Санкт-Петербургский государственный университет

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2022

УДК 512.66
ББК 22.147

Печатается по рекомендации УМК по УГСН 01.00.00
Математика и механика от 29 апреля 2022 г.

Рецензенты:
д. физ.-мат. наук, профессор В.М. Нежинский (СПбГУ);
канд. физ.-мат. наук, доцент Ю.В. Маслова (РГПУ).

Д68
Дополнительные главы геометрии и топологии / А.В. Антоник, С.Н. Бурьян, В.С. Кальницкий, Н.Н. Косовский, А.А. Солынин. – СПб.: Астерион, 2022. – 122 с.

ISBN 978–5–00188–241–1

Предлагаемое учебно-методическое пособие является частью учебного комплекса, который может быть использован в высшем образовании для направления “Фундаментальная математика и механика“. Пособие содержит теоретические сведения о двух модулях дифференциальной геометрии: теория гладких многообразий и начала топологии, и по содержанию соответствует учебной дисциплине "Дополнительные главы геометрии и топологии", читаемого для указанного направления подготовки. В методическом пособии изложены все теоретические сведения, необходимые для решения предлагаемых в пособии задач. Пособие содержит более трехсот оригинальных задач по теме курса, большая часть из которых снабжена подробными решениями и указаниями. Пособие рекомендуется использовать в сочетании с учебником, рекомендованным в рабочей программе учебной дисциплины. Разработка учебного пособия основана на опыте преподавания дисциплины «Дополнительные главы геометрии и топологии» студентам направления подготовки «Фундаментальная математика и механика» Санкт-Петербургского государственного университета.

УДК 512.66
ББК 22.147

ISBN 978–5–00188–241–1

Введение

Предлагаемое учебно-методическое пособие является частью учебного комплекса, который может быть использован в высшем образовании для направления "Фундаментальная математика и механика". Пособие содержит теоретические сведения о двух модулях дифференциальной геометрии: теория гладких многообразий и начала топологии, и по содержанию соответствует учебной дисциплине "Дополнительные главы геометрии и топологии", читаемого для указанного направления подготовки. В методическом пособии изложены все теоретические сведения, необходимые для решения предлагаемых в пособии задач.

Пособие содержит более трехсот оригинальных задач по теме курса. Пособие рекомендуется использовать в сочетании с учебником, рекомендованным в рабочей программе учебной дисциплины.

Разработка учебного пособия основана на опыте преподавания дисциплины "Дополнительные главы геометрии и топологии" студентам направления подготовки "Фундаментальная математика и механика" Санкт-Петербургского государственного университета.

1 Спектр алгебры

Кольцо. Множество K с двумя операциями, умножением и сложением, называется *унитарным кольцом*, если эти операции удовлетворяют следующим аксиомам.
1. Относительно сложения K — абелева группа, т.е. для всех $a, b, c \in K$
   1.1. $(a+b)+c = a+(b+c)$;
   1.2. $a+b = b+a$;
   1.3. $\exists 0 : a+0 = a$;
   1.4. $\exists(-a) : a+(-a) = 0$.
2. Умножение ассоциативно и имеет единичный элемент
   2.1. $(ab)c = a(bc)$;
   2.2. $\exists 1 : 1a = a$.
3. Операции дистрибутивны
   3.1. $(a+b)c = ac+bc$;
   3.2. $a(b+c) = ab+ac$.

Кольцо называется *коммутативным*, если $ab = ba$ для всех элементов кольца. Кольцо, в котором $0 \neq 1$ и всякий ненулевой элемент обратим, называется *телом*. Коммутативное тело называется *полем*.

Модуль. Множество M называется K*-модулем*, если на нем определены операции — сложение и умножение на элементы кольца K, обладающие следующими свойствами:
1. Относительно сложения M является абелевой группой;
2. Выполнены соотношения:
   2.1. $k(a+b) = ka+kb$;
   2.2. $(k+s)a = ka+sa$;
3. Кольцо *действует* на множестве M
   3.1. $k(sa) = (ks)a$;
   3.2. $1a = a$,
   для элементов $1, k, s \in K$, $a, b \in L$.

Модуль над полем называется *векторным пространством.*

Алгебра. Множество A называется *унитарной* K*-алгеброй*, если A является одновременно унитарным кольцом и модулем над унитарным кольцом K, причем

$$k(ab) = (ka)b = a(kb)$$

для всех элементов a, b из A и всех $k \in K$. В данном пособии мы будем рассматривать только коммутативные (по умножению) алгебры.

Замена колец. Всякий гомоморфизм K-алгебр $\varphi : A \to B$ позволяет каждый B-модуль R рассматривать как A-модуль, полагая действие $a \cdot r = \varphi(a)r, a \in A, r \in R$. Эта операция называется *заменой колец.*

Тензорное произведение модулей. Пусть K — коммутативное кольцо. S — некоторое множество элементов K-модуля M. K-модуль $< S >$ состоит из формальных конечных сумм элементов из S с коэффициентами из кольца, операция сложения и действия кольца определяется естественным образом. Рассмотрим два K-модуля E_1, E_2 и множество $S \subset < E_1 \times E_2 >$ состоящее из элементов вида

$$(a+b, c) - (a, c) - (b, c),$$

$$(a, b+c) - (a, b) - (a, c),$$
$$(ka, b) - k(a, b),$$
$$(a, kb) - k(a, b).$$

Фактор модуль $< E_1 \times E_2 > / < S >$ называется *тензорным* произведением модулей над кольцом K и обозначается $E_1 \otimes_K E_2$. В случае тензорного произведения двух модулей над K-алгеброй A следует различать их тензорное произведение как A- и как K-модулей.

Спектр алгебры. K-точкой K-алгебры A называется K-гомоморфизм $h : A \to K$, т.е. отображение, удовлетворяющее следующим свойствам:
1. h является K-линейным:
   1.1. $h(ka) = kh(a)$;
   1.2. $h(a+b) = h(a)+h(b)$.
2. h является гомоморфизмом
   2.1. $h(ab) = h(a)h(b)$;
   2.2. $h(1_A) = 1_K$.

Множество всех K-точек алгебры называется *спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_K A$ или, если ясно над каким кольцом все рассматривается, то просто $|A|$.

Функции на спектре. Каждый элемент алгебры $a \in A$ порождает функцию f_a на спектре по правилу $f_a(h) = h(a)$. Таким образом, возникает отображение τ алгебры A в K-алгебру $K^{|A|}$ всех функций на спектре. K-алгебра называется *геометрической* если

$$\bigcap_{h \in |A|} \operatorname{Ker} h = \{0\}.$$

Теорема. *Геометрическая алгебра изоморфна алгебре функций на своем спектре, порождаемых элементами алгебры.*

Напомним, что речь идет о коммутативной алгебре с единицей. Спектр геометрической алгебры мы будем называть *многообразием* этой алгебры. Рассмотрим произвольную алгебру K-значных функций на некотором множестве. Каждая точка x этого множества порождает гомоморфизм алгебры $h_x(f) = f(x)$, который мы будем называть *гомоморфизмом подстановки.* Таким образом, множество, на котором заданы функции, отображается в спектр. Введем обозначение для этого отображения θ.

1.1. Кольцо K является K-алгеброй. Вычислите K-спектр K. Является ли такая алгебра геометрической?

1.2. Кольцо комплексных чисел $\mathbb{C}$ является $\mathbb{R}$-алгеброй. Вычислите этой спектр $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Является ли эта алгебра геометрической?

1.3. Докажите, что любая алгебра функций на множестве M является геометрической. Верно ли, что отображение θ биективно, т.е. является ли M многообразием этой алгебры?

1.4. Является ли геометрической $\mathbb{R}$-алгебра всех последовательностей имеющих конечный предел? Докажите, что в спектре этой алгебры существует точка, не являющаяся гомоморфизмом подстановки.

1.5. Опишите спектр $\mathbb{R}$-алгебры бесконечных финитных (лишь с конечным числом отличных от нуля членов) последовательностей вещественных чисел $(a_0, a_1, \dots)$.

1.6. Пусть $\mathbb{R}$-алгебры F_1, F_2, F_3 как векторные пространства изоморфны $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$, а умножение в них задается следующими формулами:

$F_1 : (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2),$

$F_2 : (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$

$F_3 : (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1).$

Вычислите спектры указанных алгебр, опишите отображение τ. Изоморфны ли эти алгебры?

1.7. Докажите, что отображение τ является K-гомоморфизмом K-алгебр и его инъективность равносильна геометричности алгебры. Это доказывает теорему, сформулированную во вводной части.

1.8. Верно ли что алгебра $\tau(\tau(A))$ изоморфна $\tau(A)$?

1.9. Докажите, что пространство $I(A) = \bigcap\limits_{h\in|A|} \mathrm{Ker}\, h$ является идеалом алгебры A и

(a) фактор алгебра $A/I(A)$ является геометрической;

(b) $A/I(A) \cong \tau(A)$.

1.10. Опишите многообразие $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от n переменных. Опишите явно все $\mathbb{R}$-точки.

1.11. Опишите все $\mathbb{R}$-точки $\mathbb{R}$-алгебры $C^\infty(U)$ гладких функций на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что отображение $\theta : U \to |C^\infty(U)|$ является биекцией.

1.12. Пусть алгебра A состоит из всех гладких функций периода 1 на прямой $\mathbb{R}$. Докажите, что отображение $\theta : \mathbb{R} \to |A|$ является сюръекцией. Является ли оно инъективным?

1.13. *Гладким множеством* называется пара $(W, C^\infty(W))$, где $W \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и $C^\infty(W) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \downarrow_W$ — алгебра сужений гладких функций на множество W. Опишите явно такие алгебры для следующих множеств W. Попробуйте доказать, что алгебры в примерах f),g),h) попарно неизоморфны.

(a) координатный крест на плоскости (решение уравнения $xy = 0$);

(b) график функции $y = \sqrt{|x|}$;

(c) треугольник на плоскости;

(d) треугольник на плоскостью вместе с внутренней областью;

(e) конус в пространстве;

(f) тетраэдр в пространстве;

(g) плоский полный граф с четырьмя вершинами;

(h) множество на сфере, состоящее из экватора и трех дуг (частей меридианов), соединяющих его с полюсом, углы между которыми равны.

(i) замыкание графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$.

1.14. Опишите строение всех двумерных $\mathbb{R}$-алгебр.

1.15. Символом $\mathbb{F}_2$ обозначается поле из двух элементов $\{0,1\}$ с законами сложения и умножения $1+1=0$; $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $0\cdot 0=0$; $0\cdot 1=1\cdot 0=0$; $1\cdot 1=1$. Опишите все двумерные (над $\mathbb{F}_2$) коммутативные $\mathbb{F}_2$-алгебры и их спектры.

1.16. Коммутативная унитарная $\mathbb{F}_2$-алгебра называется *булевой* если для все ее элементы идемпотентны $a^2=a$. Докажите, что конечная булева алгебра изоморфна алгебре $P(X)$ всех подмножеств некоторого множества X с операциями пересечения (умножение)$A\cap B$ и симметрической разности (сложение) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Единицей алгебры является X, нулем — $\varnothing$.

1.17. Докажите, что коммутативная унитарная $\mathbb{F}_2$-алгебра геометрична тогда и только тогда, когда она булева.

1.18. Опишите $\mathbb{F}_2$-точки бесконечной булевой алгебры (теорема Стоуна).

1.19. Опишите спектр $\mathbb{F}_2$-алгебры всех $\mathbb{F}_2$-значных функций на некотором множестве.

1.20. Опишите спектр всех $\mathbb{R}$-значных функций на конечном множестве, на счетном множестве, на континууме.

1.21. Опишите многообразия алгебр $C^k(\mathbb{R})$ k-раз непрерывно дифференцируемых функций ($k\geqslant 0$).

1.22. Приведите пример алгебры с инъективным отображением θ, у которой есть подалгебра с неинъективным θ.

1.23. Множество всех положительных вещественных чисел обозначается символом $\mathbb{R}_{>0}$. Докажите, что алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$ и $C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ изоморфны.

1.24. Докажите, что алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$ и алгебра $C^\infty(\mathbb{R})\downarrow_{\mathbb{R}_{>0}}$ гладких функций, являющихся сужениями гладких функций из $C^\infty(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}_{>0}$, не изоморфны.

1.25. Докажите, что $C^\infty(\mathbb{R})\ncong C^\infty(\mathbb{R})\downarrow_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}$.

1.26. Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ открытое множество, $\bar{U}$ — его замыкание. Докажите, что $C^\infty(\mathbb{R}^n)\downarrow_U\cong C^\infty(\bar{U})$.

1.27. Ясно, что многообразия изоморфных алгебр "одинаковы". Приведите пример неизоморфных алгебр, с "одинаковыми" многообразиями.

1.28. Опишите все (с точностью до изоморфизма)

(a) трехмерные негеометрические $\mathbb{R}$-алгебры;

(b) n-мерные геометрические $\mathbb{R}$-алгебры.

1.29. Опишите спектры алгебр многочленов $\mathbb{R}[x^2]$, $\mathbb{R}[|x|]$.

1.30. Опишите спектр алгебры функций на прямой вида

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)|x|^k,$$

где $a_i\in C^\infty(\mathbb{R})$.

1.31. Рассмотрим подмножество прямой $N\subset\mathbb{R}$ и функуцию

$$f_N(x)=\begin{cases}x, & x\in N\\ -x, & x\in N^c\end{cases}$$

Для каждого множества N определена алгебра $A_N=<\mathbb{R}[x],f_N>=\{p+qf_N|p,q\in\mathbb{R}[x]\}$.

(a) Для каких множеств N_1,N_2 верно $A_{N_1}\cong A_{N_2}$?

(b) Для каких множеств N алгебры A_N геометричны?

1.32. Опишите спектр алгебры $\mathbb{R}[x,y]/\mathbb{R}[x^2-y^3]$.

1.33. Опишите спектр алгебры $C^\infty(\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}C^\infty(\mathbb{R})$.

1.34. Докажите, что любой кольцевой гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебры является $\mathbb{R}$-точкой.

1.35. Не любой кольцевой гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебры является $\mathbb{C}$-точкой.

Решения и указания

1.1. Рассмотрим унитарный K-гомоморфизм $h : K \to K$. По линейности $h(a) = h(a \cdot 1) = ah(1) = a$, т.е. гомоморфизм является тождественным и он единственный. Тем самым спектр $|K|$ состоит из одной точки и $\cap_{h \in |K|} \mathrm{Ker} h = 0$, т.е. алгебра K геометрическая.

1.2. Рассмотрим произвольный $\mathbb{R}$-гомоморфизм h алгебры $\mathbb{C}$.

$$-1 = h(-1) = h(i^2) = (h(i))^2.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathbb{R}$-спектр пуст. Формально $\cap_{h \in |K|} \mathrm{Ker} h = \mathbb{C} \neq 0$, т.е. алгебра не геометрическая.

1.3. Алгебра является геометрической, если

$$\bigcap_{h \in |A|} \mathrm{Ker} h = \{0\}$$

Заметим, что гомоморфизмы подстановки лежат в $|A|$, поэтому

$$\bigcap_{h \in |A|} \mathrm{Ker} h \subset \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ker} h_m$$

Однако, если функция лежит в ядре каждого h_m, она равна 0 в каждой точке $m \in M$, то есть это – нулевая функция, что означает, что это 0 алгебры. То есть, правая часть равна 0, значит, и левая тоже.

Осталось понять всегда ли θ – биекция. Ответ – нет. Пример: рассмотрим функции f на M, такие, что $f(m_1) = f(m_2)$ для некоторых $m_1, m_2 \in M$. Тогда это алгебра и $h_{m_1} = h_{m_2}$, то есть θ не инъективно.

1.4. Пусть A — алгебра всех последовательностей, имеющих конечный предел. Тогда сопоставление каждому ее элементу n-го члена является гомоморфизмом алгебры в $\mathbb{R}$ и поэтому лежит в спектре. Если элемент алгебры зануляется при всех таких гомоморфизмах подстановки, то он сам равен нулю. Поэтому алгебра является геометрической.

Рассмотрим отображение h, которое каждому элементу $a \in A$ сопоставляет предел соответствующей последовательности чисел. Это отображение лежит в спектре. При этом оно не является гомоморфизмом подстановки. Действительно, рассмотрим последовательность $a = (a_i)$, $a_i = \frac{1}{i}$, тогда $h(a) = 0$, но очевидно, что любой гомоморфизм подстановки от a не равен нулю.

1.5. Назовем эту алгебру A. Заметим, что все гомоморфизмы подстановок $h_n = ((a_0, a_1, \ldots) \mapsto a_n)$ лежат в $|A|$. Докажем, что других гомоморфизмов там нет. Для этого заметим, что алгебра порождается элементами вида $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1_n, 0, \ldots)$ (единица стоит на n-м месте, остальные – нули). Пусть теперь $h \in |A|$. Заметим, что

$$e_n e_m = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ e_n, & n = m \end{cases}$$

Поэтому $h(e_n) \neq 0$ для не более одного n, значит, так как $h \neq 0$, для ровно одного. Тогда $h(e_n) = h(e_n)^2 = 1$, поэтому $h(a) = h(e_n a) = h(a_n e_n) = a_n h(e_n) = a_n$, то есть это h_n.

1.6. Для F_3 см. пример 3.6., [1], стр. 38.

1.7. Найдем критерий инъективности гомоморфизма $\tau : A \to K^{|A|}$. Заметим, что $\tau(a) = 0$ в том и только в том случае, когда $\tau(a)(h) = f_a(h) = h(a)$ для любого $h \in |A|$. Это означает, что $a \in \cap_{h \in |A|} \mathrm{Ker} h$. Равенство нулю последеного модуля по определению равносильно геометричности.

1.8. В силу задачи 1.9. алгебра $\tau(A)$ геометрична, и, в силу 1.7., — $\tau : \tau(A) \to \tau(\tau(A))$ инъективно, оно же и сюръективно.

1.9. Пусть $x, y \in I(a)$, $a \in A$. Тогда для каждого $h \in \mathrm{Spec}\, A$ $x, y \in \mathrm{Ker}\, h$, а значит, $x - y \in \mathrm{Ker}\, h$ и $ax \in \mathrm{Ker}\, h$. Поэтому

$$x - y, ax \in \bigcap_{h \in \mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Ker}\, h = I(A),$$

а значит, $I(A)$ – идеал.

Пусть $\rho : A \to A/I(A)$ – гомоморфизм редукции. Рассмотрим $g \in |A/I(A)|$. Тогда $g \circ \rho \in |A|$. Если $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ \rho)$, то $g(\rho(x)) = 0$, то есть $\rho(x) \in \mathrm{Ker}\, g$. А если есть $y \in \mathrm{Ker}\, g$, то, так как ρ – сюръекция, то существует $x \in A$, такой, что $\rho(x) = y$ и $g(\rho(x)) = g(y) = 0$, то есть $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ \rho)$. Поэтому $\rho(\mathrm{Ker}\,(g \circ \rho)) = \mathrm{Ker}\, g$. Кроме того, если $h \in |A|$, то $I(A) \subseteq \mathrm{Ker}\, h$, следовательно, h пропускается через $A/I(A)$. Значит,

$$I(A/I(A)) = \bigcap_{g \in |A/I(A)|} \mathrm{Ker}\, g = \bigcap_{g \in |A/I(A)|} \rho(\mathrm{Ker}\,(g \circ \rho)) = \bigcap_{h \in |A|} \rho(\mathrm{Ker}\, h).$$

Если $x \in \bigcap_{h \in |A|} \rho(\mathrm{Ker}\, h)$ и $x = \rho(y)$, то $y \in I(A)$, потому что иначе нашелся бы такой $h \in |A|$, что $y \notin \mathrm{Ker}\, h$, но тогда любой элемент из

$\rho^{-1}(x) = y + I(A)$ не лежит в $\operatorname{Ker} h$, так как $I(A) \subseteq \operatorname{Ker} h$, то есть $x \notin \rho^{-1}\operatorname{Ker} h$, что противоречит предположению. Итак,

$$I(A/I(A)) = \bigcap_{h\in|A|} \rho(\operatorname{Ker} h) \subseteq \rho(I(A)) = 0,$$

то есть $A/I(A)$ – геометрическая.

τ – гомоморфизм K-алгебр, так как

$$\begin{gathered} f_{a+b}(h) = h(a+b) = h(a) + h(b) = f_a(h) + f_b(h), \\ f_{ab}(h) = h(ab) = h(a)h(b) = f_a(h)f_b(h), \\ f_{\lambda a}(h) = h(\lambda a) = \lambda h(a) = \lambda f_a(h), \\ f_1(h) = h(1) = 1. \end{gathered}$$

Его ядро

$$\operatorname{Ker}\tau = \{a \in A |\, \forall h \in |A| \;\; 0 = f_a(h) = h(a)\} = \{a \in A |\, \forall h \in |A| \;\; a \in \operatorname{Ker} h\}$$

$$= \bigcap_{h\in|A|} \operatorname{Ker} h = I(A).$$

Поэтому по теореме о гомоморфизме

$$A/I(A) \cong \tau(A).$$

1.10. Многообразием является $\mathbb{R}^n$, см. пример 3.14., [1], стр. 42.

1.11. Инъективность следует из того, что две различные точки из U задают различные гомоморфизмы подстановки алгебры гладких функций, т.е. всегда существует гладкая функция принимающая различные значения в двух различных точках. Докажем сюръективность. Рассмотрим некоторый гомоморфизм $p : C^infty(U) \to \mathbb{R}$, $p \in |C^\infty(U)|$.

Выберем гладкую функцию $f \in C^\infty(U)$ на U, у которой все поверхности уровня компактны. В частности, $L = f^{-1}(p(f))$ — компакт. Предположим, что точке p не соответствует никакая точка множества U. Тогда для любой точки $a \in U$ существует такая функция $f_a \in C^\infty(U)$, что $f_a(a) \neq p(f_a)$.

Множества

$$U_a = \{x \in U | f_a(x) \neq p(f_a)\}, \quad a \in L,$$

образуют открытое покрытие L. В силу компактности, мы можем выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие $(U_{a_1}, \dots, U_{a_n})$. Рассмотрим функцию

$$g = (f - p(f))^2 + \sum_{i-1}^{n} (f_{a_i} - p(f_{a_i}))^2.$$

Эта функция не обращается в ноль на всем U, т.е. обратима и $g^{-1} \in C^\infty(U)$. С другой стороны, p — гомоморфизм алгебр, т.е.

$$p(g) = (p(f) - p(f))^2 + \sum_{i-1}^{n} (p(f_{a_i}) - p(f_{a_i}))^2 = 0.$$

Полученное противоречие с обратимостью завершает доказательство сюръективности.

1.12. Пусть $h \in |A|$, докажем, что $h \in \operatorname{Im}\theta$. Будем рассматривать периодические функции как функции на окружности.

Так как h унитарно и $\mathbb{R}$-линейно, то $\operatorname{Im} h = \mathbb{R}$, значит, $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} h$ – максимальный идеал кольца A.

Докажем, что на некоторой точке $x_0 \in \mathbb{S}^1$ все функции из $\mathfrak{M}$ обращаются в 0. Предположим противное, тогда для каждой $x \in \mathbb{S}^1$ можно выбрать $f_x \in A$, так что $f_x(x) \neq 0$, также можно выбрать окрестность U_x точки x, на которой f_x не обращается в 0. Эти окрестности образуют открытое покрытие $\mathbb{S}^1$, выберем конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Тогда функция

$$f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2 \in \mathfrak{M}$$

строго больше 0 на каждом U_{x_i}, то есть на всей окружности, тогда f – обратимый элемент кольца A и не может лежать в идеале. Пусть y_0 – любая из точек на прямой, соответствующих точке x_0 на окружности. Тогда множество функций из A, обращающихся в 0 на y_0,– это идеал, содержащий $\mathfrak{M}$, а значит, равный ему, так как $\mathfrak{M}$ –максимальный. Значит, $f - f(y_0) \in \mathfrak{M}$ и $h(f - f(y_0)) = 0$ для любого $f \in A$. Тогда

$$h(f) = h(f - f(y_0) + f(y_0)) = h(f - f(y_0)) + h(f(y_0)) = 0 + f(y_0) = \theta(y_0)(f).$$

Таким образом, θ сюръективно, но в качестве точки y_0 подходит любая точка прямой, соответствующая x_0, значит, θ не инъективно.

1.14. Пусть A– двумерная $\mathbb{R}$- алгебра. В качестве одного из базисных векторов возьмем 1_A, а второй обозначим i_A. В дальнейшем мы будем опускать индекс A. Пусть $i^2 = \alpha 1 + 2\beta i$. Тогда $(i-\beta)^2 = (\alpha+\beta^2)1$. Рассмотрим существующие варианты:

1) $\alpha + \beta^2 > 0$

Тогда $\left(\frac{i}{\sqrt{\alpha+\beta^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha+\beta^2}}\right)^2 = 1$.

Мы можем взять вместо i – $\left(\frac{i}{\sqrt{\alpha+\beta^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha+\beta^2}}\right)$, так как с 1 они также образуют линейно независимую систему векторов. Получится, что $i^2 = 1$, где $i \neq \pm 1$, и эта алгебра изоморфна алгебре двойных чисел (комплексные числа гиперболического типа).

Сложение и умножение в этой алгебре определяются по правилам:

$$(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + (y+y')i$$
$$(x+iy)(x'+iy') = (xx'+yy') + (yx'+xy')i$$

Числа вида $x + i0$ отождествляются с вещественными. Аксиомы алгебры выполнены.

2) $\alpha + \beta^2 = 0$

Тогда мы можем зять вместо i – $(i-\beta)$, так как с 1 они также образуют линейно независимую пару векторов. Получится, что $i^2 = 0$, и эта алгебра изоморфна алгебре дуальных чисел (комплексные числа параболического типа).

Сложение и умножение в этой алгебре определяются по правилам:

$$(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + (y+y')i$$
$$(x+iy)(x'+iy') = (xx') + (yx'+xy')i$$

Числа вида $x + i0$ отождествляются с вещественными. Аксиомы алгебры выполнены.

3) $\alpha + \beta^2 < 0$

Тогда $\left(\frac{i}{\sqrt{|\alpha+\beta^2|}} - \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha+\beta^2|}}\right)^2 = -1$.

Мы можем взять вместо i – $\left(\frac{i}{\sqrt{|\alpha+\beta^2|}} - \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha+\beta^2|}}\right)$, так как с 1 они также линейно независимы. Получится, что $i^2 = -1$, и эта алгебра изоморфна алгебре комплексных чисел. Эта алгебра хорошо известна и является также алгеброй над $\mathbb{R}$.

1.15. Выберем базис в двумерной алгебре так: 1, x, где 1 – это единица, которая есть в тех алгебрах, которые мы рассматриваем. Тогда, чтобы задать умножение, достаточно задать, чему равно $x \cdot x$. То есть, все двумерные алгебры над $\mathbb{F}_2$ имеют вид $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + a_1 x + a_0)$. Каждая такая алгебра состоит из элементов 0, 1, x и $x+1$. Заметим, что $(x+1)^2 = x^2 + 1 = a_1(x) + a_0 + 1 = a_1(x+1) + a_0 + 1 + a_1$, поэтому заменой $y := x+1$ мы получаем, что алгебры $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+1)$ и $\mathbb{F}_2[x]/(x^2)$ изоморфны, а все остальные – не изоморфны. То есть мы получили, что есть три двумерные неизоморфные алгебры над $\mathbb{F}_2$.

Пусть h лежит в спектре такой алгебры A. Тогда $h(1) = 1$. Осталось задать $h(x)$. Рассмотрим все три случая.

$\mathbb{F}_2[x]/(x^2)$. Тогда $0 = h(0) = h(x^2) = h(x)^2 = 0$, поэтому $h(x) = 0$ и понятно, что такое отображение лежит в спектре.

$\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x)$. Тогда $h(x) = 0$ подходит и $h(x) = 1$ тоже подходит, поэтому у такой алгебры спектр состоит из двух элементов.

$\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$. Тогда $0 = h(0) = h(x)^2 + h(x) + 1 = 2h(x) + 1 = 1$, что невозможно. Поэтому спектр такой алгебры пуст.

1.17. Пусть A– геометрична и $a \in A$. Заметим, что само $\mathbb{F}_2$ является булевой алгеброй, поэтому для любого $h \in |A|$

$$h(a^2 - 1) = h(a)^2 - h(a) = 0,$$

значит,

$$a^2 - a \in \bigcap_{h \in |A|} \operatorname{Ker} h,$$

то есть $a^2 - a = 0$.

Теперь допустим, что A– булева и

$$a \in \bigcap_{h \in |A|} \operatorname{Ker} h \setminus \{0\}.$$

Так как $a(a-1) = 0$ и $a \neq 0$, то $a-1$ не может быть обратимым элементом, значит, идеал, который он порождает, не совпадает со всем кольцом и содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{M}$.

Все элементы поля $A/\mathfrak{M}$ – корни уравнения $x^2 = x$, значит, это поле состоит только из двух элементов, то есть это поле $\mathbb{F}_2$. Тогда проекция $h : A \to A/\mathfrak{M}$ – это элемент $|A|$. Причем

$$h(a) = h(a - 1 + 1) = h(a-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

Противоречие.

1.18. Теорема Стоуна: любая булева алгебра изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых множеств некоторого компактного вполне несвязного хаусдорфова топологического пространства.

1.19. Так как любая $\mathbb{F}_2$-значная функция является, очевидно, идемпотентом, то эта алгебра функций булева и ее спектр описывается теоремой Стоуна (задача 1.18): любая булева алгебра изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых множеств некоторого компактного вполне несвязного хаусдорфова топологического пространства.

1.23. Предъявим пару взаимно обратных гомоморфизмов алгебр. В одну сторону: отправим $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ в $f(\ln t) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$. Обратно: отправим $g(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ в $g(e^x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. То, что это гомоморфизмы, очевидно, как и то, что они взаимно обратны.

1.27. Посмотрим на $\mathbb{Q}$ и на $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 8) = A$ как на алгебры над $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} \ncong A$, так как $\mathbb{Q}$ – область целостности, а в A есть делители нуля: $(x-2)\cdot(x^2+2x+4) = 0$. При этом в $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ всего одна точка, потому что если $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, то

$$f(q) = f(q \cdot 1) = q \cdot f(1) = q \cdot 1 = q.$$

Но и в $\operatorname{Spec} A$ тоже только одна точка, потому что гомоморфизмы из A в $\mathbb{Q}$ – это такие гомоморфизмы f из $\mathbb{Q}[x]$ в $\mathbb{Q}$, что $f(x)^3 = 8$, а в $\mathbb{Q}$ это уравнение имеет только решение $f(x) = 2$.

1.32. Чтобы задать отображение из $\mathbb{R}[a,b]/(a^3-b^3)$ в $\mathbb{R}$, надо выбрать два числа a, b, таких, что $a^3 = b^3$. Если эти числа не равны нулю, то $a = (\frac{b}{a})^2$, $b = (\frac{b}{a})^3$. Если хотя бы одно равно нулю, то равны нулю оба. Таким образом, каждый элемент g множества $|\mathbb{R}[x^2, x^3]|$ однозначно задается числом t так, что $g(x^2) = t^2$, $g(x^3) = t^3$. Значит элементы спектра более-менее естественно соответствуют элементам $\mathbb{R}$. Дальше мы увидим, что это сопоставление является гомеоморфизмом.

1.35. Приведем контр-пример. Возьмем в качестве $\mathbb{C}$ - алгебры $\mathbb{C}$. Можно проверить, что все аксиомы алгебры для $\mathbb{C}$ верны. В качестве гомоморфизма возьмем комплексное сопряжение. Это изоморфизм $\mathbb{C}$ на себя, но при этом $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \neq z_1\overline{z_2}$ – это противоречит линейности, и комплексное сопряжение $\mathbb{C}$-точкой не является.

2 Топология на спектре алгебры

Топология. Совокупность Ω подмножеств множества M, замкнутая относительно объединения произвольной совокупности элементов, пересечения произвольного конечного набора своих элементов и содержащая в качестве элементов пустое множество и само множество M, называется *топологической структурой* или просто *топологией*. Элементы топологической структуры Ω называются *открытыми* множествами. Открытое множество, содержащее точку $x \in M$, называется *окрестностью* точки x. Дополнение открытого множества называется *замкнутым* множеством. Топологическое пространство, в котором любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями, называется *хаусдорфовым.*

Индуцированная топология. Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset M$. Совокупность пересечений множества A со всеми открытыми в M множествами является топологией. Говорят, что она *индуцирована* на A.

База топологии. Произвольное покрытие Σ множества M обладающее тем свойством, что пересечение любых двух элементов может быть представлено как объединение некоторых элементов из Σ, порождает топологию на M и называется *базой* этой топологии. Открытыми в ней являются множества, представляющие собой объединение какой-либо совокупности элементов из базы. Например, совокупность открытых евклидовых шаров в $\mathbb{R}^n$ является базой *стандартной* топологии. Произвольное покрытие множества M называется *предбазой* некоторой топологии на том основании, что если составить совокупность всевозможных конечных пересечений элементов покрытия, то это станет базой некоторой топологии.

Топологическое произведение. Рассмотрим два топологических пространства M, N. На декартовом произведении этих пространств $M \times N$ можно рассмотреть покрытие множествами вида $U \times V$, где U, V открытые множества соответственно в M и N. Это база топологии, которая называется *топологическим произведением* пространств.

