

В. Д. Ногин

**МНОЖЕСТВО  
И ПРИНЦИП ПАРЕТО**

*Учебное пособие*

Санкт-Петербург  
Издательско-полиграфическая ассоциация  
высших учебных заведений  
2022

УДК 519.8  
ББК 22.185  
Н76

Рецензент:

*Прасолов Александр Витальевич*, д-р ф.-м.наук, профессор факультета  
ПМ-ПУ, СПбГУ

Автор:

*Ногин Владимир Дмитриевич*, доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры теории управления  
факультета прикладной математики-процессов управления  
Санкт-Петербургского государственного университета

*Ногин В. Д. Множество и принцип Парето: Учебное пособие.* — 2-е издание, исправленное и дополненное. — СПб.: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2022. — 110 с.

Рассматриваются многокритериальные задачи, в которых в качестве решений выступают эффективные (парето-оптимальные), слабо эффективные и собственно эффективные точки. Дается систематическое изложение необходимых и достаточных условий эффективности, условий существования, а также общих свойств множества эффективных точек. После краткого экскурса в область общей теории выбора аксиоматически обосновывается принцип Эджворта-Парето, согласно которому наилучший выбор при наличии нескольких критериев следует осуществлять в пределах множества эффективных точек (множества Парето). Изложение завершается критическим обзором различных подходов к решению многокритериальных задач.

Усвоение материала предполагает владение базовым курсом математики на приемлемом уровне. Предназначено для студентов математических, экономических и технических специальностей вузов. Может быть использовано преподавателями, магистрантами и аспирантами соответствующих специальностей.

На обложке использовано фото одной из картин В.В. Кандинского.

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 20-07-00298.*

---

Подписано в печать 27.04.2022. Формат 60×84/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 6,88. Тираж 100. Заказ 64.

---

Выпущено Издательско-полиграфической ассоциацией  
высших учебных заведений  
с готового оригинал-макета, предоставленного заказчиком.  
194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 24, лит. В, пом. 11-Н  
№ 25, 26. Тел.: (812) 987-75-26  
mediabooks.print@gmail.com www.mediabooks.ru

© Ногин В. Д., 2022

© Издательско-полиграфическая ассоциация  
высших учебных заведений, 2022

ISBN 978-5-91155-146-9

# Содержание

Основные обозначения .....	5
1. Введение .....	6
2. Важнейшие понятия многокритериальной оптимизации ....	9
2.1 Основные объекты многокритериальной оптимизации	9
2.2. Основные бинарные отношения .....	10
2.3. Оптимальность по Парето .....	13
2.4. Оптимальность по Слейтеру .....	15
2.5. Внешняя устойчивость .....	15
2.6. Оптимальность по Джеоффриону .....	17
3. Условия оптимальности .....	19
3.1. Общие условия эффективности и слабой эффективности .....	20
3.2. Общие условия собственной эффективности .....	28
3.3. Условия эффективности для задач с вогнутыми целевыми функциями .....	35
3.4. Условия оптимальности для линейных задач .....	45
3.5. Условия оптимальности для задач с дифференцируемыми функциями .....	49
3.6. Условия локальной слабой эффективности второго порядка .....	53
3.7. Конусные многокритериальные задачи .....	56
4. Свойства множества эффективных точек .....	63
4.1. Замкнутость множеств эффективных и слабо эффективных точек .....	63
4.2. Плотность множества собственно эффективных точек .....	67
4.3.Связность множества Парето .....	76
5. Функции и аксиомы выбора .....	80

5.1. Определение функции выбора. Аксиомы выбора ...	80
5.2. Теоремы Сена и Шварца .....	82
6. Задача многокритериального выбора. Принцип Парето ...	87
6.1. Постановка задачи многокритериального выбора ..	87
6.2. Аксиомы разумного выбора. Принцип Парето .....	89
6.3. Расширение системы разумных аксиом многокритериального выбора. ....	90
7. Проблема сужения множества Парето и подходы к её решению	
7.1. Суть проблемы сужения множества Парето .....	92
7.2. Выбор на основе свёртки критериев .....	93
7.3. Выбор с помощью "искусственного" отношения предпочтения .....	98
7.4. Человеко-машинные процедуры выбора .....	99
7.5. Сужение множества Парето на основе сведений об отношении предпочтения .....	101
7.6. Комбинированные методы сужения множества Парето .....	104
Вильфредо Парето (краткая справка) .....	109
Литература .....	110

## Основные обозначения

$\mathbb{R}^n$  – пространство вариантов (решений);

$\mathbb{R}^m$  – критериальное пространство;

$X$  – множество возможных вариантов (решений),  $X \subset \mathbb{R}^n$ ;

$f(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_m(\cdot))$  – векторный критерий;

$Y$  – множество возможных векторов,  $Y = f(X) \subset \mathbb{R}^m$ ;

$C(X)$  – множество выбираемых вариантов (решений);

$C(Y)$  – множество выбираемых векторов;

$P_f(X)$  – множество эффективных (парето-оптимальных) вариантов;

$P(Y)$  – множество эффективных (парето-оптимальных) векторов;

$S_f(X)$  – множество слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру) вариантов;

$S(Y)$  – множество слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру) векторов;

$G_f(X)$  – множество собственно эффективных (оптимальных по Джеоффриону) вариантов;

$G(Y)$  – множество собственно эффективных (оптимальных по Джеоффриону) векторов;

$I = \{1, 2, \dots, m\}$  – множество номеров критериев;

$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i$  – скалярное произведение векторов  $a, b \in \mathbb{R}^m$ ;

$\|a - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2}$  – норма разности векторов  $a, b \in \mathbb{R}^m$ ;

$a \geq b \iff a_i \geq b_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

$a > b \iff a_i > b_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

$a \geq b \iff a \geq b$  и  $a \neq b$ ;

$a \gg b \iff b \not\leq a$ ;

$\mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq \mathbf{0}\}$  – неотрицательный ортант;

$\mathbf{M}$  – множество векторов с положительными компонентами в сумме равными единице,  $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^m$ ;

$\overline{\mathbf{M}}$  – замыкание  $\mathbf{M}$ , т.е. множество векторов с неотрицательными компонентами в сумме равными единице.

# 1. Введение

Экстремальные задачи отыскания наибольших и/или наименьших значений заданной функции были известны и успешно решались уже в античном мире. Среди них одни из самых древних, во-видимому были задачи отыскания фигур того или иного класса (треугольник, прямоугольник, плоскость, ограниченная замкнутой линией), обладающих наибольшей площадью при заранее фиксированном периметре. В "Началах" Евклида описана задача о нахождении параллелограмма максимальной площади, вписанного в данный треугольник и имеющего пару сторон, параллельных стороне треугольника. В средние века стали появляться задачи алгебраического содержания. Примером может служить задача Тарталья: разделить число 8 на две части так, чтобы произведение этих частей было максимальным.

В XVII веке Кеплер заложил основы дифференциального и интегрального исчисления и, в частности, сформулировал принцип: вблизи всякого максимума изменения бывают нечувствительными. Впоследствии этот принцип для полиномов был доказан Ферма, а Ньютон и Лейбниц распространили его на класс функций, который именуют дифференцируемыми. В настоящее время это необходимое условие экстремума называют теоремой Ферма и, в соответствии с ним, в точке экстремума производная обращается в нуль.

В те же времена многие известные математики занимались изучением задачи отыскания в треугольнике такой точки, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Впоследствии эту задачу стали связывать с именем геометра Штейнера, подробно исследовавшего её.

В конце XVII века И. Бернулли подробно исследовал задачу о форме кривой, по которой шарик скатывается под действием силы тяжести за кратчайшее время. Эта задача получила наименование задачи о брахистохроне и послужила отправной точкой для вариационного исчисления.

В середине XX века теория экстремальных задач находит дальнейшее развитие благодаря работам Канторовича и Данцига по линейному программированию, Куна и Таккера, получившим условия оптимальности для задач нелинейного программирования, а также Беллмана и Понтрягина в области оптимального управления.

Появление первых многокритериальных задач связывают с принципами голосования, предложенными де Борда и Кондорсе в XVII веке, хотя понятие локально эффективной точки для двухкритериальной задачи неявно использовал в середине XIX века ирландский экономист Ф. Эджворт. Общее определение локально эффективной точки принадлежит итальянскому экономисту В. Парето. Он ввел его на рубеже XIX-XX веков. Систематическое изучение многокритериальных задач начинается после Второй мировой войны американскими математиками Куном и Таккером, родоначальниками нелинейного программирования и продолжается до сих пор. Появились научные журналы, связанные с многокритериальной тематикой, общее число статей на данную тему насчитывает десятки тысяч. Подавляющее большинство прикладных оптимизационных задач из области техники и экономики являются многокритериальными (векторными) в том смысле, что при их формализации не удается сформировать какой-то один критерий оптимальности (одну целевую функцию) и приходится иметь дело сразу с несколькими показателями, которые требуется максимизировать или минимизировать на соответствующем множестве. Разумеется, ситуация, когда все имеющиеся критерии достигают своего экстремума в одной точке, практически нереальна. В этой связи для многокритериальных задач исследователям потребовалось разработать специальные понятия оптимальных точек. Подобных понятий достаточно много. Наиболее известные из них – это эффективная (оптимальная по Парето), слабо эффективная (оптимальная по Слейтеру) и собственно эффективная (оптимальная по Джеоффриону) точки. Все они с формальной точки зрения являются прямым обобщением обычной точки экстремума числовой

функции, хотя и не совпадают друг с другом. Именно эти три типа точек в связке друг с другом рассматриваются в данном учебном пособии в качестве решений многокритериальной задачи.

Пособие условно можно разделить на три части. В первой из них (разд. 1–4) вводятся указанные выше три понятия эффективности и изучаются необходимые и достаточные условия того или иного типа эффективности. Как правило, каждое из установленных условий эффективности открывает возможность редукции многокритериальной задачи к определённому семейству однокритериальных (скалярных) задач. Эту редукцию обычно именуют скаляризацией многокритериальной задачи. Здесь же рассматриваются условия существования эффективных точек, а также некоторые общие свойства множеств эффективных точек, которые позволяют проследить прямую связь между указанными тремя типами эффективности.

Короткая вторая часть (разд. 5) содержит некоторые начальные сведения из области общей теории выбора - перечисляются важнейшие аксиомы и устанавливаются теоремы, которые демонстрируют в каких случаях общий выбор может быть сведен к так называемому парнодоминантному выбору, основанному на парных сравнениях. Материал этой части подготавливает читателя к переходу от многокритериальной задачи к рассмотрению задачи многокритериального выбора, которая вводится далее.

Принцип Парето составляет содержание третьей части (разд. 6–7). Здесь к основным объектам многокритериальной задачи добавляется ещё один - бинарное отношение предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Расширенная таким образом задача носит название задачи многокритериального выбора. В рамках этой задачи формулируются так называемые аксиомы разумного выбора и устанавливается принцип Парето, согласно которому наилучший выбор следует осуществлять только в пределах множества Парето. Обсуждаются различные подходы к решению многокритериальных задач.



Данное учебное пособие написано на основе лекций для студентов факультета прикладной математики-процессов управления, которые автор читает на протяжении ряда лет в СПбГУ. Его можно использовать и студентам технических, а также экономических специальностей, имеющим соответствующую математическую подготовку в пределах добротного вузовского курса математики.

В тексте используется двойная нумерация. Первая цифра указывает номер раздела, вторая - номер подраздела. Подобная двойная нумерация применяется и для формул. Рисунки пронумерованы сплошным образом. Знак ■ служит для указания завершения доказательства.

## 2. Важнейшие понятия многокритериальной оптимизации

Здесь вводятся принципиально важные в рамках многокритериальной оптимизации понятия эффективной (парето-оптимальной), слабо эффективной (оптимальной по Слейтеру) и собственно эффективной (оптимальной по Джеффриону) точек. Приводятся геометрические иллюстрации.

### 2.1. Основные объекты многокритериальной задачи.

Обычная экстремальная задача (задача оптимизации) предполагает наличие некоторого непустого множества и заданной на этом множестве числовой функции (функционала), которую надлежит максимизировать или минимизировать на данном множестве.

*Многокритериальная задача* является прямым обобщением обычной экстремальной задачи и включает следующие два объекта:

1)  $X$  – непустое множество, содержащее по крайней мере два элемента, которое называют *множеством возможных (допустимых) вариантов (решений, альтернатив)*;

2)  $f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_m(\cdot))$  – числовую векторную функцию, заданную на множестве  $X$  и именуемую *векторным критерием*.

Натуральное число  $m$  равно числу критериев в многокритери-

альной задаче. При  $m = 1$  векторная функция превращается в скалярную и указанные два объекта, составляющие многокритериальную задачу, в точности совпадают с теми, которые участвуют в формулировке обычной экстремальной задачи.

На протяжении всего последующего изложения считается, что возможными вариантами (решениями) являются векторы арифметического  $n$ -мерного пространства, т.е.

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

При этом множество  $X$  в общем случае не совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^n$ , хотя совпадение указанных множеств в некоторых случаях не исключается.

Векторная функция  $y = f(x)$  с компонентами  $y_i = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , принимает значения в арифметическом векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$ , которое называют *критериальным пространством*.

Введём образ множества  $X$  при отображении  $f$ , т.е. множество

$$Y = f(X) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\},$$

которое будем именовать *множеством возможных векторов*.

Всюду далее для множества всех номеров критериев будем использовать обозначение

$$I = \{1, 2, \dots, m\}.$$

**2.2. Основные бинарные отношения.** Введём на критериальном пространстве  $\mathbb{R}^m$  следующие бинарные отношения, которые будут активно использоваться в дальнейшем изложении

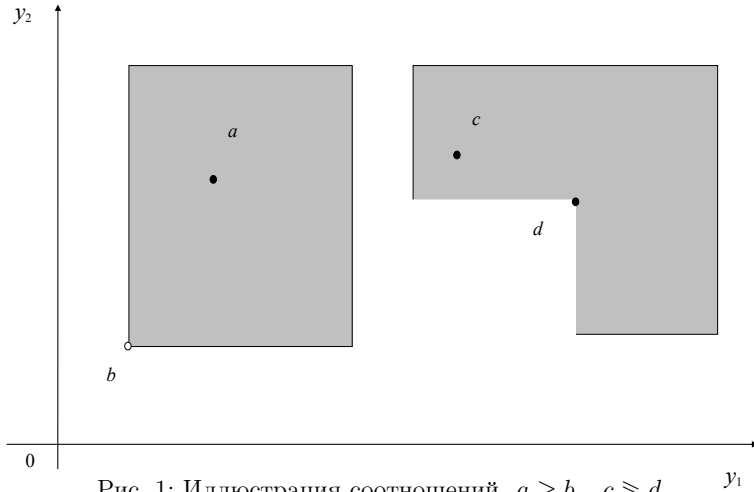
$$a \geq b \iff a_i \geq b_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m;$$

$$a > b \iff a_i > b_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m;$$

$$a \geq b \iff a \geq b \text{ и } a \neq b;$$

$$a \geq b \iff b \not\geq a;$$

для векторов  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ . Отношение  $\geq$  нередко называют *отношением Парето*. Нетрудно понять, что выполнение неравенства  $a \geq b$  означает, что каждая компонента вектора  $a$  не меньше соответствующей компоненты вектора  $b$ , причем хотя бы одна компонента первого вектора строго больше аналогичной компоненты второго вектора. С другой стороны, справедливость соотношения  $c \geq d$  означает, что либо  $c = d$ , либо по крайней мере для одного номера  $i \in I$  верно строгое неравенство  $c_i > d_i$ .



Легко убедиться в том, что отношения  $>$ ,  $\geq$ ,  $\geq$  транзитивны, тогда как отношение  $\geq$  при  $m > 1$  таковым не является (последнее предлагается проверить самостоятельно, приведя соответствующий пример, когда  $a \geq b$ ,  $b \geq c$ , но  $a \geq c$  ложно).

Взаимосвязь введенных отношений можно выразить следующим образом

$$> \implies \geq \implies \geq \implies \geq.$$

Согласно этой связи неравенство  $a > b$  влечет выполнение неравенства  $a \geq b$ , которое, в свою очередь, приводит к выполнению  $a \geq b$ , откуда всегда следует  $a \geq b$ .

Условимся *скалярное произведение* векторов  $a, b$  пространства  $\mathbb{R}^m$  записывать в виде

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i.$$

Введём в рассмотрение *неотрицательный ортант*  $m$ -мерного пространства:

$$\mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq \mathbf{0}\}.$$

Отметим, что начало координат этому множеству не принадлежит.

В дальнейшем понадобится следующая характеристика отношения  $\succsim$ , в которой используется обозначение

$$\mathbf{M} = \{\mu \in \mathbb{R}^m \mid \mu > \mathbf{0}, \sum_{i=1}^m \mu_i = 1\} \subset \mathbb{R}_+^m.$$

**Л е м м а 2.1** (В.Д. Ногин). *Выберем произвольно векторы  $a, b \in \mathbb{R}^m$ . Соотношение  $a \succsim b$  имеет место тогда и только тогда, когда существует  $\mu \in \mathbf{M}$ , для которого  $\langle \mu, a \rangle \geq \langle \mu, b \rangle$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $a \succsim b$ . Если при этом  $a = b$ , то неравенство  $\langle \mu, a \rangle \geq \langle \mu, b \rangle$  справедливо для любого вектора  $\mu$ . Поэтому рассмотрим случай, когда  $a \neq b$ . В этом случае найдется такой номер  $j \in I$ , что  $a_j > b_j$ . Тогда, как нетрудно понять, всегда можно подобрать вектор  $\mu \in \mathbf{M}$ ,  $j$ -я компонента которого настолько велика по сравнению с остальными, что непременно будет выполнено неравенство

$$\langle \mu, a \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i a_i \geq \sum_{i=1}^m \mu_i b_i = \langle \mu, b \rangle.$$

Проверим обратное утверждение, предположив напротив, что для некоторого  $\mu \in \mathbf{M}$  верно неравенство  $\langle \mu, a \rangle \geq \langle \mu, b \rangle$ , но при этом соотношение  $a \succsim b$  ложно. Последнее влечет неравенство  $b \geq a$ . В таком случае неравенство  $\langle \mu, b \rangle > \langle \mu, a \rangle$  имеет место для

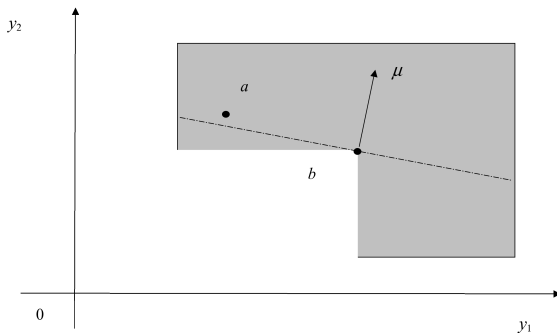


Рис. 2: Иллюстрация соотношения  $\langle \mu, a \rangle \geq \langle \mu, b \rangle$ .

любого  $\mu \in \mathbf{M}$ , что несовместимо со сделанным выше предположением. ■

### 2.3. Оптимальность по Парето.<sup>1</sup>

**О п р е д е л е н и е 2.1** (в негативной форме). Точка  $x^* \in X$  называется *оптимальной по Парето* (*парето-оптимальной* или *эффективной*), если не существует такой точки  $x \in X$ , для которой выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x^*)$ . При этом вектор  $f(x^*)$  имеют *оптимальным по Парето* или *эффективным*.

В случае одного критерия ( $m = 1$ ) оптимальная по Парето точка превращается в точку максимума функции  $f_1$ . Отсюда следует, что понятие Парето-оптимальной точки представляет собой прямое обобщение точки максимума скалярной числовой функции на случай векторного критерия.

Поскольку неравенство  $f(x) \geq f(x^*)$  ложно тогда и только тогда, когда истинно соотношение  $f(x) \succ f(x^*)$ , можно сформулировать еще одно определение парето-оптимальной точки, которое эквивалентно определению 2.1.

**О п р е д е л е н и е 2.1** (в позитивной форме). Точка  $x^* \in X$  называется *оптимальной по Парето* (*парето-оптимальной*), если

<sup>1</sup>V. Pareto (1848-1923) – выдающийся итальянский экономист и социолог.

для любой точки  $x \in X$  выполнено соотношение  $f(x^*) \geq f(x)$ .

**Пример 2.1** Пусть  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $X = [0, 3]$ ,  $f_1(x) = -(x - 1)^2 + 1$ ,  $f_2(x) = -(x - 2)^2 + 1$ . Здесь каждая точка отрезка  $[1, 2]$  является парето-оптимальной.

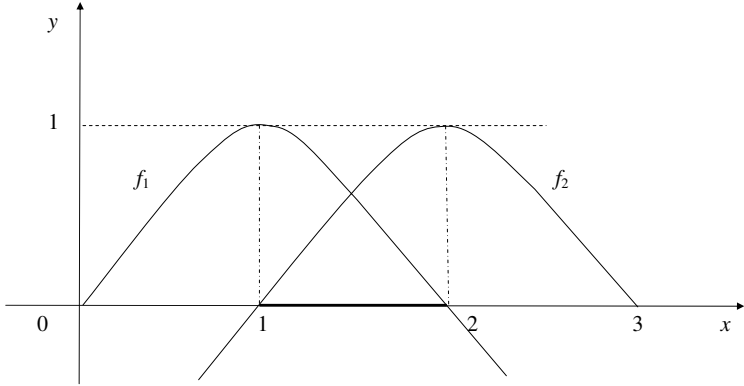


Рис. 3: Иллюстрация к примеру 2.1.

Из приведенного примера следует, что множество всех парето-оптимальных точек, а также множество всех парето-оптимальных векторов могут содержать бесконечное число элементов.

Введём обозначение для множества всех парето-оптимальных точек:

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X, \text{ такого, что } f(x) \geq f(x^*)\}$$

и для множества всех парето-оптимальных векторов:

$$P(Y) = f(P_f(X)) =$$

$$= \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ для которого } y \geq y^*\}.$$

**Замечание 2.1.** Отметим, что при  $m = 1$  множество  $P(Y)$  не может содержать более пусто, как правило, содержит более одного элемента. Указанное обстоятельство выявляет принципиальное отличие многокритериальных задач от однокритериальных.

**2.4. Оптимальность по Слейтеру.** Ещё одно существенное отличие многокритериальных задач от однокритериальных состоит в том, что в многокритериальной оптимизации возможны различные (неэквивалентные) определения понятия оптимальности, которые в частном случае  $m = 1$  совпадают друг с другом. Иначе говоря, обобщение понятия точки максимума может быть проведено различными способами.

**О п р е д е л е н и е 2. 2** (в негативной форме) (М. Slater). Точка  $x^* \in X$  называется *оптимальной по Слейтеру* или *слабо эффективной*, если не существует такой точки  $x \in X$ , для которой выполнено строгое неравенство  $f(x) > f(x^*)$ . При этом вектор  $f(x^*)$  именуется *оптимальным по Слейтеру* или *слабо эффективным*.

**О п р е д е л е н и е 2. 2** (в позитивной форме). Точка  $x^* \in X$  называется *оптимальной по Слейтеру (слабо эффективной)*, если для любой точки  $x \in X$  существует такой номер  $i \in I$ , что имеет место неравенство  $f_i(x^*) \geq f_i(x)$ .

Введём также соответствующие обозначения для множества оптимальных по Слейтеру точек и векторов:

$$S_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X, \text{ что } f(x) > f(x^*)\};$$

$$S(Y) = f(S_f(X)) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ что } y > y^*\}.$$

Очевидно, имеют место включения

$$P_f(X) \subset S_f(X), \quad P(Y) \subset S(Y).$$

**2.5. Внешняя устойчивость.** Множество Парето  $P(Y)$  *внутренне устойчиво* в том смысле, что в нём не содержится ни одной такой пары векторов  $y', y''$ , которые были бы сравнимы по отношению  $\geq$ , т.е. ни одно из соотношений  $y' \geq y''$ ,  $y'' \geq y'$  не имеет места. Это означает, что если при переходе от одного парето-оптимального вектора к другому происходит увеличение (или уменьшение) какой-то компоненты, то обязательно найдется компонента, по которой при этом переходе произойдет уменьшение (соответственно, – увеличение).

Множество Парето  $P(Y)$  называют *внешне устойчивым*, если для любого  $y \in Y \setminus P(Y)$  найдётся  $y^* \in P(Y)$ , для которого  $y^* \geq y$ .

Нетрудно проверить, что в случае конечного  $Y$  множество Парето всегда будет внешне устойчивым. В самом деле, имеет место следующее утверждение.

*Л е м м а 2. 2. Пусть множество  $Y$  не пусто и конечно. Тогда множество Парето  $P(Y)$  также не пусто и, кроме того, внешне устойчиво.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала установим существование парето-оптимальных векторов. Для этого предположим противное и рассмотрим произвольно выбранный вектор  $y \in Y$ . Поскольку этот вектор не является парето-оптимальным, найдётся такой вектор  $y' \in Y$ , что  $y' \geq y$ . При этом вектор  $y' \in Y$  также не является парето-оптимальным. Следовательно, существует такой вектор  $y'' \in Y$ , что  $y'' \geq y'$ . Но и вектор  $y''$  не должен быть парето-оптимальным, поэтому существует ещё один вектор и т.д. Заметим, что все получающиеся при этом векторы отличны друг от друга, поэтому в силу конечности множества возможных векторов  $Y$  этот процесс через конечное число шагов завершится. В итоге останется всего один (последний) вектор, который обязательно будет парето-оптимальным. Полученное противоречие устанавливает непустоту множества Парето.

Аналогичные рассуждения используются и для проверки внешней устойчивости множества Парето. ■

Простые примеры показывают, что в случае бесконечного  $Y$  множество Парето  $P(Y)$  может не оказаться внешне устойчивым.

Множество Слейтера  $S(Y)$  называют *внешне устойчивым*, если для любого  $y \in Y \setminus S(Y)$  найдётся  $y^* \in S(Y)$ , для которого  $y^* > y$ . В случае конечного  $Y$  множество Слейтера также будет внешне устойчивым (убедиться самостоятельно).

Предлагается самостоятельно проверить, что внешняя устойчивость множества парето-оптимальных точек всегда влечет внешнюю устойчивость множества слабо эффективных точек (но не на-



оборот).

