Законодательное собрание Ленинградской области

Инвестиционно-строительная группа «МАВИС»

НО «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»

Межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика – это просто!»

24 - 26 февраля 2017 г.

Материалы конференции

Санкт-Петербург

2017

Организаторы конференции

НО «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»,

Законодательное собрание Ленинградской области,

Санкт-Петербургский Дом ученых им. М. Горького РАН.

Председатель конференции: Востоков Сергей Владимирович, д.ф.-м. наук, профессор, Председатель правления Фонда «УниШанс», Президент Фонда им. Л. Эйлера.

Межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика – это просто!» проводится при финансовой поддержке Группы компаний «МАВИС» (грант № 01-02-2017-г). http://cdn.spbguru.ru/uploads/company/mavis.jpg

Организационный комитет конференции

Председатель: Востоков С.В. д.ф.-м. н. («УниШанс»)

Заместитель председателя: Павилайнен Г.В. к.ф.-м. н. («УниШанс»)

Технические секретари: Зуева Е.В., Горбачук А.Д. («УниШанс»)

Редактор сборника материалов конференции: Орехов А.В.

Члены оргкомитета:

Некрасов В.Б. (СПбАППО),

Иванов О.А. д.пед.н. профессор (СПбГЭУ),

Тихонов А.А. д.ф.-м.н. профессор (ВШТЭ),

Кропачева Н.Ю. к.ф.-м. н. (УниШанс),

Гладкая А.В. к.ф.-м. н. доцент (ВШЭ),

Петров Ф.В. к.ф.-м. н. доцент (УниШанс),

Лазеев А.А. к.техн.н. (Дом ученых РАН),

Стукалова Н.П. (УниШанс),

Ференс-Сороцкий Е.В. («УниШанс»),

Вольфсон Г.И. (Физ-мат лицей № 366).

Первая межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики школ Санкт-Петербурга и Ленинградской области проводилась на базе Дома ученых им. М. Горького РАН и собрала более 150 участников из 12 районов Ленинградской области, города Пскова и Челябинской области. На конференции были заслушаны 6 пленарных докладов, 23 секционных доклада и 4 стендовых сообщения. Наиболее интересные доклады вошли в сборник материалов конференции.

Оргкомитет конференции выражает глубокую благодарность руководству Дома ученых, спонсору конференции ООО «МАВИС», профессорам и преподавателям вузов Санкт-Петербурга, всем коллегам-учителям, студентам и школьникам, которые приняли активное участие в проведении конференции и сделали ее интересным, запоминающимся событием.

По просьбе участников конференции решением Оргкомитета признано целесообразным сделать такие конференции периодическими 1 раз в 2 года.

Пленарные доклады

УДК 371.1

Павилайнен Г.В., Франус Д.В.

Проект «УниШанс» как новая современная форма образовательной деятельности в области точных наук

Современный научно-технический прогресс, быстрое освоение новых научных достижений и создание промышленных технологий XXI века, эпоха всеобщей компьютеризации практически всех областей человеческой деятельности требуют совершенствования образовательной деятельности во всех уровнях подготовки кадров — общеобразовательном, специальном техническом, высшем.

Подготовка новых современных компетентных работников для народного хозяйства начинается в общеобразовательной школе. От уровня преподавания точных наук и от способности учащегося воспринимать все увеличивающийся объем научно-технической информации зависит качество трудовых ресурсов, инженерный и научно-технический потенциал молодых специалистов. Очевидно, уровень школьной подготовки непосредственно связан с качеством вузовского образования, начиная с подготовки абитуриентов и заканчивая подготовкой в магистратуре и аспирантуре научных кадров и молодых ученых. Еще более очевидна заинтересованность крупных современных индустриальных объединений в привлечении лучших молодых специалистов, способных к самостоятельной творческой деятельности.

Понимая все это, группа энтузиастов — выпускников математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета и Санкт-Петербургского политехнического университета предприняли в 2007 году попытку создания Интернет-школы дистанционного обучения общего доступа. Проект получил название «УниШанс».

Основная цель, которую преследовали создатели Интернет-школы, обеспечение общедоступного образовательного инструмента для учащихся из отдаленных от Санкт-Петербурга школ.

Основная аудитория, для которой создан проект, это школьники Ленинградской области и Северо-Западного региона.

Основной задачей всей образовательной деятельности является обеспечение равных возможностей для молодых людей мегаполиса и «глубинки» при поступлении в вузы Санкт-Петербурга.

