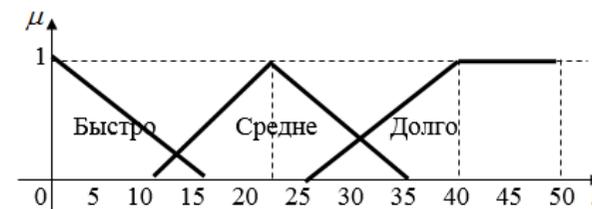


Рис. 1.1.9. Время ожидания в очереди

1.1.4. Фаззификация и дефаззификация нечеткого множества.

Определение 1.1.9. Фаззификация – преобразование некоторого четкого множества в нечеткое.

Применительно к рассматриваемым в данной работе задачам понятие фаззификация имеет более узкий смысл, на котором мы остановимся в свое время.

Определение 1.1.10. Дефаззификацией называется процедура преобразования нечеткого множества в число.

В теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождения числовых характеристик (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Однако, пригодность этого способа ограничивается лишь одноэкстремальными функциями принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности в Fuzzy Logic Toolbo (пакет расширения MATLAB, содержащий инструменты для проектирования систем нечеткой логики) запрограммированы следующие методы дефаззификации:

- *Centroid* - центр тяжести;
- *Bisector* - медиана;
- *LOM (Largest Of Maximums)* - наибольший из максимумов;
- *SOM (Smallest Of Maximums)* - наименьший из максимумов;
- *Mom (Mean Of Maximums)* - центр максимумов.

Обозначим $\bar{u} = \max_{u \in U, \mu(u) > 0} u$, $\underline{u} = \min_{u \in U, \mu(u) > 0} u$.

Определение 1.1.11. Дефаззификация нечеткого множества

$$\hat{A} = \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{\mu_{\hat{A}}(u)}{u} \quad (1.1.4)$$

по методу центра тяжести осуществляется по формуле

$$\alpha = \frac{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} u \cdot \mu_{\hat{A}}(u) \cdot du}{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \mu_{\hat{A}}(u) \cdot du}. \quad (1.1.5)$$

В 1.1.11 предполагается интегрируемость функции принадлежности.

Физическим аналогом формулы (1.1.5) является координата по оси абсцисс центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осью абсцисс, осями, параллельными оси ординат и проходящими через точки с абсциссами \underline{u} и \bar{u} , и графиком функции принадлежности нечеткого множества.

Определение 1.1.12. В случае дискретного универсального множества

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) / u_i \quad (1.1.6)$$

его дефаззификация по методу центра тяжести осуществляется по формуле

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \cdot \mu_{\hat{A}}(u_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i)}. \quad (1.1.7)$$

Физическим аналогом формулы (1.1.7) так же, как и формулы (1.1.5) является координата по оси абсцисс центра, тяжести, но уже не плоской фигуры, а системы материальных точек массы $\mu_{\hat{A}}(u_i)$, имеющих абсциссу, равную $u_i, i=1,2,\dots,k$.

Определение 1.1.13. Дефаззификация нечеткого множества

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) / u_i$$

по методу медианы состоит в нахождении такого числа α , что

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ u_j \mid \sum_{i=j}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) \right\}.$$

Определение 1.1.14 Дефаззификация по методу медианы нечеткого множества (при условии интегрируемости)

$$\hat{A} = \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{\mu_{\hat{A}}(u)}{u}$$

состоит в нахождении такого числа α , что

$$\int_{\underline{u}}^{\alpha} \mu_{\hat{A}}(u) du = \int_{\alpha}^{\bar{u}} \mu_{\hat{A}}(u) du.$$

Геометрической интерпретацией метода медианы является нахождение такой точки на оси абсцисс, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке, делит площадь под графиком функции принадлежности на две равные части.

Пример 1.1.5. Провести дефаззификацию нечеткого множества «число обслуженных за смену покупателей» из примера 1.1.1 по методу центра тяжести (найти четкое значение α для этого нечеткого множества).

Решение: Применяя формулу из определения 1.1.12, получаем: для числителя этой формулы:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k u_i \cdot \mu_{\hat{A}}(u_i) &= 0 \cdot 155 + 0,1 \cdot 160 + 0,3 \cdot 165 + 0,8 \cdot 170 + 1 \cdot 175 + \\ &+ 1 \cdot 180 + 0,5 \cdot 185 + 0 \cdot 190 = 649, \end{aligned}$$

для ее знаменателя:

$$\sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) = 0 + 0,1 + 0,3 + 0,8 + 1 + 1 + 0,5 + 0 = 3,7.$$

Окончательно,

$$\alpha = \frac{649}{3,7} = 175,4.$$

Нас в дальнейшем будет интересовать метод центра тяжести. Остановимся на нем подробнее и рассмотрим некоторые его свойства.

Рассмотрим дискретное нечеткое множество \hat{A} из формулы 1.1.6, и дискретную случайную величину ξ , принимающую значения из множества $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_k соответственно, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Если

$$p_i = \frac{\mu_{\hat{A}}(u_i)}{\sum_{j=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_j)}, i=1,2,\dots,k,$$

то центр тяжести нечеткого множества \hat{A} совпадает с математическим ожиданием случайной величины ξ .

Понятно, что аналогичное утверждение справедливо и для координаты центра тяжести по оси абсцисс, задаваемой формулой 1.1.5 в случае нечеткого множества, задаваемого формулой 1.1.4.

Как уже отмечалось, дефаззификация по методу центра тяжести дает абсциссу центра тяжести соответствующей фигуры. Заметим, что ордината

β центра тяжести этой фигуры для дискретного нечеткого множества \hat{A} вычисляется по формуле

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \cdot \mu_{\hat{A}}(u_i)}{\sum_{i=1}^k u_i}. \quad (1.1.8)$$

Пример 1.1.6. Пусть $\hat{A} = \{0/0, 0,2/1, 0,4/2, 0,6/3, 0,8/4, 1,0/5\}$, тогда $\alpha = \frac{11}{3}$, $\beta = \frac{11}{15}$. Заметим, что в данном примере $\mu_{\hat{A}}(u) = 0,2u$, и тогда $\mu_{\hat{A}}(\alpha) = \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{15} = \beta$.

В примере 1.1.6 мы получили, что надежность того, что u равно абсциссе центра тяжести, равна ординате центра тяжести! На наш взгляд представляет интерес вопрос о том, какие нечеткие множества обладают этим свойством.

Оказывается, что для дискретного нечеткого множества \hat{A} , для которого $\mu_{\hat{A}}(u) = au$, $u \in [0, 1/a]$, где $a > 0$, выполняется равенства $\mu_{\hat{A}}(\alpha) = \beta$, где α и β вычисляются по формулам (1.1.7) и (1.1.8) соответственно. Действительно,

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \cdot au_i}{\sum_{i=1}^k au_i} = \frac{\sum_{i=1}^k u_i^2}{\sum_{i=1}^k u_i} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \cdot au_i}{\sum_{i=1}^k u_i},$$

отсюда следует, что $\mu_{\hat{A}}(\alpha) = a\alpha = \beta$.

§ 1.2. Элементы нечеткой логики

1.2.1. Основные понятия.

Нечеткая логика – это аппарат, позволяющий в определенной степени формализовать нечеткие, размытые рассуждения.

Рассмотрим некоторые понятия нечеткой логики [3, 6]. В отличие от классической математической логики, где значениями истинности высказываний могут быть только «истина» или «ложь» (значению «истина» соответствует 1, значению «ложь» - 0), в нечеткой логике рассматриваются нечеткие высказывания, которые могут быть истинными или ложными в какой-то степени. Степень истинности нечеткого высказывания принимает значения из замкнутого промежутка $[0, 1]$, при этом 0 соответствует ложному высказыванию, 1 – истинному.

Над нечеткими высказываниями вводится ряд логических операций, рассмотрим две из них, необходимых нам для дальнейшего: объединение и пересечение.

Определение 1.2.1. Под *нечетким высказыванием* будем понимать повествовательное предложение, выражающее законченную мысль, относительно которой можно судить об ее истинности или ложности только с некоторой степенью уверенности.

Следует иметь в виду, что не любое повествовательное предложение является высказыванием (нечетким высказыванием), например, предложение “расскажите мне последние новости” высказыванием не является.

Нечеткие высказывания будем обозначать $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ и так далее, степень (значение) его истинности будем обозначать $Tr(\tilde{A})$.

Над нечеткими высказываниями вводится ряд логических операций, рассмотрим две из них, необходимые нам для дальнейшего – конъюнкцию (И) и дизъюнкцию (ИЛИ).

Пусть \tilde{A} и \tilde{B} – два нечетких высказывания со значениями истинности $Tr(\tilde{A})$ и $Tr(\tilde{B})$ соответственно.

Нечеткие логические операции И (\wedge) и ИЛИ (\vee), по аналогии с нечеткими теоретико-множественными операциями пересечения и объединения (1.1.1) и (1.1.2), выполняются по правилам:

$$Tr(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \min \{Tr(\tilde{A}), Tr(\tilde{B})\}, \quad (1.2.1)$$

$$Tr(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = \max \{Tr(\tilde{A}), Tr(\tilde{B})\}. \quad (1.2.2)$$

Для формализации рассуждений, проводимых на обычном языке, нечеткой логике вводится понятие лингвистической переменной.

Определение 1.2.2. *Лингвистической переменной* называется переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного языка.

Определение 1.2.3. *Терм-множеством* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной. *Термом* называется любой элемент терм-множества.

В нечеткой логике терм формализуется нечетким множеством. В дальнейшем часто терм и нечеткое множество, его формализующее, будем обозначать одинаково.

Задание значения переменной словами, без использования чисел, для человека более естественно. Постоянно мы принимаем решения на основе вербальной информации типа: “сегодня отличная погода”, “предстоит долгое путешествие”, “большое расстояние”, “положительная оценка”, “плохое настроение” и т.п. Лингвистическая переменная играет важную роль в нечеткой логике, она используется в нечетком логическом выводе, в принятии решений на основе приближенных рассуждений.

С лингвистической переменной тесно связана “обычная” переменная, принимающая значения из универсального множества на котором определены нечеткие множества, формализующие термины рассматриваемой лингвистической переменной.

Пример 1.2.1. Рассмотрим процесс обслуживания автомашин на АЗС, о качестве функционирования этой АЗС будем судить по времени, проведенном в очереди (в минутах). Рассмотрим лингвистическую переменную «качество работы АЗС» с терминами «низкое (2)», «удовлетворительное (3)», «хорошее (4)», «отличное (5)». Эти термины формализуются нечеткими множествами, заданными на универсальном множестве $[0,60]$, их функции принадлежности приведены на рисунке 1.2.1.

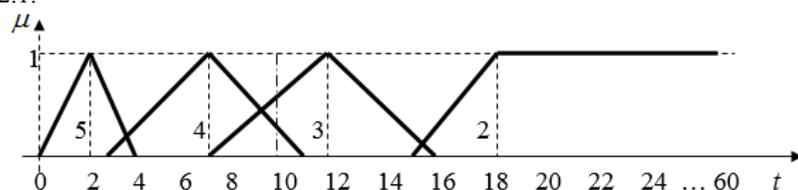


Рис. 1.2.1. Графики функций принадлежности для примера 1.2.1.

Значению обычной переменной «продолжительность времени ожидания в очереди» 10 минут соответствуют два значения лингвистической переменной «качество работы АЗС» - термины «хорошее» и «удовлетворительное».

Вернемся к понятию фаззификация и обсудим его «узкий смысл», о котором упоминалось сразу после определения 1.1.9.

Определение 1.2.4. Применительно к рассматриваемым в данной работе задачам **фаззификация** означает получение для конкретного значения переменной значений функций принадлежности, т.е. определенных для нее термов.

1.2.2. Нечеткий логический вывод.

При решении различных задач важную роль играет задача получения значения итогового результата по заданным значениям исходных факторов. В случае, когда какие-то из входных факторов и (или) выходной параметр являются нечеткими, задаются в виде лингвистических переменных, для решения задачи используется механизм нечеткого логического вывода, его алгоритм кратко может быть описан следующим образом

1. По заданным значениям факторов определить их степень принадлежности различным термам соответствующих лингвистических переменных, т.е. осуществить *фаззификацию* исходных значений факторов.

2. Используя базу знаний и определения операций над нечеткими множествами, построить нечеткое множество значений выходного параметра при условии, что входные факторы имеют заданные значения.

3. Используя полученное нечеткое множество, осуществить его дефаззификацию.

Отметим, что в литературе рассматривается несколько алгоритмов нечеткого вывода [6,10,12]. Мы будем использовать *алгоритм Мамдани*.

Определение 1.2.5. Пусть задан набор факторов $x = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ и параметр y , которые все являются лингвистическими. **Нечеткой базой знаний** о влиянии этого набора факторов на значение параметра y называется совокупность логических высказываний вида из A следует B , где A и B – некоторые нечеткие высказывания.

Пример 1.2.2. Рассмотрим задачу организации подвоза к очагу поражения в результате ЧС, в которой учитываются три фактора. Этим факторам соответствуют лингвистические переменные «необходимый объем подвоза», «число используемых автомобилей», «условия движения». Эти лингвистические переменные имеют термины: первая - «большой», «средний» и т.п., вторая - «автомобилей маловато», «автомобилей почти достаточно» и т.п., третья - «очень плохие», «плохие», «приемлемые», «хорошие» и т.д.

Параметр (выходная лингвистическая переменная), «возможные мероприятия», имеет термины: «все в порядке», «немного увеличить продолжительность рабочего дня», «серьезно увеличить продолжительность рабочего дня», и т.п.

Пример высказываний вида из A следует B .

ЕСЛИ

«необходимый объем подвоза»=«большой» И «число используемых автомобилей»= «автомобилей маловато» И «условия движения»=«плохие»

ИЛИ

«необходимый объем подвоза»=«большой» И «число используемых автомобилей»= «автомобилей почти достаточно» И «условия движения»=«плохие»

ТО

«возможные мероприятия»=«немного увеличить продолжительность рабочего дня». (Итоговый терм).

Проиллюстрируем схему нечеткого логического вывода на примере.

Пример 1.2.3. Рассмотрим задачу оценивания прыжков с трамплина. До 1945 года для оценки играла роль только дальность прыжка. Но с указанной даты было решено оценивать еще красоту и правильность прыжка.

В настоящее время отдельно оценивается дальность и техника прыжка. За приземление в район критической точки прыгун получает 60 очков. За недолет спортсменов штрафуются, за перелет – премируется (для этого имеются соответствующие таблицы). Техника прыжка оценивается пятью судьями, которые выставляют оценки по 20-балльной системе с шагом 0,5. Лучшая и худшая оценка отбрасываются, а остальные складываются и эта сумма прибавляется к оценке за дальность. Итоговый результат определяется по сумме баллов в двух попытках.

Мы хотим предложить подход, использующий методику нечеткого логического вывода.

Введем две входные лингвистические переменные и одну выходную: «дистанция» (дальность прыжка) с термами «далеко», «средне», «близко», «очень близко» (рис. 1.2.2), обозначается d , измеряется в метрах; «техника» с термами «плохая», «удовлетворительная», «хорошая», «отличная» (рис. 1.2.3), обозначается f , измеряется в баллах;

выходная переменная – «оценка» с термами «очень плохо», «плохо», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично» (рис. 1.2.4) в баллах, по 100 балльной системе, обозначается q , измеряется в баллах.

Зададим нечеткую базу знаний для рассматриваемого примера с помощью таблицы 1.2.1. Каждая запись в этой таблице соответствует своему нечеткому правилу, например:

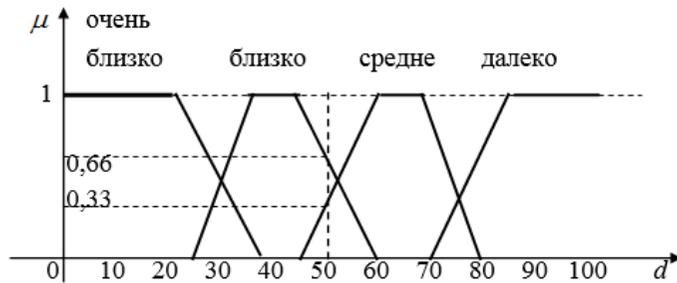


Рис. 1.2.2. Функции принадлежности термов переменной «дистанция»

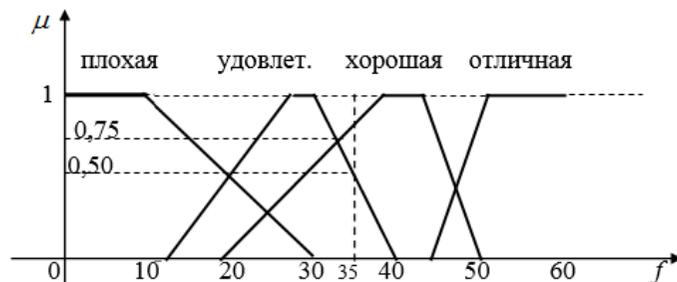


Рис. 1.2.3. Функции принадлежности термов переменной «техника»

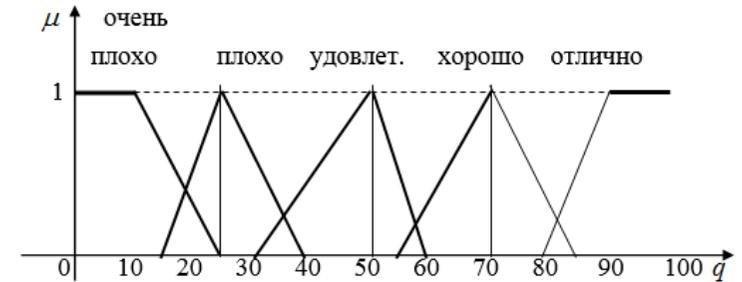


Рис. 1.2.4. Функции принадлежности термов переменной «оценка»

ЕСЛИ «дистанция»=«средне» И «техника»=«удовлетворительная», ТОГДА «оценка»=«удовлетворительно».

Таблица 1.2.1. Таблица нечетких правил.

Техника	Дистанция			
	Очень близко	Близко	Средне	Далеко
Плохая	Очень плохо	Очень плохо	Плохо	Удовлетворит.
Удовлетворительная	Очень плохо	Плохо	Удовлетворит.	Хорошо
Хорошая	Плохо	Удовлетворит.	Хорошо	
Отличная	Удовлетворит.	Удовлетворит.	Хорошо	Отлично

Оценка спортсмену выставляется по следующему правилу. Данные о прыжке – его дальность и оценка техники (значения переменных «дистанция» и «техника») будут фазифицированы, обработаны согласно табличным правилам, дефазифицированы и полученный результат предлагается признать итоговой оценкой спортсмена.

Пусть для рассматриваемого прыжка «дистанция» = 40 м и «техника» = 35 баллов.

Решение. Обозначения: D – «дистанция», F – «техника», Q – «оценка»; \hat{D}_1 – «очень близко», \hat{D}_2 – «близко», \hat{D}_3 – «средне», \hat{D}_4 – «далеко», \hat{F}_1 – «плохая», \hat{F}_2 – «удовлетворительная», \hat{F}_3 – «хорошая», \hat{F}_4 – «отличная», \hat{Q}_1 – «очень плохо», \hat{Q}_2 – «плохо», \hat{Q}_3 – «удовлетворительно», \hat{Q}_4 – «хорошо», \hat{Q}_5 – «отлично».

$E_{ij}, i=1,2,3, j=1,2,3,4$ — нечеткое высказывание («дистанция» равна D_i и «техника» равна F_j) (см. табл.1.2.2), т.е. сочетание значений D_i и F_j факторов.

Степень истинности этого нечеткого высказывания обозначим $\mu_{E_{ij}}$.

Таблица 1.2.2. Таблица нечетких правил в принятых обозначениях

Техника	Дистанция			
	\hat{D}_1	\hat{D}_2	\hat{D}_3	\hat{D}_4
\hat{F}_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}
\hat{F}_2	E_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
\hat{F}_3	F_{31}	F_{32}	F_{33}	F_{34}
\hat{F}_4	F_{41}	F_{42}	F_{43}	F_{44}

Пусть $\mu_{\hat{D}_i}(d), i=1,2,3,4$, — функции принадлежности нечеткого множества, формализующего терм \bar{D}_i лингвистической переменной «дистанция», аналогично, $\mu_{\hat{F}_j}(f), j=1,2,3,4$, — функции принадлежности нечеткого множества, формализующего терм \hat{F}_j , и $\mu_{\hat{Q}_k}(q), k=1,2,3,4,5$, — функции принадлежности нечеткого множества, формализующего терм \hat{Q}_k . Предполагается, что все эти нечеткие множества задаются соответствующими треугольными или трапецеидальными нечеткими числами:

$$\hat{D}_i - \langle 0,0,20,40 \rangle, \langle 25,35,45,60 \rangle, \langle 45,60,70,80 \rangle, \langle 70,85,100,100 \rangle,$$

$$\hat{F}_j - \langle 0,0,10,15 \rangle, \langle 15,30,40 \rangle, \langle 20,40,45,50 \rangle, \langle 45,50,60,60 \rangle,$$

$$\hat{Q}_k - \langle 0,0,10,20 \rangle, \langle 15,25,40 \rangle, \langle 30,50,60 \rangle, \langle 33,70,85 \rangle, \langle 80,90,100,100 \rangle$$

Анализируя графики на рисунке 1.2.2, находим, что

$$\mu_{\hat{D}_1}(50)=0, \mu_{\hat{D}_2}(50)=0,66, \mu_{\hat{D}_3}(50)=0,33, \mu_{\hat{D}_4}(50)=0.$$

Аналогично на рисунке 1.2.3, видим, что

$$\mu_{\hat{F}_1}(35)=0, \mu_{\hat{F}_2}(35)=0,50, \mu_{\hat{F}_3}(35)=0,75, \mu_{\hat{F}_4}(35)=0.$$

Из определения нечеткой конъюнкции (формула 1.2.2) получаем:

$$\mu_{E_{ij}}(d, f) = \min \{ \mu_{\hat{D}_i}(d), \mu_{\hat{F}_j}(f) \}.$$

Таблица 1.2.3. Значения $\mu_{E_{ij}}(50,35)$

	$\mu_{\hat{D}_i}(50)$	\hat{F}_1	\hat{F}_2	\hat{F}_3	\hat{F}_4
$\mu_{\hat{F}_j}(35)$		0	0,50	0,75	0
\hat{D}_1	0	0	0	0	0
\hat{D}_2	0,66	0	0,50	0,66	0
\hat{D}_3	0,33	0	0,33	0,33	0
\hat{D}_4	0	0	0	0	0

В таблице 1.2.3 даны значения функции принадлежности $\mu_{E_{ij}}(d, f)$ при $d=50$ и $f=35$. Ее анализ показывает, что интерес представляют только четыре сочетания значений факторов: $\hat{D}_2-\hat{F}_2, \hat{D}_2-\hat{F}_3, \hat{D}_3-\hat{F}_2$ и $\hat{D}_3-\hat{F}_3$, т.е. сочетания $E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}$. Сочетанию E_{22} соответствует терм \hat{Q}_2 выходной переменной «оценка», сочетанию E_{23} соответствует терм \hat{Q}_3 , сочетанию E_{32} — терм \hat{Q}_3 , сочетанию E_{33} — \hat{Q}_4 . В ситуациях E_{23} и E_{32} терм выходной переменной один и тот же. В соответствии с правилом нечеткой дизъюнкции (формула 1.2.1)

$$\mu_{\hat{Q}_3}(50,35) = \max \{ \mu_{E_{23}}(50,35), \mu_{E_{32}}(50,35) \} = \max \{ 0,66, 0,33 \} = 0,66.$$

Этот максимум достигается для ситуации E_{23} , поэтому в дальнейшем из сочетаний E_{23} и E_{32} достаточно рассматривать только сочетание E_{23} . Следовательно, будем рассматривать три сочетания E_{22}, E_{23}, E_{33} , которые приводят к выходным термам соответственно $\hat{Q}_2, \hat{Q}_3, \hat{Q}_4$.

Осталось определить итоговую оценку q . Находить ее будем приближенно. Для этого будем менять значение итоговой оценки от 5 до 95 баллов с шагом 10 баллов. Результаты вычислений сведены в таблицы 1.2.4 и 1.2.5. Таблица 1.2.4 заполнена на основании графиков функций принадлежности термов выходной переменной (рис. 1.2.3).

Таблица 1.2.4. Значения функций принадлежности $\mu_{\hat{Q}_k}(q)$ (степень уверенности в том, что если $Q=Q_k$, то прыжок следует оценить в q баллов)

q	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
$\mu_{\hat{Q}_2}(q)$	0	0	1,00	0,33	0	0	0	0	0	0
$\mu_{\hat{Q}_3}(q)$	0	0	0	0,25	0,75	0,50	0	0	0	0
$\mu_{\hat{Q}_4}(q)$	0	0	0	0	0	0	0,67	0,67	0	0

Введем обозначения. Через $\mu_{ijk}(d, f, q)$ обозначим функцию принадлежности переменного нечеткого высказывания “(значение термина \hat{D}_i равно d) и (значение термина \hat{F}_j равно f) и (значение термина \hat{Q}_k равно q)”, тогда

$$\mu_{ijk}(d, f, q) = \min\{\mu_{\hat{D}_i}(d), \mu_{\hat{F}_j}(f), \mu_{\hat{Q}_k}(q)\};$$

значения этой функции в зависимости от q для трех рассматриваемых сочетаний при $d=50, f=35$ указаны в трех верхних строках таблицы 1.2.5.

Через $\mu_Q(d, f, q)$ обозначим функцию принадлежности лингвистической переменной «оценка» при условии, что значением лингвистической переменной «дистанция» является дальность прыжка, равная d , и значением лингвистической переменной «техника» является сумма баллов за технику прыжка, равна f :

$$\mu_Q(d, f, q) = \max_{(i,j,k)} \mu_{ijk}(d, f, q),$$

значения этой функции указаны в нижней строке таблицы 1.2.5, они равны максимальному числу из чисел соответствующего столбца.

Заглавная и нижняя строки таблицы 1.2.5 задают функцию принадлежности нечеткого множества «оценка при условии, что $d=50, f=35$ »

Таблица 1.2.5. Значения функций принадлежности $\mu_{Q_k}(q)$

(степень уверенности в том, что если $Q = Q_k$, то прыжок следует оценить в q баллов)

q	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
$\mu_{222}(50,35,q)$	0	0	0,50	0,33	0	0	0	0	0	0
$\mu_{233}(50,35,q)$	0	0	0	0,25	0,67	0,50	0	0	0	0
$\mu_{334}(50,35,q)$	0	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0	0
$\mu_Q(50,35,q)$	0	0	0,50	0,33	0,67	0,50	0,33	0,33	0	0

Дефаззификация этого нечеткого множества по методу “центр тяжести” дает:

$$\frac{0+0+0,5 \cdot 25+0,33 \cdot 35+0,67 \cdot 45+0,5 \cdot 55+0,33 \cdot 65+0,33 \cdot 75+0+0}{0+0+0,5+0,33+0,67+0,5+0,33+0,33+0+0} \cong 48,25.$$

В результате проделанных расчетов рассматриваемый прыжок предлагается оценить в 48,25 балла.

ГЛАВА 2. Необходимые сведения из теории массового обслуживания

§ 2.1. Предмет и основные понятия теории массового обслуживания

2.1.1. Предмет и области применения теории массового обслуживания.

Теория массового обслуживания – это одна из прикладных ветвей современной теории случайных процессов. **Предметом теории массового обслуживания** является анализ систем, предназначенных для удовлетворения массового спроса на обслуживание определенного вида; ее **целью** - разработка математических методов оценки качества организации обслуживающих систем.

Подчеркнем, что речь идет об оценке качества организации обслуживания, а не о качестве самого обслуживания. Если в качестве системы массового обслуживания, например, рассматривается мастерская по ремонту оборудования какого-то типа, то изучаются вопросы, связанные с вероятностью той или иной длины очереди, временем ожидания в очереди, процентом числа свободных и занятых каналов обслуживания и т.п. Вопросы же о том, насколько хорошо выполнен ремонт, остаются за рамками рассматриваемой теории.

Термин «обслуживание» понимается в самом широком смысле: например, отремонтировать машину, обстрелять самолет противника, предоставить посадочную полосу самолету, заходящему на посадку, и так далее.

Круг задач, решаемых в рамках теории массового обслуживания, весьма широк, так как в практической деятельности постоянно возникает потребность в обслуживании какого-нибудь специального вида. Например, покупка товаров в магазине или билетов на поезд; обслуживание клиентов в ателье, парикмахерской, во всевозможных мастерских по ремонту техники; обслуживание судов, прибывающих в порт, железнодорожных эшелонов и транспортов, прибывающих на станцию и т.д. Во всех подобных случаях задача состоит в установлении связи между количественным составом технологического оборудования, предназначенного для удовлетворения потребности в обслуживании, и качеством организации проведения этих работ. При создании системы массового обслуживания необходимо решать вопросы о возможностях и структуре таких систем. С одной стороны, увеличение возможностей системы обслуживания оказывается полезным потребителю - он быстрее получит обслуживание. С другой стороны, это приводит к простоям технологического оборудования системы обслуживания и требует увеличения капитальных затрат.

Для того, чтобы выбрать наиболее рациональный вариант системы обслуживания, надо уметь оценивать качество каждого из возможных вариантов. Это и является задачей теории массового обслуживания. Укажем некоторые ситуации, возникающие в военном деле, для описания которых с успехом может быть применена рассматриваемая теория. Имеется три основных направления приложения этой теории, представляющих самый непосредственный интерес для военных специалистов:

- проблемы, связанные со структурой и функционированием различных систем обслуживания, в целях построения оптимальных систем в каждом конкретном случае;
- проблемы, связанные с организацией управления операцией (боем);
- проблемы, связанные с математическим моделированием процессов боевых действий.

К задачам первой группы относятся способы организации:

- обслуживания боевой техники как в процессе ведения боевых действий, так и в мирное время;
- структуры и функционирования ремонтных мастерских;
- медицинского обеспечения в боевых условиях;
- заправки горючим боевой техники; движения и обслуживания железнодорожных воинских эшелонов и транспортов и т.п.

Подобные задачи возникают также и при планировании боевых действий. Так, например, задачу отражения налета бомбардировочной авиации силами противовоздушной обороны можно рассматривать как задачу такого типа.

Следует отметить, что решение таких задач необходимо не только при использовании уже готовых образцов оружия, но и на стадии проектирования новых, при разработке новых организационных структур управления применительно к современным условиям ведения боевых операций.

Ко второй группе относятся задачи, связанные с организацией работы должностных лиц органов управления по переработке информации. Как известно, процесс управления силами в бою основывается на целенаправленной переработке информации должностными лицами о силе и тактике действий противника, о размещении, состоянии и возможностях своих войск и тыла. В настоящее время все большее значение приобретают количественные методы, используемые при обработке этой информации, и, в частности, количественные оценки качества управления, которые требуют разработки специальных критериев эффективности. Эти критерии должны обеспечить выбор наилучшего (рационального) способа управления из

всех возможных. Теория массового обслуживания оказывает большую помощь при построении таких критериев.

Для задач, связанных с передачей и переработкой информации, при рассмотрении их с точки зрения теории массового обслуживания, заявкой на обслуживание можно считать поступление новой информации, а обслуживанием – ее передачу или переработку.

Задачи третьей группы возникают при математическом моделировании процессов боевых действий. С появлением быстродействующей вычислительной техники возникла возможность такого моделирования на ЭВМ. Для построения моделей, достаточно адекватных изучаемому процессу, весьма полезной часто оказывается теория массового обслуживания.

Рождение теории массового обслуживания принято связывать с именем Эрланга (конец XIX века – 1-я половина XX века), который занимался вопросами организации телефонной связи и в 1909 году опубликовал свою первую работу “The Theory of Probabilities and Telephone Conversations”. Важную роль в развитии этой теории сыграли отечественные математики. Книга А.Я. Хинчина [13] явилась первым трудом, в котором были строго сформулированы идеи и методы теории. Для дальнейшего развития этой теории много сделали Б.В. Гнеденко со своими учениками и А.Н. Колмогоров.

Являясь к настоящему времени достаточно самостоятельной, теория массового обслуживания использует ряд своих специфических терминов.

2.1.2. Основные понятия теории массового обслуживания.

Приведем основные понятия теории массового обслуживания.

Требование – заявка, заказ на удовлетворение определенной потребности.

Обслуживание – процесс удовлетворения потребности. Из предыдущего ясно, что удовлетворение потребности может происходить как в интересах того, с чьей стороны поступило требование, так и в интересах того, кто удовлетворяет потребность. Такой подход существенно обогащает понятие требования.

Источник требований (клиент) – человек, машина, организация и т.д., которым требуется или может потребоваться обслуживание данного вида. Подчеркнем, что в отличие от бытового понимания в теории массового обслуживания клиент – это не только тот, кто обратился с требованием на обслуживание, но и тот, кому это обслуживание может когда-нибудь потребоваться.

Все мы являемся клиентами парикмахерской (за исключением может быть лысых и тех, кто стрижется у знакомых), любой автомобиль является клиентом автозаправочной станции, владелец телевизора – клиент системы

по их ремонту (за исключением умельцев, которые сами осуществляют необходимый ремонт).

В дальнейшем мы будем часто отождествлять термины требование и клиент. Например, мы будем говорить, что требование стоит в очереди, требование обслуживается и т.д.

Канал обслуживания – совокупность сил и средств, необходимых для удовлетворения требования или его части. Важной характеристикой канала является то, что одновременно обслуживаться в нем может не более одного требования. В этом смысле поточная линия не является каналом, каналом будет каждый пост, из которых эта линия состоит.

Фаза обслуживания – совокупность однотипных каналов.

Скажем, магазин с продавцом имеет две фазы обслуживания: кассиры и продавцы. Каналами обслуживания здесь являются кассиры (на первой фазе) и продавцы (на второй). Другой пример: обслуживание прибывающего на военные сборы личного состава. Прибывающий человек проходит несколько фаз обслуживания: оформление документов, получение противогаза, получение обмундирования, питание, направление к месту службы и так далее. При этом порядок прохождения фаз обслуживания разными людьми может быть различным.

Система массового обслуживания (СМО) – совокупность фаз обслуживания с указанием структуры связей между ними.

Очередь – упорядоченная совокупность требований, ожидающих начала обслуживания. Подчеркнем, что для всех каналов одной фазы обслуживания она общая. На обслуживание в освободившийся канал поступает первое из требований, стоящих в очереди.

Требование, находящееся в системе – это требование, обслуживание которого уже осуществляется, или требование, ожидающее начала обслуживания в очереди.

Поступление требования в систему является случайным событием, оно происходит в случайные моменты времени. В теории массового обслуживания процесс поступления требований в систему моделируется с помощью процесса чистого размножения.

Входящим потоком требований называется случайный процесс чистого размножения, состояния которого в момент времени t суть число требований, поступивших в СМО к этому моменту. Входящий поток описывает вероятностные характеристики моментов поступления требований в СМО.

Выходящий поток образуется требованиями, покидающими систему. Среди этих требований могут быть и не обслуженные. Так, например, в магазине может не оказаться необходимого вам товара; линия связи на автоматической телефонной станции может оказаться занятой.

Время обслуживания – время, необходимое для обслуживания одного требования (или его части) в канале. Подчеркнем, что это время

является случайным. Мы не можем заранее точно предсказать, сколько времени потребуется для ремонта данного автомобиля, для погрузки воинского эшелона, для заправки горючим данного подразделения.

В заключение этого пункта заметим, что имеется огромное количество различных систем массового обслуживания, и это делает необходимым их классификацию.

2.1.3. Элементы теории случайных процессов.

Аналитический аппарат теории массового обслуживания базируется на теории случайных процессов. Понятие случайного процесса является естественным обобщением понятия случайная величина. С помощью случайных величин явления описываются как бы в статике, в каких-то фиксированных условиях эксперимента, а это в ряде случаев оказывается недостаточным. На практике часто встречаются явления, в которых случайность проявляется в форме процесса, т.е. случайная величина меняет свой характер в ходе эксперимента в зависимости от значения каких-либо аргументов. Например, рассмотрим выход техники из строя по дням. Выход техники из строя в каждый конкретный день есть случайная величина, при этом понятно, что случайная величина, описывающая выход техники из строя в пятый день, не та же самая, что величина, описывающая выход техники в третий или восьмой день. Более того, свойства случайной величины, соответствующей некоторому дню, вообще говоря, зависят от того, какие значения приняла случайные величины, соответствующие предыдущим дням (т.е. выход техники из строя в пятый день зависит от того, как выходила техника из строя в первые четыре дня). Упорядоченная последовательность случайных величин, описывающих выход техники из строя в соответствующие дни операции, образует случайный процесс.

Другой пример. Автомобиль совершает регулярные рейсы от пункта А до пункта В. Рассмотрим изменения его скорости в зависимости от расстояния, пройденного им от пункта А (рис.1.3.1).

Каждой точке на оси абсцисс соответствует своя случайная величина, значениями которой являются значения скорости автомобиля в этом месте дороги. Упорядоченная совокупность этих случайных величин есть случайный процесс.

Определение 2.1.1. *Случайным процессом называется упорядоченная последовательность случайных величин или функция, значениями которой являются случайные величины.*

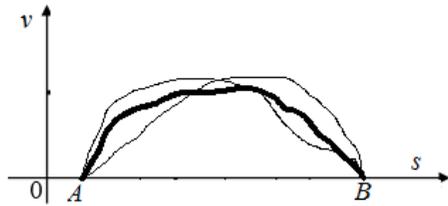


Рис. 2.1.1. Графики зависимости скорости от расстояния

Конкретный вид, принимаемый процессом в ходе опыта, называется **реализацией случайного процесса**. На рис. 2.1.1 приведены три реализации случайного процесса.

Определение 2.1.2. Значения случайных величин, образующих случайный процесс, называются **состояниями случайного процесса**, а их совокупность называется **пространством состояний**.

В дальнейшем, говоря о случайных процессах, мы слово случайный будем опускать. Для примера с выходом техники из строя состояниями процесса являются возможные значения числа выходов техники за день операции: 0, 1, 2, ..., N, где N – списочный состав техники. Для примера с движением автомобиля возможными состояниями являются все возможные значения скорости от v_{\min} до v_{\max} , v_{\max} – максимально возможная скорость, v_{\min} – минимально возможная скорость.

Заметим, что случайный процесс в любой момент времени находится в каком-то состоянии. Рассматривая изменение его состояния, мы будем говорить, что процесс перешёл из одного состояния в другое. Подчеркнём, что время на такой переход не затрачивается.

В общем случае процесс может зависеть от нескольких аргументов, нас будет интересовать только тот случай, когда аргументом является время t . Поэтому обозначать случайный процесс будем через $X(t)$. При любом фиксированном t значением процесса $X(t)$ является случайная величина, которую мы обозначим X_t .

2.1.4. Классификация случайных процессов.

Дадим теперь краткую классификацию случайных процессов, она, не претендуя на полноту, позволяет выделить некоторые интересные для дальнейшего их классы.

В основе приводимой классификации лежат три характеристики: пространство состояний, множество значений аргумента и статистические зависимости между случайными величинами, образующими процесс. Обратим внимание на последнюю характеристику.

Независимые процессы. Самым простым случайным процессом является процесс, состоящий из независимых случайных величин. Такой

процесс с трудом можно признать процессом, так как между его случайными величинами нет никакой зависимости.

Стационарные процессы. Это процессы, вероятностные характеристики которых не меняются с течением времени

Марковские процессы. В 1907 году академик Российской Академии Наук А.А. Марков опубликовал работу, в которой определил и исследовал процессы, известные теперь под названием марковских.

Марковские процессы – это процессы, обладающие тем свойством, что их будущее зависит только от их настоящего. Это свойство называется **отсутствием последствий**. Конечно, предыстория процесса влияет на его дальнейшее развитие, но всё это влияние сосредоточено в настоящем.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи марковских процессов.

Процессы размножения и гибели. Такими процессами называются марковские процессы с дискретным пространством состояний, в которых переходы возможны только в соседние состояния.

Такие процессы возникли при моделировании развития биологических популяций (отсюда и их название). Если в данный момент объем популяции составляет k единиц (т.е. процесс находится в состоянии E_k), то в случае гибели одного члена популяции он перейдет в состояние E_{k-1} , а в случае рождения – в E_{k+1} .

Предполагается, что одновременное рождение или гибель двух и более членов популяции невозможны. Более точно: вероятность перехода процесса из состояния E_k в состояние E_m , где $|k - m| > 1$, за время Δt стремится к нулю при Δt , стремящемся к нулю. Это свойство процесса называется **ординарностью**.

Рассматриваемые процессы широко используются при моделировании явлений, связанных с надежностью элементов и систем, а также процессов массового обслуживания. Заметим, что под объемом популяции можно понимать, например, число единиц техники, находящихся в ремонтной мастерской, число машин на автозаправочной станции, количество людей, пришедших в парикмахерскую или столовую, и т.п. При этом появление новой единицы (человека) техники рассматривается как рождение, а уход единицы техники (человека) из мастерской как гибель члена популяции.

Процесс чистого размножения – это процесс размножения и гибели, в котором переход из состояния E_k возможен только в состояние E_{k+1} . С помощью таких процессов удобно моделировать поступление клиентов на обслуживание и уход обслуженных клиентов из системы. Например, процесс, состояния которого в момент времени t суть число

единиц техники, поступивших на ремонт к этому моменту, или число единиц техники, покинувших мастерскую к этому моменту времени.

Процесс чистого размножения с постоянной интенсивностью – это процесс чистого размножения, у которого математическое ожидание числа рождений (их среднее число) в единицу времени постоянно и не зависит от состояния (объема популяции). Примером такого процесса может служить процесс прибытия автомашин на автозаправочную станцию, процесс поступления требований в городскую систему по ремонту телевизоров и т.д.

Рассматриваемый процесс называется также **процессом Пуассона**, а в теории массового обслуживания его принято называть **простейшим потоком**, остановимся на этом процессе подробнее.

Для процесса Пуассона вероятность $P_k(t)$ того, что к моменту времени t процесс окажется в состоянии E_k при условии, что при $t=0$ он был в состоянии E_0 (т.е., что за время t произойдет точно k рождений) определяется формулой

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность размножения (среднее число рождений в единицу времени).

Процесс Пуассона обладает следующими свойствами, которые однозначно его определяют:

- он стационарный,
- он ординарный,
- в нем отсутствует последствие.

2.1.5. Процессы размножения и гибели.

Рассмотрим процесс размножения и гибели. Иллюстрировать сказанное будем на примере ремонтной мастерской, моделируя её работу с помощью случайного процесса этого вида; состояния этого процесса будем характеризовать числом единиц техники, находящихся в мастерской (уже ремонтируемых или ожидающих начала ремонта).

Изобразим граф состояний (рис. 2.1.2) процесса размножения и гибели. Будем предполагать, что возможными состояниями процесса являются состояния $E_0, E_1, \dots, E_k, \dots$. Состояние E_0 соответствует тому положению, когда в мастерской нет ни одной единицы техники; состояние E_1 – в мастерской одна единица техники; состояние E_k – k единиц техники. Возможные состояния процесса изобразим прямоугольниками; возможные переходы процесса из состояния в состояние – стрелками, рядом с которыми укажем интенсивности соответствующих переходов: λ_i – интенсивность размножения в

состоянии E_i , μ_i – интенсивность гибели; если говорить о мастерской, то λ_i – среднее число (математическое ожидание) единиц техники, поступающих в мастерскую в единицу времени при условии, что в мастерской уже находится точно i единиц; μ_i – среднее число (математическое ожидание) единиц техники, покидающих мастерскую в единицу времени при условии, что в мастерской находится точно i единиц. Будем предполагать, что эти интенсивности не зависят от времени. Укажем на графе так же вероятности $P_k(t)$ того, что в момент t процесс находится в состоянии E_k (вероятность того, что в момент времени t в мастерской находится точно k единиц техники). Оказывается, что в случаях,

- когда число различных состояний конечно и все интенсивности переходов больше нуля,
- когда, существует такое i_0 , что $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$ и $\lambda_i < \mu_i$ при любом $i > i_0$,

с ростом времени t вероятности $P_k(t)$ стремятся к стационарным значениям P_k , которые вычисляются по формуле (2.1.1).

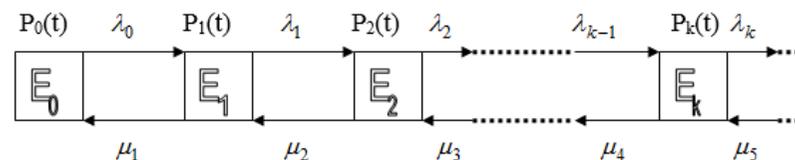


Рис.2.1.2. Граф состояний процесса размножения и гибели

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \cdot P_0. \quad (2.1.1)$$

Обозначим:

$$A_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}, \quad (2.1.2)$$

тогда

$$P_k = A_k P_0. \quad (2.1.3)$$

С учетом равенства (2.1.3) и равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

получаем, что

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right)^{-1}. \quad (2.1.4)$$

Более подробно с теорией случайных процессов можно познакомиться, например, в [9] и [14].

Вернемся к теории массового обслуживания.

2.1.6. Классификация систем массового обслуживания.