**2.6. Оптимальность по Джеоффриону.** Разберём следующий пример.

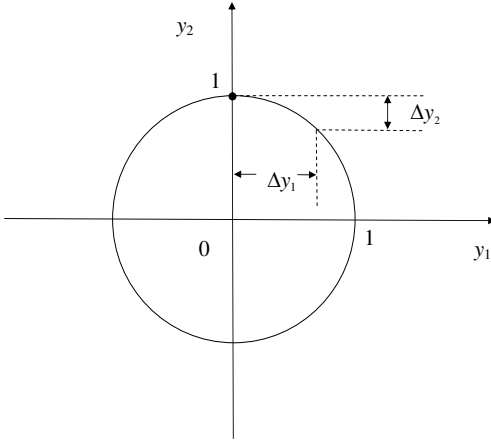


Рис. 4: Иллюстрация к примеру 2.2.

**Пример 2.2.** Пусть  $m = 2$  и множество  $Y$  возможных двумерных векторов представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат, т.е.  $Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\}$ .

Легко понять, что в данном случае (см. рис. 4) множества Парето и Слейтера равны друг другу и совпадают с частью окружности, расположенной в первой четверти плоскости. Точка  $(0, 1)$  является парето-оптимальной, однако при перемещении из этой точки вправо и вниз по окружности увеличение первой компоненты точки происходит с большим порядком малости, чем уменьшение второй компоненты, так как

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \frac{\Delta y_1}{1 - \sqrt{1 - (\Delta y_1)^2}} = \frac{1 + \sqrt{1 - (\Delta y_1)^2}}{\Delta y_1} \rightarrow +\infty$$

при  $\Delta y_1, \Delta y_2 \rightarrow +0$ . В соответствии с этим, при перемещении из парето-оптимальной точки  $(0, 1)$  в достаточно близкую к ней

парето-оптимальную точку будет получен выигрыш (увеличение) первого порядка малости по первому критерию за счёт проигрыша (уменьшения) второго порядка малости по второму критерию. Это означает что, данная точка  $(0, 1)$  хотя и является парето-оптимальной, но в указанном смысле аномальна и её при определенных обстоятельствах вполне можно исключить из числа решений многокритериальной задачи.

Реализация идеи удаления из числа всех парето-оптимальных точек в указанном смысле аномальных парето-оптимальных точек приводит к следующему определению.

**О п р е д е л е н и е 2.3** (А.М. Geoffrion). Точка  $x^* \in X$  называется *оптимальной по Джеоффриону* или *собственно эффективной*, если она парето-оптимальна и, кроме того, существует такое положительное число  $A > 0$ , что для всех номеров  $i \in I$  и всех  $x \in X$ , для которых имеет место неравенство  $f_i(x) > f_i(x^*)$ , и некоторого  $j \in I$  (которое всегда найдется благодаря парето-оптимальности  $x^*$ ) такого, что  $f_j(x) < f_j(x^*)$  выполняется неравенство

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_j(x^*) - f_j(x)} \leq A.$$

Для обозначения множества всех оптимальных по Джеоффриону точек и векторов будем использовать обозначения  $G_f(X)$  и  $G(Y)$ , соответственно.

Всякую парето-оптимальную точку, не являющуюся собственно эффективной, называют *несобственно эффективной*. В соответствии с определением 2.3 парето-оптимальная точка  $x^* \in X$  несобственно эффективна, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа  $A$  найдутся такие  $i \in I$  и  $x \in X$ , удовлетворяющие неравенству  $f_i(x) > f_i(x^*)$ , что для всякого  $j \in I$ , такого, что  $f_j(x) < f_j(x^*)$ , будет выполнено неравенство

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_j(x^*) - f_j(x)} > A.$$

В рассмотренном выше примере 2.2 концевые точки  $(0,1)$  и  $(1,0)$  множества Парето являются несобственно эффективными.

По определению собственной эффективности имеют место включения

$$G_f(X) \subset P_f(X), \quad G(Y) \subset P(Y).$$

*Л е м м а 2.3. Пусть непустое множество  $Y$  содержит конечное число элементов. Тогда всякая эффективная точка собственно эффективна, т.е.  $P_f(X) = G_f(X)$ ,  $P(Y) = G(Y)$ .*

*Д о к а з а т е л ь с т в о* проведем для векторов. С этой целью выберем произвольный вектор  $y^* \in P(Y)$ . В случае, когда для любых  $y \in Y$  и  $k \in I$  выполнено  $y_k^* \geq y_k$ , неравенство  $f_j(x) < f_j(x^*)$  невозможно ни для какого  $j \in I$ . Отсюда в соответствии с определением 2.3 получаем  $y^* \in G(Y)$ .

Пусть существуют  $y \in Y$  и  $i \in I$ , для которых верно  $y_i > y_i^*$ . В этом случае вектор  $y^*$  также является собственно эффективным, так для него будут выполнены все условия определения 2.3, в котором число  $A$  выбрано следующим образом

$$A = \max\left\{\frac{y_i - y_i^*}{y_j^* - y_j} \mid y \in Y, \quad i, j \in I, \quad i \neq j, \quad y_i > y_i^*, \quad y_j^* > y_j\right\}. \blacksquare$$

### 3. Условия оптимальности

Здесь представлено систематическое изложение различного рода необходимых и достаточных условий эффективности, слабой эффективности и собственной эффективности. Формулируются результаты, ставшие уже классическими, а также полученные сравнительно недавно. Сначала разбираются общие условия, которые имеют место для самого широкого класса многокритериальных задач. Затем рассмотрение ограничивается задачами с вогнутыми целевыми функциями на выпуклом множестве и, в частности, с линейными функциями и многогранным множеством ограничений. Кроме того, выводятся условия эффективности для задач с дифференцируемыми функциями, которые представляют собой обобщение известной теоремы Ферма о том, что в

точке экстремума производная целевой функции обращается в нуль. Следует иметь в виду, что каждое условие оптимальности открывает определенный способ сведения решения многокритериальной задачи к одной или серии скалярных (однокритериальных) задач.

**3.1. Общие условия эффективности и слабой эффективности.** В этом разделе рассматриваются различного рода необходимые и достаточные условия эффективности, слабой эффективности и собственной эффективности, которые имеют место при минимальных требованиях к множеству  $X$  и векторной функции  $f$ . Тем самым, эти условия являются переформулировками или "почти переформулировками" соответствующих определений эффективности.

**Т е о р е м а 3. 1** (Ю.Б. Гермейер). Пусть  $y^* \in Y$  и  $y^* > \mathbf{0}$ . Вектор  $y^*$  слабо эффективен тогда и только тогда, когда существует такой вектор  $\mu \in \mathbf{M}$ , что

$$\min_{i \in I} \mu_i y_i^* \geq \min_{i \in I} \mu_i y_i \quad \text{для всех } y \in Y. \quad (3.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вектор  $y^* \in Y$  слабо эффективен в том и только том случае (см. определение 2.2), если для каждого  $y \in Y$  найдется номер  $i \in I$ , при котором  $y_i^* \geq y_i$ .

Введём вектор  $\mu$  с компонентами

$$\mu_i = \frac{1}{y_i^* \sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j^*}} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbf{M}$ . С этим вектором неравенство  $y_i^* \geq y_i$ , выполняющееся для любого  $y \in Y$ , можно переписать так

$$\min_{i \in I} \mu_i y_i^* = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{y_j^*}} \geq \mu_i y_i \geq \min_{i \in I} \mu_i y_i.$$

Полученное равносильно неравенству (3.1). ■

Рис. 5 иллюстрирует доказанную теорему. Линии уровня нелинейной функции  $y = \min_{i=1,2} \{\mu_i y_i\}$  представляют собой углы, сто-

роны которых параллельны координатным осям, а вершины располагаются на прямой, задаваемой уравнением  $\mu_1 y_1 = \mu_2 y_2$ . Точка  $y^*$  максимума указанной нелинейной функции будет располагаться на границе множества  $Y$  и отмеченной выше прямой при условии, что внутрь угла с вершиной в точке  $y^*$  не попадет ни одна точка множества  $Y$ .

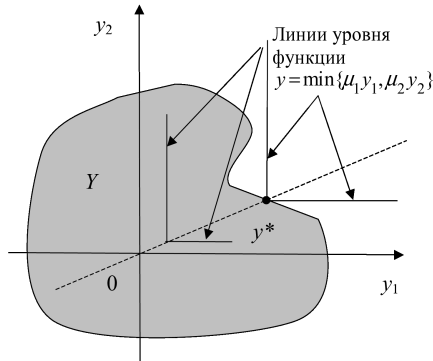


Рис. 5: Иллюстрация к теореме 3.1.

Теорема 3.1 открывает определенный путь решения многокритериальных задач, который именуют *скаляризацией*. Скаляризация означает сведение решения многокритериальной задачи к семейству скалярных (однокритериальных) задач. В данном случае построение множества слабо эффективных точек сводится к решению семейства скалярных задач максимизации функции минимума  $\min_{i \in I} \mu_i f_i(x)$ , зависящей от векторного параметра  $\mu$ . Для отыскания какого-то одного "наилучшего" слабо эффективного решения предлагается выбрать один конкретный вектор  $\mu$ , компоненты которого характеризуют "вес" или "важность" каждого из имеющихся критериев, а затем решить соответствующую однокритериальную задачу. Недостаток в реализации такого подхода состоит в

отсутствии чётких правил назначения "векторного" вектора  $\mu$ .

**С л е д с т в и е 3. 1** (J. Jahn). Пусть  $y^* \in Y$  и существует вектор  $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ , такой, что неравенство  $\hat{y} > y$  выполняется для всех  $y \in Y$ . Вектор  $y^*$  слабо эффективен тогда и только тогда, когда существует такой вектор  $\mu \in M$ , что

$$\max_{i \in I} \mu_i(\hat{y}_i - y_i^*) \leq \max_{i \in I} \mu_i(\hat{y}_i - y_i) \quad \text{для всех } y \in Y. \quad (3.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Применим теорему 3.1 к вектор-функции  $\hat{y} - y$ , которая удовлетворяет её условиям. Получим необходимое и достаточное условие слабой эффективности точки  $y^*$  относительно указанной вектор-функции:

$$\min_{i \in I} \mu_i(\hat{y}_i - y_i^*) \geq \min_{i \in I} \mu_i(\hat{y}_i - y_i) \quad \text{для всех } y \in Y.$$

Однако нам надо располагать условием слабой эффективности для функции  $y = f(x)$ . Она получается из функции  $\hat{y} - y$  умножением на  $-1$  и прибавлением постоянного вектора  $\hat{y}$ . Поэтому в полученном выше неравенстве знак перед функцией  $\hat{y}_i - y_i$  следует заменить на противоположный. При этом постоянный вектор  $\hat{y}$  можно не прибавлять, так как условие слабой оптимальности сохраняет свою справедливость в результате прибавления постоянных слагаемых к компонентам векторного критерия, что сразу следует из определения слабой эффективности. После такой замены с учётом равенства  $\min(-h(\cdot)) = -\max h(\cdot)$  придем к требуемому неравенству (3.2). ■

**Т е о р е м а 3. 2** (В.Д. Ногин) Вектор  $y^* \in Y$  слабо эффективен тогда и только тогда, когда для некоторого вектора  $p \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющего хотя бы одному из условий

1)  $p \in P_\alpha = \{p \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = \alpha\}$ , где  $\alpha$  – произвольное заранее зафиксированное число;

2)  $p \in U = \{p \in \mathbb{R}^m \mid p_i \geq f_i(x) \quad \text{для всех } x \in X\}$ , где компоненты вектор-функции  $f$  считаются ограниченными сверху на множестве  $X$ ;

выполнено неравенство

$$\max_{i \in I} (p_i - y_i^*) \leq \max_{i \in I} (p_i - y_i) \quad \text{для всех } y \in Y. \quad (3.3)$$

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть  $y^*$  – произвольный слабо эффективный вектор. Введём вектор  $p$  с компонентами

$$p_i = y_i^* - \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^m y_j^* - \alpha \right), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно,  $\sum_{i=1}^m p_i = \alpha$ . Для доказательства предположим противное: существует точка  $y \in Y$ , для которой выполнено

$$\max_{i \in I} (p_i - y_i^*) > \max_{i \in I} (p_i - y_i).$$

Отсюда для любого  $i \in I$  получаем неравенство

$$p_i - y_i < \max_{i \in I} (p_i - y_i^*) = \max_{i \in I} (y_i^* - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^* + \frac{\alpha}{m} - y_i^*) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^* + \frac{\alpha}{m},$$

из которого с учётом вида компонент  $p_i$  следует

$$y_i^* - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^* + \frac{\alpha}{m} - y_i < -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j^* + \frac{\alpha}{m},$$

а значит,  $y_i^* < y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Последнее противоречит слабой эффективности  $y^*$ .

Достаточность. Пусть для вектора  $p$  из условий теоремы выполняется неравенство (3.3). Вновь используем рассуждения от противного: вектор  $y^*$  не является слабо эффективным, т.е. найдется  $y \in Y$ , такой, что  $y > y^*$ . В таком случае  $p_i - y_i^* > p_i - y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Отсюда вытекает  $\max_{i \in I} (p_i - y_i^*) > \max_{i \in I} (p_i - y_i)$ , что противоречит (3.3).

2) Необходимость. Пусть  $y^*$  - произвольный слабо эффективный вектор. Нетрудно понять, что должно существовать такое положительное число  $w$ , при котором вектор  $W = (w, w, \dots, w) \in \mathbb{R}^m$  удовлетворяет включению  $p = y^* + W \in U$ .

Для доказательства предположим противное, т.е. существует вектор  $y \in Y$ , для которого выполнено

$$\max_{i \in I} (p_i - y_i^*) > \max_{i \in I} (p_i - y_i).$$

Отсюда для каждого  $i$  следует неравенство

$$\max_{i \in I} (p_i - y_i^*) > (p_i - y_i).$$

Подставив в обе части последнего неравенства выражение для  $p_i = y_i^* + w$ , получим  $p_i - y_i^* > p_i - y_i$  для всех  $y \in Y$ , что противоречит слабой эффективности  $y^*$ .

Достаточность устанавливается так же, как и в пункте 1). ■

Множество  $U$  из условия 2) в последней теореме можно интерпретировать как множество недостижимых "идеальных" векторов, а условие (3.3) показывает, что  $y^*$  является среди всех точек множества  $Y$  ближайшей к  $p$  в равномерной (чебышёвской) метрике (см. рис 6).

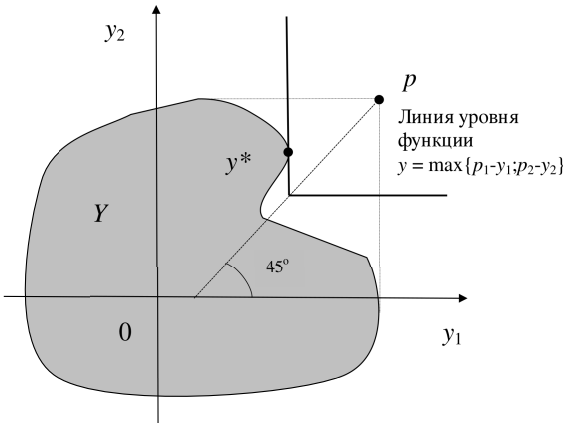


Рис. 6: Иллюстрация к теореме 3.2.

Векторы  $y$ , удовлетворяющие условию  $\sum_{i=1}^m y_i = \alpha$  при  $\alpha = \sum_{i=1}^m \sup_{y \in Y} y_i$ , образуют некоторую гиперплоскость в критериальном пространстве, которую в так же можно рассматривать, как



"идеальное" недостижимое множество. Тогда минимизация функции  $\max_{i \in I} (p_i - y_i)$  на множестве  $Y$ , о которой идет речь в последней теореме, означает поиск в этом множестве вектора, ближайшего к точке  $p$ , расположенной на указанной гиперплоскости, при условии, что используется равномерная (чебышёвская) метрика (см. рис 6). Если же выбрать  $p_i = \inf_{y \in Y} y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , то в результате применения теоремы 3.2 придём к вектору в критериальном пространстве, наиболее равномерно удаленному от точки с минимальными ("наихудшими") значениями критериев.

Существует целое направление в рамках многокритериальной оптимизации, называемое *целевым программированием*, в соответствии с которым "наилучшим" решением считается то, которое реализует минимум расстояния (при использовании той или иной метрики) от множества допустимых векторов  $Y$  до некоторой точки критериального пространства, выбранной за пределами  $Y$  в качестве определенной "идеальной" цели. В теореме 3.2 такой "идеальной" целью в критериальном пространстве служит вектор  $p$ .

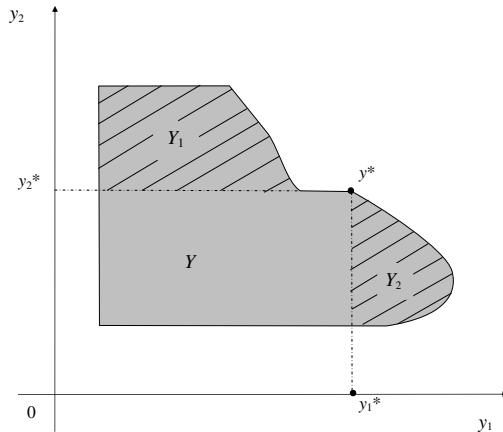


Рис. 7: Иллюстрация к теореме 3.3.

**Т е о р е м а 3.3** (В.В. Подиновский). *Вектор  $y^* \in Y$  парето-оптимален тогда и только тогда, когда для каждого  $i \in I$  выпол-*

нено

$$y_i^* \geq y_i \quad \text{для всех } y \in Y_i, \quad (3.4)$$

где

$$Y_i = \{y \in Y \mid y_k \geq y_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad k \neq i\}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. Пусть  $y^*$  – парето-оптимальный вектор. Если предположить противное тому, что требуется установить, т.е. что для некоторого  $i \in I$  и некоторого  $y \in Y$  имеет место  $y_i > y_i^*$  и  $y_k \geq y_k^*$  для всех  $k = 1, 2, \dots, m; \quad k \neq i$ , то это будет противоречить парето-оптимальности вектора  $y^*$ .

**Достаточность.** Пусть для вектора  $y^*$  при каждом  $i \in I$  имеет место (3.4). Допуская напротив, что этот вектор не является парето-оптимальным, придём к существованию вектора  $y \in Y$ , для которого  $y \geq y^*$ . Это несовместимо с допущением о выполнении (3.4) для каждого  $i \in I$ . ■

**Т е о р е м а 3. 4.** Вектор  $y^* \in Y$  парето-оптимален тогда и только тогда, когда выполнено

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \geq \sum_{i=1}^m y_i \quad \text{для всех } y \in Y_0, \quad (3.5)$$

где

$$Y_0 = \{y \in Y \mid y \geq y^*\}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. Пусть  $y^*$  – парето-оптимальный вектор. Предположим противное: найдётся  $y \in Y_0$ , такой, что  $\sum_{i=1}^m y_i > \sum_{i=1}^m y_i^*$ . Но это вместе с  $y \geq y^*$  противоречит парето-оптимальности вектора  $y^*$ .

**Достаточность.** Пусть для вектора  $y^*$  выполнено (3.5). Вновь, если допустить, что этот вектор не является парето-оптимальным, придём к существованию  $y \in Y_0$ , такого, что  $\sum_{i=1}^m y_i^* < \sum_{i=1}^m y_i$ . Это несовместимо с условием (3.5). ■

**З а м е ч а н и е 3. 1.** Анализ доказательства последней теоремы показывает, что она сохраняет свою силу и в более общем случае,

когда вместо условия (3.5), в котором фигурирует сумма критериев  $\sum_{i=1}^m y_i$ , используется взвешенная сумма  $\sum_{i=1}^m \mu_i y_i$ , а именно

$$\langle \mu, y^* \rangle \geq \langle \mu, y \rangle \quad \text{для всех } y \in Y_0,$$

причём  $\mu \in \mathbf{M}$  – произвольный фиксированный вектор.

Говорят, что числовая функция  $F$ , заданная на множестве  $Y$ , является *неубывающей* (*возрастающей*) по отношению  $\geq$ , если

$$y', y'' \in Y, \quad y' \geq y'' \implies F(y') \geq F(y'') \quad (F(y') > F(y'')).$$

**Т е о р е м а 3. 5.** Пусть  $y^* \in Y$  – точка максимума неубывающей по отношению  $\geq$  числовой функции  $F$  на множестве  $Y$ . Если имеет место хотя бы одно из следующих двух условий

- 1)  $F$  возрастает по отношению  $\geq$  на множестве  $Y$ ;
- 2)  $y^*$  – единственная точка максимума функции  $F$  на множестве  $Y$ ;

то  $y^* \in P(Y)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим точку  $y^*$  максимума функции  $F$  на множестве  $Y$  и проведём доказательство от противного. Если она не является парето-оптимальной, то найдется такая точка  $y \in Y$ , что  $y \geq y^*$ . В случае возрастающей функции  $F$  из последнего неравенства вытекает противоречие тому, что  $y^*$  – точка максимума функции  $F$ . Если же  $F$  – неубывающая, то получаем равенство  $F(y^*) = F(y)$ , которое вместе с  $y \neq y^*$  не совместимо с условием единственности точки максимума функции  $F$ . ■

**С л е д с т в и е 3. 2.** Пусть  $\mu \in \mathbf{M}$ . Каждая точка максимума функции  $F(y) = \langle \mu, y \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$  на множестве  $Y$  парето-оптимальна.

**С л е д с т в и е 3. 3.** Пусть  $\mu \in \mathbf{M}$  и  $p > 0$ . Каждая точка максимума функции  $F(y) = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i^p$  на множестве  $Y$  парето-оптимальна.

**С л е д с т в и е 3. 4.** Пусть  $\mu \in \mathbf{M}$  и  $y > \mathbf{0}$  для всех  $y \in Y$ . Каждая точка максимума функции  $F(y) = \prod_{i=1}^m y_i^{\mu_i}$  на множестве  $Y$  парето-оптимальна.

**З а м е ч а н и е 3. 2.** Читателю предлагается самостоятельно выписать результаты, аналогичные теореме 3.5 и следствиям 3.1–3.3 применительно к слабо эффективным точкам.

**3.2. Общие условия собственной эффективности.** Определение 2.1 парето-оптимального вектора на основе леммы 2.1 можно переформулировать следующим образом: вектор  $y^* \in Y$  является парето-оптимальным, если существует векторная функция  $\mu$ , определённая на множестве  $Y$  и принимающая значения во множестве  $\mathbf{M}$ , такая, что неравенство

$$\langle \mu(y), y^* \rangle \geq \langle \mu(y), y \rangle$$

имеет место для всех  $y \in Y$ .

Простые примеры убеждают, что векторная функция  $\mu$  из приведенной выше переформулировки в общем случае имеет бесконечное множество значений. Однако, как показывает следующий результат, если рассмотреть ограничить собственно эффективными векторами, то можно обойтись конечнозначной функцией  $\mu$ .

**Т е о р е м а 3. 6** (В.Д. Ногин). *Вектор  $y^* \in Y$  собственно эффективен тогда и только тогда, когда найдется конечный набор векторов  $\mu^1, \dots, \mu^p \in \mathbf{M}$ ,  $p \leq t$ , обладающий тем свойством, что для каждого вектора  $y \in Y$  существует номер  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , при котором имеет место неравенство*

$$\langle \mu^i, y^* \rangle \geq \langle \mu^i, y \rangle. \quad (3.6)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Не уменьшая общности последующих рассуждений, будем считать, что  $y^* = \mathbf{0}$ .

**Достаточность.** Пусть существует набор векторов  $\mu^1, \dots, \mu^p \in \mathbf{M}$ ,  $p \leq t$ , удовлетворяющий условиям доказываемой теоремы. Из переформулировки определения эффективного вектора, приведенной в начале данного раздела, следует, что вектор  $y^* = \mathbf{0}$  эффективен. Убедимся в том, что этот вектор собственно эффективен. С этой целью введём положительное число

$$A = \max\left\{\frac{m\mu_j^i}{\mu_k^i} \mid j, k \in I, i = 1, 2, \dots, p\right\}$$

и предположим противное, т.е. что для указанного числа  $A$  существует номер  $k \in I$  и точка  $y \in Y$ , такие, что

$$y_k > 0, \quad y_k + Ay_j > 0 \quad \text{для всех } j \in I_0, \quad j \neq k,$$

где  $I_0 = \{j \in I \mid y_j < 0\}$ . Благодаря эффективности нулевого вектора имеем  $I_0 \neq \emptyset$ . Суммируя выписанные выше неравенства по  $j \in I_0$ , с учётом  $y_k > 0$  получим

$$my_k + A \sum_{j \in I_0} y_j > 0. \quad (3.7)$$

С другой стороны, согласно условию доказываемой теоремы для точки  $y$  существует вектор  $\mu^i \in \mathbf{M}$  такой, что  $\langle \mu^i, y \rangle \leq 0$ . Поэтому

$$\mu_k^i y_k + \sum_{j \in I_0} \mu_j^i y_j \leq 0.$$

Умножая это неравенство на  $m/\mu_k^i$  и используя определение числа  $A$ , получаем неравенство

$$my_k + A \sum_{j \in I_0} y_j \leq 0,$$

противоречащее (3.7).

Необходимость. Если эффективный вектор  $y^* = \mathbf{0}$  собственно эффективен, то найдется такое  $A > 0$ , что для каждого  $i \in I$ , для которого  $y_i > 0$ , и некоторого  $y_j < 0$  выполняется неравенство  $y_i + Ay_j \leq 0$ . Отсюда следует, что найдется  $A > 0$ , при котором для любого  $i \in I$  несовместна на множестве  $Y$  система неравенств

$$y_i > 0, \quad y_i + Ay_j > 0 \quad \text{для всех } j \in I_0; \quad j \neq i,$$

а значит, и система

$$y_i > 0, \quad y_i + Ay_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq i. \quad (3.8)$$

Выберем произвольный вектор  $y \in Y$ . Для каждого номера  $i \in I$  имеет место либо неравенство  $y_i \leq 0$ , либо  $y_i + Ay_j \leq 0$  при

некотором  $j \in I \setminus \{i\}$ . Складывая по  $i \in I$  все подобного рода неравенства, получим

$$\sum_{i=1}^m A_i y_i \leq 0,$$

где все числа  $A_i$  положительны и в общем случае зависят от  $y$ . Отсюда следует неравенство (3.6) при  $y^* = \mathbf{0}$  и

$$\mu^i = \hat{\mu} = \left( \frac{A_1}{\sum_{i \in I} A_i}, \frac{A_2}{\sum_{i \in I} A_i}, \dots, \frac{A_m}{\sum_{i \in I} A_i} \right).$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\hat{\mu} \in \mathbf{M}$ . Таким образом, установлено, что для каждого  $y \in Y$  существует свой вектор  $\hat{\mu}$ , при котором имеет место неравенство (3.6). В силу конечности множества  $I$  число всех векторов, обладающих указанными свойствами, конечно. Иными словами, существует конечный набор векторов  $\{\hat{\mu}^1, \hat{\mu}^2, \dots, \hat{\mu}^p\} \subset \mathbf{M}$  с тем свойством, что для каждого  $y \in Y$  найдется номер  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , при котором имеет место (3.6) (с  $\mu^i = \hat{\mu}^i$ ).