За прошедший десятилетний период проект «УниШанс» активно развивался, появились новые формы работы при неизменной цели — общедоступности современной образовательной программы. За прошедший период учащимися школы «УниШанс» стали 2000 школьников и более 150 учителей математики и физики школ Ленинградской области. Состав преподавателей Интернет-школы постоянно пополнялся новыми кадрами — преподавателями вузов, методистами, аспирантами, студентами, многие из которых выбрали технические специальности вузов после знакомства с «УниШансом». Можно сказать, что проект «УниШанс» - это стартовая площадка для любознательных и пытливых умов наших юных современников.

Проследим этапы развития проекта по диаграмме, приведенной на рисунке 1.

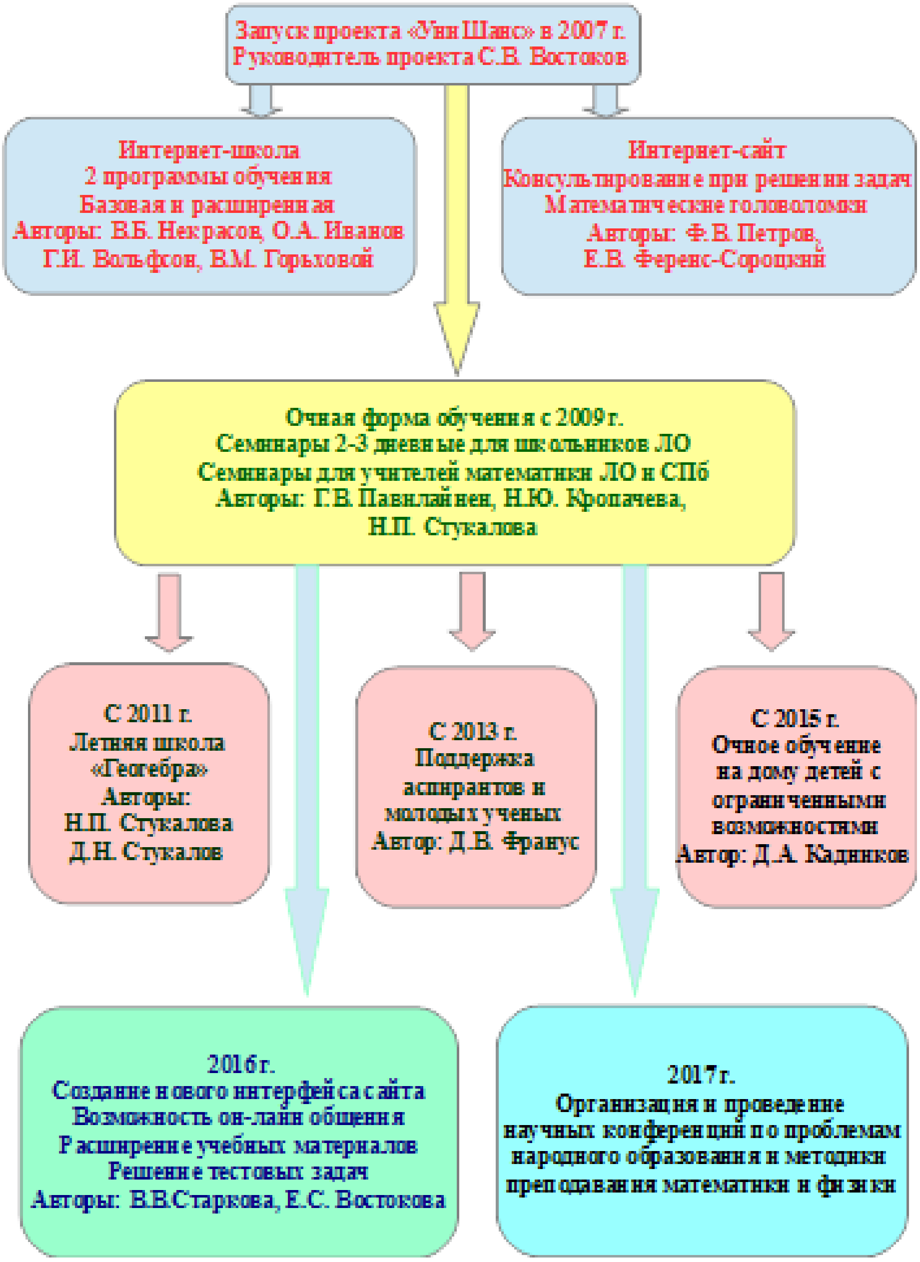


Рис. 1. Диаграмма развития проекта «УниШанс».