На практике встречаются самые разнообразные виды обслуживаемых систем. Классифицировать такие системы можно по следующим показателям:

- по числу фаз обслуживания, их составу и структуре связей между ними. Наиболее изученными являются самые простые – однофазные системы;
- по числу каналов на каждой фазе обслуживания и их пропускной способности;
- по наличию приоритетов у каналов и требований. Например, существует определенная система приоритетов у сообщений, передаваемых по каналам связи. Аналогично и каналы могут заниматься в соответствии с какими-то соображениями, например, сложные требования направляются прежде всего в наиболее квалифицированный канал;
- по типу входящего потока. Здесь выделим случай, когда этот поток является пуассоновским процессом, для которого вероятность $P_k(t)$ того, что к моменту времени t в систему поступит точно k требований определяется по формуле:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad (2.1.5)$$

где λ – среднее число (математическое ожидание числа) требований, поступающих в единицу времени;

- по виду закона распределения времени обслуживания. В классической теории массового обслуживания предполагается, что это время имеет показательное распределение, т.е.

$$P(t < \tau) = 1 - e^{-\mu \cdot t}, \quad (2.1.6)$$

где $P(t < \tau)$ – вероятность того, что время обслуживания t не превзойдет заданной величины τ , μ – среднее число (математическое ожидание числа) требований, обслуживаемых каналом в единицу времени;

- по дисциплине очереди. Различают **системы с неограниченной очередью**, в которых требование, прибывшее в момент, когда все каналы заняты обслуживанием, попадает в очередь не зависимо от ее длины и времени, которое ему придется в ней находиться, и **системы с ограниченной очередью**, характеризующиеся тем, что требование, прибывающее в систему в момент, когда нарушено некоторое условие, покидает систему не обслуженным. Такими условиями могут быть, например, следующие: длина очереди не

должна превосходить заданную, время пребывания в очереди не должно быть больше определенного и т.д. Крайним случаем системы с ограниченной очередью является система, в которой возникновение очереди не допускается или невозможно, но не потому, что система хорошо работает, а в силу каких-то внешних условий. Примером такой системы является противовоздушная оборона, в которой клиентами являются самолеты противника, а обслуживание состоит в их обстреле. Если все каналы обслуживания заняты, т.е. нет ни одной готовой к стрельбе зенитной установки, то самолет противника покидает зону обстрела не обслуженным (не обстрелянным). Примерами систем с неограниченной очередью являются магазины, многие ремонтные мастерские и т.д. Следует иметь в виду, что это конечно, некоторая абстракция, на самом деле очередь не может быть неограниченной, но когда она очень большая, то удобнее считать ее неограниченной. Железнодорожную станцию, имеющую три пути с погрузочно-выгрузочными местами и пять запасных путей, можно рассматривать как систему с ограниченной очередью, которая не может быть больше пяти. Если новый эшелон прибывает на станцию в момент, когда на каждом из запасных путей уже находится по эшелону (мы предполагаем, что на запасном пути может находиться только один эшелон), то он должен покинуть эту станцию;

- по числу клиентов. По этому показателю различают открытые и закрытые СМО. Если говорить строго, то **открытыми** называются системы с бесконечным числом клиентов, системы же с ограниченным числом клиентов называются **закрытыми**. На практике число клиентов всегда конечно, но если оно столь велико, что, не делая большой ошибки, его можно считать бесконечным, то система полагается открытой, в противном случае – закрытой. Если интенсивность поступления новых требований практически не зависит от того, сколько требований уже находится в системе, то считают, что клиентов много и система открытая.

Приведенные направления классификации показывают большое разнообразие систем массового обслуживания. Заметим, что приведенный перечень возможностей далеко не исчерпывает имеющееся разнообразие реальных систем массового обслуживания: далеко не всегда известны необходимые законы распределения, а если они и известны, то под них нет соответствующего математического аппарата; задано время функционирования системы, число действующих каналов обслуживания и (или) клиентов переменное, параметры или их часть, описывающие рассматриваемую систему обслуживания, являются нечеткими величинами и т.д. и т.п.

В настоящее время для анализа систем массового обслуживания используются, в общем-то одинаковые показатели, основные из которых описываются в следующем пункте. Отметим, что список этих показателей порожден рассмотрением классов систем, указанных в классификации. Для анализа иных систем могут потребоваться какие-то новые показатели.

§ 2.2. Математический аппарат теории массового обслуживания

2.2.1. Основные показатели качества организации систем массового обслуживания.

Для однофазных систем с n одинаковыми по производительности каналами без приоритетов, с пуассоновским входящим потоком и с временем обслуживания, распределенным по показательному закону, создан аналитический аппарат, позволяющий вычислять показатели качества их организации. Для анализа систем, не удовлетворяющих перечисленным условиям, процесс их функционирования можно исследовать, моделируя его используя современную вычислительную технику и методы статистического и имитационного моделирования [15, 16, 17]. При моделировании систем массового обслуживания используются два основных подхода: первый из них основан на использовании специализированных языков имитационного моделирования. Наибольшее распространение здесь получил язык GPSS. Второй подход основан на использовании универсальных языков программирования типа Си, Си ++, Pascal, Basic и т.п.

Для оценки качества организации систем массового обслуживания используются приводимые далее показатели. Обсуждая их, мы будем иметь в виду использование аналитического аппарата, но эти же показатели применяются и в случаях, когда аналитический аппарат не применим.

Введем обозначения:

m – число клиентов;

n – число каналов;

λ – среднее число требований (математическое ожидание числа требований), поступающих в систему в единицу времени. Используется при описании открытых СМО;

λ_1 – среднее число требований (математическое ожидание числа требований), поступающих в систему в единицу времени от одного клиента. Используется для описания закрытых СМО;

μ – среднее число требований (математическое ожидание числа требований), обслуживаемых одним каналом в единицу времени;

r – максимально возможная длина очереди.

Приведем основные показатели качества организации систем массового обслуживания.

1. $P_k, k = 0, 1, 2, \dots$, – вероятность того, что в системе находится точно k требований. Эта и все приводимые далее вероятности имеют простой физический смысл – это доля всего времени работы системы, когда наблюдалось соответствующее событие.

Выделим два важных частных случая:

а) P_0 – вероятность того, что в СМО нет ни одного требования, т.е. вероятность того, что все каналы обслуживания свободны;

б) P_n – вероятность того, что в СМО находится точно n требований, т.е. вероятность того, что все каналы обслуживания заняты и очереди нет;

2. $P_{\leq k}$ – вероятность того, что в СМО не более k требований. Так как события, состоящие в том, что в системе находится точно k требований, при разных k несовместны, то по первой теореме сложения вероятностей:

$$P_{\leq k} = P_0 + P_1 + \dots + P_k = \sum_{i=0}^k P_i.$$

3. P_3 – вероятность того, что все каналы обслуживания заняты (доля всего времени работы системы, когда все каналы заняты). Все каналы оказываются занятыми, если число требований, находящихся в системе, не меньше числа каналов, т.е.

$$P_3 = P_{\geq n} = 1 - P_{< n}.$$

4. $P_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании, т.е. вероятность того, что вновь поступившее требование не будет обслужено. Кроме доли времени эта вероятность имеет еще и следующий смысл: $P_{отк}$ – это доля всех требований, получивших отказ, из числа требований, поступивших в СМО. Вероятность отказа, естественно, определяется только для систем, в которых не каждое поступившее требование получает обслуживание. Для нас это системы с ограниченной очередью. Для таких систем требование, поступающее в момент, когда все каналы и все места в очереди заняты, получает отказ в обслуживании. Так как для того, чтобы все каналы и все места в очереди были заняты, надо, чтобы в системе находилось $n + r$ требований, то

$$P_{отк} = P_{n+r},$$

если возникновение очереди вообще не допускается, то

$$P_{отк} = P_n.$$

5. M_0 – средняя длина очереди (ее математическое ожидание).

6. $t_{ож}$ – среднее время ожидания в очереди (его математическое ожидание). Этот показатель определяется для открытых СМО, для них

$$t_{ож} = \frac{M_0}{\lambda}. \quad (2.2.1)$$

В литературе формулу (2.2.1) принято называть формулой Литтла в честь математика, ее получившего.

7. K_{npm} – коэффициент простоя требований, который равен математическому ожиданию доли клиентов в очереди, он показывает, какая в среднем часть клиентов находится в очереди или какую в среднем часть всего времени работы системы клиент проводит в очереди в ожидании обслуживания:

$$K_{npm} = \frac{M_0}{m}. \quad (2.2.2)$$

Показатель, вычисляемый по формуле (2.2.2), определяется для закрытых систем.

Перечисленные показатели, кроме первого, характеризуют качество организации СМО с точки зрения клиентов. Приведем несколько показателей, характеризующих работу системы с точки зрения самой системы.

8. N_0 – среднее число (математическое ожидание) каналов, свободных от обслуживания (математическое ожидание числа свободных каналов):

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot P_k.$$

8. N_3 – среднее число (математическое ожидание) каналов, занятых обслуживанием:

$$N_0 = n - N_3.$$

9. K_n – коэффициент простоя канала, он равен математическому ожиданию доли всего времени работы системы когда канал простаивает:

$$K_n = \frac{N_0}{n}.$$

10. K_3 – коэффициент загрузки канала, он показывает какую в среднем часть всего времени работы системы каждый канал занят обслуживанием

$$K_3 = \frac{N_3}{n} = 1 - K_n.$$

Перечисляя показатели качества организации систем массового обслуживания, мы не для всех из них указали формулы, по которым они рассчитываются. Это объясняется тем, что для разных СМО соответствующие зависимости разные. Рассмотрим несколько конкретных классов систем массового обслуживания.

2.2.2. Открытая система массового обслуживания.

Рассмотрим сначала открытую СМО с ограниченной очередью, будем считать, что максимально возможная длина очереди равна r , тогда

максимальное число требований, которые могут оказаться в системе, равно $n+r$. Основными показателями при расчете любой системы массового обслуживания являются вероятности P_k , все остальные показатели вычисляются на их основе.

Для вычисления вероятностей P_k воспользуемся результатами, связанными с процессами размножения и гибели. Появление нового требования будем трактовать как рождение, а уход требования, закончившего обслуживание, из СМО – как гибель. Обозначим: λ_k – интенсивность размножения в случае, если популяция состоит из k особей (интенсивность поступления новых требований в случае, когда в СМО находится точно k требований); аналогично, μ_k – интенсивность гибели (интенсивность обслуживания), когда в СМО находится точно k требований.

Из формул 2.1.1–2.1.4, учитывая следующие соображения: для рассматриваемой СМО интенсивности размножения не зависят от состояния (от того, сколько требований уже поступило), т.е.

$$\lambda_i = \lambda \text{ для } i=1,2,\dots;$$

интенсивности гибели μ_i равны произведению числа занятых каналов на интенсивность обслуживания одним каналом, т.е.

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu, & \text{если } i < n, \\ n\mu, & \text{если } i \geq n, \end{cases}$$

получаем:

$$A_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k}, & \text{если } k \leq n, \\ \frac{\lambda^k}{n! n^{k-n} \mu^k}, & \text{если } k \geq n. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Обозначая $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, из формулы (2.2.3) получим

$$A_k = \begin{cases} \frac{\alpha^k}{k!}, & \text{если } k \leq n, \\ \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}}, & \text{если } k \geq n. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Используя тот факт, что $\sum_{k=0}^{n+r} P_k = 1$, будем иметь

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n+r} A_k \right)^{-1}. \quad (2.2.5)$$

Вычисление средней длины очереди M_0 осуществляется по формуле:

$$M_0 = 1P_{n+1} + 2P_{n+2} + \dots + rP_{n+r}. \quad (2.2.6)$$

Рассмотрим теперь открытую СМО с неограниченной очередью. Для таких систем $r = \infty$, т.е. число требований в системе (на обслуживании или в очереди) может быть любым от нуля до бесконечности. Отметим, что для существования вероятностей P_k в рассматриваемом случае необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\alpha/n < 1 \quad (\lambda/n\mu < 1), \quad (2.2.7)$$

смысл которого заключается в том, что интенсивность поступления новых требований должна быть меньше интенсивности обслуживания всеми каналами системы.

Нарушение этого неравенства приводит к тому, что с течением времени очередь нарастает и её средняя длина стремится к бесконечности; признать работу такой системы удовлетворительной мы не можем. Поэтому, рассматривая открытые СМО с неограниченной очередью, мы будем исходить из того, что $\alpha/n < 1$. Если $\alpha/n \geq 1$ то приводимые далее формулы не верны.

Так как интенсивности размножения и интенсивности гибели для рассматриваемого случая такие же, как и для предыдущего, то и формулы для определения P_k и P_0 остаются такими же, с учетом лишь того, что $r = \infty$, то есть

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)^{-1}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k + \sum_{k=n}^{\infty} A_k\right)^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Оказывается, что в силу условия $\alpha/n < 1$, выражение $\sum_{k=n}^{\infty} A_k$

является суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\alpha/n < 1$ и первым членом A_n . Тогда

$$\sum_{k=n}^{\infty} A_k = \frac{A_n}{1 - \frac{\alpha}{n}}.$$

Учитывая это равенство и формулу (2.2.8), мы получаем, что

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k + \frac{A_n}{1 - \frac{\alpha}{n}}\right)^{-1}. \quad (2.2.9)$$

Аналогично, используя неравенство $\alpha/n < 1$, можно получить, что

$$M_0 = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2} \cdot P_0. \quad (2.2.10)$$

Для открытой СМО, в которой возникновение очереди не допускается, $r = 0$. Значит, $M_0 = 0, P_3 = P_n$. Вероятности P_k и P_0 определяются по формулам:

$$P_k = A_k P_0, \text{ где } A_k = \frac{\alpha^k}{k!}$$

и

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^n A_k\right)^{-1}.$$

2.2.3. Закрытые системы массового обслуживания.

Для закрытых СМО число клиентов $m < \infty$. Здесь интенсивность входящего потока λ_1 зависит от числа клиентов, находящихся в системе, т.к. клиент, попав в систему, не может выдать требования. Если в системе находится k клиентов, то требования могут поступить только от оставшихся $(m-k)$ клиентов. Так как интенсивность потока требований, поступающих от одного клиента равна λ_1 , то суммарная интенсивность от $(m-k)$ клиентов будет равна $\lambda_k = (m-k)\lambda_1$. С учетом сказанного из ранее приведенных формул получаем:

$$P_k = A_k P_0, \quad (2.2.11)$$

$$A_k = \begin{cases} \frac{\alpha^k m!}{(m-k)! k!}, & \text{если } k \leq n, \\ \frac{\alpha^k m!}{(m-k)! n! n^{k-n}}, & \text{если } k \geq n. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^m A_k\right) P_0. \quad (2.2.13)$$

$$M_0 = \sum_{k=1}^{m-n} k \cdot P_{n+k}. \quad (2.2.14)$$

2.2.4. Порядок вычисления показателей качества организации СМО.

Для вычисления показателей качества организации СМО необходимо указать число клиентов (m), число каналов (n), интенсивность поступления требований в систему (λ или λ_1), интенсивность обслуживания (μ) и максимально возможную длину очереди (r). Формул для решения обратных задач нет, такие задачи решаются перебором.

Например, пусть требуется найти число каналов n , чтобы средняя длина очереди не превосходила M , остальные исходные данные – λ, μ, t и r заданы. Решая эту задачу, будем подбирать необходимое значение n . Сначала найдем среднюю длину очереди при наименьшем значении n . Если окажется, что она меньше, чем M , то задача решена, и требуемое число каналов найдено. В противном случае увеличиваем число каналов на единицу и снова определяем среднюю длину очереди и т.д., пока не добьемся выполнения сформулированного условия.

Приведенные показатели вычисляются в следующем порядке. Сначала находится вероятность P_0 , для чего определяются необходимые значения A_k . Затем вычисляются вероятности P_k для необходимых значений k . После этого вычисляются значения остальных показателей.

2.2.5. Анализ систем массового обслуживания общего вида.

Как уже отмечалось ранее, при анализе систем, для которых не создан аналитический аппарат, используются методы статистического и имитационного моделирования (метод Монте-Карло). Рассмотрим кратко идею такого моделирования. Для его осуществления необходима следующая информация:

- число фаз обслуживания, число и свойства каналов обслуживания на каждой из фаз,
- структура связей между фазами обслуживания,
- приоритеты требований и каналов,
- вид входящего потока,
- распределение времени обслуживания в каждом канале,
- дисциплина очереди в каждой фазе,
- число источников требований.

Заметим, что могут потребоваться и еще какие-то сведения.

Рассмотрим для примера процесс обслуживания автомашин, возвращающихся из рейсов в парк в конце рабочего дня. Будем предполагать, что каждая машина, прибыв в парк, поступает на мойку, затем следует на пост технического осмотра, потом на заправку и затем в гараж.

Пусть в парке имеется одна ручная и одна автоматическая мойка, два поста технического осмотра (однотипных) и один пост заправки.

Будем предполагать, что вид входящего потока и распределение времени обслуживания в каждом канале известны и в нашем распоряжении имеются датчики случайных чисел, реализующие эти распределения.

Идею моделирования проиллюстрируем с помощью рисунка 2.2.1.

В соответствии с видом входящего потока с помощью датчика случайных чисел определяем моменты прибытия машин (скажем с

точностью до минуты). На рисунке над осью абсцисс указано число машин, прибывших в соответствующий момент. В первую минуту прибыло две машины, во вторую нуль и т.д.

Параллельно оси абсцисс проведем для каждой машины свою линию, на которых будем указывать всё, что происходит с этой машиной.

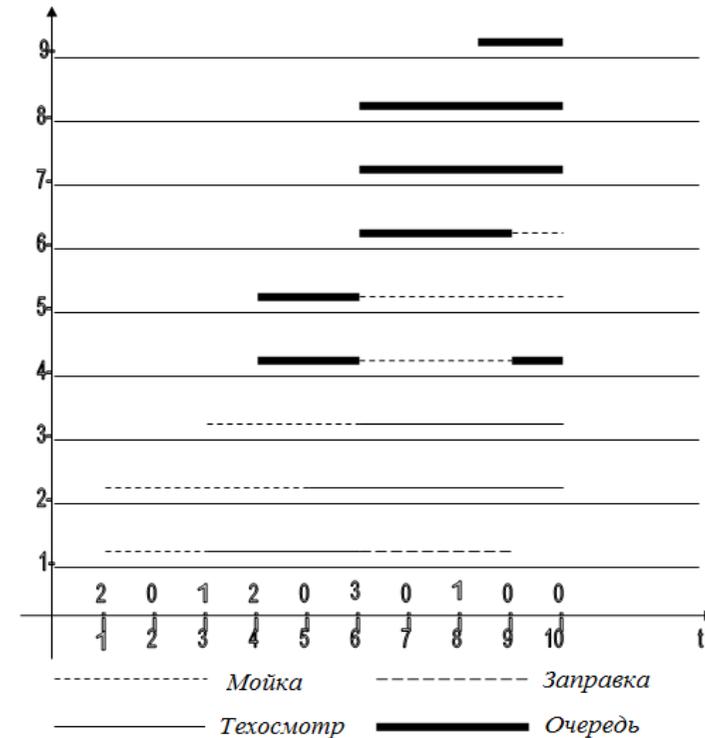


Рис.2.2.1. График загрузки оборудования автопарка

Итак, в нулевой момент ни одной машины в системе нет. В конце первой минуты в парк прибывают две машины. ЭВМ осуществляет проверку: имеется ли свободная мойка, если да, то свободна ли автоматическая мойка. При поступлении первой машины эта мойка свободна. ЭВМ с помощью датчика случайных чисел определяет время обслуживания первой машины на автоматической мойке (пусть оно равно двум минутам), отложим это время на соответствующей прямой. Далее ЭВМ проверяет: есть ли еще свободные мойки. Есть – ручная, время обслуживания на ней с помощью датчика определяется равным пяти минутам. Указываем это на соответствующей прямой. ЭВМ переходит к следующему моменту времени. К концу второй минуты новых машин не

появилось. ЭВМ проверяет, не закончилась ли мойка какой-нибудь из машин. Нет.

К концу третьей минуты поступает еще одна машина. Проверка моек показывает, что автоматическая мойка освободилась, вновь поступившая машина следует на эту мойку. Определяется время помывки, пусть оно равно трем минутам. Наносим это на график. К рассматриваемому моменту времени первая машина закончила помывку. ЭВМ проверяет имеются ли свободные пункты техобслуживания. Да. Первая машина следует на первый пункт. ЭВМ определяет время осмотра (три минуты). Со второй машиной ничего нового не происходит, и ЭВМ переходит к четвертому моменту времени и т. д. Возможный вариант обслуживания в течение первых десяти минут представлен на рисунке 2.2.1.

По окончании моделирования можно определить сколько времени все машины провели в очередях, сколько времени продолжалось обслуживание и т.д., найти средние показатели и распределение соответствующих величин. Если моделировать поступление достаточно большого числа машин, то и результаты будут достаточно точными.

Заинтересовавшихся теорией массового обслуживания мы отсылаем к монографиям [18,19,14].

ГЛАВА 3. Метод статистических испытаний при моделировании задач теории массового обслуживания.

§ 3.1. Предмет метода статистических испытаний.

3.1.1. Общее понятие о методе Монте-Карло.

При построении математических моделей описание необходимых зависимостей между входными и выходными параметрами модели далеко не всегда удается описать аналитически (с помощью формул). Порой это описание оказывается слишком сложным, а порой и вовсе невозможным. В этих случаях полезным может оказаться метод моделирования, который в зарубежной литературе получил название метод Монте-Карло.

Непосредственное моделирование реального процесса далеко не всегда приводит к успеху, и в этих случаях возникает задача создания некоторой модели которая позволила бы решить поставленную задачу более эффективно.

Так как метод Монте-Карло кроме статистического моделирования имеет приложение к ряду численных методов (взятие интегралов, решение уравнений), то целесообразно иметь различные термины.

- *Метод Монте-Карло* – это численный метод, моделирующий псевдослучайные числовые последовательности с заданными вероятностными характеристиками.
- *Статистическое моделирование* – метод исследования сложных систем, основанный на описании процессов функционирования отдельных элементов в их взаимосвязи с целью получения множества частных результатов, подлежащих обработке методами математической статистики для получения конечных результатов. В основе статистического моделирования лежит метод Монте-Карло.
- *Имитационная модель* – универсальное средство исследования сложных систем, представляющее собой логико-алгоритмическое описание поведения отдельных элементов системы и правил их взаимодействия, отображающих последовательность событий, возникающих в моделируемой системе. Если статистическое моделирование выполняется с использованием имитационной модели, то такое моделирование называется *имитационным*.

Идея моделирования случайных явлений по мнению некоторых авторов (например, Холтон [20]) восходит в времена Древнего Вавилона. Первой работой, связанной с использованием таких идей принято считать работу Холла [21] (1873) о вычислении числа π с помощью бросания иглы на разграфленный лист бумаги. Существо дела состоит в том, что при этом воспроизводится событие, вероятность которого выражается через π .

Отметим, что численное моделирование случайной величины, стало практически осуществимым лишь с появлением ЭВМ. С этого момента, заложенные задолго до этого идеи использования «случая» для приближенных расчетов получили бурное развитие. Можно сказать, что содержание этой прикладной отрасли математической науки заключается в успешном применении метода Монте-Карло в той или иной задаче. Если еще раз вернуться к истории первых применений метода, то следует упомянуть об обнаруженной Релеем на рубеже двадцатого века связи вероятностных характеристик случайного блуждания на решётке с решением параболического дифференциального уравнения специального вида [22]. Термин случайное блуждание было введено позже Карлом Пирсоном [23] и он чаще всего отсылает к особой категории цепей Маркова или марковского процесса, а многие зависящие от времени процессы упоминаются как случайные блуждания с модификатором, указывающим на их особые свойства. А. Н. Колмогоров в 1931 году дал большой толчок развитию стохастических подходов к решению различных математических задач, поскольку он сумел доказать, что цепи Маркова связаны с некоторыми интегро-дифференциальными уравнениями [24]. Уже в 1933 году И. Г. Петровский показал, что случайное блуждание, образующее Марковскую цепь, асимптотически связано с решением эллиптического дифференциального уравнения в частных производных [25]. Так была доказана тесная связь стохастических процессов с математическими методами решения дифференциальных уравнений, позволяющая использовать точные математические методы для изучения «случая».

Однако, суть метода Монте-Карло заключается в использовании указанной связи в обратном направлении. Именно в работах Метрополиса и Улама [26] было предложено использовать стохастический подход для аппроксимации многомерных интегралов в уравнениях переноса, возникших в связи с задачей о движении нейтрона в изотропной среде. Название метода происходит от названия коммуны в княжестве Монако, широко известного своими многочисленными казино, поскольку именно рулетка является одним из самых широко известных генераторов случайных чисел. Одними из первых в России метод Монте-Карло для расчёта ливней частиц применили советские физики А. А. Варфоломеев и И. А. Светлолобов.

В настоящее время основные усилия исследователей направлены на создание эффективных Монте-Карло алгоритмов различных физических, химических и социальных процессов.

Если вернуться к случайным блужданиям, то диапазон природных явлений, которые попытались описать некоторыми разновидностями случайных блужданий, является значительным. В частности, в физике [27], химии [28], биологии [29], финансовой математике [30] и других науках.

Наиболее сложными этапами в применении метода Монте Карло в настоящее время являются: построение математической модели исследуемого явления, необходимое упрощение задачи, разработка алгоритма, исследование его погрешности. При наличии теоретико-вероятностной модели, использование метода Монте Карло может существенно упростить выполнение указанных этапов. Следует подчеркнуть, что во многих случаях и для детерминированных задач полезно строить вероятностную модель, чтобы в дальнейшем использовать метод Монте-Карло.

Идея рассматриваемого метода очень простая и состоит в замене аналитического описания изучаемого явления многократным повторением «испытаний» – моделированием случайных явлений, значения каких-то из параметров закона распределения которых совпадают со значениями интересующих нас параметров исследуемого явления. Проводя серию испытаний мы заменяем проведение опытов над реальным объектам опытами над его моделью. Как и при обработке статистических результатов наблюдений, для получения достаточно точного результата при применении метода Монте-Карло, требуется произвести достаточно много испытаний. Но несмотря на это, такой подход порой оказывается проще, чем процесс построения аналитической модели явления и исследование зависимости между ее параметрами на этой модели. При необходимости анализировать сложные явления, явления захватывающие большое число элементов (людей, единиц техники, организаций и т.п.) метод статистических испытаний порой оказывается проще аналитического и даже, иногда, единственным возможным, во всяком случае при современном уровне развития науки. С помощью этого метода может быть численно решена любая вероятностная задача с достаточной практической точностью.

Например, в совместной статье одного из авторов этой книги, относящейся к материаловедению [31], было доказано, что случайное блуждание по многоугольнику моделирует процесс помола в планетарной мельнице. Созданное программное обеспечение осуществляет расчет механических характеристик процесса за доли секунд, заменяя собой огромные прямые расчеты динамических моделей. Это демонстрирует особенность метода Монте-Карло, заключающуюся в том, что иногда выгодно заменить моделирование истинного случайного процесса на простую искусственную модель. Порой, связь между ними не очевидна и не предсказуема. Проблема остается лишь в том, как обнаружить подобную зависимость.

3.1.2. Примеры применения метода Монте –Карло.

Пример 3.1.1. Экзамен сдают два студента. В начале экзамена всего имеется 5 экзаменационных билетов. Студенты по очереди берут по

билету (выбор любого билета равновероятен), при этом выбранный билет обратно не возвращается. Вероятность того, что эти студенты сдадут экзамен на положительную оценку, вытащив тот или иной билет, указаны в таблице 3.1.1.

Таблица 3.1.1. Вероятности P_{li} (l - номер студента, i - номер билета)

		получить положительную оценку				
№ билета		1	2	3	4	5
1-й студент		1,0	1,0	0	0	1,0
2-й студент		1,0	0	1,0	1,0	1,0

Найти вероятность того, что оба студента сдадут экзамен.

Решение.

Аналитический подход.

Обозначения:

p_i^1 – вероятность того, что первый студент вытащит билет с номером i , очевидно, что $p_i^1 = 0,2$ для любого i ;

p_{ij}^2 – вероятность того, что второй студент вытащит билет с номером j , при условии, что первый вытащил билет с номером i . Отметим, что $p_{ij}^2 = 1$, если $i = 2$ (если первый вытащил второй билет) и $p_{ij}^2 = 0,25$ в остальных случаях. Тогда вероятность p того, что оба студента сдадут экзамен, равна

$$p = 0,2 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 1,0 + 0 \cdot 0,75 + 0 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,75 = 0,50.$$

Метод Монте-Карло.

В урне имеется 5 одинаковых шаров с номерами от 1 до 5. В ходе одного испытания из этой урны последовательно изымаются два шара. Номер первого – это номер билета, который достался первому студенту, номер второго – второму. По таблице 1 определяем исход экзамена при таком распределении билетов. Опускаем вынутые шары обратно в урну, перемешиваем шары и приступаем к следующему испытанию. Оказалось, что в 12 из проведенных 25 испытаний студенты успешно сдали экзамен. Следовательно, искомая вероятность равна примерно 0,48, что достаточно близко к теоретическому, точному значению. Если бы было проведено существенно больше испытаний, то и погрешность была бы меньше. Размер ошибки ставит вопрос о точности метода Монте-Карло, но об этом позднее.

Пример 3.1.2. Условия этого примера аналогичны условиям предыдущего с той лишь разницей, что экзамен сдают не 2 студента, а реальная группа (30 человек), билетов 5, а 40 и нас интересует средняя по группе оценка. Для решения необходимо вычислять вероятности

различных наборов оценок, а набор оценок зависит от набора выбранных билетов с учетом их последовательности. Число таких последовательностей огромно и равно числу размещений, для нашего примера, из 40 по 30 и равно $\frac{40!}{10!}$.

Применение же метода Монте-Карло лишь слегка изменяет описанную в примере 3.1.1 схему. В урне надо иметь не 5 а 40 шаров и извлекать из нее надо не два, а 30 шаров. Далее надо определить сумму полученных баллов и вероятность и разделить ее на 30. Проведя необходимое число испытаний надо просуммировать полученные результаты и разделить эту сумму на число испытаний.

Еще один пример был рассмотрен в параграфе 2.2.5.

§ 3.2. Основные элементы метода Монте-Карло

3.2.1. Приемы моделирования значений случайной величины с заданным законом распределения

Для применения метода Монте-Карло надо:

- построить математическую модель, сводящую решение рассматриваемой задачи к отысканию некоторого параметра распределения случайной величины, значение которого совпадает с ответом рассматриваемой задачи;
- определить необходимое число испытаний, для того, чтобы полученный в итоге результат с заданной вероятностью имел бы погрешность не больше заданной;
- уметь генерировать значения случайных параметров модели.

Рассмотрим задачу генерирования значений случайной величины. Пусть случайная величина ξ сама является функцией от нескольких случайных и нескольких детерминированных величин:

$$\xi = \xi(\zeta_1, \dots, \zeta_k, x_1, \dots, x_l), \quad (3.2.1)$$

где ζ_1, \dots, ζ_k - случайные величины с известными законами распределения, x_1, \dots, x_l - детерминированные величины.

Для проведения одного опыта с ξ надо смоделировать значения случайных величин ζ_1, \dots, ζ_k и, зная значения x_1, \dots, x_l по формуле (3.2.1) вычислить значения случайной величины ξ .

Рассмотрим кратко приемы моделирования случайных величин с заданным законом распределения. В процессе их моделирования особое место принадлежит случайным числам, равномерно распределенным в интервале от нуля до единицы (значения случайной величины, имеющей равномерный закон распределения в интервале от 0 до 1), так как с их помощью можно получать случайные числа с произвольными законами распределения.

Рассмотрим способы получения последовательности случайных чисел, равномерно распределенных от нуля до единицы. Существуют два вида генераторов или датчиков случайных чисел: физические и программные.

Примеры физических генераторов:

- урна с десятью шарами позволяет получать случайные числа равномерно распределенные от нуля до девяти;
- рулетка со ста делениями позволяет получать случайные числа равномерно распределенные от нуля до девяноста девяти;
- монета позволяет получать равновероятные двоичные случайные числа 0 и 1.

При работе на компьютерах применяются программные генераторы, которые созданы как соответствующие программы, они называются датчиками случайных чисел.

Результаты моделирования значений случайной величины, имеющей равномерный закон распределения в интервале $[0,1]$, будем, как это принято, называть равномерно распределенными случайными числами.

Используя равномерно распределенные случайные числа, можно моделировать случайные числа с произвольным законом распределения. Покажем, как это осуществляется в некоторых, нужных нам для дальнейшего случая. Рассмотрим сначала дискретные случайные величины.

Итак, пусть имеется дискретная случайная величина, закон распределения которой задан таблицей 3.2.1. Обозначения, использованные в этой таблице: x_i - значения рассматриваемой случайной величины, p_i вероятности этих значений.

Таблица 3.1.2. Закон распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Дадим геометрическую интерпретацию предлагаемого метода (рис. 3.2.1.). Рассмотрим отрезок длиной единица и разделим его на части Δ_i , длины которых равны соответствующим значениям вероятностей $p_i, i = 1, 2, \dots, n$.

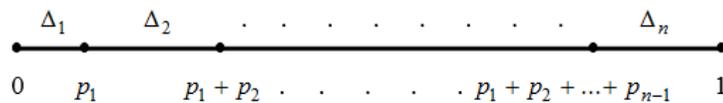


Рис. 3.2.1. Геометрическая интерпретация

Пусть r - результат, выданный датчиком равномерно распределенных случайных чисел при очередном обращении к нему (в дальнейшем для краткости будем писать, что $r = RND$), следовательно r лежит в интервале от нуля до единицы. Нанесем точку, соответствующую этому r , на рассматриваемый отрезок, она попадет в отрезок Δ_i (если точка попадает на границу двух интервалов, отнесем ее к правому из них). Считаем, что моделируемая случайная величина приняла значение, равное x_i . Генерируем новое r и т.д.

Легко видеть, что при таком способе моделирования мы получим значение x_i с вероятностью p_i , т.е. результаты моделирования будут обладать теми же вероятностными характеристиками, что и результаты непосредственных опытов с этой случайной величиной, а именно это нам и требуется.

Очевидно, что этот подход может применяться и без геометрической интерпретации. Для этого надо определить координаты точек деления отрезка $[0,1]$ и, сравнивая с ними полученное r , определять значение моделируемой случайной величины.

Рассмотрим непрерывную случайную величину Z . Ее закон распределения может быть задан в форме функции распределения или плотности распределения.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Напомним, что $F(x) = P(X < x)$ (вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее заданного x). Пусть r очередной результат работы датчика равномерно распределенных случайных чисел. Будем трактовать это r как вероятность события $(X < x)$. Это значение x мы и принимаем за результат очередного моделирования. Очевидно, что при этом вероятность получить результат, меньший x , равна $F(x)$.

Таким образом, для моделирования рассматриваемой случайной величины мы должны решить уравнение

$$F(x) = r. \quad (3.2.2)$$

Геометрический смысл сказанного проясняет рисунок 3.2.2.

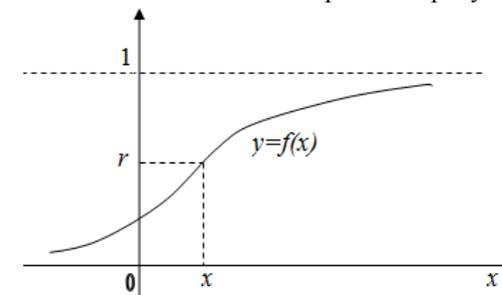


Рис. 3.2.2. Решение уравнения $F(x) = r$.

Приведем два примера.

Пример 3.2.1. Рассмотрим случайную величину, равномерно распределенную на интервале от a до b . Ее функция распределения имеет вид $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, где $a \leq x \leq b$ (рис. 3.2.3).

Пусть $r = RND$, для отыскания соответствующего значения моделируемой случайной величины надо решить относительно x уравнение $\frac{x-a}{b-a} = r$. Решая его относительно x , получаем: $x = a + (b-a)r$.

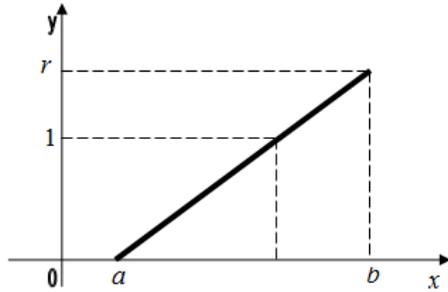


Рис. 3.2.3. Моделирование равномерно распределенной случайной величины

Пример 3.2.2. Пусть X имеет показательное распределение, тогда ее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = 1 - e^{-ax}, \quad x \geq 0, \dots a > 1.$$

Для получения моделируемого значения надо решить уравнение

$$1 - e^{-ax} = r, \quad (r = RND).$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$e^{-ax} = 1 - r.$$

Прологарифмировав его, получим:

$$\ln(e^{-ax}) = \ln(1 - r),$$

откуда находим:

$$-ax = \ln(1 - r).$$

Решая это уравнение относительно x , получаем:

$$x = -\frac{1}{a} \cdot \ln(1 - r).$$

Пусть случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$ ($f'(x) = F''(x)$). Так как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

то с учетом формулы (3.2.2) для моделирования значений случайной величины X надо решать уравнение

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx = r. \quad (3.2.3)$$

Пример 3.2.3. Рассмотрим случайную величину Z , имеющую нормальное распределение с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица. Для ее моделирования необходимо решить уравнение (3.2.3). Существуют разные подходы к его решению, мы здесь остановимся на приеме, использующем таблицу значений функции Лапласа (табл. 2 приложения).

Итак, пусть $r = RND$. По указанной таблице находим такое z_r , что $P(Z < z_r) = r$. Следует отметить одну особенность использования указанной таблицы:

- если $r > 0,5$, то по таблице ищется такое z , что $\Phi(z) = r - 0,5$, и тогда $z_r = z$,
- если $r < 0,5$, то по таблице ищется такое z , что $\Phi(z) = 0,5 - r$, и тогда $z_r = -z$,
- если $r = 0,5$, то $z_r = 0$.

Для получения нормально распределенных случайных чисел x с математическим ожиданием $M(X)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ используют преобразование:

$$x = M(X) + \sigma(X)z_r,$$

где z_r определяется описанным ранее способом.

Кроме описанных генераторов случайных чисел, разработаны генераторы для геометрического, биномиального, гипергеометрического и других распределений. Имеется генератор автокоррелированных нормально распределенных случайных величин, а также алгоритм генерирования временных рядов с любой желаемой степенью автокорреляции для произвольного вида распределения вероятностей.

3.2.2. Определение необходимого числа испытаний.

Использование метода Монте-Карло оправдывается предельными теоремами теории вероятностей. Эти теоремы утверждают, что при стремлении числа проведенных в одинаковых условиях опытов отношение числа опытов, в которых наблюдалось данное событие, к общему числу проведенных опытов стремится к вероятности данного события, а среднее арифметическое значение наблюдаемой случайной величины стремится к ее математическому ожиданию.

Пусть проведено N независимых опытов, в каждом из которых вероятность наступления события A одинакова и равна p . Пусть в этой серии опытов событие A наступило m раз, тогда частота $\frac{m}{N}$ приближенно распределена по нормальному закону с математическим ожиданием p и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$.

Пусть в серии из N независимых опытов рассматриваемая случайная величина приняла значения x_1, x_2, \dots, x_N , тогда при достаточно большом N выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.2.4)$$

этих значений имеет (приближенно) нормальный закон распределения с математическим ожиданием $M(X)$ и средним квадратическим отклонением $\frac{\sigma(X)}{\sqrt{N}}$.

На вопрос о том, каков должен быть объем наблюдений N , чтобы оценку параметра можно было с достаточной точностью считать нормально распределенной, нельзя дать однозначного ответа. Этот объем зависит от того, как распределена данная характеристика. Если мы имеем дело, например, со средним арифметическим выборки из генеральной совокупности, распределение которой не слишком ассиметрично, то приближение к нормальному закону можно считать практически достаточным уже при $n \geq 30$. Для таких характеристик, как дисперсия, коэффициент корреляции, меньший 0,2, для практической нормальности следует довести число наблюдений до размера не менее 100 единиц. Если коэффициент корреляции близок к единице, то при числе наблюдений в 300 единиц приближение все еще не является достаточным. Для проверки гипотезы о том, что рассматриваемый закон распределения нормальный, можно воспользоваться критериями согласия [32].

Будем предполагать, что число испытаний N достаточно велико для того, чтобы можно было полагать частоту и выборочное среднее распределенными по нормальному закону.

1. Для того, чтобы с заданной вероятностью q при вычислении вероятности P некоторого случайного события A погрешность не превосходила заданной величины Δ достаточно провести N испытаний, где N должно удовлетворять неравенству

$$N \geq \frac{z_q^2 P(1-P)}{\Delta^2}, \quad (3.2.5)$$

z_q – берется из таблиц стандартного нормального распределения (таблица 2 приложения) и удовлетворяет равенству: $P(|Z| \leq z_q) = q$, Z – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица.

Заметим, что использование формулы 3.2.5 предполагает известными некоторые априорные сведения о величине искомой вероятности P . Если таковых сведений нет, то можно воспользоваться неравенством

$$N \geq \frac{0.25 \cdot z_q^2}{\Delta^2}. \quad (3.2.6)$$

Неравенство 3.2.6 следует из неравенства 3.2.5 и того факта, что $P(1-P) \leq 0.25$ при любом P .

2. Для того, чтобы с заданной вероятностью q при вычислении выборочного среднего \bar{x} (см. 3.2.4) погрешность не превосходила заданной величины Δ достаточно провести N испытаний, где N должно удовлетворять неравенству

$$N \geq t_q^2 \frac{(\sigma^*)^2}{\Delta^2}, \quad (3.2.7)$$

где t_q , такое значение случайной величины t , имеющей распределение Стьюдента с $N-1$ степенью свободы, что $P(|t| < t_q) = q$ (см. таблицу 3 приложения), $\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$.

3. Для определения числа независимых опытов, достаточного для того, чтобы выборочное среднее \bar{h} с вероятностью φ отличалось бы от h не более, чем на Δ , можно воспользоваться неравенством Чебышева:

$$P(|\bar{h} - h| \leq \Delta) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{N\Delta^2}, \quad (3.2.8)$$

где σ^2 - дисперсия случайной величины ξ .

Так как $P(|\bar{h} - h| \leq \Delta) = \varphi$, то, учитывая формулу (3.2.8), n будем искать из неравенства

$$\varphi \leq 1 - \frac{\sigma^2}{N\Delta^2}.$$

Откуда

$$N \geq \frac{\sigma^2}{\Delta^2(1-\varphi)}. \quad (3.2.9)$$

3.2.3. Приближенное вычисление кратных интегралов с использованием метода Монте-Карло.

В главе 4 для вычисления значений некоторых показателей качества организации систем массового обслуживания предлагается использовать кратные интегралы. Но этот подход часто требует слишком большого объема вычисления. Следует отметить, что для задания нечетких чисел, описывающих продолжительности соответствующих временных интервалов, необходимо располагать определенной информацией, получаемой от экспертов, что влечет определенные погрешности в результатах моделирования. В связи со сказанным упомянутый подход, давая при заданных нечетких характеристиках точный ответ, не может дать такового для рассматриваемой задачи. Поэтому представляется вполне приемлемым использовать приближенные методы вычисления возникающих интегралов. Мы воспользуемся методом Монте-Карло.

Если определенный интеграл не удастся вычислить непосредственно, то используются численные методы интегрирования, в том числе, метод Монте-Карло.

Начнем с приближенного вычисления интеграла

$$I = \int_a^b h(z) dz, \quad (3.2.10)$$

где $a < b$.

Заметим, что если случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, то ее плотность p задается формулой:

$$p(z) = \frac{1}{b-a}, \quad (3.2.11)$$

Математическое ожидание $M(\xi)$ случайной величины ξ определяется равенством:

$$M(\xi) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot z \cdot dz. \quad (3.2.12)$$

Тогда математическое ожидание $M(h)$ случайной величины h , являющейся функцией случайной величины ξ , задается равенством:

$$M(h) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot h(z) \cdot dz. \quad (3.2.13)$$

Из (3.2.10) и (3.2.13) следует, что

$$I = \int_a^b h(z) \cdot \frac{b-a}{b-a} \cdot dz = (b-a) \cdot \int_a^b h(z) \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dz = (b-a) \cdot M(h). \quad (3.2.14)$$

Несмещенная оценка математического ожидания случайной величины, вычисляемая по результатам N независимых однопипных опытов равна среднему арифметическому из результатов этих опытов:

$$M(h) \cong \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N h(z_i), \quad (3.2.15)$$

где z_i – значение случайной величины ξ в i -м опыте и, соответственно $h(z_i)$ – значение случайной величины h в этом же опыте. Тогда, учитывая (3.2.14) и (3.2.15), получаем формулу (3.2.16), по которой можно вычислить приближенное значение интеграла I :

$$I \cong \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^N h(z_i). \quad (3.2.16)$$

Рассмотрим теперь кратный интеграл

$$I_w = \int_Z h(z) \cdot dz, \quad (3.2.17)$$

от функции $h(z)$, где $z \in X \subset R^w$, $dz = (dz_1, \dots, dz_w)$, и такое множество $Z^* \supseteq Z$, что $Z^* = \prod_{i=1}^w [a_i, b_i]$, где отрезки $[a_i, b_i]$ конечные при любом i , и $a_i < b_i$ для любого i . Очевидно, что из (3.2.13) следует, что

$$I_w = \int_{Z^*} h^*(z) \cdot dz, \quad (3.2.18)$$

где функция $h^*(z)$ определена на множестве Z^* и

$$h^*(z) = \begin{cases} h(z), & \text{если } z \in Z, \\ 0, & \text{если } z \notin Z. \end{cases}$$

Пусть на множестве Z^* определена равномерно распределенная на нем случайная величина ξ^* , ее плотность p задается равенством:

$$p(z) = \frac{1}{v(Z^*)}. \quad (3.2.19)$$

Здесь $v(Z^*)$ – мера (объем) множества Z^* .

Из (3.2.18) имеем:

$$I_w = \int_{Z^*} h^*(z) \cdot \frac{v(Z^*)}{v(Z^*)} \cdot dz = v(Z^*) \cdot \int_{Z^*} \frac{h^*(z)}{v(Z^*)} \cdot dz. \quad (3.2.20)$$

В (3.2.20) вычисляемый интеграл I_w представлен в виде произведения меры множества X^* на математическое ожидание случайной величины h , имеющей равномерный закон распределения на X^* с плотностью (3.2.19). Тогда мы получаем, что

$$I_w = v(Z^*) \cdot M(h). \quad (3.2.21)$$

Как уже отмечалось, несмещенной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое результатов N независимых

однотипных опытов, тогда из (3.2.15) и (3.2.21) следует, что приближенное значение интеграла I_w можно найти по формуле:

$$I_w \cong \frac{v(z^*)}{N} \cdot \sum_{i=1}^N h(z^i), \quad (3.2.22)$$

где z^i – значение случайной величины ξ в i -м опыте.

§ 3.3. Обзор литературы

Посвящая главу имитационному моделированию СМО, мы не ставили перед собой задачи дать подробное описание этого метода, остановившись лишь на изложении основ метода Монте-Карло. По этой причине ниже мы предлагаем краткий анализ имеющейся обширной литературы по этому вопросу.

Теория массового обслуживания ведет свой отсчет с работы датского учёного А. К. Эрланга [33]. В его работе была выведена формула Эрланга, которая широко используется в теории вероятностей и других областях прикладной математики.

Дальнейшему развитию теории массового обслуживания способствовали уже советские учёные. В 30-е годы XX века А. Я. Хинчин разработал метод «вложенных цепей Маркова», давший возможность поиска распределения времени ожидания для простейших потоков на один канал, обслуживающий очередь с произвольным распределением времени обслуживания [34]. В 50-е годы XX века Б. В. Гнеденко обобщил формулы Эрланга, а также рассмотрел случаи потери заявок при отказе канала обслуживания и переход заявки на другой свободный канал. Б. В. Гнеденко является автором первого в СССР спецкурса по теории массового обслуживания, а написанная им монография [35] до сих пор является основополагающей при изучении теории массового обслуживания, как в России, так и за рубежом.