Теперь укажем набор не более, чем  $m$  векторов, обладающий необходимыми свойствами. С этой целью введём положительное число

$$\varepsilon = \min\{\hat{\mu}_j^i \mid j \in I, i = 1, 2, \dots, p\} \leq 1/m$$

и рассмотрим векторы  $\mu^i$  с компонентами вида

$$\mu_j^i = \begin{cases} \varepsilon, & j = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq i; \\ 1 - (m-1)\varepsilon, & j = i; \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.9)$$

Нетрудно проверить, что  $\mu^i \in \mathbf{M}$  при каждом  $i \in I$ .

Докажем, что любой вектор из "старого" набора  $\{\hat{\mu}^1, \hat{\mu}^2, \dots, \hat{\mu}^p\}$  можно представить в виде линейной комбинации векторов (3.9) с неотрицательными коэффициентами в сумме равными единице. Для этого выберем произвольный вектор  $\hat{\mu}^l$  "старого" набора. Если  $\varepsilon = 1/m$ , то, очевидно,  $\hat{\mu}_i^l = 1/m$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . В этом случае

для коэффициентов  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 1/m$  имеем

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_j^i = \hat{\mu}_j^l, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.10)$$

т.е. требуемое представление установлено. Если  $\varepsilon < 1/m$ , то в качестве коэффициентов линейной комбинации следует взять

$$\lambda_i = \frac{\hat{\mu}_i^l - \varepsilon}{1 - m\varepsilon} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . При помощи непосредственной проверки можно убедиться, что для этих чисел  $\lambda_i$  равенства (3.10) также имеют место. Тем самым, возможность указанного выше представления полностью доказана.

Остаётся установить, что "новый" набор векторов (3.9) обладает установленным ранее свойством "старого" набора. Предположим напротив, что существует вектор  $y \in Y$ , для которого верно

$$\langle \mu^j, y \rangle > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.11)$$

Как показано выше, для любого  $l \in \{1, 2, \dots, p\}$  при некоторых неотрицательных числах  $\lambda_j$ , в сумме равных единице, имеет место представление (3.10). Поэтому (3.11) влечет неравенства

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \langle \mu^j, y \rangle = \langle \hat{\mu}^l, y \rangle > 0, \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

выполнение которых означает, что и "старый" набор векторов также не обладает упомянутым свойством. Это противоречит установленному ранее. ■

**З а м е ч а н и е 3.3.** В случае конечного множества  $Y$  условия доказанной теоремы являются необходимыми и достаточными для того, чтобы вектор  $y^* \in Y$  был эффективным. Это следует из леммы 2.3, гарантирующей совпадение эффективных и собственно эффективных точек в случае конечного множества  $Y$ .

**З а м е ч а н и е 3. 4.** Анализ доказательства теоремы 3.6 показывает, что в её формулировке всегда можно считать, что векторы  $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^p$ , о которых в ней идет речь, имеют вид (3.9), где  $\varepsilon$  – некоторое достаточно малое положительное число.

Из части "достаточность" теоремы 3.6 при  $p = 1$  немедленно вытекает следующее

**С л е д с т в и е 3. 5** (А. Geoffrion) *При положительных  $\mu_i$  всякая точка максимума линейной функции  $z = \langle \mu, y \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$  на множестве  $Y$  является собственно эффективной.*

**Т е о р е м а 3. 7** (В.Д. Ногин). *Для того чтобы вектор  $y^*$  был собственно эффективным, необходимо и достаточно, чтобы существовало положительное число  $\varepsilon < 1/t$ , при котором  $y^*$  является слабо эффективным вектором относительно линейной вектор-функции  $(\langle \mu^1, y \rangle, \langle \mu^2, y \rangle, \dots, \langle \mu^m, y \rangle)$  на множестве  $Y$ , где векторы  $\mu^i \in \mathbf{M}$  имеют вид (3.9).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из теоремы 3.6 следует, что вектор  $y^*$  собственно эффективен тогда и только тогда, когда существует положительное число  $\varepsilon < 1/t$ , при котором набор из  $t$  векторов вида (3.9) обладает требуемыми в формулировке указанной теоремы свойствами. Последнее, как нетрудно понять, согласно определению слабо эффективной точки (в позитивной форме), равносильно тому, что точка  $y^*$  слабо эффективна относительно линейной вектор-функции  $(\langle \mu^1, y \rangle, \langle \mu^2, y \rangle, \dots, \langle \mu^m, y \rangle)$  на множестве  $Y$ . ■

Теорема 3.6 позволяет получить геометрически наглядную интерпретацию собственно эффективного вектора. В самом деле, введём семейство многогранных конусов

$$\Lambda_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \langle \mu^i, z \rangle \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

где векторы  $\mu^i$  имеют вид (3.9) и  $0 < \varepsilon < 1/t$ , причём  $\mu^i \in \mathbf{M}$ .

При уменьшении положительного числа  $\varepsilon$  конус  $\Lambda_\varepsilon$  "сужается"; об этом свидетельствует следующее утверждение.

**Л е м м а 3. 1.** *Пусть  $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1/t$ . Тогда имеет место включение  $\Lambda_{\varepsilon'} \setminus \{0\} \subset \text{int} \Lambda_\varepsilon$ .*



Доказательство. Очевидно,

$$\text{int}\Lambda_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \langle \mu^i, z \rangle > 0 \quad i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Зафиксируем произвольную ненулевую точку  $z \in \Lambda_{\varepsilon'}$ . Для неё выполнены неравенства  $\langle \mu'^j, z \rangle \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , среди которых по крайней мере одно – строгое. Здесь через  $\mu'^j$  обозначены векторы вида (3.9), в которых вместо  $\varepsilon$  записано  $\varepsilon'$ . Тот факт, что равенства  $\langle \mu'^j, z \rangle = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , ложны, можно легко проверить при помощи рассуждения "от противного". В самом деле, если предположить противное, то благодаря линейной независимости векторов  $\mu'^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , система линейных уравнений  $\langle \mu'^j, z \rangle = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , относительно  $z$  является крамеровской с отличным от нуля определителем, а значит имеет единственное нулевое решение. Это противоречит предположению  $z \neq \mathbf{0}$ .

Введём векторы  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m$ , компоненты которых положительны и определяются равенством

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{1 - m\varepsilon'}, & j = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq i; \\ \frac{1 - (m-1)\varepsilon - \varepsilon'}{1 - m\varepsilon'}, & j = i; \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Можно проверить, что

$$\mu^i = \sum_{j=1}^m \lambda_j^i \mu'^j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Поэтому, умножая неравенство  $\langle \mu'^j, z \rangle \geq 0$  на положительное число  $\lambda_j^i$  и суммируя по  $j$ , с учётом того, что среди указанных неравенств есть строгое, получим неравенство

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^i \langle \mu'^j, z \rangle = \langle \mu^i, z \rangle > 0,$$

которое имеет место для любого  $i \in I$ . Поэтому  $z \in \text{int}\Lambda_\varepsilon$ . ■

Из равенств (3.9) следует, что в пределе при  $\varepsilon \rightarrow +0$  конус  $\Lambda_\varepsilon$  превратится в неотрицательный ортант вместе с началом координат, т.е. в  $\mathbb{R}_+^m \cup \{\mathbf{0}\}$ .

**Т е о р е м а 3. 8** (В.Д. Ногин). *Вектор  $y^* \in Y$  собственно эффективен тогда и только тогда, когда найдется  $\varepsilon \in (0, 1/m)$ , при котором выполнено равенство*

$$Y \cap [\Lambda_\varepsilon + y^*] = \{y^*\}. \quad (3.12)$$

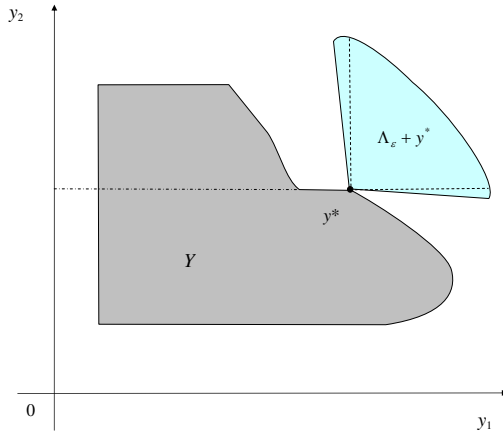


Рис. 8: Иллюстрация к равенству (3.12).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Не уменьшая общности, можно положить  $y^* = \mathbf{0}$ . Пусть  $\mathbf{0}$  – собственно эффективный вектор. Согласно теореме 3.7 найдется  $\varepsilon > 0$ , при котором система неравенств

$$\langle \mu^i, y \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.13)$$

где  $\mu^i$  вида (3.9), не имеет решений на множестве  $Y$ . Это означает, что множество  $Y$  не пересекается с внутренностью конуса  $\Lambda_\varepsilon$ . Согласно лемме 3.1 для положительного  $\varepsilon' < \varepsilon$  получаем более узкий конус, чем  $\Lambda_\varepsilon$ , который будет иметь с множеством  $Y$  лишь одну общую точку –  $\mathbf{0}$ . Отсюда сразу вытекает равенство (3.12) при  $y^* = \mathbf{0}$  и  $\varepsilon = \varepsilon'$ .

Обратно, пусть имеет место (3.12), где  $y^* = \mathbf{0}$ . В этом случае система неравенств (3.13) несовместна на множестве  $Y$ , что согласно теореме 3.7 влечёт собственную эффективность нулевого вектора. ■

**3.3 Условия эффективности для задач с вогнутыми целевыми функциями.** Вывод условий эффективности для многокритериальных задач с вогнутыми критериями опирается на следующие результаты выпуклого анализа, в которых  $a^i$  и  $b^j$  суть  $n$ -мерные векторы.

**Т е о р е м а М о ц к и н а.** *Имеет место один и только один из следующих двух случаев:*

1. Однородная система линейных неравенств

$$\langle a^i, x \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \langle b^j, x \rangle \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k;$$

имеет решение  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

2. Однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^m \mu_i a^i + \sum_{j=1}^k \lambda_j b^j = \mathbf{0}$$

имеет решение  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \geq \mathbf{0}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \geq \mathbf{0}$ .

**Т е о р е м а Т а к к е р а.** *Имеет место один и только один из следующих двух случаев:*

1. Однородная система линейных неравенств

$$\langle a^i, x \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \langle b^j, x \rangle \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

имеет решение  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

2. Однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^m \mu_i a^i + \sum_{j=1}^k \lambda_j b^j = \mathbf{0}$$

имеет решение  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) > \mathbf{0}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \geq \mathbf{0}$ .

**Т е о р е м а** (Фан – Гликсберг – Гоффман). Пусть  $h(\cdot) = (h_1(\cdot), h_2(\cdot), \dots, h_m(\cdot))$  -  $m$ -мерная вогнутая векторная функция, определённая на выпуклом множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда имеет место один и только один из следующих двух случаев:

1. Система вогнутых неравенств  $h_i(x) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , имеет решение  $x \in D$ ;
2. Существует такой вектор  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \geq \mathbf{0}$ , что неравенство  $\sum_{i=1}^m \mu_i h_i(x) \leq 0$  выполняется для всех  $x \in D$ .

**З а м е ч а н и е 3.3.** Нетрудно понять, что в приведенных выше теоремах всегда можно считать, что сумма компонент вектора  $\mu$  равна единице.

Напомним, что запись  $\overline{\mathbf{M}}$  означает замыкание множества  $\mathbf{M}$ :

$$\overline{\mathbf{M}} = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^m \mid \mu \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^m \mu_i = 1 \right\}.$$

**Т е о р е м а 3.9** (M. Slater). Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  выпукло, а вектор-функция  $f = (f_1, \dots, f_m)$  покомпонентно вогнута на нём. Точка  $x^* \in X$  слабо эффективна тогда и только тогда, когда найдется вектор  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$ , при котором имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x). \quad (3.14)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** То, что точка  $x^* \in X$  слабо эффективна, означает, что система вогнутых неравенств  $f_i(x) - f_i(x^*) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , несовместна на выпуклом множестве  $X$ . В соответствии теоремой Фана-Гликсберга-Гоффмана последнее равносильно существованию вектора  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$ , при котором имеет место равенство (3.14). ■

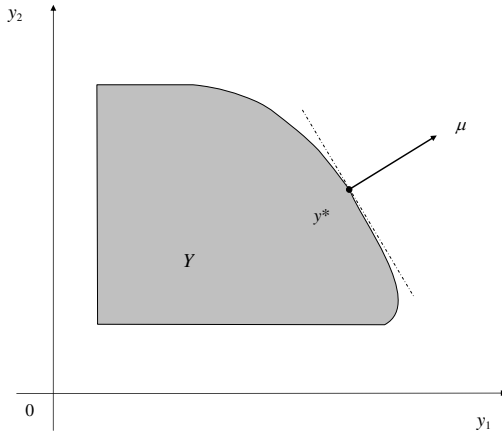


Рис. 9: Иллюстрация к равенству (3.14).

Приведенный выше рис. 9 иллюстрирует теорему 3.9. На этом рисунке отмечен вектор  $\mu$ , являющийся градиентом линейной функции  $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$ , где  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$ , а также пунктирная линия уровня этой линейной функции, соответствующая тому положению, которое отвечает её максимуму на множестве  $Y$ , т.е. равенству (3.14).

Введём множества

$$X_{\geq} = \bigcup_{\mu \in \bar{\mathbf{M}}} \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x)\}, \quad Y_{\geq} = f(X_{\geq});$$

$$X_{>} = \bigcup_{\mu \in \mathbf{M}} \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x)\}, \quad Y_{>} = f(X_{>}).$$

Для любых многокритериальных задач справедливы включения

$$X_{>} \subset P_f(X) \subset S_f(X), \quad X_{\geq} \subset S_f(X).$$

Согласно теореме 3.9 для вогнутых многокритериальных задач (в которых векторная функция  $f$  вогнута на выпуклом множестве

$X$ ) имеют место соотношения

$$X_{\geq} = S_f(X), \quad X_{>} \subset P_f(X) \subset X_{\geq}.$$

Из теоремы 3.9 вытекает следующее

**С л е д с т в и е 3.6** (В.Д. Ногин). Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  выпукло, вектор-функция  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  покомпонентно вогнута и принимает на нём строго положительные значения. Точка  $x^* \in X$  слабо эффективна тогда и только тогда, когда найдется вектор  $\mu \in \overline{M}$ , при котором имеет место равенство

$$\prod_{i=1}^m f_i^{\mu_i}(x^*) = \max_{x \in X} \prod_{i=1}^m f_i^{\mu_i}(x).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Композиция функции  $z = \ln y$  одной переменной и вогнутой функции  $y = f_i(x)$  конечного числа переменных является вогнутой функцией, так как из неравенства

$$f_i(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda f_i(x^1) + (1 - \lambda)f_i(x^2)$$

в силу не убывания и вогнутости логарифмической функции следует

$$\begin{aligned} \ln(f_i(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2)) &\geq \ln(\lambda f_i(x^1) + (1 - \lambda)f_i(x^2)) \geq \\ &\geq \lambda \ln f_i(x^1) + (1 - \lambda) \ln f_i(x^2) \end{aligned}$$

для всех  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $x^1, x^2 \in X$ . Поэтому к вектор-функции  $(\ln f_1, \ln f_2, \dots, \ln f_m)$  можно применить теорему 3.9:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \ln f_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \ln f_i(x) \quad \text{для всех } x \in X.$$

Переходя от суммы логарифмов к логарифму произведения в обеих частях неравенства, после потенцирования остаётся воспользоваться тем фактом, что  $x^* \in S_f(X)$  верно тогда и только тогда, когда  $x^*$  слабо эффективна относительно вектор-функции  $(\ln f_1, \ln f_2, \dots, \ln f_m)$  на множестве  $X$ . ■

Перейдём к характеристике собственно эффективных точек в терминах линейной свёртки критериев.

**Т е о р е м а 3. 10** (А.М. Geoffrion). Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  выпукло, а вектор-функция  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  покомпонентно вогнута на нём. Точка  $x^* \in X$  собственно эффективна тогда и только тогда, когда найдется вектор  $\mu \in \mathbf{M}$ , при котором имеет место равенство (3.14).

**Д о к а з а т е л ь с т в о** (В.Д. Ногин). Достаточность сразу вытекает из следствия 3.5. Установим необходимость. Согласно теореме 3.7 включение  $x^* \in P_f(X)$  влечет существование векторов  $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m \in \mathbf{M}$ , при которых точка  $x^*$  является слабо эффективной на множестве  $X$  относительно вектор-функции  $(\langle \mu^1, f(x) \rangle, \langle \mu^2, f(x) \rangle, \dots, \langle \mu^m, f(x) \rangle)$ , где векторы  $\mu^i \in \mathbf{M}$  имеют вид (3.9). Теперь можно применить теорему 3.9 к вектор-функции  $(\langle \mu^1, f(x) \rangle, \langle \mu^2, f(x) \rangle, \dots, \langle \mu^m, f(x) \rangle)$  на выпуклом множестве  $X$ . В соответствии с ней найдется вектор  $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_m) \in \bar{\mathbf{M}}$ , такой, что для всех  $x \in X$  верно неравенство

$$\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \langle \mu^i, f(x^*) - f(x) \rangle \geq 0.$$

Отсюда, с учётом (3.9) и условия  $\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i = 1$ , несложно вывести неравенство

$$\sum_{i=1}^m [\bar{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + \varepsilon](f_i(x^*) - f_i(x)) \geq 0$$

для любого  $x \in X$ . Введём вектор  $\mu$  с компонентами  $\mu_i = \bar{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Тогда последнее неравенство эквивалентно (3.14) и остаётся проверить, что  $\mu \in \mathbf{M}$ .

В самом деле,  $\mu^i \in \mathbf{M}$  для всех  $i \in I$ . Отсюда следует, что все компоненты вектора  $\mu$  строго положительны. Кроме того, имеем

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + m\varepsilon = 1. \blacksquare$$

В соответствии с доказанной теоремой для вогнутых многокритериальных задач имеет место равенство

$$G_f(X) = X_{>},$$

означающее, что множество собственно эффективных точек в этих задачах может быть получено в результате решения семейства скалярных задач с целевыми функциями, которые имеют вид линейной свёртки исходных критериев с положительными коэффициентами.

Введём множество

$$Y_* = \{y^* \in \mathbb{R}^m \mid y^* \leq y \text{ для некоторого } y \in Y\}.$$

Это множество, которое нередко называют *оболочкой Эджворта-Парето*, имеет целый ряд полезных свойств.

**Л е м м а 3. 2.** *Справедливы равенства*

$$P(Y) = P(Y_*), \quad G(Y) = G(Y_*).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $y^0 \in P(Y)$ . Предположим, напротив, что  $y^0 \notin P(Y_*)$ . Тогда найдется вектор  $y \in Y_*$ , для которого  $y \geq y^0$ . По определению множества  $Y_*$  существует точка  $x \in X$ , для которой  $f(x) \geq y$ , что вместе с полученным выше неравенством приводит к неравенству  $f(x) \geq y^0$ , противоречащему парето-оптимальности вектора  $y^0$ . Следовательно,  $P(Y) \subset P(Y_*)$ .

Обратно, пусть  $y^0 \in P(Y_*)$  и  $y^0 \notin P(Y)$ . Отсюда в силу  $Y \subset Y_*$  следует  $y^0 \notin Y$ . Поэтому  $y^0 \leq y$  при некотором  $y \in Y$ , что не совместимо с условием  $y^0 \in P(Y_*)$ . Проверка справедливости первого равенства завершена.

Равенство  $G(Y) = G(Y_*)$  имеет место благодаря характеристизации собственно эффективных векторов, содержащейся в теореме 3.8. ■

Ещё одно важное свойство множества  $Y_*$  устанавливается в следующем утверждении.

**Л е м м а 3. 3.** *Предположим, что множество  $X$  выпукло, а вектор-функция  $f$  вогнута на нём. Тогда множество  $Y_*$  выпукло.*



**Доказательство.** Пусть  $y^1, y^2 \in Y_*$  и  $\lambda \in [0, 1]$ . Тогда для некоторых  $x^1, x^2 \in X$  будут иметь место неравенства  $y^1 \leq f(x^1)$ ,  $y^2 \leq f(x^2)$  и

$$\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2 \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) \leq f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2),$$

где последнее неравенство записано с использованием вогнутости компонент векторной функции  $f$ . ■

Введём множество идеальных векторов

$$U = \{u \in R^m \mid u_i > \sup_{x \in X} f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

предполагая, что все функции  $f_i(x)$  являются ограниченными на множестве  $X$ .

Новая характеристика собственно эффективных точек в терминах минимизации расстояния от допустимого множества векторов до некоторой идеальной точки содержится в следующем утверждении.

**Теорема 3.11** (В.Д. Ногин). *Пусть множество  $X$  выпукло, а числовые функции  $f_1, f_2, \dots, f_m$  ограничены сверху и покомпонентно вогнуты на нём. Точка  $x^* \in X$  является собственно эффективной относительно  $f$  тогда и только тогда, когда существует вектор  $u \in U$ , для которого имеет место равенство*

$$\|u - f(x^*)\| = \min_{x \in X} \|u - f(x)\|. \quad (3.15)$$

**Доказательство.** Согласно лемме 3.3, в условиях доказываемой теоремы множество  $Y_*$  является выпуклым. Кроме того, в силу леммы 3.2 множества эффективных (а также собственно эффективных) векторов на множестве  $Y$  и на множестве  $Y_*$  совпадают.

**Необходимость.** Пусть вектор  $y^* = f(x^*) \in Y$  собственно эффективен. В таком случае согласно теореме 3.10 найдется вектор  $\mu$  с положительными компонентами в сумме равными единице, при котором линейная функция  $\sum_{i=1}^m \mu_i y_i$  достигает своего максимума на множестве  $Y_*$  в точке  $y^* \in Y_*$ . Это означает, что вектор  $\mu$  задает ги-

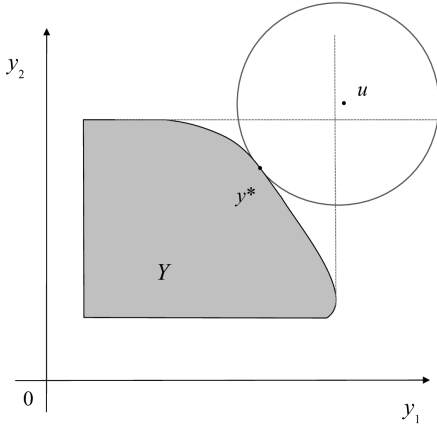


Рис. 10: Иллюстрация равенства (3.15).

перпендикулярно, опорную <sup>2</sup> для выпуклого множества  $Y_*$  в указанной точке.

В силу положительности всех компонент вектора  $\mu$ , найдется положительное число  $\alpha$ , при котором  $y^* + \alpha\mu \in U$ . В качестве вектора  $u \in U$ , удовлетворяющего условиям теоремы, выбираем  $u = y^* + \alpha\mu$ . Тогда упомянутая выше гиперплоскость будет опорной и для замкнутого шара с центром в точке  $u$  и радиусом  $\|u - y^*\|$ . Это означает, что точка  $y^*$  является ближайшей точкой множества  $Y_*$  (а значит, и  $Y$ ) к точке  $u$ .

Достаточность. Обозначим через  $y^* = f(x^*) \in Y$  точку, реализующую минимум расстояния от  $Y$  до некоторого вектора  $u \in U$ . Нетрудно понять, что точка  $y^*$  будет ближайшей и от множества  $Y_*$  до  $u$ . Обозначим через  $L$  гиперплоскость, проходящую через точку  $y^*$  и являющуюся опорной для шара с центром в  $u$  и радиусом  $\|u - y^*\|$ . Очевидно, внутренности выпуклого множества  $Y_*$  и ука-

<sup>2</sup>Замкнутое полупространство, содержащее выпуклое множество, называется опорным для этого множества, а граница опорного полупространства (гиперплоскость), имеющая хотя бы одну общую точку с данным выпуклым множеством, называется его *опорной гиперплоскостью*

занного шара не пересекаются. Поэтому на основании теоремы об отделимости выпуклого анализа множество  $Y_*$  и указанный шар можно отделить друг от друга некоторой гиперплоскостью, проходящей через их единственную общую точку  $y^*$ . Поскольку для шара в точке  $y^*$  существует только одна опорная гиперплоскость  $L$ , эта же гиперплоскость будет опорной и для множества  $Y_*$ . Последнее означает, что линейная функция  $\sum_{i=1}^m (u_i - y_i^*)y_i$  с положительными коэффициентами достигает своего максимума на множестве  $Y_*$  (а значит, и на  $Y$ ) в точке  $y^*$ . Отсюда в соответствии с теоремой 3.10 вытекает собственная эффективность этой точки. ■

Результат теоремы 3.11, использующий евклидову метрику, в полной мере относится к целевому программированию, о котором шла речь после завершения доказательства теоремы 3.2. Здесь роль "идеального" вектора выполняет  $u \in U$ .

Перейдем к характеристике решений задач многокритериальной оптимизации в терминах седловых точек функции Лагранжа. С этой целью рассмотрим многокритериальную задачу с векторной функцией  $f$  и множеством возможных вариантов, которое задано в форме нестрогих неравенств, т.е.

$$X = \{x \in D \mid g(x) \geq \mathbf{0}\}.$$

Будем полагать, что векторные функции  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  и  $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$  определены и вогнуты на выпуклом множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Введём функцию Лагранжа

$$L(\mu, x, \lambda) = \langle \mu, f(x) \rangle + \langle \lambda, g(x) \rangle$$

и напомним, что пара  $(x^*, \lambda^*)$ ,  $x^* \in X, \lambda^* \geq \mathbf{0}$  образует седловую точку функции Лагранжа  $L$ , если неравенства

$$L(\mu, x, \lambda^*) \leq L(\mu, x^*, \lambda^*) \leq L(\mu, x^*, \lambda) \quad (3.16)$$

выполняются для всех  $x \in D$  и всех  $\lambda \geq \mathbf{0}$ .