Гомеоморфизм. Рассмотрим отображение одного топологического пространства в другое топологическое пространство. Отображение называется *непрерывным*, если полный прообраз любого открытого множества в одном пространстве открыт в другом. Например, постоянное отображение непрерывно для любых топологических пространств. Биективное отображение непрерывное в обе стороны называется *гомеоморфизмом.* Пространства, между которыми существует гомеоморфизм называются *гомеоморфными.*

Топологическое кольцо. Если на кольце K задана некоторая топология и кольцевые операции, расматриваемые как отображения из топологического произведения $K \times K$ в K, являются непрерывными, то кольцо называется *топологическим.*

Топология Зарисского. Предположим, что на множестве M задана некоторая совокупность K-значных функций, где K— топологическое кольцо. Топология *Зарисского* на множестве M порождается предбазой состоящей из полных прообразов всевозможных открытых множеств относительно каждой из заданных функций (иначе такая топология называется *инициальной*). Любая коммутативная унитарная алгебра задает алгебру функций на своем спектре, следовательно на спектре алгебры над топологическим кольцом задана топология Зарисского. Спектр геометрической алгебры с топологией Зарисского мы будем называть *многообразием.*

Следует отметить, что существуют способы определения топологии на спектре для колец без топологии. Однако, согласно принципу "наблюдаемости" выбор топологии на кольце должен отражать факт "близости" показаний приборов для "близких" состояний системы. В интересных для приложений ситуациях над кольцом $\mathbb{R}$ со стандартной топологией "алгебраические" и "геометрические" определения совпадают.

Двойственное отображение. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ две геометрические алгебры и $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$— гомоморфизм алгебр (все гомоморфизмы у нас унитарны). Тогда определено *двойственное* отображение многообразий

$$|\varphi| : |\mathcal{F}_2| \to |\mathcal{F}_1|,$$

которое переводит точку $x \in \mathcal{F}_2$ в точку $x \circ \varphi \in \mathcal{F}_1$. Отображение одного спектра в другой называется *гладким* если оно является двойственным к некоторому гомоморфизму алгебр. В силу отождествления геометрической алгебры с алгеброй функций на своем спектре, каждое гладкое отображение ψ многообразий порождает гомоморфизм алгебр ψ^* посредством композиции этого отображения и функции $\psi^*(f) = f \circ \psi$. Именно к этому гомоморфизму оно и двойственно.

2.1. Может ли геометрическая алгебра быть изоморфной алгебре всех непрерывных функций на своем спектре в топологии Зарисского?

2.2. Топология многообразия K-алгебры хаусдорфова если топологическое кольцо хаусдорфово.

2.3. Пусть A — некоторая алгебра непрерывных функций на топологическом пространстве M. Докажите, что отображение $\theta : M \to |A|$ является непрерывным.

2.4. Докажите, что топология Зарисского на спектре алгебры многочленов $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ является стандартной.

2.5. Докажите, что $|C^\infty(U)|$ гомеоморфно U, где $U \subset \mathbb{R}^n$ открытое множество.

2.6. Докажите, что для любого гомоморфизма алгебр φ двойственное отображение $|\varphi|$ является непрерывным, т.е. любое гладкое отображение является непрерывным.

2.7. Докажите, что гомоморфизм алгебр инъективен, если двойственное отображение сюръективно.

2.8. Верно ли, что если гомоморфизм алгебр инъективен, то двойственное отображение сюръективно?

2.9. Пусть A геометрическая алгебра, тогда $|\mathrm{id}_A| = \mathrm{id}_{|A|}$.

2.10. Если $\varphi_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, $\varphi_2 : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3$ — гомоморфизмы геометрических алгебр, то
$$|\varphi_2 \circ \varphi_1| = |\varphi_2| \circ |\varphi_1|.$$

2.11. Если φ изоморфизм геометрических алгебр, то $|\varphi|$ является гомеоморфизмом их многообразий. Таким образом, "диффеоморфные" многообразия гомеоморфны.

2.12. Верно ли, что если многообразия некоторых алгебр гомеоморфны, то они диффеоморфны?

2.13. Для следующих $\mathbb{R}$-алгебр опишите изоморфные им гладкие множества (см. зад. 1.13).

(a) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$;

(b) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x,y) = f(x, y+1), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(c) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x+1,y) = f(x,y) = f(x,y+1), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(d) $A = C^\infty(\mathbb{R}^3)/(x^2+y^2+z^2)C^\infty(\mathbb{R}^3)$

(e) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) | f(x,y,z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z), \forall \lambda > 0\}$;

(f) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) | f(x,y,z) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z), \forall \lambda \neq 0\}$.

(g) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x+1,y) = f(x,y) = f(x,-y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(h) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x,y) = f(x,-y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(i) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x+1,-y) = f(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(j) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x+1,-y) = f(x,y) = f(x,y+1), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(k) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | f(x+1,-y) = f(x,y) = f(-x,y+1), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

2.14. Докажите, что многообразие гладкого множества $(W, C^\infty(W))$ гомеоморфно множеству W с топологией, индуцированной стандартной топологией $\mathbb{R}^n$.

2.15. Докажите, что совокупность одновременно открытых и замкнутых множеств в многообразии булевой алгебры является базой топологии Зарисского и что из любого покрытия многообразия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие (это свойство называется *компактностью*).

2.16. Какова топология Зарисского на многообразии алгебры всех вещественнозначных функций на прямой?

2.17. Опишите многообразие алгебры всех ограниченных функций класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$.

2.18. Рассмотрим гомоморфизм геометрических K-алгебр $\varphi : A \to B$. Двойственное отображение $|\varphi|$ определяет гомоморфизм $|\varphi|^* : K^{|A|} \to K^{|B|}$ алгебр всех K-значных функций на многообразиях алгебр A и B. Докажите, что

$|\varphi|^*(\tau(A)) \subset \tau(B)$;

$\tau \circ \varphi = |\varphi|^* \circ \tau$;

2.19. Докажите, что отображение $\psi : |B| \to |A|$ спектров алгебр гладкое тогда и только тогда, когда $\psi^*(\tau(A)) \subset \tau(B)$.

2.20. Приведите пример многообразия $\mathbb{R}$-алгебры, у которого нет счетной (по мощности) базы.

2.21. Изоморфны ли алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $C^\infty(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R})$?

2.22. Пусть $\mathcal{F}_1$ алгебра из задачи 2.14.а) и $\mathcal{F}_2$ — алгебра 2.14.и). Рассмотрим гомоморфизмы

$$\alpha, \beta, : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1, \xi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

$$\alpha(f)(r) = f(r,0), \beta(f)(r) = f(2r,b), \xi(f)(r_1,r_2) = f(r_1),$$

где $r, r_i \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Опишите геометрически гладкие отображения спектров, двойственные к этим гомоморфизмам.

2.23. Пусть $\mathcal{F}$ алгебра из задачи 2.14.в) и λ — иррациональное число. Докажите, что гомоморфизм

$$\varphi : \mathcal{F} \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi(g)(r) = g(r, \lambda r)$$

инъективен. То есть, алгебра функций двух аргументов изоморфна подалгебре функций одного аргумента.

Решения и указания

2.1. Ответ: может. Кольцо K рассматриваемое как K-алгебра имеет одноточечный спектр с дискретной топологией Зарисского. Эта алгебра геометрическая (см. задачу 1.1). Пространство всех K-значных непрерывных функций на одноточечном множестве есть само кольцо K.

2.2. Пусть $h_1, h_2 : A \to K$ — различные точки спектра алгебры A, т.е. существует $a \in A$ такой, что $h_1(a) \neq h_2(a) \in K$. Если кольцо хаусдорфово, то у этих точек существуют непересекающиеся окрестности U_i. Тогда можества $f_a^{-1}(U_i)$ не пересекаются. Здесь $f_a : |A| \to K$, $f_a(h) = h(a)$, — функции на спектре, задающие топологию Зарисского.

2.3. Достаточно проверить, что прообраз элемента предбазы открыт. Элемент предбазы $|A|$ – это прообраз открытого подмножества U кольца при $\tau(f)$ для некоторого $f \in A$, а его прообраз при θ – это то же самое, что прообраз U при $(\tau(f))\circ\theta$, значит, достаточно проверить, что $(\tau(f))\circ\theta$ непрерывна.

Но
$$(\tau(f)\circ\theta)(x) = \tau(f)(\theta(x)) = \theta(x)(f) = f(x),$$
а отображение f непрерывно по условию.

2.4. Пусть $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n] = A$. Тогда $f_P^{-1}(U)$, где $U \in \operatorname{Open}\mathbb{R}$, – это множество
$$\{h:\ A\to\mathbb{R}|\ h(P)\in U\} \subseteq |A|.$$
Биекция $|A|$ и $\mathbb{R}^n$ осуществляется посредством
$$\varphi:\ |A|\to\mathbb{R}^n,\ (h:\ A\to\mathbb{R})\mapsto(h(x_1),\dots,h(x_n))$$
1) φ непрерывно. Для этого достаточно проверить, что прообраз элемента базы топологии на $\mathbb{R}^n$ открыт (потому что прообраз объединения – это объединение прообразов). Пусть $V = (a_1, b_1)\times\ldots\times(a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда
$$\varphi^{-1}(V) = \{h:\ A\to\mathbb{R}|\ \forall i\in\{1,\dots,n\}:\ h(x_i)\in(a_i,b_i)\} =$$
$$\bigcap_{i=1}^{n}\{h:\ A\to\mathbb{R}|\ h(x_i)\in(a_i,b_i)\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_{x_i}^{-1}(\mathbb{R}^{i-1}\times(a_i,b_i)\times\mathbb{R}^{n-i}) \in \operatorname{Open}|A|$$
2) φ^{-1} непрерывно. Это будем проверять только на предбазе (потому что прообраз пересечения – это пересечение прообразов). Пусть $P\in A$, $U\in\operatorname{Open}\mathbb{R}$. Тогда
$$(\varphi^{-1})^{-1}(f_P^{-1}(U)) = \varphi(\{h:\ A\to\mathbb{R}|\ h(P)\in U\}) =$$
$$\varphi(\{h:\ A\to\mathbb{R}|\ P(h(x_1),\dots,h(x_n))\in U\}) =$$
$$\{(y_1,\dots y_n)\in\mathbb{R}^n|\ P(y_1,\dots,y_n)\in U\}) = P^{-1}(U)$$
А последнее множество открыто, так как многочлен – это непрерывная функция.

Значит, φ – гомеоморфизм, то есть топология на $|A|$ такая же, как и в $\mathbb{R}^n$.

2.5. Докажем, что отображение
$$\theta : U\to|A| = |C^\infty(U)|$$

является гомеоморфизмом.

Оно непрерывно по задаче 2.3.

Докажем, что оно инъективно. Пусть $x_1, x_2\in U$, по лемме Урысона найдется $f\in|A|$, такая, что
$$\theta(x_1)(f) = f(x_1) \neq f(x_2) = \theta(x_2)(f)$$
Докажем, что оно сюръективно. Пусть $h\in|A|$. По аналогии с задачей 1.12 достаточно доказать, что на некоторой точке $x\in U$ все функции из $\operatorname{Ker}h$ обращаются в 0. Допустим, что это не так. Пусть $\tilde{g}(x)\in A$ – функция, которая стремится к $+\infty$, когда x стремится к бесконечности или к границе U. Тогда
$$g = \tilde{g} - h(\tilde{g}) \in \operatorname{Ker}h.$$
Множество $K = \{x\in U|f(x)\leq 0$ ограничено, замкнуто в U и отделено от границы U, то есть замкнуто в $\mathbb{R}^n$, а значит, компактно. Так же, как и в задаче 1.12, выберем U_x и f_x для каждого $x\in K$ и выберем среди них конечное число так, что на точках из K
$$f = f_{x_1}^2 + \dots + f_{x_n}^2 > 0.$$
Тогда
$$g + f\frac{\max_K|g|+1}{\min_K|f|} > 0$$
уже на всем U, то есть обратима, но при этом эта функция лежит в $\operatorname{Ker}h$. Противоречие.

Наконец, докажем, что образ открытого шара B, лежащего в U, открыт. Пусть $f\in A$ – функция, которая равна 0 за пределами шара и больше 0 внутри. Тогда
$$h\in\theta(U)\Leftrightarrow h(f)\neq 0\Leftrightarrow h\in(\tau(f))^{-1}(\mathbb{R}\setminus 0),$$
а $\tau(f))^{-1}(\mathbb{R}\setminus 0)$ открыто как прообраз открытого при непрерывном отображении.

2.6. См. 3.17, [1], стр. 44.

2.7. Пусть гомоморфизм $\phi : A\to B$ не инъективен. Тогда есть элемент $a\in A$, такой, что $\phi(a) = 0$. Двойственное отображение определялось только для геометрических алгебр, поэтому алгебра A геометрична. Значит, существует $x\in|A|$, такой, что $x(a)\neq 0$. Рассмотрим произвольный элемент $|\phi|(y)$ образа $|\phi|$. Для него выполнено равенство $(|\phi|(y))(a) = y(\phi(a)) = y(0) = 0$. Поэтому x не лежит в образе $|\phi|$, противоречие.

2.8. Рассмотрим $A = \mathbb{R}$ и $B = \mathbb{C}$ как $\mathbb{R}$–алгебры. Вложение $h : A \hookrightarrow B$ являтеся инъективным. У алгебры A в спектре есть отображение Id. Покажем, что оно не является образом никакого элемента спектра B при двойственном отображении h^*. Предположим противное, пусть $h^*(g) = \mathrm{Id}$, где $g : B \to \mathbb{R}$, то есть $g \circ h = \mathrm{Id}$. $(g \circ h)(1) = 1$, поэтому g переводит 1 в 1. Посмотрим, куда g переводит i. Заметим, что $-1 = g(-1) = g(i^2) = g(i)^2 \geq 0$, противоречие.

2.9. $id_A : A \to A, |id_A| : |A| \to |A|$, так что $h \mapsto h \circ id_A$, где $h \in |A|$. Заметим, что из ассоциативности композиции для $\forall a \in A, \forall h \in |A|$ верно следующее:

$$|id_A|(h(a)) = h \circ id_A(a) = h(a) = id_{|A|}(h(a)).$$

Тогда $|id_A| = id_{|A|}$.

2.10. $\varphi_2 \circ \varphi_1 : F_1 \to F_3$, $|\varphi_1| : |F_2| \to |F_1|$, $|\varphi_2| : |F_3| \to |F_2|$, $|\varphi_1| \circ |\varphi_2| : |F_3| \to |F_1|$. Для $\forall h \in |F_3|$, $|\varphi_2|(h) = h \circ \varphi_2$.

$(|\varphi_1| \circ |\varphi_2|)(h) = |\varphi_1| \circ (h \circ \varphi_2) = (h \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = h \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)$ по ассоциативности композиции, а именно так и определяется двойственное отображение. Значит,

$$|\varphi_2 \circ \varphi_1| = |\varphi_1| \circ |\varphi_2|$$

2.11. Для начала докажем, что если $\varphi : A \to B$ – гомоморфизм геометрических алгебр, то $|\varphi| : |B| \to |A|$ – непрерывное отображение. В самом деле, пусть $a \in A$, $U \in \mathrm{Open}\, K$ (опять проверяем непрерывность только на предбазе, предбазой это является, так как алгебры геометрические). Тогда

$$|\varphi|^{-1}(f_a^{-1}(U)) = |\varphi|^{-1}(\{x : \ A \to K |\ x(a) \in U\}) =$$

$$= \{y : \ B \to K |\ y \circ \varphi(a) \in U\} = f_{\varphi(a)}(U) \in \mathrm{Open}\,|B|.$$

Пусть теперь φ – изоморфизм, то есть существует такой гомоморфизм алгебр $\psi : B \to A$, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$. Из того, что мы только что выяснили, следует, что $|\varphi|$ и $|\psi|$ – непрерывные отображения. Но если $x \in |A|$, $y \in |B|$, то

$$(|\varphi| \circ |\psi|)(x) = (x \circ \psi) \circ \varphi = x \circ (\psi \circ \varphi) = x$$

и

$$(|\psi| \circ |\varphi|)(y) = (y \circ \varphi) \circ \psi = y \circ (\varphi \circ \psi) = y.$$

Поэтому $|\varphi|$ и $|\psi|$ взаимно обратны, а значит, $|\varphi|$ – изоморфизм.

2.12. Рассмотрим алгебры $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{R}[x^2, x^3] = \mathbb{R}[u, v]/(u^3 - v^2)$. Эти алгебры не изоморфны, так как вторая алгебра не порождается одним элементом. Гомоморфизм алгебр из $\mathbb{R}[x]$ в $\mathbb{R}$ однозначно задается образом x, поэтому $|\mathbb{R}[x]|$ совпадает с $\mathbb{R}$ как множество. Из непрерывности отображения $x : |\mathbb{R}[x]| \to \mathbb{R}$ следует, что топология на $|\mathbb{R}[x]|$ не слабее стандартной. Но все многочлены непрерывны как отображения из $\mathbb{R}$ со стандартной топологией в себя, поэтому топология на $|\mathbb{R}[x]|$ совпадает со стандартной. В случае $\mathbb{R}[x^2, x^3]$ мы посчитали спектр как множество в задаче 32 первой главы и получилось $\mathbb{R}$. Мы опять видим, что стандартной топологии $\mathbb{R}$ на $|\mathbb{R}[x^2, x^3]|$ достаточно для того, чтобы все элементы $\mathbb{R}[x^2, x^3]$ действовали непрерывно из $|\mathbb{R}[x^2, x^3]|$ в $\mathbb{R}$. Заметим, что отображение x^3 осуществляет гомеоморфизм $\mathbb{R}$ со стандартной топологией в себя. Поэтому для непрерывности x^3 необходимо, чтобы топология на $|\mathbb{R}[x^2, x^3]|$ была не слабее стандартной. Таким образом, топология на $|\mathbb{R}[x^2, x^3]|$ совпадает со стандартной. То есть $|\mathbb{R}[x]|$ и $|\mathbb{R}[x^2, x^3]|$ гомеоморфны, но не диффеоморфны.

2.18. Заметим, что из второго утверждения следует первое, поэтому достаточно доказать только его. Пусть $a \in A$ и $h \in |B|$. Тогда

$$(\tau \circ \phi(a))(h) = h(\phi(a)) = |\phi|(h)(a) = \tau(a)(|\phi|(h)) = |\phi|^*(\tau(a))(h) =$$

$$= (|\phi|^* \circ \tau(a))(h).$$

Что и требовалось доказать.

2.19. То, что двойственность ψ к некоторому гомоморфизму означает, что $\psi^*(\tau(A)) \subset \tau(B)$, мы доказали в предыдущей задаче. Осталось доказать обратное. Рассмотрим отображение $\phi = \tau^{-1} \circ \psi^* \circ \tau$. Тогда это гомоморфизм, так как это композиция гомоморфизмов. Кроме того, если $h \in |B|$ и $a \in A$,

$$|\phi|(h)(a) = h(\phi(a)) = h(\tau^{-1} \circ \psi^* \circ \tau(a)) = \psi^* \circ \tau(a)(h) = \tau(a)(\psi(h)) = \psi(h)(a)$$

То есть, $\psi = |\phi|$, что означает, что ψ – гладкое.

2.20. Рассмотрим алгебру всех функций (не обязательно непрерывных) на отрезке $[0, 1]$, обозначим ее A. Тогда все гомоморфизмы подстановки лежат в A. Рассмотрим функцию f_x, которая в точке x равна 1, а в остальных точках равна нулю. Такая функция лежит в алгебре, а значит, должна быть непрерывной в топологии Зарисского. Рассмотрим $f^{-}1((0,2))$. Это открытое множество спектра A, которое содержит h_x, но не содержит никакие другие гомоморфизмы подстановки. Значит, в базе топологии для любого $x \in [0,1]$ есть элемент, который содержит h_x и не содержит никакие другие гомоморфизмы подстановки. Такие элементы для разных x обязаны быть различными, поэтому их хотя бы континуум.

2.23. См. 6.5, [1], стр. 92.

3 Локализация

Локализация колец и модулей. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей и S — мультипликативное подмножество в A, т.е. S замкнуто относительно умножения, содержит 1 и не содержит 0. На множестве $A \times S$ введем отношение эквивалентности

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S : s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0.$$

Класс эквивалентности элемента (a, s) — *формальная дробь*, обозначается $\frac{a}{s}$, множество всех классов — $S^{-1}A$. С операциями сложения и умножения дробей множество $S^{-1}A$ становиться кольцом и называется *локализацией кольца по мультипликативной системе.* Отображение

$$i : A \to S^{-1}A, \quad i(a) = \frac{a}{1}$$

назвается *каноническим гомоморфизмом.*

Пусть теперь P — A-модуль. Действуя по описанной схеме получаем множество классов $S^{-1}P$, в котором сложение и умножение на элементы кольца $S^{-1}A$ задаются по правилам

$$\frac{p_1}{s_1} + \frac{p_2}{s_2} = \frac{p_1 s_2 + p_2 s_1}{s_1 s_2}, \quad \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{p_2}{s_2} = \frac{a_1 p_2}{s_1 s_2},$$

превращая его в S^{-1}-модуль

Гомоморфизм ограничения. Пусть A — геометрическая K-алгебра, $\mathcal{F} = \tau(A)$ — ее геометризация, т.е. алгебра функций на спектре, и $W \subset |F|$ — некоторое подмножество спектра. *Ограничением* $\mathcal{F}|_W$ алгебры $\mathcal{F}$ на W называется множество всех функций $f : W \to K$, таких, что у любой точки $a \in W$ существует окрестность (в индуцированной топологии) $U \subset W$ и элемент $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, такие что $f|_U = \tilde{f}\,|_U$. Такая операция называется *локализацией.*

Для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ определено ее ограничение на подмножество спектра $f|_W$, принадлежащее алгебре $\mathcal{F}|_W$. Таким образом, мы получаем *гомоморфизм ограничения*

$$\rho_W : \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_W, f \mapsto f|_W.$$

Полнота. Геометрическая алгебра $\mathcal{F}$ называется *полной*, если гомоморфизм ограничения $\rho_{|F|} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_{|F|}$ сюръективен. Полнота означает, что любая функция на спектре, локально совпадающая с элементами алгебры, сама принадлежит алгебре.

Гладкая оболочка. Геометрическая $\mathbb{R}$-алгебра $\mathcal{F}$ называется C^∞-замкнутой, если для любого конечного набора ее элементов $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F}$ и любой функции $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ найдется такой элемент $f \in \mathcal{F}$, что $f(a) = g(f_1(a), \ldots, f_k(a))$ для всех $a \in |\mathcal{F}|$. Пара $(\tilde{\mathcal{F}}, i)$, где $\tilde{\mathcal{F}}$ — C^∞-замкнутая геометрическая $\mathbb{R}$-алгебра и $i : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$ — гомоморфизм, называется *гладкой оболочкой* геометрической $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{F}$, если для любого гомоморфизма $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ в геометрическую C^∞-замкнутую $\mathbb{R}$-алгебру $\mathcal{F}'$ найдется гомоморфизм $\tilde{\alpha} : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}'$, что $\alpha = \tilde{\alpha} \circ i$.

Гладкая алгебра. Введем обозначение $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \geqslant 0\}$. Полная геометрическая $\mathbb{R}$-алгебра $\mathcal{F}$ называется *n-мерной гладкой (с краем) алгеброй* или *гладким многообразием*, если найдется не более чем счетное покрытие $\{U_k\}$ пространства $|\mathcal{F}|$ открытыми множествами, такое, что все алгебры $\mathcal{F}|_{U_k}$ изоморфны алгебре $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (либо $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$). Многообразия гладких алгебр называются гладкими многообразиями.

Если точка спектра M гладкой алгебры с краем соответствует краевой точке $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, то она называется *краевой точкой*. Все краевые точки гладкой алгебры называются *краем* гладкого многообразия и обозначается ∂M.

Подмногообразие. Пусть $N \subset |\mathcal{F}|$ подмножество спектра гладкой $\mathbb{R}$-алгебры. Если алгебра $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}|_N$ является гладкой $\mathbb{R}$-алгеброй, то множество N называется *гладким подмногообразием* многообразия $|\mathcal{F}|$. Если гомоморфизм ограничения ρ_N сюръективен, то гладкое подмногообразие называется *замкнутым*.

Координаты. Рассмотрим изоморфизм алгебр $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}|_U$ из определения гладкой алгебры. Этот изоморфизм определяет двойственный гомеоморфизм евклидового пространства с естественной системой координат $(x_1, \ldots, x_n)$ и открытого множества U на гладком многообразии. Таким образом, каждая точка открытого множества преобретает координаты. Такая система координат называется *локальной системой координат*, а пара $(U, |\varphi|)$ — *картой* на многообразии.

3.1. Докажите, что если $A \subset B \subset |\mathcal{F}|$, то $(\mathcal{F}|_B)|_A = \mathcal{F}|_A$.

3.2. Докажите, что $C^\infty(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_{>0}} = C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ (ср. 1.24).

3.3. Пусть $\mathcal{F} = C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — непустое открытое подмножество. Если $V \subset U$ открытое подмножество, то $\mathcal{F}|_V = C^\infty(V)$.

3.4. Пусть $i : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ — изоморфизм двух геометрических алгебр, $A_2 \subset |\mathcal{F}_2|$, $A_1 = |i|(A_2)$. Тогда отображение

$$\mathcal{F}_1|_{A_1} \to \mathcal{F}_2|_{A_2}, f \mapsto f \circ |i||_{A_2}$$

является изоморфизмом.

3.5. Докажите, что подалгебра $\mathcal{F}$ алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящая из функций, каждая из которых по модулю меньше некоторого многочлена, не является полной.

3.6. Алгебра $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, является полной.

3.7. Какие из следующих алгебр являются полными:

(a) $\mathbb{R}[x]$;

(b) алгебра всех ограниченных C^∞-функций на прямой;

(c) алгебра всех периодических (с периодом 1) C^∞-функций на прямой.

3.8. Пусть $A \subset |\mathcal{F}|$. Тогда отображение

$$\mu : A \to |\mathcal{F}|_A|, a \mapsto (f \to f(a)),$$

является гомеоморфизмом на подмножество пространства $|\mathcal{F}|_A|$.

3.9. Пусть $\mathcal{F} = C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и $A \subset U = |\mathcal{F}|$ также открыто. Тогда отображение μ из задачи 3.8 является сюръективным.

3.10. Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{R}[x]$ и $A = \mathbb{R}_{>0}$. Тогда отображение μ из задачи 3.8 не является сюръективным.

3.11. Пусть алгебра $\mathcal{F}$ является C^∞-замкнутой и

$$A = \{a \in |\mathcal{F}| \mid \alpha < f(a) < \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}\}.$$

Тогда отображение μ из задачи 3.8 является сюръективным.

3.12. Гладкая оболочка любой геометрической $\mathbb{R}$-алгебры единственная с точностью до изоморфизма.

3.13. Найдите гладкую оболочку алгебр

(a) $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$;

(b) алгебры функций на прямой вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)|x|^k, \quad x \in \mathbb{R}, a_i \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

3.14. Алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ не изоморфны.

3.15. Пусть $i : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ — изоморфизм геометрических $\mathbb{R}$-алгебр и алгебра $\mathcal{F}_1$ является C^∞-замкнутой, тогда и алгебра $\mathcal{F}_2$ также C^∞-замкнута.

3.16. Пусть $\mathcal{F}$ C^∞-алгебра, рассмотрим множество

$$\bar{\mathcal{F}} = \{g(a_1, \dots, a_n) | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathcal{F}, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Докажите, что

(a) $\bar{\mathcal{F}}$ — C^∞-замкнутая алгебра;

(b) $\bar{\mathcal{F}}$ является гладкой алгеброй;

(c) $\bar{\mathcal{F}}$ является наименьшей C^∞-замкнутой алгеброй, содержащей $\mathcal{F}$.

3.17. Пусть $\varphi : P \to Q$ — гомоморфизм A-модулей. Докажите, что отображение $S^{-1}(\varphi) : S^{-1}P \to S^{-1}Q$

$$S^{-1}(\frac{p}{s}) = \frac{\varphi(p)}{s}$$

является гомоморфизмом $S^{-1}A$-модулей.

3.18. Если в A нет делителей нуля и $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A$ есть полей частных кольца.

3.19. Пусть $A = \mathbb{Z}$, S — множество неотрицательных степеней числа 10. Тогда $S^{-1}A$ — множество всех рациональных чисел. десятичная запись которых конечна.

3.20. Пусть $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $S = A \setminus \mu_x$, тогда локализацией является кольцо ростков гладких функций в точке x.

3.21. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$S = \{f \in A | f(x) \neq 0 \forall x \in U\}.$$

Тогда $S^{-1}A \cong C^\infty(U)$, а канонический гомоморфизм $i : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(U)$ совпадает с гомоморфизмом ограничения ρ_U.

3.22. Гладкие алгебры и гладкие алгебры с краем являются C^∞-замкнутыми.

3.23. Докажите, что все алгебры задачи 2.13. являются гладкими.

3.24. Если край ∂M многообразия n-мерной гладкой алгебры не пуст, то $\mathcal{F}|_{\partial M}$ является $n-1$-мерной гладкой алгеброй и у нее нет краевых точек.

3.25. Докажите, что край гладкой алгебры

$$\mathcal{F} = \{f \in C^\infty(\Pi) | f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, -x_2), \forall (x_1, x_2) \in \Pi\},$$

где $\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$, можно отождествить с окружностью.

3.26. Пусть $N \subset |\mathcal{F}|$ — замкнутое гладкое подмногообразие. Тогда

(a) N замкнуто как подмножество топологического пространства $|\mathcal{F}|$;

(b) $N = |\mathcal{F}|$.

3.27. Докажите, что алгебра $C^\infty(\mathbb{R}^2)|_{\mathbb{S}^1}$ изоморфна алгебре задачи 2.12(a).

3.28. Пусть $N \subset |\mathcal{F}|$ — замкнутое гладкое подмногообразие и $A_N \subset \mathcal{F}$ множество

$$A_N = \{f \in \mathcal{F} | \forall a \in N, f(a) = 0\}.$$

Докажите, что $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}/A_N$.

3.29. Для любого непустого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$

(a) существует гладкая функция $f \in C^\infty(U)$, у которой все линии уровня $f^{-1}(\lambda), \forall\lambda \in \mathbb{R}$, компактны;

(b) существует гладкая функция $f \in C^\infty(U)$, что $f|_U > 0$ и $f|_{U^C} = 0$.

3.30. (Ряд Тейлора в форме Адамара) Всякая гладкая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в звездчатой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки z представима в виде

$$f(x) = \sum_{|\tau|=0}^{n} \frac{1}{\tau!}(x-z)^\tau \frac{\partial^{|\tau|} f}{\partial x^\tau}(z) + \sum_{|\sigma|=n+1} (x-z)^\sigma g_\sigma(x),$$

где $g_\sigma \in C^\infty(U)$.

3.31. Докажите, что если $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $f(0) = 0$, то $f(x)/x \in C^\infty(\mathbb{R})$.

3.32. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $f(z) = f(y) = 0, z \neq y$, тогда f можно представить как сумму произведений гладких функций вида $g_i h_i$, где $g_i(z) = 0, h_i(y) = 0$.

3.33. Докажите, что $C^\infty(\mathbb{R}^n) \ncong C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

3.34. Геометрическая $\mathbb{R}$-алгебра, изоморфная одной из алгебр $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ или $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, является C^∞-замкнутой.

3.35. Докажите задачу 6.8. для открытых подмножеств гладкого многообразия.

3.36. $\overline{C^\infty(\mathbb{R}^k) \otimes_\mathbb{R} C^\infty(\mathbb{R}^m)} \cong C^\infty(\mathbb{R}^{k+m})$.

3.37. Докажите, что гладкая оболочка тензорного произведения гладких алгебр является гладкой алгеброй.

3.38. Докажите, что спектр гладкой оболочки тензорного произведения гладких алгебр

$$\overline{\mathcal{F}_1 \otimes_\mathbb{R} \mathcal{F}_2}$$

гомеоморфен топологическому произведению их гладких многообразий

$$|\mathcal{F}_1| \times |\mathcal{F}_2|.$$

3.39. Докажите. что спектр алгебры из задачи 2.12(i) не гомеоморфен цилиндру (произведению прямой и окружности).

3.40. Докажите, что если две карты пересекаются, то сужение каждой их двух карт на пересечение также является картой. Переход из одной возникшей локальной системы координат в другую является диффеоморфизмом.

3.41. Пуст M — гладкое многообразие, $N \subset M$ — гладкое подмногообразие в M. Докажите, что вложение $i : N \hookrightarrow M$ является гладким отображением.

3.42. Каждому вещественному числу φ, понимаемому как радианная мера угла, соответствует точка окружности $\mathbb{S}^1$. Докажите, что отображение

$$i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mathrm{mod} 2\pi \mapsto e^{i\varphi}$$

является гладким отображением.

Решения и указания.

3.1. Пусть $f \in (\mathcal{F}|_B)|_A$. Это равносильно тому, что для любой точки $x \in A$ найдется U, открытое в $|\mathcal{F}|$, такое, что $f|_{U\cap A}$ совпадает с $g|_{U\cap A}$, где $g \in \mathcal{F}|_B$. Последнее в свою очередь означает, что для любой $y \in B$ найдется V, открытое в $|\mathcal{F}|$, и $h \in \mathcal{F}$ такие, что $g|_{V\cap B} = h|_{V\cap B}$. Возьмем $y = x$. Заметим, что теперь верно, что $f|_{U\cap V\cap A} = h|_{U\cap V\cap A}$, при этом $x \in U\cap V$. То есть f локально совпадает с функциями из $\mathcal{F}$. Обратно, пусть f локально совпадает с функциями из $\mathcal{F}$. Все функции из $\mathcal{F}$ имеют образы в $\mathcal{F}|_B$ при гомоморфизме сужения. Поэтому f локально совпадает и с функциями из $\mathcal{F}|_B$.