Следует подчеркнуть, что в сложных задачах теории СМО метод имитационного моделирования на основе метода Монте-Карло является практически единственно возможным. В качестве базового учебника по методу Монте-Карло мы рекомендуем монографию ведущего специалиста в этой области С.М. Ермакова [36]. Его работы по оцениванию многомерных интегралов, исследованию генераторов случайных чисел, решению интегральных уравнений способствовали превращению этого метода из полумпирического приема в очерченный раздел математики. Указанная монография во многом стимулировала в нашей стране внедрение метода в практику прикладных расчетов.

Наиболее полное изложение вопросов, связанных с методом Монте-Карло в приложении к СМО, можно найти в книге Н.П. Бусленко [37]. Эта монография сыграла выдающуюся роль в развитии и популяризации методов имитационного моделирования в России.

В этом контексте нельзя не отметить книгу И.М. Соболя [38], автора, внесшего большой вклад в развитие и популяризацию этого метода.

Для ознакомления с современным состоянием вопроса мы отсылаем к работам [39] и уже упоминавшимся нами работам [40, 41]. В монографии [39] излагаются математические модели и результаты анализа дискретных систем различных классов с использованием аналитических, численных и имитационных методов исследования. В качестве моделей таких систем рассматриваются модели, построенные на основе систем и сетей массового обслуживания. Аналитические методы исследования базируются на аппарате теории массового обслуживания, численные – на аппарате теории марковских случайных процессов, статистические – на методах имитационного моделирования, которое реализуется в среде GPSS World (www.gpss.ru).

Заинтересованному читателю мы хотим рекомендовать освоить среду GPSS, функционал которой позволяет моделировать весь спектр систем массового обслуживания, упомянутый нами в предыдущей главе.

Мы же продолжим изучение СМО на основе нечеткого анализа.

ГЛАВА 4. Системы массового обслуживания с нечеткими интенсивностями

§ 4.1. Задачи о максимальной (минимальной) надежности значений показателей работы СМО

4.1.1. Вводные замечания.

Если рассматривать классическую теорию массового обслуживания, то основные ее достижения ограничиваются только формализацией и исследованием простейших СМО, простейших - в смысле потока заявок (поступления, обслуживания, ухода из очереди). Отклонения от допущения простоты ведут к существенному ограничению использования результатов на практике. Но и именно на практике потоки в СМО часто существенно отличаются от простейших, а для потока обслуживания - это норма.

К настоящему времени накопилось значительное количество исследований, в которых подход к расчету СМО уже основан на нечеткой логике в широком смысле. Разработкой численных методов расчета параметров систем массового обслуживания занимались Г.И. Ивченко, А. Кофман и др. В нашем кратком обзоре нет возможности охватить весь спектр публикаций по СМО с использованием нечетких множеств, отметим лишь некоторые из них: одно из первых систематических изложений подобного рода [42]; нечеткие модели в сложных слабо формализуемых процессах, нечетких нейронных сетях, процессах, отображаемых структурами на основе графов [43]; цикл работ профессора Осипова Г.С., президента РАИИ [44 и ссылки]; теория обобщенных нечетких множеств и нечетких систем и их приложения [45]; обширный материал по применению методов нечеткого анализа в теории принятия решений и теории игр [46], содержащий более ста ссылок на литературу практически по всем прикладным аспектам теории; введение в проблемы нечеткого и нейронечеткого моделирования применительно к задачам управления системами [6, более 300 ссылок на литературу]; гибридные системы [47]. Отметим исследование по СМО с нечетким потоком обслуживания, проведенное в воронежской научно-технической школе [48].

В этой главе рассматриваются системы массового обслуживания (СМО) с нечеткой интенсивностью поступления требований и нечеткой интенсивностью их обслуживания.

Предлагается несколько оценочных показателей их качества. Эти показатели базируются на переходе от заданных интенсивностей к некоторым однородным, что, как нам представляется, приемлемо для некоторых классов задач теории массового обслуживания.

Рассматривается несколько задач, для решения которых применяются какие-то из предложенных показателей. Схема применения

разных показателей во многом одинаковая, поэтому, чтобы не повторяться, для решения конкретного класса задач используется один из предложенных показателей. Как правило, рассматриваются одноканальные системы обслуживания.

4.1.2. Минимальное значение надежности того, что одноканальная СМО работает без очереди.

Рассматривается одноканальная система массового обслуживания. Предполагается, что процесс ее функционирования разбивается на несколько однородных циклов (смен, дней и т.п.). Каждый цикл имеет конечную продолжительность. Изучается процесс функционирования этой СМО на одном цикле, на котором требуется обслужить n клиентов, срок их обслуживания и определяет продолжительность цикла. Предполагается, что интервалы времени между моментами поступления требований задаются нечетким треугольным числом $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$, интервалы обслуживания задаются нечетким треугольным числом $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$. Эти нечеткие числа заданы на универсальном множестве $[0, T]$ и имеют функции принадлежности μ_λ и μ_τ соответственно, где

$$\mu_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda}, & t \in [a_\lambda, b_\lambda], \\ \frac{c_\lambda - t}{c_\lambda - b_\lambda}, & t \in [b_\lambda, c_\lambda], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$\mu_\tau(t) = \begin{cases} \frac{t - a_\tau}{b_\tau - a_\tau}, & t \in [a_\tau, b_\tau], \\ \frac{c_\tau - t}{c_\tau - b_\tau}, & t \in [b_\tau, c_\tau], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Графики функций принадлежности из 4.1.1 и 4.1.2 изображены на рисунках 4.1.1 и 4.1.2.

Под характеристикой функционирования системы при заданном уровне надежности понимаются максимально возможные затраты времени t^* на пребывание требования в СМО при этом уровне надежности. С этим показателем связывается нечеткое число $\hat{t}^* = \langle (0, 0, \xi) \rangle$ - «затраты времени t^* небольшие» с функцией принадлежности $\mu_{\hat{t}^*}$ (рис. 4.1.3.)

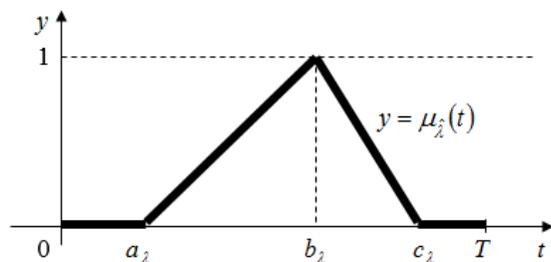


Рис. 4.1.1. Функция принадлежности нечеткого числа $\hat{\lambda}$.

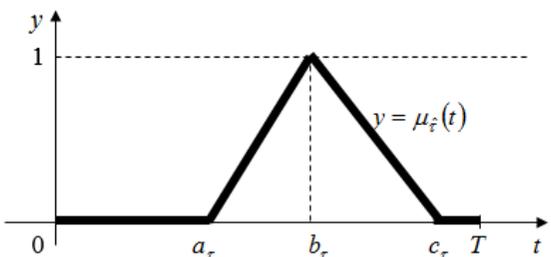


Рис. 4.1.2. Функция принадлежности нечеткого числа $\hat{\tau}$.

Под оценкой качества рассматриваемой СМО предлагается понимать минимальное значение надежности того, что СМО работает без очереди.

Из рис. 4.1.3 видно, что с надежностью α максимально возможные затраты времени на пребывание требования в СМО равны t_0 .

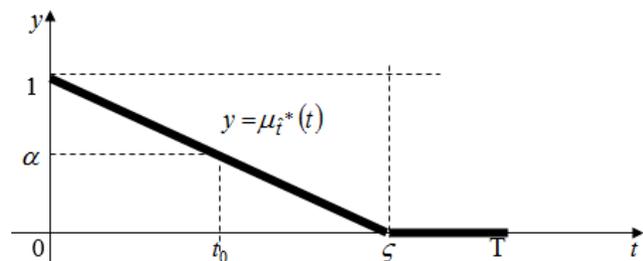


Рис. 4.1.3. График функции принадлежности нечеткого числа $\hat{\tau}^*$.

Пусть множество X – множество всех возможных реализаций процесса обслуживания для рассматриваемой системы массового обслуживания. Предполагается, что одна реализация от другой отличается набором значений интервалов времени между поступлением последовательных требований и (или) интервалов времени обслуживания этих требований. Если $x \in X$, то $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{(n-1)+1}, \dots, x_{(n-1)+n})$, где

x_i при $i=1,2,\dots,n-1$ – продолжительность интервала времени между требованиями с номерами i и $i+1$; $x_{(n-1)+i}$ при $i=1,2,\dots,n$ – время обслуживания требования с номером i в реализации x .

Через $t(x)$ обозначим суммарные затраты времени на ожидание в очереди и на обслуживание при реализации x . Через $t_r(x)$ обозначим суммарные затраты времени только на ожидание в очереди при реализации x и через $t_r^1(x)$ – средние затраты времени одного требования только на ожидание в очереди при реализации x .

Множество X будем рассматривать как универсальное множество, на котором заданы нечеткие задачи обслуживания. Функцию принадлежности нечеткой задачи \hat{p} обозначим $\mu_{\hat{p}}(x), x \in X$.

Отметим, что $\mu_{\hat{\lambda}}(x_i)$ при $x_i \in [0, T]$ и $i=1,2,\dots,n-1$, где n – максимально возможное число требований на интервале $[0, T]$, есть степень нашей уверенности в том, что интервал времени между требованиями с номерами i и $i+1$ в задаче \hat{p} равен x_i ; $\mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+i})$ – степень нашей уверенности в том, что время обслуживания требования с номером i в этой задаче равно $x_{(n-1)+i}$. Если нечеткое множество $\hat{\lambda}$ трактовать как множество «значение интервала времени между моментами поступления требований около b_λ », то под $\mu_{\hat{\lambda}}(x_i)$ понимается степень нашей уверенности в том, что интервал времени между моментами поступления требований с номерами $i-1$ и i «близок» к b_λ .

Из определения конъюнкции нечетких множеств следует, что

$$\mu_{\hat{p}}(x) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \mu_{\hat{\lambda}}(x_i), \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+i}) \right\}. \quad (4.1.3)$$

На основе введенных понятий и обозначений дадим формальное (более строгое) понятие об оценке качества рассматриваемой СМО. Под этой оценкой предлагается понимать такое значение α_0 надежности того, что СМО работает без очереди, для которого выполняется равенство:

$$\alpha_0 = \min_{x: \mu_{\hat{p}}(x) = \alpha \wedge t_r(x) = 0} \alpha.$$

Замечание 4.1.1. По заданной надежности γ строим реализацию, самую плохую (саму долгую) по затратам времени, с этой целью для каждого требования выбираем интервал поступления, надежность которого равна γ и длина которого не превосходит медианы нечеткого числа λ . Аналогично, с интервалом обслуживания. Для каждого требования выбираем самый плохой (самый большой) интервал обслуживания. При заданной надежности таким интервалом является интервал, который не меньше медианы нечеткого числа μ и надежность которого равна γ .

Использование полученного при таком подходе значения интересующего нас показателя качества (t^*) является перестраховочным, он позволяет избежать опасности переоценить возможности рассматриваемой СМО. Ведь из всех реализаций с надежностью γ предлагается рассматривать только ту, в которой все интервалы между моментами прибытия требований равны λ_1^γ , и время обслуживания любого требования равно τ_2^γ , т.е. ту реализацию, в которой при надежности γ суммарное время пребывания всех требований в системе максимально. А ведь в X есть реализации с этой же надежностью, но для которых это время может оказаться существенно меньшим.

Рассмотрим некоторую реализацию x^0 и пусть $\mu_{\hat{p}}(x^0) = \alpha$.

Пусть $\mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0}^0) > \alpha$ для некоторого $i_0 < n$. Возьмем такое $u_{i_0}^\alpha$, не превосходящее медианы $b_{\hat{\lambda}}$ нечеткого числа $\hat{\lambda}$, что $\mu_{\hat{\lambda}}(u_{i_0}^\alpha) = \alpha$. Заметим, что $u_{i_0}^\alpha \leq x_{i_0}^0$. Рассмотрим реализацию x' , которая получается из x^0 заменой $x_{i_0}^0$ на $u_{i_0}^\alpha$. Так как интервалы между моментами прибытия требований уменьшились, то время пребывания в очереди разве что увеличилось, и тогда $t_r(x') \geq t_r(x^0)$. Аналогичные замены осуществим для любого такого $i_0 < n$, что $\mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0}^0) > \alpha$. Обозначим получившуюся реализацию через $x^{0'}$.

Пусть $\mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+j_0}^0) > \alpha$ для некоторого $j_0 \leq n$. Возьмем такое $w_{(n-1)+j_0}^\alpha$, не меньшее медианы $b_{\hat{\tau}}$ нечеткого числа $\hat{\tau}$, что $\mu_{\hat{\tau}}(w_{(n-1)+j_0}^\alpha) = \alpha$. Заметим, что $w_{(n-1)+j_0}^\alpha \geq x_{(n-1)+j_0}^0$. Рассмотрим реализацию x'' , которая получается из $x^{0'}$ заменой $x_{(n-1)+j_0}^{0'}$ на $w_{(n-1)+j_0}^\alpha$. Так как затраты времени на обслуживание не уменьшились, то $t_r(x'') \geq t_r(x^{0'})$. Аналогичные замены осуществим для любого такого $j_0 \leq n$, что $\mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+j_0}^0) > \alpha$. Обозначим получившуюся реализацию через $x^{0\alpha}$.

В итоге мы получаем реализацию $x^{0\alpha}$:

$$x_i^{0\alpha} = \begin{cases} u_i^\alpha, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ w_{(n-1)+i}^\alpha, & i = n, \dots, 2n-1. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Утверждение 4.1.1. С уверенностью α мы можем утверждать что средние затраты времени на пребывание требования в данной системе массового обслуживания не превзойдут $t(x^{0\alpha})$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим такое множество реализаций X_α , что $\mu_{\hat{p}}(x^0) = \alpha$ для любого $x^0 \in X_\alpha$, построим для этой реализации $x^{0\alpha}$. Из сказанного ранее следует, что $t(x^{0\alpha}) \geq t(x^0)$, и это верно для любого $x^0 \in X_\alpha$. Утверждение доказано.

Замечание 4.1.2. С учетом сказанного, говоря об интересующей нас надежности, достаточно рассмотреть только левую часть графика $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ (рис. 4.1.1) и правую часть графика $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ (рис. 4.1.2), т.е. рассматривать функцию принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ только на интервале $[a_\lambda, b_\lambda]$, а функцию $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ – на интервале $[b_\tau, c_\tau]$.

Замечание 4.1.3. Если $b_\tau > b_\lambda$, то очередь с момента поступления второго требования всегда существует. Проиллюстрируем сказанное, используя рис. 4.1.4.

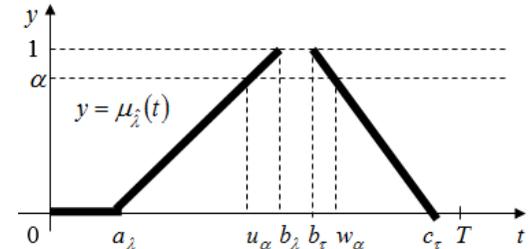


Рис. 4.1.4. Случай, когда $b_\tau > b_\lambda$.

Из рисунка 4.1.4 видно, что при любом α затраты времени на обслуживание больше интервала времени между моментами прибытия требований. Следовательно, очередное требование застает канал обслуживания занятым или готовым к обслуживанию требования, уже ожидающего обслуживания, и попадает в очередь.

Если $b_\tau < b_\lambda$, то возможны два случая. Поясним сказанное, введя обозначение: β – минимальное значение надежности, с которой максимальная длина очереди равна нулю. Итак, очередь всегда существует при $\alpha < \beta$ (см. рис. 4.1.5). Очереди нет при $\alpha \geq \beta$.

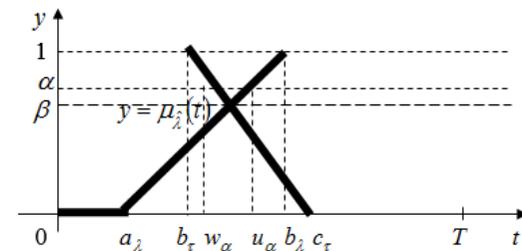


Рис. 4.1.5. Случай, когда $b_\tau < b_\lambda$.

Приведенное замечание дает простой метод нахождения минимального значения надежности, с которой максимальная длина очереди равна нулю. Требуется найти β , т.е. значение α , при котором $u_\alpha = w_\alpha$, а для этого надо решить уравнение:

$$u_\alpha = w_\alpha \quad (4.1.5)$$

Так как (см. формулы 4.1.1, 4.1.2):

$$\mu_\lambda(t) = \frac{t - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda} \text{ и } \mu_\tau(t) = \frac{c_\tau - t}{c_\tau - b_\tau},$$

то

$$u_\alpha = \alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda \text{ и } w_\alpha = c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau),$$

тогда уравнение (4.1.5) принимает вид:

$$\alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda = c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau). \quad (4.1.6)$$

Решая уравнение (4.1.6), находим, что

$$\beta = \frac{c_\tau - a_\lambda}{(b_\lambda - a_\lambda) + (c_\tau - b_\tau)}. \quad (4.1.7)$$

Пример 4.1.1. В автохозяйстве имеется 10 автомашин, которые, возвращаясь в конце рабочего дня, заправляются на пункте заправки в этом автохозяйстве. Все машины прибывают в парк в районе 20 часов, примерно с 19 до 21 часа. Исходим из того, что $\hat{\lambda} = \langle 10, 12, 15 \rangle$ минут. Время заправки тоже определено нечетко и занимает около 10 минут: $\hat{\tau} = \langle 7, 10, 15 \rangle$. Определить минимальное значение нашей уверенности в том, что максимальное время ожидания в очереди не превзойдет нуля.

Решение. Из формулы (4.1.7) для рассматриваемого примера получаем, что

$$\alpha = \frac{15 - 10}{(12 - 10) + (15 - 10)} = \frac{5}{7} \cong 0,714.$$

Таким образом, минимальная надежность того, что максимальная длина очереди на обслуживание будет не больше нуля (минимальная надежность того, что очереди не будет) равна примерно 0,714. В этом случае максимальное, в среднем, время, проводимое требованием в СМО, равно w_α .

4.1.3. Максимально возможное среднее время ожидания в очереди в одноканальной СМО.

В предыдущем пункте мы рассмотрели случай, когда очередь отсутствует, т.е. среднее время ожидания в очереди равно нулю. Интерес представляют и ситуации с очередью разной длины, большей нуля, т.е. когда среднее время ожидания в очереди больше нуля. В дальнейшем, говоря о среднем времени ожидания в очереди, будем предполагать, что оно больше нуля. Будем использовать описанный подход, а именно, при

заданном значении надежности θ будем интересоваться средним временем t_θ ожидания в очереди в случае, для которого минимальная надежность того, что эта очередь максимальна, равна θ .

Утверждение 4.1.2. Пусть $t_\theta > 0$, $x^\theta \in X$ и $t_r(x^\theta) = t_\theta$. Тогда x^θ - единственная реализация, для которой выполняются условия:

$$\hat{p}(x^\theta) = \theta \text{ и } t_r(x^\theta) = \max_{x \in X \wedge \mu_{\hat{p}}(x) = \theta} t_r(x). \quad (4.1.8)$$

Доказательство. Покажем, что $\mu_{\hat{\lambda}}(x_i^\theta) = \theta, i = 1, 2, \dots, n-1$, и $\mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+i}^\theta) = \theta, i = 1, 2, \dots, n$.

Действительно, в силу (4.1.3)

$$\mu_{\hat{\lambda}}(x_i^\theta) \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ и } \mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+i}^\theta) \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n.$$

Если $\mu_{\hat{\lambda}}(x_i^\theta) < \theta$ для некоторого i от 1 до $n-1$ и (или) $\mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+j}^\theta) < \theta$ для некоторого j от 1 до n , то $\hat{p}(x^\theta) < \theta$, опять же в силу (4.1.3). Следовательно,

$$\mu_{\hat{\lambda}}(x_i^\theta) = \theta, i = 1, 2, \dots, n-1, \text{ и } \mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+i}^\theta) = \theta, i = 1, 2, \dots, n.$$

При заданном уровне надежности (рис. 4.1.1 и 4.1.2) интервал между моментами прибытия требований может принять одно из двух значений (кроме случая, когда этот уровень равен единице), аналогично и интервал, равный времени обслуживания. А так как мы ищем реализацию, для которой t_θ максимально, то значения этих интервалов определяются однозначно. Следовательно, реализация x^θ определяется однозначно, и это завершает доказательство.

Следствие 4.1.1. Заметим, что в случае, когда речь идет о ситуации, в которой средняя длина очереди (среднее время пребывания в очереди) больше нуля, в первом абзаце текущего пункта слово «минимальная» можно опустить и при заданном значении надежности θ интересоваться средним временем ожидания в очереди, для которой надежность того, что эта очередь максимальна, равна θ .

Вычислим $t(x^{0\alpha})$ (см. 4.1.4) по заданному α . Если $u_\alpha \geq w_\alpha$, то $t_r(x^{0\alpha}) = 0$, и этот случай рассмотрен в п. 4.1.2. Пусть $u_\alpha < w_\alpha$ и $u_\alpha = w_\alpha - \sigma, \sigma > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} n \cdot t(x^{0\alpha}) &= w_\alpha + (\sigma + w_\alpha) + (2\sigma + w_\alpha) + \dots + ((n-1)\sigma + w_\alpha) = \\ &= n \cdot w_\alpha + \frac{n(n-1)}{2} \sigma, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

и тогда, учитывая равенство 4.1.9, получаем, что среднее время $t_r^1(x^{0\alpha})$, потраченное требованием на ожидание обслуживания (в очереди) определяется равенством:

$$t_r^1(x^{0\alpha}) = \frac{(n-1)}{2} \sigma. \quad (4.1.10)$$

Замечание 4.1.4. Так как u_α , w_α , σ непрерывно зависят от α , то $t(x^{0\alpha})$ и $t_r(x^{0\alpha})$ есть непрерывная функция от α , значит, для любого возможного значения π среднего времени ожидания в очереди существует такое β_0 , что $t_r(x^{0\beta_0}) = \pi$ и, если $t_r(x^{0\beta}) = r$, то $\beta \geq \beta_0$.

Нас интересуют максимально возможные затраты времени, поэтому будем исходить из того, что $\mu_\lambda(t) = \frac{t - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda}$ и $\mu_\tau(t) = \frac{c_\tau - t}{c_\tau - b_\tau}$. Решая

уравнение $\alpha = \frac{u_\alpha - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda}$ относительно u_α , находим, что

$$u_\alpha = \alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda.$$

Решая уравнение $\alpha = \frac{c_\tau - w_\alpha}{c_\tau - b_\tau}$ относительно w_α , находим, что

$$w_\alpha = c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau),$$

и тогда

$$t_r^1(x^{0\alpha}) = \frac{(n-1)}{2} ([c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau)] - [\alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda]) \quad (4.1.11)$$

Для поиска минимального значения α надежности θ , с которой π является максимально возможным средним временем ожидания в очереди среди всех реализаций, надежность которых равна θ , можно решить уравнение

$$t_r^1(x^{0\alpha}) = \pi$$

или, учитывая соотношение (4.1.11), уравнение

$$\frac{(n-1)}{2} ([c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau)] - [\alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda]) = \pi,$$

откуда

$$c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau) - \alpha(b_\lambda - a_\lambda) - a_\lambda = \frac{2\pi}{(n-1)}, \quad (4.1.12)$$

решая (4.1.12) относительно α , получаем:

$$\alpha = \frac{(n-1)(c_\tau - a_\lambda) - 2\pi}{(n-1)(c_\tau - b_\tau + b_\lambda - a_\lambda)}. \quad (4.1.13)$$

Пример 4.1.2. В условиях примера 4.1.1 определить минимальное значение нашей уверенности в том, что максимальное среднее время ожидания в очереди не превзойдет 10 минут.

Решение. Воспользуемся формулой 4.1.13. Тогда искомое значение равно

$$\alpha = \frac{9(15-10) - 20}{9(15-10+12-10)} = \frac{25}{63} \approx 0,397.$$

4.1.4. Максимально возможное значение надежности того, что среднее время ожидания в очереди в одноканальной СМО равно заданной величине.

В пункте 4.1.3 мы решали задачу о максимальной очереди при заданной надежности, но представляет интерес и вопрос о максимальной надежности при заданной длине очереди.

Рассматривается СМО из предыдущего пункта. Требуется найти реализацию, для которой среднее время ожидания в очереди равно L , а ее надежность максимальна среди всех реализаций, для которых среднее время ожидания в очереди равно L , $0 \leq L \leq (c_\tau - a_\lambda) \cdot (n-1)$, т.е. L не превосходит максимально возможной очереди.

Найдем такое α , ($0 \leq \alpha < 1$) что $t_r(x^{0\alpha}) = L$, в силу непрерывности $t_r(x^{0\alpha})$ (замечание 4.1.4) такое α существует. Если очередь равна L , то

$$\sigma_\alpha = \frac{2L}{n-1}, \text{ т.е. } u_\alpha - w_\alpha = \frac{L}{n-1} \text{ или}$$

$$\alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda - c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau) = \frac{2L}{n-1}. \quad (4.1.14)$$

Отметим, что мы полагаем α меньшим единицы, так как в противном случае его значение максимально и увеличить его уже не возможно.

Пусть $\tilde{\alpha}$ удовлетворяет равенству (4.1.14). Заметим, что $u_{\tilde{\alpha}}$ меньше соответствующей моды, а $w_{\tilde{\alpha}}$ – больше. Чтобы, сохраняя длину очереди, увеличить ее надежность надо увеличить надежность значений всех координат в реализации $x^{0\tilde{\alpha}}$. Обозначим через α' новое, увеличенное значение надежности, пусть i – порядковый номер некоторого требования, из числа поступивший в СМО. Пусть $\alpha'' = \mu_\lambda(x_i) \geq \alpha' < 1$ и $\alpha''' = \mu_\tau(x_{(n-1)+i} \geq \alpha') < 1$. Рассмотрим следующие четыре случая.

$$1. \text{ Если } x_i \leq b_\lambda, \text{ то } \alpha'' = \frac{t - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda} \text{ и}$$

$$t = a_\lambda + \alpha''(b_\lambda - a_\lambda) > a_\lambda + \alpha(b_\lambda - a_\lambda) = u_{\tilde{\alpha}}.$$

Следовательно интервал между поступлением требований увеличивается, что приводит к уменьшению затрат времени в очереди.

2. Если $x_i > b_\lambda$, то тем более $x_i > u_{\tilde{\alpha}}$, что опять же ведет к уменьшению затрат времени в очереди.

$$3. \text{ Если } x_{(n-1)+i} \geq b_\tau, \alpha''' = \frac{c_\tau - t}{c_\tau - u_\tau}, \text{ откуда}$$

$$t = c_\tau - \alpha^m(c_\tau - b_\tau) < c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau) = w_{\bar{\alpha}},$$

т.е. время обслуживания уменьшается, что уменьшает затраты времени в очереди.

4. Если $x_{(n-1)+i} < b_\tau$, то тем более $x_{(n-1)+i} < w_{\bar{\alpha}}$, то опять же ведет к уменьшению затрат времени в очереди.

Для требования с номером i , при переходе от надежности $\bar{\alpha}_i$ к надежности α' , реализуется одно из сочетаний: первый случай с третьим случаем, первый с четвертым, второй с третьим и, наконец, второй с четвертым. Очевидно, что любое из этих сочетаний уменьшает время пребывания требования в очереди.

Поясним сказанное, используя графики соответствующих функций принадлежности (рис. 4.1.6, 4.1.7)

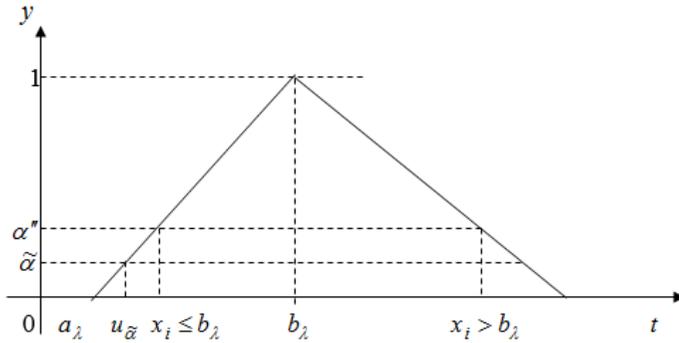


Рис. 4.1.6. Случаи 1 и 2: $x_i \leq b_\lambda$ и $x_i > b_\lambda$.

Как видно из рис. 4.1.6 с увеличением надежности интервалы между требованиями увеличиваются, что уменьшает потери времени в очереди.

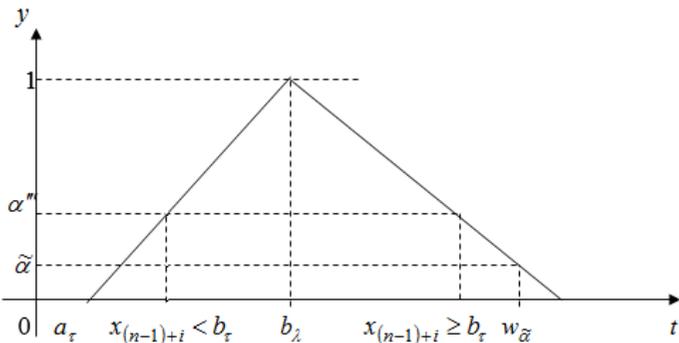


Рис. 4.1.7. Случаи 3 и 4: $x_{(n-1)+i} \geq b_\tau$ и $x_{(n-1)+i} < b_\tau$.

Как видно на рис. 4.1.7 с увеличением надежности интервалы обслуживания уменьшаются, что уменьшает потери времени в очереди.

Таким образом, если $t_r^1(x^{0\alpha}) = L$, то с надежностью α максимальное значение среднего времени ожидания в очереди равно L , и максимальная надежность того, что значение среднего времени ожидания в очереди равно L , равна α .

Приведем еще одно доказательство того факта, что максимальная надежность того, что значение среднего времени ожидания в очереди равно L , равна α (см. формулу 4.1.13).

Пусть существует такая реализация x , что ее надежность равна $\bar{\alpha} > \alpha$, а значение среднего времени ожидания в очереди равно $t^1(x) = L$. Рассмотрим $x^{0\bar{\alpha}}$, имеем: $t_r^1(x^{*\bar{\alpha}}) < t_r^1(x^{0\alpha}) = L$, а так как $t_r^1(x) \leq t_r^1(x^{0\bar{\alpha}})$, то $t_r^1(x) < L$. Что противоречит сделанному предположению. Следовательно, максимальная надежность того, что значение среднего времени ожидания в очереди равно L , равна α .

4.1.5. Очередь в многоканальной СМО.

Рассматривается система, аналогичная системе из п. 4.1.2, но с m , $m > 1$, каналами. Предполагается, что каналы обслуживания однородные, т.е. интенсивность обслуживания у них одинаковая. Результаты этого пункта, касающиеся среднего времени ожидания в очереди, и их обоснование во многом совпадают с материалом предыдущих пунктов, поэтому приведем только их формулировку и краткое обоснование.

Начнем со случая, когда максимальное время ожидания начала обслуживания равно нулю. Здесь, как и в п. 4.1.2, надежность того, что максимальное время ожидания в очереди равно нулю, в общем случае принимает значение из некоторого интервала. Поэтому, как и раньше, для оценки качества функционирования такой СМО предлагается использовать минимальное значение указанной надежности.

Как и раньше, максимальная длина очереди при заданной надежности α получается для реализации, в которой длины интервалов времени между моментами поступления очередных требований не больше b_λ и имеют надежность, равную α . При этом продолжительность обслуживания любого из требований больше b_τ , а ее надежность так же равна α .

Пусть x^α – описанная реализация, и

$$\mu_\lambda(x_i^\alpha) = \alpha, \mu_\lambda(x_i^\alpha) = \alpha, i = 1, 2, \dots, n-1, \text{ и } \mu_\tau(x_{(n-1)+i}^\alpha) = \alpha, i = 1, 2, \dots, n.$$

Как и раньше длину интервала между требованиями для этой реализации будем обозначать u_α , а длину интервала обслуживания – w_α . Обозначим

$$\sigma_\alpha = w_\alpha - m \cdot u_\alpha.$$

Если $\sigma_\alpha = 0$, то минимальная надежность того, что максимальное число задействованных каналов равно m и среднее время ожидания в очереди равно нулю, равна α .

Утверждение 4.1.3. Если $\sigma_\alpha \geq 0$, то с надежностью α максимальное число задействованных каналов равно m и суммарное время нахождения всех требования в очереди равно:

$$t(x^\alpha) = m \cdot 0 + m \cdot \sigma_\alpha + 2m \cdot \sigma_\alpha + \dots + \left(\text{int} \left(\frac{n}{m} \right) \right) m \cdot \sigma_\alpha + \left(n - \text{int} \left(\frac{n}{m} \right) \cdot m \right) \cdot \sigma_\alpha. \quad (4.1.15)$$

Доказательство. С требованием, имеющим номер i , свяжем следующие параметры:

i – номер требования,

$t_{приб}^i$ – момент поступления требования с номером i в СМО,

$t_{н.об.}^i$ – момент попадания i -го требования в канал обслуживания (момент начала обслуживания этого требования),

$t_{ок}^i$ – момент окончания обслуживания i -го требования (он же момент освобождения соответствующего канала),

$t_{оч}^i$ – время пребывания требования i -требования в очереди.

Все указанные моменты отсчитываются от нулевого, от момента прибытия первого требования.

Первое требование поступает в СМО в момент $t_{приб}^1 = 0$, требование с номером i – в момент $t_{приб}^i = u_\alpha \cdot (i-1)$.

Для удобства разобьем все множество требований на непересекающиеся порции по m последовательных требований в порции. Первая порция состоит из первых m поступивших требований, вторая – из следующих m требований и т.д. Последняя порция состоит из последних требований, их число может оказаться меньше m .

Каждое требование из первой порции, поступившей в СМО, сразу же попадает в соответствующий канал, поэтому $t_{н.об.}^i = u_\alpha \cdot (i-1)$ для $i=1, 2, \dots, m$. Каналы освобождаются от обслуживания этих требований соответственно в моменты $w_\alpha + (i-1) \cdot u_\alpha$, $i=1, 2, \dots, m$.

Требования из следующей порции поступают в рассматриваемую СМО в моменты $u_\alpha \cdot (i-1)$, где $i = m+1, m+2, \dots, 2m$. На обслуживание эти требования поступают в моменты

$$t_{н.об.}^i = \max \{ t_{приб}^i, t_{ок}^{i-m} \} = \max \{ u_\alpha (i-1), w_\alpha + (i-m-1)u_\alpha \}, \quad (4.1.16)$$

соответственно.

Учитывая (4.1.16), получаем, что соответствующие каналы освобождаются в моменты

$$t_{ок}^i = t_{н.об.}^i + w_\alpha = \max \{ u_\alpha (i-1), w_\alpha + (i-m-1)u_\alpha \} + w_\alpha. \quad (4.1.17)$$

Каждое требование из этой второй порции проводит в очереди время, равное σ_α .

Рассмотрим порцию с номером k , предполагая, что $km \leq n$, учитывая соотношения (4.1.16) и (4.1.17).

Требования из k -ой порции поступают в систему в моменты $u_\alpha \cdot (i-1)$ при $i = (k-1) \cdot m + 1, (k-1) \cdot m + 2, \dots, k \cdot m$. Они поступают на обслуживание в моменты

$$t_{н.об.}^i = \max \{ t_{н.об.}^i, t_{ок}^{i-m} \} = \max \{ u_\alpha (i-1), w_\alpha + (i - (k-1)m - 1) \}.$$

Соответствующие каналы освобождаются в моменты

$$t_{ок}^i = t_{н.об.}^i + w_\alpha = \max_{i=(k-1)m+1, \dots, km} \{ u_\alpha (i-1), w_\alpha + (i - (k-1)m - 1)u_\alpha \} + w_\alpha.$$

Каждое требование из k -ой порции проводит в очереди время, равное $(k-1) \cdot \sigma$.

Если n делится нацело на m , то максимальное k равно n/m , иначе максимальный номер k полной порции равен $\text{int} \left(\frac{n}{m} \right)$, и последняя порция

с номером $k+1 = \text{int} \left(\frac{n}{m} \right) + 1$ является неполной и состоит из $n - m \cdot \text{int} \left(\frac{n}{m} \right)$ требований. Отсюда следует равенство (4.1.15).

Возможный график функции принадлежности нечеткого числа «максимально возможное суммарное время пребывания требований в очереди» представлен на рис. 4.1.8.

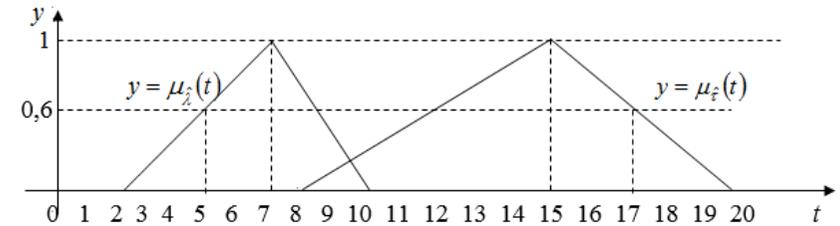


Рис. 4.1.8. Функции принадлежности для примера 4.1.3.

Пример 4.1.3. Система массового обслуживания имеет три одинаковых по пропускной способности, равной $\hat{\tau} = \langle 8, 15, 20 \rangle$ (формула 4.1.19, рис. 4.1.8) канала, в нее поступает поток требований, интенсивность (средний интервал времени между моментами поступления

очередных требований) которого равна $\hat{\lambda} = \langle 2, 7, 10 \rangle$ (формула 4.1.18, рис. 4.1.8). Построить функцию принадлежности нечеткого числа «максимально возможное среднее время пребывания требований в системе». Определить надежность, с которой максимальное среднее время ожидания в очереди равно нулю.

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \begin{cases} \frac{t-2}{5}, t \in [2, 7], \\ \frac{10-t}{3}, t \in [7, 10], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (4.1.18)$$

$$\mu_{\hat{t}}(t) = \begin{cases} \frac{t-8}{7}, t \in [8, 15], \\ \frac{20-t}{5}, t \in [15, 20], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (4.1.19)$$

Заметим, что формулы 4.1.18 и 4.1.19 получены из формул 4.1.1. и 4.1.2 соответственно.

Проиллюстрируем вычисления по формулам 4.1.16, 4.1.15 для случая, когда $\alpha = 0,6$. Если $\alpha = 0,6$, то $u_{\alpha} = 5 \text{ мин.}$, $w_{\alpha} = 17 \text{ мин.}$. Результаты вычислений сведем в таблицу 4.1.1.

Таблица 4.1.1. Время ожидания в очереди при $m = 3$, $n = 11$, $u_{\alpha} = 5 \text{ мин.}$, $w_{\alpha} = 17 \text{ мин}$

№ строки		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$t_{\text{приб}}^i$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
2	$t_{\text{н.об.}}^i$	0	5	10	17	22	27	34	39	44	51	56
3	$t_{\text{оч}}^i$	0	0	0	2	2	2	4	4	4	6	6
Каналы обслуживания и моменты их освобождения												
	$f-l$	1-1*	2-2	3-3	1-4	2-5	3-6	1-7	2-8	3-9	1-10	2-11
4	$t_{\text{ок}}^i$	17	22	27	34	39	44	51	56	61	68	73

Таблица 4.1.1. состоит из двух частей. В верхней ее части, строки 1,2,3 содержится информация о требованиях. В нижней – строка с номером 4 содержится необходимая информация о каналах обслуживания.

Запись $f-l$ в заглавной строке нижней части таблицы означает, что канал с номером f обслуживает требование с номером l .

Поясним алгоритм формирования таблицы 4.1.1. Элемент этой таблицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j обозначим через q_{ij} .

В первой строке указываем моменты прибытия требований в СМО: $q_{11} = 0$ (первое требование поступает в момент начала отсчета времени) для остальных требований $q_{1j} = q_{1j-1} + u_{\alpha}$.

Далее заполнение таблицы осуществляется по столбцам:

В моменты поступления первых трех требований имеется свободный канал обслуживания, и эти требования сразу начинают обслуживаться, время их ожидания в очереди равно нулю, поэтому

$$q_{21} = q_{31} = 0, q_{4,1} = 0 + 17 = 17,$$

$$q_{22} = 5, q_{32} = 0, q_{42} = 5 + 17 = 22,$$

$$q_{23} = 10, q_{33} = 0, q_{4,3} = 10 + 17 = 27.$$

Для $i > 3$ время начала обслуживания равно наименьшему из времени прибытия требования с номером i и времени освобождения каналов:

$$q_{2i} = \min \{q_{1i}, q_{4i-3}, q_{4i-2}, q_{4i-1}\}.$$

Это требование простаивает в очереди время, равное $q_{3i} = q_{2i} - q_{1i}$. Время окончания его обслуживания (время освобождения соответствующего канала) равно $q_{4i} = q_{2i} + 17$.

Суммарное время пребывания требований в очереди равно сумме элементов третьей строки и равно

$$0+0+0+2+2+2+4+4+4+6+6=30 \text{ мин.},$$

среднее время пребывания требования в очереди равно $\frac{30}{11}$ мин.

Суммарное время пребывания требований в СМО равно

$$30 + 11 \cdot 17 = 217 \text{ мин.},$$

среднее время пребывания требования в СМО равно $\frac{217}{11}$ мин.

Из равенства (4.1.15) следует, что при выполнении условия $\sigma_{\alpha} \geq 0$ длина очереди равна нулю только, если $\sigma_{\alpha} = 0$. Но $\sigma_{\alpha} = w_{\alpha} - m \cdot u_{\alpha}$. Учитывая соотношения (4.1.18), (4.1.19), получаем, систему уравнений:

$$\alpha = \frac{20-t}{5} \text{ и } \alpha = \frac{t-2}{5},$$

откуда

$$t = 20 - 5\alpha \text{ и } t = 5\alpha + 2. \quad (4.1.20)$$

Решая систему 4.1.20, находим, что $\alpha = 0,7$ и $t = 5,5$, т.е. $w_{\alpha} = 16,5$ и $u_{\alpha} = 5,5$.

Так как

$$\sigma_\alpha = w_\alpha - m \cdot u_\alpha = \frac{20-t}{5} - m \cdot \frac{t-2}{5},$$

то $t(x^\alpha)$ из соотношения 4.1.15 линейно зависит от α . И функция принадлежности $\mu_{\max}(t)$ нечеткого числа «максимально возможное суммарное время пребывания требований в очереди» линейная пока очередь есть, и ее график изображен на рисунке 4.1.9.



Рис. 4.1.9. График функции принадлежности нечеткого числа «максимально возможное суммарное время пребывания требований в очереди» при $m=3, n=11$.

Учитывая формулу (4.1.15), мы получаем, что для нашего примера

$$t(x^\alpha) = 3 \cdot \sigma_\alpha + 3 \cdot 2 \cdot \sigma_\alpha + 2 \cdot 3 \cdot \sigma_\alpha = 15\sigma_\alpha.$$

Так как $\sigma_0 = 20 - 3 \cdot 2 = 14$, то $t(x^0) = 210$ мин. Ранее мы получили, что $t(x^{0,7}) = 0$, и 0,7 – это минимальное значение надежности, при которой очереди нет.

4.1.6. Задача о надежности того, что свободны k каналов.

Как уже отмечалось, в случае, когда $\sigma_\alpha < 0$, очереди нет, ее длина равна нулю. Но здесь возможны ситуации, когда не только очереди нет, но максимальное число загруженных каналов меньше m , т.е. существуют «лишние» каналы обслуживания.

Не трудно убедиться в том, что:

- если $\sigma_\alpha < 0$, но $w_\alpha - (m-1) \cdot u_\alpha \geq 0$, то с надежностью α максимальное число задействованных каналов равно m , т.е. в этом случае все m каналов хоть иногда оказываются одновременно задействованными и «лишних» каналов нет,
- если $w_\alpha - k \cdot u_\alpha < 0$ и $w_\alpha - (k-1) \cdot u_\alpha \geq 0$, то с надежностью α максимальное число задействованных каналов равно k , в этом случае в системе появляются «лишние» каналы, и их минимальное число равно $m - k$.

Установим пределы, в которых находится надежность того, что максимальное число задействованных каналов равно k . Для этого решим относительно α систему неравенств:

$$\begin{cases} w_\alpha - k u_\alpha < 0, \\ w_\alpha - (k-1) \cdot u_\alpha \geq 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$\frac{c_\tau - k a_\lambda}{k(b_\lambda - a_\lambda) + (c_\tau - b_\tau)} < \alpha \leq \frac{c_\tau - (k-1)a_\lambda}{(k-1)(b_\lambda - a_\lambda) + (c_\tau - b_\tau)}. \quad (4.1.21)$$

Пример 4.1.4. В условиях примера 4.1.3 определить, при каких значениях α свободен точно один канал, точно два канала.

С учетом условий примера 4.1.3 формула 4.1.21 принимает вид:

$$\frac{20 - 2k}{5k + 5} < \alpha \leq \frac{20 - (k-1)}{5(k-1) + 5}. \quad (4.1.22)$$

Минимум один канал свободен, если $k=2$, тогда из 4.1.22 получаем

$$\frac{16}{15} < \alpha \leq \frac{19}{10}.$$

Так как $\alpha \leq 1$, то не при каком α свободных полностью каналов нет.

Пусть $\hat{\tau} = \langle 8, 12, 17 \rangle$, а все остальные условия примера 4.1.3 сохраняются. Тогда при $k=2$ получаем: $\frac{13}{15} < \alpha \leq \frac{16}{10}$. Это означает, что при

$\alpha \in \left(\frac{13}{15}, 1 \right]$ минимум один канал в системе свободен («лишний»).

4.1.7. Надежность отказа в обслуживании

Рассматривается система массового обслуживания из п. 4.1.6. Предполагается, что, если требованию предстоит находиться в очереди больше заданного времени $t_{\text{отк}}$, то оно получает отказ в обслуживании и покидает систему не обслуженным. Предполагается, что $t_{\text{отк}}/u_\alpha \neq e$ ни для какого целого числа e , u_α и w_α – целые числа.

Определить максимальную долю требований, получающих отказ в обслуживании с надежностью α .