**Т е о р е м а 3. 12** (Н. Kuhn - А. Tucker, М. Slater, А. Geoffrion). Пусть вектор-функции  $f, g$  вогнуты покомпонентно на выпуклом множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$  и выполняется **условие регулярности Слейтера**: существует такая точка  $\tilde{x} \in D$ , что  $g(\tilde{x}) > \mathbf{0}$ . Для слабой эффективности (собственной эффективности) точки  $x^* \in X$  необходимо и достаточно, чтобы существовали вектор  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$  ( $\mu \in \mathbf{M}$ ) и вектор  $\lambda^* \geq \mathbf{0}$ , такие, что пара  $(x^*, \lambda^*)$  образует седловую точку функции Лагранжа  $L$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала установим условия слабой эффективности.

**Достаточность.** Если пара  $(x^*, \lambda^*)$  образует седловую точку функции Лагранжа, то из правого неравенства (3.16) при  $\lambda = \mathbf{0}$  получаем  $\langle \lambda^*, g(x^*) \rangle \leq 0$ . Но  $\lambda^* \geq \mathbf{0}$  и  $g(x^*) \geq \mathbf{0}$ , поэтому

$$\langle \lambda^*, g(x^*) \rangle = 0. \quad (3.17)$$

Следовательно, левое неравенство (3.16) влечет

$$\langle \mu, f(x) \rangle \leq \langle \mu, f(x^*) \rangle \quad \text{для всех } x \in D.$$

Отсюда следует неравенство

$$\langle \mu, f(x) \rangle \leq \langle \mu, f(x^*) \rangle \quad \text{для всех } x \in X.$$

Благодаря  $\mu \geq \mathbf{0}$ , имеем  $x^* \in S_f(X)$ .

**Необходимость.** Из слабой эффективности точки  $x^*$  вытекает несовместность на множестве  $D$  следующей системы вогнутых неравенств

$$f(x) - f(x^*) > \mathbf{0}; \quad g(x) \geq \mathbf{0}.$$

В соответствии с теоремой Фана-Гликсберга-Гоффмана об альтернативе существуют такие неотрицательные числа  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  и  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_k^*$ , среди которых по крайней мере одно отлично от нуля, что

$$\langle \mu, f(x) - f(x^*) \rangle + \langle \lambda^*, g(x) \rangle \leq 0 \quad \text{для всех } x \in D. \quad (3.18)$$

Отсюда следует левое неравенство (3.16). Далее, если в (3.18) положить  $x = x^*$ , то получим  $\langle \lambda^*, g(x^*) \rangle \leq 0$ . Но  $\langle \lambda, g(x^*) \rangle \geq 0$  для всех  $\lambda \geq \mathbf{0}$ , поэтому  $\langle \lambda^*, g(x^*) \rangle \leq \langle \lambda, g(x^*) \rangle$ , т.е. правое неравенство (3.16) также выполняется.

Для того чтобы установить включение  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$ , достаточно убедиться, что  $\mu \geq \mathbf{0}$ , поскольку в этом случае неравенства (3.16) всегда можно разделить на  $\sum_{i=1}^m \mu_i$ . Действительно, если  $\mu = \mathbf{0}$ , то из (3.18) при  $x = \tilde{x}$  следовало бы неравенство  $\langle \lambda^*, g(\tilde{x}) \rangle \leq 0$ , несовместимое с условием регулярности Слейтера и неравенством  $\lambda^* \geq \mathbf{0}$ . Тем самым, условия слабой эффективности полностью доказаны.

Условия собственной эффективности вытекают из доказанных условий слабой эффективности при помощи теоремы 3.9 аналогично тому, как это было установлено в доказательстве теоремы 3.10. Эти условия будут отличаться от установленных выше условий слабой эффективности лишь тем, что в них вектор  $\mu$ , участвующий в функции Лагранжа, будет удовлетворять включению  $\mu \in \mathbf{M}$ , а не  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$ . ■

**3.4 Условия оптимальности для линейных задач.** Перейдем к рассмотрению самого простого класса – линейных многокритериальных задач. Пусть линейная вектор-функция  $f$  имеет вид

$$f(x) = (\langle c^1, x \rangle, \langle c^2, x \rangle, \dots, \langle c^m, x \rangle),$$

а множество  $X$  является многогранным (полиэдральным) множеством, т.е. задано с помощью конечной системы линейных неравенств

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^j, x \rangle \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, k\},$$

где  $a^j \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

При линейном преобразовании точки переходят в точки, а прямые – в прямые. Поэтому образ многогранного множества при линейном отображении представляет собой многогранное множество. Следовательно, множество  $Y = f(X)$  в случае линейных многокритериальных задач является многогранным (и, в частности, выпуклым). Поэтому можно предположить, что в этом случае мно-

жество эффективных и собственно эффективных точек совпадают и, тем самым, каждая эффективная точка может быть получена в результате максимизации линейной свёртки критериев с положительными коэффициентами. Это предположение, как показывают нижеследующие результаты, вполне оправдано.

**Т е о р е м а 3. 13** (Т. Коопманс, А. Чарнес - W. Коопер). *В линейной многокритериальной задаче точка  $x^* \in X$  эффективна тогда и только тогда, когда найдется вектор  $\mu \in \mathbf{M}$ , для которого имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \langle c^i, x^* \rangle = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \mu_i \langle c^i, x \rangle. \quad (3.19)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. Обозначим через  $J(x^*)$  множество индексов *активных* в точке  $x^*$  ограничений, т.е.  $j \in J(x^*)$  тогда и только тогда, когда  $\langle a^j, x^* \rangle = b_j$ .

Эффективность  $x^*$  влечет несовместность следующей системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} \langle c^i, x \rangle &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ -\langle a^j, x \rangle &\geq 0, \quad \text{для всех } j \in J(x^*), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где в первой строке (3.20) записана система неравенств, в которой хотя бы одно неравенство - строгое. В самом деле, если предположить противное, т.е. что существует решение  $x$  системы неравенств (3.20), то для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  и точки  $x' = x^* + \varepsilon x$  будет выполнено

$$\begin{aligned} \langle c^i, x' \rangle &\geq \langle c^i, x^* \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \langle a^j, x' \rangle &\leq \langle a^j, x^* \rangle = b_j \quad \text{для всех } j \in J(x^*); \\ \langle a^j, x' \rangle &< b_j \quad \text{для всех остальных } j; \end{aligned}$$

что противоречит эффективности точки  $x^*$ . Заметим, что использование знака  $\geq$  в первой группе неравенств как и ранее означает, что среди них должно быть по крайней мере одно строгое неравенство.

Несовместность системы линейных неравенств (3.20) согласно теореме Таккера об альтернативе влечет существование векторов  $\mu \in \mathbf{M}$  и  $\lambda \geq \mathbf{0}$ , таких, что имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^m \mu_i c^i = \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j a^j, \quad (3.21)$$

Выберем произвольное  $x \in X$ . Умножая обе части равенства (3.21) скалярно на  $x - x^*$ , получим

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \langle c^i, x - x^* \rangle = \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j \langle a^j, x - x^* \rangle. \quad (3.22)$$

Но  $\langle a^j, x^* \rangle = b_j$  для любого  $j \in J(x^*)$  и  $\langle a^j, x \rangle \leq b_j$ , поэтому правая часть равенства (3.22) неположительна для любого  $x \in X$ . Неположительность левой части (3.22) влечет (3.19).

Достаточность имеет место в силу следствия 3.2 и неравенства  $\mu > \mathbf{0}$ . ■

Доказанная теорема с учетом теоремы 3.10 влечёт следующий результат.

*С л е д с т в и е 3. 7. В линейных многокритериальных задачах множества эффективных и собственно эффективных точек совпадают, т.е.  $P_f(X) = G_f(X)$ .*

*С л е д с т в и е 3. 8. В линейной многокритериальной задаче точка  $x^* \in X$  эффективна (слабо эффективна) тогда и только тогда, когда найдется вектор  $\mu \in \mathbf{M}$  ( $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$ ) и вектор  $\lambda \geq \mathbf{0}$ , для которых имеют место равенства*

$$\sum_{i=1}^m \mu_i c^i = \sum_{j=1}^k \lambda_j a^j; \quad (3.23)$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j (b_j - \langle a^j, x^* \rangle) = 0. \quad (3.24)$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть точка  $x^*$  эффективна. В доказательстве теоремы 3.13 было установлено, что в таком случае справедливо равенство (3.22). Поскольку это равенство имеет место для всех  $x - x^*$ , верно  $\sum_{i=1}^m \mu_i c^i = \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j a^j$ , что равносильно двум равенствам (3.23) - (3.24).

Аналогичное доказательство для слабо эффективной точки  $x^*$  отличается лишь тем, что в нём первая группа неравенств в (3.19) содержит строгие неравенства и вместо теоремы Таккера следует использовать теорему Моцкина.

Достаточность для эффективной точки  $x^*$  вытекает из следствия 3.2 и включения  $\mu \in M$ . Действительно, выберем произвольное  $x \in X$  и умножим равенство (3.23) скалярно разность  $x - x^*$ . С учётом (3.24) получим

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \langle c^i, x - x^* \rangle = \sum_{j=1}^k \lambda_j (\langle a^j, x \rangle - \langle a^j, x^* \rangle) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j (b_j - \langle a^j, x^* \rangle) = 0.$$

Это означает, что линейная свёртка критериев с положительными коэффициентами достигает своего максимума на множестве  $X$  в точке  $x^*$ . Согласно следствию 3.2,  $x \in P_f(X)$ .

Для слабо эффективной точки часть достаточность проверяется аналогично. ■

Следствие 3.7 может быть распространено на класс так называемых полиэдрально вогнутых функций  $f_1, f_2, \dots, f_m$ . Полиэдрально вогнутой называют функцию  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$h(x) = \min_{j=1,2,\dots,s} (\langle c^j, x \rangle + \alpha_j),$$

где  $c^j \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  для всех  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Из приведенного выше определения следует, что всякая аффинная (в частности, линейная) функция является полиэдрально вогнутой, но не наоборот. В этом смысле понятие полиэдрально вогнутой функции представляет собой обобщение понятия аффинной функции. С другой стороны, легко убедиться непосредственно в



том, что всякая полиэдрально вогнутая функция вогнута, т.е. класс полиэдрально вогнутых функций будучи шире класса аффинных функций является подклассом класса вогнутых функций.

Можно установить (см. [4]) следующий результат.

**Т е о р е м а 3. 14** (В.Д. Ногин). *Если множество возможных вариантов  $X$  имеет вид*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k\},$$

*и все функции  $f_1, f_2, \dots, f_m, g_1, g_2, \dots, g_k$  полиэдрально вогнуты, то  $P_f(X) = G_f(X)$ .*

**3.5 Условия оптимальности для задач с дифференцируемыми функциями.** Здесь будем считать, что векторный критерий  $f$  и векторная функции  $g$ , участвующая в задании множества возможных вариантов

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \geq \mathbf{0}\},$$

определены и покомпонентно дифференцируемы на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Как и ранее, введём обозначение  $J(x^*)$  для множества индексов *активных* в точке  $x^*$  ограничений, т.е.  $j \in J(x^*)$  тогда и только тогда, когда  $g_j(x^*) = 0$ . В следующей ниже теореме через  $\nabla h(x^*)$  обозначается градиент числовой функции  $h$  в точке  $x^*$ .

**Т е о р е м а 3. 15** (N. Da Cunha – E. Polak, A. Geoffrion). *Пусть выполнено условие регулярности: существует такая точка  $\tilde{x}$ , что для любого  $j \in J(x^*)$  справедливо неравенство  $\langle \nabla g_j(x^*), \tilde{x} \rangle > 0$ . Для того чтобы точка  $x^*$  была слабо эффективной (собственно эффективной), необходимо, чтобы существовали вектор  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$  ( $\mu \in \mathbf{M}$ ) и вектор  $\lambda \geq \mathbf{0}$  такие, что*

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала установим условие слабой эффективности. Пусть  $x^* \in S_f(X)$ . Тогда система линейных неравенств

$$\langle \nabla f_i(x^*), x \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3.26)$$

$$\langle \nabla g_j(x^*), x \rangle > 0 \quad \text{для всех } j \in J(x^*); \quad (3.27)$$

несовместна. Действительно, если это не так, то для точки  $x$ , удовлетворяющей этой системе неравенств, можно указать  $\varepsilon > 0$ , для которого

$$f_i(x^* + \varepsilon x) - f_i(x^*) = \varepsilon[\langle \nabla f_i(x^*), x \rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}] > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$g_j(x^* + \varepsilon x) = \varepsilon[\langle \nabla g_j(x^*), x \rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}] > 0 \quad \text{для всех } j \in J(x^*);$$

$$g_j(x^* + \varepsilon x) = g_j(x^*) + O(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всех } j \notin J(x^*).$$

Здесь первое неравенство справедливо благодаря дифференцируемости функции  $f_i$  в точке  $x^*$  и неравенству (3.26), второе – в силу дифференцируемости функции  $g_j$  в той же точке и неравенства (3.27); третье – вследствие непрерывности функции  $g_j$  и неравенства  $g_j(x^*) > 0$  при всех  $j \in J(x^*)$ . Последние три группы неравенств противоречат слабой эффективности точки  $x^*$ . Следовательно, система неравенств (3.26) – (3.27) несовместна. В таком случае согласно теореме Моцкина об альтернативе существуют такие векторы  $\mu, \lambda$  с неотрицательными компонентами одновременно не равными нулю, что имеет место равенство (3.25).

Проверим включение  $\mu \in \overline{M}$ . Если  $\mu = \mathbf{0}$ , то  $\lambda \geq \mathbf{0}$ . Тогда из (3.25) следует равенство

$$\sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0},$$

противоречащее неравенству  $\lambda \geq \mathbf{0}$  и условию регулярности из условий теоремы. Поэтому  $\mu \geq \mathbf{0}$ , а значит, можно считать, что сумма компонент этого вектора равна единице. Тем самым, необходимое условие слабой эффективности доказано.

Теперь пусть  $x^* \in G_f(X)$ . Согласно теореме 3.7 точка  $x^*$  является слабо эффективной относительно вектор-функции  $(\langle \mu^1, f(\cdot) \rangle, \dots, \langle \mu^m, f(\cdot) \rangle)$  на множестве  $X$ , где векторы  $\mu^i \in M$  имеют вид (3.9). Применяя доказанное выше необходимое условие

слабой эффективности, получаем существование таких векторов  $\bar{\mu} \in \bar{\mathbf{M}}$  и  $\lambda \geq \mathbf{0}$ , что

$$\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i \nabla \left[ \sum_{r=1}^m \mu_r^i f_r(x^*) \right] + \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учётом (3.9) и условия  $\sum_{i=1}^m \bar{\mu}_i = 1$  после несложных преобразований получим

$$\sum_{i=1}^m [\bar{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + \varepsilon] \nabla f_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0}.$$

Вводя вектор  $\mu$  с компонентами  $\mu_i = \bar{\mu}_i(1 - m\varepsilon) + \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , приходим к равенству (3.24), причём  $\mu \in \mathbf{M}$ . ■

Анализ доказательства последней теоремы показывает, что когда условие регулярности не предполагается выполненным, необходимое условие слабой эффективности будет иметь прежний вид (3.25), однако относительно векторов  $\mu$  и  $\lambda$  будет лишь известно, что их компоненты неотрицательны, причём по крайней мере одна из всех этих компонент отлична от нуля (так что может выполняться  $\mu = \mathbf{0}$ ). Кроме того, этот анализ показывает, что в задаче без ограничений, т.е. при отсутствии ограничений (функций  $g_j$ ), условие регулярности в формулировке теоремы становится излишним.

Изучим вопрос достаточности выполнения равенства (3.25) для слабой и собственной эффективности точки  $x^*$ .

Введём понятие квазивогнутой функции, обобщающее понятие вогнутой функции. Числовую функцию  $h$ , заданную на выпуклом множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$  называют *квазивогнутой*, если для любого  $\lambda \in [0, 1]$  и произвольных  $x, x' \in D$  имеет место неравенство

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \min\{h(x), h(x')\}.$$

Квазивогнутая функция обладает тем свойством, что для любого числа  $\alpha$  множество  $\{x \in D \mid h(x) \geq \alpha\}$  всегда выпукло; и обратно –

всякая числовая функция, заданная на выпуклом множестве  $D$  и обладающая указанным свойством, является квазивогнутой.

**Т е о р е м а 3. 16.** *Предположим, что вектор-функция  $f$  покомпонентно вогнута на  $\mathbb{R}^n$ , а вектор-функция  $g$  квазивогнута на  $\mathbb{R}^n$  для каждого  $j \in J(x^*)$ . Тогда выполнение равенства (3.25) с вектором  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$  ( $\mu \in \mathbf{M}$ ) и  $\lambda \geq \mathbf{0}$  влечет слабую (собственную) эффективность точки  $x^*$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим сначала случай слабой эффективности. Для доказательства предположим противное: существует такая точка  $\bar{x} \in X$ , что

$$f(\bar{x}) > f(x^*). \quad (3.28)$$

В таком случае для любого номера  $j \in J(x^*)$  выполняется неравенство  $\langle \nabla g_j(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0$ . В самом деле, если это не так, то благодаря неравенству  $\langle \nabla g_j(x^*), \bar{x} - x^* \rangle < 0$  при некотором  $j \in J(x^*)$  для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  будем иметь

$$g_j(x^* + \varepsilon(\bar{x} - x^*)) = \varepsilon[\langle \nabla g_j(x^*), \bar{x} - x^* \rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}] < 0.$$

С другой стороны, поскольку  $\bar{x} \in X$ , верно  $g_j(\bar{x}) \geq 0 = g_j(x^*)$ , а так как функция  $g_j$  квазивогнута, то для любого  $\varepsilon \in (0, 1)$  справедливо противоположное неравенство

$$g_j(x^* + \varepsilon(\bar{x} - x^*)) = g_j((1 - \varepsilon)x^* + \varepsilon\bar{x}) \geq g_j(x^*) = 0.$$

На основании доказанного из равенства (3.25) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \langle \nabla f_i(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \leq 0.$$

Отсюда благодаря неравенству  $\mu \geq \mathbf{0}$  вытекает существование такого номера  $i$ , что  $\langle \nabla f_i(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \leq 0$ . Известно, что дифференцируемая функция  $f_i$  вогнута тогда и только тогда, когда для всех  $x^*, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$  имеет место неравенство  $f_i(\bar{x}) - f_i(x^*) \leq \langle \nabla f_i(x^*), \bar{x} - x^* \rangle$ .

Поэтому из полученного выше неравенства вытекает неравенство  $f_i(\bar{x}) \leq f_i(x^*)$ , противоречащее (3.28).

Перейдем к доказательству той части теоремы, которая посвящена собственной эффективности. Рассмотрим числовую функцию  $F(x) = \langle \mu, f(x) \rangle$ , где  $\mu \in \mathbf{M}$ . Равенство (3.25) можно переписать следующим образом:

$$\nabla F(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0}.$$

В силу вогнутости вектор-функции  $f$  функция  $F$  также вогнута. Поэтому согласно доказанному выше при  $m = 1$  получаем, что функция  $F$  достигает своего максимального значения на множестве  $X$  в точке  $x^*$ . В таком случае на основании следствия 3.5 точка  $x^*$  собственно эффективна. ■

### 3.6 Условия локальной слабой эффективности второго порядка.

Точку  $x^*$  называют *локально (слабо) эффективной* относительно  $f$  на множестве  $X$ , если найдётся такая окрестность  $U(x^*)$  этой точки, что  $x^*$  является (слабо) эффективной точкой на множестве  $X \cap U(x^*)$ .

Ограничимся далее рассмотрением задачи многокритериальной оптимизации без ограничений.

Через

$$\nabla^2 f_i(x^*) = \left( \frac{\partial^2 f_i(x^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{j,k=1}^n$$

обозначим матрицу  $n$ -го порядка, составленную из частных производных второго порядка функции  $f_i$ , вычисленную в точке  $x^*$ .

Введём множество

$$K(x^*) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f_i(x^*), z \rangle \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Нетрудно понять, что это множество является выпуклым и замкнутым.

**Теорема 3.17.** Пусть вектор-функция  $f$  покомпонентно дважды дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Для того чтобы точка

$x^*$  являлась локально слабо эффективной относительно вектор-функции  $f$  на пространстве  $\mathbb{R}^n$  необходимо, чтобы для некоторого вектора  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$  было выполнено

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \nabla f_i(x^*) = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

$$\min_{i=1,2,\dots,m} (z \cdot \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z) \leq 0 \quad \text{для всех } z \in K(x^*). \quad (3.30)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Справедливость равенства (3.29) для некоторого  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$  вытекает из теоремы 3.15. Для доказательства неравенства (3.30) выберем произвольно вектор  $z \in K(x^*)$ . Если предположить, что для него неравенство (3.30) нарушается, то будет выполнено

$$z \cdot \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда, благодаря включению  $z \in K(x^*)$ , для некоторого  $\alpha > 0$  и любого  $\varepsilon > 0$  вытекает

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \nabla f_i(x^*), z \rangle + \frac{1}{2} \cdot z \cdot \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z > \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Положим  $x' = x^* + \varepsilon z$ . Используя двукратную дифференцируемость функции  $f_i$  в точке  $x^*$ , для всех достаточно малых положительных  $\varepsilon$  и каждого  $i = 1, 2, \dots, m$  будет выполнено

$$f_i(x') - f_i(x^*) = \varepsilon^2 \left[ \frac{\langle \nabla f_i(x^*), z \rangle}{\varepsilon} + \frac{1}{2} z \cdot \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z + \frac{o_i(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right] > 0,$$

где  $o_i(\varepsilon^2)$  означает бесконечно малую величину более высокого порядка, чем  $\varepsilon^2$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Полученные неравенства несовместимы с локальной слабой эффективностью точки  $x^*$  ■

Установим достаточное условие локальной эффективности точки  $x^*$ .

**Т е о р е м а 3. 18.** Пусть вектор-функция  $f$  покомпонентно дважды непрерывно дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbb{R}^n$  и для

некоторого вектора  $\mu \in \overline{\mathbf{M}}$  выполняется равенство (3.29). Если  $K(x^*) = \{\mathbf{0}\}$  или

$$z \cdot \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z < 0 \quad \text{для всех } z \in K(x^*) \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (3.31)$$

то  $x^*$  является локально эффективной точкой относительно вектор-функции  $f$  на пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим противное: точка  $x^*$  удовлетворяет условиям теоремы, но не является локально эффективной. В таком случае найдется такая последовательность точек  $x^l \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^l \neq x^*$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , что

$$f(x^l) \geq f(x^*), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} x^l = x^*. \quad (3.32)$$

Рассмотрим последовательность

$$z^l = \frac{x^l - x^*}{\|x^l - x^*\|}, \quad \|z^l\| = 1, \quad l = 1, 2, \dots$$

Из этой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Поэтому будем считать, что сходится сама эта последовательность:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} z^l = z^*, \quad \|z^*\| = 1.$$

Обозначим  $\omega_l = \|x^l - x^*\|$ . Имеем  $\omega_l \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$  и  $x^l = x^* + \omega_l z^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Используя дифференцируемость функции  $f_i$  в точке  $x^*$ , получаем

$$\frac{f_i(x^l) - f_i(x^*)}{\omega_l} = \langle \nabla f_i(x^*), z^l \rangle + \frac{o_i(\omega_l)}{\omega_l}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда в результате предельного перехода с помощью (3.32) приходим к неравенствам

$$\langle \nabla f_i(x^*), z^* \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

т.е.  $z^* \in K(x^*)$ .

Равенство  $K(x^*) = \{\mathbf{0}\}$  не совместимо с условием  $z^* \in K(x^*)$  и  $\|z^*\| = 1$ . Поэтому пусть  $K(x^*) \neq \{\mathbf{0}\}$  и имеет место неравенство (3.31).

На основании двукратной дифференцируемости функции  $f_i$  в точке  $x^*$  справедливо равенство

$$f_i(x^l) - f_i(x^*) = \langle \nabla f_i(x^*), \omega_l z^l \rangle + \frac{\omega_l^2}{2} z^l \cdot \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z^l + o_i(\omega_l^2)$$

для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$ . Умножая данное равенство на неотрицательное число  $\mu_i$  и суммируя по всем  $i$ , с учетом (3.29) получим

$$\frac{\sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^l) - \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^*)}{\omega_l^2} = \frac{1}{2} (z^l \cdot \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z^l + \frac{o(\omega_l^2)}{\omega_l^2}).$$

В силу (3.32), левая часть полученного равенства неотрицательна. Следовательно, из последнего равенства в результате предельного перехода при  $l \rightarrow \infty$  придём к неравенству

$$z^* \cdot \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla^2 f_i(x^*) \cdot z^* \geq 0,$$

которое противоречит условию (3.31). ■

**3.7. Конусные многокритериальные задачи.** Конусные многокритериальные задачи представляют собой более общий класс задач по сравнению с теми, которые изучались ранее. Для этого класса вводятся понятия эффективности и собственной эффективности относительно конуса, а также устанавливаются результаты, в которых дается характеристика указанных точек.

Предварительно напомним некоторые определения из выпуклого анализа, которые потребуются в дальнейшем изложении.

Пусть  $\mathbb{R}^m$  –  $m$ -мерное векторное пространство и  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  – множество в этом пространстве. Множество  $\Lambda$  является *конусом*, если  $\alpha \cdot y \in \Lambda$  для всех  $\alpha > 0$  и каждого  $y \in \Lambda$ . Выпуклый конус  $\Lambda$  называется *острым* в том случае, когда  $\Lambda \cap -\Lambda \subset \{\mathbf{0}\}$ .



Для двух множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^m$  их *алгебраическая сумма* определяется следующим образом:

$$A + B = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = a + b \text{ для некоторых } a \in A, b \in B\}.$$

Острый выпуклый конус  $\Lambda$  порождает *строгий частичный порядок* (т.е. иррефлексивное и транзитивное отношение)  $\succ_{\Lambda}$  на  $\mathbb{R}^m$  посредством эквивалентности

$$y \succ_{\Lambda} y' \Leftrightarrow y \in \{y'\} + (\Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}) \Leftrightarrow y - y' \in \Lambda.$$

Так например, если в качестве  $\Lambda$  взять неотрицательный ортант  $\mathbb{R}_+^m$ , то получим строгий частичный порядок, совпадающий с отношением Парето  $\geq$ .