3.3. Пусть есть функция на V, которая локально совпадает с функциями из $C^\infty(U)$. Нам нужно проверить, что она сколько угодно раз дифференцируема во всех точках. Это локальное свойство, проверим его в какой-то точке. В некоторой окрестности этой точки функция совпадает с функцией из $C^\infty(U)$, а потому является дифференцируемой.

Обратно, пусть есть функция f из $C^\infty(V)$. Рассмотрим произвольную точку $x \in V$. Рассмотрим некоторый маленький шар радиуса r с центром в x, который целиком лежит в V, и гладкую функцию g, которая равна единице на шаре вдвое меньшего радиуса с центром в x и равна нулю вне шара с центром x радиуса $\frac{3}{2}r$. Тогда произведение $f \cdot g$, продолженное нулем на все U, лежит, очевидно, в $C^\infty(U)$. Поэтому f локально совпадает с функциями из $C^\infty(U)$.

3.5. По всей видимости, имеется ввиду алгебра функций, которыя по модулю меньше некоторого многочлена, а не некоторая алгебра, для которой это верно (иначе можно взять алгебру констант, и для нее это не верно). Нужно доказать, что она не полна. Во-первых, понятно, что ее спектр совпадает с $\mathbb{R}^n$ (доказательство аналогично доказательству для $C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Теперь давайте просто приведем пример функции, оторая лежит в ограничении, но не лежит в алгебре. Функция $F = \exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ подойдет. Очевидно, что она становитс больше любого многочлена. Теперь пусть U – ограниченное и открытое множество. Существует функция $\phi \in C^\infty$ с компактным носителем, равная 1 на U. Тогда ϕf лежит в алгебре и совпадает с f на U. Значит, алгебра – не полная.

3.7. a) полна, b) не полна, c) полна.

3.8. Во-первых, докажем, что μ непрерывна. Достаточно проверить, что прообраз элемента предбазы открыт, элементы предбазы – это прообразы открытых множеств при отображениях вида $\tau(\tilde{f})$, где $\tilde{f} \in \mathfrak{F}|_A$. То есть, достаточно проверить, что для любого $\tilde{f} \in \mathfrak{F}|_A$ отображение $\tau(\tilde{f}) \circ \mu$ непрерывно. Для этого докажем, что у любой точки из A есть окрестность U, такая, что $(\tau(\tilde{f}) \circ \mu)|_U$ непрерывно. В качестве U возьмем такую окрестность, в которой $\tilde{f}$ совпадает с некоторой $\tau(f) \in \tau(\mathfrak{F})$, тогда для $x \in U$

$$(\tau(\tilde{f}) \circ \mu)(x) = \tau(\tilde{f})(\mu(x)) = \mu(x)(\tilde{f}) = \tilde{f}(x) = \tau(f)(x).$$

То есть

$$(\tau(\tilde{f}) \circ \mu)|_U = \tau(f)|U,$$

а $\tau(f)$ непрерывна.

Во-вторых, докажем, что μ инъективна. Допустим, что

$$\mu(a) = \mu(b)$$

Тогда для любого $f \in \mathfrak{F}$

$$a(f) = \tau(f)(a) = f|_A(a) = \mu(a)(f|_A) = \mu(b)(f|_A) = f|_A(b) = \tau(f)(a) = b(f).$$

То есть $a = b$.

Наконец, докажем, что образ открытого открыт. Так как μ инъективно, то взятие образа "уважает"операции объединения и пересечения, поэтому достаточно доказывать для элементов предбазы, то есть элементов вида $(\tau(f))^{-1}(U) \cap A$, где $f \in \mathfrak{F}$, а U открыто в K. Заметим, что

$$\tau(f)|_A(x) = f|_A(x) = \mu(x)(f|_A) = \tau(f|_A)(\mu(x)) = (\tau(f|_A) \circ \mu)(x).$$

Значит,

$$\mu((\tau(f))^{-1}(U) \cap A) = \mu((\tau(f)|_A)^{-1}(U)) = \mu((\tau(f)|_A) \circ \mu)^{-1}(U)) =$$

$$= \mu(\mu^{-1}(\tau(f|_A)^{-1}(U))) = (f|_A)^{-1}(U) \cap \operatorname{Im} \mu.$$

Так как $f|_A$ непрерывно, то $(f|_A)^{-1}(U)$ открыто в $|\mathfrak{F}|_A|$, поэтому множество $(f|_A)^{-1}(U) \cap \operatorname{Im} \mu$ открыто в $\operatorname{Im} \mu$.

3.10. Заметим, что отображение ρ_A в данном случае является изоморфизмом. Инъективность следует из того, что если два многочлена совпадают на бесконечном множестве, что они равны. Докажем сюръективность. Пусть $f \in \mathbb{R}[x]|_{\mathbb{R}_{>0}}$, для каждого многочлена $p \in \mathbb{R}[x]$ обозначим

$$A_p := \{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid \exists \varepsilon > 0 \;\; f|_{(r-\varepsilon, r+\varepsilon)} = p|_{(r-\varepsilon, r+\varepsilon)}\}.$$

Эти множества по определению открыты, они покрывают все $\mathbb{R}_{>0}$, так как $f \in \mathbb{R}[x]|_{\mathbb{R}_{>0}}$, и не пересекаются, так как два разных многочлена не могут совпадать в окрестности точки. Так как $\mathbb{R}_{>0}$ связно, то одно из этих множеств совпадает со всем $\mathbb{R}_{>0}$. То есть f совпадает с некоторым многочленом и лежит в $\operatorname{Im}\rho_A$.

Таким образом элементы $\mathbb{R}[x]|_{\mathbb{R}_{>0}}$ можно отождествлять с многочленами. Элементы из $\operatorname{Im} \mu$ вычисляют значения этих многочленов в точках из $\mathbb{R}_{>0}$. Но в $|\mathbb{R}[x]|_{\mathbb{R}_{>0}}|$ есть еще элементы, которые вычисляют значения этих многочленов в точках из $\mathbb{R}_{\leq 0}$, поэтому μ не сюръективно.

3.12. См. предложение 3.34, [1], стр. 53.

3.13. i) $C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

ii) Используя функции $\pm x + |x|$, можно показать, что гладкая оболочка состоит из функций, чьи сужения на положительный и отрицательный лучи являются гладкими.

3.14. См. предложение 9.15, [1], стр. 139.

3.15. Заметим, что двойственный гомоморфизм $|i|$ к изоморфизму $i : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ является изоморфизмом. Поэтому корректно сказать, что условие, что для любого набора $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}_1$ и $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ найдется элемент $f \in \mathcal{F}_1$, такой, что $f(a) = g(f_1(a), \dots, f_k(a))$ для любого $a \in |\mathcal{F}_1|$ равносильно условию, что для любого набора $i(f_1), \dots, i(f_k) \in \mathcal{F}_2$ и $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ найдется $i(f) \in \mathcal{F}_2$, такой, что

$$i(f(|i|^{-1}a)) = g(i(f_1(|i|^{-1}a)), \dots i(f_k(|i|^{-1}a))).$$

Поскольку $i, |i|$ – изоморфизмы, второе условие просто является условием C^∞-замкнутости $\mathcal{F}_2$.

3.20. Нам нужно сопоставить каждому элементу $\frac{f}{g} \in S^{-1}A$ пару (U, f), где U– окрестность x_0 и $f \in C^\infty(U)$, $g(x_0) \neq 0$, поэтому существует такая окрестность U, что $0 \notin g(U)$. Но тогда $f(x)/g(x)$ бесконечно дифференцируемо в любой точке $x_0 \in U$, так как $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и у x_0 существует такая окрестность (U, например), в которой $g(x) \neq 0$. Проверим, что если $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$, то $(U_1, f_1(x)/g_1(x)) \sim (U_2, f_2(x)/g_2(x))$. В самом деле, по определению равенства дробей существует такая $h \in S$, что

$$h(x)(f_1(x)g_2(x) - g_1(x)f_2(x)) = 0$$

Но $h(x) \neq 0$ в некоторой окрестности V точки x_0, поэтому $f_1(x)g_2(x) - g_1(x)f_2(x) = 0$ в V, но в $W = V \cap U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ функции g_1 и g_2 не зануляются, поэтому в W

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

а это и означает, что $(U_1, f_1(x)/g_1(x)) \sim (U_2, f_2(x)/g_2(x))$.

Докажем сюрьективность. Пусть (U, f) – представитель какого-то ростка функций в точке x_0. Из нормальности $\mathbb{R}^n$ следует, что в U есть окрестности V_1 и V_2 точки x_0, такие, что

$$V_1 \subseteq \operatorname{Cl} V_1 \subseteq V_2 \subseteq \operatorname{Cl} V_2 \subseteq U$$

Возьмем гладкую функцию Урысона h, такую, что $h(\operatorname{Cl} V_1) = \{1\}$ и $h(\mathbb{R}^n \setminus V_2) = \{0\}$. Тогда hf определена на всем $\mathbb{R}^n$ (потому что, когда мы подошли к границе U, она уже давно занулилась) и $(U, f) \sim (V_1, hf)$ так как $hf|_{V_1} = f|_{V_1}$. Таким образом, для каждого ростка, представленного (U, f), мы нашли $\frac{hf}{1} \in S^{-1}A$, который в него переходит.

Инъективность. Пусть $(U_1, f_1(x)/g_1(x)) \sim (U_2, f_2(x)/g_2(x))$. Это значит, что $f_1(x)g_2(x) - g_1(x)f_2(x) = 0$ в некотором $W \subseteq U_1 \cap U_2$. Выберем в W такую окрестность V точки x_0, что $\operatorname{Cl} V \subseteq W$. Определим $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ как гладкую функцию Урысона, такую, что $h|_V = 1$ и $h|_{\mathbb{R}^n \setminus W} = 0$. Тогда $h(x_0) = 1$, так как $x_0 \in V$ и $h(x)(f_1(x)g_2(x) - g_1(x)f_2(x)) = 0$ на всем $\mathbb{R}^n$, то есть $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$.

3.27. Обозначим за h гладкую функцию, равную нулю на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$ и единице в единице. Ее можно получить из гладкой функции h_0, равной нулю на отрицательных числах и $e^{-\frac{1}{x}}$ на положительных со сдвигом на $\frac{1}{2}$ и умножением на какое-то число.

Отправимся из $A = \{f : f(x+1) = f(x)\}$ в $B = C^\infty(\mathbb{R}^2)|_{S_1}$. Пусть у нас есть функция из f в A. Рассмотрим функцию g, такую, что

$$g(r\cos\phi, r\sin\phi) = f(\frac{\phi}{2\pi})h(r), \quad g(0,0) = 0.$$

Заметим, что по определению f выражение справа не зависит от того, какое именно число мы выбрали в качестве аргумента ϕ: от прибавления 2π ничего не меняется. Из определения h видно, что функция g равна нулю в окрестности нуля U. Вне U у любой точки существует такая окрестность, что переход от x, y к r, ϕ гладкий. Таким образом, g получается гладкой функцией. Теперь сопоставим функции f функцию $g|_{S_1}$ из B. Обозначим получившееся отображение за χ. Легко видеть, что χ является гомоморфизмом алгебр.

Обратно отправиться легче: сопоставляем g из B функцию f из A, такую, что $f(t) = g(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Обозначим этот гомоморфизм за τ. Очевидно, что τ является гомоморфизмом алгебр.

Посчитаем, чему равно $\chi(\tau(g))$. Пишем:
$\chi(\tau(g))(r\cos\phi, r\sin\phi) = \tau(g)(\frac{\phi}{2\pi})h(r) = g(\cos\phi, \sin\phi)h(r)$.

Нас интересуют сужения этих функций на S^1, то есть $r = 1$. Получается $\chi(\tau(g))(\cos\phi, \sin\phi) = g(\cos\phi, \sin\phi)h(1) = g(\cos\phi, \sin\phi)$. Они равны.

Теперь посчитаем $\tau(\chi(f))$. Считаем значение в произвольной точке t: $\tau(\chi(f))(t) = \chi(f)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = f(t)h(1) = f(t)$.

Значит, τ и χ являются взаимно обратными гомоморфизмами алгебр. То есть A и B изоморфны.

3.28. N – гладкое, поэтому отображение $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_N$ – сюръекция. Но $\mathcal{F}_N$ геометрическая, и поэтому

$$f|_N = 0 \Leftrightarrow \forall a \in N : f(a) = 0 \Leftrightarrow f \in A_N$$

То есть, $\operatorname{Ker}\rho = A_N$, и по теореме о гомоморфизме $\mathcal{F}/A_N = \mathcal{F}_N$.

3.29. См. леммы 4.16, [1], стр. 66.

3.30. См. следствие 2.9, [1], стр.32.

3.31. Действительно, $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = \int_0^1 xf'(tx)dt = x\int_0^1 f'(tx)dt$. Значит, $\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(tx)dt$.

Заметим, что для гладкой функции от двух переменных $g(x,t)$ автоматически выполняются условия правила Лейбница: $g(x,t)$ и ее производная g'_x непрерывны на любом прямоугольнике. Поэтому

$$\frac{d}{dx}(\int_0^1 g(x,t)dt) = \int_0^1 g'_x(x,t)dt.$$

Отсюда по индукции легко получить, что если $g(x,t)$ гладкая, то и $h(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$ гладкая.

Применим этот результат к $g(x,t) = f'(tx)$ и получим, что $\frac{f(x)}{x}$ гладкая.

3.32. См. лемму 2.11, [1], стр. 33.

3.36. См. лемма 4.29, [1], стр. 74.

3.38. См. предложение 4.28, [1], стр. 72.

3.41. По условию $|\mathcal{F}| = M$– гладкое многообразие, N– гладкое подмногообразие, то есть $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}|_N$ гладкая $\mathbb{R}$-алгебра. Автоматически мы получаем гомоморфизм ограничения $\rho_N : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_N = \mathcal{F}|_N$.

Нам нужно доказать, что $i : N \hookrightarrow M$ является гладким отображением, то есть оно является двойственным к некоторому гомоморфизму алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_N$, ρ_N является первым кандидатом, $|\rho_N| : N \to M$. И i подходит: $i(x)(f) = x \circ \rho_N(f)$, где $x \in N, f \in \mathcal{F}$.

3.42. Можно повторить рассуждения из предыдущей задачи. Во-первых, нам нужны алгебры:

a) для $\mathbb{C}$ нам нужны только те функции, которые принимают значения в $\mathbb{R}$, и они должны быть гладкими по действительной и мнимой части числа из $\mathbb{C}$. Эту алгебру обозначим $\mathcal{F}$.

b) для S_1 нам нужны гладкие функции, которые принимают значения в $\mathbb{R}$. Можно сказать, что эта совокупность будет алгеброй гладких функций с периодичностью 2π. Обозначим ее $\mathcal{F}_{S_1}$.

Теперь возьмем аналог ρ_N:

$\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{S_1}$, $\rho(f)(\varphi) = f(e^{i(\varphi \, mod \, 2\pi)})$. В таком случае i является двойственным к ρ, так как $\varphi(f) \mapsto \varphi \circ \rho(f)$. А значит, является гладким отображением.

4 Модули

Модуль $\mathbf{Hom}_K(P,Q)$. Рассмотрим два K-модуля P,Q. Отображение $f: P \to Q$ называется K-гомоморфизмом, если

$$f(p+p') = f(p) + f(p'),$$
$$f(kp) = kf(p), \quad \forall p,p' \in P, k \in K.$$

Ясно, что композиция гомоморфизмов является гомоморфизмом. В случае, когда K является полем K-гомоморфизм есть линейное отображение векорных пространств. Множество K-гомоморфизмов обозначается $\mathrm{Hom}_K(P,Q)$. Если $f \in \mathrm{Hom}_K(P,Q)$ и $k \in K$ можно определить действие элемента на f по правилу

$$(kf)(p) = k(f(p)),$$

и сумму гомоморфизмов

$$(f+f')(p) = f(p) + f(p').$$

Это определение задает структуру K-модуля на $\mathrm{Hom}_K(P,Q)$. Кольцо K само является K-модулем и можно говорить о K-модуле $\mathrm{Hom}_K(K,P)$. *Двойственным* модулем к модулю P называется модуль $P^* = \mathrm{Hom}_K(P,K)$. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_K(P,Q)$ называется *эпиморфизмом*, если он сюръективен и *изоморфизмом*, если он при этом инъективен. Элементы модуля $\mathrm{Hom}_K(P,P)$ называются *эндоморфизмами*

$$\mathrm{End}_K P = \mathrm{Hom}_K(P,P).$$

Подмножество $P' \subset P$ называется *подмодулем*, если оно замкнуто относительно сложения $P' + P' \subset P'$ и инвариантно относительно действия кольца $KP' \subset P'$. В этом случае фактор пространство P/P' также является K-модулем.

Правое умножение. На K-модуле $\mathrm{Hom}_K(P,Q)$ помимо описанного действия кольца K, которое называется *левым умножением*, можно ввести структуру *правого умножения* на элементы $k \in K$, а именно

$$(k^+f)(p) = f(kp).$$

Таким образом, множество $\mathrm{Hom}_K(P,Q)$ можно рассматривать как *правый* модуль, он обозначается $\mathrm{Hom}^+_K(P,Q)$, или как *бимодуль* $\mathrm{Hom}^{(+)}_K(P,Q)$, если рассматривать сразу обе модульные структуры.

Сумма модулей. Пусть даны два модуля P и Q. На декартовом произведении $P \times Q$ можно ввести структуру K-модуля по правилам сложения и умножения

$$(p,q) + (p',q') = (p+p', q+q'),$$
$$k(p,q) = (kp,kq).$$

Этот модуль обозначается $P \oplus Q$ и называется *прямой суммой* модулей.

Свободный модуль. Модуль P над кольцом K называется *свободным*, если он либо является нулевым, либо обладает *базисом*, т.е. непустой системой S элементов $e_1, \dots, e_i, \dots$, которая является линейно независимой и порождает P линейными комбинациями. Модуль

$$K^n = K \oplus \cdots \oplus K$$

является свободным модулем. Для произвольного модуля набор элементов, порождающий его своими линейными комбинациями, называется *порождающим*.

Проективный модуль. K-модуль P называется *проективным* если существует такой модуль P', что $P \oplus P'$ является свободным модулем.

Тензорная алгебра. Рассмотрим A-модуль P. Прямая сумма пространств, с операцией тензорного умножения

$$T(P) = T^0(P) \oplus T^1(P) \oplus T^2(P) \oplus \cdots = A \oplus P \oplus (P \otimes_A P) \oplus \dots$$

называется *тензорной алгеброй.* Профакторизуем тензорную алгебру $T(P)$ по ее двустороннему идеалу P_-, порожденному элементами вида $a \otimes b - b \otimes a, a,b \in P$. Получающееся пространство $S(P) = T(P)/P_-$ называется симметрической алгеброй. Если тензорную алгебру профакторизовать по идеалу P_+, порожденному элементами вида $a \otimes b + b \otimes a, a, b \in P$, то возникнет *внешняя алгебра* $\bigwedge(P)$.

Точная последовательность. Рассмотрим последовательность модулей P_i и их гомоморфизмов

$$\dots \overset{\pi_{k-2}}{\to} P_{k-1} \overset{\pi_{k-1}}{\to} P_k \overset{\pi_k}{\to} P_{k+1} \overset{\pi_{k+1}}{\to} \dots$$

Говорят, что последовательность *точна* в k-м члене, если $\mathrm{Im}\pi_{k-1} = \mathrm{Ker}\pi_{k+1}$.

4.1. Докажите изоморфизм K-модулей

(a) $\mathrm{Hom}_K(K,P) \cong P$;

(b) $W \otimes_K V^* \cong \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

4.2. Докажите, что $Spec_K(S(V^*)) \cong V$.

4.3. Докажите изоморфизм

(a) $\mathbb{R}$-модулей $\mathbb{R}[x] \cong S(\mathbb{R}^*)$

(b) $K[x_1, \dots x_n] \cong S(V)$, где K — поле и $n = \mathrm{dim}V$.

4.4. Рассмотрим идеал алгебры функций вида $\mu_z = \{f \in A | f(z) = 0\}$. Докажите изоморфизм $\mathbb{R}$-модулей

(a) $C^\infty(\mathbb{R}^n)/\mu_z \cong \mathbb{R}$;

(b) $C^\infty(\mathbb{R}^n)/\mu_z^2 \cong \mathbb{R}^{n+1}$;

(c) $C^\infty(\mathbb{R}^n)/\mu_{z_1}\mu_{z_2} \cong \mathbb{R}^2$, где $z_1 \neq z_2$.

4.5. Пусть V — $\mathbb{R}$-векторное пространство. Задайте на V структуру $\mathbb{R}[x]$-модуля.

4.6. Представлением группы G в k-векторном пространстве V называется гомоморфизм группы

$$\varphi : G \to \mathrm{End}_k V.$$

Покажите, что задать представление группы означает задать структуру $k[G]$-модуля на V. Здесь $k[G]$ — кольцо финитных линейных комбинаций элементов группы с коэффициентами из поля k.

4.7. Руссмотрим K-алгебру A, $\varphi : K \to A, k \mapsto k1_A$, вложение констант и P — A-модуль. Докажите, действие

$$kp = \varphi(k)p$$

задает на B структуру K-модуля.

4.8. Докажите, что $\mathrm{End}_K P$ является ассоциативной унитарной K-алгеброй относительно композиции эндоморфизмов.

4.9. Пусть P, Q — K-модули, $f \in \mathrm{Hom}_K(P, Q)$. Докажите, что

(a) ядро $\mathrm{Ker}f = \{p \in P | f(p) = 0\}$ и образ $\mathrm{im}f = \{q \in Q | \exists p \in P : q = f(p)\}$;

(b) $P/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{im}f$.

4.10. Докажите, что для произвольного набора $p_1, \dots, p_n$ элементов K-модуля P существует единственный гомоморфизм $f : K^n \to P$, который на заданном наборе $e_1, \dots, e_n$ образующих свободного модуля K^n задан по правилу $f(e_i) = p_i$.

4.11. Любой K-модуль P с n образующими является фактором свободного модуля K^n.

4.12. Докажите основные свойства тензорных произведений K-модулей

(a) $P \otimes_K (Q \otimes_K R) \cong (P \otimes_K Q) \otimes_K R$,

(b) $K \otimes_K Q \cong Q \otimes_K K \cong Q$,

(c) $P \otimes_K (Q \oplus R) \cong (P \otimes_K Q) \oplus (P \otimes_K R)$,

(d) $(P \oplus Q) \otimes_K R \cong (P \otimes_K R) \oplus (Q \otimes_K R)$,

(e) $\mathrm{Hom}_K(P \otimes_K Q, R) \cong \mathrm{Hom}_K(P, \mathrm{Hom}_K(Q, R))$.

4.13. Докажите, что K-модуль P проективный тогда и только тогда, когда

(a) для любых K-модулей M, M' и произвольных гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_K(P, M')$ и эпиморфизма $h : M \to M'$ существует гомоморфизм $f' \in \mathrm{Hom}_K(P, M)$, такой что $h \circ f' = f$;

(b) для любых K-модулей M, M' точная последовательность

$$0 \to M' \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

расщепляется, т.е. существует гомоморфизм $j : M \to P$ такой что $\pi \circ j = id_M$;

(c) из точности последовательности

$$0 \to R \to S \to T \to 0$$

следует точность последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(P, R) \to \mathrm{Hom}_K(P, S) \to \mathrm{Hom}_K(P, T) \to 0.$$

4.14. Докажите, что любой свободный модуль является проективным, но обратное не верно.

4.15. Докажите, что $\mu_x \subset C^\infty(\mathbb{R})$ является проективным $C^\infty(\mathbb{R})$-модулем. Верно ли это для случая $\mathbb{R}^n$?

4.16. Докажите, что $\mu_x \subset C^\infty(\mathbb{S}^1)$ является проективным $C^\infty(\mathbb{S}^1)$-модулем.

4.17. Докажите, что функтор замены колец сохраняет проективность.

4.18. Тензорное произведение проективных модулей является проективным модулем.

4.19. Модуль $\mathrm{Hom}_A(P,Q)$ является проективным, если P и Q проективны. Он конечно порожден, если P и Q конечно порождены.

4.20. Проективный модуль конечного типа изоморфен прямому слагаемому некоторого свободного модуля конечного типа.

4.21. Предположим, что проективный модуль является подмодулем некоторго свободного модуля, является ли он его прямым слагаемым.

4.22. Над полем все модули свободны, и, значит, проективны.

4.23. Над $\mathbb{Z}$ все модули свободны.

4.24. Рассмотрим $\mathbb{Z}$ как модуль над $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с умножением $(a,b)\cdot x = ax$. Докажите, что этот модуль проективен, но не свободен.

4.25. Опишите проективные модули над кольцами вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и над кольцом матриц.

Решения и указания.

4.1. (a) $\mathrm{Hom}_K(K,P) \equiv P$. Это очевидно, $f \mapsto f(1)$ – изоморфизм.

(b) $P\otimes_K V^* \equiv \mathrm{Hom}(V,P)$. По определению $P\otimes_K V^*$ – это пространство $< P \times V^* >$, профакторизованное по подпространству S, порожденному векторами вида $(a+b,x)-(a,x)-(b,x)$; $(ka,x)-k(a,x)$; $(a,x+y)-(a,x)-(a,y)$; $(a,kx)-k(a,x)$. Рассмотрим $i :< P\times V^* >\to \mathrm{Hom}(V,P)$, такое, что

$$i((x,f)) = (v \mapsto f(v)x)$$

Заметим, что это гомоморфизм модулей, причем $S \subset \mathrm{Ker}\, i$. Если мы докажем, что $\mathrm{Ker}\, i \subset S$, то задача будет следовать из теоремы о гомоморфизме. Пусть

$$0 = i(k_1(x_1,f_1) + \dots k_n(x_n,f_n)) = (v \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v)x_i)$$

То есть, для любого v

$$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v)x_i = 0$$

Докажем по индукции по n, что тогда этот вектор лежит в S. База $n=1$ очевидна. Переход: $n \mapsto n+1$. Возьмем $v_0 \in V$ и напишем:

$$k_{n+1}f_{n+1}(v_0)x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v_0)x_i$$

То есть,

$$0 = f_{n+1}(v_0)(\sum_{i=1}^{n+1} k_i f_i(v)x_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i(f_{n+1}(v_0)f_i(v) - f_i(v_0)f_{n+1}(v))x_i,$$

прообраз которого тогда лежит в S по предположению индукции. Заметим, что мы можем взять любой индекс i вместо $n+1$ и любое v_0. То есть мы получили, что

$$f_i(v_0)(k_1(x_1,f_1) + \dots k_{n+1}(x_{n+1},f_{n+1}))$$

лежит в S для всех i и v_0. Если кольцо K – хорошее (евклидово или тело, например), то задача следует.

4.4. a) $C^\infty(M) = \mathbb{R} \oplus \mu_z$, $f = f(z) + (f - f(z))$.

b) Зафиксируем произвольную карту U, содержащую точку z, и докажем утверждение для $C^\infty(U)$. На случай всего многообразия результат продолжается стандартными аргументами.

В локальных координатах U зададим отображение $C^\infty(U) \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$f \mapsto (f(z), \frac{\partial f}{\partial x_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(z)).$$

Сюръективность этого отображения очевидна. По лемме Адамара ядро этого отображения состоит ровно из функций, в локальных координатах имеющие вид

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - z_i)(x_j - z_j) g_{ij}(x),$$

которые, очевидно, лежат в μ_z^2.

c) Рассмотрим две не пересекающиеся окрестности U_1, U_2 точек z_1, z_2 и разбиение единицы $h_1 + h_2 = 1$, $h_{1,2} = 0$ на $U_{1,2}$ и $h_{1,2} = 1$ на $U_{2,1}$. Рассмотрим отображение $\varphi : C^\infty(U) \to \mathbb{R}^2$, $f \mapsto (f(z_1), f(z_2))$. Сюръективность следует из существования разбиения единицы: $\varphi(ah_1+bh_2) = (a, b)$. Любая функция из ядра $f(z_1) = f(z_2) = 0$ является суммой $f = fh_1+fh_2$, где $fh_i \in \mu_{z_1}\mu_{z_2}$.

4.5. Рассмотрим произвольный линейный оператор $A : V \to V$. Тогда пусть $(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)v = a_0v+a_1Av+\ldots+a_nA^nv$, где $v \in V$. Таким образом, мы задали умножение векторов из V на многочлены из $\mathbb{R}[x]$.

4.6. Гомоморфизм $\varphi : G \to \mathrm{End}_k V$ продолжается до гомоморфизма $k[G] \to \mathrm{End}_k V$ очевидным образом: $\sum a_i g_i \mapsto \sum a_i \varphi(g_i)$. Обратно, гомоморфизм $k[G] \to \mathrm{End}_k V$ можно сузить на G. Поэтому задать представление группы G – это то же самое, что задать гомоморфизм $\psi : k[G] \to \mathrm{End}_k V$. Понятно, что задать такой гомоморфизм – это то же самое, что задать структуру $k[G]$–модуля на V. Действительно, если есть гомоморфизм ψ, то структура $k[G]$–модуля задается следующим образом: пусть $a \in k[G]$, $b \in V$, тогда $ab = \psi(a)(b)$. Обратно верно то же самое: если мы знаем, как устроено умножение на элемент из $k[G]$, то умножение на этот элемент является эндоморфизмом из $\mathrm{End}_k V$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм $k[G] \to \mathrm{End}_k V$, который каждому элементу сопоставляет умножение на него.

4.7. Проверим по определению. Во-первых, P по сложению как был абелевой группой, так и остался. Во-вторых,

$$k(a+b) = \phi(k)(a+b) = \phi(k)(a) + \phi(k)(b) = ka + kb$$
$$(k+s)a = \phi(k+s)a = (\phi(k)+\phi(s))a = \phi(k)a + \phi(s)a = ka + sa.$$

В-третьих,

$$k(sa) = \phi(k)(\phi(s)a) = (\phi(k)\phi(s))a = (ks)a$$
$$1a = \phi(1)a = 1_A a = a.$$

4.10. Пусть

$$x \in K^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Тогда по линейности $f(x)$ необходимо равен $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$, а такое отображение является гомоморфизмом, так как

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = f(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i) e_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) p_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) + f(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i)$$

и

$$f(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = f(f(\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i p_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \lambda f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$$

4.11. Если $e_1, \ldots, e_n$ образующие K-модуля P, то задан гомоморфизм $\varphi : K^n \to P$, $(k_1, \ldots, k_n) \mapsto k_1e_1 + \cdots + k_ne_n$. Тогда $P = Im\varphi$ и $P = K^n/Ker\varphi$.

4.13. Докажем, что из (a) следует (c). Пусть у нас есть точная последовательность.

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} S \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0.$$

Докажем точность последовательности

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,R) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(P,S) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}(P,T) \longrightarrow 0.$$

Во-первых, i_* инъективно, действительно, пусть $i_*(f) = i_*(g)$ то есть $i(f(x)) = i(g(x))$ для любого $x \in P$, тогда, так как i инъективно, $f(x) = g(x)$, то есть $f = g$.

Во-вторых, $\mathrm{Ker}\pi_* = \mathrm{Im} i_*$. Действительно, пусть $f \in \mathrm{Hom}(P,S)$, тогда $f \in \mathrm{Ker}\pi_*$ равносильно тому, что $\pi \circ f = 0$, равносильно тому, что $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Im}\, i$, в силу инъективности i это равносильно тому, что $f = i \circ g$ для некоторого $g \in \mathrm{Hom}(P,R)$, а это равносильно тому, что $f \in \mathrm{Im} i_*$.

Наконец, докажем, что π_* сюръективно. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(P,T)$, так как π сюръективно, то из (a) следует, что $f = \pi \circ g$ для некоторого

$g \in \mathrm{Hom}(P, S)$, а это как раз то, что нам нужно. Теперь докажем, что из (c) следует (b). Пусть дана точная последовательность

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0.$$

Тогда точна последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(P, M) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}(P, P) \longrightarrow 0.$$

Тогда отображение π_* сюръективно, значит, для некоторого элемента $j \in \mathrm{Hom}(P, M)$ выполнено $\pi_*(j) = \mathrm{id}$, то есть $\pi \circ j = \mathrm{id}$.

Теперь докажем, что из (b) следует, что P проективный. Пусть K^P – свободный модуль, образующие которого заиндексированы элементами P, и пусть $\pi : K^P \to P$ – гомоморфизм, который отправляет образующую в ее индекс, такой гомоморфизм будет сюръективен. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi \xrightarrow{i} K^P \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0.$$

Из (b) следует, что $\pi \circ j = \mathrm{id}$ для некоторого $j \in \mathrm{Hom}(P, K^P)$. Тогда любой элемент K^P представляется в виде $i(x)+i(y)$, действительно, пусть $z \in K^P$, тогда

$$z = (z - j(\pi(z))) + j(\pi(z)),$$

где $j(\pi(z)) \in \mathrm{Im} j$, а $z - j(\pi(z)) \in \mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\,\pi$, так как

$$\pi(z - j(\pi(z))) = \pi(z) - \pi(z) = 0.$$

Причем такое представление единственно, так как если

$$i(x_1) + i(y_1) = i(x_2) + i(y_2),$$

то

$$y_1 = \pi(j(y_1)) = \pi(i(x_1) + i(y_1)) = \pi(i(x_2) + i(y_2)) = \pi(j(y_2)) = y_tc,$$

а значит, $i(x_1) = i(x_2)$ и $x_1 = x_2$. Значит, $K^P \simeq \mathrm{Im}\, i \oplus \mathrm{Im}\, j \simeq \mathrm{Ker}\,\pi \oplus P$. То есть P проективный.