Статистика проекта «УниШанс» достаточно внушительная. Очные семинары проводятся дважды в год — в дни школьных осенних и весенних каникул. Среднее количество участников — 200 человек. Формирование семинара проводится с помощью постоянной комиссии по образованию, науке, культуре, спорту и делам молодежи Законодательного Собрания Ленинградской области. Соответствующие структуры в района области формируют делегации от школ в составе школьников и сопровождающих их учителей. Место проведения семинара определяется его программой. За время деятельности проекта было организовано 15 семинаров из них 5 на базе Санкт-Петербургского государственного университета, 5 на базе оздоровительного комплекса «Университетский» в поселке Поляны Выборгского района Ленинградской области, 1 выездной семинар в Выборге на базе гимназии, 1 семинар на базе Академической гимназии им. Д.К. Фаддеева СПбГУ, 3 семинара на базе школ №№ 319 и 413 Петродворцового района Санкт-Петербурга.

Первый семинар собрал 72 участника, последний — 15-тый — 368 человек. На фотографии (рис.2) представлен основной состав преподавателей проекта «УниШанс».

Рис. 2.

Кроме постоянных преподавателей в семинарах участвуют профессора и доценты Санкт-Петербургского госуниверситета, преподаватели ВЖЭ, Академической гимназии, школы № 259, 519, учителя, имеющие статус «Лучший учитель России» Г.И. Вольфсон, В.Н. Соломин, Д.Д. Гущин.

Особо следует сказать об эффективности проекта, о его современном подходе к обучению школьников старших классов. Оценку проведем на основе результатов тестирования учащихся 10 классов, которые проходили обучение на 12-ом семинаре осенью 2015 года. В первый день семинара, до начала занятий школьники выполняли математический тест из 7 задач. Тест был составлен на основе школьной программы. Задачи 6 и 7 были повышенной сложности. После обучения в течение 2-х дней был выполнен повторно тест из 7 задач, подобных предыдущим.

Результаты выполнения тестов показаны на диаграммах (рис.3,4).

Рис. 3.

Анализ данных на рис.3 свидетельствует, что тест вызвал сложности при выполнении. Первая задача была текстовая по теории вероятностей и школьники ее игнорировали, поскольку этой темы еще не изучали. Задача 2. представляла собой уравнение с параметром, задача 3 — неравенство. В задаче 4 требовалось провести алгебраические эквивалентные преобразования и упростить выражение. С этой задачей справились 18 из 20 участников. Задача 5 представляла собой график, который необходимо было построить. Задачи 6 и 7 были текстовая на составление системы уравнений и нахождение целочисленного решения диофантового уравнения. Эти задачи решены не были.

После этого теста прошли занятия по всем темам, содержащимся в тесте и получены результаты выходного теста.

Рис. 4.

Статистический анализ показывает, что результаты выполнения теста существенно улучшились. Учащиеся преодолели страх перед сложными задачами и попытались выполнить все задания. Следует сказать, что выполнение итогового теста является добровольным и его выполняли 12, а не 20 человек, как в первом случае. И если в первом тесте задачу № 5 выполнили 18 из 20, т. е. 90% участников теста, то во втором случае с подобной задачей справились 100%.

В чем же заключается успех? Нам кажется надо выделить три основных аспекта — психологический, коммуникационный и факт неожиданности.

Психологический аспект основан на том, что процесс обучения ломает у учащихся все стереотипы школьного обучения. Занятия проводятся практически сверстниками, студентами и аспирантами, которые только на 5-7 лет старше. Кроме этого проводятся беседы и тренинги, во время которых учащиеся обучаются контролировать внутреннее время, преодолевать состояние усталости, обучаются правильному дыханию в сидячем положении и основам общения с учителями на основе уважения и партнерства.

Коммуникационный аспект связан с тем, что семинар объединяет школьников 12 -14 районов Ленинградской области. На некоторые семинары приезжали ребята и учителя из Мурманской области (г. Апатиты), Вологодской области (г. Вологда и селение Тарнога), республики Крым (г. Симферополь), Нижнего Тагила, Новгорода и Санкт-Петербурга. Детям очень важно сопоставить свой уровень знаний с другими, ощутить себя командой, представляющей свою родную школу, свой город или поселок. Возникает естественный соревновательный процесс, который развивается интеллектуальными играми во время отдыха. Особым успехом пользуется конкурс «Что, где, когда?», который традиционно проводится.