Для выпуклого конуса  $\Lambda$  *двойственный конус*  $\Lambda^o$  определяется формулой

$$\Lambda^o = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, z \rangle \geq 0 \text{ для всех } z \in \Lambda\},$$

а *строгий двойственный конус* – посредством равенства

$$\Lambda^* = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle y, z \rangle > 0 \text{ для всех } z \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

Нетрудно понять, что двойственный конус по отношению к неотрицательному ортанту  $\mathbb{R}_+^m$  совпадает с ним самим, а строго двойственный – с его внутренностью.

P.L. Yu (По-Лэнг Ю) ввел следующее определение точки, эффективной относительно заданного конуса.

Точку  $x^* \in X$  (вектор  $y^* = f(x^*) \in Y$ ) называют *эффективной относительно острого выпуклого конуса*  $\Lambda$ , если не существует  $x \in X$ , такого, что  $f(x) \succ_{\Lambda} f(x^*)$  или, эквивалентно, выполняется соотношение

$$Y \cap (\Lambda + \{y^*\}) \subset \{y^*\}.$$

Очевидно, эффективная точка относительно острого выпуклого конуса, совпадающего с неотрицательным ортантом, т.е. в случае

$$\Lambda = \mathbb{R}_+^m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq \mathbf{0}\},$$

совпадает с обычной эффективной (парето-оптимальной) точкой. На этом основании определение По-Лэнг Ю представляет собой распространение (обобщение) понятия парето-оптимальной точки на случай критериального пространства, упорядоченного с помощью выпуклого конуса.

М. Henig (Хениг) предложил следующее обобщение понятия собственно эффективной точки в смысле Джеоффриона.

А именно, точку  $x^* \in X$  (вектор  $y^* = f(x^*) \in Y$ ) называют *собственно эффективной относительно остроуго выпуклого замкнутого конуса*  $\Lambda$  на  $X$  (соответственно, на  $Y$ ), если существует острый выпуклый конус  $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}^m$ , такой, что  $\text{int}\hat{\Lambda} \supset \Lambda \setminus \{0\}$  и  $x^*$  является эффективной относительно конуса  $\hat{\Lambda}$ .

Необходимо заметить, что в последнем определении конус  $\hat{\Lambda}$  может оказаться незамкнутым.

Если обратиться к теореме 3.8, то, как легко видеть, в ней используется такая же конструкция, как в приведенном определении Хенига собственной эффективности относительно конуса. При этом в качестве конуса  $\hat{\Lambda}$  в этой теореме фигурирует многогранный конус  $\Lambda_\varepsilon$ . Отсюда, в частности, следует, что определение Хенига собственной эффективности относительно конуса эквивалентно определению собственной эффективности Джеоффриона в случае, когда  $\Lambda = \mathbb{R}_+^m \cup \{0\}$ .

Перейдём к рассмотрению вопроса характеристики собственно эффективных точек относительно конуса. Как будет показано ниже, теорема 3.11 допускает своё обобщение на случай критериального пространства, упорядоченного с помощью выпуклого конуса.

Пусть задан некоторый острый выпуклый замкнутый конус  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ . Введём *множество идеальных векторов* по формуле

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u - y \in \Lambda^* \setminus \{0\} \text{ для всех } y \in Y\}.$$

В случае  $\Lambda = \mathbb{R}_+^m \cup \{0\}$  введённое множество идеальных векто-

ров принимает вид

$$\{u \in \mathbb{R}^m \mid u_i > \sup_{x \in X} f_i(x) \text{ для всех } x \in X, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (3.33)$$

и совпадает с множеством  $U$ , участвующим в формулировке теоремы 3.11.

Для подавляющего большинства многокритериальных задач множества  $Y$  и  $U$  не имеют общих точек. Каждую точку множества  $U$  можно интерпретировать как некоторую недостижимую идеальную цель, которую хотелось бы достичь в результате решения многокритериальной задачи. Однако в силу  $Y \cap U = \emptyset$  эта цель никогда не может быть достигнута. В такой ситуации представляется вполне разумным желание среди элементов множества  $Y$  найти такой вектор, который ближе всего расположен к некоторому идеальному вектору.

Следующий результат представляет собой обобщение теоремы 3.11 на случай собственно эффективных точек относительно конуса.

*Т е о р е м а 3.19. Пусть  $\Lambda$  – острый выпуклый замкнутый конус,  $U \neq \emptyset$  и множество  $Y - \Lambda$  выпукло. Точка  $x^* \in X$  является собственно эффективной относительно указанного конуса на множестве  $X$  в том и только том случае, когда найдется такой вектор  $u \in U$ , что имеет место равенство*

$$\|u - f(x^*)\| = \min_{x \in X} \|u - f(x)\|. \quad (3.34)$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Нетрудно понять, что вектор  $y^* \in Y$  является собственно эффективным относительно конуса  $\Lambda$  на множестве  $Y$  тогда и только тогда, когда этот вектор обладает тем же свойством на множестве  $Y - \Lambda$ , поскольку конус  $\Lambda$  – острый.

Необходимость. Пусть вектор  $y^* = f(x^*) \in Y$  является собственно эффективным относительно конуса  $\Lambda$  на множестве  $Y$ . Тогда, как указано выше,  $y^*$  является собственно эффективным (а значит, и эффективным) относительно конуса  $\Lambda$  на множестве  $Y - \Lambda$ , т.е.

$$(Y - \Lambda) \cap (\Lambda + \{y^*\}) = \{y^*\}.$$

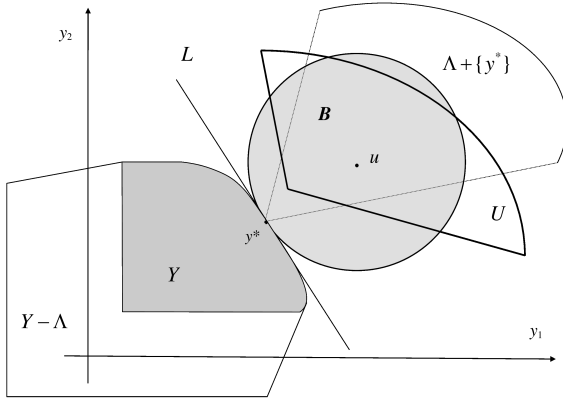


Рис. 11: Иллюстрация к теореме 3.19 в случае  $m = 2$ .

В этом случае, согласно теореме об отделимости выпуклых множеств, множества  $Y - \Lambda$  и  $\Lambda + \{y^*\}$  можно отделить гиперплоскостью  $L = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle c, y \rangle = \langle c, y^* \rangle\}$  при некотором  $c \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , так что

$$\langle c, y \rangle \leq \langle c, y^* \rangle \quad \text{для всех } y \in (Y - \Lambda), \quad (3.35)$$

$$\langle c, y \rangle \geq \langle c, y^* \rangle \quad \text{для всех } y \in \Lambda + \{y^*\}. \quad (3.36)$$

Из неравенства (3.36) следует  $c \in \Lambda^o$ . Кроме того, так как  $y^*$  является собственно эффективным вектором относительно конуса  $\Lambda$ , то  $c \in \Lambda^*$ . В таком случае существует положительное число  $\alpha$ , для которого выполняется включение  $u = y^* + \alpha c \in U$ .

Введём замкнутый шар  $B$  с центром в точке  $u$  и радиусом  $\|u - y^*\| > 0$ . Этот шар имеет единственную общую точку  $y^*$  с гиперплоскостью  $L$  равно как и с множеством  $Y - \Lambda$  (а также с множеством  $Y$ ). Это означает, что имеет место равенство (3.34).

Достаточность. Введём обозначение  $y^* = f(x^*) \in Y$  для точки, реализующий минимум расстояния от множества  $Y$  до некоторой точки  $u \in U$ . Посредством  $L = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle u - y^*, y \rangle = \langle u - y^*, y^* \rangle\}$

обозначим опорную гиперплоскость <sup>3</sup> для замкнутого шара  $B$  с центром в точке  $u$  и радиусом  $\|u - y^*\|$ , проходящую через точку  $y^*$ . Поскольку  $B$  – строго выпуклое <sup>4</sup> множество, а  $Y - \Lambda$  – выпуклое, имеет место равенство

$$B \cap (Y - \Lambda) = \{y^*\}.$$

Таким образом, гиперплоскость  $L$  отделяет два выпуклых множества  $B$  и  $Y - \Lambda$ . Рассмотрим открытое полупространство  $\hat{\Lambda} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle u - y^*, y \rangle > 0\}$ . Оно является выпуклым конусом и  $\text{int} \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \supset \Lambda \setminus \{0_m\}$ , так как  $u - y^* \in \Lambda^*$ . Кроме того,  $(Y - \Lambda) \cap (\hat{\Lambda} + \{y^*\}) = \emptyset$  и, следовательно,

$$Y \cap (\hat{\Lambda} + \{y^*\}) = \emptyset \subset \{y^*\}.$$

Согласно определению Хенига, полученное свидетельствует о том, что точка  $y^*$  является собственно эффективной относительно конуса  $\Lambda$ . ■

Требование выпуклости множества  $Y - \Lambda$  в теореме 3.19 можно заменить на более употребительное условие вогнутости вектор-функции  $f$ . Об этом свидетельствует следующий результат.

*С л е д с т в и е 3.9. Пусть  $U \neq \emptyset$ , все компоненты вектор-функции  $f$  являются вогнутыми на выпуклом множестве  $X$  и, кроме того, острый выпуклый замкнутый конус  $\Lambda$  включает неотрицательный ортант  $\mathbb{R}_+^m$ . Точка  $x^* \in X$  является собственно эффективной относительно конуса  $\Lambda$  на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда существует вектор  $u \in U$ , удовлетворяющий равенству (3.34).*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Достаточно применить последнюю теорему, предварительно установив, что в условиях данного следствия множество  $Y - \Lambda$  выпукло.

<sup>3</sup>Напоминаем, что опорная гиперплоскость – это граница замкнутого полупространства, содержащего в данном случае шар  $B$  и имеющая с ним общую точку  $y^*$ .

<sup>4</sup>Строго выпуклым называется выпуклое множество, у которого каждая точка, отличная от концов лежащего в нём замкнутого отрезка, является внутренней для данного множества. Опорная гиперплоскость замкнутого строго выпуклого множества имеет с этим множеством единственную общую точку.

Для доказательства выпуклости множества  $Y - \Lambda$  выберем две произвольные точки  $y', y'' \in (Y - \Lambda)$  и произвольное число  $\theta \in [0, 1]$ . Составим выпуклую комбинацию  $y = \theta y' + (1 - \theta)y''$ . Для некоторых  $y^1, y^2 \in Y$  и  $\lambda^1, \lambda^2 \in \Lambda$  имеем

$$y = \theta(y^1 - \lambda^1) + (1 - \theta)(y^2 - \lambda^2) = \theta y^1 + (1 - \theta)y^2 - \lambda,$$

где  $\lambda = \theta\lambda^1 + (1 - \theta)\lambda^2 \in \Lambda$ . В силу  $y^1, y^2 \in Y$  существуют  $x^1, x^2 \in X$ , для которых  $y^1 = f(x^1), y^2 = f(x^2)$ . Поэтому, в силу вогнутости вектор-функции  $f$ , из последнего равенства следует

$$y \leq f(\theta x^1 + (1 - \theta)x^2) - \lambda.$$

Нетрудно понять, что прибавив к  $\lambda$  определенный вектор из неотрицательного ортанта  $\mathbb{R}_+^m$ , можно уравнивать обе части последнего неравенства. При этом добавление любого вектора из неотрицательного ортанта к произвольному вектору из  $\Lambda$  правомерно в силу  $\Lambda \supset \mathbb{R}_+^m$ . Полученное указанным способом равенство служит доказательством включения  $y \in (Y - \Lambda)$ . ■

Следующий результат связан с характеристикой собственно эффективных точек относительно конуса в терминах максимизации линейной свёртки критериев с положительными коэффициентами. Он является прямым обобщением теоремы 3.10, принадлежащей Джеоффриону.

**Т е о р е м а 3. 20** (М. Неніг). *Пусть  $\Lambda$  – острый выпуклый замкнутый конус, а множество  $Y - \Lambda$  выпукло. Точка  $x^* \in X$  собственно эффективна относительно конуса  $\Lambda$  на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда существует вектор  $c \in \Lambda^*$ , удовлетворяющий равенству*

$$\langle c, f(x^*) \rangle = \max_{x \in X} \langle c, f(x) \rangle. \quad (3.37)$$

**Доказательство** (В.Д. Ногин). Необходимость следует из неравенства (3.35), установленного в ходе доказательства теоремы 3.19.

Достаточность. Пусть равенство (3.37) имеет место при некотором  $c \in \Lambda^*$ . Тогда линейная функция  $\langle c, y \rangle$  достигает своего максимума на множестве  $Y - \Lambda$  в точке  $y^*$ , т.е. выполняется неравенство (3.35). Другими словами, для выпуклого множества  $Y - \Lambda$  существует опорная гиперплоскость

$$L = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle c, y \rangle = \langle c, y^* \rangle\},$$

проходящая через точку  $y^* = f(x^*)$ . Очевидно,  $L$  отделяет два выпуклых множества  $Y - \Lambda$  и  $\Lambda^o + \{y^*\}$ , так как  $c \in \Lambda^*$ . Рассмотрим открытое полупространство  $\hat{\Lambda} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle c, y \rangle > 0\}$ . Имеем  $\text{int} \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \supset \Lambda \setminus \{0_m\}$  и, кроме того,  $(Y - \Lambda) \cap (\hat{\Lambda} + \{y^*\}) = \emptyset$ . Таким образом,

$$Y \cap (\hat{\Lambda} + \{y^*\}) = \emptyset \subset \{y^*\}$$

и, в соответствии с определением Хенига,  $y^*$  является собственно эффективным вектором относительно конуса  $\Lambda$ . ■

## 4. Свойства множества эффективных точек

Предметом изучения данного раздела являются такие свойства эффективных точек, как замкнутость, плотность и связность. В частности, установлен факт плотности множества собственно эффективных точек в множестве эффективных точек, что свидетельствует о сравнительно малом отличии этих двух множеств при определенных предположениях.

**4.1. Замкнутость множеств эффективных и слабо эффективных точек.** Нетрудно понять, что замкнутость множества эффективных точек непосредственно связана с замкнутостью множества допустимых точек  $X$  и непрерывностью компонент векторного критерия  $f$ . Для слабо эффективных точек эта связь оказывается наиболее простой.

*Т е о р е м а 4. 1. Если множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  замкнуто, а вектор функция  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  непрерывна на нём, то множество слабо эффективных точек  $S_f(X)$  замкнуто.*

**Доказательство.** Предположим противное: множество  $S_f(X)$  при выполнении предположений теоремы не является замкнутым. В этом случае найдется последовательность точек  $\{x^k\} \subset S_f(X)$ , сходящаяся к точке  $x^* \notin S_f(X)$ , причём благодаря замкнутости множества  $X$  выполнено  $x^* \in X$ . Следовательно, существует точка  $x \in X$ , для которой имеет место неравенство  $f(x) > f(x^*)$ . Используя непрерывность векторного критерия, для достаточно большого номера  $k$  получаем неравенство  $f(x) > f(x^k)$ , которое противоречит слабой эффективности точки  $x^k$ . ■

Рассматривая в условиях теоремы 4.1 множество  $Y$  вместо  $X$  и линейную вектор-функцию  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  вместо  $f$ , приходим к следующему результату.

**С л е д с т в и е 4. 1** *Для замкнутого множества векторов  $Y$  множество слабо эффективных векторов  $S(Y)$  также замкнуто.*

Обратимся к множеству эффективных точек. Как показывает следующий ниже пример, множество Парето может оказаться незамкнутым даже если множество  $X$  выпукло и замкнуто, а векторная функция  $f$  непрерывна на нём.

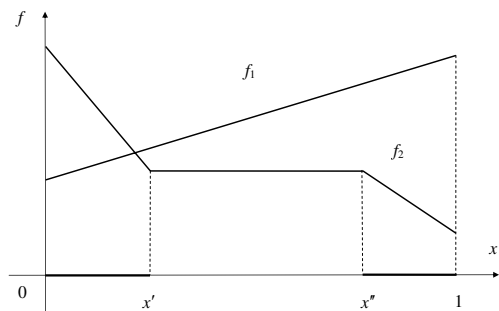


Рис. 12: Иллюстрация к примеру 4.1.

**П р и м е р 4. 1.** Пусть  $X = [0, 1]$ . Рассмотрим непрерывные функции  $f_1$  и  $f_2$ , образующие векторный критерий  $f$ , графики которых изображены на рис. 12.



Нетрудно видеть, что в данном случае множество Парето является объединением двух непересекающихся промежутков  $[0, x']$  и  $[x'', 1]$ , первый из которых, очевидно, не замкнут.

Напомним, что числовую функцию  $h$ , определенную на выпуклом множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , называют *квазивогнутой*, если для любых  $\lambda \in (0, 1)$  и всех  $x, x' \in X$  имеет место неравенство

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \min\{h(x), h(x')\}.$$

Всякая вогнутая функция квазивогнута, но, как показывают простые примеры, не наоборот. Как указывалось в разд. 3.5, функция  $h$ , заданная на выпуклом множестве  $X$ , квазивогнута в том и только том случае, если для любого числа  $\alpha$  множество  $\{x \in X \mid h(x) \geq \alpha\}$  является выпуклым.

Числовую функцию  $h$ , заданную на выпуклом множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$ , называют *строго квазивогнутой*, если для любых  $\lambda \in (0, 1)$  и всех  $x, x' \in X$ , таких что  $x \neq x'$ , справедливо строгое неравенство

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)x') > \min\{h(x), h(x')\}.$$

Всякая строго квазивогнутая функция является квазивогнутой, но не наоборот.

*Л е м м а 4. 1. Пусть множество  $X$  выпукло, а вектор-функция  $f$  (покомпонентно) строго квазивогнута на нём. Тогда множества Парето и Слейтера совпадают, т.е.*

$$S_f(X) = P_f(X), \quad S(Y) = P(Y).$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Поскольку всякая эффективная точка слабо эффективна, для доказательства достаточно установить включение  $S_f(X) \subset P_f(X)$ . Допустим противное, т.е. для некоторого  $x^* \in X$  имеет место включение  $x^* \in S_f(X)$ , но  $x^* \notin P_f(X)$ . Тогда найдётся точка  $x \in X$ , для которой выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x^*)$ . Рассмотрим точку  $x' = (x + x^*)/2 \in X$ . Благодаря строгой квазивогнутости  $f$  верно  $f(x') > f(x^*)$ , что не совместимо с включением  $x^* \in S_f(X)$ . ■

Из доказанной леммы и теоремы 4.1 вытекает следующее утверждение.

*С л е д с т в и е 4. 2. Если множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  выпукло и замкнуто, а вектор функция  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  покомпонентно непрерывна и строго квазивогнута на нём, то множество эффективных точек  $P_f(X)$  замкнуто.*

Заметим, что в рассмотренном выше примере 4.1 лишь одна компонента векторной функции строго квазивогнута. Именно это обстоятельство является причиной тому, что множество Парето в этом примере оказывается незамкнутым.

Перейдем к вопросу о замкнутости множества эффективных векторов. В следующем примере это множество незамкнуто, хотя все предположения следствия 4.2 выполнены и, кроме того, замкнутым является множество  $P_f(X)$ .

*П р и м е р 4. 2.* Пусть  $X = [0, +\infty)$  и двумерная вектор функция  $f = (f_1, f_2)$  имеет непрерывные строго квазивогнутые компоненты, графики которых изображены на рис. 13. Нетрудно понять, что здесь  $P_f(X) = [0, +\infty)$ , но множество  $P(Y)$  незамкнуто, так как оно не включает предельную точку  $(1,0)$ .

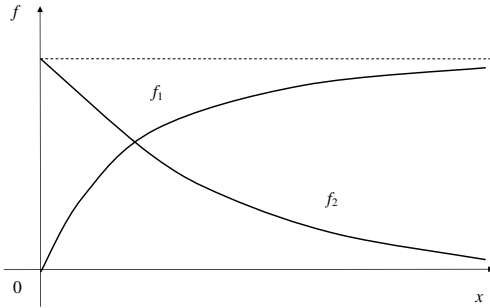


Рис. 13: Иллюстрация к примеру 4.2.

Если же к предположениям следствия 4.2 добавить условие ограниченности множества  $X$ , то в таком случае множество Парето  $P_f(X)$  окажется компактным, а непрерывный образ компактного

множества, как известно, есть компакт. Поэтому имеет место

**С л е д с т в и е 4. 3.** *Множество  $P(Y)$  является компактом при условии, что  $X$  – выпуклый компакт, а вектор-функция  $f$  покомпонентно непрерывна и строго квазивогнута на  $X$ .*

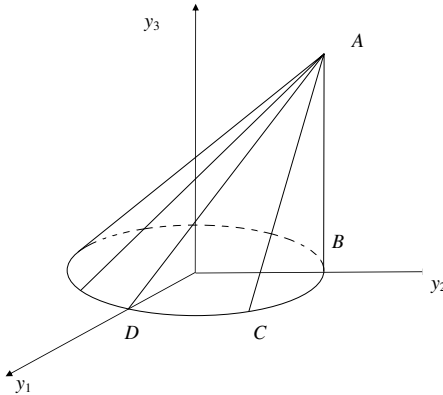


Рис. 14: Иллюстрация к примеру 4.3.

**П р и м е р 4. 3.** Пусть множество  $Y$  представляет собой конус, основанием которого служит круг в плоскости  $y_1Oy_2$ , а вершиной – точка  $A = (0, 1, 1)$  (см. рис. 14). Здесь  $y_1 = f_1(x) = x_1$ ,  $y_2 = f_2(x) = x_2$ ,  $y_3 = f_3(x) = x_3$ ,  $Y = X$ .

Все точки дуги  $BCD$  (кроме точки  $B$ ) этого множества являются парето-оптимальными. Это следует из того, что неотрицательный ортант пространства  $\mathbb{R}^3$ , вершина которого транслирована в каждую из указанных выше точек, имеет общей с конусом лишь свою вершину. Однако точка  $B$  не является эффективной, так как  $A = (0, 1, 1) \geq (0, 1, 0) = B$ .

#### **4.2. Плотность множества собственно эффективных точек.**

**Т е о р е м а 4. 2** (Д.А. Молодцов, В.Д. Ногин). *Предположим, что множество  $Y$  замкнуто и существуют вектор  $\mu \in M$  и число  $\alpha$  такие, что*

$$\langle \mu, y \rangle \leq \alpha \quad \text{для всех } y \in Y. \quad (4.1)$$

Тогда множество собственно эффективных векторов  $G(Y)$  плотно во множестве эффективных векторов  $P(Y)$ , т.е.

$$G(Y) \subset P(Y) \subset \overline{G(Y)}. \quad (4.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** (В.Д. Ногин). Левое включение из (4.2) всегда имеет место. Поэтому остаётся установить справедливость правого включения. Оно очевидным образом выполняется в случае пустого множества Парето. Поэтому пусть  $P(Y) \neq \emptyset$ . Выберем произвольный парето-оптимальный вектор  $y^*$ . Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что  $y^* > \mathbf{0}$ . Установим существование последовательности собственно эффективных векторов, сходящейся к  $y^*$ .

Введём линейные функции

$$F_i^k(y) = \left(1 - \frac{m-1}{k}\right)y_i + \sum_{j \neq i} \frac{y_j}{k}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = m, m+1, \dots$$

и рассмотрим замкнутые множества

$$\Omega_k = Y \cap \{y \in \mathbb{R}^m \mid F_i^k(y - y^*) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\}, \quad k = m, m+1, \dots$$

Очевидно,

$$\Omega_m \supset \Omega_{m+1} \supset \Omega_{m+2} \dots$$

Согласно (4.1), найдётся такой номер  $k^0$ , что все множества  $\Omega_k$ ,  $k \geq k^0$ , компактны.

Функции

$$\min_{i \in I} \lambda_i^k F_i^k(y), \quad k = k^0, k^0 + 1, \dots,$$

где

$$\lambda_i^k = \frac{1}{F_i^k(y^*)} / \sum_{j=1}^m \frac{1}{F_j^k(y^*)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

непрерывны на всем пространстве  $\mathbb{R}^m$  по  $y$ . Поэтому в силу теоремы Вейерштрасса для каждого  $k = k^0, k^0 + 1, \dots$  найдется такая точка  $y^k \in \Omega_k$ , что

$$\min_{i \in I} \lambda_i^k F_i^k(y^k) \geq \min_{i \in I} \lambda_i^k F_i^k(y) \quad (4.3)$$

для всякого  $y \in \Omega_k$ , в том числе, и для  $y^*$ . Если же  $y \in Y \setminus \Omega_k$ , то для некоторого  $i$  справедливо неравенство  $F_i^k(y^*) > F_i^k(y)$  и для указанного  $y$  верно

$$\min_{i \in I} \lambda_i^k F_i^k(y^*) = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{F_j^k(y^*)}} > \min_{i \in I} \lambda_i^k F_i^k(y).$$

Следовательно, неравенство (4.3) имеет место для всех  $y \in Y$ . Согласно теореме 3.1, отсюда вытекает слабая эффективность точки  $y^k$  относительно линейной вектор-функции  $(F_1^k(\cdot), F_2^k(\cdot), \dots, F_m^k(\cdot))$ , что, в свою очередь, на основании теоремы 3.7 влечет  $y^k \in G(Y)$ .

Для любого  $k \geq k^0$  верно включение  $\Omega_k \subset \Omega_{k^0}$ . Поэтому  $\{y^k\} \subset \Omega_{k^0}$ ,  $k = k^0, k^0 + 1, \dots$ . Но множество  $\Omega_{k^0}$  компактно, а значит из последовательности  $\{y^k\}$  можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке  $y^0 \in Y$ . В соответствии с определением множества  $\Omega_k$ , число  $k$  можно выбрать так, чтобы всякая точка этого множества (в том числе и  $y^k$ ) была приближена к множеству  $y^* + \mathbb{R}_+^m$  с любой наперед заданной точностью. Следовательно,  $y^0 \in y^* + \bar{\mathbb{R}}_+^m$ . А так как  $y^* \in P(Y)$ , то  $y^0 = y^*$ . ■

Как показывает следующий результат, при дополнительном условии выпуклости множества  $Y$  теорема 4.2 справедлива и без условия (4.1).