Наконец докажем, что из проективности P следует (a). Для начала разберем случай, когда $P = K^S$ – свободный, с базисом $\{x_s\}_{s\in S}$. Так как h сюръективно, мы может для каждого $s \in S$ выбрать $y_s \in M$, такой,

что $h(y_s) = f(x_s)$. Построим f' так, чтобы $f(x_s) = y_s$ для каждого $s \in S$, тогда f совпадает с $h \circ f'$ на базисных элементах, а значит, и на всех остальных.

Теперь пусть $P \oplus Q = K^S$, пусть $i : P \to K^S$ – вложение и $\pi : K^S \to P$ – проекция. По ранее доказанному найдется $\tilde{f} : K^S \to M$, такое, что $h \circ \tilde{f} = f \circ \pi$. Тогда можно взять $f' = \tilde{f} \circ i$. Действительно,

$$h \circ f' = h \circ \tilde{f} \circ i = f \circ \pi \circ i = f.$$

4.14. Очевидно, что свободный модуль проективен. Приведем пример проективного не свободного модуля. В качестве кольца K возьмем кольцо $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{R}$ – модуль над этим кольцом, где действие K определяется так:

$$(a, b)x = ax.$$

Это не свободный модуль, потому что любой элемент не линейно независим с нулем:

$$(0, b)x = 0.$$

С другой стороны, если взять его прямое произведение с модулем $\mathbb{R}$, на котором действие K определено как

$$(a, b)y = by,$$

мы получим свободный модуль, порожденный одним элементом $(1, 1)$ (то есть это K^1).

4.16. Отождествим $C^\infty(S^1)$ с гладкими 2π-периодическими функциями на $\mathbb{R}$. Докажем, что если f лежит в μ_x, то $f \,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2}$ лежит в $C^\infty(S^1)$. Проблемы могут возникнуть только в точках вида $2\pi k$. Достаточно понять гладкость в нуле. Выполнено равенство $f \,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} = \frac{f}{x} \frac{x}{\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}}$. По задаче 31 предыдущей главы, оба множителя – гладкие в окрестности нуля. Теперь докажем, что $\mu_x \oplus \mu_x$ изоморфно $C^\infty \oplus C^\infty$. Действительно, отправим (f_1, f_2) в $(f_1 \,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} + f_2, -f_1 + f_2 \,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2})$. Мы попали в $C^\infty \oplus C^\infty$. Отображение задается линейными комбинациями f_1, f_2, поэтому оно является гомоморфизмом $C^\infty(S^1)$-модулей. Теперь надо доказать биективность, то есть решить систему уравнений $f_1 \,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} + f_2 = h_1$, $-f_1 + f_2 \,\mathrm{ctg}\, \frac{x}{2} = h_2$. Во всех точках кроме нуля она решается и получается

$$f_1 = h_2 \sin^2 \frac{x}{2} + h_1 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$
$$f_2 = h_2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + h_1 \sin^2 \frac{x}{2}$$

Значит, во всех точках функции f_1, f_2, должны быть такими. Обратно: если подставить $f_1 = h_2 \sin^2 \frac{x}{2} + h_1 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $f_2 = h_2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + h_1 \sin^2 \frac{x}{2}$, то равенства $f_1 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + f_2 = h_1$, $-f_1 + f_2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = h_2$ будут выполнены во всех точках, кроме нуля, а, значит, и в нуле тоже.

4.17. См. предложение 11.53, [1], стр. 270.

4.18. В курсе алгебры есть теорема о том, что если каждый из модулей M свободен с базисом $\{e_{ij}\}_{j=1}$, то их тензорное произведение также обладает базисом, а значит, свободно. Причем это верно и для модулей бесконечного ранга.

Пусть теперь P и R – проективные модули. Значит, с некоторыми модулями Q и S, $P \oplus Q$ и $R \oplus S$ – свободные модули.

$(P \oplus Q) \otimes (R \oplus S)$ по теореме является свободным модулем. Перепишем:

$$(P \oplus Q) \otimes (R \oplus S) \cong (P \otimes (R \oplus S)) \oplus (Q \otimes (R \oplus S)) \cong$$

$$\cong (P \otimes R) \oplus ((P \otimes S) \oplus (Q \otimes (R \oplus S)))$$

Модуль, изоморфный свободному, – свободен. Прямая сумма модулей – модуль. Тензорное произведение модулей – модуль. Значит, $(P \otimes R)$ с каким-то другим модулем в прямой сумме дает свободный. Мы доказали, что тензорное произведение проективных — проективно.

4.19. См. предложение 11.36, [1], стр. 254.

4.20. Пусть A и B – свободные модули, A конечно порожден и P является прямым слагаемым B. Тогда есть эпиморфизмы $f : A \to P$ и $p : B \to P$, а также мономорфизм $i : P \to B$, такой, что $pi = \mathrm{id}_P$. Так как B проективен и f – эпиморфизм, существует такой $g : B \to A$, что $p = fg$. Но тогда

$$f(gi) = (fg)i = pi = \mathrm{id}_P,$$

то есть f расщепляется, а значит, $A = \operatorname{Ker} f \oplus P$, то есть P является прямым слагаемым конечно порожденного модуля.

4.21. $2\mathbb{Z}$ является свободным модулем над $\mathbb{Z}$, вложенным в $\mathbb{Z}$. Но он не является прямым слагаемым $\mathbb{Z}$: если $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + M$, то $M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и, значит, в M есть кручение. А в $\mathbb{Z}$ кручения нет.

4.22, 4.23. См. 11.16, [1], стр. 238.

4.24. Обозначим данный модуль $\mathbb{Z}_1$, а через $\mathbb{Z}_2$ обозначим модуль $\mathbb{Z}$ с умножением $(a, b)x = bx$, тогда модуль $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_2$ – это модуль $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с

умножением $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$, то есть само кольцо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (свободный модуль ранга 1). Таким образом, $\mathbb{Z}_1$ проективен. При этом элемент $(0, 1)$ действует на этом модуле тривиально. Он не может так действовать на свободном модуле, так как свободный модуль содержит K в качестве подмодуля, на K элемент $(0, 1)$ действует нетривиально.

5 Категории

Категория $\mathcal{C}$ — это класс *объектов* $Ob_{\mathcal{C}}$, такой, что

1) для каждой пары объектов $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$ задано множество *морфизмов* (или стрелок) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, причем каждому морфизму соответствует единственные A и B.

2) для пары морфизмов $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ определена композиция $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$.

3) для каждого объекта A задан тождественный морфизм id_A, лежащий в множестве $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$,

   и при этом выполняются две аксиомы:

   (a) операция композиции ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ и

   (b) тождественный морфизм действует тривиально: $f \circ id_A = id_B \circ f = f$ для $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$

Морфизм $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$, что $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$. Два объекта, между которыми существует изоморфизм, называются *изоморфными*. В частности, тождественный морфизм является изоморфизмом, поэтому любой объект изоморфен сам себе. Морфизмы, в которых начало и конец совпадают, называют *эндоморфизмами*. Множество эндоморфизмов $\mathrm{End}(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ является моноидом относительно операции композиции с единичным элементом id_A. Эндоморфизмы, которые одновременно являются изоморфизмами, называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы любого объекта образуют группу автоморфизмов $Aut(A)$ по композиции.

Универсальный объект. *Инициальный* (начальный, универсально отталкивающий) объект категории — это такой объект, из которого существует единственный морфизм в любой другой объект. Если инициальные объекты в категории существуют, то все они изоморфны. Двойственным образом определяется *терминальный* или *универсально притягивающий* объект — это такой объект, в который существует единственный морфизм из любого другого объекта.

Функторы — это отображения категорий, сохраняющие структуру. Точнее, *ковариантный* функтор F ставит в соответствие каждому объекту

категории $\mathcal{C}$ объект категории $\mathcal{D}$ и каждому морфизму $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ морфизм $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ так, что

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

и

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Контравариантный функтор "меняет стрелки".

Произведение объектов A и B — это объект $A \times B$ с морфизмами $p_1 : A \times B \to A$ и $p_2 : A \times B \to B$ такими, что для любого объекта C с морфизмами $f_1 : C \to A$ и $f_2 : C \to B$ существует единственный морфизм $g : C \to A \times B$ такой, что диаграмма коммутативна: $f_i = p_i \circ g$.

Копроизведение. Двойственным образом определяется *прямая сумма* или *копроизведение* $A + B$. Это объект с отображениями $i_1 : A \to A + B, i_2 : B \to A + B$, такими что для каждого объекта C существует единственный морфизм $g : A + B \to C$, для которого диаграмма коммутативна: $i_k = g \circ f_k$.

Преобразование функторов. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ две категории и $F, G : \mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_2$ — два ко(нтра)вариантных функтора. Предположим, что для каждого объета $O \in \mathcal{C}_1$ задан морфизм $T_O : F(O) \to G(O)$ во второй категории. Соответсвие $O \mapsto T_O$ называется *естественным преобразованием* функторов если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(O) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "T_O"'] & F(O') \arrow[d, "T_{O'}"] \\ G(O) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(O') \end{tikzcd}$$

для любых объектов O, O' и их морфизмов $\varphi \in \mathcal{M}or(O, O')$.

Представимый функтор. Рассмотрим категорию $\mathcal{M}od(K)$ K-модулей и их гомоморфизмов. Функтор F_K называется *представимым* в категории $\mathcal{M}od(K)$ если существует *представляющий* объект $\mathcal{R}_K$ этой категории, такой, что для любого K-модуля P выполнено

$$F_K(P) \cong \mathrm{Hom}_K(\mathcal{R}_K, P) \quad \text{или} \quad F_K(P) \cong \mathrm{Hom}_K(P, \mathcal{R}_K).$$

5.1. Покажите, что категориями являются

(a) $\mathcal{S}et$ — категория множеств. Объектами в этой категории являются множества, морфизмами — отображения множеств.

(b) $\mathcal{G}roup$ — категория групп. Объектами являются группы, морфизмами — отображения, сохраняющие групповую структуру.

(c) $\mathcal{V}ectK$ — категория векторных пространств над полем K. Морфизмы — линейные отображения.

(d) $\mathcal{M}odA$ — категория A-модулей над унитарной K-алгеброй A. Морфизмами в ней являются A-гомоморфизмы модулей.

(e) $\mathcal{T}op$ — категория топологических пространств, морфизмы — непрерывные отображения.

(f) $\mathcal{R}ing$ — кольца с единицей и кольцевые гомоморфизмы.

(g) $\mathcal{G}AlgK$ — геометрические унитарные K-алгебры и их гомоморфизмы.

(h) $\mathcal{A}lgK$ — унитарные K-алгебры и гомоморфизмы алгебр.

(i) $\mathcal{D}iff^\infty$ — гладкие $\mathbb{R}$-алгебры и гладкие отображения между ними.

(j) $\mathcal{G}Mod(C^\infty(M))$ — геометрические модули и гомоморфизмы.

5.2. Докажите, что все универсально отталкивающие объекты категории изоморфны.

5.3. Найдите универсально отталкивающие и притягивающем объекты в перечисленных категориях.

5.4. Докажите, что соответствие $\mathrm{Spec}_K : A \to \mathrm{Spec}_K A$ является контравариантным функтором из категории K-алгебр в категорию $\mathcal{T}op$.

5.5. Геометризация алгебры $\tau : A \to \tau(A)$ является абсолютным функтором категории унитарных коммутативных алгебр.

5.6. Прямое произведение в категории множеств — это декартово произведение, а копроизведение — прямая сумма множеств.

5.7. В категории колец прямое произведение — это сумма колец, а прямая сумма — тензорное произведение.

5.8. В категории векторных пространств оба произведения совпадают — это сумма пространств.

5.9. Соответствие $T_P : Q \to P \otimes_A Q$ является относительным ковариантным функтором в категории $\mathcal{M}od(A)$.

5.10. Соответствие $\mathrm{Hom}(P,\cdot) : Q \to \mathrm{Hom}(P,Q)$ является относительным ковариантным функтором в категории $\mathcal{M}od(A)$.

5.11. Соответствие $\mathrm{Hom}(\cdot,P) : Q \to \mathrm{Hom}(Q,P)$ является относительным контравариантным функтором в категории $\mathcal{M}od(A)$.

5.12. Соответствие $M \to C^\infty(M)$ является контравариантным функтором из категории $\mathcal{D}iff$ гладких многообразий в категорию $\mathbb{R}$-алгебр.

5.13. Опишите естественное преобразование функторов $R \mapsto \mathrm{Hom}_A(P \otimes_A Q, R)$ и $R \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Hom}_A(Q,R))$

5.14. Соответствие $D : P \to D(P)$ является контравариантным функтором категории $\mathcal{M}odA$.

5.15. Докажите представимость следующих функторов в категории K-модулей и найдите представляющие объекты

(a) id,

(b) $T_{V^*} : P \mapsto P \otimes_K V^*$.

5.16. Операция замены колец является функтором.

5.17. Каждое мультипликативное подмножество S кольца A задает функтор из категории A-модулей в категорию $S^{-1}A$-модулей.

Решения и указания.

5.2. Единственный морфизм из универсально отталкивающего объекта в себя с необходимостью является тождественным изоморфизмом.

5.3. Указание.

(a) Отталкивающий объект — пустое множество, притягивающий — любое одноэлементное множество.

(b) Группа из единственного элемента (единицы) — нулевой объект, т.е. и притягивающий и отталкивающий.

(c) Нулевой объект — нульмерное векторное пространство.

(d) Нулевой объект — 0-модуль.

(e) Отталкивающий объект — пустое множество, притягивающий — любое одноэлементное множество.

(f) Отталкивающий объект – кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, притягивающий — кольцо из одного элемента $(0 = 1)$.

(g) Нулевой объект — K.

(h) Нулевой объект — K.

(i) Нулевой объект — $\mathbb{R}$.

(j) Нулевой объект — 0-модуль.

5.4. Указание. Следует из задачи 2.6., так как необходимо доказать, что гомоморфизмам алгебры соответствуют непрерывные отображения спектров как топологических пространств с топологией Зарисского. Остальные требования на функтор и обращение стрелок очевидны.

5.5. **Лемма 1.** *Пусть A – K-алгебра, $\tau_A : A \to \tau(A)$ – ее геометризация, $f : A \to B$ – гомоморфизм K-алгебр, причем алгебра B геометрическая. Тогда существует единственный гомоморфизм $\tilde{f} : \tau(A) \to B$, такой, что $\tilde{f} \circ \tau_A = f$.*

Доказательство. Единственность следует из того, что τ_A сюръективен. Чтобы доказать существование, достаточно проверить, что $\operatorname{Ker} \tau_A \subseteq \operatorname{Ker} f$. Допустим, что $x \in \operatorname{Ker} \tau_A \setminus \operatorname{Ker} f$. Тогда $f(x) \neq 0$ и так как B геометрическая, то $g(f(x)) \neq 0$ для некоторого $g : B \to K$. То есть $x \notin \operatorname{Ker}(g \circ f)$, что противоречит тому, что $x \in \operatorname{Ker} \tau_A$.

Теперь определим действие τ на морфизмах. Пусть $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$. Тогда $\tau_B \circ f$ – морфизм из A в геометрическую алгебру. По лемме существует единственный $\tilde{f}$, такой, что $\tau_B \circ f = \tilde{f} \circ \tau_A = f$. Положим $\tau(f) = \tilde{f}$.

Для каждой алгебры A, применив лемму к тождественному морфизму, получаем, что $\tau(\mathrm{id})$ – единственный морфизм, такой, что $\tau_A \circ \mathrm{id} = \tau(\mathrm{id}) \circ \tau_A$. С другой стороны, id тоже обладает этим свойством, значит, $\tau(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$.

Теперь пусть даны $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тогда $\tau(g \circ f)$ – единственный морфизм, такой, что

$$\tau_C \circ g \circ f = \tau(g \circ f) \circ \tau(A)$$

С другой стороны, этим свойством обладает $\tau(g) \circ \tau(f)$. Действительно,

$$\tau_C \circ g \circ f = \tau(g) \circ \tau_B \circ f = \tau(g) \circ \tau(f) \circ \tau_A.$$

Значит, $\tau(g \circ f) = \tau(g) \circ \tau(f)$.

5.6. Рассмотрим сначала произведение. Из $A \times B$ есть стрелки p_1, p_2 в A, B, определяемые естественно: $p_1((a, b)) = a$, $p_2((a, b)) = b$. Пусть у нас есть множество C и два отображения ϕ_1, ϕ_2 в A, B. Заметим, что отображение $\phi(c) = ((\phi_1(c), \phi_2(c)))$ из C в $A \times B$ удовлетворяет условиям $p_1\phi = \phi_1$, $p_2\phi = \phi_2$.

Рассмотрим теперь произвольное ψ, такое, что $p_1\psi = \phi_1$, $p_2\psi = \phi_2$. Выберем произвольное c из C. Пусть $\psi(c) = (a, b)$. Тогда $a = p_1\psi(c) = \phi_1(c)$, $b = p_2\psi(c) = \phi_2(c)$. Мы видим, что для любого элемента c из C выполнено $\phi(c) = \psi(c)$. Единственность доказана.

Теперь копроизведение. Вложения A и B в $A \cup B$ берутся из определения последнего. Если есть отображения ϕ_1, ϕ_2 из A, B в C, то легко построить ϕ: если $a \in A \cup B$ лежит в A, то $\phi(a) = \phi_1(a)$, иначе $\phi(a) = \phi_2(a)$. Очевидно, что $\phi i_1 = \phi_1$ и $\phi i_2 = \phi_2$. Пусть выполнено $\psi i_1 = \phi_1$ и $\psi i_2 = \phi_2$. Тогда $\psi(a) = \psi i_1(a) = \phi_1(a)$ и $\psi(b) = \psi i_2(b) = \phi_2(b)$ для любых $a \in A$, $b \in B$. Опять получаем, что $\psi = \phi$.

5.7. 1) Пусть A и B – кольца. Есть стандартные проекции

$$\begin{aligned} p_A : A \oplus B &\to A \\ (a, b) &\mapsto a \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p_B : A \oplus B &\to B \\ (a, b) &\mapsto b \end{aligned}$$

Теперь пусть даны $f_A : C \to A$ и $f_B : C \to B$. Нужно доказать, что существует единственное $g : C \to A \oplus B$, такое, что $p_A \circ g = f_A$ и $p_B \circ g = f_B$, то есть для любого $x \in C$

$$g(x) = (f(x), g(x)).$$

Так как g обязано быть заданным такой формулой, оно единственно, остается проверить, что эта формула задает гомоморфизм колец. Пусть $x, y \in C$, а $*$ – это сложение, умножение или операция, всегда выдающая 0 или 1. Тогда, так как все операции в прямой сумме колец покомпонентны,

$$g(x * y) = (f(x * y), g(x * y)) = (f(x) * f(y), g(x) * g(y)) =$$

$$= (f(x), g(x)) * (f(y), g(y)).$$

Что и требовалось.

2) Пусть A и B – кольца. Положим

$$\begin{gathered} i_A : A \to A \otimes B \\ a \mapsto a \otimes 1 \end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered} i_B : B \to A \otimes B \\ b \mapsto 1 \otimes b. \end{gathered}$$

Пусть даны $f_A : A \to C$ и $f_B : B \to C$. Если g – такое, какое нам нужно, то

$$g(a \otimes b) = g(i_A(a) i_B(b)) = g(i_A(a)) g(i_B(b)) = f_A(a) f_B(b),$$

то есть любые два таких гомоморфизма совпадают на разложимых тензорах, а значит и на всех. Отоборажение

$$\begin{gathered} \tilde{g} : A \times B \to C \\ (a, b) \mapsto f_A(a) f_B(b). \end{gathered}$$

является $\mathbb{Z}$-билинейным, поэтому корректно определено отображение абелевых групп.

$$\begin{gathered} g : A \otimes B \to C \\ a \otimes b \mapsto f_A(a) f_B(b). \end{gathered}$$

Тогда

$$g(i_A(a)) = g(a \otimes 1) = f_A(a) f_B(1) = f_A(a),$$

то же для B. Остается проверить, что оно сохраняет умножение, что достаточно проверять на разложимых тензорах.

$$g((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)) = g(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) = f_A(a_1 a_2) f_B(b_1 b_2) =$$

$$= (f_A(a_1) f_B(b_1))(f_A(a_2) f_B(b_2)) = g(a_1 \otimes a_2) g(b_1 \otimes b_2).$$

5.8. Достаточно доказать, что векторное пространство $A \oplus B$ выступающее вместе с проекциями $pr_1 : A \oplus B \to A$ и $pr_2 : A \oplus B \to B$ в роли

произведения и в роли копроизведения с вложениями $i_1 : A \to A \oplus B$ и $i_2 : B \to A \oplus B$, для любого векторного пространства C гарантируют единственность накрывающего отображения для любой пары линейных отображений f_i из или в C соответственно.

Произведение. Рассмотрим образ элемента под действием двух накрывающих. Если эти два элемента в прямой сумме различны, если хотябы одно слагаемое в разложении элементов различно, т.е. различны их проекции, что невозможно в силу композиции.

Копроизведение. Каждый элемент прямой суммы представляется единственным образом как сумма элементов вида $i_1(v_1)+i_2(v_2)$. В силу линейности накрывающего отображения F и композиции его значение на таком элементе однозначно определено $F(i_1(v_1))+F(i_2(v_2)) = f_1(v_1)+f_2(v_2)$.

5.9. Соответствие $T_P : Q \to P \otimes_A Q$ уже задает то, во что должны переходить объекты $Mod(A)$. Мы хотим куда-то перевести $f : Q \to S$, где $Q, S \in Mod(A)$. Пусть $T_P(f) = 1 \otimes f : p \otimes q \to p \otimes f(q)$. Проверим:

$$\begin{gathered} T_P(id_Q) = 1 \otimes id_Q : p \otimes q \to p \otimes q \Rightarrow T_P(id_Q) = id_{P \otimes_A Q} \\ T_P(g \circ f) = 1 \otimes (g \circ f) : p \otimes q \to p \otimes (g \circ f)(q) = (1 \otimes g)(p \otimes f(q)) \Rightarrow \\ T_P(g \circ f) = (1 \otimes g) \circ (1 \otimes f) = T_P(g) \circ T_P(f). \end{gathered}$$

5.10. Во-первых, определим, как функтор $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ действует на морфизмах. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(Q, R)$. Тогда скажем, что

$$\mathrm{Hom}(P, \cdot)(f) = (g \mapsto f \circ g),$$

где $g \in \mathrm{Hom}(P, Q) = \mathrm{Hom}(P, \cdot)(Q)$. Тогда

$$\mathrm{Hom}(P, \cdot)(\mathrm{id}_Q) = (g \mapsto g) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(P,Q)}.$$

Также

$$\mathrm{Hom}(P, \cdot)(g \circ f) = (h \mapsto g \circ f \circ h) = (h \mapsto g \circ h) \circ (h \mapsto f \circ h) =$$

$$= \mathrm{Hom}(P, \cdot)(g) \circ \mathrm{Hom}(P, \cdot)(f).$$

То есть это – ковариантный функтор.

5.11. Это будет функтор в категорию $Sets$. Нужно задать отображение морфизмов. Морфизму $h : Q_1 \to Q_2$ нужно сопоставить некоторый морфизм $\mathrm{Hom}(Q_2, P) \to \mathrm{Hom}(Q_1, P)$. Действительно, сопоставим морфизму h отображение, которое $f \in \mathrm{Hom}(Q_2, P)$ переводит в $f \circ h \in \mathrm{Hom}(Q_1, P)$.

5.12. Пусть есть морфизм $f : M \to N$ и пусть наш функтор переводит f в f^*. Двойственное отображение $h : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ гладкую функцию $h \in C^\infty(N)$ переводит в $h \circ f$. Тогда композицию $f \circ g$ наш функтор переведет в $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, что и требуется. Понятно, что тождественное отображение функтор переводит в тождественное.

5.13. Итак, нам нужно придумать отображение

$$\varphi_R : \mathrm{Hom}_K(P \otimes_K Q, R) \to \mathrm{Hom}_K(P, \mathrm{Hom}_K(Q, R))$$

Рассмотрим элемент $f \in \mathrm{Hom}_K(P \otimes_K Q, R)$ – это (по универсальному свойству тензорного произведения) билинейное отображение из $P \times Q$ в R. Нам нужно сопоставить ему линейное отображение из P в $\mathrm{Hom}_K(Q, R)$. Элементу $p \in P$ сопоставим $f(p, \_)$. Мы попадем в $\mathrm{Hom}_K(Q, R)$ из-за линейности f по второму аргументу, а $f(\_, \_) \in \mathrm{Hom}_K(P, \mathrm{Hom}_K(Q, R))$ из-за линейности f по первому аргументу. Само же отображение φ_R является линейным, так как $(f+g)(\_{1}, \_{2}) = f(\_{1})+g(\_{2})$ и $(\lambda f)(\_{1}, \_{2}) = \lambda \cdot f(\_{1}, \_{2})$. Осталось проверить, что φ – естественное преобразование. В самом деле, пусть $\alpha : R_1 \to R_2$ – гомоморфизм. Нужно доказать, что $\alpha \circ f(\_{1}, \_{2}) = (p \mapsto \alpha f(p, \_))$, но это очевидно.

5.14. Сначала докажем, что $D(P)$ – это подмодуль в $\mathrm{Hom}_A(A, P)$. В самом деле,

$$(\partial_1 + \partial_2)(ab) = \partial_1(ab) + \partial_2(ab) =$$

$$= \partial_1(a)b + \partial_1(b)a + \partial_2(a)b + \partial_2(b)a = (\partial_1 + \partial_2)(a)b + (\partial_1 + \partial_2)(b)a$$

и

$$(\lambda\partial_1)(ab) = \lambda\partial_1(ab) = \lambda(\partial_1(a)b + \partial_1(b)a) = (\lambda\partial_1)(a)b + (\lambda\partial_2)(b)a$$

На морфизмах D действует так же, как и $\mathrm{Hom}(A, \_)$, поэтому проверки про сохранение тождественного и композиции делать не нужно, нужно только проверить, что если $f : P \to Q$ – гомоморфизм модулей, то для $f \circ \partial$ выполняется тождество Лейбница:

$$(f \circ \partial)(ab) = f(\partial(ab)) = f(\partial(a)b + \partial(b)a) = (f \circ d)(a)b + (f \circ d)(b)a$$

5.15. Эта задача напрямую следует из задачи 4.1.

5.16. Пусть дан гомоморфизм колец $\phi : A \to B$. Тогда любой B-модуль P является A-модулем с той же операцией сложения и операцией

умножения на A, определенной так: $a \cdot p = \phi(a)p$. Получается, что мы уже научились действовать на объектах: сопоставлять B-модулю P его же как A-модуль.

Пусть теперь есть гомоморфизм модулей $f : P \to Q$. Сопоставим ему его же, только как отображение между A-модулем P и A-модулем Q. С таким определением то, что тождественный переходит в тождественный, а композиция – в композицию, – очевидно. Остается проверить, что f является гомоморфизмом A-модулей. Равенство $f(x + y) = f(x) + f(y)$ продолжает выполняться. И $a \cdot f(x) = \phi(a)f(x) = f(\phi(a)x) = f(a \cdot x)$.

5.17. Пусть B и C A-модули. Функтором мы будем получать из этих объектов $S^{-1}B$ и $S^{-1}C$ соответственно (с действием из главы 3).

Из $f : B \to C$ получим $F(f) : S^{-1}B \to S^{-1}C$, так что $[\frac{b}{s}] \to [\frac{f(b)}{s}]$. Проверка:

$$F(id_B)\left(\left[\frac{b}{s}\right]\right) = \left[\frac{b}{s}\right] \Rightarrow F(id_B) = id_{S^{-1}B}$$

$$F(g \circ f)\left(\left[\frac{b}{s}\right]\right) = \left[\frac{g \circ f(b)}{s}\right] = F(g)\left(\left[\frac{f(b)}{s}\right]\right) \Rightarrow F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

6 Квазирасслоения

Квазирасслоение — это вложение алгебр $i : A \to B$ (все алгебры предполагаются геометрическими). Многообразие $|A|$ называется *базой квазирасслоения*, многообразие $|B|$ — *тотальным пространством*, отображение $|i| : |B| \to |A|$ — *проекцией*. *Слоем* над точкой $h \in |A|$ называется фактор алгебра $B/ < i(\mu_h) >$ по идеалу порожденному множеством $i(\mu_h)$, где $\mu_h = \{a \in A | h(a) = 0\}$ — максимальный идеал точки. Геометрически, слоем является множество $i^{-1}(h) \subset |B|$.

Морфизм квазирасслоения $i_1 : A \to B_1$ в квазирасслоение $i_2 : A \to B_2$ — это гомоморфизм алгебр $\varphi : B_2 \to B_1$, такой, что $i_1 = \varphi(i_2)$. Если φ изоморфизм, то квазирасслоения называются *эквивалентными*. Если φ сюрьективен, то псевдорасслоение i_1 называется *подрасслоением* квазирасслоения i_1.

Тривиальными квазирасслоениями с базой A и слоем C называются вложение $A \hookrightarrow \overline{A \otimes C}$, $a \mapsto a \otimes 1$, и ему эквивалентные квазирасслоения.

Расслоение. Пусть A, B, F — гладкие алгебры. Инъективный гомоморфизм $i : A \to B$ называется *расслоением* $|B|$ над $|A|$ со слоем $|F|$, если каждая точка $z \in |A|$ обладает открытой окрестностью $U_z \subset |A|$, над которой локализация гомоморфизма $S_z^{-1}(i) : S_z^{-1}A \to S_z^{-1}B$ эквивалентна тривиальному квазирасслоению $S_z^{-1}A \to \overline{S_z^{-1}A \otimes F}$, где $S_z \subset A$ — мультипликативная система элементов алгебры A значения которых отличны от нуля во всех точках окрестности U_z. *Сечением* расслоения называется гомоморфизм $\sigma : B \to A$, такой, что $\sigma \circ i = \mathrm{id}_A$. *Подрасслоением расслоения* будем называть его подрасслоение как квазирасслоения, которое является расслоением. Расслоение с нульмерными слоями называется *накрытием*. Многообразие называется *параллелизуемым*, если его касательное расслоение тривиально.

Суммой Уитни(*прямой суммой)* двух расслоений $i : A \to B$ и $j : A \to C$ называется гомоморфизм

$$i \oplus j : A \to \overline{B \otimes_A C},$$

переводящий a в $i(a) \oplus j(a)$.

Индуцированное расслоение. Пусть $i : A \to B$ — расслоение, $\varphi : A \to A_1$ — гомоморфизм алгебр. Естественное отображение алгебр $\varphi^*(i) : A_1 \to \overline{A_1 \otimes_A B}$, где структура A-модулей на A_1 и B вводится посредством гомоморфизмов φ и i, называется *индуцированным расслоением.*

При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & A_1 \arrow[d, "\varphi^*(i)"] \\
B \arrow[r] & \overline{A_1 \otimes_A B}
\end{tikzcd}$$

Ограничением расслоения π на подмногообразие $i : N \hookrightarrow M$ называется индуцированное расслоение $i^*(\pi)$.

Тавтологическое расслоение. Пусть $G_{n,k}$ — многообразие k-мерных линейных подпространств n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ и $E_{n,k}$ есть множество всех пар (x, L), где $x \in L \in G_{n,k}$, снабженное структурой подмногообразия в $\mathbb{R}^n \times G_{n,k}$. Соответствие $(x, L) \mapsto L$ задает расслоение

$$\Theta_{n,k} : E_{n,k} \to G_{n,k},$$

называемое *тавтологическим.*

6.1. Докажите, что имеет место естественная биекция $|i|^{-1}(h) = |B/ < i(\mu_h) > |$.

6.2. Докажите, что двойственное отображение к морфизму квазирасслоений переводит слои в слои над любой точкой.

6.3. Совокупность всех квазирасслоений над $C^\infty(M)$ и морфизмов между ними составляют категорию, обозначаемую QB_M.

6.4. Дайте геометрическое описание расслоения используя карты на многообразии.

6.5. Докажите, что сумма Уитни расслоений является расслоением. Дайте геометрическое описание суммы Уитни.

6.6. Докажите, что сумма Уитни расслоений i и j равна $i \oplus j = j^*(i) \circ j = i^*(j) \circ i$.

6.7. Для следующих вложений алгебр $i : A \to B$ дайте геометрическое описание квазирасслоения и опишите слои

   (a) $B = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | g(x+1, y) = g(x, y+1) = g(x, y)\}$, A — ее подалгебра функций, не зависящих от переменной y;

(b) $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f(x+1) = f(x)\}$,
$B = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | g(x+1, y) = -g(x, y+1) = g(x, y)\}$,
$i(f)(x, y) = f(x)$;

(c) $A = B = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f(x+1) = f(x)\}$, $i(f)(x) = f(2x)$.

(d) $B = C^\infty(\mathbb{R})$,
$A = \{f \in B | f(1/x)$и все производные сходятся в $0\}$.

(e) $i : C^\infty(M) \to C^\infty(TM)$.

6.8. Какие квазирасслоения из предыдущей задачи являются расслоениями.