Факт неожиданности состоит из двух составляющих. Первая — это высочайший уровень преподавателей «УниШанса», которые владеют своей профессией мастерски, школьники слушают их «раскрыв рот». Особенно во время популярных лекций по физике или астрономии. Учащиеся понимают, что в мире существуют совсем другие учителя, другая, интересная математика, любопытные и с первого взгляда парадоксальные методы и подходы к решению самых обыкновенных задач, например, перевод логарифмического неравенства в алгебраическое, топологический подход в решении геометрических задач и т.п. Вторая составляющая факта неожиданности — это равенство учащихся и учителей. Учителя учатся, как дети, только в своих группах, решают те же задачи, иногда даже советуются со своими школьниками. И дети видят с каким интересом учатся их педагоги, как радуются они интересным решениям, как хвалят их профессора университета и школьники даже «болеют» за своих учителей. Формальная дистанция учитель-ученик, разумеется, остается, но эмоциональная пропасть начальника и подчиненного пропадает.

Таковы основные итоги развития проекта «УниШанс» и новые аспекты в методике преподавания математики учащимся старших классов. Следует сказать, что по сведениям учителей, все школьники, которые приезжали на семинары несколько раз (максимально это возможно 8 раз) беспрепятственно сдавали государственные экзамены и поступали в вузы. Более 20 из них поступили в СПбГУ. Среди выпускников Интернет-школы 4 человека стали ее преподавателями!

УДК 371.2

Шкорина Н. Л.

Реализация элементов эффективной школы как средство повышения качества образования

1. Исследования качества и эффективности образовательных организаций. История вопроса и современные тенденции. Модель «Эффективная школа». Государственная программа «Развитие образования на 2013-2020 годы» [2] называет науку и образование главными ценностями постиндустриального общества и ставит в прямую зависимость эффективность развития экономики от развития человеческого капитала, который, в свою очередь, зависит от качества образования, способности адекватно и своевременно реагировать на вызовы времени.

Прогноз долгосрочного социально-экономического развития страны на период до 2030 года определяет, что «необходимым условием для формирования инновационной экономики является модернизация системы образования, являющейся основой динамичного экономического роста и социального развития общества» [8].

При этом, модернизация системы общего образования будет продолжена «путем создания эффективных механизмов обновления качества общего образования, разработки и внедрения ФГОС нового поколения . . . , внедрения современных образовательных технологий, обеспечения современных условий получения. . . образовании, . . . развития сильных школ и поддержки школ, работающих в трудных условиях, совершенствования системы ЕГЭ, обновления содержания и методов обучения и т.д.» [8].

Поскольку сегодня для системы образования вопрос качества и эффективности является ключевым, все заметнее становятся различия в качестве образования, предоставляемого разными образовательными организациями. Необходимо понимать, что существует достаточное число общеобразовательных школ, показывающих на протяжении нескольких лет невысокие образовательные результаты. Эти школы находятся в различных регионах страны, имеют разные статусы, ресурсы, но все-же, именно они способны повысить качество и результативность образования всей страны, повысив собственную. М. Фуллан отметил: «Если вы хотите добиться успеха всей страны, то надо подтягивать школы одного и того же статуса к уровню лучших именно в этом статусе. Тогда будет совершенствоваться вся страна» [3].

Работы, посвященные неэффективным школам, появились в США, в Англии и других странах, значительно раньше, чем в России, живущей в эпоху развитого социализма. В то время, как отмечает И.Д. Фрумин, «советская педагогика, поставившая себя на службу задаче радикальной трансформации социальной структуры общества, выработала эффективные механизмы выравнивания учебных достижений и поддержки детей из семей рабочих и крестьян, из семей с низким культурным капиталом» [5, стр. 10].

Как писал в 1999г. П. Мортимор: «В XX столетии можно различить четыре фазы в решении вопроса об эффективности образования. Вначале царила нереалистическая уверенность, что образование может решить все проблемы, возникшие из-за невежества и нищеты. Когда стало ясно, что это не так, наступила вторая фаза - демотивация, пришедшаяся на 60-е годы» [5].

Вторая фаза в решении вопроса об эффективности образования началась с резонансного доклада Дж. Коулмана в 1966 году «о равных шансах в образовании».

Как пишет М. А. Пинская: «Его основная идея заключалась в очень простой и очень неприятной мысли, а именно: школа не играет особого значения, главное, что определяет академические успехи ребенка, — это семья. Если семья ориентирована на образование, если она имеет достаточно высокий социальный статус. . . , то ребенок будет учиться, . . . Если семья имеет низкий социальный статус, неблагополучная, то ребенок не мотивирован на получение образования, . . . и шансов научить его чему-либо, чтобы продвинуть по социальной лестнице, нет» [7].