**Т е о р е м а 4.3** (В.Д. Ногин). *Включения (4.2) имеют место, если множество векторов  $Y$  выпукло и замкнуто.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Условие (4.1) в доказательстве предыдущей теоремы использовалось для установления ограниченности множеств  $\Omega_k$ , для всех номеров, начиная с некоторого  $k^0$ . В данном

случае при условии выпуклости множества  $Y$  выпуклыми оказываются и все множества  $\Omega_k$ ,  $k = m, m + 1, \dots$

Что касается последовательности собственно эффективных точек  $y^k$ , то существование этих точек в предположениях данной теоремы вытекает из теоремы 27.3 [5], поскольку для достаточно большого  $k$  функция  $\min_{i \in I} \lambda_i^k F_i^k(y)$  и выпуклое множество  $\Omega_k$  не имеют общих рецессивных направлений.<sup>5</sup>

Нетрудно понять, что когда последовательность собственно эффективных точек  $y^k$  является ограниченной, используя завершающие рассуждения теоремы 4.2, придём к требуемому результату  $y^0 = y^*$ .

Если предположить, что последовательность  $y^k$  не является ограниченной, то в силу выпуклости множеств  $\Omega_k$ , начиная с некоторого номера, для каждого члена последовательности  $y^k$  можно указать точку  $\tilde{y}^k \in \Omega_k$ , принадлежащую сфере, например, единичного радиуса с центром в точке  $y^*$ . Благодаря компактности сферы из последовательности  $\tilde{y}^k$  можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к точке  $y^0 \in Y$ . В таком случае  $y^0 \in y^* + \bar{\mathbb{R}}_+^m$ ,  $y^0 \neq y^*$ , что не совместимо с эффективностью точки  $y^*$ . Следовательно, последовательность  $y^k$  не может быть неограниченной. ■

Следует заметить, что требование выпуклости множества допустимых векторов  $Y$  в теореме 4.3 является существенным; это подтверждает следующий пример.

**Пример 4.4.** Пусть множество  $Y$  имеет вид неограниченной кривой, изображенной ниже на рис. 15. Оно замкнуто, но не выпукло. При этом начало координат является эффективным вектором. Однако собственно эффективных векторов здесь не существует, и поэтому правое из включений (4.2) места не имеет.

Из теорем 4.2 и 4.3 немедленно вытекает следующий результат.

<sup>5</sup>Напомним, что некоторое направление именуют *рецессивным* для выпуклого множества, если данное множество вместе с каждой своей точкой содержит и весь луч, исходящий из указанной точки в этом направлении. Что касается *рецессивного направления числовой вогнутой функции*  $h$  - это направление таких векторов  $y$ , что  $h(x + \lambda y)$  - неубывающая по  $\lambda$  функция для любого  $x$ .

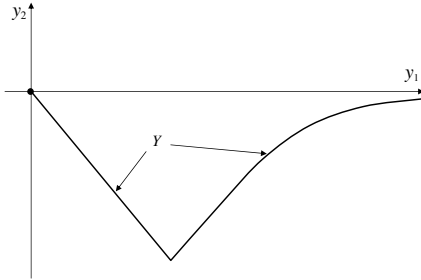


Рис. 15: Иллюстрация к примеру 4.4.

**С л е д с т в и е 4. 4.** Пусть множество  $Y$  замкнуто. Если имеет место по крайней мере одно из условий

1) существует вектор  $\mu \in M$  и число  $\alpha$ , для которых выполнено неравенство (4.1);

2) множество  $Y$  выпукло;

то эффективные точки существуют тогда и только тогда, когда существуют собственно эффективные точки.

В соответствии с теоремой 3.10 при определённых предположениях имеет место равенство  $G(Y) = Y_{>}^6$ . Это даёт возможность переформулировать теорему 4.2 в следующей форме.

**Т е о р е м а 4. 4** (К. Эрроу - Е. Баранкин - Д. Блекуэлл). В предположении выпуклости и замкнутости множества  $Y$  справедливы включения

$$Y_{>} \subset P(Y) \subset \overline{Y_{>}}. \quad (4.4)$$

Напомним, что ранее была введена оболочка Эджворта-Парето

$$Y_* = \{y^* \in \mathbb{R}^m \mid y^* \leq y \text{ для некоторого } y \in Y\}. \quad (4.5)$$

**Л е м м а 4. 2** (В.Д. Ногин). Предположим, что множество  $X$  выпукло, вектор-функция  $f$  вогнута и непрерывна на нём и

<sup>6</sup>Множество  $Y_{>}$  было введено в разд. 3.3.

множество  $Y$  замкнуто. Если  $P_f(X) \neq \emptyset$ , то множество  $Y_*$  будет выпуклым и замкнутым.

**Доказательство.** Выпуклость множества  $Y_*$  установлена в лемме 3.3. Докажем его замкнутость. Для этой цели выберем произвольную сходящуюся последовательность точек  $\{y^k\} \subset Y_*$ :

$$y^k \rightarrow \bar{y} \ (k \rightarrow \infty), \quad y^k \leq f(x^k), \quad x^k \in X, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Не уменьшая общности последующих рассуждений, можно считать, что  $\bar{y} = \mathbf{0}$ . Для доказательства предположим противное:  $\mathbf{0} \notin Y_*$ . Возможны два случая - последовательность  $\{f(x^k)\}$  ограничена, либо не ограничена.

В первом случае из указанной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{f(x^l)\}$ , в неравенстве  $y^l \leq f(x^l)$  перейти к пределу при  $l \rightarrow \infty$  и, благодаря замкнутости множества  $Y$ , получим  $\mathbf{0} \leq \lim f(x^l) = y^* \in Y$ . Так как  $y^* \in Y$ , то найдется такая точка  $x^* \in X$ , что  $y^* = f(x^*)$ . Таким образом, приходим к неравенству  $\mathbf{0} \leq f(x^*)$ , которое не совместимо с предположением  $\mathbf{0} \notin Y_*$ .

Пусть последовательность векторов  $\{f(x^k)\}$  не является ограниченной. В этом случае, благодаря предположению  $\mathbf{0} \notin Y_*$ , элементы этой последовательности при неограниченном увеличении  $k$  сколь угодно близко приближаются к неотрицательному ортанту  $\mathbb{R}_+^m$ . При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность  $\|f(x^k)\|$  строго возрастающая и

$$\begin{aligned} \sup_k f_1(x^k) &= +\infty, \quad f_1(x^{k+1}) > f_1(x^k), \quad k = 1, 2, \dots; \\ f_2(x^k) &\rightarrow -0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \\ \sup_k f_i(x^k) &\geq 0, \quad i = 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.7)$$

По условию найдется парето-оптимальная точка  $x^0 \in P_f(X)$ . Начиная с некоторого номера, последовательность  $\{\|f(x^k) - f(x^0)\|\}$



должна стать строго возрастающей и положительной. Не умаляя общности, будем считать, что этот номер - первый. Выберем  $\varepsilon \in (0, \|f(x^1) - f(x^0)\|)$ . Благодаря непрерывности компонент векторной функции  $f$ , для каждого  $k$  можно указать такое число  $\lambda_k \in (0, 1)$ , что

$$\|f(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k)x^0) - f(x^0)\| = \varepsilon. \quad (4.8)$$

Использование свойства вогнутости функции  $f$  дает возможность записать неравенство

$$z^k := \lambda_k f(x^k) + (1 - \lambda_k)f(x^0) \leq f(\lambda_k x^k + (1 - \lambda_k)x^0) =: w^k, \quad (4.9)$$

которое вместе с предыдущим равенством влечет

$$z_i^k \leq f_i(x^0) + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.10)$$

С другой стороны, в силу (4.7), начиная с некоторого номера  $k_0$ , для всех  $k > k_0$  начнут выполняться неравенства  $f_i(x^k) \geq -\varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , а значит

$$z_i^k \geq -\varepsilon\lambda_k + (1 - \lambda_k)f_i(x^0), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.11)$$

Из неравенств (4.10)–(4.11) вытекает ограниченность последовательности  $\{z^k\}$ ; по этой причине её можно считать сходящейся. На основании равенства (4.8) последовательность векторов  $\{w^k\}$  также можно считать сходящейся.

Установим, что  $\lambda_k \rightarrow +0$ . Для последовательности  $\{z_1^k\}$  в силу (4.10)–(4.11) можно написать  $|z_1^k| \leq c$ , где некоторое  $c \geq 0$ . Используя определение  $z_1^k$  из (4.9), отсюда получаем

$$\lambda_k \leq \frac{c + |f_1(x^0)|}{|f_1(x^k) - f_1(x^0)|},$$

что вместе с первой строкой из (4.7) влечет  $\lambda_k \rightarrow +0$ .

Таким образом, (4.11) влечёт неравенство  $\lim z^k \geq f(x^0)$ . Поэтому, благодаря (4.8)–(4.9), получаем  $w^0 = \lim w^k \geq f(x^0)$  и

$w^0 \neq f(x^0)$ . Неравенство здесь имеет место из-за (4.8). А вследствие замкнутости множества  $Y$  верно  $w^0 \in Y$ , т.е. существует такая точка  $x' \in X$ , что  $f(x') = w^0 \geq f(x^0)$ . Полученное противоречит парето-оптимальности точки  $x^0$ . ■

Следующий простой пример показывает, что требование существования парето-оптимальных точек в последнем утверждении является существенным.

**Пример 4.5.** Пусть имеются два непрерывных вогнутых критерия  $f_1(x_1) = x_1$ ,  $f_2(x_1) = -1/x_1$  одной переменной  $x_1$  и выпуклое замкнутое допустимое множество  $X = [1, +\infty)$ . Нетрудно проверить, что здесь множество  $Y_*$  совпадает с нижней открытой полуплоскостью  $y_2 < 0$  критериального пространства и  $P_f(X) = \emptyset$ .

Если в условиях доказанной леммы вместо  $X$  взять  $Y$ , а в качестве  $f$  – линейную вектор-функцию  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , то придём к следующему результату.

**Следствие 4.5.** *Если множество  $Y$  выпукло и замкнуто, причём  $P(Y) \neq \emptyset$ , то множество  $Y_*$  замкнуто.*

Следует заметить, что, как показывает пример 4.4, условие выпуклости множества  $Y$  в последнем следствии является существенным.

Перейдем к формулировке результатов последних двух теорем в терминах решений.

**Теорема 4.5.** *Пусть множество  $X$  выпукло, вектор-функция  $f$  вогнута и непрерывна на нём, причём множество  $Y$  замкнуто. Тогда справедливы включения (4.2), (4.4).*

**Доказательство.** В условиях теоремы, благодаря лемме 4.2, множество  $Y_*$  оказывается замкнутым и выпуклым.

Кроме того, справедлива теорема 4.3, согласно которой

$$G(Y_*) \subset P(Y_*) \subset \overline{G(Y_*)},$$

откуда, благодаря лемме 3.2, следует (4.2).

Для доказательства (4.4) к множеству  $Y_*$  применим теорему 4.4.

Получим включения

$$(Y_*)_{>} \subset P(Y) \subset \overline{(Y_*)_{>}}.$$

Отсюда, если воспользоваться легко проверяемым равенством  $(Y_*)_{>} = Y_{>}$ , придём к требуемым включениям (4.4). ■

Следует отметить, что условие замкнутости множества  $Y$  в условиях теоремы 4.5 заведомо выполняется, если  $X$  – компакт и  $f$  – непрерывная вектор-функция.

Перейдем к рассмотрению вопроса плотности в терминах вариантов. Следующий пример показывает, что включения

$$G_f(X) \subset P_f(X) \subset \overline{G_f(X)} \quad (4.12)$$

при выполнении всех предположений теорем 4.4 и 4.5 могут нарушаться.

**Пример 4.6.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^3$  – круговой конус, основанием которого служит круг единичного радиуса с центром в начале координат на плоскости  $x_1 0 x_2$ , а вершиной – точка  $A(0,1,1)$ . Это множество можно считать изображенным на рис. 14, если заменить на нём  $y_1, y_2, y_3$  соответственно на  $x_1, x_2, x_3$ . Для двумерной линейной векторной функции  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$  множество собственно эффективных точек будет состоять из дуги окружности  $B CD$  (без концевых точек  $B$  и  $D$ ), а множество эффективных точек, кроме того, будет включать  $D$  и все точки отрезка  $AD$ . Очевидно, замыканием множества собственно эффективных точек является замкнутая дуга  $B CD$ , но она не покрывает всего множества эффективных точек.

**С л е д с т в и е 4.6.** *Если  $X$  – выпуклый компакт, а векторная функция  $f$  вогнута и непрерывна на нём, причём по крайней мере одна компонента  $f_i$  строго вогнута, то включения (4.12) выполнены.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем произвольно  $x^* \in P_f(X)$ . В соответствии с последней теоремой существует такая последовательность точек  $\{x^k\}$ , что  $f(x^k) \rightarrow f(x^*)$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $x^k \in G_f(X)$

для любого  $k = 1, 2, \dots$ . В силу компактности  $X$  эту последовательность можно считать сходящейся:  $x^k \rightarrow x \in X$ . Согласно непрерывности векторной функции  $f$ , выполняется равенство  $f(x^*) = f(x)$ . Теперь, если предположить, что  $x^* \neq x$ , то, благодаря вогнутости  $f$  и строгой вогнутости  $f_i$ , для любого  $\lambda \in (0, 1)$  будем иметь

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x^*) = f(x^*).$$

Это неравенство не совместимо с условием  $x^* \in P_f(X)$ . Следовательно,  $x^* = x$ . ■

**4.3. Связность множества Парето.** Пусть  $Z \subset \mathbb{R}^m$ . Напомним, что множество  $Z$  называется

*связным* если любые две его точки можно соединить непрерывной дугой (т.е. непрерывным образом отрезка  $[0, 1]$ ), целиком лежащей в  $Z$ ;

*стягиваемым в себе*, если существует точка  $z^* \in Z$  и непрерывное отображение  $h : Z \times [0, 1] \rightarrow Z$ , такие, что

$$h(z, 0) = z, \quad h(z, 1) = z^* \quad \text{для всех } z \in Z.$$

Нетрудно понять, что стягиваемое в себе множество является связным.

Разберем некоторые топологические свойства непустого множества Парето  $P(Y)$ , предполагая, что множество  $Y$  замкнуто и выпукло. Поскольку благодаря лемме 4.3 выполнено равенство  $P(Y) = P(Y_*)$ , а в предположении выпуклости и замкнутости  $Y$  множество  $Y_*$  также замкнуто (см. следствие 4.5), будем считать, что  $Y = Y_*$ .

**Т е о р е м а 4. 6** (Б. Пелег). *Пусть множество  $Y$  замкнуто и выпукло. Тогда непустое множество Парето  $P(Y)$  стягиваемо в себе.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку множество Парето не пусто, согласно следствию 4.4 множество собственно эффективных векторов также не пусто. В таком случае согласно теореме 3.10 найдётся вектор  $\mu \in \mathbf{M}$  и число  $\alpha$ , такие, что имеет место неравенство (4.1).

Обозначим  $w := \min_{i \in I} \mu_i$ . Введём на пространстве  $\mathbb{R}^m$  векторную функцию

$$F(y) = y + \frac{1}{w} [\alpha - \langle \mu, y \rangle] \sum_{i=1}^m e^i,$$

где  $e^i$  –  $i$ -й орт пространства  $\mathbb{R}^m$ . Очевидно, введённая функция является линейной, а значит непрерывной.

Для каждого  $y \in Y$  определим множество

$$R(y) := \{z \in Y \mid z \geq y\}.$$

Для всех  $j \in I$  и  $z \in R(y)$  с использованием неравенства  $\alpha \geq \langle \mu, z \rangle$  можно написать

$$\begin{aligned} F_j(y) &\geq y_j + \frac{1}{w} \left[ \sum_{i=1}^m \mu_i z_i - \sum_{i=1}^m \mu_i y_i \right] = \\ &= z_j + \left( \frac{\mu_j}{w} - 1 \right) (z_j - y_j) + \frac{1}{w} \sum_{i \neq j} \mu_i (z_i - y_i) \geq z_j. \end{aligned}$$

Таким образом, введённая вектор-функция  $F$  обладает тем свойством, что

$$F(y) \geq z \quad \text{для всех } z \in R(y). \quad (4.13)$$

Определим функцию  $r : Y \rightarrow P(Y)$  из условия

$$\|r(y) - F(y)\| = \min_{z \in R(y)} \|z - F(y)\|.$$

В силу (4.1), множество  $R(y)$  – выпуклый компакт. Функция  $\|z - F(y)\|$  строго выпукла по  $z$ , и потому достигает на выпуклом компактном множестве  $R(y)$  минимума в единственной точке, которую обозначим через  $r(y)$ . Кроме того, точка  $r(y)$  является парето-оптимальной (в этом можно легко убедиться при помощи рассуждения "от противного"). Это означает, что функция  $r(\cdot)$  определена корректно.

Ранее было принято, что  $Y = Y_*$ . Поэтому в множестве  $Y$  найдутся такие точки  $a$  и  $b$ , для которых будет выполнено неравенство  $b > a$ .

Определим на декартовом произведении  $P(Y) \times [0, 1]$  векторную функцию

$$h(p, t) := r((1 - t)p + ta).$$

Очевидно,  $h(p, 0) = p$ ,  $h(p, 1) = r(a) \in P(Y)$  для любого  $p \in P(Y)$ . Остаётся убедиться в непрерывности функции  $h$ . С этой целью выберем произвольно две последовательности  $\{t_k\} \subset [0, 1]$  и  $\{p^k\} \subset P(Y)$  такие, что  $\lim t_k = t$ ,  $\lim p^k = p$ .

Если  $t = 0$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [(1 - t_k)p^k + t_k a] = p,$$

а благодаря тому, что  $r(y) \in R(y)$ , будет выполнено неравенство

$$h(p^k, t_k) \geq (1 - t_k)p^k + t_k p^k. \quad (4.14)$$

В силу (4.14), на основе включения  $p \in P(Y)$ , придём к равенству  $\lim_{k \rightarrow \infty} h(p^k, t_k) = p$ .

В случае  $t > 0$  имеем

$$s := (1 - t)p + tb > (1 - t)p + ta = \lim_{k \rightarrow \infty} [(1 - t_k)p^k + t_k a] =: y. \quad (4.15)$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что вектор-функция  $r$  непрерывна в точке  $y = (1 - t)p + ta$ . Для выполнения этой проверки предположим противное:

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r(y^k) = z \neq r(y). \quad (4.16)$$

В таком случае в силу единственности точки минимума строго вогнутой функции  $\|z - F(y)\|$  выполняется неравенство

$$\|r(y) - F(y)\| < \|z - F(y)\|. \quad (4.17)$$

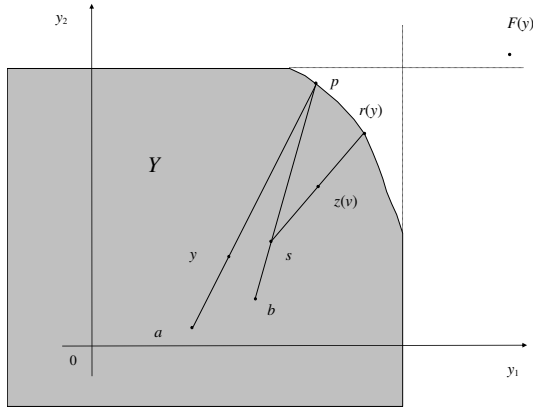


Рис. 16: Иллюстрация к доказательству теоремы 4.6.

Установим существование последовательности точек  $z^k \subset R(y^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = r(y). \quad (4.18)$$

В самом деле, пусть

$$z(v) = vs + (1 - v)r(y) > y, \quad v \in (0, 1),$$

где  $s$  – вектор из (4.15). Очевидно, найдется такое натуральное  $k(v)$ , что  $z(v) \in R(y^k)$  для любого  $k \geq k(v)$ . Но

$$\lim_{v \rightarrow 0} z(v) = r(y).$$

Поэтому действительно существуют такие точки  $z^k \in R(y^k)$ , что имеет место равенство (4.18). Из соотношений (4.16)–(4.18) в силу непрерывности нормы вытекает существование такого номера  $k$ , что

$$\|z^k - F(y^k)\| < \|r(y^k) - F(y^k)\|.$$

Полученное неравенство противоречит определению функции  $r$ .

Таким образом, векторная функция  $r(\cdot)$  непрерывна в точке  $(1 - t)p + ta$ . ■

**С л е д с т в и е 4. 7.** Пусть множество  $Y$  выпукло и замкнуто. Тогда множество Парето  $P(Y)$  дугообразно связно.

**С л е д с т в и е 4. 8.** Если множество  $Y$  выпукло и замкнуто, а множество Парето  $P(Y)$  не пусто, то множество Слейтера  $S(Y)$  дугообразно связно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем произвольно две точки  $y^1, y^2 \in S(Y)$ . Согласно предыдущему следствию множество Парето дугообразно связно. Поэтому точки  $r(y^1)$  и  $r(y^2)$ , где  $r$  – векторная функция из доказательства теоремы 4.6, можно соединить дугой  $L$ , целиком лежащей в множестве Парето  $P(Y)$ . Отрезок  $L_1$ , соединяющий точки  $y^1$  и  $r(y^1)$ , содержится в множестве Слейтера  $S(Y)$ . Аналогичным свойством обладает отрезок  $L_2$ , соединяющий точки  $y^2$  и  $r(y^2)$ . В итоге, непрерывная дуга  $L_1 \cup L \cup L_2$  лежит в множестве  $S(Y)$  и соединяет точки  $y^1$  и  $y^2$ . Следовательно, множество Слейтера  $S(Y)$  дугообразно связно. ■

## 5. Функции и аксиомы выбора

Формулируется задача выбора на основе функции выбора. Приводятся аксиомы, которые обычно связывают с разумным поведением человека в процессе выбора. При условии выполнения определённых аксиом устанавливаются две теоремы, гарантирующие так называемый парнодоминантный выбор, который можно реализовать на основе бинарного отношения, т.е. при помощи попарных сравнений.

### 5.1 Определение функции выбора. Аксиомы выбора.

Пусть имеется некоторое непустое множество  $\Omega$  объектов произвольной природы. Через  $2^\Omega$  будем обозначать множество всех его подмножеств.

**О п р е д е л е н и е 5.1** Однозначное отображение  $C : A \rightarrow 2^\Omega$ , где  $A \subset 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}$ , называют *функцией выбора*, заданной на  $A$ , если для любого  $Y \in A$  выполняется включение  $C(Y) \subset Y$ .

Функция выбора каждому предъявляемому множеству  $Y \in A$  сопоставляет определённое его подмножество  $C(Y)$ , которое обыч-



но интерпретируют как множество *выбираемых* (или "наилучших") элементов. В частном случае, когда  $C(Y) = \emptyset$ , говорят об отказе от выбора. Если нет ни одного отказа в выборе, то будем говорить о функции *непустого* выбора. В другом "крайнем случае" возможно выполнение равенства  $C(Y) = Y$ .

**Пример 5.1** Пусть  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $A = 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}$ . На конечном множестве можно задать лишь некоторое конечное число различных функций выбора. Одна из них может быть описана следующим образом

$$\begin{aligned} C(\{i\}) &= \{i\}, \quad i = 1, 2, 3; \\ C(\{1, 2\}) &= \{1\}; \\ C(\{1, 3\}) &= \{1\}; \\ C(\{2, 3\}) &= \{3\}; \\ C(\{1, 2, 3\}) &= \{1, 3\}. \end{aligned}$$

Заметим, что это функция *непустого* выбора.

Иногда выбор может показаться нелогичным. Например, когда некоторый элемент не выбирается из всех подмножеств, содержащих его, но он единственный оказывается выбранным из всего исходного множества.

К настоящему времени выявлены определённые свойства "логичной" функции выбора. Эти свойства обычно именуют *аксиомами выбора*.

**Аксиома 1** (аксиома наследования). Пусть  $C$  – функция выбора, заданная на семействе подмножеств  $A$ . Для любых множеств  $Y_1, Y_2 \in A$ , таких, что  $Y_1 \subset Y_2$ , имеет место включение  $Y_1 \cap C(Y_2) \subset C(Y_1)$ .

Эта аксиома впервые была введена Х. Черновым. Её смысл состоит в следующем: если мы сужаем произвольное множество  $Y_2$  до  $Y_1$ , то всякий элемент, попадающий в выбор из более широкого множества  $Y_2$ , войдёт в выбор и из более узкого множества  $Y_1$ , при условии, что он в  $Y_1$  содержится. Легко видеть, что функция выбора из примера 5.1 не удовлетворяет аксиоме наследования, так как

$C(\{1, 2, 3\}) = \{1, 3\}$ , но множество  $C(\{1, 3\}) = \{1\}$  не содержит третий элемент.

**А к с и о м а 2** (аксиома согласия). Пусть  $C$  – функция выбора, заданная на семействе подмножеств  $A$ . Для любого непустого подсемейства  $A' \subset A$  имеет место включение

$$\bigcap_{Y \in A'} C(Y) \subset C\left(\bigcup_{Y \in A'} Y\right).$$

В соответствии с аксиомой согласия, элементы, выбираемые одновременно из нескольких множеств, обязательно должны входить в число выбираемых из объединения этих множеств. Подобную аксиому использовали Х. Чернов и А. Сен.

**5.2. Теоремы Сена и Шварца.** Рассмотрим множество  $\Omega_A \subset \Omega$ , из которого образуется семейство подмножеств  $A$ . Пусть на множестве  $\Omega_A$  задано некоторое асимметричное бинарное отношение  $P \subset \Omega_A \times \Omega_A$ . Для  $Y \in A$  множество

$$C_P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ что } yPy^*\} \quad (5.1)$$

называют *множеством недоминируемых (максимальных) элементов* множества  $Y$ . Например, в частном случае, когда  $\Omega$  есть множество вещественных чисел, в качестве отношения  $P$  взято отношение "строго больше" и  $Y$  – отрезок  $[a, b]$ , получаем  $C_P(Y) = \{b\}$ , т.е. образом указанного отрезка является одноэлементное множество, состоящее из наибольшего числа данного отрезка.

**Т е о р е м а 5. 1.** (А. Сен) Пусть  $A$  – набор подмножеств множества  $\Omega$ , заведомо содержащий все одноэлементные и двухэлементные подмножества и  $C$  – функция непустого выбора, заданная на  $A$ . Для того чтобы на множестве  $\Omega_A$  существовало бинарное отношение  $P$ , такое, что для любого  $Y \in A$  имеет место равенство  $C(Y) = C_P(Y)$ , необходимо и достаточно, чтобы функция выбора  $C$  удовлетворяла аксиомам наследования и согласия.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. По условию существует бинарное отношение  $P$ , такое, что для любого  $Y \in A$  имеет

место равенство  $C(Y) = C_P(Y)$ . Для проверки аксиомы наследования выберем два произвольных множества  $Y_1, Y_2 \in A$ ,  $Y_1 \subset Y_2$ . Рассмотрим произвольный элемент  $y \in Y_1 \cap C(Y_2) = Y_1 \cap C_P(Y_2)$ . Так как  $y \in C_P(Y_2)$  и  $y \in Y_1 \subset Y_2$ , имеем  $y \in C_P(Y_1) = C(Y_1)$  и, тем самым, выполнение аксиомы наследования установлено.