6.9. По геометрическому описанию расслоения опишите вложение гладких алгебр, убедитесь, что это расслоения и опишите пространство сечений

(a) Отображение $t \mapsto e^{it}$ задает расслоение прямой над окружностью $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

(b) Отображение $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$, которое ставит в соответствие каждой точке $x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ прямую проходящую через эту точку и начало координат.

(c) $M = [0,1] \times \mathbb{R}/\{(0,y),(1,-y)\}$, $\mathbb{S}^1 = [0,1]/\{0,1\}$, $\pi : M \to \mathbb{S}^1$, $\pi(x,y) = x$.

(d) $T_1\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 | |x| = |y| = 1, x \perp y\} \to \mathbb{S}^2$. Докажите, что $T_1\mathbb{S}^2 \cong SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$.

(e) Расслоение Хопфа $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{S}^2$.

(f) Касательное и кокасательное расслоения.

(g) *Расслоение l-джетов функции* $\pi_{J^l} : J^l M \to M$. Над каждой картой (U, x) многообразия M построим тривиализующее отображение $U \times \mathbb{R}^N \to \pi_{J^l}^{-1} = J^l(U)$, где N — число различных производных порядка $\leqslant l$, согласно правилу

$$(z, \mathbf{p}^l) \mapsto [f_{\mathbf{p}^l}]_z^l \in J_z^l M \subset J^l U,$$

где $f_{\mathbf{p}^l} = \sum_{\sigma \leqslant l} \frac{1}{\sigma!} p_\sigma (x-z)^\sigma$ и $\mathbf{p}^l = (p_\sigma)$ — арифметический вектор, компоненты которого суть символы p_σ, $|\sigma| \leqslant l$, размещенные в лексикографическом порядке индексирующих их мультииндексов.

6.10. Докажите, что тавтологическое расслоение $\Theta_{n,1}$ эквивалентно проекции $\pi : \mathbb{R}P^n \backslash L_0 \to \mathbb{R}P^{n-1}$, где L_0 есть $(n+1)$-я ось координат в $\mathbb{R}^{n+1}$.

6.11. Докажите, что $\Theta_{2,1}$ — расслоение листа Мёбиуса над окружностью.

6.12. Приведите примеры параллелезуемых и непапараллелезуемых многообразий. Докажите, что группы Ли параллелезуемы.

6.13. Дайте описание в терминах локальных коодинат сечений тривиального расслоения, касательного и кокасательного расслоений, расслоений l-джетов, тавтологического расслоения.

6.14. Докажите, что тавтологическое расслоение является подрасслоением тривиального расслоения $\mathbb{R}^n \times G_{n,k} \to G_{n,k}$.

6.15. Расслоение единичных касательных векторов к сфере не имеет собственных подрасслоений. В свою очередь, оно является подрасслоением касательного расслоения над сферой.

6.16. Покажите, что относительное векторное поле вдоль отображения многообразий $\varphi : N \to M$ может быть интерпретировано как сечение индуцированного расслоения $\varphi^*(\pi_{TM})$.

6.17. Пусть $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f_n(z) = z^n \in \mathbb{C}$, — n-кратное накрытие окружности. Тогда

$$f_n^*(\mu) = \begin{cases} \mu, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \mathbb{I}_{\mathbb{S}^1}, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

где μ — расслоение листа Мёбиуса над окружностью, $\mathbb{I}_{\mathbb{S}^1}$ — одномерное тривиальное расслоение над окружностью.

6.18. Обозначим α и β тривиальное двулистное накрытие окружности и накрытие f_2. Докажите, что $\alpha \oplus \beta \cong \beta \oplus \beta$.

6.19. Докажите, что $\mu \oplus \mu$ изоморфно тривиальному двумерному расслоению над окружностью.

6.20. Расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно может быть получено индуцированием из расслоения над точкой.

6.21. *Отображение Гаусса.* Докажите, что все касательные расслоения индуцируются из тавтологического расслоения.

6.22. Докажите, что расслоение 1-джетов является прямой суммой Уитни одномерного тривиального расслоения над многообразием и кокасательного расслоения.

Решения и указания.

6.1. Указание: $|i|^{-1}(h) = \{\Delta \in Hom_K(B, K) | \Delta \circ i = h\}$. Если $a \in \mu_h$, то $\Delta(i(a)) = h(a) = 0$ и Δ факторизуется до отображения $\tilde{\Delta} : B/ < i(\mu_h >) \to K$. Остается доказать инъективность и сюръективность такого отображения.

6.2. $|\varphi|(|i_1|^{-1}(a)) \subset |i_2|^{-1}(a)$ в силу коммутативности диаграммы задающей морфизм расслоений.

6.4. Гладкое отобраение многообразий $\pi : E \to M$ является расслоением, если у каждой точки существует окрестность U для которой определен диффеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, где F — некоторое многообразие (слой), такой, что $\pi = pr|_U \circ \varphi$.

6.5. Указание. Утверждение следует из изоморфизма

$$B \otimes_A C/ < (i \otimes j)(\mu_h) >= B/ < i(\mu_h) > \otimes_A C/ < j(\mu_h) > .$$

Слой суммы Уитни над каждой точкой является прямым произведением слоев двух данных расслоений.

6.6. Указание. Утверждение следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j^*(i)"] \\ B \arrow[r, "i^*(j)"] & \overline{C \otimes_A B} \end{tikzcd}$$

6.7. Указание.
(a) Расслоение тора над окружностью.
Пусть $A = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f(x+1) = f(x)\}$, $A' = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f(y+1) = f(y)\}$. Утверждение следует из равенства $A \otimes A' \cong B$.
(b) Бутылка Клейна.
(c) Двулистное накрытие окружности.

(d) Однолистное накрытие прямой над окружностью (над одной точкой окружности слой пуст, над остальными — одна точка).
$A \cong C^\infty(\mathbb{S}^1)$, $|i| : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, $|i| : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.
(e) Касательное расслоение.

6.8. (a), (b), (c), (e).

6.9. (a) Отображение $\varphi : C^\infty(\mathbb{S}^1) \to C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $f(e^{it}) \to f(t)$.

6.10. Дадим геометрическое описание эквивалентности расслоений. Рассмотрим n-мерную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зафиксируем гиперплоскость, которая вырезает в этой сфере экваториальную $(n-1)$-мерную сферу. Перпендикуляр к этой гиперплоскости вырезает два полюса объемлющей сферы, а каждая точка экваториальной сферы однозначно определяет окружность через эти полюсы и саму точку. После факторизации большой сферы без двух полюсов по диаметрально противоположным точкам сфера перейдет в n-мерное пространство без точки, экваториальная сфера станет $(n-1)$-мерным проективным пространством, над каждой точкой которой будет висеть проективная прямая без точки, т.е. просто прямая. После отождествления последней с прямой, соответствующей точке экваториального проективного пространства над которой она взята, мы получим эквивалентное описание заданной в задаче проекции в качестве тавтологического расслоения. Замечание: данному описанию можно придать явное формульное выражение и убедиться в гладкости соответствующих преобразований.

6.11. Многообразие пучка прямых на плоскости $G_{2,1}$ естественным образом отождествим с окружностью (проективной прямой). Многообразие $E_{2,1}$, рассматриваемое как подмногообразие $\mathbb{R} \times G_{2,1}$, оснастим в каждой точке окружности единичным направляющим вектором прямой, соответствующей данной точке окружности. При полном обходе по окружности, оснащающий вектор перейдет в противоположный вектор на той же самой прямой. Тем самым, одномерное расслоение не является ориентируемым, т.е. является расслоением листа Мебиуса.

6.12. Сфера не является параллелезуемым многообразием. На группе Ли любое нетривиальное левоинвариантное поле параллелезует ее. Сущестование левоинвариантных полей докзывается прямым построением - ненулевой касательный вектор к единице группы переносится в каждый элемент группы диффеоморфизмом умножения на этот элемент.

6.13. Указание. Все расслоения локально тривиальны, и потому локально все сечения описываются как сечения тривиального расслоения. А именно, локальные слоевые координаты являются функциями локальных координат базы.

6.14. Вложение подмногообразия $E_{n,k}$ в многообразие $\mathbb{R}^n \times G_{n,k}$ задает подрасслоение тривиального расслоения, являющееся тавтологическим.

6.15. Следует из 6.12.

6.17. Пусть A — алгебра гладких функций на окружности $[0,1]/(\{0,1\})$, B — алгебра гладких функций на $M = [0,1] \times \mathbb{R}/\{(0,y),(1,-y)\}$, A_1 — алгебра гладких функций на окружности $[0,n]/(\{0,n\})$. Отображение f_n^* переводит $f \in A$ в $g \in A_1$, $g(x) = f(xmod1)$ и задает на A_1 структуру A-алгебры.

Рассмотрим $N = [0,n] \times \mathbb{R}/\{(0,y),(1,-y)\}$. Пусть D — алгебра гладких функций на N. Построим отображение $h : A_1 \otimes_A B \to D$. Элемент $a_1 \otimes b$ переведем в $d : N \to \mathbb{R}$, где $d(x,y) = a_1(x)b(xmod1,y)$. Легко проверяеься, что это отображение корректно определено и $D = A_1 \bar{\otimes}_a B$. Таким образом $f_n^*(\mu)$ изоморфно расслоению N над окружностью $[0,n]/(\{0,n\})$, что и требовалось доказать.

6.18. Сумма с тривиальным двулистным накрытием, очевидно, просто удваивает слои второго накрытия, т.е. возникает 4-листное накрытие окружности из двух компонент связности, каждая из которых является f_2.

Представим f_2 как край листа Мебиуса, расслоенного над окружностью, тогда сумма соответствует сумме Уитни двух таких расслоений (см. решение задачи 6.19). Концы каждого из двух ортогональных отрезок, реализующих сумму, описывают два несвязных двулистных накрытия.

6.19. Пространство этого двумерного расслоения диффеоморфно открытому полноторию. Выберем в слое над каждой точкой пару перпендикулярных отрезков, гладко зависящих от точки, так, что при полном обходе окружности каждый отрезок поворачивается на 180 градусов. Эти отрезки опишут два требуемых листа Мебиуса.

6.20. В случае $A = \mathbb{R}$ тотальное пространство расслоения $A_1 \otimes_{\mathbb{R}} B \cong A_1 \times B$, т.е. тривиально, и наоборот.

6.21. Указание. Пусть $\varphi : M \to \mathbb{R}^{2n}$ — погружение n-мерного многообразия M, $r_a : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — отображение сдвига на вектор a. Рассмотрим

отображение Гаусса $g : M \to G_{2n,n}$, сопоставляющего каждой точке образ касательного пространства при отображении

$$d_z(r_{\varphi(z)\circ\varphi}) : T_z M \to T_O \mathbb{R}^{2n}.$$

Отображение Гаусса накрывается морфизмом расслоений $\gamma : \pi_{TM} \to \Theta_{2n,n}$

$$\gamma(\xi) = (d_z(r_{\varphi(z)\circ\varphi})(\xi), g(z)) \in G_{2n,n}.$$

6.22. Указание. По определению $J_z^1 M = C^\infty(M)/\mu_z^2$. Разложение $C^\infty(M) = \mathbb{R} \oplus \mu_z$ порождает прямое разложение $J_z^1 = \mathbb{R} \oplus \mu_z/\mu_z^2 = \mathbb{R} \oplus T_z^* M$.

7 Псевдорасслоения

Слой. Всякому $h \in |A|$ сопоставляется идеал $\mu_h = \operatorname{Ker} h \subset A$. *Слоем* P_h A-модуля P над точкой $h \in |A|$ называется фактормодуль $P/\mu_h P$. Значением p_h элемента $p \in P$ в точке h называется образ p при гомоморфизме факторизации

$$P \to P_h.$$

A-модуль $P_h = P/\mu_h P$ можно расматривать как модуль над $A/\mu_h \cong K$ или как K-модуль. В случае $A = C^\infty(M)$, $h = h_z$ для $z \in M$ будем использовать обозначения P_z и p_z.

Псевдорасслоение. Со всяким A-модулем P над K-алгеброй A свяжем геометрический объект

$$|P| = \bigcup_{h \in |A|} P_h$$

и естественную проекцию на $|A|$

$$|P| \supset P_h \ni p_h \overset{\pi_P}{\mapsto} h \in |A|.$$

Тройка $(|P|, \pi_P, |A|)$ называется *псевдорасслоением.*

Модуль сечений. Отображение

$$s_p : |A| \to |P|; h \mapsto p_h$$

называется *сечением* псевдорасслоения. Множество $\Gamma(P)$ всех сечений псевдорасслоения π_P есть A-модуль относительно операций

$$s_{p_1} + s_{p_2} = s_{p_1+p_2},$$

$$as_p = s_{ap}; \quad a \in A, p_i \in P.$$

Геометрический модуль. A-модуль P называется *геометрическим*, если $\bigcap_{h \in |A|} \mu_h P = 0$. Элемент $p \in P$ называется *ненаблюдаемым*, если $p_h = 0$ для любого $h \in |A|$. *Носителем* модуля P называется множество

$$\operatorname{supp} P = \operatorname{Cl}\{h \in |A| | P_h \neq 0\} \subset |A|,$$

где замыкание берется в топологии Зарисского.

Топология псевдорасслоения. Пространство $S(P^*)$, где модуль $P^* = \operatorname{Hom}_A(P, A)$ можно расматривать как пространство функций на $|P|$ по правилу

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)(p_h) = f_1(p_h) \cdot \dots \cdot f_k(p_h) \in K,$$

где $f_i \in P^*$, $f_i(p_h) = f_i(p) \operatorname{mod} \mu_h$. Возникающая алгебра $\mathcal{F}(|P|)$ функций такого вида порождает топологию Зарисского на $|P|$. Непрерывное отображение $s : |A| \to |P|$ называется *непрерывным сечением* псевдорасслоения π_P, если $\pi_P \circ s = \mathrm{id}_{|A|}$. Множества всех непрерывных сечений и вообще всех сечений (т.е. отображений s, для которых $\pi_P \circ s = \mathrm{id}_{|A|}$) обозначим $\Gamma_a(P)$ и $\Gamma_0(P)$.

Гладкое сечение. В случае $A = C^\infty(M)$ рассмотрим гладкую алгебру $\overline{\mathcal{F}(|P|)}$, которая также порождает топологию Зарисского на $|P|$. Пространство непрерывных сечений в этой топологии будем обозначать $\Gamma_c(P)$. Сечения $\Gamma(P)$ в этом случае называются *гладкими* сечениями.

Векторное расслоение. Псевдорасслоение $\pi = (|P|, \pi_P, M)$ называется *векторным расслоением над* M, если P является конечнопорожденным проективным $C^\infty(M)$-модулем и слои, как линейные пространства над $\mathbb{R}$, имеют одинаковую размерность над каждой точкой. Множество гладких сечений для векторного расслоения будем обозначать $\Gamma(\pi) = \Gamma(P)$, слои P_z над точкой z— π_z. Векторное расслоение π называется *тривиальным*, если модуль $\Gamma(\pi)$ свободен. Прямое слагаемое векторного расслоения называется *подрасслоением.* Прямая сумма модулей двух векторных расслоений над одним многообразием задает векторное расслонение и называется *суммой Уитни* и обозначается $\pi \oplus \xi$. *Тензорным произведением* $\pi \otimes \xi$ двух векторных расслоений называется векторное расслоение, заданное тензорным произведением их модулей $P \otimes_{C^\infty(M)} Q \cong \Gamma(\pi) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\xi)$. *Двойственным* векторным расслоением π_P^* называется расслоение заданное сопряженным модулем $P^* = \operatorname{Hom}_{C^\infty(M)}(P, C^\infty(M))$.

7.1. Докажите, что геометричность A-модуля P равносильна тому, что $P \cong \Gamma(P)$.

7.2. Отображение геометризации $\Gamma : P \Rightarrow \Gamma(P)$, действующий из категории модулей над $C^\infty(M)$, M — гладкое многообразие, в категорию геометрических модулей, является функтором.

7.3. Докажите, что если P, Q — геометрические $C^\infty(M)$-модули, где M — гладкое многообразие, то геометрическими будут модули

(a) $P \otimes_{C^\infty(M)} Q$,

(b) $\operatorname{Hom}_{C^\infty(M)}(P, Q)$

7.4. Докажите, что $\Gamma(P) \subset \Gamma_c(P) \subset \Gamma_a(P) \subset \Gamma_0(P)$.

7.5. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$, $P = D(M)$, имеет место равенство $D(M)_z = T_zM$. Здесь $D(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на многообразии, T_zM — касательное пространство в точке z.

7.6. Зададим на T_zM структуру $C^\infty(M)$-модуля по правилу $(f,\xi) \mapsto f(z)\xi$. Докажите. что носитель этого модуля есть точка z.

7.7. Докажите, что носитель $C^\infty(M)$-модуля $D(M,N)$ векторных полей вдоль подмногообразия $N \subset M$ совпадает с N.

7.8. Докажите, что для гомоморфизма A-модулей $f : P \to Q$ корректно определены его "значения", т.е отображения $f_h : P_h \to Q_h$, $h \in |A|$. В частности, если на каждом слое это изоморфизм, то и сам гомоморфизм является изоморфизмом.

7.9. Совокупность всех векторных расслоений (объекты), т.е. конечно-порожденных проективных модулей над гладкой алгеброй, и гомоморфизмов этих модулей, чьи образы и ядра проективны (морфизмы), образуют категорию.

7.10. Докажите, что сопоставление векторному расслоению π его модуля сечений $\Gamma(\pi)$ является функтором.

7.11. Для всякого свободного $C^\infty(M)$-модуля конечного типа существует векторное расслоение, модуль сечений которого ему изоморфен.

7.12. Следующие условия на морфизм векторных расслоений $\varphi : \pi \to \xi$ над многообразием M эквивалентны:

(a) $\dim \mathrm{Ker}\varphi_z$ не зависит от z;

(b) $\dim \mathrm{Im}\varphi_z$ не зависит от z;

(c) $\mathrm{Ker}\varphi$ подрасслоение π;

(d) $\mathrm{Im}\varphi$ подрасслоение ξ;

7.13. Докажите, что слои суммы Уитни двух расслоений есть прямая сумма слоев как векторных пространств.

7.14. $\Gamma(\pi \oplus \xi) = \Gamma(\pi) \oplus \Gamma(\xi)$.

7.15. Всякое подрасслоение векторного расслоения выделяется прямым слагаемым.

7.16. $\mathrm{Mor}(\pi,\xi) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi),\Gamma(\xi))$.

7.17. $\Gamma(\pi)$ конечно порожден и проективен.

7.18. (Swan's theorem) Если многообразие M связно, то любой конечно порожденный проективный модуль P над $C^\infty(M)$ является модулем сечений $\Gamma(\pi)$ некоторого векторного расслоения π на M.

7.19. Если многообразие M не связно, то проективный конечно порожденный модуль над $C^\infty(M)$ является прямой суммой модулей сечений векторных расслоений над компонентами связности многообразия.

7.20. Докажите, что для проективного конечно порожденного модуля P над $C^\infty(M)$, определяющего векторное расслоение $\pi = (|P|, \pi_P, M)$, алгебра функций $\overline{\mathcal{F}(|P|)}$ является гладкой алгеброй, т.е. ее спектр является гладким многообразием E_π (называемым тотальным пространством расслоения), и

(a) $|P|$ диффеоморфен E_π;

(b) вложение $i : C^\infty(M) \hookrightarrow \overline{\mathcal{F}(|P|)}$ задает гладкое отображение $\pi : E_\pi \to M$;

(c) множество гладких отображений $s : M \to E_\pi$, таких, что $\pi\circ s = \mathrm{id_M}$, является $C^\infty(M)$-модулем изоморфным $\Gamma(\pi)$;

(d) для каждой точки $z \in M$ существует окрестность $U \subset M$, такая, что существует диффеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times V$, линейный на каждом слое π_z, где V — векторное пространство размерности равной размерности слоя. Совокупность всех прообразов таких окрестностей является атласом на многообразии E_π.

7.21. Морфизм векторных расслоений задает гладкое отображение тотальных многообразий векторных расслоений, линейное на каждом слое.

7.22. Модуль $D(M)$ является проективным конечно порожденным и изоморфен модулю гладких сечений касательного расслоения $TM \to M$.

7.23. Слоем тензорного произведения векторных расслоений служит тензорное произведение слоев исходных расслоений.

7.24. Отображение $i : P^* \otimes_A Q \to P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$, заданное равенством $i(p^* \otimes q)(t) = p^*(t)q$, в случае когда модули P и Q проективны и конечно порождены, является изоморфизмом.

7.25. Докажите, что $(\pi_{TM})^* = \pi_{T^*M}$.

7.26. Докажите, что тензорное произведение одномерных векторных расслоений является одномерным векторным расслоением.

7.27. Модуль $C^\infty(M)$ является одномерным векторным расслоением.

7.28. Классы изоморфных одномерных векторных расслоений над многообразием образуют абелеву группу относительно тензорного произведения, с единицей $[C^\infty(M)]$ и обратным элементом P^*. Эта группа называется группой Пикара $\mathrm{Pic}(M)$. Докажите, что все не единичные элементы группы Пикара имеют порядок 2, т.е. тензорный квадрат всегда тривиален.

7.29. $\mathrm{Pic}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}_2$. Два класса расслоений реализуются цилиндром и листом Мёбиуса.

7.30. $\Gamma(\pi \otimes \xi) \cong \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi)$.

7.31. Расслоение l-джетов является векторным расслоением.

7.32. Докажите, что отображения

$$\pi_{l,m} : J^l M \to J^m M, \quad [f]_z^l \mapsto [f]_z^m, \quad l \geqslant m,$$

$$\tau_l : J^l M \to T^* M, \quad [f]_z^l \mapsto d_z f, \quad l \geqslant 1,$$

являются векторными расслоениями.

Решения и указания.

7.1. Немономорфность эпиморфизма $S : P \to \Gamma(P)$, $p \to s_p$, равносильно тому, что для некоторого не нулевого элемента $p \in P$ при любом $h \in |A|$ элемент $p_h = 0$, т.е. $p \in \cap_{h \in |A|} \mu_h P$.

7.2. Каждому гомоморфизму модулей $\varphi : P \to Q$ ставится в соответствие гомоморфизм сечений $\tilde{\varphi} : \Gamma(P) \to \Gamma(Q)$, $s_p \mapsto s_{\varphi(p)}$, уважающий нейтральный элемент и композицию.

7.3. (a) Из равенства $\mu_h(P \otimes_{C^\infty(M)} Q) = (\mu_h P) \otimes_{C^\infty(M)} Q$ следует, что

$$\bigcap_{h \in M} \mu_h(P \otimes_{C^\infty(M)} Q) = \left(\bigcap_{h \in M} \mu_h P \right) \otimes_{C^\infty(M)} Q = 0.$$

В частности, требуется геометричность лишь одного сомножителя.

(b) Пусть Q геометричен, тогда $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(P, Q) = Q \otimes_{C^\infty(M)} P^*$ также геометричен.

7.5. Модуль $\mu_z D(M)$ — это все векторные поля, которые равны нулю в точке z. В силу принципа локализации и равенства $X(x) = X(z) + (X(x) - X(z))$, $X \in D(M)$, в карте, содержащей точку z, отображение сопоставления векторному полю его значения в точке является эпиморфизмом и его ядро совпадает с модулем $\mu_z D(M)$, т.е. $T_z M = D(M)/\mu_z D(M)$.

7.6. Очевидно, что сама точка z принадлежит носителю, т.к. подмодуль $\mu_z P$ тривиален. Если взять точку $w \neq z$ на гладком многообразии, то существует гладкая функция, равная нулю в w и единице в z. Следовательно подмодуль $\mu_w P = P$ и эта точка носителю не принадлежит.

7.7. Так как векторные поля касательные к подмногообразию задают дифференцирования, то все точки подмногообразия содержатся в носителе модуля. Для точки w вне подмногообразия, в силу его замкнутости можно указать гладкую функцию равную единице на подмногообразии и нулю в некоторой окрестности точки, не пересекающейся с окрестностью подмногообразия. Наличие такой функции гарантирует, что $\mu_w D(N, M) = D(N, W)$, т.е. точка вне носителя.

7.8. Пусть P и Q — A-модули, $\varphi : P \to Q$ — гомоморфизм. Тогда слой — $P_h = P/\mu_h P$, где $\mu_h = \{a \in A : h(a) = 0\}$.

1) Если $\bar{p} \in \mu_h P$, т.е. $\bar{p} = ap$, где $a \in \mu_h$ и $p \in P$, то $\varphi(\bar{p}) = \varphi(ap) = a\varphi(p) \in \mu_h Q$. Значит, корректно определено отображение $\bar{\varphi} : P_h \to Q_h$, т.к. $\varphi(\mu_h P) \subseteq \mu_h Q$.

2) Пусть $\varphi : P \to Q$ — гомоморфизм и изоморфизм на слоях $\varphi_h : P_h \to Q_h$. Условие изоморфности слоев: $Q - \varphi(P) \subset \mu_h Q$. Так как это верно для любого $h \in |A|$, то $Q - \varphi(P) \subset \Cap_{h \in |A|} \mu_h Q = 0$, последнее в силу геометричности Q. Значит, $Q = \varphi(P)$, т.е. биективно.

7.10. Так как морфизм векторных расслоений переводит слои в слои, то сечения переходят в сечения, и такое сопоставление переводит тождественный морфизм в тождественный гомоморфизм модулей сечений, и, наконец, уважает композицию.

7.11. Алгебра $C^\infty(M)$ изоморфна $C^\infty(M)$-модулю гладких сечений тривиального одномерного векторого расслоения $\pi : \mathbb{R} \times M \to M$ над многообразием M: $C^\infty(M) \cong \Gamma(\pi)$. Всякий свободный $C^\infty(M)$-модуль конечного типа изоморфен прямой сумме n модулей $C^\infty(M) \oplus \cdots \oplus C^\infty(M)$ для некоторого n. Следовательно,

$$C^\infty(M) \oplus \cdots \oplus C^\infty(M) \cong \Gamma(\pi) \oplus \cdots \oplus \Gamma(\pi) \cong \Gamma(\pi \oplus \cdots \oplus \pi).$$

См. задачу 7.14.

7.12. См. предложение 11.20, [1], стр. 241.

7.13. Утверждение следует из равенства

$$(\pi/\mu_h \pi) \oplus (\xi/\mu_h) \cong (\pi \oplus \xi)/\mu_h(\pi \oplus \xi).$$

7.14. Следует из естественного отождествления $\Gamma(\eta) \times \Gamma(\varphi)$ и $\Gamma(\eta) \oplus \Gamma(\varphi)$.

7.15. Достаточно задать на каждом слое скалярное произведение, гладко зависящее от точки, и рассмотреть ортогональное дополнение к подрасслоению в каждом слое. Доказательство существования скалярного произведения приведено в лемме 11.25, [1], стр. 244.

7.16. Каждый морфизм, очевидно, порождает гомоморфизм модулей сечений. Следовательно, остается доказать, что по любому гомоморфизму

$$F : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$$

можно построить единственный морфизм расслоений $\varphi : \pi \to \xi$, $\Gamma(\varphi) = F$.

Единственность. Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Mor}(\pi, \xi)$ и $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\psi)$. Это означает, что для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ и $x \in M$ выполнено $\varphi(s(x)) = \psi(s(x))$.

Так как любая точка тотального пространства расслоения E_π может быть получена в виде $s(x)$, то $\varphi = \psi$.

Теперь по гомоморфизму F построим морфизм $\varphi : E_\pi \to E_\xi$, т.е. определим его значение для любого $y \in E_\pi$. Выберем такое сечение, что $s(x) = y$ и положим

$$\varphi(y) = F(s)(x).$$

(a) Корректность. Пусть два сечения задают одну точку $s_1(x) = s_2(x)$. Тогда $s_1 - s_2 \in \mu_x \Gamma(\pi)$, тогда $F(s_1 - s_2) \in \mu_x \Gamma(\xi)$ и $F(s_1)(x) = F(s_2)(x)$.

(b) Очевидно, что слои переходят в слои.

(c) Проверим, что $\Gamma(\varphi) = F$. Для любого $s \in \Gamma(\pi)$ имеем

$$(\Gamma(\varphi)(s))(x) = (\varphi \circ s)(x) = \varphi(s(x)) = F(s)(x).$$

7.17. $\Gamma(\pi) \cong \Gamma(P) \cong P$. Последний модуль конечно порожден и проективен по определению, а последний изоморфизм следует из геометричности P как подмодуля геометрического свободного модуля $C^\infty(M)^n$.

7.18. Рассматриваемый модуль P вместе с некоторым модулем Q является прямым слагаемым в некоторой конечной прямой сумме свободного модуля

$$P \oplus Q = C^\infty(M) \oplus \cdots \oplus C^\infty(M) = C^\infty(M)^n.$$

В силу того, что модуль $C^\infty(M)^n$ геометричен, модули P и Q геометричны, т.е. $P = \Gamma(P)$. Докажем, что размерности всех слоев равны.

Рассмотрим отображения проекции и вложения $pr_P : P \oplus Q \to P$ и $i_P : P \to P \oplus Q$. Отображение

$$e = i_P \circ pr_P \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(P \oplus Q, P \oplus Q) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(M)^n, C^\infty(M)^n)$$

является идемпотентом и это отображение может восприниматься как матричная функция на M.

Рассмотрим теперь отображение факторизации

$$p_z : C^\infty(M)^n \to C^\infty(M)^n/(\mu_z C^\infty(M)^n) \cong \mathbb{R}^n.$$

Для любого отображения $f \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(M)^n, C^\infty(M)^n)$ выполнено $p_z \circ f = f(z) \circ p_z$. В частности, $p_z \circ e = e(z) \circ p_z$.

Так как p_z эпиморфизм, то размерность образа $p_z \circ e = e(z) \circ p_z$ равна рангу матрицы $e(z)$. Докажем, что ранг матрицы $e(z)$ постоянен. Из непрерыывности следует, что значение ранга матричной функции не уменьшается в достаточно малой окрестности точки. При этом e и $Id - e$ — два ортогональных идемпотента. Это значит, что их образы не пересекаются и дополняют друг друга до полной размерности. Следовательно, они их ранги локально постоянны. В силу связности многообразия, их ранги постоянны, что и требовалось.

7.19. Следует прямо из 7.18., т.к. функция ранга постоянна на каждой компоненте связности многообразия.

7.22. Указание: рассмотрите покрытие многообразие локальными картами и воспользуйтесь локализуемостью дифференцирования.

7.23. Указание. см. решение задачи 7.30.

7.25. Указание. $\pi_{TM} \cong D(M)$, $\pi^*_{TM} = Hom_{C^\infty(M)}(D(M), C^\infty(M)) \cong \pi_{T^*M}$.

7.26. $\eta \otimes \xi \cong \eta^* \otimes \xi \cong \mathrm{H}om(\eta, \xi)$. Последнее расслоение с одномерным слоем $\mathrm{H}om_{\mathbb{R}}(\eta_z, \xi_z)$.

7.27. Указание. Слой $C^\infty(M)/\mu_z C^\infty(M) \cong \mathbb{R}$, $f(x) = f(z) + \sum(x_i - z_i)g_i(x)$.

7.29. В задаче 7.26 достаточно заметить, что расслоение $Hom(\eta, \eta)$ тривиально, т.к. диффеоморфизм $\varphi^{-1} : M \times \mathbb{R} \to E_{Hom(\eta,\eta)}$, обратный тривиализующему, можно задать формулой $\varphi^{-1}(a, \lambda) = \lambda y$.

7.30. Построим отображение $i : \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi) \to \Gamma(\pi \otimes \xi)$ и докажем его изоморфность.

Пусть $s \in \Gamma(\pi)$, $t \in \Gamma(xi)$. Положим $(s \otimes t)(x) = s(x) \otimes t(x)$, $s \otimes t \in \Gamma(\pi \otimes \xi)$. Построенное сопоставление гомоморфно по каждому аргументу и потому определеяет $C^\infty(M)$-гомоморфизм $i : \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi) \to \Gamma(\pi \otimes \xi)$. Рассмотрим гомоморфизм

$$i_x : \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi)/\mu_x(\Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi)) \to \pi_x \otimes \xi_x,$$

и покажем, что он является изоморфизмом линейных пространств.

А. Сюръективность i_x. Произвольный элемент пространства $\pi_x \otimes \xi_x$ имеет вид $\sum y_i \otimes z_i$, $y_i \in \pi_x$, $z_i \in \xi_x$. Выберем произвольные сечения s_i, t_i чьи значения в точке x суть y_i, z_i. Тогда $i_x([\sum s_i \otimes t_i]) = \sum y_i \otimes z_i$.