Для решения этой задачи можно использовать алгоритм из п. 4.1.7. с одним изменением, а именно, если вновь прибывшему требованию предстоит ожидать начала обслуживания больше заданного времени, то переходим к рассмотрению следующего требования.

Как и в таблице 4.1.1 f – номер канала, l – порядковый номер требования.

Таблица 4.1.2. Система с отказами
при $m=3, n=11, u_\alpha=5\text{мин.}, w_\alpha=17\text{мин.}, t_{\text{отк}}=3\text{мин.}$

i	1	2	3	4	5	6	7*	8	9	10	11
$t_{\text{приб}}^i$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$t_{\text{нач.об.}}^i$	0	5	10	17	22	27	34	35	40	45	52
$t_{\text{оч}}^i$	0	0	0	2	2	2	4	0	0	0	2
Каналы обслуживания и моменты их освобождения											
$f-l$	1-1	2-2	3-3	1-4	2-5	3-6	1-7	1-8	2-9	3-10	1-11
$t_{\text{ок}}^i$	17	22	27	34	39	44	51	52	57	62	69

Пример. 4.1.5. Рассмотрим систему массового обслуживания из примера 4.1.3. Пусть максимальное время пребывания в очереди не должно превосходить трех минут. Напомним, что $\alpha=0,6$. Результаты расчетов сведены в таблицу 4.1.2, структура которой аналогична структуре таблицы 4.1.1, использованной в примере 4.1.3.

Анализируя данные таблицы 4.1.2, мы видим, что седьмое по счету из числа поступивших требований покинуло систему не обслуженным и таких требований всего одно. Следовательно, доля требований, получивших отказ в обслуживании равна $1/11$.

4.1.8. Открытая система массового обслуживания с отказами.

Рассматривается система массового обслуживания с m одинаковыми по пропускной способности каналами обслуживания, с неограниченным числом требований, функционирующая на интервале времени $[0, +\infty)$. Как и ранее, предполагается, что интервалы времени между моментами поступления очередных требований в СМО и интервалы времени обслуживания задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$ с функциями принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}$ и $\mu_{\hat{\tau}}$ соответственно.

Очевидно, что как и раньше, если $\sigma_\alpha = w_\alpha - m \cdot u_\alpha \leq 0$, то очереди с надежностью α нет, иначе она есть и, более того, она стремится к бесконечности при стремлении времени функционирования системы к бесконечности. Будем рассматривать случай, когда $\sigma_\alpha = w_\alpha - m \cdot u_\alpha > 0$.

Остановимся на определении доли требований, получивших отказ в обслуживании при заданной надежности α , при этом будем предполагать, что время ожидания в очереди не должно превышать заданной величины, равной $t_{\text{отк}}$. Время нахождения требования в очереди равно времени освобождения соответствующего канала минус время поступления в систему этого требования. Если для некоторого требования эта разность меньше нуля, то время пребывания этого требования в очереди полагается равным нулю.

Предполагается, что все необходимые исходные данные являются рациональными числами. Если время ожидания в очереди для вновь поступившего требования превосходит $t_{\text{отк}}$, то оно (это требование) покидает систему необслуженным.

Под порцией поступивших требований будем понимать m последовательно поступивших в СМО требований. Первая порция это требования с первого до требования с номером m включительно, вторая – это требования с порядковыми номерами от $m+1$ до $2m$ и т.д.

В начальный момент времени все каналы обслуживания свободны и требования из первой, поступившей в СМО, порции обслуживаются без очереди.

Очередное требование, поступившее в СМО (первое из следующей, второй, порции требований), попадает в очередь, время его пребывания в которой равно σ_α . Второе требование из этой порции пребывает на u_α позже, но и второй канал освобождается на время, равное u_α , позже, т.е. время ожидания в очереди для второго требования из этой порции равно σ . Аналогично и для всех остальных требований этой порции.

Очевидно, что справедливо утверждение: если первое требование из q -ой порции, поступившее в СМО, попадает в очередь, время его нахождения в которой равно T , то для всех остальных требований из этой порции время их нахождения в очереди равно T .

Обозначения:

i – номер поступившего в СМО требования,

s – номер канала обслуживания,

$t_{\text{пост.}}^i$ – момент поступления в СМО требования с номером i ,

$t_{\text{нач.об.}}^i$ – момент начала обслуживания i -го требования,

$t_{\text{ок.об.}}^i$ – момент окончания обслуживания i -го требования,

$t_{\text{оч.}}^i$ – время пребывания i -го требования в очереди,

$t_{\text{осв.}}^s$ – момент освобождения канала с номером s .

Пусть $k+1$ – это номер первой порции требований, для требований из которой время ожидания в очереди больше $t_{\text{отк}}$. Заметим, что первым при обработке требований любой порции освобождается первый канал.

Итак, первое требование из $(k+1)$ -ой порции поступает на первый канал, номер этого требования равен $mk+1$, время его пребывания в очереди равно $t_{\text{оч.}}^{mk+1}$. Так как $t_{\text{оч.}}^{mk+1} > t_{\text{отк}}$, то это требование покидает систему не обслуженным. Следующее требование прибывает через время, равное u_α . Первый канал освобождается через время, равное $t_{\text{оч.}}^{mk+1} - u_\alpha$ после момента прибытия второго требования. Если $t_{\text{оч.}}^{mk+1} - u_\alpha > t_{\text{отк}}$, то и это требование покидает СМО не обслуженным.

Пусть l_k – такое минимальное целое число, что $t_{оч.}^{mk+1} + w_\alpha - l_k u_\alpha \leq t_{омк}$. Тогда требование с номером $mk+1+l_k$, прибывающее в СМО в момент $t_{пост.}^{km+1+l_k}$ застает очередь не больше предельной и остается в СМО в ожидании обслуживания на первом канале. Заметим, что так как $t_{оч.}^{mk+1} = t_{оч.}^{mk} + w_\alpha - m u_\alpha$, то $l_k < m$, и $t_{оч.}^{mk+2} = t_{оч.}^{mk+1} + w_\alpha - l_k u_\alpha + w_\alpha > t_{омк}$.

Рассмотрим порцию требований с номером $k+2$, первым требованием в которой является требование с номером $m(k+1)+l_k$. Требования этой порции ожидают обслуживания на соответствующем канале время, равное $t_{оч.}^{mk+1+l_k} = t_{оч.}^{mk+1} - l_k u_\alpha \leq t_{омк}$. Если это время оказалось меньше нуля, то считаем, что это время равно нулю, т.е. что $t_{оч.}^{mk+1+l_k} = 0$. Каналы будут готовы к обслуживанию очередных требований через время, равное w_α соответственно, и т.д.

Для решения задачи предлагается провести предварительные расчеты, пример которых представлен в таблице 4.1.3, аналогичные расчетам, приведенным в таблице 4.1.2.

Таблица 4.1.3 Система с отказами с неограниченным числом требований, $\alpha = 0,6$, $u_\alpha = 5$, $w_\alpha = 32$, $\sigma = 22$, $t_{омк} = 31$, $m = 2$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$t_{приб.}^i$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$t_{наоб.}^i$	0	5	32	37	64	64	64	64	69	96	96	96	96	96
$t_{оч.}^i$	0	0	22	22	44	39	34	29	29	51	46	41	36	31
$f-l^*$	1-1	2-2	1-3	2-4	1-5	1-6	1-7	1-8	2-9	1-10	1-11	1-12	1-13	1-14
$t_{ок.}^i$	32	37	64	69				96	101					128

Таблица 4.1.3 (продолжение). Система с отказами с неограниченным числом требований, $\alpha = 0,6$, $u_\alpha = 5$, $w_\alpha = 32$, $\sigma = 22$, $t_{омк} = 31$, $m = 2$.

i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$t_{приб.}^i$	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135
$t_{наоб.}^i$	101	128	128	128	128	128	128	133	160	160	160	160	160	165
$t_{оч.}^i$	31	53	48	43	38	33	28	28	50	45	40	35	30	30
$f-l^*$	2-15	1-16	1-17	1-18	1-19	1-20	1-21	2-22	1-23	1-24	1-25	1-26	1-27	2-28
$t_{ок.}^i$	133						160	165					192	197

Таблица 4.1.3 (продолжение). Система с отказами с неограниченным числом требований, $\alpha = 0,6$, $u_\alpha = 5$, $w_\alpha = 32$, $\sigma = 22$, $t_{омк} = 31$, $m = 2$.

i	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$t_{приб.}^i$	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205
$t_{наоб.}^i$	192	192	192	192	192	192	197	224	224	224	224	224	229	256
$t_{оч.}^i$	52	47	42	37	32	27	27	49	44	39	34	29	29	51
$f-l^*$	1-29	1-30	1-31	1-32	1-33	1-34	2-35	1-36	1-37	1-38	1-39	1-40	1-41	1-42
$t_{ок.}^i$						224	229					256	261	

В ходе этих вычислений надо выяснить, через сколько итераций для рассматриваемых исходных данных количества требований, получивших отказ в обслуживании, начнут повторяться. Это обязательно случится, так как все необходимые исходные данные являются рациональными числами.

Пример 4.1.6. Рассмотрим систему с двумя однотипными по производительности каналами обслуживания. Пусть $\hat{\lambda} = \langle 2, 7, 10 \rangle$, для любого канала $\hat{\tau} = \langle 15, 30, 35 \rangle$. Время ожидания в очереди не должно превосходить 31 минуты, а надежность того, что максимальная время ожидания в очереди не больше 31 минуты равна 0,6.

Вычисления сведены в таблицу 4.1.3. Для наглядности эта таблица жирными вертикальными линиями поделена на части. Первый столбец такой части соответствует первому требованию в соответствующей группе, попавшему в очередь, последний – последнему требованию из этой группы, покинувшему систему необслуженным.

Десятому требованию предстоит находиться в очереди 51 минуту, это повторяется для 42 требования. Следовательно, все повторяется через $32 \cdot 5 = 160$ минут. За это время поступило 32 требования, из них получили отказ в обслуживании 22 требования. Значит, предельное значение доли отказов равно $22/32 \cong 0,69$.

Заметим, что вычисления можно упростить, учитывая тот факт, что время ожидания в очереди для требований очередной порции увеличивается на $32 - 2 \cdot 5 = 22$ минуты. Поэтому время ожидания в очереди становится больше 32 минут для требований, начиная с третьей порции. Сведем дальнейшие вычисления в таблицу 4.1.4.

Выполненные вычисления порождают следующий алгоритм решения рассматриваемой задачи. Будем рассматривать первый канал, так как с остальными каналами происходит все то же самое, но со сдвигом во времени на $(k-1)u_\alpha$, где k - номер рассматриваемого канала.

Таблица 4.1.4. Поиск повторений очереди в процессе обслуживания
 $\alpha = 0,6, u_\alpha = 5, w_\alpha = 32, \sigma = 22, t_{омк} = 31, m = 2.$

№ тр. (i)	1	3	5	8	10	14	16	21	23	27	29	34	36	40	42	46	46
$t_{оч.}^i$	0	22	44	29	51	31	53	28	50	30	52	27	49	29	51	31	53
l_k	0	0	3	0	4	0	5	0	4	0	5	0	4	0	4	0	5
$t_{оч.}^{i+l_k}$	0	22	29	29	31	31	28	28	30	30	27	27	29	29	31	31	28

Для требований из порций с номерами от 1 до $\text{int}\left(\frac{t_{омк}}{w_\alpha - mu_\alpha}\right) = e$

время ожидания в очереди не превосходит $t_{омк}$. Первое требование из порции с номером $e+1$ должно обслуживаться на первом канале, но для него время ожиданий в очереди больше $t_{омк}$, и оно покидает систему не обслуженным. Следующее требование поступает на первый канал, время ожидания в очереди для него уменьшается на u_α . Если это время больше $t_{омк}$, то и это требование покидает систему не обслуженным, и так далее, пока на первый канал не поступит требование, время ожидания в очереди для которого будет не больше $t_{омк}$. Напомним, что число требований, получивших в этот раз отказ в обслуживании, меньше m . Требование, поступившее после требований, получивших отказ, обслуживается в первом канале, который освободится через w_α . Следующие за этим требованием очередные $m-1$ требований поступают на соответствующие каналы и обслуживаются там. Очередное требование поступает на первый канал, при этом время ожиданий в очереди для него больше $t_{омк}$. Оно получает отказ в обслуживании и т.д.

Анализируя данные таблицы 4.1.4, мы видим, что десятое требование находится в очереди 51 минуту, это повторяется для 42 требования. Это соответствует таблице 4.1.3, и предельное значение доли отказов равно $22/32 \cong 0,69$.

Интерес представляют задачи поиска доли всего времени, когда все каналы заняты, но очередь равна нулю. Эта задача является частным случаем предыдущей при $t_{омк} = 0$. Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример.

Пример 4.1.7. Железнодорожная станция имеет два погрузочно-разгрузочных пути, на каждом из которых может размещаться по одному эшелону. Продолжительности интервалов времени между моментами прибытия эшелонов и интервалов времени, затрачиваемого на их обслуживание на любом из путей, определены не однозначно и задаются

нечеткими числами соответственно $\hat{\lambda} = \langle 2, 7, 10 \rangle$ часов и $\hat{\tau} = \langle 15, 30, 35 \rangle$ часов, время указано в часах. Эшелон, прибывающий в момент, когда оба погрузочно-разгрузочных пути заняты, направляется на другую станцию.

Определить при надежности 0,6 максимальную долю эшелонов, направляемых на другую станцию.

Решение. При $\alpha = 0,6$ интервал $u_\alpha = 5$ и интервал $w_\alpha = 32, \sigma = 22$. Так как возникновение очереди не допускается, то $t_{омк} = 0$. Число каналов обслуживания $m = 2$.

Таблица 4.1.5. Система с отказами с неограниченным числом требований, $\alpha = 0,6, u_\alpha = 5, w_\alpha = 32, \sigma = 22, t_{омк} = 0, m = 2.$

№ тр. (i)	1	3	8	10	...
$t_{оч.}^i$	0	22	0	22	...
l_k	0	5	0	5	...
$t_{оч.}^{i+l_k}$	0	0	0	0	...

Анализ таблицы 4.1.5 показывает, что расчетное время нахождения в очереди для третьего требования равно 22 часам, что повторяется для десятого требования. Следовательно, повторение ситуаций с интересующей нас стороны происходит через семь требований, при этом пять требований получают отказ в обслуживании на рассматриваемой станции. Тогда доля эшелонов, направляемых на другую станцию, равна 5/7.

В рассмотренных случаях мы характеризовали очередь временем пребывания в ней. Интерес представляет задача о длине очереди.

Пример 4.1.8. Пусть районный call-центр записи на прием к врачу имеет двухканальный телефонный номер. Пусть для рассматриваемого достаточно продолжительного периода суток интервалы времени между звонками граждан описываются нечетким числом $\hat{\lambda} = \langle 20, 50, 100 \rangle$, а время обслуживания (разговора с клиентом) – нечетким числом $\hat{\tau} = \langle 40, 80, 120 \rangle$. Здесь время указано в секундах. Подчеркнем, что все исходные данные заданы рациональными числами. Длина очереди не должна превосходить величины $L_{омк} = 3 \text{ чел.}$ Требование, поступающее в систему в момент, когда в очереди уже стоят три требования, покидает call-центр не обслуженным.

Определить с надежностью $\alpha = 0,5$ значение максимально возможной доли отказов в обслуживании.

Так как рассматриваемый период суток достаточно велик, то будем этот call-центр рассматривать как систему массового обслуживания с

неограниченным числом требований (см. пример 4.1.5). Заметим, что работу этого центра можно моделировать и как систему с ограниченным временем функционирования, если рассматриваемый интервал не велик по сравнению с интервалами времени между моментами прибытия требований (см. пример 4.1.8)

Решение. Здесь сохраняются ранее введенные обозначения. Для нашего случая получаем, что $u_\alpha = 25$ сек., $w_\alpha = 100$ сек., тогда $\sigma = 50$ сек.

Результаты вычислений сведены в таблицу 4.1.6. Опишем кратко алгоритм ее заполнения.

Таблица 4.1.6. Call центр как система с отказами с неограниченным числом требований,

$\alpha = 0,5$, $u_\alpha = 25$ сек., $w_\alpha = 100$ сек., $\sigma = 50$ сек., $L_{отк} = 3$ чел., $m = 2$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$t_{приб}^i$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$t_{н.об.}^i$	0	25	100	125	200	225	300	325	325	400	425	425	425
$t_{ок.об.}^i$	100	125	200	225	300	325	400	425	425	500	525	525	525
Кан. 1	1	1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	7
Канн.2	-	2	2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6
Очер.	-	-	3	3,4	4,5	5,6	5,6,7	5,6,7,8	6,7,9	7,9,10	7,9,10,11	7,9,10,12	9,10,13

Таблица 4.1.6 (продолжение). Call центр как система с отказами с неограниченным числом требований,

$\alpha = 0,5$, $u_\alpha = 25$ сек., $w_\alpha = 100$ сек., $\sigma = 50$ сек., $L_{отк} = 3$ чел.,

i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$t_{приб}^i$	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575
$t_{н.об.}^i$	500	525	525	525	600	625	625	625	700	725	725
$t_{ок.об.}^i$	600	625	625	625	700	725	725	725	800	825	825
Кан. 1	7	7	7	10	10	10	10	14	14	14	14
Канн.2	9	9	9	9	13	13	13	13	17	17	17
Очер.	10,13,14	10,13,14,15	10,13,14,15,16	13,14,17	14,17,18	14,17,18,19	14,17,18,19,20	17,18,21	18,21,22	18,21,22,23	18,21,22,23,24

В первой строке таблицы указаны порядковые номера прибывших требований, во второй – моменты их прибытия, в третьей – моменты начала обслуживания этих требований и в четвертой – моменты

окончания их обслуживания. Последние три строки содержат информацию о каналах обслуживания на момент поступления соответствующего требования (учитывая это вновь поступившее требование). В пятой строке указан номер требования, обслуживаемого в первом канале, в шестой – номер требования во втором канале, в седьмой – номера требований, стоящих в очереди на обслуживание

Последовательно заполняем клетки столбцов, соответствующих прибывающим требованиям. В соответствующей клетке второй строки указываем момент прибытия требования. Момент окончания обслуживания рассматриваемого требования равен минимальному из чисел четвертой строки в клетках, соответствующих требованиям с номерами меньше номера рассматриваемого требования.

Далее заполняем соответствующие клетки последних строк. Если на текущий момент рассматриваемое требование попадает в некоторый канал на обслуживание (или уже обслуживается в нем), то в соответствующей строке (пятой или шестой) указываем этого требования, если на текущий момент оба канала заняты, то требование попадает в очередь, и его номер указываем в седьмой строке. Заметим, что в одной клетке этой строки могут находиться и несколько номеров требований.

Если при заполнении клеток очередного столбца в строке «очередь» оказалось указано требований больше, чем $L_{отк}$, то требование, соответствующее этому столбцу исключается (соответствующий клиент получает отказ в постановке на очередь), это выражается в том, что время готовности соответствующего канала к началу обслуживания следующего требования совпадает со сроком начала обслуживания исключенного требования. Если в текущий момент какой-то из каналов освободился, то первое требование из очереди (если она имеется) поступает на обслуживание в этот канал, что отражается в соответствующих клетках третьей и четвертой строк, указанное требование убирается из очереди и в следующих клетках последней строки больше не указывается.

Рассмотрим упорядоченную группу требований, содержащую все идущие подряд исключенные требования и все подряд идущие за ними требования, попавшие на обслуживание или в очередь. Называть эту группу будем порцией. Найдем две порции, в которых время ожидания в очереди у соответствующих требований одинаковое. Такие требования найдутся, так как все исходные данные предполагаются рациональными. Если такая порция (любая из найденных) содержит p требований, из которых q требований получили отказ, то отношение q/p дает ответ на вопрос о максимально возможной доле отказов в обслуживании. Для приведенного примера $p=4$, $q=2$, значит, искомая доля равна 0,5.

Пример 4.1.9. Рассматривается смена работы стоматологического центра, продолжительность которой составляет 4 часа. В течении этой

смены работают два стоматолога-терапевта. Стоматологи в рассматриваемой стоматологическом центре ведет прием в течении четырех часов – с 10 до 14 часов. Интервалы времени между моментами поступления пациентов и интервалы времени их обслуживания задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle 15, 20, 60 \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle 10, 30, 50 \rangle$ минут соответственно.

Для рассматриваемого примера $u_\alpha = 18$ мин и $w_\alpha = 38$ мин, следовательно, за смену поступает 13 пациентов. Для решения надо заполнить таблицу типа таблицы 4.1.6, но только первые 13 ее столбцов.

4.1.9. Минимальная очередь при заданной надежности.

Ранее мы рассматривали задачи, в которых оценкой качества функционирования системы массового обслуживания было максимальное при заданной надежности время проводимое требованием в системе (в очереди). Рассмотрим аналогичный, но, в некотором смысле, противоположный показатель – минимальные при заданной надежности затраты времени.

По аналогии с тем, как это делалось в п. 4.1.2, рассмотрим некоторую реализацию x^0 и пусть $\mu_{\hat{\lambda}}(x^0) = \alpha$.

Пусть $\mu_{\hat{\lambda}}(x_i^0) > \alpha$ для некоторого $i < n$. Возьмем такое u_α , не меньшее медианы b_λ нечеткого числа $\hat{\lambda}$, что $\mu_{\hat{\lambda}}(u_\alpha) = \alpha$. Заметим, что $u_\alpha \geq x_i^0$. Рассмотрим реализацию x' , которая получается из x^0 заменой x_i^0 на u_α . Так как интервалы между моментами прибытия требований увеличились (не уменьшились), то время пребывания в очереди разве что увеличилось, и тогда $t(x') \leq t(x^0)$.

Пусть $\mu_{\hat{\tau}}(x_i^0) > \alpha$ для некоторого $i \geq n$. Возьмем такое w_α , меньшее медианы b_τ нечеткого числа $\hat{\tau}$, что $\mu_{\hat{\tau}}(w_\alpha) = \alpha$. Заметим, что $w_\alpha \leq x_i^0$. Рассмотрим реализацию x'' , которая получается из x^0 заменой x_i^0 на w_α . Так как затраты времени на обслуживание не увеличились то $t(x'') \leq t(x^0)$.

Рассмотрим такую реализацию $x^{\min \alpha}$, что

$$x_i^{\min \alpha} = \begin{cases} u_\alpha^{\min}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ w_\alpha^{\min}, & i = n, \dots, 2n-1. \end{cases} \quad (4.1.23)$$

Утверждение 4.1.4. Из сказанного ранее следует, что $t(x^{\min \alpha}) \geq t(x^0)$. Следовательно, с уверенностью α мы можем утверждать что средние затраты времени на пребывание требования в данной системе массового обслуживания не меньше $t(x^{\min \alpha})$.

Замечание 4.1.5. С учетом сказанного, говоря об интересующей нас надежности, достаточно рассмотреть только правую часть графика

$y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ (рис. 4.1.1) и левую часть графика $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ (рис. 4.1.2), т.е. рассматривать функцию принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ только на интервале $[b_\lambda, c_\lambda]$, а функцию $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ - на интервале $[a_\tau, b_\tau]$.

Пример 4.1.10. Паромная переправа обслуживается одним паромом. За один рейс обслуживается один клиент. Один рейс туда и обратно с учетом времени на погрузку и разгрузку занимает в среднем два часа. Паром по нормативам работает с 6 до 22 часов, но предусматривается, что паром за сутки должен обслужить 8 клиентов, если он успевает обслужить 8 клиентов до 22 часов, то он уходит на профилактику, иначе он работает до тех пор, пока не обслужит требуемое число клиентов.

Каково максимальное и минимальное с надежностью 0,6 среднее время, проводимое требованием в очереди. Предполагается, что $\hat{\lambda} = \langle 100, 120, 150 \rangle$ минут, $\hat{\tau} = \langle 70, 100, 150 \rangle$ минут и

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \begin{cases} \frac{t-100}{20}, & t \in [100, 120], \\ \frac{150-t}{30}, & t \in [120, 150], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \mu_{\hat{\tau}}(t) = \begin{cases} \frac{t-70}{30}, & t \in [70, 100], \\ \frac{150-t}{50}, & t \in [100, 150], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.1.24)$$

Как уже отмечалось ранее, если $u_\alpha \geq w_\alpha$, то максимальное суммарное время пребывания требований в очереди при надежности α равно нулю и, уж тем более, минимальное суммарное время пребывания требований в очереди при надежности α равно нулю. Пусть $u_\alpha < w_\alpha$ и $u_\alpha = w_\alpha - \sigma$, $\sigma > 0$, тогда из (4.1.9) получаем, что

$$t(x^{\min \alpha}) = \sigma + 2\sigma + \dots + (n-1)\sigma = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \sigma.$$

Учитывая соотношения 4.1.24, для решения поставленной задачи при поиске минимальной очереди следует рассмотреть функцию принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ только на интервале $[b_\lambda, c_\lambda]$, а функцию $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ - только на интервале $[a_\tau, b_\tau]$, т.е. будем исходить из того, что

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \frac{150-t}{30} \quad \text{и} \quad \mu_{\hat{\tau}}(t) = \frac{t-70}{30}. \quad (4.1.25)$$

Из соотношений (4.1.25) получаем, что

$$u_\alpha^{\min} = 150 - 30 \cdot \mu_{\hat{\lambda}}(u_\alpha^{\min}) = 150 - 30 \cdot \alpha.,$$

аналогично,

$$w_\alpha^{\min} = 30\alpha + 70.$$

Но тогда $u_\alpha \geq w_\alpha$ при любом $\alpha \in [0, 1]$ и при любом α минимальное с надежностью α среднее время, проводимое требованием в очереди, равно нулю.

При поиске максимальной очереди следует рассмотреть функцию принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ только на интервале $[a_\lambda, b_\lambda]$, а функцию $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ - только на интервале $[b_\tau, c_\tau]$, т.е. будем исходить из того, что

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \frac{t - 100}{20} \text{ и } \mu_{\hat{\tau}}(t) = \frac{150 - t}{50}. \quad (4.1.26)$$

С учетом равенств (4.1.26) находим, что

$$u_\alpha^{\max} = 100 - 20 \cdot \mu_{\hat{\lambda}}(u_\alpha^{\max}) = 100 - 20 \cdot \alpha = 88$$

и

$$w_\alpha^{\max} = 150 - 50 \cdot \mu_{\hat{\tau}}(w_\alpha^{\max}) = 150 - 50 \cdot 0,6 = 120.$$

Тогда $\sigma = w_\alpha - u_\alpha = 32 > 0$, и очередь существует. Для поиска среднего времени пребывания требования в очереди в этом случае воспользуемся формулой 4.1.10:

$$t_r(x^{*\alpha}) = \frac{(n-1)}{2} \sigma,$$

тогда максимальное среднее время пребывания требования в очереди при надежности 0,6 равно

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 32 = 896.$$

Интересен случай, когда $t_r(x^{\min \alpha}) = t_r(x^{\max \alpha})$. Но как показывает анализ графиков функций принадлежности на рисунках 4.1.10а и 4.1.10б это возможно только в случае, когда моды функций принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$ и $\mu_{\hat{\tau}}(t)$ совпадают, т.е. когда $b_\lambda = b_\tau$.

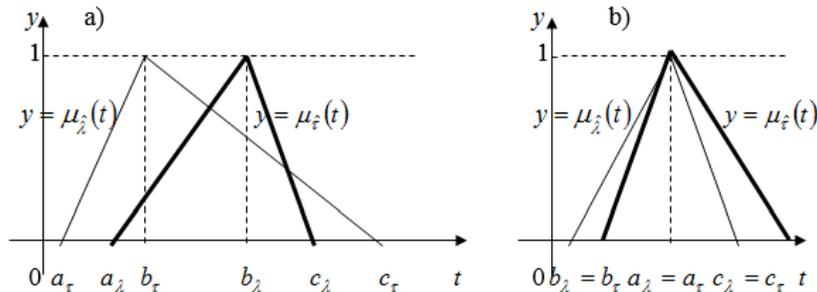


Рис. 4.1.10. Графики не совпадающих (а) и совпадающих (б) функций принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$ и $\mu_{\hat{\tau}}(t)$.

Действительно, чтобы существовала максимальная очередь, необходимо, чтобы левая часть графика функции $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ пересекалась с

правой частью графика функции $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ на высоте меньше единицы. Но чтобы существовала минимальная очередь, необходимо, чтобы правая часть графика функции $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ пересекалась с левой частью графика функции $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ на высоте меньше единицы. А этого одновременно быть не может.

Минимальное время пребывания требования в очереди с надежностью α определяется по формуле $t_r(x^{\min \alpha}) = \frac{(n-1)}{2} \sigma$, где с учетом 3.1.1 и 3.1.2

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \frac{c_\lambda - t}{c_\lambda - b_\lambda}, \text{ тогда } u_\alpha^{\min} = c_\lambda - \alpha(c_\lambda - b_\lambda),$$

и

$$\mu_{\hat{\tau}}(t) = \frac{t - a_\tau}{b_\tau - a_\tau}, \text{ тогда } w_\alpha^{\min} = a_\tau + \alpha(b_\tau - a_\tau).$$

Имеем:

$$\sigma_\alpha^{\min} = w_\alpha^{\min} - u_\alpha^{\min} = a_\tau + \alpha(b_\tau - a_\tau) - (c_\lambda - \alpha(c_\lambda - b_\lambda)). \quad (4.1.27)$$

Максимальное время пребывания требования в очереди с надежностью α определяется, по существу, по той же формуле, что и минимальное время с той лишь разницей, что теперь следует рассматривать $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ только на интервале $[a_\lambda, b_\lambda]$ а функцию $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$ - только на $[b_\tau, c_\tau]$, т.е. следует исходить из того, что (с учетом 4.1.1, 4.1.2)

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \frac{t - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda}, \text{ тогда } u_\alpha^{\max} = a_\lambda + \alpha(b_\lambda - a_\lambda),$$

и

$$\mu_{\hat{\tau}}(t) = \frac{c_\tau - t}{c_\tau - b_\tau}, \text{ тогда } w_\alpha^{\max} = c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau).$$

Имеем:

$$\sigma_\alpha^{\max} = w_\alpha^{\max} - u_\alpha^{\max} = a_\lambda + \alpha(b_\lambda - a_\lambda) - (c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau)).$$

Максимальная и минимальная очереди при заданном α равны между собой тогда и только тогда, когда $\sigma_\alpha^{\min} = \sigma_\alpha^{\max}$, т.е. когда

$$a_\tau + \alpha(b_\tau - a_\tau) - (c_\lambda - \alpha(c_\lambda - b_\lambda)) = a_\lambda + \alpha(b_\lambda - a_\lambda) - (c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau))$$

или

$$a_\tau - c_\lambda + \alpha[(b_\tau - a_\tau) + (c_\lambda - b_\lambda)] = a_\lambda - c_\tau + \alpha[(b_\lambda - a_\lambda) + (c_\tau - b_\tau)].$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{a_\tau - c_\lambda - (a_\lambda - c_\tau)}{2b_\lambda - a_\lambda + c_\tau - 2b_\tau + a_\tau - c_\lambda}.$$

Как уже отмечалось ранее, для того, чтобы была очередь при заданном α должно выполняться неравенство: $u_\alpha < w_\alpha$.

Предположим, что $b_\tau < b_\lambda$ и рассмотрим задачу о минимальной очереди при заданном α . Если такая очередь больше нуля, то:

$$w_\alpha^{\min} - u_\alpha^{\min} = a_\tau + \alpha(b_\tau - a_\tau) - (c_\lambda - \alpha(c_\lambda - b_\lambda)) > 0,$$

т.е.

$$\alpha > \frac{c_\lambda - a_\tau}{b_\tau - a_\tau + c_\lambda - b_\lambda} > 1,$$

а это противоречит выбору α .

Предположим, что $b_\tau > b_\lambda$ и рассмотрим задачу о максимальной очереди при заданном α . Если такая очередь больше нуля, то:

$$w_\alpha^{\max} - u_\alpha^{\max} = a_\lambda + \alpha(b_\lambda - a_\lambda) - (c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau)) > 0$$

т.е.

$$\alpha > \frac{c_\lambda - a_\tau}{b_\lambda - a_\lambda + c_\tau - b_\tau} > 1,$$

что опять противоречит выбору α .

Если $b_\tau = b_\lambda$, то $\alpha = 1$, но если $\alpha = 1$, то $w_\alpha^{\min} - u_\alpha^{\min} = 0$ и $w_\alpha^{\max} - u_\alpha^{\max} = 0$, и тогда длины и той и другой очереди равны нулю.

Следовательно, максимальная и минимальная длины очереди равны только, когда $b_\lambda = b_\tau$, при этом $\alpha = 1$, и длина же этих очередей равна нулю.

4.1.10. Сеть этапов обслуживания

Интерес представляют ситуации, когда этапы обслуживания образуют некоторую сеть. Пусть число этапов равно v . В процессе обслуживания требование должно пройти все этапы обслуживания, на каждом этапе оно обслуживается в некоторой системе массового обслуживания. Заметим, что здесь возможно огромное количество различных задач, отличающихся друг от друга, например, структурой связей между этапами, требованиями к порядку прохождения этапов, числом каналов обслуживания в каждой из рассматриваемых систем массового обслуживания, дисциплиной очередей и т.д.

Будем предполагать, что число этапов равно v . В процессе обслуживания требование должно пройти все этапы обслуживания, на каждом из них оно обслуживается в некоторой системе массового обслуживания, для простоты будем считать, что каждая из них имеет по одному каналу обслуживания. Известны возможные порядки прохождения требованием этих этапов. Требование должно быть обслужено на каждом этапе в точности по одному разу.

Рассмотрим несколько случаев отличающихся один от другого схемой прохождения этапов и (или) порядком формирования очереди на обслуживание. Порядок прохождения этапов будем отображать с

помощью ориентированного графа с $v+2$ вершинами, перенумерованными числами от нуля до $v+1$. Вершина с номером 0 – источник, из нее требования поступают в сеть, вершина с номером $v+1$ – сток, в нее поступают требования, прошедшие все этапы обслуживания.

1. Порядок прохождения этапов определен однозначно: требование последовательно проходит этапы от первого до последнего (см. рис. 4.1.11).

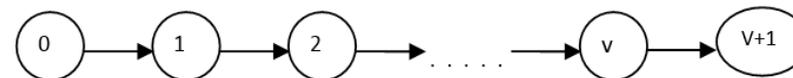


Рис. 4.1.11. Граф G , изображающий порядок прохождения этапов в первом случае.

2. Все этапы можно разбить на непересекающиеся группы $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\theta$:

$$\phi_i \cap \phi_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^{\theta} \phi_i = \{1, 2, \dots, n\}$$

Число этапов в группе $\phi_i, i=1, 2, \dots, \theta$, обозначим через φ_i , понятно, что $\sum_{i=1}^{\theta} \varphi_i = n$. В первой группе находятся первые в порядке номеров φ_1

этапов, во второй – следующие φ_2 этапов и т.д. Эти группы проходятся требованием в однозначно определенном порядке, прохождение этапов внутри очередной группы начинается с этапа, имеющего наименьший номер внутри этой группы. Порядок прохождения остальных этапов этой группы может быть любым, но каждый из этих этапов должен быть пройден в точности по одному разу. Предполагается, что после прохождения любого этапа из группы требование может поступить на этап с минимальным номером очередной группы. Требование поступает на определенный этап первой группы, остальные этапы этой группы оно может проходить в любом порядке. Пройдя в точности по одному разу все этапы первой группы, оно поступает на фиксированный или произвольный этап второй группы и проходит остальные ее этапы в одном из всевозможных порядков в точности по разу и т.д. Для требования, обслуженного на некотором этапе, определяется очередной этап, в очередь на обслуживание в котором оно и встает.

Описанную схему удобно представить в виде графа G . Пример такого графа представлен на рисунке 4.1.12.

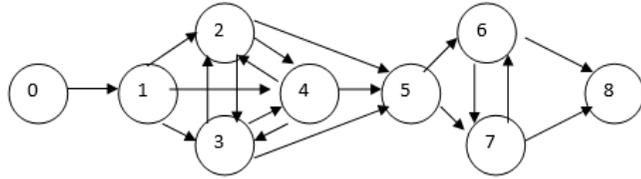


Рис. 4.1.12. Пример графа G , изображающего порядок прохождения этапов во втором случае, число этапов v равно семи.

Вершина 0 – источник, вершина 8 – сток. Остальные вершины соответствуют этапам обслуживания.

Требования покидают источник с интервалом времени, задаваемым нечетким числом $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$, его характеристическую функцию, будем обозначать $\mu_\lambda(t)$. Далее требование обслуживается на этапах, соответствующим вершинам графа G , лежащим на некотором пути, соединяющим источник и сток и проходящим через все вершины графа. Время обслуживания одного требования в системе массового обслуживания, соответствующей вершине с номером i , задается нечетким числом $\hat{\tau}_i = \langle a_{\tau_i}, b_{\tau_i}, c_{\tau_i} \rangle, i = 1, 2, \dots, v$, с функцией принадлежности $\mu_{\tau_i}(t)$. Если требуется учесть время t_{ij} , затрачиваемое на перемещение требования от этапа с номером i до этапа с номером j , то будем считать, что время обслуживания требования, поступившего на этап j сразу после его обслуживания на этапе i , равно времени на перемещение плюс время обслуживания. Определить максимальное с надежностью α суммарное время, затрачиваемое первыми n поступившими требованиями на пути от источника до стока. Предполагается, что все требования перенумерованы числами от 1 до n в порядке, в котором они покидают источник.

По аналогии с п. 4.1.2 рассмотрим множество реализаций рассматриваемого процесса обслуживания первых n поступивших в систему требований – множество X . Если $x \in X$, то

$$x = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_1^1, \dots, x_n^2, \dots, x_1^s, \dots, x_n^s, \dots, x_1^v, \dots, x_n^v), \quad (4.1.28)$$

где

x_i^0 – интервал времени между моментами поступления i -го и $i+1$ - требований, $i = 1, 2, \dots, n-1$,

x_i^k – время обслуживания i -го требования в k -системе массового обслуживания, $i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, v$.

Опишем кратко некоторые приемы, которые, на наш взгляд, полезны при вычислении интересующего нас показателя эффективности рассматриваемой сети СМО.

Важным является вопрос, связанный с постановкой требования в очередь. Для определения списка этапов, один из которых станет очередным для обслуживания требования, закончившего обслуживание на рассматриваемом этапе, предлагается использовать матрицу $O(t) = \|o_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n,v}$. Каждому требованию соответствующая строка этой матрицы, каждому этапу – ее столбец. Элемент $o_{ij}(t)$ этой матрицы в момент времени t равен моменту окончания обслуживания требования с номером i на этапе с номером j . Если время наступления этого момента больше t , то $o_{ij}(t) = 0$, если меньше или равно t , то $o_{ij}(t)$ равно времени наступления этого момента. Первоначально в этой матрице все элементы равны нулю.

Кроме матрицы $O(t)$ с рассматриваемым графом G и моментом времени t связываются следующие массивы:

массив $Och(t) = \|och_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n,5}$, содержащий необходимую информацию о требованиях:

если требование с номером i находится в очереди, то

$och_{i1}(t)$ – номер этапа, в очереди на обслуживание в котором

находится это требование в момент времени t ,

$och_{i2}(t)$ – момент начала обслуживания этого требования на

данном этапе,

$och_{i3}(t) = 0$,

$och_{i4}(t) = 0$;

если требование с номером i находится на обслуживании, то,

$och_{i1}(t) = 0$,

$och_{i2}(t) = 0$,

$och_{i3}(t)$ равно номеру этапа, на котором в момент времени

t обслуживается рассматриваемое требование,

$och_{i4}(t)$ – момент окончания обслуживания требования с

номером i на этапе $och_{i3}(t)$,

$och_{i5}(t)$ – в обоих случаях – суммарное время, проведенное

требованием с номером i в очередях на момент времени t ,

$och_{i5}(t)$ – в обоих случаях – время, которое требованию с

номером i предстоит провести в последней для него на момент t очереди плюс время, которое оно уже провело в очередях;

если требование с номером i не стоит в очереди и не обслуживается:

$och_{i1}(t) = och_{i2}(t) = och_{i3}(t) = och_{i4}(t) = 0$;

массив моментов поступления требований в сеть:

массив $T_{приб} = \left\| t_{приб}^i \right\|_{i=1}^n$, где $t_{приб}^1 = 0$, $t_{приб}^i = t_{приб}^{i-1} + x_i^0$, $i = 2, 3, \dots, n$;

массив $\mathcal{E}(t) = \left\| \mathcal{E}_{jk}(t) \right\|_{j=1, k=0}^{v, n+1}$, содержащий необходимую информацию об этапах на момент времени t , где

$\mathcal{E}_{j0}(t)$ – номер требования, которое обслуживается на j -м этапе, $j = 1, 2, \dots, v$,

$\mathcal{E}_{jk}(t)$ – номер требования, которое стоит на k -м месте в очереди на обслуживание на j -м этапе; если очереди на j -м этапе нет, то $\mathcal{E}_{jk}(t) = 0$ для любого k ,

$\mathcal{E}_{jn+1}(t)$ ($j > 0$) – момент освобождения этапа с номером j .

Пусть q – наибольший общий делитель длин временных интервалов в рассматриваемой реализации (предполагается, что длина любого интервала есть число целое). Начиная с нулевого момента времени, с шагом q пересчитываем массивы, связанные с каждой вершиной и каждым требованием, и матрицу $\mathcal{O}(t)$, осуществляя перемещение требований по вершинам графа в соответствии с описанными ранее правилами и схемой связей между этапами.

В результате для каждого требования получаем значение интересующего нас показателя. Обработывая эти результаты, получаем значение рассматриваемого показателя эффективности.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 4.1.11. Автохозяйство имеет 8 автомобилей (КамАЗов), которые, прибывая в конце рабочего дня в парк, проходят три этапа обслуживания: мойку, контрольно-проверочное обслуживание и заправку. Возможен один из трех вариантов организации порядка обслуживания, представленных на рисунках 4.1.13, 4.1.14 в форме ориентированных графов.

Мойка – это вершина с номером 1, контрольно-проверочное обслуживание – вершина с номером 2, заправка – с номером 3, источник – вершина с номером 0, сток – с номером 4. Первый, второй и третий этап имеют по одному каналу обслуживания. Имеются две схемы прохождения этапов, изображенные графами на рисунках 4.1.13 и 4.1.14.

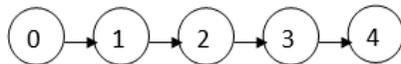


Рис.4.1.13. Первый вариант прохождения этапов обслуживания.

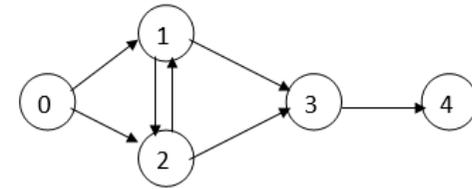


Рис.4.1.14. Второй вариант прохождения этапов обслуживания.

Определить, какой из предложенных вариантов организации обслуживания прибывающей техники лучше с точки зрения суммарных затрат времени на ожидание требованиями начала обслуживания в очереди при надежности 0,67. Условия постановки требований в очередь сформулированы далее при рассмотрении конкретных случаев.

Предполагается, что

- интервалы времени между поступлениями требований задаются нечетким числом $\hat{\lambda} = \langle 2, 8, 15 \rangle$,
- затраты времени на обслуживание требования на мойке задаются нечетким числом - $\hat{\tau}_1 = \langle 15, 20, 26 \rangle$,
- на пункте контрольно-проверочного обслуживания – нечетким числом $\hat{\tau}_2 = \langle 20, 25, 34 \rangle$,
- на заправке – нечетким числом $\hat{\tau}_3 = \langle 2, 3, 6 \rangle$.
- Функции принадлежности соответствующих нечетких множеств (нечетких чисел) задаются соотношениями

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = \begin{cases} \frac{t-2}{6}, & t \in [2, 8], \\ \frac{15-t}{7}, & t \in [8, 15], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \mu_{\hat{\tau}_1}(t) = \begin{cases} \frac{t-15}{5}, & t \in [15, 20], \\ \frac{26-t}{6}, & t \in [20, 26], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\mu_{\hat{\tau}_2}(t) = \begin{cases} \frac{t-20}{5}, & t \in [20, 25], \\ \frac{34-t}{9}, & t \in [25, 34], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \mu_{\hat{\tau}_3}(t) = \begin{cases} \frac{t-2}{1}, & t \in [2, 3], \\ \frac{6-t}{3}, & t \in [3, 6], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Прежде всего, находим рассматриваемую реализацию, для чего определяем характеристики интенсивности поступления требований и

интенсивностей их обслуживания на каждом из этапов. При $\alpha = 0,67$ для указанных интенсивностей получаем следующие значения:

интервал между моментами поступления требований $u_\alpha = 6$ мин.,

время обслуживания на мойке $w_\alpha^1 = 22$ мин.,

время обслуживания на пункте контрольно-проверочного обслуживания $w_\alpha^2 = 28$ мин.,

время обслуживания на пункте заправки $w_\alpha^3 = 4$ мин.

Рассмотрим несколько возможных случаев.

Случай 1. Рассмотрим первый вариант.

Будем предполагать, что требования встают в очередь для обслуживания на очередной этап сразу после окончания обслуживания на предыдущем.

Решать задачу будем, сводя вычисления в таблицу 4.1.7.

Алгоритм заполнения таблицы 4.1.7 аналогичен алгоритму, использованному в примере 4.1.3 из п. 4.1.6. Этот алгоритм отличается от использованного в примере 4.1.3 тем, что здесь один канал обслуживания, и тем, что моменты прибытия требований на очередной (второй, третий) этап равны моментам окончания их обслуживания на предыдущем этапе. Если на перемещение требования от этапа с номером i до этапа с номером j требуется затратить t_{ij} минут, то можно считать, что требование, обслуженное на этапе с номером i , будет обслуживаться на этапе с номером j время, равное $w_\alpha^j + t_{ij}$. Мы для простоты будем считать, что $t_{ij} = 0$ для любых i и j .

В таблице 4.1.7 использованы следующие обозначений:

$t_{приб}^i$ – момент поступления требования с номером i на соответствующий этап;

$t_{н.об.}^i$ – момент начала обслуживания требованием с номером i на соответствующем этапе;

$t_{оч}^i$ – время, проводимое требованием с номером i в ожидании обслуживания на соответствующем этапе;

$t_{ок}^i$ – момент окончания обслуживания требования с номером i на соответствующем этапе (момент освобождения этого этапа).