Теперь проверим выполнение аксиомы согласия. Выберем произвольное  $A' \subset A$ . Пусть  $y \in \bigcap_{Y \in A'} C(Y)$ . Используя равенство  $C(Y) = C_P(Y)$ , получаем  $y \in \bigcap_{Y \in A'} C_P(Y)$ . Таким образом, для любых  $A'$  и  $Y \in A'$  верно включение  $y \in C_P(Y)$ , а значит  $y \in C_P(\bigcup_{Y \in A'} Y)$ . Отсюда вытекает требуемое  $y \in C(\bigcup_{Y \in A'} Y)$ .

Достаточность. Пусть функция выбора  $C$  удовлетворяет аксиомам наследования и согласия. На множестве  $\Omega_A$  введём бинарное отношение  $P$  по правилу

$$yPy' \iff y' \notin C(\{y, y'\}).$$

Благодаря тому, что  $C$  – функция непустого выбора, одновременное выполнение соотношений  $y' \notin C(\{y, y'\})$  и  $y \notin C(\{y, y'\})$  невозможно, поэтому введённое отношение  $P$  асимметрично. Убедимся в справедливости равенства  $C(Y) = C_P(Y)$  для любого  $Y \in A$ .

Для доказательства включения  $C(Y) \subset C_P(Y)$  берём и фиксируем произвольный элемент  $y \in C(Y)$ . Предположим противное, т.е.  $y \notin C_P(Y)$ . В таком случае должен существовать элемент  $y' \in Y$ , для которого  $y'Py$ , т.е.  $y \notin C(\{y, y'\})$ . С другой стороны, в силу аксиомы наследования,  $y \in \{y, y'\} \cap C(Y) \subset C(\{y, y'\})$ , что противоречит полученному выше.

Теперь проверим включение  $C_P(Y) \subset C(Y)$ . Пусть, напротив, существует элемент  $y' \in C_P(Y)$ , для которого  $y' \notin C(Y)$ . Поскольку  $Y = \bigcup_{y \in Y} \{y, y'\}$ , имеем  $y' \notin C(\bigcup_{y \in Y} \{y, y'\})$ . Отсюда на основании аксиомы согласия следует  $y' \notin \bigcap_{y \in Y} C(\{y, y'\})$ . В соответствии с принципом двойственности теории множеств, полученное означает существование такого элемента  $y \in Y$ , что  $y' \notin C(\{y, y'\})$ , а значит  $yPy'$ . Это несовместимо с начальным предположением  $y' \in C_P(Y)$ . ■

О функции выбора  $C$ , для которой имеет место равенство  $C(Y) = C_P(Y)$ , говорят, что она реализует *парнодоминантный выбор* или, что она является *парнодоминантной*. Парнодоминантный выбор можно реализовать (т.е. построить множество  $C(Y)$ ) относительно несложным образом, путём сравнения лишь пар элементов множества  $Y$ ; более сложные комбинации элементов можно не рассматривать.

**Аксиома 3** (аксиома независимости от посторонних вариантов). Пусть  $C$  – функция выбора, заданная на семействе подмножеств  $A$ . Для всех множеств  $Y_1, Y_2 \in A$ , таких, что  $C(Y_2) \subset Y_1 \subset Y_2$ , имеет место равенство  $C(Y_1) = C(Y_2)$ .

В соответствии с этой аксиомой, если в более узкое множество  $Y_1$  по сравнению с множеством  $Y_2$  вошли все элементы, выбираемые из более широкого множества  $Y_2$ , то в выбор  $C(Y_1)$  из множества  $Y_1$  входят все элементы множества  $C(Y_2)$  и не входят никакие другие элементы.

$Y$	Аксиомы 1+2+3	Аксиомы 2+3	Аксиомы 1+3	Аксиомы 1+2	Аксиома 3	Аксиома 2	Аксиома 1	Аксиомы
$\{x,y,z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x\}$	$\{x\}$
$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x,y\}$	$\{x\}$	$\{x,y\}$	$\{y\}$	$\{x,y\}$	$\{y\}$
$\{x,z\}$	$\{x\}$	$\{z\}$	$\{x,z\}$	$\{x,z\}$	$\{z\}$	$\{x\}$	$\{x\}$	$\{z\}$
$\{y,z\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y,z\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{y\}$	$\{y,z\}$	$\{y\}$

Рис. 17: Взаимная независимость аксиом 1, 2 и 3.

Рис. 17 демонстрирует взаимную независимость аксиом наследования (Аксиома 1), согласия (Аксиома 2) и независимости от

посторонних вариантов (Аксиома 3). На этом рисунке представлены 8 функций выбора, определённых на подмножествах множества  $\Omega = \{x, y, z\}$ . В первом столбце указаны все возможные подмножества множества  $\{x, y, z\}$ , т.е. аргументы функции выбора. В остальных столбцах записаны значения функций выбора на каждом из указанных подмножеств. Например, второй столбец даёт пример функции выбора, которая удовлетворяет одновременно всем трём указанным аксиомам. Следует иметь в виду, что все представленные функции выбора таковы, что на одноэлементном подмножестве они принимают значение, равное аргументу; по этой причине строки таблицы, соответствующие одноэлементным подмножествам отсутствуют.

Мы не будем проверять справедливость всех высказываний, содержащихся в приведенной таблице. Рассмотрим лишь, например, третий столбец, которому соответствует выполнение Аксиом 1 и 3 (1+3) и невыполнение Аксиомы 2. Для того чтобы убедиться в нарушении Аксиомы 2 достаточно рассмотреть  $A' = \{\{x, z\}, \{y, z\}\}$ . Для этого множества требуемое включение  $\{x, z\} \cap \{y, z\} = \{z\} \subset \{x, y\}$  очевидным образом нарушается.

**Т е о р е м а 5. 2.** (Т. Schwartz) *Пусть  $A$  – набор подмножеств конечного множества  $\Omega$ , заведомо содержащий все одноэлементные, двухэлементные и трёхэлементные подмножества и  $C$  – функция непустого выбора, заданная на семействе  $A$ . Для того чтобы на множестве  $\Omega_A$  существовало транзитивное бинарное отношение  $P$ , такое, что для любого  $Y \in A$  имеет место равенство  $C(Y) = C_P(Y)$ , необходимо и достаточно, чтобы функция выбора  $C$  удовлетворяла аксиомам наследования, согласия и независимости от посторонних вариантов.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно предыдущей теореме остаётся проверить только ту часть данной теоремы, которая касается транзитивности бинарного отношения  $P$ .

**Достаточность.** Здесь следует установить транзитивность отношения  $P$  при условии выполнения аксиомы независимости. Рас-

смотрим произвольные три элемента  $x, y, z \in \Omega_A$ , для которых выполнено  $y \notin C(\{x, y\})$ ,  $z \notin C(\{y, z\})$  или, что то же самое,  $xPy$ ,  $yPz$ . Отсюда, по определению множества недоминируемых элементов, следует  $C_P(\{x, y, z\}) = \{x\}$ . В силу равенства  $C_P(\{x, y, z\}) = C(\{x, y, z\})$ , имеем  $C(\{x, y, z\}) = \{x\}$ , откуда, благодаря аксиоме независимости, вытекает  $z \notin C(\{x, z\})$ . Транзитивность отношения  $P$  установлена.

Необходимость. Здесь отношение  $P$  предполагается транзитивным, а проверить следует выполнение аксиомы независимости от посторонних вариантов. С этой целью рассмотрим произвольные два множества  $Y_1, Y_2 \in A$ ,  $Y_1 \subset Y_2$ .

Установим, что для всякого варианта  $x \in Y_2 \setminus C(Y_2)$  существует вариант  $y \in C(Y_2)$ , который доминирует элемент  $x$ , т.е.  $yPx$ . В самом деле, согласно равенству  $C(Y_2) = C_P(Y_2)$  и определению множества недоминируемых элементов, должен найтись вариант  $a \in Y_2$ , такой, что  $aPx$ . Возможны два случая  $a \in C(Y_2)$  или  $a \notin C(Y_2)$ . В первом из них сформулированное выше утверждение доказано. Во втором случае существует  $b \in Y_2$ , такой, что  $bPa$ . На основании транзитивности отношения  $P$  выполнено  $bPx$ . Вновь, если  $b \in C(Y_2)$ , то требуемое утверждение установлено. В противном случае найдётся вариант  $c \in Y_2$ , для которого, в силу транзитивности отношения  $P$ , верно  $Pc$ . Рассуждая подобным образом, либо на одном из шагов утверждение получит своё доказательство, либо из-за конечности множества  $\Omega_A$  придём к тому, что для некоторого  $w \in Y_2$  уже не найдётся варианта, доминирующего его по отношению  $P$ . Тем самым, последний элемент  $w$  тоже будет принадлежать множеству  $C(Y_2)$ .

Перейдём непосредственно к проверке выполнения аксиомы независимости. Пусть  $Y_1, Y_2 \in A$ ,  $Y_1 \subset Y_2$  и  $C(Y_2) \subset Y_1$ . Надо показать, что имеет место равенство  $C(Y_1) = C(Y_2)$  или, что то же самое,  $C_P(Y_1) = C_P(Y_2)$ . Если  $x \notin C_P(Y_2)$ , то, в соответствии с доказанным выше, найдётся  $y \in C(Y_2) = C_P(Y_2)$ , такой, что  $yPx$ . Но  $C_P(Y_2) \subset Y_1$ , поэтому  $y \in Y_1$ , а значит  $x \notin C_P(Y_1)$ . Тем са-

мым, включение  $C_P(Y_1) \subset C_P(Y_2)$  доказано. Обратное включение  $C_P(Y_2) \subset C_P(Y_1)$  имеет место в силу  $Y_1 \subset Y_2$  и  $C(Y_2) \subset Y_1$ . ■

## 6. Задача многокритериального выбора. Принцип Парето

Здесь формулируется задача многокритериального выбора, постановка которой кроме векторного критерия и множества, на котором определён этот критерий, содержит бинарное отношение предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). При помощи отношения предпочтения осуществляется учёт вкусов и предпочтений субъекта, осуществляющего выбор, т.е. ЛПР. Главный результат раздела – это принцип Эджворта-Парето, в соответствии с которым поиск наилучших решений задачи многокритериального выбора следует осуществлять только в пределах множества Парето.

### 6.1. Постановка задачи многокритериального выбора.

Рассмотрим задачу многокритериального выбора  $\langle X, f, \succ_X \rangle$ , содержащую следующие объекты:

$X$  – множество возможных вариантов (решений), из которого следует осуществлять выбор;

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  векторный критерий, определённый на множестве  $X$  и принимающий числовые значения в арифметическом векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$ ;

$\succ_X$  – асимметричное бинарное отношение строгого предпочтения, заданное на множестве  $X$ . Запись  $x \succ_X x'$  для вариантов  $x, x' \in X$  означает, что вариант  $x$  для лица, принимающего решение (ЛПР) предпочтительнее варианта  $x'$ .

Напомним, что бинарное отношение  $\succ_X$ , заданное на множестве  $X$ , называют асимметричным, если для любых вариантов  $x, x' \in X$  из соотношения  $x \succ_X x'$  следует, что соотношение  $x' \succ_X x$  не выполняется. При условии асимметричности для произвольной пары вариантов  $x, x' \in X$  возможны следующие три (и только три) случая:

- 1)  $x \succ_X x'$ ;

2)  $x' \succ_X x$ ;

3) оба соотношения  $x \succ_X x'$ ,  $x' \succ_X x$  ложны.

Возможные варианты из  $X$ , которые должны быть найдены в результате решения задачи многокритериального выбора, будем именовать *выбираемыми вариантами*. Они образуют *множество выбираемых вариантов*, обозначаемое  $C(X)$ . В частном случае это множество может оказаться одноэлементным. Всякая попытка формального определения множества выбираемых вариантов  $C(X)$  является малопродуктивной, поскольку у каждого ЛПП это множество - свое собственное и его формирование, как правило, зависит от большого числа самых различных условий и обстоятельств, которые не удается адекватно описать математически. В таких условиях представляется целесообразным лишь получение некоторой оценки сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов при помощи определённых сведений об основных объектах, участвующих в постановке задачи многокритериального выбора. Эта оценка сверху дается принципом Эджворта-Парето; именно он устанавливает границы области поиска "наилучших" вариантов пределами множества Парето.

В дальнейшем будем также использовать множество возможных  $Y = f(X)$  и *множество выбираемых векторов*  $C(Y) = f(C(X))$ . Естественно считать, что на множестве возможных векторов  $Y$  задано асимметричное отношение строгого предпочтения  $\succ_Y$ , которое согласовано с отношением  $\succ_X$  следующим образом

$$f(x) \succ_Y f(x') \iff x \succ_X x' \text{ для всех } x \in \tilde{x}, x' \in \tilde{x}'; \quad \tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X},$$

где  $\tilde{X}$  - совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности  $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$  на множестве  $X$ .

Задача многокритериального выбора  $\langle Y, \succ_Y \rangle$  в терминах векторов содержит множество возможных векторов  $Y \subset \mathbb{R}^m$  и отношение строгого предпочтения  $\succ_Y$ , заданное на  $Y$ , а её решением является множество выбираемых векторов  $C(Y)$ .



**6.2. Аксиомы разумного выбора. Принцип Эджворта-Парето.** В терминах векторов перечислим определённые "разумные" требования к отношению предпочтения и множеству выбираемых векторов.

*Аксиома Парето.* Для любых двух векторов  $y, y' \in Y$ , удовлетворяющих неравенству  $y \geq y'$ , выполнено  $y \succ_Y y'$ .

Напомним, что запись  $y \geq y'$  означает, что каждая компонента первого вектора больше либо равна соответствующей компоненте второго вектора, причём  $y \neq y'$ .

Аксиома Парето представляется вполне естественной, если речь идет о стремлении ЛППР получить по возможности бóльшие значения по каждому из критериев.

*Аксиома 1 (исключения доминируемых векторов).* Для любой пары векторов  $y, y' \in Y$ , удовлетворяющих соотношению  $y \succ_Y y'$ , выполнено  $y' \notin C(Y)$ .

В соответствии с этой аксиомой всякий вектор, не выбираемый в паре, не должен выбираться и из всего множества  $Y$ . Напомним определение множества парето-оптимальных векторов

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}$$

и сформулируем следующий результат.

*Теорема 6.1 (принцип Эджворта-Парето).* Пусть выполнены аксиома Парето и аксиома исключения доминируемых векторов. Тогда для любого множества выбираемых векторов  $C(Y)$  имеет место включение

$$C(Y) \subset P(Y). \tag{6.1}$$

*Доказательство.* В случае  $C(Y) = \emptyset$  включение (6.1) очевидным образом выполнено. Пусть  $C(Y) \neq \emptyset$ . Из аксиомы исключения вытекает включение  $C(Y) \subset Ndom(Y)$ , где справа записано множество недоминируемых векторов, определяемое равенством

$$Ndom(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ что } y \succ_Y y^*\}.$$

Это легко проверяется методом от противного. В самом деле, если  $y' \in C(Y)$  и  $y' \notin Ndom(Y)$ , то найдется вектор  $y \in Y$ , для которого  $y \succ_Y y'$ . Из последнего соотношения согласно аксиоме исключения вытекает соотношение  $y' \notin C(Y)$ , противоречащее начальному предположению  $y' \in C(Y)$ .

Аналогично, рассуждая от противного, легко установить, что аксиома Парето влечет включение  $Ndom(Y) \subset P(Y)$ , которое вместе с  $C(Y) \subset Ndom(Y)$  приводит к требуемому результату (6.1). ■

Согласно принципу Эджворта-Парето наилучший выбор в широком классе задач многокритериального выбора (в котором справедливы аксиома Парето и аксиома исключения) следует осуществлять только в пределах множества Парето. С другой стороны, любой парето-оптимальный вариант (вектор) может оказаться наилучшим (выбранным), например, когда этот парето-оптимальный вариант (вектор) для ЛПР предпочтительнее любого другого элемента. Тем самым, принцип Эджворта-Парето отводит важнейшую роль множеству Парето при решении задач многокритериального выбора.

Можно проверить, что отказ от хотя бы одной из двух аксиом, участвующих в теореме 6.1, может приводить к нарушению включения (6.1) (см. [3]). Это означает, что данные аксиомы образуют минимальный набор требований, обеспечивающих выполнение принципа Эджворта-Парето.

Отметим, что в условиях теоремы 6.1 отношение предпочтения может оказаться нетранзитивным. Это указывает на значительный объём того класса задач многокритериального выбора, в пределах которого принцип Эджворта-Парето является справедливым.

**6.3. Расширение системы разумных аксиом многокритериального выбора.** Далее потребуются дополнительные требования к отношению предпочтения ЛПР.

**А к с и о м а 2** (о транзитивном продолжении). *Для отношения  $\succ_Y$  существует иррефлексивное и транзитивное продолжение, обозначаемое  $\succ$ , на все критериальное пространство  $R^m$ .*

В соответствии с аксиомой 2, отношение  $\succ_Y$  является сужением отношения  $\succ$  на  $Y$  и обладает свойствами иррефлексивности и транзитивности (а значит, и асимметричности). Эта аксиома обеспечивает гипотетическую возможность сравнения по отношению предпочтения не только векторов из  $Y$ , но и любых других векторов критериального пространства. Требование транзитивности отношения предпочтения обычно связывают с определённой последовательностью (логичностью) поведения ЛПР в процессе выбора.

Будем говорить, что критерий  $f_i$  является *согласованным с отношением предпочтения  $\succ$* , если для любых двух векторов  $y, y' \in R^m$ , таких, что

$$y_k = y'_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad k \neq i, \quad y_i > y'_i,$$

верно  $y \succ y'$ .

**А к с и о м а 3** (о согласовании критериев). *Каждый из критериев  $f_1, f_2, \dots, f_m$  согласован с отношением предпочтения  $\succ$ .*

"Чем больше – тем лучше" – такой принцип провозглашается аксиомой 3.

**Л е м м а 6. 1.** *Принятие аксиом 2 и 3 гарантирует выполнение аксиомы Парето.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем два произвольных вектора  $y, y' \in Y$ , для которых верно соотношение  $y \geq y'$ . Не уменьшая общности последующих рассуждений, будем считать, что неравенство  $y \geq y'$  означает

$$y_k > y'_k, \quad ; k = 1, 2, \dots, l; \quad y_k = y'_k, \quad ; k = l + 1, \dots, m;$$

при некотором  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

В соответствии с аксиомой **3** имеем

$$(y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_m) \succ (y'_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_m);$$

$$(y'_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_m) \succ (y'_1, y'_2, y_3, \dots, y_l, \dots, y_m);$$

.....

$$\left( y'_1, y'_2, \dots, y'_{l-1}, y_l, \dots, y_m \right) \succ \left( y'_1, y'_2, \dots, y'_l, y_{l+1}, \dots, y_m \right).$$

Из этих соотношений, в силу транзитивности отношения  $\succ$  (аксиома  $\mathfrak{R}$ ), получаем

$$(y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_m) \succ \left( y'_1, y'_2, \dots, y'_l, y_{l+1}, \dots, y_m \right). \quad (6.2)$$

А на основании равенств  $y_k = y'_k$ ,  $k = l + 1, \dots, m$ , из (6.2) вытекает

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_m) \succ_Y \left( y'_1, y'_2, \dots, y'_l, \dots, y'_m \right) = y',$$

т.е.  $y \succ_Y y'$ . ■

*С л е д с т в и е 6.1.* Пусть выполнены аксиомы 1 – 3. Для любого множества выбираемых векторов  $C(Y)$  имеет место включение (6.1).

## 7. Проблема сужения множества Парето и подходы к её решению

Наилучший выбор в пределах множества Парето можно рассматривать как задачу сужения этого множества. Результатом сужения может быть один элемент, а также целое множество. В данном разделе рассматриваются основные существующие на данный момент подходы к решению проблемы сужения множества Парето.

**7.1. Суть проблемы сужения множества Парето.** Как указано выше, при выполнении определённых "разумных" аксиом, выбираемые решения должны находиться в пределах множества Парето. В прикладных задачах множество  $X$  и векторный критерий  $f$  обычно известны, поэтому в принципе может быть построено и всё множество Парето  $P_f(X)$ , хотя при этом могут возникнуть трудности вычислительного характера. Таким образом, при выполнении принципа Эджворта-Парето задача многокритериального выбора

может быть сформулирована как задача сужения множества Парето до множества выбираемых вариантов  $S(X)$ . Эта задача оказалась настолько сложной, что нередко её именуют *проблемой сужения множества Парето*.

Ясно, что сужение множества Парето может быть осуществлено только при наличии той или иной дополнительной информации о решаемой многокритериальной задаче. Нередко подобную информацию авторы заменяют какими-либо эвристическими соображениями или определёнными "правдоподобными" предположениями, позволяющими сузить область поиска "наилучших" вариантов. Характерным признаком эвристических методов является невозможность чёткого описания того класса задач многокритериального выбора, при решении которых данный эвристический метод будет гарантированно приводить к желаемому результату.

Отдельные авторы считают, что окончательный выбор должно осуществлять лицо, принимающее решение (ЛПР), после анализа всего представленного ему множества Парето или какой-то его существенной части. Действительно, когда имеется лишь небольшое число парето-оптимальных вариантов (лучше всего – два), выбор из них в принципе может быть произведён после сравнительного сопоставления этих вариантов и анализа достоинств и недостатков каждого из них. Правда, даже в случае двух вариантов ЛПР может оказаться в затруднительном положении, когда, например, число критериев велико. Если же множество Парето достаточно широкое, а тем более, – бесконечное, непосредственный анализ множества парето-оптимальных вариантов становится затруднительным и для успешного решения задачи выбора следует иметь в распоряжении какую-либо формализованную процедуру. Краткое описание и критический анализ различного типа подобных процедур, разработанных к настоящему времени, приводится ниже.

**7.2. Выбор на основе свёртки критериев.** Существуют такие комбинации критериев, с помощью которых удаётся описать всё множество Парето. Тогда выбор в множестве Парето может

быть сведён к выбору какой-то конкретной комбинации. Наиболее простой и общепотребительной среди таких комбинаций является линейная свёртка критериев  $\sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x)$ , где все  $\mu_i \geq 0$ , причём нередко присутствует ещё и условие нормировки  $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ .

Всякая точка максимума на множестве  $X$  линейной свёртки критериев при положительных  $\mu_i$  является парето-оптимальной. Из этого следует, что, выбирая (или назначая) в указанных пределах коэффициенты линейной свёртки и максимизируя её значение на множестве  $X$ , в итоге будут получены какие-то парето-оптимальные варианты. Тем самым, выбор вариантов (даже без предварительного построения самого множества Парето) таким способом сводится к выбору коэффициентов линейной свёртки, которые нередко трактуют как некие "веса" (или "коэффициенты важности") соответствующих критериев.

Такой способ решения задач многокритериального выбора существовал ещё до появления самого понятия оптимальности по Парето. Его автором является французский учёный XVII века Ж.-Ш. де Борда, предложивший способ голосования, согласно которому побеждает тот кандидат, который набирает максимальную сумму мест в ранжировках кандидатов, представленных участниками голосования. Напомним (см. [1]), что в задаче голосования имеется конечное множество вариантов  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , именуемых в этой задаче кандидатами, и  $m$  участников голосования, каждый из которых способен ранжировать исходное множество вариантов, т.е. расположить их в порядке убывания предпочтительности. Ранжирование равносильно приписыванию каждому кандидату номера, считая с самого последнего  $n$ -го (т.е. наименее предпочтительно). Другими словами, на множестве  $X$  заданы числовые функции  $f_1, \dots, f_m$ , такие, что  $f_k(x_j) = n_{kj}$ , где  $n_{kj}$  – порядковый номер (считая с конца) кандидата  $x_j$ , который кандидат занимает с точки зрения  $k$ -го участника голосования в ряду вариантов, расположенных в порядке убывания их предпочтительности. Согласно правилу Борда, выигрывает в голосовании тот кандидат  $i$ , чья сумма мест

$\sum_{k=1}^m f_k(x_i)$  окажется максимальной. Как видим, в этом правиле как раз участвует линейная свёртка критериев (с одинаковыми "весами", равными единице).

В России линейной свёрткой при оценке качества продукции и услуг ещё в начале XX века пользовался, например, замечательный русский инженер-корабел А.Н. Крылов.

Указанный способ "борьбы с многокритериальностью" крайне прост в идейном отношении, но, к сожалению, может быть подвергнут серьёзной критике с позиций современного уровня развития теории многокритериального выбора. Прежде всего, следует отметить, что точного определения "весов" критериев не существует. Исследователи, использующие линейную свёртку, нередко говорят об этих коэффициентах, как о "весах коэффициентах", задающих степень влияния отдельных критериев на окончательный выбор (окончательную, или сводную оценку): чем больше коэффициент, тем бóльший вклад вносит соответствующий ему критерий в линейную свёртку. Эксперт или ЛПР, выбирая конкретные значения указанных коэффициентов, будет исходить из своего собственного представления об этих коэффициентах, поскольку нет строгого определения соответствующего понятия. Однако ни один из них, как правило, не в состоянии оценить и численно выразить в форме коэффициентов ту самую степень влияния отдельных критериев на окончательную оценку. Кроме того, для разных множеств возможных вариантов  $X$  точки максимума одной и той же линейной свёртки, вообще говоря, различны, что свидетельствует о несостоятельности попытки оценить влияние коэффициентов свёртки для одного и того же ЛПР, использующего один и тот же набор критериев, но различные множества  $X$ .

Определённым обоснованием применения линейной свёртки критериев при решении многокритериальных задач может служить следующий результат, вытекающий из принципа Эджворта-Парето и теоремы 3.9.

*Т е о р е м а 7. 1. Пусть выполнены аксиома 1 и аксиома Парето.*

Предположим, что вектор-функция  $f$  вогнута на выпуклом множестве  $X$ . Тогда для любого множества выбираемых вариантов  $C(X)$  имеет место включение

$$C(X) \subset \bigcup_{\mu \in \overline{M}} \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x)\}.$$

Если заранее известно, что множество  $C(Y)$  состоит из одного элемента, то должен найтись вектор  $\mu \in \overline{M}$ , при котором

$$C(X) \subset \{x^* \in X \mid \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x)\},$$

и, тем самым, проблема сужения множества Парето сводится к решению всего лишь одной задачи максимизации линейной свёртки.