В. Инъективность i_x. Пусть $s_i \in \Gamma(\pi)$, $t_i \in \Gamma(\xi)$ и $\sum s_i(x) \otimes t_i(x) = 0$ в пространстве $\pi_x \otimes \xi_x$. Докажем, что найдутся такие сечения $p_i \in \Gamma(\pi)$, $q_i \in \Gamma(\xi)$ и функции $f_i \in \mu_x$, что

$$\sum s_i \otimes t_i = \sum f_i p_i \otimes q_i.$$

Выберем из системы векторов $s_i(x)$ максимальную линейно независимую систему. Пусть это будет $s_1(x), \ldots, s_k(x)$. Для $j = k+1, \ldots, m$ запишем разложение по базису $s_j(x) = \sum_{i=1}^k a_{ij} s_i(x)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^m s_i(x) \otimes t_i(x) = \sum_{i=1}^k s_i(x) \otimes \left(t_i(x) + \sum_{j=k+1}^m a_{ij} t_j(x) \right) = 0.$$

так как все первые сомножители в сумме линейно независимы, то все всторые сомножители равны нулю, т.е.

$$t_i(x) = -\sum_{j=k+1}^m a_{ij} t_j(x).$$

Итак,

$$s_j = \sum_{i=1}^k a_{ij} s_i + s'_j, \quad j = k+1, \ldots, m; \quad s'_j \in \mu_x \Gamma(\pi);$$

$$t_i = -\sum_{j=k+1}^k a_{ij} t_j + t'_i, \quad i = 1, \ldots, k; \quad t'_i \in \mu_x \Gamma(\xi).$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^m s_i \otimes t_i = \sum_{i=1}^k s_i \otimes t'_i + \sum_{j=k+1}^m s'_j \otimes t_j \in \mu_x \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi).$$

Итак, i — изоморфизм в каждой точке $x \in M$. Докажем, что i — изоморфизм модулей. Так как $\Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\xi)$ конечно порожден и проективен, он изоморфен модулю сечений некоторого расслоения. В силу задачи 7.16, существует единственный морфизм расслоений φ, являющийся послойным изоморфизмом. Морфизм является гладким и в каждой точке слоя y его дифференциал является прямой суммой $d_y\varphi = id_{T_{\pi(y)}M} \oplus \varphi_y$, т.е. является изоморфизмом касательных пространств к тотальным пространствам расслоений. Следовательно, φ — диффеоморфизм. Что и требовалось.

7.31. Указание. Над каждой точкой локальной карты рассмотрим естественный набор координат, соответствующий коэффициентам разложения в ряд Тейлора гладкой функции до данного порядка. Это задает структуру гладкого многообразия на джетах, а функции задают сечения.

7.32. Указание. Дайте прямое описание слоев над локальными картами и проекции — забывание части ряда Тейлора. Второе отображение — частный случай первого $m = 1$.

8 Касательный вектор

Дифференцирование в точке. Отображение $\xi : A \to K$ называется *касательным вектором* или *дифференцированием* в точке $h \in |A|$, если оно

а) K-линейно, т.е. для любых $\lambda_j \in K$, $a_j \in A$

$$\xi\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \xi(a_j),$$

б) удовлетворяет правилу Лейбница в точке h

$$\xi(ab) = h(a)\xi(b) + h(b)\xi(a).$$

Касательное пространство. На множестве всех касательных векторов в точке естественно определяется структура K-модуля. Положим по определению

а) $(\xi_1 + \xi_2)(a) = \xi_1(a) + \xi_2(a)$;

б) $(k\xi)(a) = k\xi(a)$.

Этот K-модуль обозначается $T_h A$ и называется *касательным пространством* в точке h.

Дифференциал отображения. Рассмотрим $F : A_1 \to A_2$ гомоморфизм некоторых алгебр. *Дифференциалом* отображения спектров $|F|$ в точке $h \in |A_2|$ называется отображение

$$d_h|F| : T_h(A_2) \to T_{h\circ F}(A_1),$$

определенное по правилу $d_h|F|(\xi) = \xi \circ F : A_1 \to K$.

Кокасательное пространство. Пусть μ_h ядро гомоморфизма $h : A \to K$, μ_h^2 — произведение идеала μ_h на себя. K-модуль

$$T_h^* A = \mu_h / \mu_h^2$$

называется *кокасательным* пространством к алгебре в точке h.

8.1. Докажите, что дифференциал является K-линейным отображением модулей.

8.2. Докажите, что $T_{id_K} K = 0$, где $id_K : K \to K$ — единственная точка K-спектра кольца K.

8.3. Докажите, что для любых $k \in K$ и $\xi \in T_h A$ дифференцирование константы есть ноль

$$\xi(k \cdot 1_A) = 0.$$

8.4. Пусть $F : A_1 \to A_2$ — эпиморфизм K-алгебр. Докажите, что для любой точки $h \in |A_2|$ дифференциал является мономорфизмом.

8.5. Пусть $C^0(M)$ — алгебра всех непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на топологическом пространстве M. Докажите, что $T_h C^0(M) = 0$.

8.6. Если две функции $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ совпадают на открытом множестве $U \ni z$, то для любого касательного вектора $\xi \in T_z C^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство $\xi(f) = \xi(g)$.

8.7. Для любого открытого множества $z \in U \subset \mathbb{R}^n$ пространства $T_z U$ и $T_z C^\infty(\mathbb{R}^n)$ естественно изоморфны.

8.8. Докажите, что касательный вектор $\xi \in T_z C^\infty(\mathbb{R}^n), z \in \mathbb{R}^n$ как отображение, сопоставляющее функциям из этой алгебры число, всегда имеет вид

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(z),$$

т.е. задает дифференцирование по направлению.

8.9. Докажите, что если $n \neq m$, то

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \ncong C^\infty(\mathbb{R}^m).$$

8.10. Для любой K-алгебры A определена сюръекция K-модулей

$$\nu_h : \mathrm{Hom}_K(T_h^* A, K) \to T_h A,$$

где символом $\mathrm{Hom}_K(T_h^* A, K)$ обозначено множество всех K-линейных отображений из кокасательного пространства в кольцо, с естественной структурой модуля относительно сложения отображений и умножений на элементы кольца. Если K — поле, то ν_h является изоморфизмом.

8.11. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольная геометрическая $\mathbb{R}$-алгебра и $U \subset |\mathcal{F}|$ — открытое подмножество. Тогда гомоморфизм ограничения $\rho_U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_U$ индуцирует изоморфизм

$$d_h(\rho_U) : T_h(\mathcal{F}|_U) \to T_{\rho_U \circ h}(\mathcal{F}), \quad h \in |\mathcal{F}|_U|.$$

8.12. Опишите касательное пространство в точках гладких множеств из задачи 1.13.

8.13. Локальные координаты на гладком многообразии задают естественный базис касательного пространства в точке многообразия, принадлежащей этой карте: это набор дифференцирований по направлениям координатных осей

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n.$$

Опишите в этих базисах дифференциал произвольного гладкого отображения $\varphi : M \to N$.

8.14. Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $z \in \mathbb{R}^n$. Дифференциал двойственного отображения $d_z f = d_z|f^*| : T_z\mathbb{R}^n \to T_{f(z)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ задает тем самым элемент двойственного пространства $(T_z\mathbb{R}^n)^*$. Докажите, что элементы вида $d_z x_i$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемые как линейные функции на $\mathbb{R}^n$, задают базис пространства $T_z^*\mathbb{R}^n$.

Решения и указания.

8.2. Следует из 8.3.

8.3. $\xi(1_A) = \xi(1_A \cdot 1_A) = \xi(1_A) \cdot 1_A + 1_A \cdot \xi(1_A) \Rightarrow \xi(1_A) = 0$.

8.4. В противном случае существует нетривиальное дифференцирование $\xi \in T_h(A_2)$ такое, что $\xi \circ F = 0$. Но, $F(A_1) = A_2$, т.е. ξ — тривиален.

8.5. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C^0(M)$. Обозначим $g = \sqrt[3]{f - f(h)} \in C^0(M)$. Пусть $\xi \in T_h C^0(M)$ — произвольный касательный вектор.

$$\xi(f) = \xi(f - f(h)) = \xi(g^3) = h(g)\xi(g^2) + h(g^2)\xi(g) = 0,$$

т.е. $\xi(f) = 0$ для любой функции.

8.6. Для доказательства достаточно показать, что если для некоторой окрестности $z \in U$ выполнено равенство $f|_U = 0$, то $\xi(f) = 0$. Действительно, существует такая функция $h \in C^\infty(M)$, что $h(z) = 0$, $h|_{M\setminus U} = 1$ (следствие 2.5, [1], стр. 29). Тогда $f = hf$ и по правилу Лейбница

$$\xi(f) = \xi(hf) = f(z)\xi(h) + h(z)\xi(f) = 0.$$

8.7. Вложение $i : U \subset M$ порождает $\mathbb{R}$-линейное отображение $d_z i : T_z U \to T_z M$ по правилу $d_z i(\xi)(f) = \xi(f|_U)$.

Построим обратное, найдя для каждой функции $g \in C^\infty(U)$ функцию $f \in C^\infty(M)$, совпадающую с g в некоторой окрестности точки z. В силу задачи 8.6. от выбора такой функции результат дифференцирования не зависит.

8.8. В силу 8.7. достаточно рассмотреть функцию локально и по лемме Адамара (задача 3.30, для $n = 3$) правило Лейбница сразу дает требуемое утверждение, где $\alpha_i = \xi(x_i)$.

8.9. В случае изоморфности алгебр дифференциал отображения являлся бы изоморфизмом касательных пространств, что не так в силу разной размерности.

8.10. Во-первых $\nu_h(\varphi)(a) = \varphi([a - h(a)\cdot 1_A])$, где $[b] = b \mod \mu_h^2$ (проверьте, что это касательный вектор). Сюръективность докажем. определив для произвольного $\xi \in T_h A$ гомоморфизм $\varphi_\xi(a) = \xi(a)$. Так как $\xi(\mu_h^2) \subset \mu_h$, то определение корректно и $\nu_h(\varphi_\xi) = \xi$.

Инъективность в случае поля следует из того, что для различных точек из $T_h^* A$ можно указать линейную функцию φ, которая их различает, т.е. порождает разные дифференцирования.

8.12. В силу принципа локализации, вне особых точек касательное пространство совпадает с касательным пространством гладкого многообразия. В особых точках множество дифференцирований в точке порождается как линейное пространство всеми односторонними дифференцированиями вдоль примыкающих гладких подмногообразий (с краем) либо, как в случае (i), вдоль направления, которое может быть реализовано как сходящаяся последовательность точек замкнутого множества.

(a) В особой точке касательное пространство изоморфно $\mathbb{R}^2$, вне особой точки — одномерно.

(b) Во всех точках одномерное касательное пространство. В особой точке - диффернцирование определяется любым вертикальным вектором.

(c) В вершинах - двумерное, в остальных — одномерное касательное пространство.

(d) Во всех точках треугольника, включая граничные, — двумерное касательное пространство.

(e) В вершине — трехмерное, остальных точках — двумерное касательное пространство.

(f) В вершинах и на ребрах — трехмерное, на гранях — двумерное касательное пространство.

(g) Ответ зависит от структуры примыкания ребер к вершинам. Если все ребра прямолинейны, то в вершинах двумерное, в остальных точках одномерное касательное пространство.

(h) В вершинах — двумерное, на ребрах — одномерное касательное пространство.

(i) В предельных точках — двумерное, в остальных — одномерное пространство.

8.13. Матрица Якоби координатного выражения гладкого отображения φ.

8.14. Указанные дифференциалы образуют базис двойственного пространства. Осталось понять, что сопоставление дифференциалу в точке z линейной функции на $\mathbb{R}^n$ как значение этого дифференциала на векторе $x - z$, где $x \in \mathbb{R}^n$, является изоморфизмом.

9 Модуль дифференцирований алгебры

Дифференцирование алгебры. K-линейное отображение $\Delta : A \to A$ называется *векторным полем* или *дифференцированием* алгебры A, если оно удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\Delta(ab) = a\Delta(b) + b\Delta(a).$$

Обозначим множество всех диффернцирований алгебры A через $D(A)$. Если $\Delta, \nabla \in D(A)$ и $a \in A$, тогда $\Delta + \nabla \in D(A)$ и $a\Delta \in D(A)$. Эти операции задают на $D(A)$ структуру K-модуля. Более того $D(A)$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования двух операторов.

Дифференцирование со значением в модуле. Пусть A — коммутативная K-алгебра и P — A-модуль. K-линейное отображение $\Delta : A \to P$ называется дифференцированием алгебры со значениями в P, если оно удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\Delta(ab) = a\Delta(b) + b\Delta(a).$$

Операции сложения и умножения на элементы алгебры превращают множество всех дифференцирований $D(P)$ в A-модуль.

9.1. Пусть $\Delta \in D(A), h \in |A|$. Положим

$$\Delta_h = h \circ \Delta : A \to K.$$

Докажите, что $\Delta_h \in T_h A$.

9.2. Опишите пространство векторных полей на координатном кресте.

9.3. Опишите $D(A)$ для алгебр задачи 1.13.

9.4. Вычислите $D(C^m(\mathbb{R}^1))$, $m \geqslant 0$.

9.5. Каково пространство $D(K[x]/x^{l+1}K[x])$ алгебры срезанных полиномов, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

9.6. Опишите пространство векторных полей для булевой алгебры.

9.7. Пусть $X \in D(P)$ и $h : P \to Q$ — гомоморфизм A-модулей. Тогда $h \circ X \in D(Q)$.

9.8. Отображение

$$D(h) : D(P) \to D(Q), \quad X \mapsto h \circ X$$

является гомоморфизмом A-модулей. При этом

$D(id_P) = id_{D(P)}$,

$D(h_1 \circ h_2) = D(h_1) \circ D(h_2)$.

9.9. Докажите, что $D(C^\infty(\mathbb{R}^n)/\mu_z) \cong T_z C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

9.10. Рассмотрим $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-модуль $C^m(\mathbb{R}^n), m \geqslant 0$. Как интерпретировать пространство $D(C^m(\mathbb{R}^n))$.

9.11. Опишите дифференцирования алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$ со значениями в алгебре $C^\infty(\mathbb{R}) \oplus \dots \oplus C^\infty(\mathbb{R})$.

9.12. Сопоставление A-модулю P модуля $D(P)$ является функтором в категории A-модулей.

9.13. Пусть $N \subset M$ — гладкое подмногообразие, $\mu_N = \{f \in C^\infty(M) | f|_N = 0\}$ — идеал в $C^\infty(M)$. Рассмотрим $C^\infty(M)$-модуль $C^\infty(M)/\mu_N$. Как можно интерпретировать пространство $D(C^\infty(M)/\mu_N)$.

9.14. Пусть $\varphi : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$ — гомоморфизм. Зададим на $C^\infty(N)$ структуру $C^\infty(M)$-модуля по правилу

$$fg = \varphi(f)g.$$

Как можно интерпретировать пространство $D(C^\infty(N))$.

Решения и указания.

9.1. K-линейность очевидна. Далее запишем

$$\Delta_h(ab) = h(\Delta(a)b + a\Delta(b)) = \Delta_h(a)h(b) + h(a)\Delta_h(b).$$

9.2. Пусть $K = \{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$ — координатный крест на плоскости и $\mathcal{F} = C^\infty(K) = C^\infty(\mathbb{R}^2)|_K$ — замкнутое множество, алгебра сужений гладких функций на крест. Обозначим через A_x и A_y алгебры гладких функций на прямой с координатными функциями x и y соответственно. Определены естественные вложения

$$i_x : A_x \to C^\infty(K), \quad f(x) \mapsto (f(x), f(0)),$$

$$i_y : A_y \to C^\infty(K), \quad g(y) \mapsto (g(0), g(y)),$$

а также проекции

$$\pi_x : C^infty(K) \to A_x, \quad (f(x), g(y)) \mapsto f(x),$$

$$\pi_y : C^infty(K) \to A_y, \quad (f(x), g(y)) \mapsto g(y).$$

Очевидно, $\pi_x \circ i_x = \mathrm{id}$ и $\pi_y \circ i_y = \mathrm{id}$. Поэтому, если $\Delta \in D(K)$, то $\Delta^x = \pi_x \circ \Delta \circ i_x \in D(A_x)$ и $\Delta^y = \pi_y \circ \Delta \circ i_y \in D(A_y)$.

Покажем, что

$$\Delta(f(x), g(y)) = (\Delta^x f, \Delta^y g)$$

и поля Δ^x, Δ^y обращаются в ноль в точке 0.

Действительно, пусть

$$\varphi = i_x(f) = (f(x), c) \in C^\infty(K), c = f(0).$$

Рассмотрим точку $z = (0, y) \in K, y \neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности этой точки функция φ постоянна и в силу принципа локализуемости касательных векторов $\Delta_z(\varphi) = 0$. Тем самым, это верно для всех точек кроме 0, но в силу непрерывности $\Delta(\varphi)$ это верно на всей этой оси. Поэтому $i_x(\pi_x(\Delta(\varphi))) = \Delta(\varphi)$, или $i_x(\Delta^x(f)) = \Delta(i_x(f))$. Последнее равенство означает, что

$$i_x \circ \Delta^x = \Delta \circ i_x.$$

Кроме того, $\Delta^x(f)(0) = 0$, так как $\Delta(\varphi)(0, 0) = 0$. Следовательно, векторное поле $\Delta^x \in D(A_x)$ обращается в ноль в точке 0. Аналогично, поле $\Delta^y \in D(A_y)$ обращается в ноль в точке 0.

Заметив теперь, что

$$(f(x), g(y)) = i_x(f) + i_y(g) - (c, c), \quad c = f(0) = g(0),$$

и что для константы $\Delta((c, c)) = 0$, мы окончательно получаем

$$\Delta((f(x), g(y))) = \Delta(i_x(f)) + \Delta(i_y(g)) =$$

$$= i_x(\Delta^x(f)) + i_y(\Delta^y(g)) = (\Delta^x(f), \Delta^y(g)).$$

Что и требовалось. Очевидно и обратное: всякая пара полей на прямых определяет векторное поле на кресте, если эти поля обращаются в ноль в 0.

9.3. Действуя аналогично задаче 9.2, можно получить:

(a) см. ответ в 9.2.

(b) Два векторных поля на ветвях параболы, совпадающие в особой точке.

(c) Поля вдоль ребер, зануляющиеся в вершинах.

(d) Произвольное гладкое векторное поле.

(e) Касательное к конусу векторное поле, зануляющееся в вершине.

(f) Гладкое поле, зануляющееся в вершинах и на ребрах имеющее касательное направление.

(g) Аналогично пункту (c).

(h) В вершинах — нулевое, вдоль ребер — произвольное касательное.

(i) Вне предельного отрезка — касательное к графику, на предельном отрезке — произвольное касательное, зануляющееся на концах.

9.4. Рассмотрим случай $m = 0$ — алгебру непрерывных функций. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, $\Delta \in D(C(\mathbb{R}))$. Вычислим в произвольной точке $a \in \mathbb{R}$ значение оператора $\Delta(f)(a) = \Delta(f - f(a))(a)$. Обозначим $f_1 = f - f(a)$ Заметим, что $\sqrt[3]{f_1} \in C(\mathbb{R})$. По правилу Лейбница

$$\Delta(f_1) = \Delta(\sqrt[3]{f_1} \cdot \sqrt[3]{f_1^2}) = \sqrt[3]{f_1}\Delta(\sqrt[3]{f_1^2}) + \sqrt[3]{f_1^2}\Delta(\sqrt[3]{f_1}).$$

$$\Delta(f_1)(a) = 0.$$

$$\Delta(f) = \Delta(f_1 + f(a)) = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Значит, $D(C(\mathbb{R}) = 0$.

9.5. По индукции доказывается общая формула $\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta(x)$. Пусть $a = k_0 + k_1 x + \cdots + k_l x^l$ — элемент алгебры срезанных полиномов A.

$$\Delta(a) = \sum k_i \Delta(x^i) = \sum i k_i x^{i-1} \Delta(x) = \Delta(x)(\sum i k_i x^{i-1}).$$

Таким образом, значение дифференциального оператора определяется значением $\Delta(x) \in A$. С другой стороны, любой элемент $b \in A$ по определяет дифференциальный оператор Δ_b по полученной формуле и $\Delta_b(x) = b$. Действительно,

$$\Delta_b((\sum k_i x^i)(\sum m_j x^j)) = b \sum k_i m_j (i + j) x^{i+j-1},$$

где суммирование производится только по $i + j - 1 \leqslant l$.

$$\Delta_b(\sum k_i x^i)(\sum m_j x^j) = b(\sum i k_i x^{i-1})(\sum m_j x^j) = b \sum i k_i m_j x^{i+j-1},$$

$$(\sum k_i x^i)\Delta_b(\sum m_j x^j) = (\sum k_i x^i)(b\sum j m_j x^{j-1}) = b\sum j k_i m_j x^{i+j-1}.$$

Правило Лейбница выполнено. Следовательно $D(A) = A$.

9.6. Пусть $A = \{0, 1\}$ — булева алгебра, $\Delta \in D(A)$.

$$\Delta(0) = \Delta(0 \cdot 0) = \Delta(0)0 + 0\Delta(0) = 0.$$

$$\Delta(1) = \Delta(1 \cdot 1) = \Delta(1) + \Delta(1) = 0.$$

Таким образом, $D(A) = 0$.

9.7. Доказательство почти дословно повторяет решение задачи 9.1.

9.8. Тривиальная проверка по определению.

9.9. Вместе с гомоморфизмом подстановки $i_z : C^\infty(M)/\mu_z \to \mathbb{R}$ каждое дифференцирование $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)/\mu_z$ задает касательный вектор X_z. С другой стороны выбор любого диффернцирования $X \in D(C^\infty(M))$, $X(f)(z) = X_z(f)$, вместе с гомоморфизмом факторизации $h : C^\infty(M) \to C^\infty(M)/\mu_z$ задает дифференцирование $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)/\mu_z$. Описанные отображения взаимно обратны.

9.10. Пространство C^m-гладких векторных полей. Это сразу следует из леммы Адамара

$$f(x) = f(z) + \sum \frac{\partial f}{\partial x}(z)(x_i - z_i) + \sum (x_i - z_i)(x_j - z_j)g_{ij}(x).$$

$$\Delta(f)(z) = \sum \Delta(x_i - z_i)\frac{\partial f}{\partial x}(z),$$

где $\Delta(x_i - z_i) \in C^m(\mathbb{R}^n)$.

9.11. Композиция дифференцирования и проекции на прямое слагаемое является обычным дифференцированием алгебры, т.е. векторным полем на прямой. Зададим векторное поле на $\mathbb{R}^n$, n — количество слагаемых, как сумму полей, координатные функции которых зависят лишь от одной переменной $X = \sum_{i=1}^n X^i(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Ясно, что и наоборот любое векторное поле такой структуры может быть интерпертировано как дифференцирование алгебры функций со значением в прямой сумме алгебр

$$Xf = (X^1(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, X^n(x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Таким образом,

$$D(C^\infty(\mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus C^\infty(\mathbb{R})) = D(C^\infty(\mathbb{R})) \oplus \cdots \oplus D(C^\infty(\mathbb{R})).$$

9.12. Сопоставление гомоморфизму модулей $h : P_1 \to P_2$ отображения модулей дифференцирований $F(h) : D(P_1) \to D(P_2)$ по правилу $h \circ \Delta$ очевидно является гомоморфизмом и тождественный гомоморфизм переводит в тождественный. Наконец,

$$(h_1 \circ h_2)(\Delta) = h_1(h_2(\Delta)) = F(h_1) \circ F(h_2),$$

то есть является ковариантным функтором.

9.13. Пространство гладких полей вдоль подмногообразия (см. задачу 9.9).

9.14. Векторное поле вдоль отображения. Действительно, рассмотрим произвольное дифференцирование $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Тогда композиция $X_\varphi = \varphi \circ X$ для любых двух функций f и g удовлетворяет правилу

$$X_\varphi(fg) = X_\varphi(f)\varphi(g) + \varphi(f)X_\varphi(g).$$

10 Дифференциальная форма

Универсальное дифференцирование. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая категория модулей над алгеброй A. Пара $(\delta, \Lambda(A))$, где Λ — объект категории $\mathfrak{M}$ и $\delta \in D(\Lambda)$, называется *универсальным дифференцированием* в категории $\mathfrak{M}$, если для любого модуля P из $\mathfrak{M}$ соответствие

$$\mathrm{Hom}_A(\Lambda, P) \ni h \mapsto h \circ \delta \in D(P)$$

устанавливает изоморфизм A-модулей $\mathrm{Hom}_A(\Lambda, P)$ и $D(P)$. То есть, функтор D представим в этой категории. Пространство $\Lambda(A)$ называется *пространством 1-форм.*

Алгебраические 1-формы. Опишем универсальное дифференцирование (d_{alg}, Λ_{alg}) для категории $\mathcal{M}od(A)$. Рассмотрим свободный A-модуль $\tilde{\Lambda}$, порожденный всевозможными символами $\tilde{d}a$, $a \in A$. Пусть Λ_0 — его подмодуль, порожденный всевозможными соотношениями вида

$$\tilde{d}(ka) - k\tilde{d}a, \quad \tilde{d}(ab) - a\tilde{d}b - d\tilde{d}a, \quad k \in K, a, b \in A.$$

Тогда

$$\Lambda_{alg}(A) = \tilde{\Lambda}/\tilde{\Lambda}_0, \quad d_{alg}a = \tilde{d}a \,\mathrm{mod} \tilde{\Lambda}_0.$$

Геометризация $\mathfrak{G}(\Lambda_{alg}(C^\infty(M)))$ обозначается кратко $\Lambda^1(M)$, где M — гладкое многообразие.

10.1. Приведите пример категории модулей над $C^\infty(M)$, где M — гладкое многообразие, в которой функтор D непредставим.

10.2. Докажите, что пространство 1-форм $\Lambda_{alg}(A)$ является представляющим объектом функтора D в категории $\mathcal{M}od(A)$.

10.3. Докажите, что модуль $\Lambda_{alg}(C^\infty(M))$ негеометричен, рассмотрев элемент $d(e^x) - e^x dx$.

10.4. Докажите, что функтор D представим в категории $\mathcal{G}Mod(C^\infty(M))$. Для любого геометрического модуля P:

$$D(P) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{G}(\Lambda_{alg}(C^\infty(M))), P).$$

10.5. Пусть K — векторное пространство над $\mathbb{Q}$, A — K-алгебра, такая, что $\Lambda_{alg}(A)$ является проективным модулем с конечным числом образующих. Докажите, что алгебра $\mathrm{Diff}_\star A$ мультипликативно порождается элементами $\mathrm{Diff}_1 A$.

10.6. Докажите, что универсальное дифференцирование определено однозначно с точностью до изоморфизма, т.е. если (δ', Λ') — другое универсальное дифференцирование, то существует такой изоморфизм $\gamma : \Lambda \to \Lambda'$, что $\delta' = \gamma \circ \delta$.

10.7. Рассмотрим кокасательное расслоение $\pi : T^*M \to M$ гладкого многообразия. Обозначим множество гладких отображений $f : M \to T^*M$, таких что $\pi \circ f = id_M$ символом $\Gamma(\pi_{T^*M})$. Это множество обладает естественной структурой $C^\infty(M)$-модуля. Докажите, что

(a) $\Gamma(\pi_{T^*M}) \cong \Lambda^1(M)$,

(b) Дифференциал $d : C^\infty(M) \to \Gamma(\pi_{T^*M})$, $(df)(z) = d_z f$, является универсальным дифференцированием,

(c) $\Lambda^1(U)$ является свободным модулем с образующими $dx^i, i = 1, \cdots, n$, где $U, (x^1, \cdots, x^n)$ — карта на многообразии.

10.8. Покажите, что в пределах карты на многообразии образующие dx^i в каждой точке задают базис кокасательного пространства $T^*_z M$ двойственный к базису касательного пространства $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

10.9. Пусть $F : M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Докажите цепочку утверждений:

(a) умножение $f\omega = F^*(f)\omega, \quad f \in C^\infty(N), \omega \in \Lambda^1(M)$ задает структуру $C^\infty(N)$-модуля в $\Lambda^1(M)$;

(b) $C^\infty(N)$-модуль $\Lambda^1(M)$ является геометрическим;

(c) композиция $d \circ F^* : C^\infty(N) \to \Lambda^1(M)$ является дифференцированием;

(d) существует такой гомоморфизм $C^\infty(N)$-модулей

$$h_{d \circ F^*} : \Lambda^1(N) \to \Lambda^1(M)$$

что $h_{d \circ F^*} \circ d = d \circ F^*$.

Таким образом, определено $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$F^* : \Lambda^1(N) \to \Lambda^1(M),$$

которое называется переносом 1-форм.

10.10. Докажите, что отображение переноса 1-форм обладает следующими свойствами

(a) $F^* \circ d = d \circ F^*$

(b) $F^*(f\omega) = F^*(f)F^*(\omega) = f(F)F^*(\omega)$.

10.11. Пусть 1-форма в карте на многообразии имеет вид $\omega = \sum_i f_i dg_i$. Докажите, что
$$F^*(\omega) = \sum_i F^*(f_i)dF^*(g_i).$$

10.12. Докажите, что

(a) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$;

(b) $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$;

(c) $F^*(\omega)_z = (d_zF)^*(\omega_{F(z)})$, где $z \in M, \omega \in \Lambda^1(N)$.

Решения и указания.

10.1. Категория проективных модулей.

10.2. Чтобы доказать, что Λ-представляющий объект для функтора $D(P)$, необходимо найти такой гомоморфизм $h = h(\Delta)$, что $\Delta = h \circ d$, где $d : A \to \Lambda$. Тогда h задан так на образующих d_a в Λ: $h(da) = \Delta(a)$. Проверим корректность этого определения. Для этого нужно показать, что $h : \Lambda_O \to O$, где $\Lambda_O \simeq \tilde{\Lambda}/\tilde{\Lambda_O}$.

а) Рассмотрим значение h на Λ_O:
$$h(d(ab) - ad(b) - bda) = h(d(ab)) - ah(d(b)) - bh(d(a)) =$$
$$= \Delta(ab) - a\Delta(b) - b\Delta(a) = 0,$$
так как $\Delta \in D(P)$.

Аналогично, $h(\sum \alpha_i(da_ib_i - a_idb_i - b_ida_i) = 0$ по линейности. Значит, h переводит $\tilde{\Lambda_O}$ в O (модуль, порожденный соотношениями). Следовательно, h определен корректно на порождающих Λ.

б) Заметим, что оператор $d : A \to \Lambda$ является дифференцированием, т.к. $d(ab) = ad(b) + bd(a)$ по построению $\Lambda = \tilde{\Lambda}/\tilde{\Lambda_O}$.

в) Также h определен единственно (на образующих Λ). Значит, для любого $\Delta \in D(P)$ существует единственный $h \in Hom(\Lambda, P)$, такой что $\Delta = h \circ d$.

10.4. Утверждение в категории A-модулей доказано. Рассмотрим теперь геометрические модули Λ и P.

$G(\Lambda) = \Lambda / \bigcap_{z\in|A|} \mu_z P$, где $\mu_z = \{f \in A : f(z) = 0\}$.

Пусть $p \in \mu_z\Lambda$, тогда $p = ah(q)$, где $a \in \mu_z$, $q \in \Lambda$. Тогда $h(p) = h(aq) = ah(q) \in \mu_z P$, т.к. h — гомоморфизм.

Значит, $h : \bigcap_{z\in|A|} \mu_z\Lambda \to \bigcap_{z\in|A|} \mu_z P$, поэтому утверждение задачи 10.2 переносится. Гомоморфизм $G(\Lambda) \to G(P)$ корректно определен.

10.6. Рассмотрим два универсальных дифференцирования (d_1, Λ^1) и (d_2, Λ^2). Так как операторы $d_1 : A \to \Lambda_1$ и $d_2 : A \to \Lambda_2$ являются дифференцированиями, то следующие диаграммы коммутативны:

$d_1 = \psi_2 \circ d_2$, $d_2 = \psi_1 \circ d_1$, следовательно, $d_1 = \psi_2 d_2 = (\psi_2 \circ \psi_1)d_1$, $d_2 = \psi_1 d_1 = (\psi_1 \circ \psi_2)d_2$.

Отображения ψ_1 и ψ_2 являются взаимно обратными, поэтому $\Lambda_1 \approx \Lambda_2$.

10.8. Рассмотрим карту U на многообразии M с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Будем определять $T_p^*M = Lin(T_pM, \mathbb{R})$, где $p \in M$. В карте U векторное поле V может быть представлено в виде $V = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Пусть $q \in T_p^*M$, тогда $q(V)|_p = \sum \alpha_i q(\frac{\partial}{\partial x_i})$. Обозначим операторы dx_i такие, что $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Базис dx_i является двойственным к $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Также дифференциал любой функции $f \in C^\infty(M)$ представляется как $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Операторы dx_i линейно независимы: если есть линейная комбинация, что $\sum \alpha_i dx_i = 0$, что $\alpha_i \neq 0$, то рассмотрим $(\sum \alpha_i dx_i)(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \alpha_j \neq 0$. Значит, dx_i — базис T_p^*M в карте U.

11 Линейные дифференциальные операторы

Дифференциальный оператор. Для произвольных A-модулей P, Q над K-алгеброй зададим семейство операторов, отвечающих элементу $a \in A$
$$\delta_a : \mathrm{Hom}_K(P,Q) \to \mathrm{Hom}_K(P,Q), \quad \delta_a(\Delta) = [\Delta, a],$$
т.е.
$$(\delta_a(\Delta))(p) = \Delta(ap) - a\Delta(p).$$
Пусть A — произвольная коммутативная K-алгебра, P, Q — A-модули. K-гомоморфизм $\Delta : P \to Q$ называется линейным дифференциальным оператором порядка $\leqslant l$, действующим из P в Q, если для любых $a_1, \ldots, a_l \in A$
$$\delta_{a_1,\ldots,a_l}(\Delta) = (\delta_{a_1} \circ \cdots \circ \delta_{a_l})(\Delta) = 0.$$
Множество всех дифференциальных операторов порядка $\leqslant l$ обозначается $\mathrm{Diff}_l(P,Q)$, если $P = A$, то $\mathrm{Diff}_l(Q)$, если $P = Q = A$, то $\mathrm{Diff}_l A$.
Бимодуль д.о. Формулы
$$(a\Delta)(p) = a\Delta(p), \quad (a^+\Delta)(p) = \Delta(ap),$$
где $a \in A, p \in P, \Delta \in \mathrm{Hom}_K(P,Q)$, задают в $\mathrm{Hom}_K(P,Q)$ две структуры A-модуля (*левое и правое умножения*), в последнем случае этот модуль обозначается $\mathrm{Diff}_l^+(P,Q)$ (соотвественно $\mathrm{Diff}_l^+(Q), \mathrm{Diff}_l^+ A$). Если его рассматривать как бимодуль, то используется обозначение $\mathrm{Diff}_l^{(+)}(P,Q)$ ($\mathrm{Diff}_l^{(+)}(Q), \mathrm{Diff}_l^{(+)} A$).
Алгебра д.о. В силу того, что $\mathrm{Diff}_l(P,Q) \subset \mathrm{Diff}_{l+1}(P,Q)$ можно рассмотреть пространство
$$\mathrm{Diff}(P,Q) = \bigcup_{l \geqslant 0} \mathrm{Diff}_{l+1}(P,Q).$$
Если $P = Q$, то пространство $\mathrm{Diff}(P,P)$ превращается в (некоммутативную) A-алгебру относительно композиции дифференциальных операторов.