Третья фаза, по мнению П. Мортимора, началась с переосмысления результатов исследований Дж. Коулмана и его коллег. Здесь значительную роль сыграли работы Дж. Хекмана [Heckman, 1998] и публикации Э.Ханушека [Hanushek, 1971]. Они показали, что качество обучения — а значит, квалификация и профессионализм учителя — может преодолеть «проклятие социального происхождения». Именно в этот период зародилось движение «Эффективная школа». Педагоги и другие сторонники этого движения, считали необходимым показать, что можно уменьшить влияние социального статуса ребенка на его академические успехи.

Они выявили характеристики, общие для успешных школ.

Эффективные школы имели сильного лидера в лице директора, осознающего и проявляющего чувство миссии школы, которую разделяли все её работники. Они демонстрировали успешный опыт обучения, предъявляя высокие ожидания ко всем учащихся, часто отслеживали результаты, также обеспечивали безопасность и порядок. Эти признаки впоследствии стали известны как составляющие эффективных школ. Их впервые определил R.R. Edmonds в 1982 году.

В 1991 Л.Лезотте сформулировал основные семь принципов (корреляторов) эффективной школы, которые реализуются в организациях, выбравших данную модель работы:

1. Лидерское руководство.
2. Ясная и целенаправленная миссия разделяемая всеми.
3. Безопасная и упорядоченная среда.
4. Климат высоких ожиданий от всех (и учащихся, и работников).
5. Частый мониторинг успеваемости.
6. Позитивные отношения семьи и школы.
7. Предоставление ребенку возможности все время урока посвящать именно решению учебных задач [1].

Как указывают Пинская М.А., Косарецкий С.Г., Фрумин И.Д.: «В ставшей популярной модели эффективной школы [Whitty, Mortimore, 1997; Reynolds, Hopkins, Potter, Chapman, 2001; Harris, Chapman, 2004] качество работы школы определяется именно как ее способность повышать жизненные шансы каждого ученика независимо от индивидуальных стартовых возможностей и семейного контекста. . . Особенно важной эта оптимистическая установка стала для школ в наименее обеспеченных регионах, находящихся в максимально сложных условиях, обучающих преимущественно детей из неблагополучных семей [Hanushek, Kain, Rivkin, 2001].

Тем самым, в логике П. Мортимора, в настоящее время мы перешли к четвертой фазе решения вопроса об эффективности школьного образования, суть которой отражена в актуальном и сегодня определении: «Эффективная школа нацелена на достижение наилучших образовательных результатов у максимального числа учеников независимо от социально-экономического положения их семей» [5].

В этой связи необходимо упомянуть об одной из наиболее эффективных сегодня систем образования, по мнению международного экспертного сообщества, (подтверждается исследованиями TIMSS, PIRLS, PISA) — школьного образования Финляндии. Особую ценность, на наш взгляд, представляет подход, подробно описанный в книге Паси Сальберга «Финские уроки. История успеха реформ школьного образования в Финляндии» [11]. Как пишет автор: «финские школьники, в отличие от... сверстников из других стран, приобретали все знания и умения, демонстрируемые ими ... без репетиторов, без дополнительных занятий после уроков и без больших объемов домашней работы» [11, стр. 72]. Автор показывает, что «сила финской системы состоит,... в высоком качестве и равномерно высоких учебных достижениях разных учащихся. ... школьники устойчиво демонстрируют высокие результаты независимо от социально-экономического положения их семей» [11, стр. 72]. Основной причиной, приведшей к кардинальному изменению всей системы Финляндии, является то, что, по мнению П.Сальберга, «образование в Финляндии воспринимается как всеобщее благо и играет важную роль в развитии всей страны» [11, стр. 75].

В отличие от стран, где для решения проблем образования увеличивается контроль над школами, усиливается учет успеваемости учащихся, увольняются плохие учителя и закрываются неэффективные школы, в Финляндии был принят курс на совершенствование педагогов, минимизацию тестирования школьников, «придание ответственности и доверию большего значения, чем отчетности, и передачу управления образованием... профессиональным педагогам» [11, стр. 28].

Также, значимым автор называет встроенную систему сетевых связей школ и учительских сообществ, которая позволяет разрабатывать, обобщать и распространять наиболее интересный, инновационный педагогический опыт. Все эти особенности и принципы работы финской школы чрезвычайно близки по сути основным положениям, описанным в модели «Эффективная школа».

2. Логическая матрица «Программы перехода в эффективный режим работы, определение показателей, отражающих повышение эффективности и качества образовательных результатов школ».