Рассмотрим часть этой таблицы, содержащую данные о первом этапе обслуживания – о мойке, т.е. первые четыре строки.

Элемент этой таблицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j , обозначим через q_{ij} .

В первой строке указываем моменты прибытия требований $t_{приб}^i$ на мойку: $q_{11} = 0$ (первое требование поступает в момент начала отсчета времени) для остальных требований $q_{1j} = q_{1j-1} + u_\alpha$.

Далее заполнение рассматриваемой части таблицы осуществляется по столбцам: в моменты поступления первого требования мойка свободна, и это требование сразу начинают обслуживаться, время его ожидания в очереди равно нулю, поэтому

$$q_{21} = 0, q_{31} = 0, q_{4,1} = 0 + 17 = 17,$$

Для $i > 1$ время начала обслуживания равно меньшему из времени прибытия требования с номером i и времени освобождения мойки от обслуживания требования с номером $i - 1$:

$$q_{2i} = \min\{q_{1i}, q_{4i-1}\}.$$

Это требование простаивает в очереди время, равное $q_{3i} = q_{2i} - q_{1i}$. Время окончания его обслуживания (время освобождения соответствующего канала) равно $q_{4i} = q_{2i} + 17$.

Суммарное время пребывания требований в очереди на мойку равно сумме элементов третьей строки и равно

$$0 + 16 + 32 + 48 + 64 + 80 + 96 + 112 = 448 \text{ мин.}$$

Вторая и третья части таблицы 4.1.7 содержат данные о работе соответственно второго и третьего этапов. Их заполнение осуществляется аналогично заполнению первой части этой таблицы с той лишь разницей, что моменты прибытия требований на очередной (второй, третий) этап равны моментам окончания их обслуживания на предыдущем этапе. Если на перемещение требования от этапа с номером i до этапа с номером j требуется затратить t_{ij} минут, то можно считать, что требование, обслуженное на этапе с номером i , будет обслуживаться на этапе с номером j время, равное $w_\alpha^j + t_{ij}$. Мы для простоты будем считать, что $t_{ij} = 0$ для любых i и j .

Таблица 4.1.7. Результаты работы алгоритма при $n = 8$, $u_\alpha = 6$ мин., $w_\alpha^1 = 22$, $w_\alpha^2 = 28$, $w_\alpha^3 = 4$, схема с рис. 4.1.13.

Этап	i	1	2	3	4	5	6	7	8
Мойка	$t_{приб}^i$	0	6	12	18	24	30	36	42
	$t_{н.об.}^i$	0	22	44	66	88	110	132	154
	$t_{оч}^i$	0	16	32	48	64	80	96	112
	$t_{ок}^i$	22	44	66	88	110	132	154	176

ПТО	$t_{приб}^i$	22	44	66	88	110	132	154	176
	$t_{н.об.}^i$	22	50	78	106	134	162	190	218
	$t_{оч}^i$	0	6	12	18	24	30	36	42
	$t_{ок}^i$	50	78	106	134	162	190	218	246
Заправка	$t_{приб}^i$	50	78	106	134	162	190	218	246
	$t_{н.об.}^i$	50	78	106	134	162	190	218	246
	$t_{оч}^i$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$t_{ок}^i$	54	82	110	138	166	194	222	250

Здесь i – порядковый номер требования.

Для первого этапа $t_{приб}^i = (i-1) \cdot u_{\alpha} = (i-1) \cdot 5$; для второго $t_{приб}^i = t_{ок}^i$,

где $t_{ок}^i$ – момент окончания обслуживания этого требования на первом этапе; аналогично для третьего этапа $t_{приб}^i = t_{ок}^i$, где $t_{ок}^i$ – момент окончания обслуживания этого требования на втором этапе.

Для всех этапов при $i > 0$ $t_{н.об.}^i = \max\{t_{приб}^i, t_{ок}^{i-1}\}$, при $i = 0$ $t_{н.об.}^0 = t_{приб}^0$.

Время освобождения канала равно моменту начала обслуживания требования на этом канале плюс время обслуживания, другими словами, время освобождения канала равно времени окончания обслуживания соответствующего требования на этом канале.

Анализ данных из таблицы 4.1.7 показывает, что все требования в сумме на всех этапах провели с надежностью 0,67 в очередях не более 616 мин. Обслуживание всей прибывающей в парк техники с надежностью 0,67 закончится не позже, чем через 250 минут после прибытия в парк первой машины. Значит последняя из прибывающих машин простоит в очередях более трех часов. Поэтому возникает необходимость в улучшении системы обслуживания прибывающей техники.

Случай 2. Рассмотрим вариант, изображенный на (рис. 4.1.14). В этом варианте все вершины графа G распадаются на четыре группы: $\{0\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$. Будем использовать значения интенсивностей, полученные при рассмотрении предыдущего варианта, т.е. будем считать, что $u_{\alpha} = 6 \text{ мин.}$, $w_{\alpha}^1 = 22 \text{ мин.}$, $w_{\alpha}^2 = 28 \text{ мин.}$, $w_{\alpha}^3 = 4 \text{ мин.}$

Опишем правило постановки требования в очередь.

Пусть требование в момент t закончило обслуживание на этапе k . Тогда определяется этап, в очередь на обслуживание в котором это требование должно встать. Для этого с помощью матрицы $O(t)$

определяются все этапы, на которые это требование в данный момент может поступить для обслуживания или быть поставлено в очередь, среди них выбираются этапы, на которых срок начала обслуживания рассматриваемого требования минимален. Если таких этапов несколько, то из них выбирается этап с минимальным номером. Если на всех этапах этой группы данное требование уже было обслужено, то рассматривается этап следующей группы с минимальным номером.

Проиллюстрируем на этом примере работу алгоритма, использующего предложенные ранее приемы, но учитывая особенности рассматриваемого примера, несколько упростим его и все вычисления сведем в две таблицы – таблицу 4.1.8 и таблицу 4.1.9. Таблица 4.1.9 – это, по существу, матрица $O(t)$.

Для сокращения вычислений рассматриваются только те моменты времени, когда происходит хотя бы одно из следующих событий:

- в сеть поступает новое требование,
- какое-то (какие-то) требование закончило обслуживание на некотором этапе и встало в очередь на какой-то другой этап,
- первое требование в очереди на некоторый этап поступило на обслуживание на этот этап.

Замечание 4.1.6. В момент времени t требование и (или) этап могут по несколько раз изменять свое состояние. Требование может закончить обслуживание на одном этапе, встать в очередь на другом и (или) начать на нем обслуживание. Этап может в некоторый момент освободиться от обслуживания одного требования и в тот же момент начать обслуживание другого требования.

Алгоритм.

Шаг 1. $t = 0$.

Шаг 2. Проверяем, имеется ли новое, поступившее в сеть, требование и имеются ли требования, закончившие обслуживание, если «да», запоминаем их номера. В таблице 4.1.8 в строке требования, закончившего в данный момент обслуживание на некотором этапе, вместо номера этого этапа указывает время окончания обслуживания этого требования на этом этапе.

Шаг 3. Для каждого из запомненных на шаге 2 номеров находим этап, в очередь на обслуживание на котором ставится рассматриваемое требование.

При этом для данного требования в таблице 4.1.8 находится этап, на который это требование может быть направлено. Возможны следующие случаи:

это только что поступившее требование – оно направляется на первый или второй этап, в зависимости от того, где оно начнет обслуживаться раньше. Если для обоих этих этапов моменты начала

обслуживания рассматриваемого требования совпадают, то это требование направляется на первый этап;

это требование закончило обслуживание на первом этапе, но еще не было на втором – оно встает в очередь на втором этапе;

это требование закончило обслуживание на втором этапе, но еще не было на первом – оно встает в очередь на первом этапе;

это требование обслужено на первом и втором этапах, но не на третьем, тогда оно встает в очередь на третий этап;

это требование обслужено на первом, втором и третьем этапах, тогда оно попадает в сток и покидает сеть.

Для требования, попавшего в очередь, определяется момент времени, когда оно начнет обслуживаться на соответствующем этапе. Если очереди пока нет, то этот момент равен моменту освобождения соответствующего этапа. Если очередь уже есть, то этот момент равен моменту начала обслуживания последнего из стоящих в этой очереди требований плюс время обслуживания этого требования на данном этапе.

Шаг 4. Каждое из первых требований, стоящих в очередях на освободившиеся в момент t этапы, поступает на обслуживание на соответствующие этапы. Указываем время окончания обслуживания этих требований.

Шаг 5. Если все требования покинули сеть (попали в сток), то конец, иначе положить t равным моменту наступления очередного события и перейти к шагу 2.

В результате работы описанного алгоритма получаем таблицы 4.1.8 и 4.1.9а,б. В таблице 4.1.8 каждому этапу соответствуют по две строки.

В первой строке указывается номер требования, которое находится на обслуживании на данном этапе в момент времени t , и, в скобках, момент окончания обслуживания этого требования на данном этапе (момент освобождения этапа от этого требования).

Во второй строке содержится информация об очереди на рассматриваемый этап. В ней в порядке очереди указываются номера требований, стоящих в очереди на обслуживание на данном этапе, и, в скобках, время начала их обслуживания на данном этапе.

В таблицах 4.1.9а и 4.1.9б в первых столбцах, для удобства, указаны номера требований. В остальных столбцах таблицы 4.1.9б – моменты окончания обслуживания соответствующих требований на соответствующих этапах.

Используя данные последнего столбца таблицы 4.1.9б, получаем, что первое требование провело в сети $94-0=94$ минут, второе – $114-6=108$, третье – $150-12=138$, требования с 4 по 8 соответственно: 160, 134, 176, 144, 192 минут, т.е. всего требования провели в сети 1148 минут.

Учитывая то, что каждое требование обслуживалось $22+28+4=54$ минуты, получаем, что суммарное время, проведенное всеми требованиями в очередях, равно $1148-432=716$ минут.

Таблица 4.1.8. Результаты работы алгоритма при $n=8$, $u_{\alpha}=6$ мин., $w_{\alpha}^1=22$, $w_{\alpha}^2=28$, $w_{\alpha}^3=4$, схема с рис. 4.1.14.

	t	0	6	12	18	22	24	30	34	36	42
Мойка 22	№ тр.	1(22)	1(22)	1(22)	1(22)	3(44)	3(44)	3(44)	3(44)	3(44)	3(44)
	Очер.	-	-	3(22)	3(22)	-	5(44)	5(44) 6(66)	5(44) 6(66) 2(88)	5(44) 6(66) 2(88)	5(44) 6(66) 2(88) 8(110)
Тех. осмотр 28	№ тр.		2(34)	2(34)	2(34)	2(34)	2(34)	2(34)	4(62)	4(62)	4(62)
	Очер.		-	-	4(34)	4(34) 1(62)	4(34) 1(62)	4(34) 1(62)	1(62)	1(62) 7(90)	1(62) 7(90)
Заправка 4	№ тр.										
	Очер.										

	t	44	62	66	88	90	94	110	114	118	132
Мойка 22	№ тр.	5(66)	5(66)	6(88)	2(110)	2(110)	2(110)	8(132)	8(132)	8(132)	4(154)
	Очер.	6(66) 2(88) 8(110)	6(66) 2(88) 8(110) 4(132)	2(88) 8(110) 4(132)	8(110) 4(132)	8(110) 4(132)	8(110) 4(132)	4(132)	4(132)	4(132) 7(154)	7(154)
Тех. осмотр 28	№ тр.	4(62)	1(90)	1(90)	1(90)	7(118)	7(118)	7(118)	7(118)	3(146)	3(146)
	Очер.	1(62) 7(90) 3(118)	7(90) 3(118)	7(90) 3(118) 5(146)	7(90) 3(118) 5(146) 6(174)	3(118) 5(146) 6(174)	3(118) 5(146) 6(174)	3(118) 5(146) 6(174)	3(118) 5(146) 6(174)	5(146) 6(174)	5(146) 6(174) 8(202)
Заправка 4	№ тр.					1(94)	-	2(114)	-		
	Очер.										

	t	146	150	154	158	174	176	178	182	202	206
Мойка 22	№ тр.	4(154)	4(154)	7(176)	7(176)	7(176)	-	-	-		
	Очер.	7(154)	7(154)	-	-						
Тех. осмотр 28	№ тр.	5(174)	5(174)	5(174)	5(174)	6(202)	6(202)	6(202)	6(202)	8(230)	8(230)
	Очер.	6(174) 8(202)	6(174) 8(202)	6(174) 8(202)	6(174) 8(202)	8(202)	8(202)	8(202)	8(202)		
Заправка 4	№ тр.	3(150)	-	4(158)	-	5(178)	5(178)	7(182)	-	6(206)	-
	Очер.					7(178)					

	t	230	234							
Мойка 22	№ тр.									
	Очер.									
Тех. осмотр 28	№ тр.									
	Очер.									
Заправка 4	№ тр.	8(234)								
	Очер/									
Время в очереди										
Ушло из сети			8(234)							

Таблица 4.1.9. Матрица данных о моментах окончания обслуживания требований на соответствующих этапах
а) первоначальная, б) окончательная

$$O(0) = \begin{matrix} \text{а)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{б)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 22 & 56 & 94 \\ 2 & 110 & 34 & 114 \\ 3 & 44 & 146 & 150 \\ 4 & 66 & 174 & 158 \\ 5 & 154 & 90 & 178 \\ 6 & 88 & 202 & 206 \\ 7 & 176 & 118 & 182 \\ 8 & 132 & 230 & 234 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Случай 3. Рассмотрим второй вариант структуры связей между этапами (рис. 4.1.14), но другое правило постановки требования в очередь. Будем предполагать, что требования встают в очередь в порядке своих номеров, и для конкретного требования выбирается тот этап, на котором, с учетом сказанного, время начала его обслуживания минимально. Результаты вычислений приведены в таблицах 4.1.10 и 4.1.11.

Таблица 4.1.10. Результаты работы алгоритма
при $n = 8$, $u_\alpha = 6 \text{ мин.}$, $w_\alpha^1 = 22$, $w_\alpha^2 = 28$, $w_\alpha^3 = 4$, схема с рис. 4.1.14.

	t	0	6	12	18	22	24	30	34	36	42
Мойка	№ тр.	1(22)	1(22)	1(22)	1(22)	3(44)	3(44)	3(44)	3(44)	3(44)	3(44)
	Очер.		-	3(22)	3(22)	-	5(44)	5(44) 6(66)	2(44) 5(66) 6(88)	2(44) 5(66) 6(88) 7(110)	2(44) 5(66) 6(88) 7(110)
Тех. Осмотр	№ тр.		2(34)	2(34)	2(34)	2(34)	2(34)	2(34)	1(62)	1(62)	1(62)
	Очер.		-		4(34)	1(34) 4(62)	1(34) 4(62)	1(34) 4(62)	4(62)	4(62)	4(62) 8(90)
Заправка	№ тр.										
	Очер.										

	t	44	62	66	88	90	110	118	132	146	174
Мойка	№ тр.	2(66)	2(66)	5(88)	6(110)	6(110)	7(132)	7(132)	-	-	-
	Очер.	5(66) 6(88) 7(110)	5(66) 6(88) 7(110)	6(88) 7(110)	7(110)	7(110)					
Тех. Осмотр	№ тр.	1(62)	3(90)	3(90)	3(90)	4(118)	4(118)	5(146)	5(146)	6(174)	7(202)
	Очер.	3(62) 4(90) 8(118)	4(90) 8(118)	4(90) 8(118)	5(118) 8(146)	5(118) 8(146)	6(146) 8(174)	6(146) 8(174)	7(174) 8(202)	7(174) 8(202)	8(202)
Заправка	№ тр.		1(66)	2(70)		3(94)		4(122)		5(150)	6(178)
	Очер.										

	t	202	230	252						
Мойка	№ тр.	-	8(252)							
	Очер.									
Тех. Осмотр	№ тр.	8(230)	-							
	Очер.									
Заправка	№ тр.	7(206)		8(256)						
	Очер.									

Таблица 4.1.11. Матрица данных о моментах окончания обслуживания требований на соответствующих этапах для третьего случая.

$$O(256) = \begin{pmatrix} 1 & 22 & 62 & 66 \\ 2 & 66 & 32 & 70 \\ 3 & 44 & 90 & 94 \\ 4 & 110 & 118 & 122 \\ 5 & 88 & 146 & 150 \\ 6 & 110 & 174 & 178 \\ 7 & 132 & 202 & 206 \\ 8 & 252 & 230 & 256 \end{pmatrix}$$

Время, проведенное всеми требованиями в система равно $1142 - 168 = 974$. Тогда суммарное время, проведенное всеми требованиями ожидания в очередях равно $974 - 432 = 542$ мин.

§ 4.2. Нечеткая логика в задачах теории массового обслуживания.

4.2.1. Вводные замечания.

При проектировании различных систем возникает задача предварительной оценки их качества. Далее предлагается ряд подходов к построению такой оценки использующих некоторые понятия нечеткой логики, в том числе нечеткие конъюнкция и дизъюнкция, лингвистическая переменная, нечеткая база знаний, нечеткого логического вывода Мамдани [4] и некоторые другие.

Предполагается, что исходная информация об интенсивности поступления требований в систему и интенсивность их обслуживания является нечеткой и задается нечеткими числами.

В параграфе 4.1 мы оценивали процесс функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания используя показатели, связанные с временем ожидания в очереди. Теперь остановимся на задаче качественной оценки функционирования рассматриваемой системы, используя для этого опять же время ожидания в очереди, но под окончательным результатом будем понимать вербальную оценку качества типа «высокое», «низкое» и т.п.

4.2.2. Использование центра тяжести для вербальной оценки качества системы массового обслуживания.

Рассматривается система массового обслуживания с нечеткой интенсивностью поступления требований и нечеткой интенсивностью обслуживания. Оценивается качество ее функционирования при прогнозируемых нечетких значениях интенсивности поступления требований и интенсивности их обслуживания.

Для решения сформулированной задачи предлагается построить нечеткое множество «максимально возможное среднее время ожидания в очереди», под оценкой качества функционирования рассматриваемой системы массового обслуживания предлагается понимать результат, полученный на базе дефаззификации этого множества по методу центра тяжести. Для этого рассмотрим лингвистическую переменную «качество СМО» с терминами «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «плохо», которые мы обозначим соответственно C_5, C_4, C_3, C_2 , а функцию принадлежности нечеткого множества \hat{C}_i , формализующего терм $C_i, i = 2, 3, 4, 5$ обозначим через $\mu_{\hat{C}_i}(u), u \in [0, r_{\max}]$, где r_{\max} – некоторое число, не меньшее максимального возможного среднего времени ожидания в очереди.

Обозначим через r нечеткое число «максимально возможное среднее время ожидания в очереди» и через \hat{r} – нечеткое множество, его формализующее. Через $\mu_{\hat{r}}(u), u \in [0, r_{\max}]$ обозначим его функцию принадлежности, здесь r_{\max} – максимально возможное значение среднего времени ожидания в очереди. Построив нечеткое множество \hat{r} и осуществив его дефаззификацию, получим число r^* . Пусть $\max_i \mu_{\hat{C}_i}(r^*) = \mu_{\hat{C}_{i_0}}(r^*)$. Тогда терм C_{i_0} предлагается считать оценкой качества рассматриваемой СМО.

Пример 4.2.1. В условиях примера 4.1.2 построить нечеткое число «максимально возможное среднее время ожидания в очереди» на универсальном множестве $[0, r_{\max}]$ и оценить качество рассматриваемой СМО. Напомним, что r_{\max} – некоторое число, не меньшее среднего времени, которое в самом плохом случае требование проводит в очереди. Обозначать это нечеткое число будем буквой \hat{r} , а его функцию принадлежности - $\mu_{\hat{r}}(u), u \in [0, r_{\max}]$. Очевидно, что

$$r_{\max} \geq \frac{(n-1)^2}{2n} \cdot (c_{\tau} - a_{\lambda}).$$

Действительно, самый плохой по затратам времени случай – это, когда время между поступлением любых двух последовательных требований равно a_{λ} , а время обслуживания каждого требования максимально, т.е. равно c_{τ} . В этом случае первое требование

обслуживается без очереди, второе стоит в очереди $(c_{\tau} - a_{\lambda})$ минут, третье – $2(c_{\tau} - a_{\lambda})$ и т.д., последнее, с номером n , находится в очереди $(n-1) \cdot (c_{\tau} - a_{\lambda})$ минут. Тогда все требования провели в сумме в очереди $n \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot (c_{\tau} - a_{\lambda})$ минут, и тогда максимально среднее время ожидания в очереди равно $\frac{(n-1)}{n} \cdot (c_{\tau} - a_{\lambda})$.

Для рассматриваемого примера положим $r_{\max} = 22,5$.

Функции принадлежности $\mu_{\hat{C}_i}(u), u \in [0, 22,5], i = 2, 3, 4, 5$, задаются равенствами:

$$\mu_{\hat{C}_5}(u) = \begin{cases} \frac{5-u}{5}, & u \in [0, 5], \\ 0, & u \in [5, 22,5], \end{cases} \quad \mu_{\hat{C}_4}(u) = \begin{cases} \frac{u-2,5}{5}, & u \in [2,5, 7,5], \\ \frac{15-u}{7,5}, & u \in [7,5, 15], \\ 0, & u \in [0, 2,5] \cup [15, 22,5], \end{cases}$$

$$\mu_{\hat{C}_3}(u) = \begin{cases} \frac{u-10}{5}, & u \in [10, 15], \\ \frac{20-u}{5}, & u \in [15, 20], \\ 0, & u \in [0, 10] \cup [20, 22,5], \end{cases} \quad \mu_{\hat{C}_2}(u) = \begin{cases} \frac{u-17,5}{7,5}, & u \in [17,5, 22,5], \\ 0, & u \in [0, 17,5]. \end{cases}$$

Графики этих функций принадлежности нечетких множеств $\hat{C}_i, i = 2, 3, 4, 5$, представлены на рисунке 4.2.1.

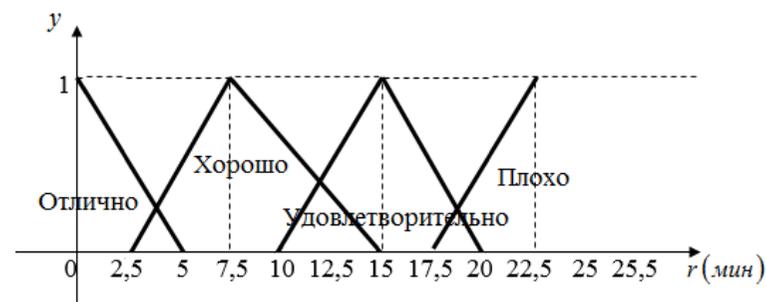


Рис. 4.2.1. Графики функций принадлежности нечетких множеств, формализующих термы лингвистической переменной «качество СМО».

Решение. Напомним, что $\hat{\lambda} = \langle 10, 12, 15 \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle 7, 10, 15 \rangle$. Для решения используем формулу (4.1.13), из нее получаем, что

$$\alpha = \frac{45 - 2r}{63}.$$

Результаты вычислений сведены в таблицу 4.2.1. Для рассматриваемого примера $r_{\max} = 22,5$ мин.

Таблица 4.2.1. Нечеткое число \hat{r}

$r = u$	0	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5
α	0,714	0,635	0,556	0,476	0,397	0,317	0,238	0,159	0,079	0

Заметим, что $\mu_{\hat{r}}(u)$ является множественной функцией, образом этой функции при $u = 0$ является отрезок $[0,714, 1,0]$, образ каждого из остальных значений аргумента состоит из одной точки.

Заметим, что в таблице 4.2.1 с шагом 2,5 приведены значения функции принадлежности $\mu_{\hat{r}}(r)$, $r \in [0, r_{\max}]$, используя данные этой таблицы, осуществляем приближенную дефазсификацию этой функции по методу центра тяжести, получаем число r^* :

$$r^* = \frac{0 \cdot 0,714 + 2,5 \cdot 0,635 + \dots + 20,0 \cdot 0,079 + 22,5 \cdot 0}{0,714 + 0,635 + \dots + 0,079 + 0} \cong \frac{23,80}{3,57} \cong 6,67.$$

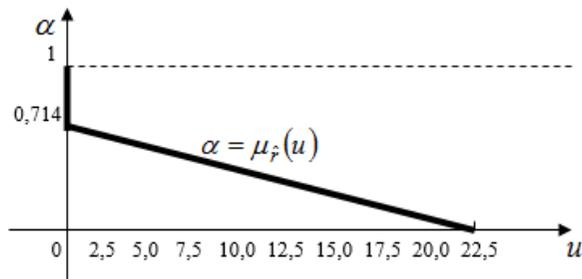


Рис. 4.2.2. График функции принадлежности нечеткого числа «максимально возможное среднее время ожидания в очереди»

Мы видим (см. рис. 4.2.1), что это значение соответствует терму «хорошо», на основании этого, предлагается признать функционирование рассматриваемой СМО хорошим.

Если значению r^* соответствует несколько термов (r^* оказывается элементом нескольких нечетких множеств, формализующих термы выходной переменной), то в качестве ответа предлагается использовать тот терм, для которого соответствующее значение функции принадлежности максимально.

В примере 4.2.1. мы прибегли к приближенному вычислению искомого центра тяжести, заметим, что задачу можно решить точно, используя формулу

$$a = \frac{\int_0^u u \cdot \mu_{\hat{A}}(u) \cdot du}{\int_0^u \mu_{\hat{A}}(u) \cdot du}.$$

Применительно к рассматриваемому случаю получаем, что

$$r^* = \frac{\int_0^{22,5} r \cdot \frac{45 - 2r}{63} dr}{\int_0^{22,5} \frac{45 - 2r}{63} dr} = \frac{\left(22,5 \cdot r^2 - \frac{2}{3} r^3\right)_0^{22,5}}{\left(45 \cdot r - r^2\right)_0^{22,5}} \cong \frac{3797}{506} \cong 7,5.$$

Полученное уточненное значение 7,5 также соответствует оценке «хорошо».

4.2.3. Оценка качества СМО с использованием нечеткого логического вывода.

При проектировании различных систем возникает задача предварительной оценки их качества. Далее предлагается подход к построению такой оценки, базирующийся на методе нечеткого логического вывода Мамдани [4].

Рассматривается система массового обслуживания с нечеткой интенсивностью поступления требований и нечеткой интенсивностью обслуживания. Оценить качество ее функционирования. Предлагается изучить выходную лингвистическую переменную «качество функционирования», зависящую от двух входных лингвистических переменных: «интенсивность входящего потока» и «интенсивность обслуживания». Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере.

Пример 4.2.2. Рассматривается работа газетного или какого-то другого киоска, продуктового ларька и т.п. Оценить качество его функционирования при прогнозируемых значениях интенсивности поступления клиентов и интенсивности обслуживания.

Для решения задачи предлагается следующая модель. Имеется выходная лингвистическая переменная Z «оценка качества системы в заданных условиях», ее термы: «очень плохо», «плохо», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». Универсальным множеством, на котором определены нечеткие множества, формализующие эти термы, является множество $U_C = [0, 100]$, где z из U_C — оценка в баллах. Функцию принадлежности терма C_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, обозначим $\mu_{C_i}(z)$, $z \in U_C$, где

C_1 - «очень плохо», C_2 - «плохо», C_3 - «удовлетворительно»,
 C_4 - «хорошо», C_5 - «отлично».

Имеются две входные лингвистические переменные, интенсивность входящего потока требований и интенсивность обслуживания, задают условия работы рассматриваемой системы.

Первая входная переменная Y^1 имеет термы «очень часто», «часто», «не часто», «редко». Универсальным множеством здесь является множество $U_{Y^1} = [0, 60]$, где y^1 из U_{Y^1} – средний интервал времени (в минутах), между моментами поступления в систему очередных требований. Функцию принадлежности терма $Y_i^1, i=1,2,3,4$, обозначим $\mu_{Y_i^1}(y^1), y^1 \in U_{Y^1}$ где

Y_1^1 - «очень часто», Y_2^1 - «часто», Y_3^1 - «не часто», Y_4^1 - «редко».

Вторая входная переменная Y^2 имеет термы «быстро», «средне», «долго». Универсальным множеством здесь является множество $U_{Y^2} = [0, 50]$, где y^2 из U_{Y^2} – среднее время (в минутах) обслуживания одного требования. Функцию принадлежности терма $Y_i^2, i=1,2,3$, обозначим $\mu_{Y_i^2}(y^2), y^2 \in U_{Y^2}$, где

Y_1^2 - «быстро», Y_2^2 - «средне», Y_3^2 - «долго».

Здесь под $C_i (A_j, B_k)$ понимается соответствующий терм или, если это не приводит к недоразумению, нечеткое множество, его формализующее.

Предполагается, что все термы формализуются треугольными или трапецидальными нечеткими числами. Графики функций принадлежности этих нечетких чисел представлены на рисунках 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5.

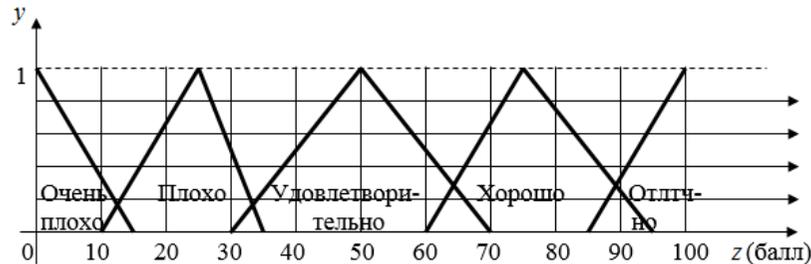


Рис. 4.2.3. Графики функций принадлежности термов выходной переменной Z (качество функционирования).

Нечеткие числа \hat{z}_i , формализующие термы $C_i, i=1,2,3,4,5$ задаются равенствами:

$$\hat{z}_1 = \langle 0,0,15 \rangle, \hat{z}_2 = \langle 10,25,35 \rangle, \hat{z}_3 = \langle 30,50,70 \rangle, \hat{z}_4 = \langle 60,75,95 \rangle, \hat{z}_5 = \langle 85,100,100 \rangle.$$

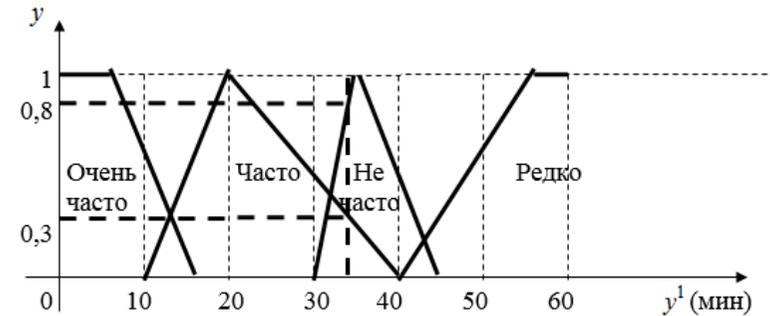


Рис. 4.2.4. Графики функций принадлежности термов входной переменной Y^1 (интенсивность входящего потока).

Нечеткие числа \hat{y}_i^1 , формализующие термы $Y_i^1, i=1,2,3,4$, задаются равенствами:

$$\hat{y}_1^1 = \langle 0, 5, 15 \rangle, \hat{y}_2^1 = \langle 10, 20, 40 \rangle, \hat{y}_3^1 = \langle 30, 35, 45 \rangle, \hat{y}_4^1 = \langle 40, 55, 60, 60 \rangle.$$

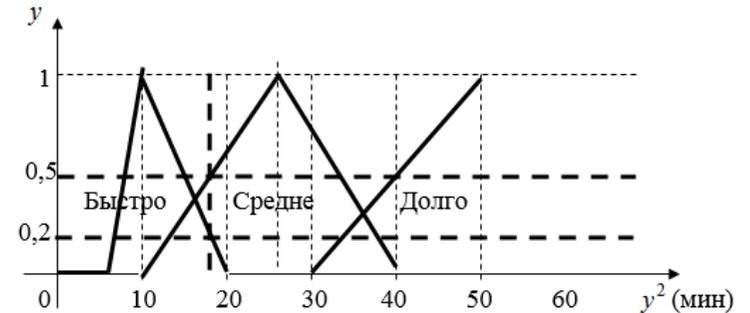


Рис. 4.2.5. Графики функций принадлежности термов входной переменной Y^2 (интенсивность обслуживания).

Нечеткие числа \hat{y}_i^2 , формализующие термы $Y_i^2, i=1,2,3$, задаются равенствами:

$$\hat{y}_1^2 = \langle 5, 10, 20 \rangle, \hat{y}_2^2 = \langle 10, 25, 40 \rangle, \hat{y}_3^2 = \langle 30, 50, 50 \rangle.$$

Задана база знаний, представленная таблицей 4.2.2.

Пусть, например, предполагается, что интервал времени между моментами поступления требований близок (равен) 34 минутам и время обслуживания любого требования около 18 минут (равно 18 минутам).

Таблица 4.2.2. База знаний

Интенсивность обслуживания	Интенсивность входящего потока			
	Y_1^1 - «очень часто»	Y_2^1 - «часто»	Y_3^1 - «не часто»	Y_4^1 - «редко»
Y_1^2 - «быстро»	C_3	C_4	C_5	C_5
Y_2^2 - «средне»	C_2	C_3	C_4	C_5
Y_3^2 - «долго»	C_1	C_2	C_3	C_4

В соответствии с этими данными получаем, что лингвистическая переменная «интенсивность входящего потока» приняла с надежностью 0,8 значение «не часто» и с надежностью 0,3 – значение «часто»; лингвистическая переменная «интенсивность обслуживания» приняла с надежностью 0,2 значение «быстро» и с надежностью 0,5 – значение «средне».

Вычислим значение истинности нечетких высказываний « $Y^1 = Y_j^1$ и $Y^2 = Y_i^2$ » для $i=1,2,3, j=1,2,3,4$, при условии, что $y^1=34$ и $y^2=18$, т.е. степень принадлежности сочетания $y^1=34$ и $y^2=18$ множеству $Y_j^1 \cap Y_i^2$ при разных сочетаниях индексов i и j . Результаты сведены в таблице 4.2.3.

Таблица 4.2.3. Значение истинности нечетких высказываний « $Y^1 = Y_j^1$ и $Y^2 = Y_i^2$ » при условии, что $y^1=34$ и $y^2=18$,

	$\mu_{y_i^2}(18)$	Интенсивность входящего потока			
		Y_1^1 - «очень часто»	Y_2^1 - «часто»	Y_3^1 - «не часто»	Y_4^1 - «редко»
$\mu_{y_j^1}(34)$		0	0,3	0,8	0
Y_1^2 - «быстро»	0,2	0	0,2	0,2	0
Y_2^2 - «средне»	0,5	0	0,3	0,5	0
Y_3^2 - «долго»	0	0	0	0	0

Строка $\mu_{y_j^1}(34)$ и столбец $\mu_{y_i^2}(18)$ таблицы 4.2.3 заполняются по формуле 1.1.3 (на основании графиков на рис. 4.2.4, 4.2.5). В остальных клетках, указываются значения истинности конъюнкций соответствующих

термов входных лингвистических переменных на основании формулы 1.1.1.

Нас интересует значения надежности того, что выходная переменная при заданном наборе значений входных переменных, примет значение, равное заданному терму. Если, как в рассматриваемом примере, выходной терм соответствует нескольким наборам входных переменных, то, в силу правила нечеткой дизъюнкции, для рассматриваемого выходного термина надо из указанных в таблице 4.2.3 значений надежности для этого термина взять максимальное (формула 1.1.2). Результаты приведены в таблице 4.2.4.

Таблица 4.2.4. Максимальные надежности выходных термов при $y^1=34$ и $y^2=18$.

Выходные термы	C_1 - «очень плохо»	C_2 - «плохо»	C_3 - «удовлетворительно»	C_4 - «хорошо»	C_5 - «отлично»
Надежность	0	0	0,3	0,5	0,2

Для различных числовых значений с шагом в 10 баллов выходной переменной определим надежность того, что эти значения принадлежат нечетким множествам, формализующим соответствующие термы (C_3, C_4, C_5). Эти значения указаны в таблице 4.2.5.

Таблица 4.2.5. Надежности того, что числовые значения выходной переменной являются элементами соответствующих нечетких множеств.

Баллы (z)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_{C_3}(z)$	0	0	0	0	0,5	1,0	0,5	0	0	0	0
$\mu_{C_4}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0,66	0,75	0,25	0
$\mu_{C_5}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	1,0

Учтем теперь тот факт, что, нас интересуют не просто надежности указанные в таблице 4.2.5, а эти надежности, но с учетом надежности того, что рассматриваемое сочетание числовых значений входных переменных приводит к соответствующему терму выходной переменной. Значения интересующих нас надежностей указаны в таблице 4.2.6.

Таблица 4.2.6.

$$(\mu_{y_i^1}(34) \wedge \mu_{y_j^2}(18)) \wedge \mu_{C_k}(x), (i, j, k) \in \{(2,2,3), (2,3,4), (1,3,5)\}.$$

Баллы (z)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	0	0	0	0	0,3	0,3	0,3	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0	0	0	0	0,50	0,50	0,25	0
γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,20	20
$\varphi \vee \psi \vee \gamma$	0	0	0	0	0,3	0,3	0,3	0,5	0,5	0,25	0,20

Здесь

$$\varphi = (\mu_{Y_2^1}(34) \wedge \mu_{Y_2^2}(18)) \wedge \mu_{C_3}(z),$$

$$\psi = (\mu_{Y_2^1}(34) \wedge \mu_{Y_3^2}(18)) \wedge \mu_{C_4}(z),$$

$$\gamma = (\mu_{Y_1^1}(34) \wedge \mu_{Y_3^2}(18)) \wedge \mu_{C_5}(z).$$

В последней строке таблицы 4.2.6 указаны значения функция принадлежности нечеткого множества «значение выходной переменной $Z(y^1, y^2)$ при наборе значений входных переменных (34, 18)», т.е. степень уверенности в том, что функционирование системы в рассматриваемых условиях заслуживает соответствующей оценки в баллах.

В главе 1 рассмотрены несколько подходов к преобразованию нечеткого числа в обычное число. Мы здесь воспользуемся методом центра тяжести, для этого мы должны сумму произведений элементов первой строки таблицы 4.2.6 на соответствующие элементы ее последней строки поделить на сумму элементов ее последней строки. Для рассматриваемого примера получаем:

$$\frac{0 + 0 + 0 + 0 + 12 + 15 + 18 + 35 + 40 + 22,5 + 20}{0 + 0 + 0 + 0 + 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,5 + 0,5 + 0,25 + 0,20} = \frac{162,5}{2,35} \cong 69,15,$$

т.е., в рассматриваемых условиях, качество исследуемой СМО оценивается примерно в шестьдесят девять с небольшим баллов по сто бальной системе.

Приведем еще один пример на использование нечеткого логического вывода.

4.2.4. Использование обобщенного значения (центра тяжести) интенсивностей входящего потока и обслуживания.

В случае, когда мы не располагаем прогнозными значениями интенсивностей поступления требований и их обслуживания, полезным может оказаться подход, при котором в качестве значений этих интенсивностей используются значения центров тяжести соответствующих нечетких чисел.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример.

Пример 4.2.3. Рассмотрим предыдущий пример, но будем исходить из того, что интервалы времени между моментами прибытия требований и интервалы обслуживания определены не однозначно и задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle 0, 40, 60 \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle 0, 30, 50 \rangle$ соответственно.

В качестве прогнозных значений рассматриваемых интенсивностей будем использовать значения центров тяжести соответствующих нечетких чисел.

Найдем Θ_λ – центр тяжести нечеткого числа $\hat{\lambda} = \langle 0, 40, 60 \rangle$, задающего интенсивность поступления требований, и Θ_μ – центр тяжести нечеткого числа $\hat{\tau} = \langle 0, 30, 50 \rangle$, задающего продолжительность обслуживания. Функции принадлежности этих нечетких чисел, соответственно $\mu_\lambda(t), t \in [0, 60]$, и $\mu_\tau(t), t \in [0, 50]$, задаются формулами (4.2.1). Их графики представлены на рисунках 4.2.6 и 4.2.7.

$$\mu_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{40}, & t \in [0, 40], \\ \frac{60-t}{20}, & t \in [40, 60], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \mu_\tau(t) = \begin{cases} \frac{t}{30}, & t \in [0, 30], \\ \frac{50-t}{20}, & t \in [30, 50], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

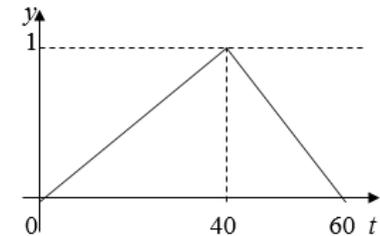


Рис. 4.2.6. График функции принадлежности $\mu_\lambda(t)$.

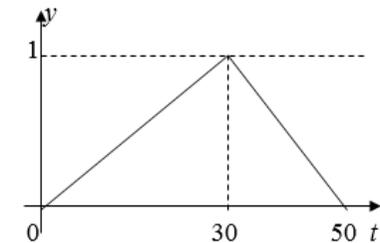


Рис. 4.2.7. График функции принадлежности $\mu_\tau(t)$.

Определим центры тяжести Θ_λ и Θ_τ нечетких чисел λ и τ соответственно (см. определение 1.1.11):

$$\Theta_\lambda = \frac{\int_0^{60} t \cdot \mu_\lambda(t) dt}{\int_0^{60} \mu_\lambda(t) dt} = \frac{\frac{1}{40} \int_0^{40} t^2 dt + \int_{40}^{60} (3t - 0,05t^2) dt}{\frac{1}{40} \int_0^{40} t dt + \int_{40}^{60} (3 - 0,05t) dt} = 33,33 \cong 33$$

и

$$\Theta_{\tau} = \frac{\int_0^{50} t \cdot \mu_{\lambda}(t) dt}{\int_0^{50} \mu_{\lambda}(t) dt} = \frac{\frac{1}{30} \int_0^{30} t^2 dt + \int_{30}^{50} (2,5t - 0,05t^2) dt}{\frac{1}{30} \int_0^{30} t dt + \int_{30}^{50} (2,5 - 0,05t) dt} = 32,68 \approx 33.$$

Итак, будем предполагать, что интервал времени между моментами прибытия очередных требований равен 33 минутам, и время обслуживания (интенсивность обслуживания) равно тоже 33 минутам. Лингвистические переменные и нечеткие множества, формализующие их термы, а также база знаний, такие же, как и в предыдущем примере. Решая этот пример аналогично предыдущему, получаем:

Таблица 4.2.8. Значение истинности нечетких высказываний

« $Y^1 = Y_j^1$ и $Y^2 = Y_j^2$ » при условии, что $y^1=33$ и $y^2 = 33$.

	$\mu_{y_j^2}(33)$	Интенсивность входящего потока			
		Y_1^1 - «очень часто»	Y_2^1 - «часто»	Y_3^1 - «не часто»	Y_4^1 - «редко»
$\mu_{y_j^1}(33)$		0	0,35	0,60	0
Y_1^2 - «быстро»	0	0	0	0	0
Y_2^2 - «средне»	0,53	0	0,35	0,53	0
Y_3^2 - «долго»	0,15	0	0,15	0,15	0

Таблица 4.2.9. Максимальные надежности выходных термов при $y^1=33$ и $y^2 = 33$.

Выходные термы	C_1 - очень плохо	C_2 - плохо	C_3 - удовлетворительно	C_4 - хорошо	C_5 - отлично
Надежность	0	0	0,3	0,5	0

Таблица 4.2.10. Надежности того, что числовые значения выходной переменной являются элементами соответствующих нечетких множеств.

Баллы (z)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	9-	100
$\mu_{C_3}(z)$	0	0	0	0	0,5	1,0	0,5	0	0	0	0
$\mu_{C_4}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0,66	0,75	0,25	0

Таблица 4.2.11.
 $(\mu_{y_1^1}(33) \wedge \mu_{y_2^1}(33)) \wedge \mu_{C_k}(x), (i, j, k) \in \{(2,2,3), (2,3,4), (1,3,5)\}$.

Баллы (z)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	0	0	0,15	0,15	0	0	0	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0	0,35	0,35	0,35	0	0	0	0
γ	0	0	0	0	0	0	0	0,53	0,53	0,25	0
$\varphi \vee \psi \vee \gamma$	0	0	0	0	0,5	1,0	0,5	0,66	0,75	0,25	0

Здесь

$$\varphi = (\mu_{y_1^1}(33) \wedge \mu_{y_2^1}(33)) \wedge \mu_{C_2}(z),$$

$$\psi = (\mu_{y_2^1}(33) \wedge \mu_{y_2^2}(33)) \wedge \mu_{C_3}(z),$$

$$\gamma = (\mu_{y_1^1}(33) \wedge \mu_{y_2^2}(33)) \wedge \mu_{C_4}(z).$$

Для рассматриваемого случая получаем:

$$\frac{0 + 0 + 0 + 0 + 20 + 50 + 30 + 46,2 + 60 + 22,5 + 0}{0 + 0 + 0 + 0 + 0,5 + 1,0 + 0,5 + 0,66 + 0,75 + 0,25 + 0} = \frac{228,7}{3,66} \approx 62,5,$$

т.е., в рассматриваемых условиях, качество исследуемой СМО оценивается примерно в шестьдесят два с половиной балла.

Для качественной характеристики рассматриваемой СМО предлагается использовать терм выходной переменной, для которого значение функции принадлежности для полученного значения центра тяжести максимально. В нашем примере $\mu_{C_3}(62,5) = 3/8$, $\mu_{C_4}(62,5) = 1/6$.

Следовательно, функционирование рассматриваемой системы мы должны признать удовлетворительным.

Замечание. Использование конкретных значений интенсивностей позволяет существенно расширить список используемых для оценки качества функционирования систем обслуживания, работающих на конечных интервалах времени. Ведь в этом случае моменты поступления требований в систему, моменты начала и окончания их обслуживания определяются однозначно.

4.2.5. Случай, когда значениями входных лингвистических переменных являются центры тяжести некоторых нечетких множеств.

В предыдущем пункте мы, строя функцию принадлежности нечеткого множества «значение выходной переменной при заданном наборе значений входных переменных», значения входных переменных определяли, строя центр тяжести соответствующих нечетких чисел, и затем уже строили функцию принадлежности интересующего нас нечеткого множества и его центр тяжести. Теперь же поступим, в некотором смысле, наоборот. Обозначим через E некоторое множество

сочетаний возможных значений входных переменных. Предполагается, что интервалы между моментами поступления любых требований одинаковые, и на обслуживание любого требования затрачивается одинаковое время. Для каждого элемента (f, g) из множества E определим значение $\Theta(f, g)$ центра тяжести нечеткого множества «значение выходной переменной при наборе (f, g) значений входных переменных». В качестве заданных значений используем значения рассматриваемого элемента из E .