11.1. Докажите, что $\delta_{a,b} = \delta_{b,a}$ и $\delta_{ab} = a^+\delta_b + b\delta_a$.

11.2. Пусть $\varkappa^n = (1, \ldots, n)$ — упорядоченный набор натуральных чисел и $\varkappa = (i_1, \ldots, i_l), l \leqslant n$ — его упорядоченное подмножество. Положим

$|\varkappa| = l, a_\varkappa = a_{i_1} \cdot \cdots \cdot a_{i_l}$ и $\delta_{a_\varkappa} = \delta_{a_1} \circ \cdots \circ \delta_{a_l}$, а его упорядоченное дополнение до $\varkappa^n$ будем обозначать $\overline{\varkappa}$. Пусть теперь Δ, ∇ — K-линейные отображения двух A-модулей. Докажите, что
$$\delta_{a_{\varkappa^n}}(\Delta \circ \nabla) = \sum_{|\varkappa| \leqslant n} \delta_{a_\varkappa}(\Delta) \circ \delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla),$$
$$\delta_{a_{\varkappa^n}}(\Delta)(b) = \sum_{|\varkappa| \leqslant n} (-1)^{|\varkappa|} a_\varkappa \Delta(a_{\overline{\varkappa}} b),$$
Если $\Delta \in \mathrm{Diff}_m(P,Q), m < n$, то
$$\Delta(a_{\varkappa^n} b) = -\sum_{0 < |\varkappa| \leqslant n} (-1)^{|\varkappa|} a_\varkappa \Delta(a_{\overline{\varkappa}} b).$$

11.3. $\mathrm{Diff}_l(Q,R) \circ \mathrm{Diff}_m(P,Q) \subset \mathrm{Diff}_{l+m}(P,R)$.

11.4. Докажите, что коммутатор $[\Delta_1, \Delta_2] = \Delta_1 \circ \Delta_2 - \Delta_2 \circ \Delta_1$ двух операторов $\Delta_1 \in \mathrm{Diff}_k A$, $\Delta_2 \in \mathrm{Diff}_l A$ является д.о. порядка $\leqslant k + l - 1$.

11.5. Докажите, что для $k \geqslant l$ $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q) \subset \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$.

11.6. Пусть $I \subset A$ — произвольный идеал, $a \in I^k, \Delta \in \mathrm{Diff}_n A$ и $n < k$. Тогда $\Delta(a) \in I^{k-n}$.

11.7. Пусть $I \subset A$ — идеал, P, Q — A-модули, $p \in I^k P, \Delta \in \mathrm{Diff}_n(P,Q)$ и $n < k$. Тогда $\Delta(p) \in I^{k-n} Q$.

11.8. (Локальность дифференциальных операторов) Если функции $f, g \in C^\infty(M)$ совпадают на некоторой окрестности $U \ni z$, то для любого дифференциального оператора Δ
$$\Delta(f)(z) = \Delta(g)(z).$$

11.9. Устойчиво ли множество $D(A)$ относительно правого умножения?

11.10. Докажите, что

(a) для любого оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_l C^\infty(M)$, M — гладкое многообразие, корректно определено сужение $\Delta|_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ на произвольное открытое множество $U \subset M$ по правилу
$$\Delta|_U(f)(z) = \Delta(g)(z), \quad f \in C^\infty(U), g \in C^\infty(M), z \in U,$$
где $g|_U = f$.

(b) Если для некоторого оператора $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ корректно определено его сужение на любую окрестность, т.е. описанное в пункте a) равенство выполнено для любой функции g, то этот оператор дифференциальный (теорема Петри).

11.11. Пусть $\Delta \in \mathrm{Diff}_l C^\infty(M)$ и $x_1, \dots, x_n$ — система локальных координат в некоторой окрестности $U \subset M$, M — гладкое многообразие. Тогда оператор $\Delta|_U$ можно представить в виде

$$\Delta|_U(f) = \sum_{|\sigma|=0}^{l} \alpha_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x^\sigma}, \quad \alpha_\sigma \in C^\infty(U).$$

11.12. Докажите, что алгебра $\mathrm{Diff}(C^0(M))$, где M — гладкое многообразие, состоит из операторов нулевого порядка.

11.13. Опишите алгебру $\mathrm{Diff}(C^\infty(K))$ дифференциальных операторов гладкого множества на координатном кресте K. Докажите, что она не порождается операторами первого порядка.

11.14. Опишите алгебры д.о. для $K[x]/x^{l+1}K[x]$ алгебры срезанных полиномов, $K = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Порождаются ли они операторами первого порядка?

11.15. Докажите, что любой дифференциальный оператор алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ порядка больше чем один может быть представлен как сумма композиций операторов первого порядка.

11.16. Пусть $\Delta \in \mathrm{Diff}_l C^\infty(M), f, g \in C^\infty(M)$ и $z \in M$. Тогда $\Delta(f)(z) = \Delta(g)(z)$, если $f = g \mathrm{mod} \mu_z^{l+1}$.

11.17. Докажите, что соответствие $\mathrm{Diff}_l : P \mapsto \mathrm{Diff}_l P$ является функтором на категории A-модулей $\mathcal{M}od(A)$ (абсолютный функтор дифференциального исчисления).

11.18. Докажите, что при фиксированном модуле P соответствие $\mathrm{Diff}_l^{(+)}(P, \cdot) : Q \mapsto \mathrm{Diff}_l^{(+)}(P, Q)$ является ковариантным функтором из категории $\mathcal{M}od(A)$ в категорию A-бимодулей (относительный функтор ДИ).

11.19. Докажите, что при фиксированном модуле P соответствие $\mathrm{Diff}_l^{(+)}(\cdot, P) : Q \mapsto \mathrm{Diff}_l^{(+)}(Q, P)$ является контравариантным функтором.

11.20. Убедитесь, что

$$\mathrm{Diff}_0(P, Q) = \mathrm{Diff}_0^+(P, Q) = \mathrm{Hom}_A(P, Q).$$

11.21. Докажите, что тождественные операторы

$$i^+ : \mathrm{Diff}_l(P, Q) \to \mathrm{Diff}_l^+(P, Q),$$

$$i_+ : \mathrm{Diff}_l^+(P, Q) \to \mathrm{Diff}_l(P, Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant l$.

11.22. Докажите, что бимодуль $\mathrm{Diff}^{(+)}(P, P)$ является некоммутативной A-алгеброй.

11.23. Докажите, что

(a) вложение $i^+ : D(Q) \to \mathrm{Diff}_1^{(+)}(Q)$ является мономорфным дифференциальным оператором первого порядка;

(b) вложение $i : D(Q) \to \mathrm{Diff}_1(Q)$ является мономорфизмом модулей;

11.24. Рассмотрим отображение

$$\mathfrak{D}_l : \mathrm{Diff}_l^+(Q) \to Q, \quad \mathfrak{D}_l(\Delta) = \Delta(1).$$

Докажите, что $\mathfrak{D}_l$ является дифференциальным оператором порядка l, но как оператор $\mathfrak{D}_l : \mathrm{Diff}_l(Q) \to Q$ он является гомоморфизмом.

11.25. Пусть $A = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выпишите координатное представление оператора $\mathfrak{D}_l$ в этом случае.

11.26. Докажите точность последовательностей

$$0 \to D(Q) \xrightarrow{i} \mathrm{Diff}_l(Q) \xrightarrow{\mathfrak{D}_l} Q \to 0,$$

$$0 \to Q \to \mathrm{Diff}_l(Q) \xrightarrow{\pi} D(Q) \to 0,$$

где $\pi(\Delta) = \Delta - \Delta(1)$.

11.27. Докажите, что функтор $\mathrm{Diff}_l^+(\cdot, Q)$ представим, представляющим объектом этого функтора является модуль $\mathrm{Diff}_l^+(Q)$, а *универсальным оператором* является $\mathfrak{D}_l$, т.е. для любого P и гомоморфизма φ

$$\mathrm{Diff}_l^+(P, Q) \cong \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Diff}_l^+(Q)),$$

$$\Delta = \mathfrak{D}_l \circ \varphi.$$

11.28. Докажите, что для любого модуля Q существует единственный гомоморфизм $c_{l,s}$, который называется *универсальной композицией*, такой что даграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}_s^+(\mathrm{Diff}_l^+ Q) \arrow[r, "\mathfrak{D}_s"] \arrow[d, "c_{l,s}"'] & \mathrm{Diff}_l^+ Q \arrow[d, "\mathfrak{D}_l"] \\
\mathrm{Diff}_{s+l}^+ \arrow[r, "\mathfrak{D}_{s+l}"] & Q
\end{tikzcd}$$

11.29. Универсальная композиция ассоциативна, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}_l^+(\mathrm{Diff}_s^+(\mathrm{Diff}_m^+ Q)) \arrow[r, "\mathfrak{c}_{l,s}"] \arrow[d, "\mathrm{Diff}_l^+(c_{s,m})"'] & \mathrm{Diff}_{l+s}^+(\mathrm{Diff}_m^+ Q) \arrow[d, "c_{l+s,m}"] \\
\mathrm{Diff}_l^+(\mathrm{Diff}_{s+m}^+ Q) \arrow[r, "c_{l,s+m}"] & \mathrm{Diff}_{s+l+m}^+ Q
\end{tikzcd}$$

11.30. Сопоставление $c_{l,s} : \mathrm{Diff}_l^+ \mathrm{Diff}_s^+ \Rightarrow \mathrm{Diff}_{l+s}^+$ является естественным преобразованием функторов, т.е. для любого гомоморфизма $\varphi : Q \to Q'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}_l^+(\mathrm{Diff}_s^+ Q) \arrow[r, "\mathfrak{c}_{l,s}(Q)"] \arrow[d, "\mathrm{Diff}_l^+(c_{s,m})"'] & \mathrm{Diff}_{l+s}^+ Q \arrow[d, "\mathrm{Diff}_{l+s}^+(\varphi)"] \\
\mathrm{Diff}_l^+(\mathrm{Diff}_s^+ Q') \arrow[r, "c_{l,s}(Q')"] & \mathrm{Diff}_{s+l}^+ Q'
\end{tikzcd}$$

11.31. Опишите поэлементное действие гомоморфизма $c_{l,s}$ и его координатное представление при условии $A = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

11.32. Diff-продолжения $\Delta_l : \mathrm{Diff}_l^+ P \to Q$ дифференциального оператора $\Delta : P \to Q$ порядка $\leqslant k$ определяются как композиции $\Delta_l = \Delta \circ \mathfrak{D}_l$.

Эти продолжения порождают серию гомоморфизмов, определяемых коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}_l^+(P) \arrow[r, "\mathfrak{D}_l"] \arrow[d, "\varphi_\Delta^l"'] & P \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathrm{Diff}_{k+l}^+(Q) \arrow[r, "\mathfrak{D}_{k+l}"] & Q
\end{tikzcd}$$

Пусть $A = P = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выпишите координатное представление операторов Δ_l и гомоморфизмов φ_Δ^l.

11.33. Опишите пространство $\mathrm{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}) \oplus C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}) \oplus C^\infty(\mathbb{R}))$.

11.34. Пусть $\Delta \in \mathrm{Diff}_l^{(+)}(C^\infty(\mathbb{R}))$ и $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Докажите, что $[f, \Delta] \in \mathrm{Diff}_{l-1}^{(+)}(C^\infty(\mathbb{R}))$.

11.35. Докажите, что если $C^\infty(M)$-модуль Q геометричен, то геометричен и модуль $\mathrm{Diff}_l(P, Q)$.

Решения и указания.

11.1.

$$\delta_{ab}(\Delta) = (\delta_a \circ \delta_b)(\Delta) = \delta_a(\delta_b(\Delta)) = \delta_a(\Delta(b\cdot) - b\Delta(\cdot)) =$$

$$= \Delta(ab) - b\Delta(a) - a\Delta(b) + ab\Delta(\cdot)$$

$$\delta_{ba}(\Delta) = \delta_b(\delta_a(\Delta)) = \delta_b(\Delta(a\cdot) - a\Delta(\cdot)) = \Delta(ba) - b\Delta(a) - a\Delta(b) + ab\Delta(\cdot).$$

В силу коммутативности алгебры $\delta_{ab}(\Delta) = \delta_{ba}(\Delta)$.

Наконец, запишем

$$\delta_{ab}(\Delta) = \Delta(ba) - b\Delta(a) - a\Delta(b) + ab\Delta(\cdot) =$$

$$= [\Delta(ab\cdot) - b\Delta(a\cdot)] - a[\Delta(b\cdot) - b\Delta(\cdot)] = a^+\delta_b(\Delta) - a\delta_b(\Delta).$$

11.2. Докажем тождества математической индукцией по n.

а) База $n = 1$ первого тождества записывается как легко проверяемое тождество

$$\delta_a(\Delta \circ \nabla) = \delta_a(\Delta) \circ \nabla + \Delta \circ \delta_a(\nabla).$$

Пусть тождество верно для данного n. Запишем для $n+1$:

$$\delta_{a_{\varkappa^{n+1}}}(\Delta\circ\nabla)=\delta_{a_{n+1}}\left(\sum_{|\varkappa|\leqslant n}\delta_{a_\varkappa}(\Delta)\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla)\right)=$$

$$=\sum_{|\varkappa|\leqslant n}(\delta_{a_{n+1}}\circ\delta_{a_\varkappa})(\Delta)\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla)+\sum_{|\varkappa|\leqslant n}\delta_{a_\varkappa}(\Delta)\circ(\delta_{a_{n+1}}\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}})(\nabla),$$

что имеет требуемый вид записи.

б) второе тождество доказывается аналогично.

в) третье тождество прямо следует из второго, так как левая его часть обращается в ноль, согласно определению дифференциаьного оператора соответствующего порядка.

11.3.
$$\delta_{\varkappa^n}(\Delta\circ\nabla)=\sum_{|\varkappa|\leq n}\delta_{a_\varkappa}(\Delta)\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla).$$

При $n=l+m$ получаем:

$$\delta_{x^{l+m}}(\Delta\circ\nabla)=\sum_{|\varkappa|\leq l+m}\delta_{a_\varkappa}(\Delta)\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla).$$

Если $|\varkappa\geq l$, то $\delta_{a_\varkappa}(\Delta)=0$, т.к. $\Delta\in Diff_l(Q,R)$.

Если $|\overline{\varkappa}|\geq m$, то $\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla)=0$, т.к. $\nabla\in Diff_m(P,Q)$.

Чтобы композиция $\delta_{a_\varkappa}(\Delta)\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla)$ была не 0, необходимо $|\varkappa<l$ и $|\overline{\varkappa}|<m$, но тогда $|\varkappa|+|\overline{\varkappa}|<l+m$. Значит, все слагаемые вида $\delta_{a_\varkappa}(\Delta)\circ\delta_{a_{\overline{\varkappa}}}(\nabla)$ равны 0. Тогда $\delta_{x^{l+m}}(\Delta\circ\nabla)=0$, поэтому оператор $\Delta\circ\nabla\in Diff_{l+m}(P,R)$.

11.4. Найдем δ_a от коммутатора:

$$\delta_a(\Delta_1\circ\Delta_2-\Delta_2\circ\Delta_1)=\delta_a(\Delta_1)\circ\Delta_2+\Delta_1\circ\delta_a(\Delta_2)-\delta_a(\Delta_2)\circ\Delta_1-\Delta_2\circ\delta_a(\Delta_1).$$

Будем действовать индукцией по $|k+l|$. Если $k=l=0$, то получаем 0, т.к. Δ_1, Δ_2 — гомоморфизмы.

Если $k=1$, $l=0$ или $k=0$, $l=1$, то получаем:

$$\delta_a[\Delta,\nabla]=\Delta_1\delta_a(\Delta_2)-\delta_a(\Delta_2)\Delta_1=\delta_a(\Delta_2)\Delta_1-\delta_a(\Delta_2)\Delta_1=0$$

($\Delta_1\in Diff_0$, $\Delta_2\in Diff_1$).

База индукции доказана. Докажем индукционный переход. Для этого сгруппируем слагаемые:

$$\delta_a[\Delta,\nabla]=[\delta_a(\Delta_1),\Delta_2]+[\Delta_1,\delta_a(\Delta_2)].$$

Пусть доказано, что при $k+l\leq n$ выполняется $[\Delta_1,\Delta_2]\in Diff_{k+l-1}$. Тогда при $k+l$ получаем:

$$\delta_a[\Delta_1,\Delta_2]=[\delta_a(\Delta_1),\Delta_2]+[\Delta_1,\delta_a(\Delta_2)].$$

Операторы $\delta_a(\Delta_1)$ и $\delta_a(\Delta_2)$ имеют порядки $k-1$ и $l-1$, поэтому к коммутаторам $[\delta_a(\Delta_1),\Delta_2]$ и $[\Delta_1,\delta_a(\Delta_2)]$ применим предположение индукции: $[\delta_a(\Delta_1),\Delta_2]\in Diff_{k+l-2}$, $[\Delta_1,\delta_a(\Delta_2)]\in Diff_{k+l-2}$.

Тогда $\delta_a[\Delta_1,\Delta_2]$ имеет порядок не более $k+l-2$, а оператор $[\Delta_1,\Delta_2]$ имеет порядок $k+l-1$. Утверждение доказано.

11.6. Рассмотрим элементы $a_1,a_2,\ldots,a_k\in I^k$. Тогда

$$\Delta(a_\varkappa)=-\sum_{0<|\varkappa|\leq n}(-1)^{|\varkappa|}a_\varkappa\Delta(a_{\overline{\varkappa}}).\qquad(*)$$

Будем доказывать по индукции. Пусть $k=n+1$. Тогда в формуле $(*)$ у каждого слагаемого есть сомножитель из I, поэтому $\Delta(a_\varkappa)\in I^1=I^{k-n}$. База индукции доказана. Пусть при $k=n+q$ утверждение доказано. Тогда рассмотрим слагаемые в формуле $(*)$ $a_\varkappa\Delta(a_{\overline{\varkappa}})$.

Если $|\varkappa|\geq k-n$, то слагаемое лежит в I^{k-n}. Если $|\varkappa|<k-n$, то с учетом $|\varkappa|+|\overline{\varkappa}|=k$ получаем $|\overline{\varkappa}|=k-|\varkappa|>n$ и $\Delta(a_{\overline{\varkappa}})\in I^{k-|\varkappa|-n}$ по предположению индукции.

11.7. Доказательство из задачи 11.6 на этот случай переносится практически без изменений.

11.8. Если функции f и g совпадают на некоторой окрестности $U\ni z$, то разность $f-g\equiv0$ на окрестности U.

Обозначим через I идеал функций, которые обращаются в 0 в точке z. Если у некоторой функции η ряд Тейлора

$$\eta(y)=\sum_{|\sigma|\leq n}\frac{\partial^{|\sigma|}f}{\partial x^\sigma}(z)(y-z)^\sigma+\ldots$$

до порядка n обращается в 0, то по лемме Адамара $f(x)=\sum(y-x)^\sigma g_\sigma(x)$, где $g_\sigma(x)$ — некоторые гладкие функции.

Из леммы Адамара следует, что разность $f-g$, которая имеет нулевой ряд Тейлора любого порядка, лежит в I^k для любого $k \in \mathbb{N}$. Применим теорему: если $a \in I^k$, $\Delta \in Diff_n(\dots)$, $k > n$, то $\Delta(a) \in I^{k-n}$. При $k = n+1$ получаем, что $\Delta(f-g) \in I$, т.е. $\Delta(f)(z) = \Delta(y)(z)$.

11.9. Для дифференцирования $\Delta \in D(A)$ должно выполняться: $\forall a, b$: $\Delta(ab) - \Delta(a)b + a\Delta(b)$. Проверим:

$$a^+\Delta(bc) = \Delta(abc) = \Delta(ab)c + ab\Delta(c) = \Delta(a)bc + \Delta(b)ac + ab\Delta(c).$$

$$(a^+\Delta)(b)\cdot c + b(a^+\Delta)(c) = \Delta(ab)c + b\Delta(ac) = \Delta(a)bc + \Delta(b)ac + b\Delta(a)c + b\Delta(c)a = \\ = 2\Delta(a)bc + \Delta(b)ac + \Delta(c)ab.$$

Если D устойчиво относительно a^+, то должно быть:

$$\Delta(a)bc + \Delta(b)ac + \Delta(c)ab = 2\Delta(a)bc + \Delta(b)ac + \Delta(c)ab,$$

откуда следует, что $\Delta(a)bc \equiv 0$ для всех $a, b, c \in A$. Если $1 \in A$, то $\Delta(a) = 0$. Значит, $D(A)$ неустойчиво к правому умножению.

11.10. Доказательство см. в [1], стр. 174.

11.11. Доказательство см. в Теорема 9.60, [1], стр. 174.

11.16. Доказательство см. в 9.62, [1], стр. 175.

11.17. см. в [1], стр. 180.

12 Гамильтонов формализм

Символ д.о. Для произвольной коммутативной K-алгебры A можно рассмотреть фактор модули — пространства k-символов

$$\mathrm{Smbl}_k A = \mathrm{Diff}_k^{(+)} A / \mathrm{Diff}_{k-1}^{(+)} A$$

Символом $\mathrm{smbl}_k \Delta$ обозначается класс оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_k^{(+)} A$ в $\mathrm{Smbl}_k A$, а сам класс называется *символом оператора* Δ.

Алгебра символов д.о. По отношению к умножению $f \cdot g = \mathrm{smbl}_{k+l}(\Delta \circ \nabla)$, $\Delta \in \mathrm{Smbl}_k A, \nabla \in \mathrm{Smbl}_l A$, пространство $\mathrm{Smbl}_\star A = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathrm{Smbl}_i A$ становиться алгеброй, которая называется *алгеброй символов* алгебры A. С другой стороны, скобка $\{f, g\} = \mathrm{smbl}_{k+l-1}(\Delta \circ \nabla - \nabla \circ \Delta)$ превращает пространство символов в алгебру Ли.

Кокасательное пространство алгебры. В продолжении этого раздела мы предполагаем, что кольцо K является векторным пространством над $\mathbb{Q}$, т.е. элементы K-алгебры A можно делить на целые числа. Тогда, для каждого элемента $a \in A$ определено отображение

$$\Xi_a : \mathrm{Smbl}_\star A \to A, \quad \mathrm{smbl}_k(\Delta) \mapsto \frac{[\delta_a^k(\Delta)]}{k!},$$

которое позволяет построить отображение, при некоторых ограничениях инъективное, сопоставляющее каждому кокасательному вектору алгебры A точку спектра алгебры символов. На этом основании многообразие $|\mathrm{Smbl}_\star A|$ называется *кокасательным пространством* алгебры A и обозначается T^*A.

Кокасательное расслоение. Для гладкого многообразия M, в любой карте U, с локальными координатами $(x_1, \dots, x_n)$, можно рассмотреть дифференциальные операторы $p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, которые порождают все дифференциальные операторы. Таким образом, алгебра символов изоморфна алгебре полиномов $C^\infty(U)[p_1, \dots, p_n]$. Ее гладкая оболочка является гладкой алгеброй, естественно изоморфной

$$\overline{C^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

т.е. является картой на алгебре символов с локальными координатами

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n).$$

Таким образом, на формальном объединении $\cup_{z\in M}T^*_zM$ задается топология Зарисского, превращающая его в гладкое многообразие. Возникшее гладкое многообразие обозначается T^*M. Вместе с естественной проекцией

$$\pi : T^*M \to M, \quad T^*_zM \ni h \mapsto z \in M$$

оно называется *кокасательным расслоением.*

12.1. Докажите, что правая и левая структуры модулей дифференцирований порождают одну и ту же структуру A-модуля на пространстве символов.

12.2. Докажите, что по отношению к произведению $f \cdot g$ алгебра $\mathrm{Smbl}_\star A$ коммутативна.

12.3. Докажите, что по отношению к скобке $\{f, g\}$ пространство $\mathrm{Smbl}_\star A$ есть алгебра Ли и более того

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\},$$

т.е. отображение $X_f = \{f, \cdot\}$ является векторным полем на алгебре символов.

12.4. Докажите, что $\mathrm{Smbl}_1 A \subset \mathrm{Smbl}_\star A$ есть подалгебра Ли.

12.5. Докажите, что корректно задано соответствие

$$\mathrm{smbl}_1\Delta \leftrightarrow \Delta - \Delta(1) \in D(A)$$

которое устанавливает изоморфизм алгебр Ли $\mathrm{Smbl}_1 A$ и $D(A)$.

12.6. Докажите, что отображение Ξ_a является гомоморфизмом K-алгебр.

12.7. Пусть $I \subset A$ — идеал и $\Pi : A \to A/I$ — естественная проекция. Тогда $\Pi \circ \Xi_a = 0$, если $a \in I^2$.

12.8. Пусть $h \in |A|$. Тогда композиция

$$\gamma_{a,h} = h \circ \Xi_a : \mathrm{Smbl}_\star A \to K$$

является гомоморфизмом K-алгебр и, значит, является точкой спектра алгебры символов.

12.9. Докажите, что если

$$a - h(a) \cdot 1_A = b - h(b) \cdot 1_A \,\mathrm{mod} \mu_h^2,$$

то $\gamma_{a,h} = \gamma_{b,h}$.

12.10. Докажите, что отображение

$$i_h : T^*_h A = \mu_h/\mu_h^2 \to |\mathrm{Smbl}_\star A|, \quad i_h([a]) = \gamma_{a,h}$$

корректно определено.

12.11. Пусть K — поле и для всякого $\xi \in T_h A$ существует такое дифференцирование $X \in D(A)$, что $\xi = h \circ X$ (продолжимость векторного поля). Тогда отображение i_h инъективно.

12.12. Отображение $i_z : T^*_z C^\infty(M) \to |\mathrm{Smbl}_\star C^\infty(M)|$ инъективно.

12.13. Отождествим A с $\mathrm{Smbl}_0 A$. Пусть $\tilde{h} \in |\mathrm{Smbl}_\star A|$, тогда

(a) $\tilde{h}|_A \in |A|$,

(b) если $\tilde{h} \in \mathrm{Im} i_h$, то $\tilde{h}|_A = h$.

12.14. Отождествим $D(A)$ с $\mathrm{Smbl}_1 A$. Пусть $a \in A, X \in D(A), \tilde{h} \in |\mathrm{Smbl}_\star A|$

(a) $\tilde{h}(aX) = h(a)\tilde{h}(X)$

(b) корректно определены отображения модулей

$$\hat{h} : D(A)/\mu_h D(A) \to K, \quad \hat{h}(X \mathrm{mod} \mu_h D(A)) = \tilde{h}(X),$$

$$\tau_h : D(A)/\mu_h D(A) \to T_h A, \quad X \mathrm{mod} \mu_h D(A) \mapsto h \circ X.$$

12.15. Если $A = C^\infty(M)$, то τ_h — изоморфизм векторных пространств над $\mathbb{R}$.

12.16. Пусть K-алгебра A такова, что для любого натурального l всякий дифференциальный оператор порядка $\leqslant$ представим в виде суммы мономов вида $aX_1 \circ \cdots \circ X_s$, где $X_i \in D(A), s \leqslant l$. Тогда, если $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in |\mathrm{Smbl}_\star A|$, $\tilde{h}_1\Big|_A = \tilde{h}_2\Big|_A$ и $\tilde{h}_1\Big|_{\mathrm{Smbl}_1 A} = \tilde{h}_2\Big|_{\mathrm{Smbl}_1 A}$, то $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2$.

12.17. Опишите спектр алгебры символов на координатном кресте и саму алгебру как алгебру функций на своем спектре.

12.18. Для гладкого многообразия M, в любой карте U, с локальными координатами $(x_1, \dots, x_n)$, алгебра символов $\mathrm{Smbl}_\star C^\infty(U)$ изоморфна алгебре полиномов $C^\infty(U)[p_1, \dots, p_n]$. Если изоморфизм алгебр обозначить $\mathfrak{s}$, то для любого оператора $\Delta = \sum_{|\sigma|\leqslant k} a_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma} \in \mathrm{Diff}_k C^\infty(U)$

$$\mathfrak{s}(\Delta) = \sum_{|\sigma|=k} a_\sigma p^\sigma.$$

12.19. Пусть A — K-алгебра, $h \in |A|$ и $S_+ = \sum_{i>0} \mathrm{Smbl}_i A$. Тогда отображение

$$\bar{h} : \mathrm{Smbl}_\star A \to K, \quad \bar{h}|_A = h, \bar{h}|_{S_+} = 0,$$

является гомоморфизмом K-алгебр, т.е. $\bar{h} \in |\mathrm{Smbl}_\star A|$.

Решения и указания.

12.1. Рассмотрим разницу между правой и левой структурами на дифференциальном операторе $\Delta \in Diff_n$:

$$a^+\Delta - a \cdot \Delta = \Delta(a\cdot) - a\Delta = \delta_a(\Delta).$$

Так как $\Delta \in Diff_n(A)$, то $\delta_a(\Delta) \in Diff_{n-1}(A)$. Значит, $\delta_a(\Delta)$ в множестве символов равна 0. Тогда, т.к. $a^+\Delta - a \cdot \Delta \in Diff_{n-1}(A)$, то левая и правая структуры совпадают в множестве символов.

12.2. Рассмотрим коммутатор $\Delta \in Diff_k$ и $\nabla \in Diff_l$: $[\Delta, \nabla] \in Diff_{k+l-1}$. Но так как $\Delta \circ \nabla \in Diff_{k+l}$, $\nabla \circ \Delta \in Diff_{k+l}$ по теореме о композиции операторов, то $\Delta \circ \nabla - \nabla \circ \Delta = [\Delta, \nabla] \in Diff_{k+l-1}$, и в модуле символов $smb_{k+l}[\Delta, \nabla] = 0$. Значит, $smb(\Delta \circ \nabla - \nabla \circ \Delta) = 0$, откуда получается: $smb(\Delta \circ \nabla) = smb(\nabla \circ \Delta)$ — коммутативность.

12.3. Пусть $f = smb_k(\Delta^k)$, $g = smb_l(\nabla^l)$. Тогда $\{f, g\} = smb_{k+l-1}[\Delta, \nabla] = -smb_{k+l-1}[\nabla, \Delta] = -[g, f]$ — кососимметричность.

Линейность следует из линейности дифференциальных операторов.

Проверим тождество Якоби для дифференциальных операторов Δ, ∇ и $\Box$:

$$[\Delta, [\nabla, \Box]] + [\nabla, [\Box, \Delta]] + [\Box, [\Delta, \nabla]] = 0 :$$

$$\Delta(\nabla\Box - \Box\nabla) - (\nabla\Box - \Box\nabla)\Delta +$$

$$+\nabla(\Box\Delta - \Delta\Box) - (\Box\Delta - \Delta\Box)\nabla +$$
$$+\Box(\Delta\nabla - \nabla\Delta) - (\Delta\nabla - \nabla\Delta)\Box =$$
$$= \Delta\nabla\Box - \Delta\Box\nabla - \nabla\Box\Delta + \Box\nabla\Delta +$$
$$+\nabla\Box\Delta - \nabla\Delta\Box - \Box\Delta\nabla + \Delta\Box\nabla +$$
$$+\Box\Delta\nabla - \Box\nabla\Delta - \Delta\nabla\Box + \nabla\Delta\Box = 0.$$

Тождество Якоби переносим на символы:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Проверим свойства векторного поля: $f = smb(\Delta)$, $g = smb(\nabla)$, $h = smb(\Box)$.

$$\{f, g \circ h\} = smb([\Delta, \nabla \circ \Box]) = smb(\Delta \circ \nabla \circ \Box - \nabla \circ \Box \circ \Delta) =$$
$$= smb(\Delta\nabla\Box - \nabla\Delta\Box + \nabla\Delta\Box - \nabla\Box\Delta) =$$
$$= smb((\Delta\nabla - \nabla\Delta)\Box + \nabla(\Delta\Box - \Box\Delta)) =$$
$$= smb([\Delta, \nabla]\Box) + smb(\nabla, [\Delta, \Box]) = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Значит, $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

12.4. $Smb_1(A)$ замкнуто относительно умножения: если $f = smb_1(\Delta)$, $g = smb_1(\nabla)$, то $\{f \circ g\} = smb_{1+1-1}([\Delta, \nabla]) = smb_1[\Delta, \nabla]$. Значит, $Smb_1(A)$ — подалгебра Ли $Smb(A)$.