Создавая Программу повышения эффективности, мы понимали, что основной ее задачей является изменение качества школьных процессов за счет использования внутренних ресурсов. Как сказано в Методических рекомендациях по написанию Программ перехода школ в эффективный режим работы, программа призвана «запускать и сопровождать такие механизмы, которые обеспечивают результативность вне зависимости от материально-технической оснащенности школы, контингента обучающихся, их этнической принадлежности, доходов семей и т.д.» [7, стр. 17].

Данная программа разрабатывалась на основании проведенной диагностики и направлена на преодоление основных, описанных выше, дефицитов образовательной организации. Поскольку целью нашей работы не является создание собственно Программы, остановимся на описании ее логической матрицы, основанной на проведенной диагностике, которая станет основой для проектирования соответствующего мониторинга.

Под логической матрицей программы мы будем понимать таблицу, «в которой в сжатом виде представлена рабочая структура программы, основанная на анализе ситуации и проблем, проведенном на этапе разработки программы. Логическая матрица в краткой форме отражает логическую последовательность задач по достижению намеченных результатов программы (мероприятия, промежуточные результаты, конечные результаты и цель), индикаторы и способы верификации для измерения успешности выполнения этих задач, и основные допущения» [9, стр. 34].

Совместив предложенную в Руководство по планированию проектов (программ) [10, стр. 26] матрицу, с выявленными в ходе исследования дефицитами школы, нами были сформулированы цели, которые далее разбиты на задачи, и по каждой из целей и задач разработаны критерии успеха – те признаки, по которым можно определить, достигнута ли цель (более общий уровень), выполнена ли задача (конкретный уровень).

Где это возможно, критерии успеха должны быть измеряемы (выражены количественно). Таким образом, получился детализированный план по каждому из трех выбранных приоритетов.

План работы по преодолению дефицитов качества школьных процессов.

Приоритет	Вид работ	Планируемый результат	Сроки выполнения	Ответственный (средства верификации)
Повышение уровня профессионализма учителей	1.Проведение диагностики на выявление профессиональных дефицитов педагогов	Результаты диагностики	Сентябрь-октябрь (1 раз в год)	Зам.по УВР (справка)
Повышение уровня профессионализма учителей	2.Беседы с представителями ИМЦ, ВУЗов, мониторинг в сети Интернет по изучению предложений на рынке образовательных услуг по КПК и переподготовке	Коммерческие предложения, заключение договора на обучение	В течение года	Зам.по УВР (план повышения квалификации)

План работы по преодолению дефицитов качества школьных процессов.(Продолжение)

Повышение уровня профессионализма учителей	3.Создание методического плана-заказа на обучение на учебный год	Методический план-заказ	Март-апрель (1 раз в год)	Зам.по УВР (план-заказ)
Повышение уровня профессионализма учителей	4.Подготовка приказа и средств (бюджетных и внебюджетных)	Приказ о направлении на курсы ПК или переподготовки	В течение года	Директор школы
Повышение уровня профессионализма учителей	5.Организация условий для возможности трансляции полученного опыта	Увеличение количества выступлений по итогам обучения на семинарах, педсоветах, совещаниях и пр./в уч. год	В течение года	Директор школы (статистика)
Повышение уровня профессионализма учителей	6.Организация условий для участия педагога в методической, инновационной деятельности, в совместных проектах (семинарах, конференциях, круглых столах, мастер-классах, метод. днях и пр.)	Увеличение числа педагогов, вовлеченных в инновационную деятельность, членов проекта Lesson Study, ПСО	В течение года	Директор школы (статистика)
Повышение уровня профессионализма учителей	7.Организация условий для участия педагога во всевозможных конкурсах профессионального мастерства, выступлениях на семинарах, конференциях.	Рост числа педагогов, участвующих в конкурсах профессионального мастерства, рост результативности участия в конкурсах	В течение года	Зам. по УВР (статистика)
Повышение уровня профессионализма учителей	8.Организация условий для участия школьников в предметных и метапредметные конкурсах, олимпиадах, проектах	Рост числа учащихся, участвующих в предметных и метапредметные конкурсах, олимпиадах, проектах. Рост результативности участия.	В течение года	Зам. по УВР (статистика)

План работы по преодолению дефицитов качества школьных процессов.(Продолжение)