Рассмотрим нечеткое множество \mathfrak{Z} – «возможные значения центра тяжести», где

$$\mathfrak{Z} = \{ \Theta((f, g), \mu(f, g)) \}, (f, g) \in E, \mu(f, g) = \min \{ \mu_\lambda(f), \mu_\tau(g) \}.$$

Для оценки качества функционирования рассматриваемой системы массового обслуживания предлагается использовать центр тяжести нечеткого множества \mathfrak{Z} .

Если нас интересует лингвистическое значение оценки (вербальная оценка), то предлагается использовать терм выходной переменной, для которого значение функции принадлежности для полученного значения центра тяжести максимально.

Пример 4.2.4. Рассмотрим пример 4.2.2 – работа продуктового ларька, но будем предполагать, что интервалы времени между моментами прибытия требований и интервалы обслуживания являются нечеткими треугольными числами $\hat{\lambda} = \langle 0, 40, 60 \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle 0, 30, 45 \rangle$ соответственно. В качестве прогнозных значений входных переменных будем использовать всевозможные элементы множества

$$E = \{0, 20, 40, 60\} \times \{0, 15, 30, 45\}.$$

Пусть $(f, g) = (20, 15)$. Используя формулу 1.1.3, которая для нашего случая приобретает вид

$$\mu_{\hat{\lambda}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{40}, & x \in [0, 40], \\ \frac{60-x}{20}, & x \in [40, 60], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \mu_{\hat{\tau}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{30}, & x \in [0, 30], \\ \frac{45-x}{15}, & x \in [30, 45], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

найдем, что $\mu_{\hat{\lambda}}(20) = 0,5$, $\mu_{\hat{\tau}}(15) = 0,5$, тогда $\mu(f, g) = 0,5$.

На основании графиков функция распределения и базы знаний (таблица 4.2.2) заполним таблицы 4.2.12, 4.2.13, 4.2.14, 4.2.15 при условии, что $y^1 = 20$ и $y^2 = 15$.

Таблица 4.2.12. Значение истинности нечетких высказываний « $Y^1 = Y_j^1$ и $Y^2 = Y_i^2$ » при условии, что $y^1 = 20$ и $y^2 = 15$.

	$\mu_{y_i^2}(15)$	Интенсивность входящего потока			
		Y_1^1 - «очень часто»	Y_2^1 - «часто»	Y_3^1 - «не часто»	Y_4^1 - «редко»
$\mu_{y_j^1}(20)$		0	1,0	0	0
Y_1^2 - «быстро»	0,5	0	0,5	0	0
Y_2^2 - «средне»	0,33	0,	0,33	0	0
Y_3^2 - «долго»	0	0	0	0	0

Таблица 4.2.13. Максимальные надежности выходных термов при $y^1 = 20$ и $y^2 = 15$.

Выходные термы	C_1 - «очень плохо»	C_2 - «плохо»	C_3 - «удовлетворительно»	C_4 - «хорошо»	C_5 - «отлично»
Надежность	0	0	0,33	0,5	0

Таблица 4.2.14. Надежности того, что числовые значения выходной переменной являются элементами соответствующих нечетких множеств.

Баллы (z)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_{C_3}(z)$	0	0	0	0	0,5	1,0	0,5	0	0	0	0
$\mu_{C_4}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0,66	0,75	0,25	0

Таблица 4.2.15. $(\mu_{y_i^1}(20) \wedge \mu_{y_j^2}(15)) \wedge \mu_{C_k}(z)$, $(i, j, k) \in \{(2,2,3), (2,3,4)\}$.

Баллы (z)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0	0	0	0	0,50	0,50	0,25	0
$\varphi \vee \psi$	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,5	0,5	0,25	0

Здесь

$$\varphi = (\mu_{y_2^1}(20) \wedge \mu_{y_2^2}(15)) \wedge \mu_{C_3}(z),$$

$$\psi = (\mu_{y_2^1}(20) \wedge \mu_{y_3^2}(15)) \wedge \mu_{C_4}(z),$$

$$\Theta(20, 15) = \frac{40/3 + 50/3 + 20 + 35 + 40 + 22,5}{0,33 + 0,33 + 0,33 + 0,5 + 0,5 + 0,25} = \frac{127,5}{2,25} \cong 56,7.$$

Вычисления для остальных элементов из E осуществляются аналогично, в таблице 4.2.16 указаны их результаты. Заметим, что $\mu(f, g) = 0$, если $f \in \{0, 60\}$ или $g \in \{0, 45\}$, в этих случаях соответствующие слагаемые в формуле для подсчета центра тяжести равны нулю. Поэтому рассмотрим только оставшиеся четыре сочетания, а именно, (20, 15), (20, 30), (40, 15), (40, 30).

Таблица 4.2.16 $\Theta(f, g) / \mu(f, g)$ при $(f, g) \in E$.

f	g	
	15	30
20	56,7/0,5	50/0,5
40	50/0,5	100/1,0

На базе таблицы 4.2.16 строим функцию принадлежности нечеткого множества «значение выходной переменной при заданном наборе значений входных переменных», т.е. заданную на множестве E . Обозначим эту функцию через $\mu_{u.m.}(u)$, где u - возможное значение центра тяжести. Заметим, что в силу правила нечеткой дизъюнкции

$$\mu_{u.m.}(50) = \max\{\mu(20, 30), \mu(40, 15)\} = 0,5.$$

С учетом сказанного рассматриваемая функция принадлежности задается таблицей 4.2.17.

Таблица 4.2.17. Функция принадлежности $\mu_{u.m.}(u)$.

u	0	50	56,7	100
$\mu_{u.m.}(u)$	0	0,5	0,5	1,0

Тогда центр тяжести $\Theta(\mathfrak{F})$ нечеткого множества $\mathfrak{F} = \{\Theta((f, g), \mu(f, g))\}$ равен

$$\frac{0 \cdot 0 + 50 \cdot 0,5 + 56,7 \cdot 0,5 + 100 \cdot 1,0}{0 + 0,5 + 0,5 + 1,0} = 76,675 \text{ баллов.}$$

4.2.6. Оценка качества системы по двум критериям эффективности.

Требуется оценить вариант организации системы массового обслуживания, в которую поступают требований определенного типа.

Варианты различаются минимальным значением надежности того, что система работает без очереди, и стоимостью ее организации.

Предполагается, что интервалы времени между моментами поступления требований и затраты времени на их обслуживания задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$.

Для оценки качества рассматриваемого варианта предлагается использовать следующую модель. Имеется выходная лингвистическая переменная «качество варианта», зависящая от двух входных лингвистических переменных – «минимальная надежность того, что система работает без очереди» и «стоимость системы».

Алгоритм решения сформулированной задачи состоит в следующем:

1. Для рассматриваемого варианта определяется значение первой входной переменной, т.е. минимальная надежность того, что система работает без очереди (см. п. 4.1.2).

2. По полученному значению первой входной переменной и по заданному значению второй строится нечеткое множество «качество варианта при заданных значениях входных переменных».

3. Находится центр тяжести построенного в предыдущем пункте нечеткого множества. Полученное значение предлагается использовать как оценку качества рассматриваемого варианта.

Замечание. Если интерес представляет вербальная оценка варианта, то в качестве таковой можно использовать терм выходной переменной, для которого надежность того, что полученное в пункте 3 значение является элементом нечеткого множества формализующего этот терм, максимальна.

Пример 4.2.5. Требуется оценить организацию технологической линии по ремонту стрелочных электроприводов на железной дороге, учитывая значение минимальной надежности того, что система работает без очереди и стоимость обслуживания. Предполагается, что интервалы времени между моментами поступления требований на ремонт и время их обслуживания задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle 10, 17, 20 \rangle$ часов и $\hat{\tau} = \langle 12, 13, 15 \rangle$ часов соответственно, и стоимость обслуживания одного требования равна 65 тысяч рублей.

Значение минимальной надежности того, что система работает без очереди, и стоимость обслуживания будем рассматривать как входные лингвистические переменные. Оценку в баллах качества функционирования этой линии – как выходную лингвистическую переменную. Используя метод нечеткого логического вывода Мамдани, найдем интересующую нас оценку, в качестве которой предлагается использовать центр тяжести нечеткого множества «оценка линии при заданных значениях входных переменных».

Введём обозначения необходимые для решения задачи.

A – входная лингвистическая переменная «минимальная надежность того, что система работает без очереди» (первая входная переменная), с термами \hat{A}_1 («малая»), \hat{A}_2 («средняя»), \hat{A}_3 («большая»). Эти термы заданы на универсальном множестве от 0 до 1. Графики функций принадлежности соответствующих нечетких множеств приведены на рис. 4.2.8.

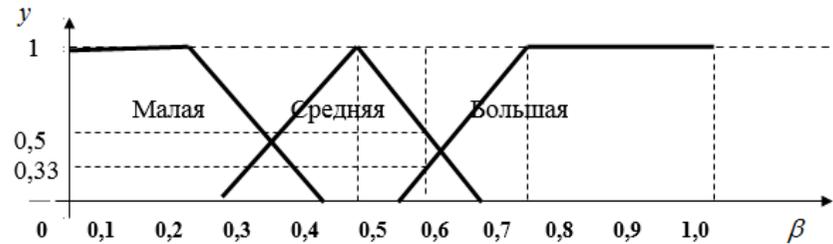


Рис. 4.2.8. Графики функций $y = \mu_{\hat{A}_i}(\beta)$ ($i=1,2,3$) для термов первой входной переменной из примера 4.2.5.

B – входная лингвистическая переменная «стоимость системы» (вторая входная переменная) с термами \hat{B}_1 («малая»), \hat{B}_2 («средняя»), \hat{B}_3 («большая») заданными на универсальном множестве, в качестве которой рассматривается множество возможных значений стоимостей восстановления стрелочных электроприводов в тыс. руб/шт. – промежуток от 1 до 100 тыс. руб/шт. Стоимость системы (средние затраты на обслуживание одного требования) обозначим через C , она измеряется в тыс. руб. Соответствующие графики функций принадлежности приведены на рис. 4.2.9.

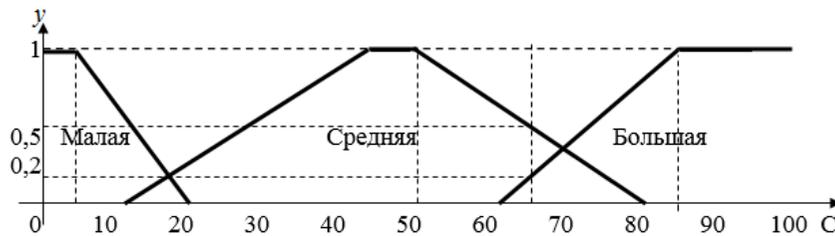


Рис. 4.2.9. Графики функций принадлежности для термов второй входной переменной из примера 4.2.5.

D – лингвистическая переменная «качество» характеризует качество функционирования рассматриваемой линии восстановления стрелочных электроприводов, (выходная переменная) с термами \hat{D}_1 («низкое»), \hat{D}_2 («среднее»), \hat{D}_3 («высокое»), которые заданы на универсальном

множестве $[0,1]$, измеряемом в долях единицы, её значение будем обозначать $O(\beta, C)$, соответствующие графики функций принадлежности приведены на рис.4.2.10.

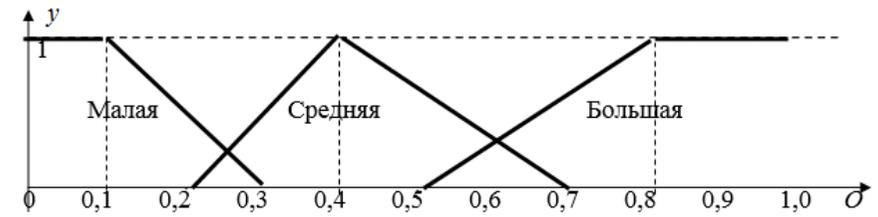


Рис. 4.2.10. Графики функций принадлежности $y = \mu_{\hat{C}_i}(O)$ ($i=1,2,3$)

термов выходной переменной «качество»

Через $\mu_{\hat{A}_i}$, $\mu_{\hat{B}_j}$, $\mu_{\hat{C}_k}$ ($i, j, k = 1,2,3$) будем обозначать функции принадлежности нечетких множеств, формализующих соответствующие термы рассматриваемых лингвистических переменных. База знаний, представлена в табл. 4.2.18.

Таблица 4.2.18. Качество организацию технологической линии по ремонту стрелочных электроприводов на железной дороге, в зависимости от значений входных переменных.

Вторая входная переменная	Первая входная переменная		
	«малая» (\hat{A}_1)	«средняя» (\hat{A}_2)	«большая» (\hat{A}_3)
«малая» (\hat{B}_1)	Низкое (\hat{C}_1)	Среднее (\hat{C}_3)	Высокое (\hat{C}_3)
«средняя» (\hat{B}_2)	Низкое (\hat{C}_1)	Среднее (\hat{C}_2)	Высокое (\hat{C}_3)
«большая» (\hat{B}_3)	Низкое (\hat{C}_1)	Низкое (\hat{C}_1)	Среднее (\hat{C}_2)

Если, например, минимальная надежность того, что система работает без очереди – «средняя» и стоимость системы восстановления стрелочных электроприводов – «средняя», то принимается решение о том, что качество системы восстановления стрелочных электроприводов имеет значение «среднее».

Решение. Значение β минимальной надежности того, что система работает без очереди, определяется по формуле (4.1.7). В нашем случае

$$\beta = \frac{15 - 10}{(17 - 10) + (15 - 13)} = \frac{5}{9} \cong 0,55.$$

Дальнейшие вычисления сведены в таблицы 4.2.19 – 4.2.22.

Таблица 4.2.19. Значение истинности нечетких высказываний « $A = \hat{A}_i \wedge B = \hat{B}_j$ » при условии, что $\beta = 0,55$ и $C = 65000$ руб.

Вторая входная переменная	$\mu_{\hat{B}_j}(65000)$	Первая входная переменная		
		\hat{A}_1	\hat{A}_2	\hat{A}_3
$\mu_{\hat{A}_i}(0,55)$		0	0,5	0,33
\hat{B}_1	0	0	0	0
\hat{B}_2	0,5	0	0,5	0,33
\hat{B}_3	0,2	0	0,2	0,2

Таблица 4.2.20. Максимальные надежности выходных термов При то $\beta = 0,55$ и $C = 65000$ руб.

Выходные термы	\hat{C}_1	\hat{C}_2	\hat{C}_3
Надежность	0,2	0,5	0,33

Для сокращения объема вычислений значения выходной переменной в таблице 4.2.21 изменяются с шагом 0,05.

Таблица 4.2.21. Надежности того, что числовые значения выходной переменной являются элементами соответствующих нечетких множеств.

Качество (O)	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\mu_{\hat{C}_1}(O)$	0	0,5	1,0	0,75	0,50	0,25	0	0	0	0	0
$\mu_{\hat{C}_2}(O)$	0	0	0	0	0	0,25	0,50	0,75	1,0	0,83	0,67
$\mu_{\hat{C}_3}(O)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Качество (O)	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\mu_{\hat{C}_1}(O)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{\hat{C}_2}(O)$	0,50	0,33	0,17	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{\hat{C}_3}(O)$	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,0	0,75	0,50	0,25	0

Таблица 4.2.22. $(\mu_{\hat{A}_i}(0,55) \wedge \mu_{\hat{B}_j}(65000)) \wedge \mu_{\hat{C}_k}(O)$, $(i, j, k) \in \{(2,3,1), (2,2,2), (3,2,3)\}$.

Качество (O)	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
φ	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0	0	0	0	0
ψ	0	0	0	0	0	0,25	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varphi \vee \psi \vee \gamma$	0	0,5	0,5	0,5	0,33	0,25	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50

Качество (O)	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
φ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ	0,50	0,33	0,17	0	0	0	0	0	0	0
γ	0,17	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,25	0
$\varphi \vee \psi \vee \gamma$	0,50	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,25	0

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= (\mu_{\hat{A}_2}(0,55) \wedge \mu_{\hat{B}_3}(65000)) \wedge \mu_{\hat{C}_1}(O), \\ \psi &= (\mu_{\hat{A}_2}(0,55) \wedge \mu_{\hat{B}_2}(65000)) \wedge \mu_{\hat{C}_2}(O), \\ \gamma &= (\mu_{\hat{A}_3}(0,55) \wedge \mu_{\hat{B}_2}(65000)) \wedge \mu_{\hat{C}_3}(O). \end{aligned}$$

По данным таблицы 4.2.22 находим искомый центр тяжести $O_{ц.т.}(0,55, 65000)$, получаем, что $O_{ц.т.}(0,55, 65000) \cong 0,46$. Заметим, что значению надежности 0,46 отвечает терм «средняя», поэтому вербальной оценкой предлагается считать, что качество системы среднее.

4.2.7. Системы массового обслуживания с нечеткими интенсивностями, с простейшим входящим потоком и показательным временем обслуживания.

Рассмотрим случай, когда интенсивность поступления требований в СМО и интенсивность их обслуживания нечеткие, но при любых значениях этих интенсивностей входящий поток требований простейший и время обслуживания распределено по показательному закону. Предполагается, что число клиентов и длина очереди неограниченные. Оценить качество функционирования рассматриваемой СМО. Такая задача может возникнуть, например, при прогнозировании работы скорой помощи в районе чрезвычайной ситуации. Для требуемой оценки

предлагается использовать нечеткое множество «значение рассматриваемого показателя». В качестве такого показателя можно использовать среднюю длину очереди, вероятность того, что все каналы заняты, среднее число занятых каналов и др.

Для простоты будем считать, что интервалы времени между моментами поступления требований задаются нечетким числом $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$, а интервалы времени на обслуживание требования – нечетким числом $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$. Функции принадлежности нечетких чисел $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$ задаются формулами (3.3.1).

Обозначим:

$\bar{\lambda}$ - среднее число требований, поступающих в СМО в единицу времени (час), $\bar{\lambda} = 1/\lambda$;

$\bar{\tau}$ - среднее число требований обслуживаемых одним каналом в единицу времени (час), $\bar{\tau} = 1/\tau$.

Примерный алгоритм построения оценки качества СМО состоит в следующем.

Прежде всего, в зависимости от требуемой точности, выбираются h_λ и h_τ – шаги изменения продолжительности времени между моментами прибытия требований и времени обслуживания, соответственно шаги изменения λ и τ . Затем выполняются пять пунктов:

1. Определить соответствующее сочетание интенсивностей входящего потока и обслуживания
2. Определить надежность этого сочетания.
3. Определить значение рассматриваемого показателя при том сочетании интенсивностей.
4. Если еще не все сочетания интенсивностей рассмотрены, то перейти к пункту 1, иначе – к пункту 5.
5. Найти центр тяжести нечеткого множества «значение рассматриваемого показателя», построенного в пунктах 1-4.

В качестве окончательной оценки используется этот центр тяжести. Если требуется дать качественную оценку, то предлагается использовать терм выходной переменной, нечеткому множеству, формализующему который, этот центр тяжести принадлежит с максимальной надежностью.

Замечание 4.2.1. Если в качестве рассматриваемого показателя используется, например, суммарное время, проведенное требованиями в очереди, то можно использовать метод Монте-Карло [36].

Пример 4.2.6. Рассмотрим СМО из примера 4.2.2, но будем исходить из того, что интервалы времени между моментами прибытия требований и интервалы обслуживания определены не однозначно и задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle 0, 40, 60 \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle 0, 30, 50 \rangle$ минут соответственно.

Предполагается, что при любых конкретных значениях указанных интервалов входящий поток является простейшим и время обслуживания показательным с соответствующими интенсивностями. В качестве рассматриваемого показателя возьмем среднее время ожидания в очереди. При длине интервала между моментами прибытия требований равной нулю $h_\lambda = +\infty$, и этот случай не интересен. Если $\lambda > 0$ и время обслуживания равно нулю, то время ожидания в очереди равно нулю. Кроме того, надежность максимальных значений рассматриваемых интервалов равна нулю, и соответствующие слагаемые при отыскании центра тяжести тоже равны нулю и значения не имеют. Поэтому будем предполагать, что величины всех рассматриваемых интервалов больше нуля и меньше максимально возможных значений. Так как число клиентов не ограниченное, то должно выполняться неравенство $\bar{\lambda} / \bar{\tau} < 1$.

Положим $h_\lambda = h_\tau = 10$ мин. и ограничимся рассмотрением интенсивностей задаваемых целыми числами. Тогда возможны только следующие сочетания значений интенсивностей $\bar{\lambda}$ (тр./час) и $\bar{\tau}$ (тр./час):

- (1,2), (1,3), (1,4),
(2,3), (2,4),
(3,4).

Значения показателя “среднее время ожидания в очереди” при различных сочетаниях значений интенсивностей $\bar{\lambda}$ и $\bar{\tau}$ и значения надежности этих сочетаний приведены в таблице 4.2.23. В числителе выражений в клетках этой таблицы указано среднее время ожидания в очереди (в часах), в знаменателе – надежность соответствующего сочетания. Надежность сочетания обозначим μ_{ij} , среднее время ожидания для этого сочетания – $t_{ож}(i, j)$.

Таблица 4.2.23. Значения надежности и среднего времени ожидания

		$(\mu_{ij} / t_{ож}(i, j))$		
i \ j	2	3	4	
1	0,25/0,50	0,25/0,17	0,25/0,08	
2	-	0,50/0,67	0,50/0,25	
3	-	-	0,50/0,75	

Центр тяжести рассматриваемого множества равен $\frac{0,25 \cdot 0,50 + 0,25 \cdot 0,17 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,50 \cdot 0,67 + 0,50 \cdot 0,25 + 0,50 \cdot 0,75}{0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,50 + 0,50 + 0,50} \cong \frac{1,02}{2,25} \cong 0,45$ час.

Проиллюстрируем процесс заполнения таблицы 4.2.23 на примере заполнения клетки $(i, j) = (2, 4)$. По формулам (3.3.1) $\mu_\lambda(2 \cdot h_\lambda) = \mu_\lambda(20) = 0,5$, $\mu_\tau(4 \cdot h_\tau) = \mu_\tau(40) = 0,5$, тогда

$$\mu_{24} = \min\{0,5, 0,5\} = 0,5.$$

Для вычисления среднего времени ожидания в очереди при указанных значениях интенсивностей используем формулы (2.2.3, 2.2.8, 2.2.9, 2.2.1), учитывая, что $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 0,5$ (см. формулу 2.2.6):

$$t_{ож} = \frac{M_0}{1}, M_0 = \frac{0,5^{1+1}}{1 \cdot 1!(1-0,5/1)^2} \cdot P_0, P_0 = \left(1 + \frac{A_1}{1-0,5}\right)^{-1}, A_1 = \frac{0,5^1}{1!}.$$

Получаем: $A_1 = 0,5, P_0 = 0,5, M_0 = 0,5, t_{ож} = 0,5$.

4.2.8. Учет оперативного и экономического показателя в случае простейшего входящего потока и показательным временем обслуживания с нечеткими интенсивностями.

Как и в предшествующем пункте будем предполагать, что интенсивность поступления требований в СМО и интенсивность их обслуживания нечеткие, но при любых значениях этих интенсивностей входящий поток требований простейший и время обслуживания распределено по показательному закону, что число клиентов и длина очереди неограниченны. Как и раньше: $\bar{\lambda}$ – это среднее число требований, поступающих в СМО в единицу времени (за смену (8 часов)), $\bar{\lambda} = 1/\hat{\lambda}$; $\bar{\tau}$ – среднее число требований обслуживаемых одним каналом в единицу времени (за смену (8 часов)), $\bar{\tau} = 1/\hat{\tau}$.

Как и в пункте 4.2.7 находим центр тяжести нечеткого множества «среднее время ожидания в очереди». И далее рассматриваем выходную лингвистическую переменную θ – «качество СМО», зависящую от двух входных лингвистических переменных: $t_{ож}$ – «средняя время ожидания в очереди» и $s_{ед}$ – «средняя стоимость обслуживания одного требования».

Алгоритм. (Его первые пять пунктов такие же, как и в пункте 4.2.7., но появляются еще пункты 6 -10).

1. Рассматривается пара $(\lambda, \tau) \in A_\lambda \times A_\tau$, где A_λ и A_τ – множества возможных значений временных интервалов (интенсивностей) λ и μ соответственно.

2. Определяется надежность этого сочетания значений интенсивностей.

3. Определяется среднее время ожидания в очереди.

4. Перебираются все сочетания надежностей из $A_\lambda \times A_\tau$ и находится центр тяжести Θ_i построенного нечеткого множества «среднее время ожидания в очереди».

5. Центр тяжести Θ_i и стоимость – входные переменные при выходной переменной θ , по их значениям определяются термы, элементами которых они являются и надежность этого факта.

6. С использованием базы знаний определяются термы выходной лингвистической переменной, которые соответствуют всевозможным сочетаниям термов входных переменных, определенных на предыдущем шаге.

7. Строится нечеткое множество «оценка функционирования СМО».

8. Находится центр тяжести $\Theta_{ц.т.}$ этого нечеткого множества.

В качестве окончательной оценки используется этот центр тяжести или значение терма выходной переменной, нечеткому множеству которой этот центр тяжести принадлежит с максимальной надежностью.

Пример 4.2.7. При создании службы скорой медицинской помощи в горном районе возникает необходимость учета возникновения чрезвычайной ситуации, что повлечет изменение интенсивности поступления вызов и интенсивности их обслуживания. Отсюда возникает задача прогнозирования качества функционирования рассматриваемой системы.

Рассмотрим работу подстанции скорой помощи, имеющей всего две машины (ее стоимость $S = 6 \cdot 10^6$ руб.), в роли показателя, характеризующего ее работу, будем использовать среднее время ожидания в очереди. Требуется найти оценку качества процесса функционирования подстанции. Интервалы времени между моментами поступления заявок, и время обслуживания этих заявок являются нечеткими величинами $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$ соответственно, их функции принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$ и $\mu_{\hat{\tau}}(t)$ задаются таблицами 4.2.24 и 4.2.25.

Таблица 4.2.24. Функция принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$

$\bar{\lambda}$ (гр./смена)	4	5	6	7	8	9	10
λ (мин)	120	96	80	69	60	53	48
$\mu_{\hat{\lambda}}(\lambda)$	0,2	0,6	0,9	1,0	0,8	0,5	0,1

Таблица 4.2.25 Функция принадлежности $\mu_{\hat{\tau}}(t)$.

$\bar{\tau}$ (гр./смена)	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
τ (мин)	120	106	96	87	80	74	69
$\mu_{\hat{\tau}}(\tau)$	0,3	0,7	1,0	0,9	0,8	0,5	0,2

Исходим из того, что интенсивности обслуживания каждой из имеющихся бригад одинаковые и равны $0,5\bar{\tau}$. Здесь

$\bar{\lambda}$ – интенсивность поступления требований (среднее число поступивших требований за смену (8 часов));

λ – интервал времени между моментами поступления требований, предполагается, что первое требование поступает в нулевой момент времени;

$\bar{\tau}$ – интенсивность обслуживания (среднее число заявок, которые обслуживаются одной бригадой скорой помощи за смену);

τ – время обслуживания одного требования.

Для начала выполним первые четыре шага алгоритма.

Так как число клиентов не ограниченное, то должно выполняться неравенство $\bar{\lambda} / \bar{\tau} < 1$. Поэтому возможны только следующие значения для пар (λ, τ) :

- (4,8), (4,9), (4,10), (4,11), (4,12), (4,13), (4,14),
- (5,8), (5,9), (5,10), (5,11), (5,12), (5,13), (5,14),
- (6,8), (6,9), (6,10), (6,11), (6,12), (6,13), (6,14),
- (7,8), (7,9), (7,10), (7,11), (7,12), (7,13), (7,14),
- (8,9), (8,10), (8,11), (8,12), (8,13), (8,14),
- (9,10), (9,11), (9,12), (9,13), (9,14),
- (10,11), (10,12), (10,13), (10,14).

Необходимые для дальнейшего результаты вычислений сведены в таблицу 4.2.26. В ее клетках в числителях указано среднее время ожидания, для соответствующих сочетаний, в знаменателях – их надежность.

Таблица 4.2.26. Функция принадлежности нечеткого множества «среднее время (в сменах) ожидания в очереди».

$\lambda \setminus \tau$	8	9	10	11	12	13	14
4	0,080/0,2	0,050/0,2	0,040/0,2	0,030/0,2	0,020/0,2	0,020/0,2	0,010/0,2
5	0,160/0,3	0,092/0,6	0,067/0,6	0,047/0,6	0,035/0,6	0,027/0,5	0,021/0,2
6	0,321/0,3	0,178/0,7	0,112/0,9	0,077/0,9	0,056/0,8	0,042/0,5	0,032/0,2
7	0,817/0,3	0,340/0,7	0,192/1,0	0,124/0,9	0,086/0,8	0,063/0,5	0,048/0,2
8		0,837/0,7	0,356/0,8	0,204/0,8	0,133/0,8	0,094/0,5	0,069/0,2
9			0,853/0,5	0,368/0,5	0,214/0,5	0,142/0,5	0,100/0,2
10				0,866/0,1	0,379/0,1	0,223/0,1	0,149/0,1
	0,4054/1,1	1,0137/2,9	1,0523/4,0	0,6489/4,0	0,3899/3,8	0,2103/2,8	0,0709/1,3

При заполнении таблицы 4.2.26 использованы формулы (2.2.3, 2.2.8, 2.2.9, 2.2.1), учитывая, что $\alpha = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\tau}}$, и оно должно быть меньше единицы (см. формулу 2.2.6).

Для определения значения центра тяжести нечеткого множества «среднее время ожидания в очереди» воспользуемся формулой (п. 1.1.4.)

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \cdot \mu_{\bar{A}}(u_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_{\bar{A}}(u_i)}. \text{ Для нашего случая эта формула принимает вид:}$$

$$\Theta_t = \frac{\sum_{\lambda \in A_\lambda} \sum_{\tau \in A_\tau} t_{ож}(\bar{\lambda}, \bar{\tau}) \cdot \mu_{\bar{A}}(\bar{\lambda}, \bar{\tau})}{\sum_{\lambda \in A_\lambda} \sum_{\tau \in A_\tau} \mu_{\bar{A}}(\bar{\lambda}, \bar{\tau})} = 0,191 \text{ смены} \cong 92 \text{ мин.}$$

Здесь $t_{ож}(\bar{\lambda}, \bar{\tau})$ – среднее время ожидания в очереди (числитель в соответствующей клетке таблицы 4.2.26); $\mu_{\bar{A}}(\bar{\lambda}, \bar{\tau}) = \min\{\mu_{\lambda}(\lambda), \mu_{\tau}(\tau)\}$, значения указаны в соответствующих знаменателях.

Выполним вторую часть алгоритма – шаги с пятого по восьмой.

Будем предполагать, что θ – выходная лингвистическая переменная «качество СМО», измеряемая в баллах, имеет четыре терма – «плохо» (2), «удовлетворительно» (3), «хорошо» (4), «отлично» (5).

Нечеткие множества, формализующие термы выходной переменной θ обозначим соответственно $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5$, где $\hat{\theta}_2 = \langle 0, 0, 10, 30 \rangle$, $\hat{\theta}_3 = \langle 20, 45, 60 \rangle$, $\hat{\theta}_4 = \langle 40, 60, 85 \rangle$, $\hat{\theta}_5 = \langle 70, 90, 100, 100 \rangle$. Графики их функций принадлежности $\mu_{\theta_i}(u), i = 2, 3, 4, 5$, представлены на рисунке.

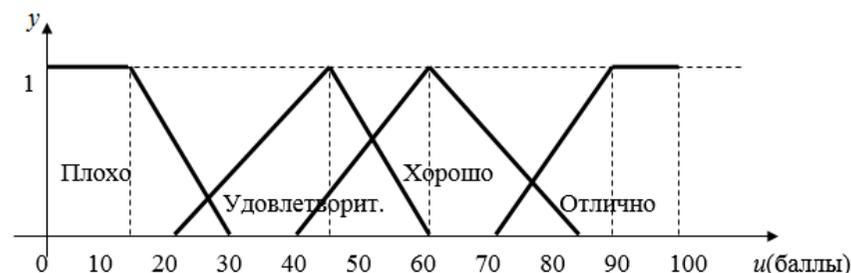


Рис. 4.2.11. Графики функций принадлежности термов оценки θ , $y = \mu_{\theta_i}(u)$.

В качестве двух входных переменных, от которых зависит значение этой выходной переменной, возьмем Θ_t и S – центр тяжести нечеткого множества «среднее время ожидания в очереди» и «стоимость» соответственно.

Первая из них имеет три терма: «быстро», «средне», «долго»; вторая имеет четыре терма: «дешево», «приемлемо», «дорого», «очень дорого». Обозначать эти термы будем соответственно $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ и S_1, S_2, S_3, S_4 .

Нечеткие множества, формализующие термины первой входной переменной, будем обозначать $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_3$ соответственно, $\hat{\Theta}_1 = \langle 0,0,15,30 \rangle, \hat{\Theta}_2 = \langle 20,40,80 \rangle, \hat{\Theta}_3 = \langle 60,100,100 \rangle$; для второй переменной – $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \hat{S}_4, \hat{S}_1 = \langle 0,0,3,6 \rangle, \hat{S}_2 = \langle 4,10,14 \rangle, \hat{S}_3 = \langle 11,14,19 \rangle, \hat{S}_4 = \langle 16,20,50,50 \rangle$. Функции принадлежности этих множеств обозначим соответственно $\mu_{\Theta_i}(t), i=1,2,3$ и $\mu_{S_j}(s), j=1,2,3,4$. Графики этих функций представлены на рисунках 4.2.12 и 4.2.13.

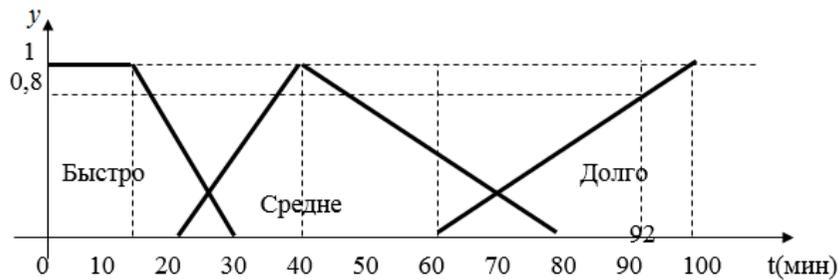


Рис. 4.2.12. Графики функций принадлежности термов переменной $\Theta, y = \mu_{\Theta_i}(t)$.

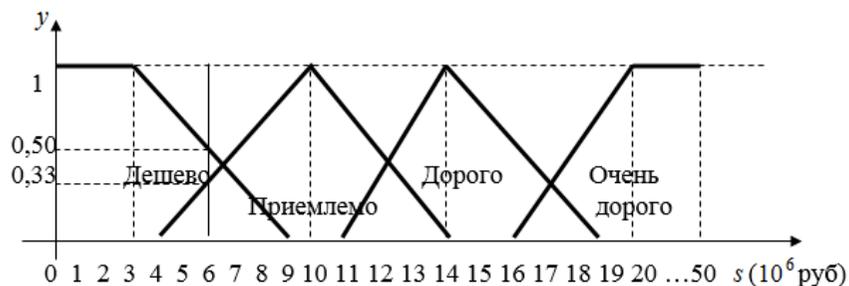


Рис. 4.2.13. Графики функций принадлежности термов функции $S, y = \mu_{S_i}(s)$.

Для определения окончательной оценки качества функционирования рассматриваемой подстанции воспользуемся нечетким логическим выводом с базой знаний, представленной в таблице 4.2.27. Последовательно заполняем, как это уже делалось ранее, таблицы 4.2.28-4.2.31 и по данным таблицы 4.2.31 вычисляем искомый центр тяжести.

Таблица 4.2.27. База знаний для примера 4.2.7.

	S_1 (дешево)	S_2 (приемлемо)	S_3 (дорого)	S_4 (очень дорого)
Θ_1 (быстро)	θ_5	θ_5	θ_4	θ_3
Θ_2 (средне)	θ_4	θ_4	θ_3	θ_3
Θ_3 (долго)	θ_3	θ_3	θ_2	θ_2

Таблица 4.2.28. Значение истинности нечетких высказываний « $\Theta_i = \Theta_i \wedge S = S_j$ » при условии, что $t = 92$ мин. и $s = 6 \cdot 10^6$ руб.

	$\mu_{\Theta_i}(92)$	Стоимость			
		S_1 (дешево)	S_2 (приемлемо)	S_3 (дорого)	S_4 (очень дорого)
$\mu_{S_j}(6 \cdot 10^6)$		0,5	0,33	0	0
Θ_1 (быстро)	0	0	0	0	0
Θ_2 (средне)	0	0	0	0	0
Θ_3 (долго)	0,8	0,5	0,33	0	0

Таблица 4.2.29. Максимальные надежности выходных термов при $t = 92$ и $s = 6 \cdot 10^6$.

при Выходные термы	$\hat{\theta}_2$ - «плохо»	$\hat{\theta}_3$ - «удовлетворительно»	$\hat{\theta}_4$ - «хорошо»	$\hat{\theta}_5$ - «отлично»
Надежность	0	0,50	0	0

Таблица 4.2.30. Надежности того, что числовые значения выходной переменной являются элементами соответствующих нечетких множеств.

Баллы (z)	0	...	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	...	100
$\mu_{\theta_3}(z)$	0	...	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,75	0,50	0,25	0	...	0

Для сокращения объема вычислений значения выходной переменной в таблице 4.2.31 изменяются с шагом в 10 баллов.

Таблица 4.2.31. $\varphi = (\mu_{\Theta_i}(92) \wedge \mu_{S_j}(6 \cdot 10^6)) \wedge \mu_{\theta_3}(z)$.

Баллы (z)	0	...	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	...	100
φ	0	...	0	0,20	0,40	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,25	0	...	0

По данным таблицы 4.2.31 определяем искомый центр тяжести $\Theta_{ц.т.}$, получаем, что

$$\Theta_{ц.т.} = \frac{144,50}{3,35} \cong 43,13 \text{ балла.}$$

Этот результат с максимальной надежностью является элементом нечеткого множества $\hat{\theta}_3$, следовательно, вербальная оценка – «удовлетворительно».

§ 4.3. Системы массового обслуживания с нечетким числом каналов и (или) клиентов

4.3.1. Вводные замечания.

В двух предыдущих параграфах мы рассматривали различные ситуации, связанные с недостатком исходной информации относительно интенсивности входящего потока требований и интенсивности их обслуживания, но число каналов обслуживания и число клиентов предполагалось заданным однозначно, но, однако, информация об этих параметрах систем массового обслуживания тоже может оказаться расплывчатой, нечеткой. В данном параграфе мы рассмотрим некоторые ситуации как раз связанные с нечеткостью при задании числа каналов и (или) числа клиентов. Например,

- число пожарных бригад (машина с личным составом) в районе может существенно меняться в зависимости от разных условий – выход техники в ремонт, болезнь членов бригады, направление части бригад в другой район и т.п.,
- число клиентов (пациентов) в зоне ответственности станции скорой помощи меняется в зависимости от сезона, эпидемиологической ситуации, при возникновении чрезвычайной ситуации и т.д.

Для решения таких задач предлагается следующий подход. Пусть \hat{M} – множество возможных чисел действующих каналов обслуживания и \hat{n} – множество возможных чисел клиентов. При заданном числе каналов $m \in \hat{M}$ и заданном числе клиентов $n \in \hat{n}$ с использованием приемов, изложенных во второй главе или во втором и третьем параграфах этой главы, находится значение некоторого показателя $g(m, n)$, характеризующего в интересующем исследователя смысле рассматриваемую систему при этих числах каналов и клиентов. Находится также надежность $\mu(m, n)$ рассматриваемого сочетания значений числа каналов и числа клиентов. Так рассматриваются все возможные сочетания этих значений. В результате получаем нечеткое множество $\mathfrak{R} = \{g(m, n), \mu(m, n) | m \in \hat{M}, n \in \hat{n}\}$. В качестве итоговой оценки исследуемой системы массового обслуживания предлагается использовать какой-то из результатов дефаззификации нечеткого множества \mathfrak{R} . Мы будем использовать центр тяжести этого \mathfrak{R} .

В этом параграфе рассматриваются системы массового обслуживания, в которых число каналов и (или) число клиентов задается нечетким числом. Интенсивности же поступления требований и их обслуживания предполагаются нечеткими или случайными. Рассматриваются случаи и подходы к их анализу.

Проиллюстрируем сказанное на примерах, сводя решение соответствующих задач к вычислению повторных интегралов или строя алгоритм применения метода Монте-Карло.

Интерес представляют следующие два случая:

- интервалы времени между моментами поступления требований и время обслуживания требований задаются нечеткими числами (см. § 4.1.),
- интенсивность входящего потока требований и интенсивность обслуживания задаются нечеткими числами (см. § 4.2).

В пункте 4.3.2. рассматриваются примеры, связанные с нечетким числом каналов, в пункте 4.3.3. – с нечетким числом каналов и клиентов.

4.3.2. Системы массового обслуживания с нечетким числом каналов.

Рассматривается система массового обслуживания с m одинаковыми по пропускной способности каналами обслуживания. Предполагается, что продолжительности интервалов времени между моментами поступления требований являются элементами нечеткого множества $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$, продолжительности интервалов обслуживания – элементами нечеткого множества $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_{\hat{\tau}}(t)$, число каналов обслуживания – элементом дискретного нечеткого множества \hat{m} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{m}}(m)$. Графики функций принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$ и $\mu_{\hat{\tau}}(t)$ представлены на рисунках 4.1.1. и 4.1.2. Нечеткое множество \hat{m} представляется в форме, описанной в п. 1.1.2. или в форме таблицы 4.3.1.

Таблица 4.3.1. Дискретное нечеткое множество \hat{m} .

m	M_{\min}	$M_{\min} + 1$...	M_{\max}
$\mu_{\hat{m}}(m)$	$\mu_{\hat{m}}(M_{\min})$	$\mu_{\hat{m}}(M_{\min} + 1)$...	$\mu_{\hat{m}}(M_{\max})$

Здесь M_{\min} – минимально возможное и M_{\max} – максимально возможное число каналов.

Требуется оценить качество этой системы массового обслуживания.

Для решения этой задачи предлагается применить подход, упомянутый в п. 4.3.1. Для всех возможных значений m находим значение используемого показателя $g(m)$, характеризующего рассматриваемую систему массового обслуживания. Строится нечеткое множество $\mathfrak{R} = (g(m), \mu(m))$ и вычисляется его центр тяжести. Полученный результат предлагается использовать как искомую оценку рассматриваемой системы обслуживания.

Пример 4.3.1. Рассматривается задача анализа причин возникновения пожара на автомобильной стоянке. В подразделении следственного комитета имеется 3 специалиста по расследованию причин возникновения пожаров. Число m – число следователей, которые могут выехать на этот пожар является элементом нечеткого множества, функция принадлежности $\mu_{\hat{m}}(m)$ которого задается таблицей 4.3.2. Интервалы времени между вызовами на обследование очередной сгоревшей машины являются элементами нечеткого множества $\hat{\lambda} = \langle 8, 15, 20 \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}(t)$ (рис. 4.3.1а), время, затрачиваемое на обследование одного сгоревшего автомобиля, является элементом нечеткого множества $\hat{\tau} = \langle 2, 24, 40 \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_{\hat{\tau}}(t)$ (рис. 4.3.2). Предполагается, что общее число пострадавших машин равно 20. В качестве характеристики работы рассматриваемого подразделения СК используется центр тяжести нечеткого множества «суммарное для всех пострадавших автомобилей время ожидания осмотра при надежности 0,5». Найти значение этой характеристики.

Таблица 4.3.2. Функция принадлежности $\mu_{\hat{m}}(m)$.

m	1	2	3
$\mu_{\hat{m}}(m)$	0,1	1,0	0,8

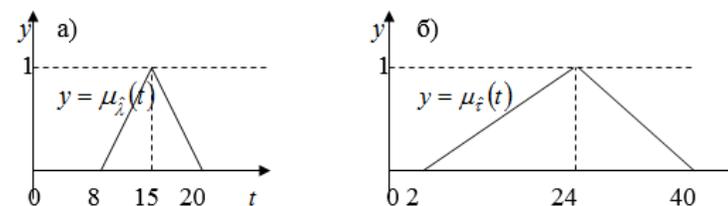


Рис. 4.3.1. Функции принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(t)$ и $y = \mu_{\hat{\tau}}(t)$.

Решение. Опираясь на материал п. 4.1.5 строим нечеткое множество $\mathfrak{R} = \{g(m), \mu(m) | m \in \{1, 2, 3\}\}$ и находим, что:

$$u_\alpha = \alpha(b_\lambda - a_\lambda) + a_\lambda = 0,5(20 - 8) + 8 = 14 \text{ мин.},$$

$$w_\alpha = c_\tau - \alpha(c_\tau - b_\tau) = 40 - 0,5(40 - 24) = 32 \text{ мин. и}$$

$$\sigma_\alpha = w_\alpha - m \cdot u_\alpha = 32 - 14m \text{ мин.}$$

При $m = 3$ получаем, что $\sigma_\alpha = 32 - 42 < 0$, и, следовательно, очереди нет и максимальное время ожидания в очереди равно нулю.

Рассмотрим случай, когда $m = 2$, тогда $\sigma_\alpha = 4$. Из формулы 4.1.15 получаем, что суммарное время нахождения $t(x^\alpha)$ всех требования в очереди с надежностью 0,5 равно

$$t_r(x^\alpha) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot 2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \cdot 4 + 9 \cdot 2 \cdot 4 = 360,$$

тогда среднее время пребывания требования в очереди равно 18 мин.

При $m = 1$ получаем, что $\sigma_\alpha = 18$ и по формуле 4.1.10

$$t_r^1(x^\alpha) = \frac{(n-1)}{2} \sigma = 9,5 \cdot 18 = 171 \text{ мин.}$$

Итак, $\mathfrak{R} = \{(171, 0, 1), (18, 1), 0, 0, 8\}$. Центр тяжести $\Theta_{\mathfrak{R}}$ нечеткого множества

\mathfrak{R} равен $\frac{35,1}{1,9} \cong 18,5$ мин.

Замечание 4.3.1. Возможен еще один подход. Сначала ищется центр тяжести нечеткого множества «число каналов», он равен примерно 1.84. Так как число каналов может быть только целым, то после округления получаем 2 канала. Затем при этом числе каналов находим суммарное для всех пострадавших автомобилей время ожидания осмотра при надежности 0,5. Это время уже было найдено, и оно равно 18 минутам.