12.5. Пусть $s = smb_1(\Delta)$. Тогда $\Delta \in Diff_1(A)$ и для любых $a, b \in A$ выполнено

$$0 = \delta_a \delta_b \Delta = \Delta(ab\cdot) - a\Delta(b\cdot) - b\Delta(a\cdot) + ab\Delta(\cdot).$$

Следовательно, $\Delta(abp) = a\Delta(bp) + a\Delta(ap) - ab\Delta(1)$, а значит, $\Delta \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(1) = 0$. Множество Smb устойчиво к правому умножению. Поэтому если $\Delta(ab) = \Delta(a)b + b\Delta(a)$ и $\Delta(1) = 1$, то $\Delta(ab) = a\Delta(b) + b\Delta(a) - ab\Delta(1)$. Следовательно, $\Delta(abp) + a\Delta(bp) + b\Delta(ap) - ab\Delta(p) = 0$. Значит, $\delta_a \delta_b(\Delta)(p) = 0$, т.е. $\Delta \in Smb_1(A)$.

12.6. Рассмотрим формулу $\delta_{a_{\varkappa^n}}(\Delta \circ \nabla) = \sum_{|\varkappa| \leq n} \delta_\varkappa(\Delta) \circ \delta a_{\overline{\varkappa}}(\nabla)$, $a_i \in A$. Если $\Delta \in Diff_k$, $\nabla \in Diff_l$, $n = k + l$, то единственное ненулевое слагаемое в формуле имеет вид:

$$\delta a_{\varkappa^n}(\Delta \circ \nabla) = \sum_{|\varkappa| \leq n} \delta_a^k(\Delta) \circ \delta_a^l(\nabla) \qquad (*)$$

Наборы индексов $\varkappa$ являются упорядоченным, но сумма не зависит от порядка выбора индексов. Поэтому всего в формуле $(*)$ будет C_{k+l}^{k} слагаемых. Значит, $\delta_a^{k+l}(\Delta \circ \nabla) = C_{k+l}^{k} \delta_a^k(\Delta) \circ \delta_a^l(\nabla)$. Тогда

$$\Xi(\Delta \circ \nabla) = \frac{\delta_a^{k+l}(\Delta \circ \nabla)}{(k+l)!}(1) = \frac{C_{k+l}^{k}\delta_a^k(\Delta) \circ \delta_a^l(\nabla)}{(k+l)!} =$$

$$= \frac{(k+l)!k!l!}{(k+l)!}\delta_a^k(\Delta)\delta_a^l(\nabla) = \frac{\delta_a^k(\Delta)}{k!}\frac{\delta_a^l(\nabla)}{l!} = \Xi(\Delta) \circ \Xi(\nabla).$$

Значит, отображение Ξ является гомоморфизмом из $Smb(A)$ в A.

12.7. Рассмотрим формулу

$$\delta a_{\varkappa^n}(\Delta)(b) = \sum_{|\varkappa| \le n} (-1)^{|\varkappa|} a_{\varkappa} \Delta(a_{\overline{\varkappa}} b)$$

при $b = 1$, $a_{\varkappa} = a^k$.

$$\delta_0^k(\Delta)(1) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a^i \Delta(a^{k-i}).$$

Если $a \in I^2$, то $\delta_a^k(\Delta)(1) = \pm\Delta(a^k) \pmod{I^2}$, т.к. остальные слагаемые в сумме содержат множитель $a^i \in I^2$. Т.к. $a \in I^2$, то $a^k \in I^{2k}$. Пусть $\Delta \in Diff_k$, тогда $\Delta(a^k) : I^{2k} \to I^{2k-k} = I^k$, т.е. $\Delta(a^k) \in I$ и $\prod(\Xi(smb_k\Delta)) = 0$.

12.8. Рассмотрим композицию $\gamma_{a,h} = h \circ \Xi_a : Smb(A) \to A \to K$. Отображение Ξ является гомоморфизмом, h — гомоморфизм по определению, тогда $\gamma_{a,h}$ — гомоморфизм как композиция:

$$h \circ I_a(s_1 s_2) = b(\Xi_a(s_1)\Xi_a(s_2)) = h(\Xi_a(s_1) \circ h(\Xi_a(s_2)).$$

12.10. Пусть $a = b(mod \mu_h^2)$, $a, b \in \mu_h$. Тогда $h \circ \Xi_a = h \circ \Xi_b$ по задаче 12.9, т.е. i_h не зависит от представителя класса $[a]$.

12.12. Следствие 12.11, в силу продолжимости гладкого векторного поля.

12.13. Указание. b) $\tilde{h} = h \circ \Xi_a$, $\Xi_a|_A = id_A$.

13 Пространство джетов

Дифференциально замкнутая категория. Полная аффинная тензорная подкатегория категории всех модулей над алгеброй A называется *дифференциально замкнутой* если все функторы Diff_k и $\mathrm{Diff}_k(P, \cdot)$ представимы в ней.

Модуль джетов. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая дифференциально замкнутая категория модулей над алгеброй A. Представляющий объект функтора $\mathrm{Diff}_l(P, \cdot)$ называется модулем *l-джетов* $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P)$, т.е. для любого $Q \in \mathfrak{M}, \varphi \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P), Q)$

$$\mathrm{Diff}_l(P, Q) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P), Q),$$

$$\Delta = j_l^{\mathfrak{M}} \circ \varphi,$$

где универсальное дифференцирование $j_l^{\mathfrak{M}} : P \to \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P)$ для каждого $p \in P$ определяет его *l-джет* $j_l^{\mathfrak{M}}(p)$.

Универсальная проекция. Для каждого естественного вложения

$$\mathrm{Diff}_l(P, Q) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_{l+1}(P, Q)$$

можно рассмотреть двойственный эпиморфизм

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P) \overset{\nu_{l+1,l}^{\mathfrak{M}}}{\longleftarrow} \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^{l+1}(P).$$

Мы получаем последовательность

$$P \equiv \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^0(P) \leftarrow \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^1(P) \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P) \leftarrow \dots$$

Рассмотрим такие последовательности элементов $\{\theta_l\}_{l=0}^{\infty}$, что $\nu_{l+1,l}(\theta_{l+1}) = \theta_l$. Такие последовательности можно складывать и умножать на элементы алгебры A покомпонентно. Получившийся A-модуль $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^{\infty}(P)$ называется *пространство бесконечных джетов*. Естественным образом определяются отображения $\nu_{\infty,l}^{\mathfrak{M}} : \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^{\infty}(P) \to \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^l(P)$ и $j_{\infty}^{\mathfrak{M}} : P \to \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}^{\infty}(P)$.

Алгебраические джеты. Построим явно пространство l-джетов для категории $\mathcal{M}od(A)$. Пусть P — A-модуль. Рассмотрим A-модуль $A \otimes_K P$ и введем структуру бимодуля с помощью левого и правого умножения

$$b(a \otimes p) = ba \otimes p, \quad b_+(a \otimes p) = a \otimes bp.$$

Введем обозначение для разности

$$[a, \theta] = a\theta - a_+\theta, \quad a \in A, \theta \in A \otimes_K P.$$

Зафиксируем натуральное число и определим подмодуль, натянутый на элементы вида

$$\mu_l(P) =< \{[a_0, [a_1, \cdots [a_l, \theta]]]\} >\subset A \otimes_K P.$$

Определим фактор пространство

$$\mathcal{J}^l_{alg}(P) = (A \otimes_K P)/\mu_l(P).$$

Вместе с действием элемента $b[a\otimes p] = [ba\otimes p]$ оно становится A-модулем. Заметим, что $\mathcal{J}^0_{alg}(P) \cong P$. Определим также отображение

$$j^{alg}_l : P \to \mathcal{J}^l_{alg}(P), \quad p \mapsto [1_A \otimes p].$$

Построенные объекты являются универсальными (см. упражнения).

13.1. Докажите, что оператор j^{alg}_l является дифференциальным оператором порядка $\leqslant l$.

13.2. Пусть $\Delta : P \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant l$. Тогда существует единственный гомоморфизм $\psi(\Delta)$, такой что $\Delta = \psi(\Delta) \circ j^{alg}_l$.

13.3. Докажите, что пространство джетов $\mathcal{J}^l_{alg}$ является представляющим объектом для функторов $\mathrm{Diff}_l(P, \cdot)$ и Diff_l

$$\mathrm{Diff}_l(P, Q) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}^l_{alg}(P), Q),$$

$$\mathrm{Diff}_l(P) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}^l_{alg}(A), P).$$

13.4. Докажите точность последовательности

$$0 \to \mu_l(P)/\mu_{l+1}(P) \to \mathcal{J}^{l+1} \overset{\nu_{l+1,l}}{\to} \mathcal{J}^l(P) \to 0.$$

13.5. Докажите, что $j_\infty : P \to \mathcal{J}^\infty(P)$ не является дифференциальным оператором.

13.6. Докажите, что $\mathcal{J}^l : P \Rightarrow \mathcal{J}^l(P)$ является коваринатным функтором.

13.7. Докажите, что корректно определяется *универсальная ко-композиция* $c^{l,s}$:

$$j_s \circ j_l = c^{l,s} \circ j_{l+s},$$

являющаяся двойственной в категорном смысле к универсальной композиции $c_{l,s}$.

13.8. Докажите, что $\mu_{l+1}(P) \subset \mu_l(P)$ и $\mu_l(P)/\mu_{l+1}(P) = \mathrm{Ker}\nu_{l+1,l}$.

13.9. Докажите, что ко-композиция является естественным преобразованием функторов $\mathcal{J}^{k+l} \Rightarrow \mathcal{J}^k(\mathcal{J}^l)$.

13.10. Докажите представимость функторов $\mathrm{Diff}_l(P, \cdot)$ и Diff_l в категории $\mathfrak{G}Mod(C^\infty(M))$. Пусть P, Q — геометрическиуе модули над $C^\infty(M)$

$$\mathrm{Diff}_l(P, Q) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{G}(\mathcal{J}^l_{alg}(P)), Q),$$

$$\mathrm{Diff}_l(P) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{G}(\mathcal{J}^l_{alg}(A)), P),$$

13.11. Для модуля $\mathcal{J}^1_{alg}(A)$ определено вложение $i_1 : A \to \mathcal{J}^1_{alg}(A)$, $i(a) = [a\otimes 1]$. Докажите, что $\Lambda_{alg}(A) = \mathcal{J}^1_{alg}(A)/\mathrm{im}\, i_1(A)$ и $d = \pi\circ j^{alg}_1 : A \to \Lambda_{alg}(A)$ является универсальным дифференцированием.

13.12. Докажите точность последовательности

$$0 \to A \overset{i_1}{\to} \mathcal{J}^1_{alg}(A) \to \Lambda_{alg}(A) \to 0.$$

13.13. Пусть K — векторное пространство над $\mathbb{Q}$, A — K-алгебра, такая, что $\Lambda_{alg}(A)$ является проективным модулем с конечным числом образующих. Докажите, что

(a) $\mathrm{Ker}\nu^{alg}_{l,l-1} \cong S^{\otimes^l}\Lambda_{alg}(A)$,

(b) если P проективный A-модуль, то проективен и $\mathcal{J}^k_{alg}(P)$,

13.14. Jet-продолжения $\Delta^l : P \to \mathcal{J}^l(Q)$ дифференциального оператора $\Delta : P \to Q$ порядка $\leqslant k$ определяются как композиции $\Delta^l = j_l \circ \Delta$. Эти продолжения порождают серию гомоморфизмов φ^Δ_l, таких что

$$\varphi^\Delta_l \circ j_{k+l} = j_l \circ \Delta.$$

Пусть $A = P = Q = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выпишите координатное представление операторов Δ^l и гомоморфизмов φ^Δ_l.

13.15. Докажите, что $\mathcal{J}^1(A) = A \oplus \Lambda^1(A)$.

13.16. Докажите, что

$$\mathrm{Diff}_k(\mathrm{Diff}_k(J^k)) \cong \mathrm{Hom}_A(J^k \otimes_A J^k, J^k),$$

т.е. каждый элемент левого модуля задает умножение в джетах. Опишите такой элемент, который порождает умножение

$$aj_k(b) \cdot cj_k(d) = acj_k(bd).$$

Докажите, что относительно описанного умножения модуль джетов становится коммутативной унитарной A-алгеброй.

13.17. Найдите A- и K-спектр алгебры k-джетов.

13.18. Докажите, что модуль $\mathrm{Ker}\nu_{k,k-1}$ порождается элементами вида

$$([\delta_{a_1} \circ \dots \circ \delta_{a_k}](j_k))(1).$$

13.19. Докажите, что убывающая фильтрация

$$J^\infty \supset \mathrm{Ker}\nu_{\infty,0} \supset \mathrm{Ker}\nu_{\infty,1} \supset \dots$$

является фильтрованной алгеброй, т.е.

$$\mathrm{Ker}\nu_{\infty,k} \cdot \mathrm{Ker}\nu_{\infty,s} \subset \mathrm{Ker}\nu_{\infty,k+s+1}.$$

13.20. Докажите, что

$$\mathrm{Ker}\nu_{\infty,l}/\mathrm{Ker}\nu_{\infty,l+1} \cong \mathrm{Ker}\nu_{l+1,l}.$$

Эти модули называются пространствами *косимволов* д.о. порядка l.

13.21. Умножение в фильтрованной алгебре задает умножение косимволов разных порядков. Если ввести обозначение $\tilde{j}_k(a) = j_k(a) - aj_k(1)$, то на порождающих элементах умножение будет иметь вид

$$(\tilde{j}_k(a_1) \cdot \dots \cdot \tilde{j}_k(a_k)) \bullet (\tilde{j}_s(b_1) \cdot \dots \cdot \tilde{j}_s(b_s)) = \tilde{j}_{k+s}(a_1) \cdot \dots \cdot \tilde{j}_{k+s}(b_s).$$

Относительно этого умножения прямая сумма модулей косимволов $\mathrm{Csm}(A)$ становится унитарной коммутативной алгеброй.

13.22. Алгебра косимволов порождается $\bullet$-произведением элементов 1-косимволов как A-модуль.

13.23. Постройте естественную биекцию K-спектра алгебры косимволов на касательное расслоение алгебры.

13.24. Опишите A-спектр алгебры косимволов.

Решения и указания.

13.1. Рассмотрим $(\delta_a j_k)(b) = aj_k(b) - j_k(ab) = a \cdot [a \otimes b]_{\mu_k} - [1 \otimes ab]_{\mu_k} = [a \cdot (1 \otimes b) - a_+(1 \otimes b)]_{\mu_k} = [a, 1 \otimes b]$.

Последнее равенство следует из того, что на модуле $J^l_{alg}(P)$ введена структура левого умножения на $a \in A$. Тогда $(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k} j_k)(b) = ([a_0, [a_1, \dots [a_k, 1 \otimes b] \dots])_{\mu_k} = 0$, т.к. комбинация всех скобок лежит в μ_k.

13.2. Зададим гомоморфизм A-модулей $h(A) : J^l_{alg} \to Q$. Для заданного $\Delta \in Diff_l(P,Q)$ на образующих: $h(\Delta)(j_l(p)) := \Delta(p)$, $p \in P$, т.е. $h(\Delta) \circ j_l = \Delta$.

Проверим корректность: пусть есть $p_1, p_2 \in P$, такие что $j_l(p_1) = j_l(p_2)$. Тогда $j_l(p_1) - j_l(p_2) \in \mu_l$, т.е. $j_l(p_1) - j_l(p_2) = \sum \alpha_i(\delta_{a^i_0 \dots a^i_l})(1 \otimes b_i)$ по определению μ_l. Заметим, что $h_\Delta(\delta_a j_l) = h_\Delta(aj_\varkappa(\cdot) - j_\varkappa(a\cdot)) =$ (т.к. h гомоморфизм) $= ah_\Delta j_l - h_\Delta j_l(a\cdot)) = \delta_a h_\Delta(j_l)$. Тогда $h_\Delta(\delta_{a_0 \dots a_l} j_l) = (\delta_{a_0 \dots a_l})h_\Delta(j_k) = \delta_{a_0 \dots a_l}\Delta = 0$,т.к. $\Delta \in Diff_l(P,Q)$. Значит, h_Δ определен корректно.

Если $h^1_\Delta \circ j_l = h^2_\Delta \circ j_l$, то $(h^1_\Delta - h^2_\Delta)(j_l) \equiv 0$, поэтому h^1_Δ и h^2_Δ совпадают на J^l_{alg}, т.е. h_Δ единственный.

13.3. По задаче 13.2 для каждого оператора $\Delta \in Diff_l(P,Q)$ существует единственный гомоморфизм $\psi(\Delta) : J_{alg}(P) \to Q$, такой что $\Delta = \psi \circ j_l$. Тогда по определению представимого функтора объект $J_{alg}(P) \subset Mod(K)$ является представляющим, а соответствие $\Delta \to \psi$ является изоморфимом. Действительно, отображение $g : \Delta \to \psi(\Delta)$ однозначно определяет отображение $g : Diff_l(P,Q) \to Hom_K(J_{alg}(P),Q)$. Обратное отображение строится так: пусть есть $h \in Hom_K(J_{alg}(P),Q)$, тогда положим $\Delta(h) = h \circ j_l \in Diff_k(P,Q)$ по теореме о композиции $j_l \in Diff_l(P, J^l_{alg}(P))$ и $h \in Hom(J(P),Q)$. Для оператора $\Delta(h) = h \circ j_l$ по задаче 13.2 существует единственнный гомоморфизм $h(\Delta) : J(P) \to Q$, и тогда $\psi(\Delta(h)) = h$ — совпадает по построению. Значит, отображения $\Delta \xrightarrow{g} \psi(\Delta) \xrightarrow{f} \Delta$ $(g \circ f = id)$ и $h \xrightarrow{f} \Delta(h) \xrightarrow{g} h$ $(f \circ g = id)$ являются обратными,поэтому получается, что $Diff_k(P,Q) \approx Hom_K(J^l_{alg}(P),Q)$.

Случай $Diff_k(P) = Diff_k(A, P) = Hom_K(J_{alg}(A), Q)$ получается аналогично.

13.4. Так как $j_l : P \to J^l(P)$ — дифференциальный оператор порядка не более l, то по теореме о представлении $Diff(P)$ существует такой гомоморфизм $\nu_{l+1,l} : J^{l+1}(P) \to J^l(P)$, такой что $j_l = \nu_{l+1,l} \circ j_{l+1}$. Ясно, что $\nu_{l+1,l}$ — эпиморфизм, т.к. $Imj_l = J^l(P)$ по построению $J^l(P)$.

Рассмотрим последовательность

$$0 \to \mu_l(P)/\mu_{l+1}(P) \xrightarrow{g_1} J^{l+1}(P) \xrightarrow{g_2=\nu_{l+1,l}} J^l(P) \to 0.$$

1) $Im\nu_{l+1,l}(J^{l+1}(P)) = J^l(P)$.

2) Рассмотрим $Ker\nu_{l+1,l}$ на образующих:

$$[1 \otimes p]_{\mu_{l+1}} \to [1 \otimes p]_{\mu_l} = 0.$$

Это значит, что $1 \otimes p \in \mu_l$, и если $1 \otimes p_1$ и $1 \otimes p_2$ отличаются на элемент из идеала μ_{l+1}, то они одинаковы в $J^{l+1}(P)$. Значит, $Ker\nu_{l+1,l}$ — это элементы $1 \otimes p$, лежащие в μ_l, по модулю μ_{l+1}, т.е. $Ker\nu_{l+1,l} = \mu_l/\mu_{l+1} = Img_1$.

Значит, последовательность $\to g_1 \to g_2$ — точная.

3) $Im(0 \to \mu_l(P)/\mu_{l+1}(P) = 0$. Тогда также $f \in \mu_{l+1}$, а это значит, что $[f]_{\mu_{l+1}} = 0$.

13.5. Запишем $j_\infty(p) = (j_0(p), j_1(p), \dots, j_l(p), \dots)$

По правилам покомпонентного умножения:

$$\delta_{a_0 \dots a_n}(j_\infty) = (\delta_{a_0 \dots a_n} j_0, \delta_{a_0 \dots a_n} j_1, \dots, \delta_{a_0 \dots a_n} j_l, \dots).$$

Тогда компоненты с идеалами $\leq n$ обращаются в ноль, т.к. $j_l \in Diff_l(P)$. Но если предположить, что существует n: $j_\infty \in Diff_n(P)$, то $j_{n+1}, j_{n+2}, \dots, j_{n+l}, \dots \in Diff_n$. Тогда существует отображение $j_{n+k} = \psi_{n+k} \circ j_n = (\psi_{n+k} \circ \nu_{n+k,n}) \circ j_{n+k}$. Это значит, что $\psi_{n+k} \circ \nu_{n+k,n} = id$, $j_{n+k} = \psi_{n+k} \circ j_n$, $j_n = \nu_{n+k,n} \circ j_{n+k}$. Также $j_n = \nu_{n+k,n} \circ j_{n+k} \circ \psi_{n+k} \circ j_n$. Следовательно, $\nu_{n+k,n}$ и ψ_{n+k} взаимно обратны. Значит, $J^{n+k} \approx J^n$ при $k \geq 1$. Если не так, то j_∞ — не дифференциальный оператор.

13.6. Рассмотрим два A-модуля P и Q и гомоморфизм $h^P \to Q$. Нужно построить гомоморфизм $h' : J^l(P) \to J^l(Q)$. Для этого рассмотрим $\Delta = j_l \circ h$, оператор $\Delta \in Diff_l(P, J^l(Q))$.По свойству универсальности существует единственный гомоморфизм $\psi(\Delta) : J^l(P) \to J^l(Q)$, такой что

$\Delta = \psi(\Delta) \circ j_l^p$. Это и есть искомый гомоморфизм $J_l(P) \to J_l(Q)$. Значит, соответствие $P \to J_l(P)$ является ковариантным функтором.

13.7. Рассмотрим оператор $j_l \circ j_s : P \to J^l(J^s(P))$. Это A-модуль, $\Delta = j_s \circ j_l \in Diff_{s+l}(P, J^l(J^s(P)))$ по теореме о композиции операторов. Тогда по свойству универсальности для дифференциального оператора $\Delta \in Diff_{s+l}$ существует гомоморфизм $\psi(\Delta) \in Hom(J^{k+s}(P), J^l(J^s(P))$, такой что $\Delta = \psi \circ j_{l+s}$. Значит, $j_s \circ j_l = \psi \circ j_{l+s}$. Гомоморфизм ψ задает универсальную ко-композицию $c^{s,l}$.

13.8. По определению $\mu_l(P) =< [a_0, [a_1, [\dots [a_l, G] \dots] >\subset A \otimes_K P$,

$\mu_{l+1}(P) =< [a_0, [a_1, [\dots [a_l, [a_{l+1}, G] \dots] >$.

Тогда если $q \in \mu_{l+1}$, то $q \in \mu_l$ для $\theta = [a_{l+1}, \theta']$ (на одно условие меньше). Поэтому определен фактормодуль $\mu_l(P)/\mu_{l+1}(P)$.

В $J^{l+1}(P)$ два элемента равны, если они отличаются на μ^{l+1}.

$$J^{l+1}(P) \xrightarrow{\nu_{l+1,l}} J^l(P) : j_{l+1}(p) \to j_l(p).$$

Если $q \in Ker\nu l + 1, l$, то $q \in \mu_l$ (0 в фактормодуле). Значения q_1 и q_2, которые отличаются на μ_{l+1}, одинаковы в $J^{l+1}(P)$. Значит, если $q \in Ker\nu_{l+1,l}$, то $q \in J^{l+1}(P)$, $q \in \mu_l$, q профакторизован по μ_{l+1}. Если $q \in \mu_l/\mu_{l+1}$, то $\nu_{l+1,l}(q) = [q]_{\mu_l} = 0$. Значит, $Ker\nu_{l+1,l} = \mu_l/\mu_{l+1}$.

13.9. Пусть $h : P \to Q$ — гомоморфизм. Тогда он порождает гомоморфизм $\psi : J^l(P) \to J^l(Q)$ и $F : J^{l+s}(P) \to J^{l+s}(Q)$, также и гомоморфизм $c^{l,s} : J^{l+s} \to J_l(J^s)$. Нужно построить гомоморфизм $G : J^l(J^s(P)) \to J^l(J^s(Q))$.

13.15. Вспомним, что существует естественное вложение $i_1 : A \to J^1(A)$, где $i_1(a) = aj_1(1)$. Возникает точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{i_1} J^1(A) \to J^1(A)/\mathrm{im}\, i_1 \to 0.$$

С другой стороны, $\nu_{1,0}(aj_1(1)) = a$, т.е. отображение $\nu_{1,0}$ расщепляет точную последовательность. Это влечет, в частности, что $J^1(A) = \mathrm{im}\, i_1 \oplus \mathrm{Ker}\nu_{1,0} = A \oplus \Lambda^1(A)$.

13.18. Рассмотрим произвольный элемент вида $(\delta_{\overline{a}}(j_k))(1)$:

$$\nu_{k,k-1}((\delta_{\overline{a}}(j_k))(1)) = (\delta_{\overline{a}}(j_{k-1}))(1) = 0.$$

Таким образом, этот элемент лежит в ядре. Обозначим модуль, порожденный элементами такого вида, символом I. Как подмодуль джета он является объектом категории. Рассмотрим гомоморфизм проекции $\pi : J^k \to J^k/I$. Докажем, что композиция $\pi \circ j_k$ является дифференциальным оператором порядка $\leqslant k-1$. Действительно, для любого $a \in A$

$$\delta_a(\pi \circ j_k) = a^+(\pi \circ j_k) - a(\pi \circ j_k) = \pi \circ (a^+ j_k) - \pi \circ (a j_k) = \pi \circ (\delta_a(j_k)).$$

Таким образом, для любого набора $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$

$$(\delta_{\overline{a}}(\pi \circ j_k))(b) = \pi((\delta_{\overline{a}}(j_k))(b)) = \pi(b((\delta_{\overline{a}}(j_k))(1))) = 0,$$

так как π — проекция на фактор модуль. Итак, $\pi \circ j_k \in \mathrm{Diff}_{k-1}(J^k/I)$ и в силу универсальности существует единственный гомоморфизм $h : J^{k-1} \to J^k/I$, такой, что $\pi \circ j_k = h \circ j_{k-1} = h \circ \nu_{k,k-1} \circ j_k$. Но это означает, что $\pi = h \circ \nu_{k,k-1}$, т.е. $\mathrm{Ker}\nu_{k,k-1} \subset \mathrm{Ker}\pi = I$. Доказано обратное включение, т.е. $\mathrm{Ker}\nu_{k,k-1} = I$.

13.19. Элемент $\theta \in \mathrm{Ker}\nu_{\infty,k-1}$ назовем *правильным*, если он является линейной комбинацией элементов вида

$$\theta = \{0, \ldots, 0, (\delta_{\overline{a}}(j_k))(1), (\delta_{\overline{a}}(j_{k+1}))(1), \ldots\}, \quad |\overline{a}| = k.$$

Ясно, что проекция множества правильных элементов порождает все элементы в $\mathrm{Ker}\nu_{k,k-1}$. Для любого другого элемента

$$\theta' = \{0, \ldots, 0, (\delta_{\overline{a}}(j_k))(1), \theta'_{k+1}, \ldots\}$$

разность $\theta - \theta'$ лежит в $\mathrm{Ker}\nu_{\infty,k}$ и имеет вид

$$\{0, \ldots, 0, 0, \sum_{\alpha} a_\alpha (\delta_{\overline{a}_\alpha}(j_{k+1}))(1), \ldots\},$$

т.е. является в свою очередь суммой правильного элемента из $\mathrm{Ker}\nu_{\infty,k}$ и элемента из $\mathrm{Ker}\nu_{\infty,k+1}$. Продолжая рассуждение, мы приходим к выводу, что любой элемент $\theta \in \mathrm{Ker}\nu_{\infty,k-1}$ может быть записан в виде суммы

$$\theta = \theta_k + \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{k+s} + \theta',$$

где каждый элемент $\theta_j \in \mathrm{Ker}\nu_{\infty,j-1}$, $j = k, \ldots, k+s$, является правильным, а $\theta' \in \mathrm{Ker}\nu_{\infty,k+s}$ — некоторый элемент. Рассмотрим теперь произвольный элемент $\tilde{\theta} \in \mathrm{Ker}\nu_{\infty,s-1}$ и его разложение в сумму правильных

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_s + \cdots + \tilde{\theta}_{s+k} + \tilde{\theta}'.$$

Произведение элементов θ и $\tilde{\theta}$ представляет собой сумму

$$\theta \cdot \tilde{\theta} = \sum_{i=s}^{s+k} \sum_{j=1}^{s+k} \tilde{\theta}_i \cdot \theta_j + \ldots,$$

где троеточие содержит произведения со штрихованными элементами. Для любого $t \leqslant k+s-1$ элемент $\nu_{\infty,t}(\theta \cdot \tilde{\theta})$ представляет собой сумму попарных произведений элементов вида

$$(\delta_{\overline{a}}(j_t))(1) \cdot (\delta_{\overline{b}}(j_t))(1),$$

где $|\overline{a}| \geqslant k, |\overline{b}| \geqslant s$. В свою очередь, непосредственное вычисление показывает, что для любого набора $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset A$

$$([\delta_{a_1} \circ \cdots \circ \delta_{a_m}](j_n))(1) = (j_n(a_1) - a_1 j_n(1)) \cdot \ \ldots \ \cdot (j_n(a_m) - a_m j_n(1)).$$

Это означает, что

$$(\delta_{\overline{a}}(j_t))(1) \cdot (\delta_{\overline{b}}(j_t))(1) = (\delta_{\overline{a},\overline{b}}(j_t))(1) = 0,$$

так как $t < k+s$, а $|\overline{a}, \overline{b}| \geqslant k+s$. Следовательно,

$$\theta \cdot \tilde{\theta} \in \mathrm{Ker}\nu_{\infty,k+s-1}.$$

13.22. Прямое следствие 13.21.

13.23. Мы построим естественное соответствие между точками спектра и точками $TA = \cup_{h \in |A|} T_h A$ касательного расслоения над A. Делаем это следующим образом. В алгебре косимволов первое слагаемое A является подалгеброй. Сужение каждого гомоморфизма h алгебры символов на эту подалгебру задает K-точку $h|_A$ алгебры A. Этот гомоморфизм $h|_A : A \to K$ фиксирует структуру A-модуля на K. Именно, действие задается $a \cdot k = h|_A(a)k$. Рассмотрим теперь сужение гомоморфизма h на подмодуль $\mathrm{Csm}_1(A)$. Сужение гомоморфизма на 1-косимволы определяет с учетом фиксированной структуры A-модуля на K A-линейное отображение в K

$$h|_{\mathrm{Csm}_1(A)} \in \mathrm{Hom}_A(\Lambda^1(A), K).$$

С другой стороны, как представляющий объект для функтора дифференцирования

$$\mathrm{Hom}_A(\Lambda^1(A), K) \cong D(K).$$

Это означает, что
$$h|_{\mathrm{Csm}_1(A)} \circ d = \delta \in D(K),$$
где $d : A \to \Lambda^1(A)$ — универсальное дифференцирование, и

$$\delta(ab) = h(a)\delta(b) + h(b)\delta(a)$$

в силу структуры A-модуля. Это означает, что если значение гомоморфизма h задано на 0-косимволах A, то его сужение на 1-косимволы есть дифференцирование в точке h.

Мы построили отображение

$$i : \mathrm{Spec}_K(\mathrm{Csm}(A)) \to TA = \cup_{h\in|A|} T_h A.$$

Отображение i — биекция. Ясно, что инъективность и сюръективность отображения i следуют из условия, что вся алгебра косимволов порождается как алгебра элементами из первых двух слагаемых градуировки. Это условие гарантирует однозначную продолжимость гомоморфизма, заданного на 1-косимволах, на произвольный косимвол при фиксированной точке спектра. Итак,

$$\mathrm{Spec}_K(\mathrm{Csm}(A)) \cong TA$$

для любой дифференциально замкнутой категории $\mathfrak{M}$.

13.24. Любой унитарный A-гомоморфизм H на первом слагаемом градуировки является тождественным, так как переводит единицу в единицу. Сужение на первые два слагаемых $H : A \oplus \Lambda^1(A) \to A$ в силу мультипликатовности дает равенство $H(a\lambda) = H(a)H(\lambda) = aH(\lambda)$, т.е. является гоморфизмом $H \in Hom_A(\Lambda^1(A), A) \cong D(A)$ и, значит, однозначно задается некоторым дифференцированием. С другой стороны, все слагаемые градуировки алгебры мультипликативно порождаются первыми двумя, а, значит,
$$Spec_A \mathrm{Csm}(A) \cong D(A).$$

Литература

1. Дж. Неструев. Гладкие многообразия и наблюдаемые. М.: МЦНМО, 2000. – 300 с.

2. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. 160 с.

3. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия, – М.: Наука, 1986, 304 с.

4. Робин Хартсхорн, Алгебраическая геометрия, – М.: Мир, 1981.

5. М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. – М.: Мир, 1972.

6. И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. – М.: Наука, 1988.

7. Дж. Харрис. Алгебраическая геометрия. Начальный курс. – М.: МЦНМО, 2005.

Оглавление

Учебное издание

АНТОНИК Алексей Вадимович
БУРЬЯН Сергей Николаевич
КАЛЬНИЦКИЙ Вячеслав Степанович
КОСОВСКИЙ Николай Николаевич
СОЛЫНИН Андрей Александрович

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

ЦНИТ «Астерион»
Подп. в печать 27.09.2022. Формат 60×84 1 /16.
Заказ № 142. Бумага офсетная. Печ. л. 7,625. Тираж 100.
191015, Санкт-Петербург, Суворовский пр., 61, пом. 23Н
: asterion@asterion.ru : https://asterion.ru/
: https://vk.com/asterion_izdatelstvo