Изменение системы оценивания учащихся	1.Обучающий семинар, знакомство с литературой по формирующему оцениванию.	Повышение инновационной активности педагогов, Увеличение числа учителей, знакомых с проблематикой.	Август-сентябрь	Директор школы (статистика)
Изменение системы оценивания учащихся	2.Подготовка, проведение и подведение итогов «Методического дня по теме: «Формирующее оценивание»	Диагностика по итогам методического дня	Октябрь-ноябрь	Зам. по УВР (результаты диагностики)
Изменение системы оценивания учащихся	3.Организация и проведение системы уроков и мероприятий с использованием формирующего оценивания	Методические разработки и отчеты по проведенным урокам	Декабрь-январь	Зам. по УВР
Изменение системы оценивания учащихся	4.Организация и проведение научно-практической конференции и обучающего семинара (для желающих)	Диагностика по итогам конференции, семинара	Февраль-март	Директор УВР (результаты диагностики)
Изменение системы оценивания учащихся	5.Подготовка материалов и участие в конкурсе инновационных продуктов	Итоги конкурса	Май	Зам. по УВР
Изменение системы оценивания учащихся	6.Подготовка локальных актов школы	Учет выполнения требований всеми педагогами при подведении итогов работы за четверть, год	Май-июнь	Директор школы, Заместители по направлениям

План работы по преодолению дефицитов качества школьных процессов.(Продолжение)

Совершенствование информационно-образовательной среды школы	1.Провести анкетирование, опрос всех членов школьного сообщества на предмет определения уровня IT-компетентности и притязаний.	Результаты диагностики	Сентябрь	Зам. по УВР, по ШИС УВР (результаты диагностики)
Совершенствование информационно-образовательной среды школы	2.Сформировать рабочую группу по проблеме слабого владения IT-инструментами и восполнения дефицитов. Назначение ответственного за реализацию Цели и возможные направления. Заседания рабочей группы по необходимости.	Пакет документов. Приказ	Сентябрь-октябрь	Зам по ШИС
Совершенствование информационно-образовательной среды школы	3.Оснащение рабочих мест оборудованием, программными разработками. Инструктивно-методическое совещание с работниками по информированию и демонстрации алгоритмов.	Увеличение числа педагогов, пользующихся услугами портала (показания счетчика)	Октябрь-ноябрь	Зам по ШИС (статистика)
Совершенствование информационно-образовательной среды школы	4.Разработка соответствующих локальных актов	Отслеживание требований локальных актов заместителями директора	Ежемесячно	Зам по ШИС Зам по УВР (Справки по итогам ВШК)

План работы по преодолению дефицитов качества школьных процессов.(Продолжение)

Совершенствование информационно-образовательной среды школы	5.Создание инициативной группы. «Мозговой штурм» административной команды, инициативной группы. Создание плана переоборудования, дополнительного оборудования помещений школы.	План переоборудования, дополнительного оборудования помещений школы.	Ноябрь	Директор школы Зам по УВР Зам по АХЧ (план)
Совершенствование информационно-образовательной среды школы	6.Семинары, в т.ч. международные, по обмену опытом. Знакомство с информацией в сети Интернет. Выбор подходящих решений, консультантов.	Применение лучших решений в практике школы	Декабрь-июнь	Директор школы Зам по УВР Зам по АХЧ
Совершенствование информационно-образовательной среды школы	7.Формирование бюджета для трансформации пространства. Встречи с социальными партнерами по вопросу софинансирования проекта.	Разработка бюджета проекта	Май-июнь	Директор школы Зам по АХЧ Гл. бухгалтер

План работы по преодолению дефицитов качества школьных процессов.(Окончание)

Совершенствование информационно-образовательной среды школы	8.Обсуждение и утверждение дизайн-проекта инициативной группой, на информационном портале, на встречах с партнерами, консультантами	Дизайн-проект опубликован на информационном портале	Июнь-июль	Зам по ШИС
Совершенствование информационно-образовательной среды школы	9.Выбор подрядчика (конкурсные процедуры). Организация работ с подрядчиком	Фактическая трансформация школьного пространства	Июнь-август	Директор школы, зам по АХЧ Гл. бухгалтер

Созданная в такой логике матрица программы может не отражать всех ее деталей, но они (бюджет программы, план реализации, критерии выполнения и пр.) должны быть с ней обязательно связаны. Данная матрица также применима и является основой для разработки программного мониторинга, а также последующей оценки реализации программы. Данный документ не может являться окончательным и неизменным, т.к. в ходе выполнения программы при изменении условий или достижении промежуточных целей он может и должен меняться, дополняться и пр.

Таким образом, итогом рассмотрения большого числа исследований, посвященных эффективному управлению образовательными организациями, могут стать следующие выводы:

1. В период сложной социально-экономической ситуации в нашей стране особенно актуальными становятся исследования и анализ опыта школ, способных обеспечить доступность и качество образования для детей из различных социальных слоев общества, выполняющих роль своеобразного социального лифта.