Условия выпуклости множества  $X$  и вогнутости критериев  $f_i$  являются существенными в теореме 7.1. Подтверждением тому является следующий

**Пример 7.1.** Рассмотрим двухкритериальную задачу с  $Y = \{y \in R^2 \mid y_1 \cdot y_2 \leq 10, y_1 \geq 1, y_2 \geq 1\}$ . Здесь множеством парето-оптимальных векторов является криволинейная часть границы множества  $Y$ , тогда как в результате максимизации линейной свёртки с неотрицательными коэффициентами могут быть получены лишь две её крайние точки –  $(1,10)$  и  $(10,1)$ . Тем самым, применение линейной свёртки в данном случае заведомо приводит к исключению из числа кандидатов в "наилучшие" почти всех парето-оптимальных векторов (за исключением концевых).

Перейдем к рассмотрению вопроса корректности использования свёртки критериев, связанного с разнородностью шкал, в которых измеряются значения критериев. Дело в том, что когда исследователи имеют дело с прикладными многокритериальными задачами, критерии перестают быть абстрактными числовыми функциями, они наполняются конкретным содержанием. Точнее говоря, значения этих функций начинают выражать величины, принадлежащие той ли иной количественной шкале и измеряться в тех или



иных единицах измерения. Если значения критериев, участвующих в нашей многокритериальной задаче однотипны, т.е. принадлежат одной шкале и измеряются в одних и тех же единицах, то их линейная свёртка заведомо будет иметь смысл. Однако на практике подобного рода ситуации крайне редки, поскольку в таких случаях, как правило, можно избежать многокритериальности и свести рассматриваемую задачу к однокритериальной. Например, если нас интересуют  $m$  различного рода затрат, связанных с производством некоторого продукта, то нет смысла рассматривать задачу с  $m$  критериями, можно просто сложить все эти затраты вместе и решать задачу с одним суммарным критерием.

Многокритериальность возникает именно по причине "разнородности" имеющихся критериев, поскольку их не удаётся "свернуть" в одну формулу из-за того, что значения участвующих в задаче критериев, как правило, принадлежат различным шкалам и измеряются в различных единицах. Типичный двухкритериальный пример подобного типа из области экономики – стремление получить максимальную прибыль за минимальное время. Прибыль измеряется в шкале отношений, тогда как время – в шкале интервалов. Единицами прибыли могут быть рубли, доллары и пр., а единицами времени служат часы, дни, годы и т.д. Операция сложения указанных критериев даже с использованием коэффициентов (т.е. линейная свёртка), является некорректной. Как же следует поступать в таких случаях?

Для разрешения этого вопроса обычно используют приём, который носит название *нормализации критериев*, заключающийся в приведении разнотипных критериев к единой шкале. Правда, получающаяся таким образом "искусственная" шкала не имеет ничего общего с упомянутыми выше теми или иными представителями «естественных» количественных шкал. Этот приём заключается в применении к критериям таких преобразований, которые "уравнивают" пределы изменения данных критериев. Наиболее распространённым преобразованием данного типа является замена исход-

ных критериев  $f_i(x)$  на преобразованные критерии по формуле

$$\tilde{f}_i(x) = \frac{f_i(x) - y_i^{min}}{y_i^{max} - y_i^{min}},$$

где  $y_i^{max}$  и  $y_i^{min}$  – максимальное и минимальное значения функции  $f_i$  на множестве  $X$ , в предположении, что они существуют. Значения таким образом преобразованных критериев лежат в пределах отрезка  $[0, 1]$ , чем и обеспечивается указанное выше "уравнивание". При этом множество Парето относительно преобразованных критериев не изменяется, т.е. совпадает с исходным.

В заключение отметим, что вместо линейной свёртки аналогичным образом можно проанализировать применение и других комбинаций критериев (см., например, теорему 3.1, следствие 3.1, теорему 3.2 и др.) для решения проблемы сужения множества Парето.

**7.3. Выбор с помощью "искусственного" отношения предпочтения.** Имеется обширная группа методов, согласно которым ЛПР в качестве своего "личного" предлагается выбрать то или иное бинарное отношение  $\succ$  из уже имеющегося в распоряжении исследователей набора. Здесь имеется в виду строгое (т.е. асимметричное отношение), хотя в литературе встречаются и конструкции, основанные на нестрогом (т.е. рефлексивном и, как правило, транзитивном) отношении. Разница между этими подходами с точки зрения последующего рассмотрения несущественна.

После задания строгого отношения предпочтения  $\succ$  окончательный выбор может быть осуществлён во множестве недоминируемых вариантов

$$Ndom(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X, \text{ что } x \succ x^*\} \quad (7.1)$$

или во множестве доминирующих вариантов

$$Dom(X) = \{x^* \in X \mid x^* \succ x \text{ для всех } x \in X, x \neq x^*\}. \quad (7.2)$$

Наиболее ранним образцом подобного рода методов является правило голосования Кондорсе, которое опирается на *мажоритар-*

ное отношение  $\succ_M$ , определяемое так: соотношение  $x_i \succ_M x_j$  имеет место тогда и только тогда, когда найдётся не менее половины участников голосования, которые вариант  $x_i$  считают предпочтительнее  $x_j$ . Наилучшим в соответствии с правилом Кондорсе объявляется вариант  $x_i$ , который доминирует любой другой вариант по мажоритарному отношению, т.е.  $x_i \succ_M x_j$  для всех  $j \neq i$ . Следует указать серьёзные недостатки такого способа выбора – наилучший вариант согласно правилу Кондорсе существует не всегда, а мажоритарное отношение в общем случае не является транзитивным.

К числу несомненных достоинств использования "искусственного" отношения предпочтения относится хорошее знание свойств этого отношения. Некоторые из отношений, применяемые для решения задач голосования, имеют и аксиоматическое обоснование. Однако недостатков оказывается больше. Наиболее существенный из них состоит в том, что, несмотря на многообразие и детальную изученность "искусственных" отношений, крайне редко какое-либо из этих отношений можно признать полностью удовлетворяющим то или иное конкретное ЛПР.

Ещё один недостаток рассматриваемых методов связан со способом окончательного выбора "наилучшего" варианта на основе "искусственного" отношения, т.е. с формулами (7.1) и (7.2). Дело в том, что множество недоминируемых вариантов (7.1), как правило, является слишком широким в том смысле, что оно "по своим размерам" незначительно отличается от исходного множества возможных вариантов, тогда как множество доминирующих вариантов (7.2) нередко оказывается пустым. В втором случае разбираемый метод просто "не работает".

**7.4. Человеко-машинные процедуры выбора.** Работы этого направления берут своё начало с 1972 г., когда впервые была предложена некоторая итеративная процедура поиска "наилучшего" варианта с использованием на каждом шаге вычислений определённой информации от ЛПР. Предполагается, что существует

обобщённый числовой критерий  $\Phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$ , максимизация которого на множестве  $X$  приводит к "наилучшему" варианту, однако точный вид этого критерия не известен.

Если поставленную задачу оптимизации числовой функции  $\Phi(y_1, \dots, y_m)$  при  $y_i = f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , решать численно, например, с помощью какого-либо варианта градиентного метода, то полностью знать вид функции  $\Phi$  не обязательно. На каждом шаге необходимо использовать информацию о градиенте этой функции

$$\nabla_x \Phi(f_1(x^k), \dots, f_m(x^k)) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \nabla f_1(x^k) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \nabla f_m(x^k), \quad (7.3)$$

где  $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$  – частная производная функции  $\Phi$  по  $i$ -й переменной, вычисленная в точке  $f_1(x^k), \dots, f_m(x^k)$ , а  $\nabla f_j(x^k)$  – градиент функции  $f_j$  в точке  $x_k$ . Поскольку критерии  $f_j$  известны, то можно считать известными и их градиенты в соответствующих точках. Поэтому для вычисления направления перемещения на очередном шаге следует лишь задать коэффициенты  $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$  в правой части равенства (7.3). Авторы метода трактуют их как "коэффициенты относительной важности" критериев и предлагают на каждом шаге информацию об их величине выявлять у ЛППР. Таким образом, начиная с какой-то начальной точки и перемещаясь на каждом шаге в направлении градиента с заданной величиной перемещения, будет получена последовательность точек  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Если эта последовательность при  $k \rightarrow \infty$  сходится в том или ином смысле к некоторой парето-оптимальной точке, то эта точка и считается "наилучшим" решением исходной задачи многокритериального выбора.

Перейдём к критическому анализу метода. Во-первых, класс многокритериальных задач, в которых для используемого отношения предпочтения ЛППР существует дифференцируемая функция  $\Phi$ , максимизация которой ведёт к "наилучшему" решению, слишком узок, и многие прикладные задачи оказываются за его пределами. Далее, в соответствии с этим подходом ЛППР на каждом шаге

должно сообщать величины частных производных  $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ , не зная саму функцию  $\Phi$ . Ясно, что такого рода информация от ЛПР крайне ненадёжна. Кроме того, накапливаемые с каждым шагом неточности в указанных коэффициентах при выполнении достаточно большого числа шагов могут существенно повлиять на окончательный результат и привести к далеко не лучшему решению.

**7.5. Сужение множества Парето на основе сведений об отношении предпочтения.** Рассмотрим два произвольных вектора  $y$  и  $y'$ , принадлежащие множеству парето-оптимальных векторов  $P(Y)$ . По определению множества Парето должны найтись такие два непустых подмножества номеров критериев  $A, B \subset I$ , что

$$\begin{aligned} y_i - y'_i &= w_i > 0 \quad \text{для всех } i \in A; \\ y'_j - y_j &= w_j > 0 \quad \text{для всех } j \in B; \\ y_k &= y'_k \quad \text{для всех } k \notin A \cup B. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Согласно (7.4), первый вектор превосходит второй по компонентам группы  $A$ , тогда как второй превосходит первый по компонентам группы  $B$ ; по остальным компонентам (если таковые имеются) два указанных вектора совпадают.

Сужение множества Парето, т.е. удаление некоторых парето-оптимальных векторов, обычно происходит в результате сравнения. Человеку проще всего сравнивать пары. Если при сравнении фиксированной пары парето-оптимальных векторов  $y$  и  $y'$  вида (7.3) ЛПР "выбраковывает" один из этих векторов (например, второй), то это означает, что для него первый вектор предпочтительнее второго, т.е.  $y \succ y'$ , где  $\succ$  – отношение предпочтения, определённое на всём критериальном пространстве  $\mathbb{R}^m$  и совпадающее на множестве  $Y$  с отношением  $\succ_Y$ .

Соотношение  $y \succ y'$  для векторов (7.3) определяет некий *квант информации* об отношении предпочтения, который свидетельствует о готовности ЛПР к компромиссу – оно согласно пойти на определённые потери по критериям группы  $B$  в максимальном размере

$w_j$  ради того, чтобы получить некоторые прибавки в минимальном размере  $w_i$  по критериям группы  $A$ , сохранив при этом значения всех остальных критериев. Тем самым, наличие кванта информации свидетельствует о большей значимости (важности) для данного ЛПР группы критериев  $A$  в сравнении с группой  $B$ .

Каждая пара параметров  $w_i$  и  $w_j$  задаёт *коэффициент относительной важности*

$$\theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j} \in (0, 1).$$

Если этот коэффициент близок к нулю, то ЛПР неохотно идёт на компромисс, требуя больших прибавок по критерию  $i$  более важной группы  $A$  при сравнительно малых потерях по критерию  $j$  менее важной группы  $B$ . Напротив, когда коэффициент  $\theta_{ij}$  близок к единице, ЛПР готово жертвовать большими потерями по критерию  $j$  менее важной группы  $B$  ради незначительного увеличения значения по критерию  $i$  более важной группы  $A$ .

Наличие данного кванта информации позволяет сократить множество Парето на один вектор  $y'$ . Для того чтобы добиться большего сокращения, можно принять, что соотношение  $y \succ y'$  имеет место не только для данной пары векторов, но и для всех тех векторов, которые удовлетворяют условиям (7.4) при неизменных значениях  $w_i$  и  $w_j$ .

При указанном расширении действия кванта информации можно рассчитывать на более заметное сужение множества Парето, хотя нередко и оно оказывается недостаточным для окончательного выбора. В таких случаях имеет смысл наложить дополнительное требование на отношение предпочтения так, чтобы действие кванта информации в сужении множества Парето оказалось более эффективным. Эти требование имеет вид следующей аксиомы.

**А к с и о м а 4** (инвариантность отношения предпочтения). *Отношение предпочтения  $\succ$  инвариантно относительно линейного положительного преобразования, т.е. для любых  $\alpha > 0$  и всех*

$c, y, y' \in \mathbb{R}^m$  выполняется  $y \succ y' \Rightarrow \alpha \cdot y + c \succ \alpha \cdot y' + c$ .

Приведённые аксиомы 1 – 4 накладывают определённые условия на стиль поведения ЛПР в процессе выбора, который в целом (хотя и с некоторыми оговорками) можно охарактеризовать как "разумный".

Геометрический смысл указанных аксиом (без аксиомы исключения) раскрывается в нижеследующем утверждении.

Предварительно напомним, что бинарное отношение  $R$ , заданное на векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$ , называют *конусным*, если существует такой конус  $K$ , что соотношение  $yRy'$  имеет место тогда и только тогда, когда  $y - y' \in K$ . При этом под конусом понимается множество, которое вместе с каждой своей точкой содержит и весь луч, исходящий из начала координат и проходящий через эту точку.

*Т е о р е м а 7.2 (В.Д. Ногин). Любое бинарное отношение  $R$ , заданное на векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$  и удовлетворяющее аксиомам о продолжении, согласовании и инвариантности, является конусным с острым выпуклым конусом (без начала координат), содержащим все векторы с неотрицательными компонентами. Обратно, всякое конусное отношение с описанным конусом обладает указанными выше свойствами.*

Теорема 7.2 открывает возможность использования аппарата выпуклого анализа и построения содержательной математической теории для учёта различного набора квантов информации. Наиболее простой случай одного кванта рассматривается в следующем утверждении, доказательство которого опирается на факты из теории двойственности выпуклого анализа и здесь не приводится.

*Т е о р е м а 7.3 (В.Д. Ногин). Пусть выполнены аксиомы 1 – 4 и имеется квант информации, согласно которому  $y \succ y'$  для всех векторов  $y, y'$  вида (7.4). Тогда для любого множества выбираемых вариантов  $C(X)$  справедливы включения*

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X), \quad (7.5)$$

где "новый" векторный критерий  $g$  образован из тех функций,  $f_i$ , для которых  $i \in I \setminus B$ , а также компонент  $g_{ij}(x) = w_j f_i(x) + w_i f_j(x)$  для всех  $i \in A$  и всех  $j \in B$ .

Важная особенность теоремы 7.3 заключается в отсутствии каких-либо требований к множеству  $X$  и векторному критерию  $f$ ; эти объекты могут быть какими угодно. Ограничения накладываются лишь на поведение ЛПР в процессе принятия решений и выражаются они в форме приведённых выше четырёх аксиом.

Этой теоремой указывается оценка сверху в виде  $P_g(X)$  для неизвестного множества выбираемых вариантов  $C(X)$ , более точная, чем множество Парето  $P_f(X)$ . Сама оценка представляет собой множество парето-оптимальных вариантов относительно "нового"  $p$ -мерного векторного критерия  $g$ ,  $p = m - |B| + |A| \times |B|$ , где  $|Z|$  обозначает число элементов конечного множества  $Z$ .

Для того чтобы сформировать  $g$ , из "старого" векторного критерия  $f$  следует удалить все компоненты группы  $B$  и добавить  $|A| \times |B|$  "новых" критериев вида  $g_{ij} = w_j f_i + w_i f_j$  для всех  $i \in A$  и всех  $j \in B$ .

**С л е д с т в и е 7.1.** Пусть в условиях теоремы 7.3 выполнено  $A = \{i\}$ ,  $B = \{j\}$ . Тогда для любого множества выбираемых вариантов  $C(X)$  справедливы включения (7.4), где  $m$ -мерный векторный критерий  $g$  образован из функций  $f_i$  для всех  $i \neq j$  и функции  $g_j = w_j f_i + w_i f_j$ .

Нетрудно понять, что теорему 7.3 и следствие 7.1 можно переформулировать в терминах векторов, т.е. элементов множества  $Y$ .

Подробное развитие изложенной выше идеи сужения множества Парето на основе квантов информации об отношении предпочтения ЛПР получило в аксиоматической теории, которая представлена в монографии автора [3].

**7.6. Комбинированные методы сужения множества Парето.** К сожалению, новое множество Парето  $P_g(X)$ , полученное с использованием кванта информации нередко остаётся довольно широким, что не даёт возможности обоснованно осуществить окон-



чательный выбор в его пределах. В таких случаях можно пытаться выявить дополнительный квант информации и с его помощью произвести дальнейшее сужение множества  $P_g(X)$ . При этом следует иметь в виду, что некоторые наборы квантов информации могут оказаться противоречивыми, и потому непригодными для использования. На этой случай разработаны критерии проверки непротиворечивости набора квантов информации (см.[3]), которые позволяют выявлять противоречивые наборы квантов. Кроме того, получены теоремы, указывающие конкретный вид нового векторного критерия для осуществления дальнейшего сужения множества Парето.

Однако, возможности выявления дополнительных квантов с определённого момента могут исчезнуть, тогда как очередное множество Парето при этом остаётся довольно широким. В такой ситуации вновь возникает проблема сужения множества Парето, которую необходимо как-то решать. Для таких случаев автором были предложены так называемые *комбинированные методы*, согласно которым на первом этапе выявляется и используется информация в виде квантов, а на втором – какие-либо методы целевого программирования. Предполагается, что информация об относительной важности критериев уже была учтена при помощи квантов на первом этапе, и потому второй этап не должен быть связан с методами, использующими в том или ином виде параметры, трактуемые, как определённые "веса" или "коэффициенты важности" критериев. С этой точки зрения наиболее подходящими для второго этапа представляются подходы, опирающиеся на теоремы 3.2 и 3.11.

Теорему 3.2 можно использовать для любых ограниченных сверху критериев  $f_1, f_2, \dots, f_m$  и множества  $X$  произвольной структуры. Следует только иметь в виду, что в этой теореме представлены необходимые и достаточные условия слабой эффективности, а не эффективности. Поэтому в результате её применения в качестве "наилучшего" может оказаться лишь слабо эффективное, но не эф-

фективное решение.

Комбинирование аксиоматического подхода и теоремы 3.2 приводит к следующему результату.

**Т е о р е м а 7.4** (В.Д. Ногин). *Предположим, что выполнены сформулированные выше аксиомы 1 – 4 и имеется непротиворечивый набор квантов информации, учёт которых производится на основе  $p$ -мерной вектор-функции  $g$ . Тогда для любого множества выбираемых векторов  $C(Y)$  выполняется включение*

$$C(Y) \subset \bigcup_{u \in U} \{f(x^*) \in Y \mid \max_{i \in I} (u_i - g_i(x^*)) = \min_{x \in X} \max_{i=1,2,\dots,p} (u_i - g_i(x))\}, \quad (7.6)$$

где

$$U = \{u \in \mathbb{R}^p \mid u_i \geq g_i(x) \text{ для всех } x \in X, i = 1, 2, \dots, p\};$$

при этом компоненты вектор-функции  $f$  считаются ограниченными сверху на множестве  $X$ .

Когда множество  $C(Y)$  состоит из одного элемента, оно, согласно теореме 7.4, будет входить в множество решений одной задачи (при одном  $u$ ) минимизации функции  $\max_{i=1,2,\dots,p} (u_i - g_i(x))$  на множестве  $X$ . Требуется лишь указать "идеальные" значения  $u_i$  по каждому из критериев, в качестве которых можно выбрать, например, их максимальные значения на множестве  $X$ , т.е.  $u_i = \max_{x \in X} g_i(x)$ . Решив указанную выше задачу минимизации функции максимума, получим в общем случае слабо эффективный вектор из множества  $Y$ , равномерно ближайший к вектору  $u$ .

**П р и м е р 7.2.** Рассмотрим двухкритериальную задачу, в которой  $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^5\}$ , где  $y^1 = (1, 2)$ ,  $y^2 = (2, 1.8)$ ,  $y^3 = (3, 1.7)$ ,  $y^4 = (4, 1.6)$ ,  $y^5 = (5, 1.3)$ . Здесь все векторы являются парето-оптимальными. Допустим, что в результате опроса ЛПР было установлено, что  $(4, -1) \succ (0, 0)$ . Это означает, что первый критерий важнее второго с параметрами  $w_1 = 4, w_2 = 1$ . В соответствии со следствием 7.1 формируем новый векторный критерий  $g_1 = y_1, g_2 = y_1 + 4y_2$ . Вычисляем образ множества

возможных вариантов относительно нового векторного критерия:  $g(Y) = \{(1, 9), (2, 9.2), (3, 9.8), (4, 10.4), (5, 10.2)\}$ . Как видим, здесь парето-оптимальными являются только два последних вектора. Таким образом, за счёт использования указанного кванта информации в данном случае удалось существенно сократить исходное множество Парето.

На втором этапе воспользуемся теоремой 7.4 и в качестве  $u$  возьмём вектор, составленный из максимальных компонент, т.е.  $(5, 10.4)$ . Минимизируя функцию  $\max_{i=1,2}(u_i - g_i(x))$  на сокращённом множестве Парето  $\{(4, 10.4), (5, 10.2)\}$ , приходим к единственному вектору  $y^5 = (5, 1.3)$ , который объявляем "наилучшим" (выбранным) решением данной задачи. Заметим, что исключение первого этапа (т.е. отказ от учёта кванта информации) приводит к вектору  $y^1 = (1, 2)$  при использовании теоремы 3.2 и того же вектора  $u$ .

Ещё один вариант второго этапа комбинированного метода можно реализовать на основе теоремы 3.11, если исходная многокритериальная задача содержит вогнутые критерии. Эта реализация опирается на следующую теорему.

**Т е о р е м а 7.5** (В.Д. Ногин). *Предположим, что множество*

$$U = \{u \in R^m \mid u_i > \sup_{x \in X} f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

*не пусто, выполнены аксиомы 1 – 4, множество  $X$  выпукло, а числовые функции  $f_1, f_2, \dots, f_m$  покомпонентно вогнуты на нём. Для любого множества выбираемых векторов  $C(Y)$  имеет место включение*

$$C(Y) \subset \overline{\bigcup_{u \in U} \{f(x^*) \in Y \mid \|u - g(x^*)\| = \min_{x \in X} \|u - g(x)\|\}}. \quad (7.7)$$

В правой части включения (7.7) черта сверху означает замыкание множества.

Теорема 7.5 является результатом комбинирования аксиоматического подхода, теоремы 3.11 и того факта, что в условиях данной

теоремы множество собственно эффективных векторов плотно в множестве эффективных векторов (см. теорему 4.2), т.е. замыкание множества собственно эффективных векторов содержит множество эффективных векторов.

Как видим, в условиях теоремы 7.5 присутствуют предположения, без которых она может потерять свою силу. В частности, если новое множество Парето состоит из конечного числа элементов (это заведомо выполняется, если конечным является множество  $Y$ ), то применение теоремы 7.5 может оказаться некорректным. Это обстоятельство следует иметь в виду всем, кто при решении многокритериальных задач в качестве "наилучшего" вектора выбирает ближайший в конечном множестве  $Y$  к некоторому элементу из  $U$ . Соответствующий показательный пример приводится ниже.

**Пример 7.3.** Пусть  $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$ , где  $y^1 = (1, 3)$ ,  $y^2 = (1.5, 1.5)$ ,  $y^3 = (3, 1)$ . Здесь все векторы парето-оптимальны, но второй вектор не будет ближайшим (на основе евклидовой метрики) в множестве  $Y$  ни к одному из векторов множества  $U$ . Заметим, что он будет ближайшим, например, к вектору  $(3, 3)$ , если использовать равномерную метрику из теоремы 7.4.

## Вильфредо Парето (краткая справка)

Итальянский экономист и социолог Вильфредо Парето, V. Pareto, (15.7.1848 - 20.8.1923) родился в Париже. В 1855 г. его семья вместе с ним вернулась в Италию, где он, окончив Туринский политехнический институт в 1869 г., получил специальность гражданского инженера. Первые два года его обучения были посвящены, в основном, математике и физике, а его выпускная работа называлась "Фундаментальные принципы равновесия твердых тел". Впоследствии интерес к математике не ослабнет, что сыграет важную роль в становлении В. Парето как крупнейшего специалиста в области математической экономики. Кроме того, он интересовался биологией, экономикой, знакомился с трудами социальных мыслителей. После окончания института он двадцать лет проработал в индустриальной сфере - сначала в Римской железнодорожной компании, став её первым директором, а с 1874 г. - управляющим директором акционерного общества, которому принадлежали металлургические заводы во Флоренции.

В начале 90-х годов В. Парето резко изменил свою жизнь, переехал в Швейцарию и с 1893 г. начал работать в Лозаннском университете (Швейцария), замещая Л. Вальраса. С 1894 г. - он профессор кафедры политической экономики этого университета. Первая крупная работа В. Парето - это двухтомный "Курс политической экономики" (1896-1897гг.), основанный на читаемых им университетских лекциях.

В своей наиболее влиятельной книге "Руководство по политической экономике" он продолжил развитие теории чистой экономики, заложил основы современной экономики благосостояния и ввел понятие оптимума Парето, как состояния, которое не может быть улучшено ни одним из участников экономики без ухудшения положения по крайней мере какого-то одного из остальных участников. В настоящее время оптимум Парето играет важную роль в экономических исследованиях, принятии решений и теории игр.

С середины 90-х годов В. Парето стала привлекать социология. После длительных исследований в этой области он выпустил в свет в 1916 г. четырехтомный "Трактат по общей социологии". Умер он в 1923 г. близ Женевы.

## Литература

1. Айзерман М.Ф., Алескеров Ф.Т. *Выбор вариантов. Основы теории*. М.: Наука. 1990.
2. Ногин В.Д. *Проблема сужения множества Парето: подходы к решению* // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. №1. С. 98-112.
3. Ногин В.Д. *Сужение множества Парето: аксиоматический подход*. М.: Физматлит. 2016.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. М.: Физматлит. 2007.
5. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. М.: Мир. 1973.