Пример 4.3.2. Для подвоза гравия при строительстве участка автомобильной дороги направлено 20 самосвалов. Для погрузки из парка, имеющего три экскаватора, направляются все готовые к работе экскаваторы, но их число к началу очередных рабочих суток переменное, однозначно не определенное и является нечетким.

Здесь каналом обслуживания является экскаватор, клиентом – самосвал, обслуживанием требования является загрузка клиента. Предполагается, что входящий поток требования простейший, но его интенсивность λ (требований в час от одного клиента, не находящегося под погрузкой) является элементом нечеткого множества $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$, функцию принадлежности которого мы будем обозначать $\mu_\lambda(t)$. Время обслуживания предполагается распределенным по экспоненциальному закону с интенсивностью τ (требований в час), которая является элементом нечеткого множества $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$, функцию принадлежности которого будем обозначать $\mu_\tau(t)$. Число экскаваторов m , направляемых на погрузку гравия является элементом нечеткого множества \hat{m} , функция принадлежности $\mu_{\hat{m}}(m)$ которого задается таблицей 4.3.2.

Оценить качество рассматриваемой системы массового обслуживания (системы загрузки самосвалов гравием).

Решение. Интенсивность поступления требований от одного клиента (требований в час от одного клиента, закончившего загрузку) является

элементом нечеткого множества $\lambda = \langle 0,5; 1; 1,5 \rangle$, интенсивность обслуживания (требований в час) задается нечетким множеством $\tau = \langle 5,6,7 \rangle$. Их функции принадлежности обозначим соответственно μ_λ и μ_τ .

При приближенном решении задачи в качестве итоговой оценки рассматриваемой системы предлагается центр тяжести нечеткого множества «среднее время ожидания загрузки», которое будем обозначать \mathfrak{R} :

$$\mathfrak{R} = \{g(m, \lambda, \tau), \mu(m, \lambda, \tau) | m \in \{1, 2, 3\}, \lambda \in \Lambda, \tau \in T\}, \text{ где}$$

$$\Lambda = \{0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50\} \text{ и } T = \{5,0; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0\}.$$

Здесь $g(m, \lambda, \tau)$ – среднее время ожидания в очереди на загрузку при заданных значениях аргументов m, λ, τ ;

$$\mu(m, \lambda, \tau) = \min\{\mu_m(m), \mu_\lambda(\lambda), \mu_\tau(\tau)\}.$$

Так как $\mu(m, \lambda, \tau) = 0$ при $\lambda \in \{1,00; 1,50\}$ или $\tau \in \{5,00; 7,00\}$, то соответствующие слагаемые в формуле для вычисления центра тяжести равны нулю, и мы, рассматривая различные сочетаний интенсивностей такие сочетания учитывать не будем.

Для каждого возможного значения m рассмотрим все возможные, с учетом сказанного, сочетания интенсивностей λ и τ при $\lambda \in \Lambda$ и $\tau \in T$. Будем предполагая, что сутки – достаточно большой интервал для того, чтобы считать его бесконечным, и рассмотрим данную систему обслуживания как систему массового обслуживания с отказами. Для каждого из возможных сочетаний интенсивностей найдем значение показателя $g(m, \lambda, \tau)$, в качестве которого в данном случае используется средняя длина очереди M_0 (формулы 4.2.10 - 4.2.14).

Результаты вычислений приведены в таблицах 4.3.3., 4.3.4., 4.3.5.

Таблица 4.3.3. Средняя длина очереди и надежность

$$g(3, \lambda, \tau) / \mu(3, \lambda, \tau) \text{ при } m = 3.$$

λ	τ		
	5,5	6,0	6,5
0,75	1,00/0,20	0,74/0,4	0,56/0,20
1,00	2,46/0,4	1,90/0,8	1,48/0,4
1,25	4,35/0,20	3,55/0,4	2,88/0,20

Таблица 4.3.4. Средняя длина очереди и надежность $g(2, \lambda, \tau) / \mu(2, \lambda, \tau)$ при $m = 2$.

λ	τ		
	5,5	6,0	6,5
0,75	4,14/0,25	3,35/0,50	2,71/0,25
1,00	7,09/0,50	6,18/1,00	5,35/0,50
1,25	9,21/0,25	8,42/0,50	7,65/0,25

Таблица 4.3.5. Средняя длина очереди и надежность $g(1, \lambda, \tau) / \mu(1, \lambda, \tau)$ при $m = 1$.

λ	τ		
	5,5	6,0	6,5
0,75	11,67/0,025	11,00/0,050	10,34/0,025
1,00	13,50/0,050	13,00/0,100	12,50/0,050
1,25	14,60/0,025	14,20/0,050	13,89/0,025

Искомый центр тяжести равен 4,72 мин., что и является оценкой рассматриваемой системы.

4.3.3. Системы массового обслуживания с нечетким числом каналов и клиентов.

Исследовать работу систем с нечетким числом клиентов или с нечетким числом и клиентов и каналов предлагается аналогично тому, как это делалось в предыдущем пункте.

Для системы, в которой число клиентов является элементом нечеткого множества \hat{n} и принимает значение из рассматриваемого множества \tilde{n} , строится нечеткое множество

$$\mathfrak{R}_n = \{g(m, n), \mu(m, n) | n \in \tilde{n}\},$$

или, в зависимости от свойств интенсивности поступления требований и интенсивности обслуживания, нечеткое множество

$$\mathfrak{R}_n^* = \{g(m, n, \lambda, \tau), \mu(m, n, \lambda, \tau) | n \in \hat{n}, \lambda \in \Lambda, \tau \in T\},$$

где Λ – множество рассматриваемых значений интенсивности входящего потока требований, T – множество рассматриваемых значений интенсивности обслуживания требований. В качестве оценки исследуемой системы предлагается центр тяжести соответствующего множества \mathfrak{R} .

Аналогично предлагается исследовать и системы, в которых и число каналов и число клиентов является нечетким. Соответствующие нечеткие множества, центры тяжести которых предлагается использовать в роли оценок рассматриваемых систем обслуживания, имеют вид:

$$\mathfrak{R}_{m,n} = \{g(m, n), \mu(m, n) | m \in \tilde{m}, n \in \tilde{n}\}$$

или

$$\mathfrak{R}_{m,n}^* = \{g(m, n, \lambda, \tau), \mu(m, n, \lambda, \tau) | m \in \tilde{m}, n \in \hat{n}, \lambda \in \Lambda, \tau \in T\},$$

где \tilde{m} – рассматриваемое множество значений числа каналов m .

Пример 4.3.3. В начале рабочего дня перед выездом на маршрут автобусы проходят технический контроль в парке. Всего в парке имеется десять автобусов. Для их технического контроля имеется один пост. Интервалы времени между моментами прибытия автобусов на пост контроля являются элементами нечеткого множества $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$, время, затрачиваемое на осмотр одного автобуса – элементом нечеткого множества $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$. Число работающих на маршруте автобусов нечеткое и является элементом нечеткого множества \hat{n} , функция принадлежности $\mu_{\hat{n}}(n)$, $n = 1, 2, \dots, 10$, пример которой задан таблицей 4.3.6.

Таблица 4.3.6. Функция принадлежности $\mu_{\hat{n}}(n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_{\hat{n}}(n)$	0	0	0	0	0,1	0,5	0,8	1,0	1,0	0,7

Оценить качество обслуживания на этом пункте контроля.

В качестве требуемой оценки предлагается использовать центр тяжести нечеткого множества \mathfrak{R}_n .

Пример 4.3.4. Перед выездом автобусов в очередной рейс по рассматриваемому маршруту они проходят технический контроль. Всего с утра на маршруты отправляется до десяти автобусов, и они работают в этом составе до конца рабочего дня. Для их технического контроля имеется один пост. Интенсивность λ (автобусы в час) поступления автобусов на пост и интенсивность τ (автобусы в час) их обслуживания являются элементами нечетких множеств $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ и $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$ соответственно. Число работающих на маршруте автобусов нечеткое и является элементом нечеткого множества \hat{n} , пример функции принадлежности $\mu_{\hat{n}}(n)$, $n = 1, 2, \dots, 10$, которого приведен в таблице 4.3.2.

В качестве оценки работы указанного поста технического контроля предлагается использовать центр тяжести нечеткого множества \mathfrak{R}_n^* .

А если еще предположить, что и число постов является нечетким (в случае, если постов больше одного), то предлагается использовать центры тяжести нечетких множеств \mathfrak{R}_n^* и $\mathfrak{R}_{m,n}^*$ соответственно.

§ 4.4. Применение кратных интегралов для вычисления значений показателей работы нечеткой системы массового обслуживания

4.4.1. Постановка задачи.

Рассматривается система массового обслуживания с n требованиями, с одним каналом обслуживания. Предполагается, что

интервалы времени между моментами поступлением требований и интервалы обслуживания являются элементами нечетких множеств $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$ соответственно с возрастающими функциями принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}$ и $\mu_{\hat{\tau}}$, заданными на интервале $[\phi, \varphi]$. Предполагается, что требования обслуживаются по одному разу и все поступившие требования обслуживаются.

Пусть $g(x)$ значение некоторого показателя, характеризующего функционирование рассматриваемой системы при заданной реализации $x \in X$. Через $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$ обозначим нечеткую величину $(g(x), \mu_{\hat{p}}(x))$, т.е. величину, принимающую значение $g(x)$ с надежностью $\mu_{\hat{p}}(x)$ при $x \in X$.

В рамках этого параграфа нас будет интересовать обобщенное значение этого показателя, полученное в результате дефаззификации по методу центра тяжести нечеткой величины $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$. Вычислять это значение предлагается, когда это возможно, с применением кратных интегралов, иначе, прибегая к приближенным вычислениям, используя метод Монте-Карло, речь об этом идет в следующем параграфе.

4.4.2. Использование кратных интегралов.

Пусть $\hat{\lambda}$ и $\hat{\tau}$ нечеткие множества. Как уже отмечалось, их функции принадлежности возрастающие. Будем предполагать, что они определены на интервалах $[a_{\lambda}, b_{\lambda}]$ и $[a_{\tau}, b_{\tau}]$ соответственно. Здесь a_{λ}, b_{λ} – длина соответственно минимального и максимального интервала времени между моментами поступления в рассматриваемую систему массового обслуживания очередных требований, a_{τ}, b_{τ} – минимальное и, соответственно, максимальное время обслуживания одного требования.

Графики этих функций принадлежности представлены на рисунках 4.4.1.а,б.

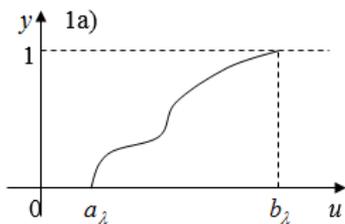


Рис. 4.4.1а. График функции принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(u)$.

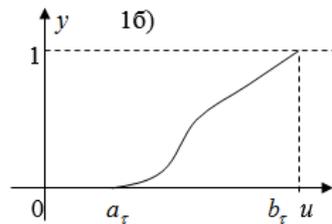


Рис. 4.4.1б. График функции принадлежности $y = \mu_{\hat{\tau}}(u)$.

Отметим, что для разных требований четкие значения интервалов между моментами поступления требований могут быть разными, то же касается и интервалов обслуживания.

Рассмотрим некоторую реализацию $x \in X$. Пусть $\mu_{\hat{p}}(x) = \alpha$, т.е.

$$\alpha = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \mu_{\hat{\lambda}}(x_i), \min_{n \leq i \leq 2n-1} \mu_{\hat{\tau}}(x_i) \right\}.$$

Замечание 4.4.1. Пусть $\alpha = \mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0})$, $i_0 < n$, тогда $x_i \geq x_{i_0}$ для любого $i \leq n-1$, и $\mu_{\hat{\tau}}(x_j) \geq \alpha$ для любого $j \geq n$. Из того, что $\mu_{\hat{\tau}}(x_j) = \alpha$ для некоторого $j \geq n$ следует, что $\mu_{\hat{\tau}}(x_j) = \mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0})$ и $x_j = \mu_{\hat{\tau}}^{-1}(\mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0}))$. Если для некоторого $x_j, j \geq n$, выполняется последнее равенство, то обозначать это x_j будем как $x_j(x_{i_0})$, т.е.

$$x_j(x_{i_0}) = \mu_{\hat{\tau}}^{-1}(\mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0})). \quad (4.4.1)$$

Аналогично, если $\alpha = \mu_{\hat{\tau}}(x_{j_0})$ для некоторого $j_0 \geq n$, то через $x_i(x_{j_0})$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ обозначим длину такого интервала, что $\mu_{\hat{\lambda}}(x_i) = \alpha$, т.е.

$$x_i(x_{j_0}) = \mu_{\hat{\lambda}}^{-1}(\mu_{\hat{\tau}}(x_{j_0})). \quad (4.4.2)$$

Искомый центр тяжести Θ определяется по формуле:

$$\Theta = \frac{A}{B},$$

где

$$A = \int_X \mu_{\hat{p}}(x) \cdot g(x) \cdot dx, \quad (4.4.3)$$

$$B = \int_X \mu_{\hat{p}}(x) \cdot dx. \quad (4.4.4)$$

Отметим, что множество X есть прямое произведение соответствующих отрезков, т.е.

$$X = ([a_{\lambda}, b_{\lambda}])^{n-1} \times ([a_{\tau}, b_{\tau}])^n,$$

и его объем $V(X)$ определяется формулой

$$V(X) = (b_{\lambda} - a_{\lambda})^{n-1} (b_{\tau} - a_{\tau})^n. \quad (4.4.5)$$

Для вычисления кратных интегралов (4.4.3) и (4.4.4) сведем их к суммам повторных интегралов (4.4.6) и (4.4.7), при этом следует учесть, замечание 4.4.1 и равенство

$$\mu_{\hat{p}}(x) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \mu_{\hat{\lambda}}(x_i), \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{\hat{\tau}}(x_{(n-1)+i}) \right\}.$$

Рассмотрим следующие повторные интегралы

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_{\lambda}}^{b_{\lambda}} \left(\int_{x_i}^{b_{\lambda}} \dots \int_{x_n(x_i)}^{b_{\tau}} \dots \int_{x_{2n-1}(x_i)}^{b_{\tau}} \mu_{\hat{p}}(x) g(x) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1}, \dots, dx_{n-1}, dx_n, \dots, dx_{2n-1} \right) dx_i +$$

$$+ \sum_{j=n}^{2n-1} \int_{a_\tau}^{b_\tau} \left(\int_{x_1(x_j)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_{n-1}(x_j)}^{b_\lambda} \int_{x_j}^{b_\tau} \dots \int_{x_j}^{b_\tau} \mu_{\tilde{p}}(x) g(x) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_{2n-1} \right) dx_j, \quad (4.4.6)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{B} = & \sum_{i=1}^n \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \left(\int_{x_i}^{b_\lambda} \dots \int_{x_i}^{b_\lambda} \int_{x_n(x_i)}^{b_\tau} \dots \int_{x_{2n-1}(x_i)}^{b_\tau} \mu_{\tilde{p}}(x) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1}, \dots, dx_{n-1}, dx_n, \dots, dx_{2n-1} \right) dx_i + \\ & + \sum_{j=n}^{2n-1} \int_{a_\tau}^{b_\tau} \left(\int_{x_1(x_j)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_{n-1}(x_j)}^{b_\lambda} \int_{x_j}^{b_\tau} \dots \int_{x_j}^{b_\tau} \mu_p(x) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n, \dots, dx_{j-1}, dx_{j+1}, \dots, dx_{2n-1} \right) dx_j \quad (4.4.7) \end{aligned}$$

Заметим, что вычисление значений \tilde{A} и \tilde{B} может оказаться слишком трудоемким.

Во-первых, функции принадлежности должны быть достаточно “хорошими”. Если, например, функция принадлежности $\mu_{\hat{\lambda}}$ на интервале $[a_\lambda, b_\lambda]$ возрастает, а на интервале $[b_\lambda, c_\lambda]$ убывает, то это приводит к необходимости рассматривать 2^{n-1} сочетаний значений длин интервалов при заданном α . Аналогичная ситуация и в случае интервалов обслуживания. Поэтому мы с самого начала предположили монотонное возрастание этих функций принадлежности, что конечно заметно сужает область применения предлагаемой модели.

Заметим, что вычислительная сложность задачи по вычислению этих интегралов в общем случае растет как экспонента от числа требований.

Во-вторых, функция $g(x)$ тоже должна быть “хорошей”. Например, при вычислении времени ожидания в очереди тоже возникает необходимость различать два случая: интервал между моментами поступления двух требований не превосходит или превосходит интервал обслуживания первого из них. Это тоже порождает 2^n различных ситуаций и, соответственно, различных повторных интегралов.

Вернемся к интегралам A и B (формулы 4.4.3, 4.4.4). Покажем, что область интегрирования кратного интеграла $A(B)$ и объединение областей интегрирования повторных интегралов в (4.4.6) ((4.4.7)) совпадают, и что области интегрирования слагаемых в этих формулах не имеют общих внутренних точек. Из этого будет следовать равенство меры (объема) области интегрирования кратного интеграла (4.4.3) ((4.4.4)) и объединения мер областей интегрирования кратных интегралов из (4.4.6) ((4.4.7)).

Заметим, что области интегрирования у интегралов в (4.4.3) и в (4.4.4) одинаковые, и объединения областей интегрирования в (4.4.6) и (4.4.7) тоже одинаковые.

Пусть $x \in X$ и i_0 такой номер, что $\mu_p(x) = \min\{\mu_{\hat{\lambda}}(x_{i_0}), \mu_{\hat{\tau}}(y_{i_0})\} = \alpha_0$. Обозначим (см. (4.4.1), (4.4.2)):

$$u(\alpha) = \mu_{\hat{\lambda}}^{-1}(\alpha) \text{ и } v(\alpha) = \mu_{\hat{\tau}}^{-1}(\alpha).$$

Тогда $x_i \geq u(\alpha_0)$ для $i=1,2,\dots,n-1$, и $x_j \geq v(\alpha_0)$ для $j=n,n+1,\dots,2n-1$.

Следовательно, x принадлежит области интегрирования одного из повторных интегралов в (4.4.6), а значит и их объединению. Обратное включение очевидно.

Рассмотрим частный случай: будем предполагать, что $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, b_\lambda \rangle$ – нечеткое число (нечеткое множество) «немного меньше b_λ », $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, b_\tau \rangle$ – нечеткое число (нечеткое множество) «немного меньше b_τ », тогда соответствующие функции принадлежности задаются формулами (4.4.8) и (4.4.9), их графики представлены на рисунках 4.4.2а и 4.4.2б:

$$\mu_{\hat{\lambda}}(u) = \frac{1}{b_\lambda - a_\lambda} (u - a_\lambda), u \in [a_\lambda, b_\lambda], \quad (4.4.8)$$

$$\mu_{\hat{\tau}}(u) = \frac{1}{b_\tau - a_\tau} (u - a_\tau), u \in [a_\tau, b_\tau]. \quad (4.4.9)$$

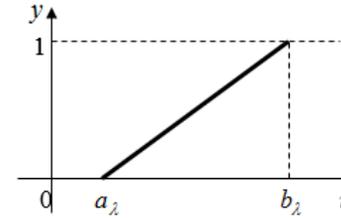


Рис.4.4.2а. График функции принадлежности $y = \mu_{\hat{\lambda}}(u)$.

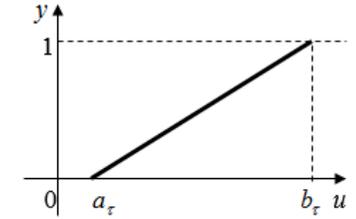


Рис.4.4.2б. График функции принадлежности $y = \mu_{\hat{\tau}}(u)$.

Из (4.4.8) и (4.4.9) получаем, что

$$x_j(x_i) = \frac{b_\tau - a_\tau}{b_\lambda - a_\lambda} \cdot (x_i - a_\lambda) + a_\tau, \quad i=1,2,\dots,n-1, j=n,n+1,\dots,2n-1 \quad (4.4.10)$$

и

$$x_i(x_n) = \frac{b_\lambda - a_\lambda}{b_\tau - a_\tau} \cdot (x_n - a_\tau) + a_\lambda, \quad i=1,2,\dots,n-1, j=n,n+1,\dots,2n-1. \quad (4.4.11)$$

Вычислим объем (меру) объединения областей интегрирования повторных интегралов из (4.4.7). Рассмотрим первое слагаемое из первой суммы в (4.4.7) и определим объем его области интегрирования, для этого рассмотрим повторный интеграл

$$B_1 = \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_{2n-1}(x_1)}^{b_\tau} dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-1} \right) dx_1$$

и сделаем в нем замену переменных, положив $\alpha = \mu_{\hat{\lambda}}(x_1)$, откуда, учитывая (4.4.8) - (4.4.11), получим:

$$x_1 = (b_\lambda - a_\lambda) \cdot \alpha + a_\lambda, \quad dx_1 = (b_\lambda - a_\lambda) \cdot d\alpha, \quad (4.4.12)$$

$$x_j(x_1) = \frac{b_\tau - a_\tau}{b_\lambda - a_\lambda} \cdot (x_1 - a_\lambda) + a_\tau = (b_\tau - a_\tau) \cdot \alpha + a_\tau. \quad (4.4.13)$$

Тогда, учитывая (4.4.12) и (4.4.13), получим

$$\begin{aligned} B_1 &= (b_\lambda - a_\lambda) \int_0^1 \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_1}^{b_\tau} \int_{x_1}^{b_\tau} \dots \int_{x_{2n-1}(x_1)}^{b_\tau} dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-1} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda) \int_0^1 \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_1}^{b_\tau} \int_{x_{2n-1}(x_1)}^{b_\tau} x_{2n-1}^{b_\tau} dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-2} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda) \int_0^1 \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_1}^{b_\tau} \int_{x_{2n-1}(x_1)}^{b_\tau} (b_\tau - (b_\tau - a_\tau) \cdot \alpha + a_\tau) dx_2 \dots dx_{2n-2} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda) \int_0^1 \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_1}^{b_\tau} \int_{x_{2n-1}(x_1)}^{b_\tau} (b_\tau - a_\tau)(1 - \alpha) dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-2} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda)(b_\tau - a_\tau) \int_0^1 (1 - \alpha) \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_1}^{b_\tau} \int_{x_{2n-1}(x_1)}^{b_\tau} dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-2} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda)(b_\tau - a_\tau)^n \int_0^1 (1 - \alpha)^n \left(\int_{x_1}^{b_\lambda} \int_{x_1}^{b_\lambda} \dots \int_{x_1}^{b_\tau} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n \int_0^1 (1 - \alpha)^{2n-2} d\alpha = \frac{1}{2n-1} \cdot (b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } B_1 = \frac{1}{2n-1} \cdot (b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n.$$

Отметим, что объем (мера) области интегрирования у любого другого слагаемого из первой суммы в (4.4.7) равна B_1 .

Аналогично вычисляем и B_2 – меры (объемы) областей слагаемых второй суммы из (4.4.7).

Рассмотрим повторный интеграл

$$B_2 = \int_{a_\tau}^{b_\tau} \left(\int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_n}^{b_\tau} \int_{x_n}^{b_\tau} \dots dx_2 \dots dx_{n-1} dx_{n+1} \dots dx_{2n-1} \right) dx_n$$

и сделаем в нем замену переменных, положив $\alpha = \mu_\tau(x_n)$, откуда, учитывая (4.4.8) - (4.4.13), получим:

$$x_n = (b_\tau - a_\tau) \cdot \alpha + a_\tau, \quad dx_n = (b_\tau - a_\tau) \cdot d\alpha, \quad (4.4.14)$$

$$x_i(x_n) = \frac{b_\lambda - a_\lambda}{b_\tau - a_\tau} \cdot (x_n - a_\tau) + a_\lambda = (b_\tau - a_\tau) \cdot \alpha + a_\lambda. \quad (4.4.15)$$

Тогда, учитывая (4.4.14) и (4.4.15), получим

$$\begin{aligned} B_2 &= (b_\tau - a_\tau) \int_0^1 \left(\int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_n}^{b_\tau} \int_{x_n}^{b_\tau} \dots dx_1 \dots dx_{n-1} dx_{n+1} \dots dx_{2n-1} \right) d\alpha = \\ &= (b_\tau - a_\tau) \int_0^1 \left(\int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_n}^{b_\tau} \int_{x_n}^{b_\tau} \dots x_{2n-1}^{(b_\tau - a_\tau) \cdot \alpha + a_\tau} dx_1 \dots dx_{2n-2} \right) d\alpha = \\ &= (b_\tau - a_\tau)^2 \int_0^1 (1 - \alpha) \left(\int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_n}^{b_\tau} \int_{x_n}^{b_\tau} \dots dx_1 \dots dx_{n-1} dx_{n+1} \dots dx_{2n-2} \right) d\alpha = \\ &= (b_\tau - a_\tau)^n \int_0^1 (1 - \alpha)^{n-1} \left(\int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \int_{x_1(x_n)}^{b_\lambda} \dots \int_{x_n}^{b_\tau} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) d\alpha = \\ &= (b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n \int_0^1 (1 - \alpha)^{2n-2} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2n-1} \cdot (b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } B_2 = \frac{1}{2n-1} \cdot (b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n.$$

Отметим, что объем (мера) области интегрирования у любого другого слагаемого из второй суммы в (4.4.7) равна B_2 . Тогда объем объединения областей интегрирования всех повторных интегралов из (4.4.7) равен $(b_\lambda - a_\lambda)^{n-1} (b_\tau - a_\tau)^n$, что совпадает с объемом множества X (см. (4.4.5)). Поэтому

$$\Theta = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}.$$

Пример 4.4.1. Система массового обслуживания имеет один канал обслуживания и за один цикл работы должна обслужить 2 требования. Предполагается, что интервалы времени (в часах) между моментами поступления требования и время их обслуживания задаются нечеткими числа $\hat{\lambda} = \langle 10, 20, 20 \rangle$, $\hat{\tau} = \langle 20, 30, 30 \rangle$. В качестве критерия эффективности организации рассматриваемой системы предлагается использовать центр тяжести нечеткого числа «суммарное время ожидания в очереди за один цикл».

Итак, $\hat{\lambda} = \langle 10, 20, 20 \rangle$ и $\hat{c} = \langle 20, 30, 30 \rangle$, тогда

$$\mu_{\hat{\lambda}}(t) = 0,1 \cdot t - 1 \text{ и } \mu_{\hat{c}}(t) = 0,1 \cdot t - 2 \quad (4.4.16)$$

Так как $0,1x - 1 = 0,1y - 2$, то $0,1x - 1 = 0,1y - 2$ и

$$y(x) = x + 10, \quad x(y) = y - 10.$$

Заметим, что суммарное время ожидания в очереди за один цикл равно $x_2 - x_1 \geq 0$, и подынтегральная функция из (4.4.6) не отрицательная.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \int_{10}^{20} \left(\int_{x_1+10}^{30} \left(\int_{x_1+10}^{30} (0,1x_1 - 1)(x_2 - x_1) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 + \\ &+ \int_{20}^{30} \left(\int_{x_2-10}^{20} \left(\int_{x_2}^{30} (0,1x_2 - 2)(x_2 - x_1) dx_3 \right) dx_1 \right) dx_2 + \\ &+ \int_{20}^{30} \left(\int_{x_3-10}^{20} \left(\int_{x_3}^{30} (0,1x_3 - 2)(x_2 - x_1) dx_2 \right) dx_1 \right) dx_3. \\ A_1 &= \int_{10}^{20} \left(\int_{x_1+10}^{30} \left(\int_{x_1+10}^{30} (0,1x_1 - 1)(x_2 - x_1) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{10}^{20} (0,1x_1 - 1) \left(\int_{x_1+10}^{30} \left(\int_{x_1+10}^{30} (x_2 - x_1) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{10}^{20} (0,1x_1 - 1) \left(\int_{x_1+10}^{30} (x_2 - x_1)(x_3)_{x_1+10}^{30} dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{10}^{20} (0,1x_1 - 1) \left(\int_{x_1+10}^{30} (x_2 - x_1)(20 - x_1) dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{10}^{20} (0,1x_1 - 1)(20 - x_1) \left(\frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 \right) \Big|_{x_1+10}^{30} dx_1 = \\ &= \int_{10}^{20} \left(-0,1x_1^2 + 3x_1 - 20 \right) \left(\frac{x_1^2}{2} - 30x_1 + 400 \right) dx_1 = \\ &= \int_{10}^{20} \left(-0,05x_1^4 + 4,5x_1^3 - 140x_1^2 + 1800x_1 - 8000 \right) dx_1 = \\ &= \left(-0,01x_1^5 + 1,125x_1^4 - \frac{140}{3}x_1^3 + 900x_1^2 - 8000x_1 \right) \Big|_{10}^{20} \approx 1081. \end{aligned}$$

$$A_2 = \int_{20}^{30} \left(\int_{x_2-10}^{20} \left(\int_{x_2}^{30} (0,1x_2 - 2)(x_2 - x_1) dx_3 \right) dx_1 \right) dx_2 \approx 583,$$

$$A_3 = \int_{20}^{30} \left(\int_{x_3-10}^{20} \left(\int_{x_3}^{30} (0,1x_3 - 2)(x_2 - x_1) dx_2 \right) dx_1 \right) dx_3 \approx 833.$$

Тогда $\tilde{A} \approx 1081 + 583 + 833 = 2497$.

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \int_{10}^{20} \left(\int_{x_1+10}^{30} \int_{x_1+10}^{30} (0,1x_1 - 1) dx_2 dx_3 \right) dx_1 + \int_{20}^{30} \left(\int_{x_2-10}^{20} \int_{x_2}^{30} (0,1x_2 - 2) dx_3 dx_1 \right) dx_2 + \\ &+ \int_{20}^{30} \left(\int_{x_3-10}^{20} \int_{x_3}^{30} (0,1x_3 - 2) dx_2 dx_1 \right) dx_3 = B_1 + B_2 + B_3 \approx 83 + 83 + 83 = 249. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Theta = \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \approx \frac{2497}{249} \approx 10,03.$$

Следовательно, среднее, в смысле «центра тяжести», время ожидания в очереди равно 10,03 часа.

Как уже отмечалось, в случаях, когда соответствующие интервалы задаются нечеткими треугольными числами $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ и $\hat{c} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$, где $b_\lambda < c_\lambda$ и $b_\tau < c_\tau$, возникает необходимость различать ситуации, в которых продолжительность интервала между прибытием требований меньше b_λ и больше b_λ , аналогично, когда время обслуживания меньше b_τ и больше b_τ . Это порождает большие вычислительные сложности. Однако, на практике, не редки ситуации, когда число требований не велико, скажем, не больше десятка. Тогда число подлежащих учету интервалов не больше 20. А рассмотрение $2^{20} \cong 1000000$ случаев в настоящее время, а тем более в будущем, представляется вполне реальным.

Если в аналогичной рассмотренному примеру задаче допустить возможность нарушение условия о том, что максимальный интервал между требованиями меньше минимального интервала обслуживания, то вновь возникает необходимость рассмотрения до 2^{2^n} разных случаев, отличающихся друг от тем, имеется ли или нет к моменту прибытия очередного требования свободный канал.

§ 4.5. Системы массового обслуживания и метод Монте-Карло

4.5.1. Вводные замечания.

В предыдущем параграфе мы определяли значения показателей качества организации СМО, сводя соответствующие кратные интегралы к повторным интегралам, но для многих ситуаций этот подход требует

слишком большого объема вычисления. Следует отметить, что для задания нечетких чисел, описывающих продолжительности соответствующих временных интервалов, необходимо располагать определенной информацией, получаемой от экспертов, что влечет определенные погрешности в результатах моделирования. В связи со сказанным предложенный в §3.2. подход, давая при заданных нечетких характеристиках точный ответ, не может дать такового для рассматриваемой задачи. Поэтому представляется вполне приемлемым использовать приближенные методы вычисления возникающих интегралов. Мы воспользуемся методом Монте-Карло.

Пусть рассматривается некоторая величина g и пусть требуется найти ее значение α . Применяя метод Монте-Карло, построим такую случайную величину ξ , что ее математическое $M(\xi) = h$ и проведем с ней n независимых опытов, фиксируя в каждом из них значение, которая принимает эта случайная величина. В качестве приближенного значения математического ожидания этой случайной величины предлагается использовать среднее арифметическое из полученных в опытах значений

$$\bar{h} \cong \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n h_i, \quad (4.5.1)$$

где $h_i, i=1,2,\dots,n$, – значение случайной величины ξ в i -м опыте.

Для получения результата с небольшой погрешностью требуется провести достаточно много опытов (см. п. 3.2.2), но при наличии вычислительной техники возникающий объем вычислений оказывается вполне приемлемым.

4.5.2. Метод Монте-Карло и задачи поиска центра тяжести нечеткого множества значений показателя эффективности систем массового обслуживания с нечеткими исходными данными.

Как и в предыдущем параграфе в – качестве обобщенной характеристики задачи \hat{p} предлагается использовать результат дефаззификации нечеткого множества $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$ – «качество реализации x в задаче \hat{p} ». Там же в качестве такого показателя предлагалось использовать центр тяжести, который был обозначен $\Omega(\hat{p})$. Центр тяжести

вычисляется по формуле $\Omega(\hat{p}) = \frac{A}{B}$, где

$$A = \int_X \mu_{\hat{p}}(x) \cdot g(x) \cdot dx, \quad (4.5.2)$$

$$B = \int_X \mu_{\hat{p}}(x) \cdot dx. \quad (4.5.3)$$

Напомним, что значение функции принадлежности $\hat{p}(x)$ задачи \hat{p} при заданном $x \in X$ определяется равенством (см. обозначения и формулу (4.1.3)):

$$\hat{p}(x) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \mu_{\lambda}(x_i), \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{\tau}(y_i) \right\}. \quad (4.5.4)$$

Вычислим приближенные значения интегралов в (4.5.2) и (4.5.3), применяя метод Монте-Карло.

Рассмотрим множество X и $(2n-1)$ -мерную случайную величину

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

равномерно распределенную на множестве X . Случайная величина $\xi_i, i=1,2,\dots,n-1$, равномерно распределена на отрезке $[a_{\lambda}, c_{\lambda}]$, случайная величина $\eta_i, i=1,2,\dots,n$, равномерно распределена на отрезке $[a_{\tau}, c_{\tau}]$.

Плотность распределения $p_{\xi_i}, i=1,2,\dots,n-1$, задается следующим равенством:

$$p_{\xi_i}(x_i) = \frac{1}{c_{\lambda} - a_{\lambda}}.$$

Плотность распределения $p_{\eta_i}, i=1,2,\dots,n$, задается равенством:

$$p_{\eta_i}(y_i) = \frac{1}{c_{\lambda} - a_{\lambda}}.$$

Произведение $\mu_{\hat{p}} \cdot g$ и показатель $\mu_{\hat{p}}$ будем рассматривать как случайные величины, зависящие от случайной величины ξ , с плотностями $p_{\mu_{\hat{p}}g}(x) = \xi(x)$ и $p_{\mu_{\hat{p}}}(\xi)$ соответственно, т.е. они имеют на X равномерный закон распределения. В силу сказанного

$$p_{\mu_{\hat{p}}g}(x) = p_{\mu_{\hat{p}}}(x) = p_{\xi}(x) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{\xi_i}(x_i) \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n p_{\eta_i}(y_i) \right) = \frac{1}{(c_{\lambda} - a_{\lambda})^{n-1}} \cdot \frac{1}{(c_{\tau} - a_{\tau})^n}.$$

Из (3.2.21) следует, что

$$A = V(X) \cdot M(\mu_{\hat{p}} \cdot g), B = V(X) \cdot M(\mu_{\hat{p}}).$$

Тогда

$$\Omega(\hat{p}) = \frac{A}{B} = \frac{M(\mu_{\hat{p}} \cdot g)}{M(\mu_{\hat{p}})}. \quad (4.5.5)$$

Учитывая (3.2.16) и (4.5.5), получаем, что

$$\Omega(\hat{p}) \cong \frac{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \mu_{\hat{p}}(x^k) \cdot g(x^k)}{\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \mu_{\hat{p}}(x^k)}. \quad (4.5.6)$$

Здесь и далее x^k – вектор значений временных интервалов в k -м испытании:

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n-1}^k, y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k).$$

Приведем алгоритм применения метода Монте-Карло для вычисления приближенного значения центра тяжести (4.5.6).

1. Задать первоначальное значение числа испытаний N , скажем 200.
2. Задать допустимое значение погрешности Δ_Ω при вычислении значения $\Omega(\hat{p})$ и доверительную вероятность p_Ω – вероятность, с которой приближенное значение вычисляемого показателя должно быть не больше этой погрешности.

3. Провести N испытаний:

а) Положить $k=1$,

б) смоделировать, применяя датчик равномерно распределенных случайных чисел и зависимости $10000x_i^k = a_\lambda + r(c_\lambda - a_\lambda)$ для $i=1,2,\dots,n-1$, и $10000y_i^k = a_\tau + r(c_\tau - a_\tau)$, $i=1,2,\dots,n-1$, (здесь r – соответствующее случайное число, свое для каждого x_i и каждого y_i), значения $x_i^k, i=1,2,\dots,n-1$, и значения $y_i^k, i=1,2,\dots,n$, т.е. задать реализацию x^k .

в) Найти $\alpha_i^k, i=1,2,\dots,n-1$, – значения надежности длин интервалов между моментами прибытия требований:

$$\alpha_i^k = \begin{cases} \frac{x_i^k - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda}, & \text{если } a_\lambda \leq x_i^k \leq b_\lambda, \\ \frac{c_\lambda - x_i^k}{c_\lambda - b_\lambda}, & \text{если } b_\lambda \leq x_i^k \leq c_\lambda. \end{cases}$$

Найти $\beta_i^k, i=1,2,\dots,n$, – значения надежности длин интервалов обслуживания:

$$\beta_i^k = \begin{cases} \frac{y_i^k - a_\tau}{b_\tau - a_\tau}, & \text{если } a_\tau \leq y_i^k \leq b_\tau, \\ \frac{c_\tau - y_i^k}{c_\tau - b_\tau}, & \text{если } b_\tau \leq y_i^k \leq c_\tau. \end{cases}$$

При выполнении пунктов 3б) и 3в) формируется массив $\tilde{X}(2,2m)$, где $\tilde{X}(1,i), i=1,2,\dots,n-1$, – интервалы времени между моментами прибытия соответствующих требований; $\tilde{X}(1,n+i), i=1,\dots,n$ – время обслуживания соответствующих требований; $\tilde{X}(2,i), i=1,2,\dots,2n-1$, – надежность соответствующего временного интервала.

г) Найти надежность $\mu_{\hat{p}}(x^k)$ рассматриваемой реализации x^k , в соответствии с формулой (4.5.4):

$$\mu_{\hat{p}}(x^k) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \alpha_i^k; \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i^k \right\}. \quad (4.5.7)$$

д) Вычислить значения $g(x^k)$ и $\mu_{\hat{p}}(x^k) \cdot g(x^k)$. Значение показателя $g(x^k)$ вычисляется по алгоритму, зависящему от задачи.

е) Если $k < N$, то увеличить k на единицу и перейти к пункту 3б, иначе перейти к пункту 4.

4. Определить выборочные средние $\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g)$ и $\bar{M}(\mu_{\hat{p}})$ и выборочные дисперсии $\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g)$ и $\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}})$:

$$\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_{\hat{p}}(x_i) \cdot g(x_i), \quad \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_{\hat{p}}(x_i),$$

$$\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g) = \frac{1}{N} \sum (\mu_{\hat{p}}(x_i)g(x_i) - \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g))^2,$$

$$\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}) = \frac{1}{N} \sum (\mu_{\hat{p}}(x_i) - \bar{M}(\mu_{\hat{p}}))^2.$$

5. Определить абсолютную погрешность числителя Δ_u и знаменателя Δ_l дроби (4.5.5) при доверительной вероятности, равной p_Ω , считая, что дисперсия рассматриваемых случайных величин практически равна их выборочным дисперсиям:

$$\Delta_u^2 \leq \frac{\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g)}{N(1-p_\Omega)} \quad \text{и} \quad \Delta_l^2 \leq \frac{\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}})}{N(1-p_\Omega)}$$

б) Определить абсолютную погрешность Δ_Ω^N :

а) Определить максимально и минимально возможные при доверительной вероятности p_Ω значения A_{\max} и A_{\min} для числителя и B_{\max} и B_{\min} для знаменателя дроби (4.5.5):

$$A_{\max} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) + \Delta_u, \quad A_{\min} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) - \Delta_u, \\ B_{\max} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) + \Delta_l, \quad B_{\min} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) - \Delta_l.$$

б) Определить максимально и минимально возможные при доверительной вероятности p_Ω значения Ω_{\max} и Ω_{\min} дроби (22):

$$\Omega_{\max} = \frac{A_{\max}}{B_{\min}} \quad \text{и} \quad \Omega_{\min} = \frac{A_{\min}}{B_{\max}}.$$

в) Определить значение Δ_Ω^N :

$$\Delta_\Omega^N = \max \left\{ \Omega_{\max} - \frac{\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g)}{\bar{M}(\mu_{\hat{p}})}, \frac{\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g)}{\bar{M}(\mu_{\hat{p}})} - \Omega_{\min} \right\}.$$

Заметим, что с вероятностью p_Ω абсолютная погрешность вычислений не превосходит Δ_Ω^N .

7. Если $\Delta_{\Omega}^N > \Delta_{\Omega}$, то увеличить N (в два раза) и перейти к пункту 3а
 8. Задача решена.

Отметим, что при выполнении пункта 5 можно опираться на центральную предельную теорему и определять погрешность Δ по формуле (3.2.8).

4.5.3. Критерий эффективности – суммарное время, проведенное требованиями в очереди.

Прежде всего, изложим алгоритм вычисления значения показателя $g(x^k)$, когда в качестве него используется суммарное время, проведенное требованиями в очереди, предполагая, для простоты, что рассматриваемая система массового обслуживания имеет всего один канал обслуживания.

Указанное время определяется для каждой смоделированной реализации. Рассмотрим реализацию x . В ходе вычислений используется массив \tilde{X} размерами $2 \times n$. Промежуточные вычисления будем хранить в массиве G размерами $5 \times n$, представленном таблицей 4.5.1 (кроме ее первой строки). Здесь:

$$\begin{aligned} G(1,1) &= 0, \quad G(1,i) = G(1,i-1) + X(1,i), \quad i = 1, 2, \dots, 2n-1; \\ G(2,1) &= 0, \quad G(2,i) = \max\{G(1,i), G(4,i-1)\}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1; \\ G(3,i) &= \tilde{X}(1, n-1+i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ G(4,i) &= G(2,i) + G(3,i), \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ G(5,i) &= G(2,i) - G(1,i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таблица 4.5.1. Расчет суммарного времени ожидания начала обслуживания по данным первого испытания (см. таблицу 4.5.2).

Номер требования	1	2	3
Момент прибытия	0	0,679	1,933
Момент начала обслуживания	0	1,115	2,672
Время обслуживания	1,115	1,557	2,358
Момент окончания обслуживания	1,115	2,672	5,030
Время ожидания обслуживания	0	0,436	0,739

1. Заполняем первый столбец, соответствующий первому поступившему требованию. Это требование прибывает в нулевой момент времени. Так как очереди нет, то время окончания обслуживания совпадает с временем обслуживания, равным 1,115, и время ожидания в очереди для этого требования равно нулю.

2. Второе требование прибывает через 0,679 мин. после первого и, значит, момент его прибытия равен 0,679. Если бы очереди не было, то оно сразу начало бы обслуживаться и т.д. Но в рассматриваемом случае очередь есть, и канал обслуживания освобождается через 1.115 мин.

Следовательно, второе требование начинает обслуживаться в момент 1.115. Так как время его обслуживания равно 1,557 мин., то момент окончания его обслуживания (момент освобождения канала) равен 2,672. Время, проведенное им в очереди равно 1,115 - 0,679 = 0,436 мин.

3. Аналогично заполняется последний столбец.

4. Искомое значение показателя $g(x^1)$ равно сумме элементов последней строки таблицы 3.3.2: $g(x^1) = 0,436 + 0,739 = 1,175$ мин.

Пример 4.5.1. СМО имеет один канал обслуживания, $\lambda = \langle 0,1,2 \rangle$ минут, $\tau = \langle 0,1,0,5,2,5 \rangle$ минут. Рассматривается процесс обслуживания трех требований. Найти центр тяжести нечеткого множества «суммарное время ожидания в очереди», погрешность вычислений с вероятностью 0,9 не должна превосходить двух минут.

Решение.

1. Положим $N=10$ (для наглядности мы проведем эти десять испытаний вручную).

2. Допустимое значение погрешности $\Delta_{\Omega} = 2$. Чтобы доверительная вероятность, с которой вычисляются приближенные значения дроби (4.5.5) была не меньше 0,8 достаточно, чтобы вероятности ошибок при вычислении числителя и знаменателя дроби (4.5.6) были не меньше 0,9.

3. Провести N испытаний, их результаты приведены в таблице 4.5.2. В этой таблице использованы следующие обозначения:

k – номер испытания,

$i=1$ – данные об интервале времени между моментами поступления первого и второго требований,

$i=2$ – данные об интервале времени между моментами поступления второго и третьего требований,

$j=1,2,3$ – данные об интервалах времени обслуживания соответствующих требований,

r – случайное число из таблицы 1 Приложения,

x^k – реализация, рассматриваемая в испытании с номером k ,

α_i^k, β_i^k – значения соответствующих функций принадлежности при значениях их аргументов, взятых из строки x^k ,

$\mu_{\tilde{p}}(x^k)$ определяется по формуле (24),

$g(x^k)$ – суммарное затраты времени на ожидание обслуживания, они определяются в соответствии с таблицей 4.5.3.

Таблица 4.5.2. Результаты 10 испытаний при $\lambda = \langle 0,1,2 \rangle$ минут, $\tau = \langle 0,1, 0,5, 2,5 \rangle$.

k	i, j	$i=1$	$i=2$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\mu_{\hat{p}}(x^k)$	$g(x^k)$	$\mu_{\hat{p}}(x^k) \cdot g(x^k)$
1	r	3393	6270	4228	6069	9407	0,072	1,175	0,085
	x^k	0,679	1,254	1,115	1,557	2,358			
	α_i^k, β_i^k	0,321	0,746	0,693	0,472	0,072			
2	r	9108	2330	2157	7416	0398	0,015	1,414	0,021
	x^k	1,821	0,466	0,618	1,880	0,196			
	α_i^k, β_i^k	0,179	0,466	0,941	0,310	0,240			
3	r	7891	3590	2502	5945	3402	0,359	0,809	0,290
	x^k	1,578	0,718	0,701	1,527	0,916			
	α_i^k, β_i^k	0,422	0,718	0,900	0,487	0,792			
4 вер	r	9085	6307	6910	9174	1753	0,099	1,042	0,193
	x^k	1,817	1,261	1,758	2,301	0,521			
	α_i^k, β_i^k	0,183	0,740	0,371	0,099	0,990			
5 вер	r	2638	2908	6868	0398	5496	0,240	2,054	0,493
	x^k	0,528	0,582	1,748	0,196	1,419			
	α_i^k, β_i^k	0,528	0,582	0,376	0,240	0,541			
6	r	1313	8338	0623	8600	4950	0,063	0,417	0,026
	x^k	0,263	1,668	0,250	2,165	1,288			
	α_i^k, β_i^k	0,263	0,32	0,375	0,168	0,606			
7	r	3897	4202	3814	3505	1599	0,263	0,101	0,027
	x^k	0,779	0,840	1,015	0,941	0,484			
	α_i^k, β_i^k	0,779	0,840	0,743	0,780	0,960			
8	r	4380	9543	1646	2850	8415	0,081	0	0
	x^k	0,876	1,909	0,405	0,784	2,120			
	α_i^k, β_i^k	0,876	0,091	0,763	0,858	0,190			
9	r	1618	9309	7909	0874	0401	0,100	1,796	0,180
	x^k	0,324	1,862	1,998	0,310	0,196			
	α_i^k, β_i^k	0,324	0,138	0,251	0,525	0,240			
10	r	4858	4676	7363	9141	6133	0,103	3,149	0,324
	x^k	0,972	0,935	1,867	2,294	1,572			
	α_i^k, β_i^k	0,972	0,935	0,317	0,103	0,464			
							1,394		1,639 1,209
	Мат.ож						0,139		0,164
							0,105		16,200
	Дисп						0,011		0,024

а) Положить $k=1$.

б) Смоделировать значения $x_i^k, i=1,2,\dots,n-1$, и значения $y_i^k, i=1,2,\dots,n$, т.е. задать реализацию x^k , используя случайные числа из таблицы 1 Приложения. Эти случайные числа указаны в первых пяти столбцах таблицы 4.5.2. в строке r . Соответствующие значения $x_i^k, i=1,2,\dots,n-1$, указаны в строке x_i^k .

в) Необходимые значения надежностей $\alpha_i^k, i=1,2,\dots,n-1$, – значения надежности длин интервалов между моментами прибытия требований и $\beta_i^k, i=1,2,\dots,n$, – значения надежности длин интервалов обслуживания указаны в строке α_i^k, β_i^k .

г) Надежность $\mu_{\hat{p}}(x^k)$ рассматриваемой реализации указана в столбце $\mu_{\hat{p}}(x^k)$.

д) Значения $g(x^k)$ и $\mu_{\hat{p}}(x^k) \cdot g(x^k)$ указаны в двух последних столбцах. Значение показателя $g(x^k)$ вычисляется по алгоритму, описанному в начале этого пункта.

е) Если $k < 10$, то увеличить k на единицу и перейти к пункту 3б, иначе перейти к пункту 4.

4. Определить выборочные средние $\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g)$ и $\bar{M}(\mu_{\hat{p}})$ и выборочные дисперсии $\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g)$ и $\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}})$:

$$\bar{M}(\mu_{\hat{p}}) = 0,139, \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) = 0,164, \\ \bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}) = 0,011, \bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g) = 0,024,$$

5. Определить погрешности:

$$\Delta_u^2 \leq \frac{\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g)}{N(1-0,9)} = \frac{0,024}{10 \times 0,1} = 0,024, \Delta_l^2 \leq \frac{\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}})}{N(1-0,9)} = \frac{0,011}{1} = 0,011. \\ \Delta_u \cong 0,158, \Delta_l \cong 0,105$$

6. Определить Δ_{Ω}^N .

$$A_{\max} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) + \Delta_u = 0,164 + 0,158 = 0,322, \\ A_{\min} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) - \Delta_u = 0,164 - 0,158 = 0,006, \\ B_{\max} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) + \Delta_l = 0,139 + 0,105 = 0,244, \\ B_{\min} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) - \Delta_l = 0,139 - 0,105 = 0,034.$$

$$\Omega_{\max} = \frac{A_{\max}}{B_{\min}} = \frac{0,322}{0,034} \cong 9,471 \text{ и } \Omega_{\min} = \frac{A_{\min}}{B_{\max}} = \frac{0,006}{0,244} \cong 0,025.$$

$$\Delta_{\Omega}^N = \max \left\{ \Omega_{\max} - \frac{\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g)}{M(\mu_{\hat{p}})}, \frac{\bar{M}(\mu_{\hat{p}}g)}{M(\mu_{\hat{p}})} - \Omega_{\min} \right\} =$$

$$\max \{ 9,471 - \frac{0,164}{0,139}, \frac{0,164}{0,139} - 0,025 \} \cong \max \{ 9,291, 0,155 \} = 9,294.$$

Заметим, что с вероятностью p_{Ω} абсолютная погрешность вычислений не превосходит $\Delta_{\Omega}^{10} = 9,294 > 2$. Следовательно, надо увеличить число испытаний. При $N = 500$ получаем:

4.

$$\bar{M}(\mu_{\hat{p}}) = 0,171, \quad \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) = 0,207,$$

$$\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}) = 0,021, \quad \bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g) = 0,051,$$

5.

$$\Delta_u^2 \leq \frac{\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}}g)}{N(1-0,9)} = \frac{0,051}{500 \times 0,1} = 0,00102, \quad \Delta_l^2 \leq \frac{\bar{\sigma}^2(\mu_{\hat{p}})}{N(1-0,9)} = \frac{0,021}{50} = 0,00042.$$

$$\Delta_u \cong 0,032, \quad \Delta_l \cong 0,020$$

6. Определить Δ_{Ω}^N .

$$A_{\max} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) + \Delta_u = 0,207 + 0,032 = 0,239,$$

$$A_{\min} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}g) - \Delta_u = 0,207 - 0,032 = 0,175,$$

$$B_{\max} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) + \Delta_l = 0,171 + 0,020 = 0,191,$$

$$B_{\min} = \bar{M}(\mu_{\hat{p}}) - \Delta_l = 0,171 - 0,020 = 0,151.$$

$$\Omega_{\max} = \frac{A_{\max}}{B_{\min}} = \frac{0,239}{0,151} \cong 1,583 \quad \text{и} \quad \Omega_{\min} = \frac{A_{\min}}{B_{\max}} = \frac{0,175}{0,191} \cong 0,916.$$

$$\Delta_{\Omega}^N = \max \{ 1,583 - \frac{0,207}{0,171}, \frac{0,207}{0,171} - 0,916 \} \cong \max \{ 0,372, 0,295 \} = 0,372.$$

Заметим, что с вероятностью 0,9 абсолютная погрешность вычислений не превосходит $\Delta_{\Omega}^{500} = 0,372 < 2$, следовательно, задача решена, и с вероятностью 0,9 центр тяжести нечеткого множества «суммарное время ожидания в очереди» лежит в интервале $[1,211 - 0,372, 1,211 + 0,372] = [0,567, 1,583]$.

Мы предполагали, что выборочная дисперсия достаточно хорошо совпадает с истинной дисперсией. При $N \geq 200$ это приближение является достаточным при решении практических задач.

4.5.4. Центр тяжести нечеткого множества «суммарное время, когда длина очереди равна нулю».

Подход к решению задач рассматриваемого типа проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 4.5.2. Мастерская по замене летней резины легковых автомобилей на зимнюю имеет два канала обслуживания. Интервалы времени между моментами прибытия клиентов, и время обслуживания задаются нечеткими числами $\lambda = \langle 5, 10, 15 \rangle$ минут и $\tau = \langle 20, 40, 60 \rangle$ минут соответственно. Руководство мастерской рассчитывает, что за смену будут поступать 20 клиентов. Найти центр тяжести нечеткого множества «суммарное время, когда длина очереди равна нулю» погрешность вычислений с вероятностью 0,9 не должна превосходить 10 минут.

Решение этого примера во многом аналогично решению примера 4.5.1. Отличие состоит в алгоритме вычисления значения показателя $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$ – «качество реализации x в задаче \hat{p} ». Изложим этот алгоритм, иллюстрируя его на примере первой реализации x^1 . Результаты вычислений для первых пяти требований представлены в таблице 4.5.3.

Таблица 4.5.3. Расчет суммарного времени, когда длина очереди равна нулю.

Номер требования	1	2	3	4	5
Момент прибытия	0	8	22	35	49
Момент начала обслуживания	0	8	31	35	67
Время обслуживания	31	25	36	38	26
Момент окончания обслуживания (момент освобождения канала)	31	33	67	73	93
Время, когда длина очереди ноль		8	14	2	0

Для расчетов использованы первые девять значений из таблицы 1 приложения:

$$r_1 = 3393, \quad r_2 = 9108, \quad r_3 = 7891, \quad r_4 = 9085,$$

$$r_5 = 2638, \quad r_6 = 1313, \quad r_7 = 3897, \quad r_8 = 4380, \quad r_9 = 1618.$$

На основании соотношений $x_i^k = 0,0001(a_{\lambda} + r(c_{\lambda} - a_{\lambda}))$ для $i=1,2$ и $y_i^k = 0,0001(a_{\tau} + r(c_{\tau} - a_{\tau}))$ для $i=3,4,5$ заполняем вторую и четвертую строки таблицы 4.5.3.

При заполнении третьей строки таблицы 4.5.3. учитывается тот факт, что система обслуживания имеет два канала. Вновь поступившее требование направляется на свободный канал, если таковой имеется, иначе на тот канал, который освободится раньше. Если два канала освобождаются одновременно, то требование направляется на канал с меньшим порядковым номером.

При заполнении клеток последней строки для каждого канала вычисляется разность: время поступления очередного требования минус время освобождения этого канала. Из эти разностей берется максимальная. Если она меньше нуля, соответствующий элемент рассматриваемой строки равен нулю. Если полученная разность больше нуля, то она записывается в соответствующую клетку нижней строки.

После заполнения всей таблицы находится сумма элементов последней строки. Эта сумма и есть значение показателя $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$ для рассматриваемой реализации x .

Дальнейшие вычисления проводятся в соответствии с алгоритмом, изложенным в пункте 4.5.2.

Интерес представляет и задача, связанная с только что рассмотренной, а именно, задача, состоящая в определении центр тяжести нечеткого множества «суммарное время, когда длина очереди равна нулю, но все каналы заняты обслуживанием». Ее решение отличается от приведенного тем, что в последней строке итоговой таблицы надо суммировать только те элементы, которые стоят с столбцах, соответствующих ситуациям, когда все каналы заняты.

Замечание 4.5.1. Отметим, что аналогично могут быть решены задачи и с некоторыми другими критериями эффективности. Например, найти центры тяжести нечетких множеств «число каналов, свободных от обслуживания», «время, когда все каналы заняты», «время, когда в системе не больше k требований».

4.5.5. Центр тяжести нечеткого множества «доля отказов в обслуживании».

Задача решается с использованием метода Монте-Карло. Под долей отказа в обслуживании понимается показатель, относящийся к реализации и равный отношению числа требований в этой реализации, получивших отказ в обслуживании, к общему числу поступивших требований.

Пример 4.5.3. Мастерская по замене летней резины легковых автомобилей на зимнюю имеет один канала обслуживания. Интервалы времени между моментами прибытия клиентов, и время обслуживания задаются нечеткими числами $\hat{\lambda} = \langle 5, 25, 35 \rangle$ минут и $\hat{\tau} = \langle 20, 40, 60 \rangle$ минут соответственно. Руководство мастерской исходит из того, что за смену должно быть обслужено 10 клиентов. Найти центр тяжести нечеткого множества «доля отказов в обслуживании» с заданной точностью и вероятностью того, что эта точность достигнута. Предполагается, что требование, поступившее в систему в момент, когда одно требование уже находится в очереди, покидает систему не обслуженным (получает отказ в обслуживании).

Решение. Как и в предыдущем примере, решение этого поставлено задачи примера во многом аналогично решению примера 4.5.1. Отличие состоит в алгоритме вычисления значения показателя $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$ – «качество реализации x в задаче \hat{p} ». Изложим этот алгоритм, иллюстрируя его на примере первой реализации x^1 . Результаты вычислений представлены в таблице 5.4.4, в которой:

- i – порядковый номер требования,
- $t_{приб}^i$ – момент прибытия требования i -го требования,
- $t_{об}^i$ – затраты времени на обслуживание i -го требования,
- $t_{н.об.}^i$ – момент начала обслуживания i -го требования на соответствующем этапе,
- $t_{оч}^i$ – время в очереди для i -го требования,
- $t_{ок}^i$ – момент окончания обслуживания i -го требования на соответствующем этапе,
- $n_{оч}$ – длина очереди,
- $n_{отк}$ – число отказов с учетом вновь поступившего требования.

При заполнении таблицы использованы следующие равномерно распределенные случайные числа:

$$r_1 = 3393, r_2 = 9108, r_3 = 7891, r_4 = 9085, r_5 = 2638, r_6 = 1313, \\ r_7 = 3897, r_8 = 4380, r_9 = 1618, \\ r_{10} = 4858, r_{11} = 5354, r_{12} = 0905, r_{13} = 1420, r_{14} = 3218, r_{15} = 9697, \\ r_{16} = 0912, r_{17} = 4936, r_{18} = 2616, r_{19} = 5964.$$

$$\hat{\lambda} = \langle 5, 25, 35 \rangle$$

Таблица 4.5.4. Подсчет числа отказов в первой реализации.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{приб}^i$	0	15	47	76	108	121	130	147	165	175
$t_{об}^i$	39	41	24	26	33	58	24	40	30	44
$t_{н.об.}^i$	0	39	80	104	108	141	199	147	187	217
$t_{оч}^i$	0	24	37	28	0	20	39	0	22	42
$t_{ок}^i$	39	80	104	130	141	199	223	187	217	161
$n_{оч}$	0	1	1	2	0	1	2	0	1	2
$n_{отк}$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1

При заполнении этой таблицы учитывался тот факт, что требование, получившее отказ в обслуживании, выбывает из очереди

(соответствующий столбец в таблице зачеркнут) и его место занимает следующее требование из числа поступивших в систему.

Суммируя элементы нижней строки этой таблицы, находим, что число отказов в рассматриваемой реализации равно трем, и тогда доля отказов в рассмотренной реализации равна 0,3.

Далее надо вычислить надежность этой реализации. Как это делается описано в пункте 4.5.2. и проиллюстрировано при заполнении таблицы 4.5.2. Поэтому мы не будем здесь останавливаться на этом.

Дальнейшие вычисления проводятся в соответствии с алгоритмом, изложенным в пункте 4.5.2.

4.5.6. Сети СМО с нечеткими интенсивностями.

Сети систем массового обслуживания мы уже рассматривали в пункте 4.1.10, но теперь рассмотрим их с другим критерием эффективности, в качестве которого будем использовать суммарные потери времени на ожидание обслуживания всеми требованиями. Для решения будем использовать метод Монте-Карло.

Пример 4.5.4. Рассмотрим пример 4.1.10, со схемой прохождения этапов требованием, представленной графом, изображенным на рисунке 4.5.1.

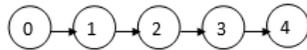


Рис. 4.5.1. Граф, изображающий схему прохождения этапов требованием.

Автохозяйство имеет 11 грузовых автомобилей. Автомашины, прибывая в конце рабочего дня в парк, проходят три этапа обслуживания: мойку, технический осмотр и заправку в порядке в соответствии с графом, изображенным на рисунке 4.5.1. Прибывшее требование поступает на мойку. Если мойка свободна, то оно сразу же обслуживается, иначе встает в очередь на мойку. Закончив обслуживание на мойке, поступает на пункт технического осмотра. Время, необходимое на перемещение от мойки до этого пункта учитывается, при необходимости, в затратах времени на мойку. Если этот пункт свободен, то требование сразу же обслуживается, иначе встает в очередь на осмотр. Закончив обслуживание на этом пункте, требование поступает на заправку. В зависимости от того свободна заправка или нет требование начинает обслуживаться или встает в очередь. При необходимости участие время на переезд от пункта технического осмотра до поста заправки оно, это время учитывается в затратах времени на технический осмотр.

Предполагается, что каждый из этапов имеет по одному каналу обслуживания и что нечеткие числа, задающие интервалы времени между моментами поступления требований и затраты времени на обслуживание такие же как и в примере 4.1.10.

Найти центр тяжести нечеткого множества «суммарные потери времени на ожидание обслуживания всеми требованиями».

Решать задачу будем, используя метод Монте-Карло и подход, описанный в п. 4.1.10 (см. таблицу 4.1.7). При каждом испытании необходимо вычислять суммарные затраты времени на ожидание в очередях. Результаты вычисления этого показателя для первого испытания, приведены в таблице 5.4.5, все вычисления, промежуточные и окончательные, округлены до целых.

Предполагается, что

- интервалы времени между поступлениями требований задаются нечетким числом $\hat{\lambda} = \langle 2, 8, 15 \rangle$,
- затраты времени на обслуживания требования на мойке задаются нечетким числом - $\hat{\tau}_1 = \langle 15, 20, 26 \rangle$,
- на пункте контрольно-проверочного обслуживания – нечетким числом $\hat{\tau}_2 = \langle 20, 25, 34 \rangle$,
- на заправке – нечетким числом $\hat{\tau}_3 = \langle 2, 3, 6 \rangle$.
- функции принадлежности соответствующих нечетких множеств (нечетких чисел) задаются соотношениями

Таблица 4.5.5. Время ожидания в очереди при $n = 11$,

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	r		3393	6270	4228	6069	9407	1865	8549	3217	2351	8410
	$\lambda(i)$		6	10	7	10	14	4	13	6	5	13
Мойка	$t_{приб}^i$	0	6	16	23	33	47	51	64	70	75	88
	r	9108	2330	2157	7416	0398	6173	1703	8132	9065	6717	7891
	$t_{об}^{M i}$	25	18	17	23	15	23	17	24	25	22	24
	$t_{н.об.}^i$	0	25	43	60	83	98	121	138	162	187	209
	$t_{оч}^i$	0	19	27	37	50	51	70	74	92	115	121
ПТО	$t_{ок}^i$	25	43	60	83	98	121	138	162	187	209	233
	$t_{приб}^i$	25	43	60	83	98	121	138	162	187	209	233
	r	3590	2502	5945	3402	0491	4328	2366	6175	7695	9085	6307
	$t_{об}^{nmo i}$	25	24	28	25	21	26	23	29	35	33	29
	$t_{н.об.}^i$	25	50	74	102	127	148	174	197	226	261	294
Заправка	$t_{оч}^i$	0	7	14	19	29	27	36	35	39	42	61
	$t_{ок}^i$	50	74	102	127	148	174	197	226	261	294	323
	$t_{приб}^i$	50	74	102	127	148	174	197	226	261	294	323
	r	6910	9174	1753	1797	9229	3422	9861	8257	2638	2908	6868
	$t_{об}^{3 i}$	5	6	3	3	6	3	6	5	3	3	5

$t_{н.об.}^i$	50	74	102	127	148	174	197	226	261	294	323
$t_{оч}^i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$t_{ок}^i$	55	80	105	130	154	175	203	231	264	297	328

Здесь:

i – порядковый номер требования,

r – равномерно распределенное число (см. Приложение, Таблица 1),

$\lambda(i)$ – интервал времени между моментами прибытия требований с номерами i и $i+1$,

$t_{приб}^i$ – момент прибытия требования i -го требования,

$t_{об}^{mi}$ – затраты времени на мойку i -го требования,

$t_{об}^{nmo i}$ – затраты времени на технический осмотр i -го требования,

$t_{об}^{zi}$ – затраты времени на заправку i -го требования,

$t_{н.об.}^i$ – момент начала обслуживания i -го требования на соответствующем этапе,

$t_{оч}^i$ – время, проведенное i -м требованием в ожидании обслуживания на соответствующем этапе,

$t_{ок}^i$ – момент окончания обслуживания i -го требования на соответствующем этапе.

Алгоритм заполнения таблицы 4.5.5 аналогичен алгоритму, использованному при заполнении таблицы 4.1.7 с той лишь разницей, что продолжительность временных интервалов здесь зависит от номера требования и поэтому моделируется с использованием соответствующих случайных чисел.

Заполнив таблицу 4.5.5, находим суммарные затраты времени на ожидание обслуживания всеми требованиями на всех этапах, суммируя данные строк $t_{оч}^i$ на всех этапах обслуживания. Получаем, что искомые затраты времени равны 965 мин.

Интересно отметить, что последнее требование прибыло в парк на восемьдесят восьмой минуте, а закончило обслуживание на триста двадцать восьмой минуте, значит всего оно потратило на обслуживание на его ожидание в очередях 240 минут.

§ 4.6. Смешанные системы массового обслуживания.

4.6.1. Вводные замечания.

В предыдущих параграфах рассматривались задачи с системами массового обслуживания с нечеткими длинами интервалов времени между моментами поступления требований и нечеткими длинами интервалов времени обслуживания поступивших в систему требований. Были рассмотрены также ситуации, когда интенсивность входящего потока

требований и интенсивность обслуживания нечеткие, но при каждом конкретном наборе значений этих интенсивностей входящий поток требований является простейшим, а время обслуживания распределено по показательному закону. Возможны, очевидно, и ситуации, когда одна из указанных характеристик является нечеткой, а другая – случайной.

В этом параграфе рассматривается ряд, в некотором смысле, смешанных случаев: ситуации когда интервалы времени, характеризующие процесс поступления требований в систему являются элементами нечеткого множества, а затраты времени на обслуживания значениями некоторых случайных величин, и наоборот – входящий поток требований случайный, а затраты времени на обслуживание являются элементами нечеткого множества.

4.6.2. Системы с нечетким входящим потоком и случайным временем обслуживания.

Рассмотрим функционирование системы массового обслуживания в течение одного временного интервала (рабочей смены). Время обслуживания будем предполагать случайным, распределенным по известному закону. Интервалы времени между моментами поступления требований в систему будем предполагать нечеткими, будем предполагать, что они являются элементами нечеткого множества $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_\lambda(u), u \in [a_\lambda, c_\lambda]$. Функционирование рассматриваемой системы происходит следующим образом: существует некоторое условие, при выполнении которого требование поступает в систему, а при его нарушении оно в систему не попадает. Все поступившие в систему требования обслуживаются полностью, поэтому общая продолжительность одного цикла работы системы может оказаться и больше рабочей смены.

Оценить качество функционирования этой системы.

Оценку реализации x будем обозначать $g(x)$. Как и раньше, множество X – это множество всех реализаций. Но теперь, если

$$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{(n-1)+1}, \dots, x_{(n-1)+n}) \in X,$$

то интервалы времени x_1, \dots, x_{n-1} между моментами поступления требования являются элементами нечеткого множества $\hat{\lambda}$, а интервалы времени $x_{(n-1)+1}, \dots, x_{(n-1)+n}$ (время обслуживания) являются соответствующими значениями случайной величины, имеющей заданный закон распределения с интенсивностью ν тр./час. Функция принадлежности $\mu_{\hat{p}}(x), x \in X$ нечеткой задачи $\hat{p}(x)$ теперь задается формулой (4.6.1).

$$\mu_{\hat{p}}(x) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \mu_{\hat{\lambda}}(x_i). \quad (4.6.1)$$

Изложим кратко общую схему решения сформулированной задачи. Рассматриваем необходимое, в зависимости от используемого показателя качества, подмножество множества реализаций. Для каждой реализации x из этого подмножества находим с использованием метода Монте-Карло значение показателя $g(x)$. По полученным значениям показателя определяем искомую оценку качества функционирования рассматриваемой системы массового обслуживания.

Пример 4.6.1. Предполагая, что:

- начало отсчета времени совпадает с моментом поступления первого требования,
- СМО имеет один канал обслуживания,
- $\hat{\lambda} = \langle 40, 60, 90 \rangle$ (в минутах),
- продолжительность смены – 8 часов,
- требование, прибывшее после семи часов с начала работы системы, на обслуживание не принимается,
- на обслуживание принимаются требования, поступившие в первые семь часов смены,
- время обслуживания имеет показательный закон распределения с интенсивность обслуживания $\nu = 1 \text{ мп./час}$,
- оценкой качества функционирования является максимально возможное среднее время ожидания в очереди при надежности, равной 0,8.

Решение. (см. п. 4.2.2, пример 4.2.1). Самое большое время ожидания в очереди при надежности 0,8 – это, когда время между поступлением любых двух последовательных требований равно $a_\lambda = 56$ мин.

Таблица 4.6.1. Время ожидания в очереди при первом испытании.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(i)$	0,967	0,202	0,519	0,132	0,874	0,025	0,476	0,951	0,319	0,769
$t_{\text{nocm.}}(i)$	0	56	112	168	224	280	336	392	448	504
$t_{\text{об.}}(i)$	208	13	44	9	124	2	39	181		88
$t_{\text{н.об.}}(i)$	0	208	221	265	274	398	400	439		
$t_{\text{ок.об.}}(i)$	208	221	265	274	398	400	439	620		
$t_{\text{оч.}}(i)$	0	152	109	97	50	118	64	47		

В таблице 4.6.1 приведены расчеты, связанные с первым испытанием при вычислении среднего времени ожидания в очереди в рассматриваемой системе. Используются следующие обозначения:

i – номер, в порядке поступления, требования,

$r(i)$ – равномерно распределенное случайное число (получено с использованием таблицы 1 приложения для i -го требования),

$t_{\text{nocm.}}(i)$ – время поступления i -го требования,

$t_{\text{об.}}(i)$ – затраты времени на обслуживание i -го требования,

$t_{\text{н.об.}}(i)$ – время начала обслуживания i -го требования,

$t_{\text{ок.об.}}(i)$ – время окончания обслуживания i -го требования,

$t_{\text{оч.}}(i)$ – время, проведенное i -м требованием в очереди.

Девятое и все последующие требования поступили после семи часов с момента начала работы системы, поэтому они на обслуживание не принимаются.

При заполнении клеток таблицы 4.6.1 использовались следующие соображения:

r получается округлением до сотых числа, полученного делением на 10000 соответствующего числа из таблица 1 приложения;

$t_{\text{nocm.}}(1) = 0, t_{\text{nocm.}}(i) = t_{\text{nocm.}}(i-1) + 56$ при $i > 1$;

$t_{\text{об.}}(i) = -\frac{1}{\nu} \cdot \ln(1 - r(i)) = -\ln(1 - r(i))$;

$t_{\text{н.об.}}(1) = 0, t_{\text{н.об.}}(i) = \max\{t_{\text{nocm.}}(i), t_{\text{ок.об.}}(i-1)\}$ при $i > 1$;

$t_{\text{ок.об.}}(i) = t_{\text{н.об.}}(i) + t_{\text{об.}}(i)$;

$t_{\text{оч.}}(i) = t_{\text{ок.об.}}(i) - t_{\text{nocm.}}(i)$.

Суммируя элементы последней строки таблицы 4.6.1, получаем, что максимально возможное среднее время, проведенное всеми требованиями в очереди при надежности 0,8, равно 637 минут. Тогда, максимально возможное среднее время ожидания в очереди при этом уровне надежности равно $637/8 \cong 80$ минут.

Проведя 1000 аналогичных испытаний, мы получаем, что максимально возможное среднее время ожидания в очереди при надежности 0,8 равно 62 минуты.

Замечание 4.6.1. Решая аналогичную задачу при разных значениях надежности из некоторого заданного набора A , мы получим нечеткое множество $\mathfrak{Z}(A) = \{(t(\alpha), \alpha) | \alpha \in A\}$, где $t(\alpha)$ – максимально возможное среднее время ожидания в очереди при надежности, равной α . При должном выборе множества A число, получаемое при дефазификации нечеткого множества $\mathfrak{Z}(A)$ по методу центр тяжести можно использовать, как оценки рассматриваемой системы массового обслуживания. Нечеткое множество $\mathfrak{Z}(A)$ при $A = \{0,1 \cdot k \text{ при } k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ представлено в таблице 4.6.2. В ней $D(\alpha)$ – дисперсия.

Таблица 4.6.2. Нечеткое множество $\mathfrak{Z}(A)$.

α	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$t(\alpha)$	126	115	100	95	83	77	71	63	61	57	53
$D(\alpha)$	9470	8383	7393	6891	6151	5811	5735	4404	4297	4577	3523

Используя формулу 3.2.6 при $N=1000$ и $q=0,9$, находим, что погрешность при вычислении значений показателя $t(\alpha)$ не превосходит 3,4 минуты.

Тогда, результатом дефаззификации нечеткого множества $\mathfrak{Z}(A)$ по методу центра тяжести является число Θ , задаваемое соотношением:

$$\Theta = \frac{0,1 \cdot 115 + 0,2 \cdot 100 + \dots + 1,0 \cdot 53}{0,1 + 0,2 + \dots + 1,0} = \frac{371,5}{5,5} \cong 67,5 \text{ минут.}$$

Замечание 4.6.2. По аналогии с рассмотренным случаем можно решать и ряд других задач из числа упомянутых в параграфе 4.1.

4.6.3. Кратные интегралы в задаче теории массового обслуживания с нечетким входящим потоком и случайным временем обслуживания.

В параграфе 4.4 мы уже рассматривали применение кратных интегралов для исследования систем массового обслуживания с нечетким входящим потоком требований и нечетким временем их обслуживания. Теперь же, как и в п. 4.6.2. будем предполагать, что длины интервалов времени являются элементами нечеткого множества $\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$, а длины интервалов обслуживания значениями случайной величины, определенной на отрезке $[\zeta, \xi]$ и имеющей плотность распределения $\mathcal{G}(x)$. Заметим, что подход к решению этой задачи во многом аналогичен подходу из п. 4.4.2. Используемые в этом пункте обозначения, если не оговорено противное, взяты из п. 4.6.2.

Рассмотрим систему массового обслуживания с n требованиями, с одним каналом обслуживания. Предполагается, что все требования поступают в систему в точности по одному разу, а все поступившие требования обслуживаются.

Пусть $g(x)$ значение некоторого показателя, характеризующего функционирование рассматриваемой системы при заданной реализации $x \in X$. Через $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$ обозначим нечеткую величину $(g(x), \mu_{\hat{p}}(x))$, т.е. величину, принимающее значение $g(x)$ с надежностью $\mu_{\hat{p}}(x)$ при $x \in X$.

Как и в п. 4.4.2. нас будет интересовать обобщенное значение Θ этого показателя, полученное в результате дефаззификации по методу центра тяжести нечеткой величины $\hat{g}_{\hat{p}}(x)$. Вычислять это значение предлагается, когда это возможно, с применением кратных интегралов.

Напомним, что $\Theta = \frac{A}{B}$, где A и B есть кратные интегралы:

$$A = \int_X \mu_{\hat{p}}(x) \cdot g(x) \cdot dx, \quad B = \int_X \mu_{\hat{p}}(x) \cdot dx.$$

Если вычисление этих интегралов оказывается излишне трудоемким, то можно попытаться найти их приближенные значения, используя метод Монте-Карло.

4.6.4. Системы с нечетким временем обслуживания и случайным входящим потоком.

Рассмотрим задачу, в которой интервал времени между моментами поступления требований задается случайной величиной, а время обслуживания является нечетким.

Вычисление показателя качества системы массового обслуживания с такими характеристиками во многом аналогично тому, как это делалось в п. 4.6.2. Разница состоит в том, что множество X состоит из реализаций $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{(n-1)+1}, \dots, x_{(n-1)+n})$, для которых интервалы времени x_1, \dots, x_{n-1} между моментами поступления требования являются значениями заданной случайной величины ξ , а интервалы времени обслуживания $x_{(n-1)+1}, \dots, x_{(n-1)+n}$ являются элементами нечеткого множества $\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$.

Приложение

Таблица 1. Равномерно распределённые случайные числа

3393	6270	4228	6069	9407	1865	8549	3217	2351	8410
9108	2330	2157	7416	0398	6173	1703	8132	9065	6717
7891	3590	2502	5945	3402	0491	4328	2366	6175	7695
9085	6307	6910	9174	1753	1797	9229	3422	9861	8257
2638	2908	6868	0398	5496	3282	0031	5955	6544	3883
1313	8338	0623	8600	4950	5414	7131	0134	7241	0651
3897	4202	3814	3505	1599	1619	2784	1994	5775	1406
4380	9543	1646	2850	8415	9120	8062	2421	6161	4634
1618	9309	7909	0874	0401	4301	4517	9197	3350	0434
4858	4676	7363	9141	6133	0549	1972	3461	7116	1496
5354	9142	0847	5393	5416	6505	7156	5634	9703	6221
0905	6986	9396	3975	9255	0537	2479	4589	0562	5345
1420	0170	8679	2328	3039	1292	0406	5428	3789	2882
3218	9080	6604	1813	8209	7039	2086	2269	4437	3798
9697	8481	4367	0622	6893	8788	2330	9358	5904	9639
0912	4964	0502	9683	4636	2861	2876	1273	7880	2030
4936	7072	4868	0601	3894	7182	8417	2367	7031	1003
2616	4734	9878	6761	5636	2949	3979	8650	3430	0635
5964	0412	5012	2369	6461	0678	3693	2928	3740	8047
7848	1523	7904	1521	1455	7089	8094	9872	0898	7174
5192	2571	3643	0707	3434	6818	5729	8614	4298	4129
8438	8325	9886	1805	0226	2310	3675	5058	2515	2388
8166	6349	0319	5436	6838	2460	6433	0644	7428	8556
9158	8263	6504	2562	1160	1526	1816	9690	1215	9590
6061	3525	4048	0382	4224	7148	8259	6526	5340	4064

В таблице даны равномерно распределённые в интервале от нуля до 9999 целые числа. Для получения последовательности случайных чисел с равномерным законом распределения следует выбрать подряд необходимое количество чисел из таблицы. Начинать отбор можно с любого числа.

Для получения равномерно распределённых в интервале [a,b) случайных чисел необходимо воспользоваться формулой: $x=(b-a)z/10000+a$, где x - требуемое случайное число, z - число из таблицы.

Пример. Требуется получить три значения случайной величины, равномерно распределённой в интервале [5,10].

Имеем: $x=(10-5)z/10000+5=0.0005z+5$. Из таблицы выбираем три числа (скажем три первых): 3393, 9108, 7891. Тогда первое значение моделируемой величины будет равно $0.0005 \cdot 3393+5=6.6965$. Значения остальных: 9.5540, 8.9455.

Таблица 2. Нормированная функция Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^z e^{-v^2/2} dv$$

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
0.00	0.0000	0.85	0.3023	1.70	0.4554	2.55	0.4946
0.05	0.0199	0.90	0.3159	1.75	0.4599	2.60	0.4953
0.10	0.0398	0.95	0.3289	1.80	0.4641	2.65	0.4959
0.15	0.0596	1.00	0.3414	1.85	0.4678	2.70	0.4965
0.20	0.0793	1.05	0.3581	1.90	0.4713	2.75	0.4970
0.25	0.0987	1.10	0.3643	1.95	0.4744	2.80	0.4974
0.30	0.1179	1.15	0.3749	2.00	0.4772	2.85	0.4978
0.35	0.1368	1.20	0.3849	2.05	0.4798	2.90	0.4981
0.40	0.1554	1.25	0.3944	2.10	0.4821	2.95	0.4984
0.45	0.1736	1.30	0.4032	2.15	0.4842	3.00	0.4986
0.50	0.1915	1.35	0.4115	2.20	0.4860	3.05	0.4988
0.55	0.2088	1.40	0.4192	2.25	0.4877	3.10	0.4990
0.60	0.2257	1.45	0.4265	2.30	0.4892	3.15	0.4992
0.65	0.2422	1.50	0.4332	2.35	0.4906	3.20	0.4993
0.70	0.2580	1.55	0.4394	2.40	0.4918	3.25	0.4994
0.75	0.2734	1.60	0.4452	2.45	0.4928	3.30	0.4995
0.80	0.2881	1.65	0.4505	2.50	0.4937	3.35	0.4996

Функция Лапласа выражает площадь под кривой $p(z,0,1)$ ($p(z,0,1)$ обозначает плотность нормального распределения с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица) от 0 до z . Заметим, что $\Phi(0)=0$, $\Phi(-\infty)=-0.5$, $\Phi(\infty)=0.5$, и, что для случайной величины Z , имеющей плотность распределения $p(z,0,1)$, вероятность $P(a \leq Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Таблица 3. Распределение Стьюдента

k	q=0.90	q=0.95	q=0.98	q=0.99	q=0.995	q=0.999
1	6.314	12.70	31.82	63.65	127.30	636.60
2	2.920	4.303	6.965	9.925	14.08	31.60
3	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	12.92
4	2.132	2.776	3.747	4.604	5.597	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	5.041
9	1.835	2.262	2.821	3.250	3.690	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.587
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	4.318
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	4.140
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	4.015
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.193	3.922
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.849
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.792
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.092	3.745
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.704
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.674
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.646
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.291

В таблице даны такие значения для $t_{q,k}$, что $P(|t| < t_{q,k}) = q$, где k - число степеней свободы, q - вероятность.

Обозначения

$\hat{\lambda} = \langle a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \rangle$ – продолжительность интервала времени между моментами поступлением требований,

$\hat{\tau} = \langle a_\tau, b_\tau, c_\tau \rangle$ – продолжительность обслуживания требования,

$\mu_{\hat{\lambda}}$ – функция принадлежности нечеткого числа $\hat{\lambda}$,

$\mu_{\hat{\tau}}$ – функция принадлежности нечеткого числа $\hat{\tau}$,

t_α^* в параграфе 3.2. – суммарные затраты времени всех требований на их пребывание в СМО при уровне надежности, равном α ,

\hat{t}^* в параграфе 3.2. – нечеткое число «суммарные затраты времени всех требований на их пребывание в СМО при уровне надежности, равном α ,

n – число требований в случае ограниченного их числа,

X – множество всех возможных реализаций процесса обслуживания для рассматриваемой системы массового обслуживания; это множество рассматривается как универсальное множество, на котором заданы нечеткие задачи обслуживания,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_n)$ при $x \in X$,

x_i – продолжительность интервала времени между требованиями с номерами i и $i+1$ в реализации x ,

y_i – время обслуживания требования с номером i в реализации x ,

$t(x)$ – суммарные затраты времени всеми требованиями на ожидание в очереди и на их обслуживание в реализации x ,

$t_r(x)$ – суммарные затраты времени всеми требованиями на ожидание в очереди в реализации x ,

$t_r^1(x)$ – средние затраты времени требованием на ожидание в очереди в реализации x ,

\hat{p} – нечеткая задача обслуживания,

$\mu_{\hat{p}}(x), x \in X$ – функция принадлежности задачи p ,

$[0, T]$ – интервал времени, на котором поступают все требования,

Θ – центр тяжести нечеткого числа \hat{t}_α^* .

Искомый центр тяжести Θ определяется по формуле:

Литература

1. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: перевод с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
2. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. – Vol. 8, № 3. – p. 338-353.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
4. Mamdani E.H., Assilian S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller // International Journal of Man-Machine Studies, 1975. – v.7. – p. 1-13.
5. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, 1994. – v. 43, No. 11. – p. 1329-1333.
6. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ, 2013. – 798 с.
7. Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, – V. 3. – p. 28-44.
8. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей: Примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990. – 184 с.
9. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
10. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 725 с.
11. Вилков В.Б. К вопросу об обосновании операций пересечения и объединения нечетких множеств. - Депонирована в Центральном СПФ МО РФ 24.07.2015, инв. № В7695; сб. реф. деп. рук., серия Б, вып. 112. – М.: ЦВНИ МО РФ, 2015.
12. Тэрano, Т., Асаи, К., Сугэно, М. Прикладные нечеткие системы. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
13. Хинчин А.Я. Математические методы в теории массового обслуживания. – Тр. МИАН СССР, 1955. – т.49. – с. 3-122.
14. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М., Наука, 1972. – 368 с.
15. Медведев Н.В., Быков Ю.А., Гришин Г.А. Имитационное моделирование систем массового обслуживания с использованием межплатформенной библиотеки функций языка Си++. // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение, – №4, – 2005.
16. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 320 с.

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \left(\int_{x_i}^{b_\lambda} \dots \int_{x_i u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{u(\lambda)}^{b_\tau} \frac{x_i - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda} \cdot f(x) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-1} \right) dx_i}{\sum_{i=1}^n \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \left(\int_{x_i}^{b_\lambda} \dots \int_{x_i u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{u(\lambda)}^{b_\tau} \frac{x_i - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-1} \right) dx_i}$$

$$a_\tau \geq b_\lambda \quad \lambda = \frac{1}{b_\lambda - a_\lambda} (x_i - a_\lambda), \lambda \in [a_\lambda, b_\lambda]$$

$$u(\lambda) = \frac{b_\tau - a_\tau}{b_\lambda - a_\lambda} (x_i - a_\lambda) + a_\tau$$

$$u = (b_\tau - a_\tau) \cdot \mu_\lambda(u) + a_\tau$$

$$\mu_\lambda(u) = \frac{1}{b_\lambda - a_\lambda} (u - a_\lambda), u \in [a_\lambda, b_\lambda]$$

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \lambda \left(\int_{u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{u(\lambda)}^{b_\tau} \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, v(\lambda), x_{i+1}, \dots, x_{2n-1}) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{2n-1} \right) d\lambda}{\sum_{i=1}^n \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \left(\int_{x_i}^{b_\lambda} \dots \int_{x_i u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{u(\lambda)}^{b_\tau} \frac{x_i - a_\lambda}{b_\lambda - a_\lambda} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{n-1} dx_n \dots dx_{2n-1} \right) dx_i}$$

$$\Theta = \frac{A}{B}, \text{ где}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \lambda \left(\int_{u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{u(\lambda)}^{b_\tau} f(x_1, \dots, x_{i-1}, u(\lambda), x_{i+1}, \dots, x_{2n-1}) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{2n-1} \right) d\lambda + \sum_{i=n}^{2n-1} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \lambda \left(\int_{u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{u(\lambda)}^{b_\tau} f(x_1, \dots, x_{i-1}, v(\lambda), x_{i+1}, \dots, x_{2n-1}) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{2n-1} \right) d\lambda$$

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \lambda \left(\int_{u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)}^{b_\tau} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{2n-1} \right) d\lambda + \sum_{i=n}^{2n-1} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} \lambda \left(\int_{u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)u(\lambda)}^{b_\lambda} \dots \int_{v(\lambda)}^{b_\tau} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{2n-1} \right) d\lambda$$

$$u(\lambda) = (b_\tau - a_\tau) \cdot \lambda + a_\tau, v(\lambda) = (b_\tau - a_\tau) \cdot \lambda + a_\tau.$$

17. Ослин Б.Г. Имитационное моделирование систем массового обслуживания. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 128 с.
18. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 431 с.
19. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
20. Halton J.H. A retrospective and prospective survey of Monte Carlo method // *SIAM Rev.* 1970, – 12, №1. – p. 1-63.
21. Hall A. On an experiment determination of π // *Messeng. Math.* 1873. – 2. – p. 113-114.
22. Lord Rayleigh // *Phil. Mag.* 1899. – 47, 246.
23. Pearson, K. The Problem of the Random Walk // *Nature*, 1905. – Vol. 72, no. 1865. – p. 294.
24. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // *Успехи математических наук.* – Российская академия наук, 1938. – № 5. – с. 5-41.
25. I. Petrovsky Uber das Irrfahrtproblem // *Math. Ann.* 109, 1934. – p. 425-444.
26. Metropolis, N., Ulam, S. The Monte Carlo Method, // *Journal of the American Statistical Association*, 1949. – 44, № 247. – p. 335-341.
27. De Gennes P. G. *Scaling Concepts in Polymer Physics.* Cornell University Press, Ithaca and London, 1979.
28. Van Kampen N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry,* North-Holland, Amsterdam, 1992.
29. Goel N. W. and Richter-Dyn N. *Stochastic Models in Biology.* Academic Press, New York, 1974.
30. Rusakov O. and Laskin M. A stochastic model for stationary dynamics of prices in real estate markets // *AIP Conference Proceedings*, 2017. – 1836, 020087.
31. Kalnitsky V., Rusakov O. and Sergeenkov V. A planetary mill modelling in chaotic mode // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2021. – 1155. 012089.
32. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1973. – 368 с.
33. Brockmeyer, E., Halstrøm, H. L., Jensen, A. The life and works of A.K. Erlang // *Transactions of the Danish Academy of Mathematical Sciences.* — Copenhagen, 1948. – No. 2.
34. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.
35. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 301 с.
36. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1974.
37. Математическое моделирование производственных процессов на ЦЭВМ, М.: Наука, 1964.
38. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1978. – 64 с.
39. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
40. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 320 с.
41. Ослин Б.Г. Имитационное моделирование систем массового обслуживания. – Томск: Из-во Томского политехнического университета, 2010. – 128 с.
42. Кофман А., Алуха Х. Хил. Введение теории нечетких множеств: управление предприятием. – Минск: Высшая школа, 1992. – 223 с.
43. Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечеткие модели и сети. М.: Горячая линия – Телеком, 2012. – 284 с.
44. Осипов Г. С. Моделирование систем массового обслуживания с отказами // *Бюллетень науки и практики. Электрон. журн.* 2016. – №11 (12). – с. 154-165.
45. Castillo O., Melin P. *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications.* — Berlin: Springer-Verlag, 2008.
46. Флегонтов А.В., Вилков В.Б., Черных А.К. Моделирование задач принятия решений при нечетких исходных данных. – СПб.: Лань, 2020. – 328 с.
47. Батыршин И. З., Недосекин А. О., Стецко А. А., Тарасов В. Б., Язенин А. В., Ярушкина Н. Г. Нечеткие гибридные системы: Теория и практика. – М.: Физматлит, 2007. – 208 с.
48. Гусев П.Ю. Моделирование сетей массового обслуживания с нечеткими правилами дисциплин обслуживания очередей. Воронеж: Изд-во ООО «Научное издательство Гусевых», 2019. – 132 с.

Научное издание

ВИЛКОВ Валерий Борисович
КАЛЬНИЦКИЙ Вячеслав Степанович
МОЛОКОВ Илья Евгеньевич

НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Монография

ЦНИТ «Астерион»

Подп. в печать 14.10.2022. Формат 60×84 1/16.

Заказ № 156. Бумага офсетная. Печ. л. 11,5. Тираж: 500.
191015, Санкт-Петербург, Суворовский пр., 61, пом. 23Н.

✉: asterion@asterion.ru 🌐: <https://asterion.ru/>

📄 : https://vk.com/asterion_izdatelstvo