2. Существуют модели школ и образовательных систем, способствующие преодолению «проклятия социального происхождения», одна из них - модель «Эффективная школа». Именно эта образовательная стратегия наиболее соответствует цели нашего исследования, т.к. способна обеспечить рост образовательных результатов, невзирая на сложный социальный контекст. Она описана в различных зарубежных исследованиях. Наиболее подробно модель «Эффективная школа» представлена в отечественных исследованиях М.А.Пинской, И.Г.Груничевой, С.Г.Косарецкого, И.Д.Фрумина.

3. Для объективного исследования эффективности конкретной образовательной организации необходимо учитывать как академические аспекты ее деятельности (учебные результаты, результаты ЕГЭ и пр.), так и обязательное внимание уделять школьным условиям, содержанию и организации учебно-воспитательного процесса.

4. Способом изменения (улучшения) образовательных результатов школы может стать разработка оригинальной, основанной на полученных диагностических данных, Программы перехода в эффективный режим работы школы, находящейся в сложном социальном контексте.

Список литературы

[1] Lezotte L. «7 Correlates of Effective Schools» http://alchetron.com/Larry-Lezotte-716558-W

[2] Концепция Федеральной целевой программы развития образования на 2016 – 2020 годы.

[3] Фуллан М. Интервью корреспонденту РИА Новости Анне Курской http://ueshka.ru/2013-11-06-05-33-17/novosti-obrazovaniya/ 685-majkl-fullan-rejting-ne-dolzhen-ogranichivat-dostup- uchenikov-v-shkolu

[4] Методические рекомендации по написанию Программ перехода школ в эффективный режим работы. В рамках регионального проекта «Разработка и внедрение региональной стратегии помощи школам, работающим в сложных социальных контекстах и показывающим низкие образовательные результаты». Ярославль, 2015

[5] Мортимор П. Эффективная школа в поисках новых ресурсов: результаты исследования эффективности школьной системы. Публикация А. Пинского, перевод М.Случа//Ж. Лицейское и гимназическое образование №2 (9), 1999//http://www.kros.ru/_libr/ped_bibl/mortimor.php

[6] Организация сетевого взаимодействия общеобразовательных учреждений, внедряющих инновационные образовательные программы, принимающих участие в конкурсе на государственную поддержку / под ред. Адамского А.И. — М.: Эврика, 2006.

[7] Пинская М.А., Груничева И.Г. Перевод школы в эффективный режим работы. Улучшение образовательных результатов. Сборник информационно-методических материалов для директоров школ и школьных команд. НИУ ВШЭ. Москва 2013.

[8] Постановление Правительства Российской Федерации от 7 февраля 2011 г. N 61 г. Москва «О Федеральной целевой программе развития образования на 2011 – 2015 годы» — URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_157772/ (дата обращения 25.01. 2014).

[9] Руководство по мониторингу и оценке (МиО) проектов/программ. Международная федерация обществ Красного Креста и Красного Полумесяца, Женева, 2011

[10] Руководство по планированию проектов/программ. Окончательная версия, январь 2010. Международная федерация обществ Красного Креста и Красного Полумесяца.

[11] Сальберг Паси. Финские уроки. История успеха реформ школьного образования в Финляндии – М.: Издательский дом «Классика XXI», 2015. – 240 с., ил.

УДК 371.2

Бояр Н. Л.

Особенности организации образовательного пространства школы, включающего систему дополнительного образования детей.

Наша школа расположена в Стрельне, пригороде Санкт-Петербурга, месте нахождения знаменитого Константиновского дворца, резиденции Президента России. Школа находится в стороне от главной трассы, Петергофского шоссе, в частном секторе. От основных жилых массивов Стрельны школу отделяет железная дорога. Во время сложной демографической ситуации всё это значительно осложнило набор детей в школу. В начале 2000-х годов здание школы, рассчитанное на 530 учеников, заполнено было меньше чем наполовину. Тогда же в Стрельне не осталось учреждений, где бы дети могли заниматься творчеством, спортом и другой развивающей деятельностью.

Чтобы сохранить школу, сделать её привлекательной для детей и их родителей, было решено добиться открытия при школе отделения дополнительного образования.

В 2006-2007 учебном году было открыто 15 групп ОДОД, занимающихся по 6 программам: сценическое мастерство, музыкальная сказка, спортивные танцы, цирковая студия, изобразительное искусство, шашки.

Рис. 5. Диаграмма результатов опроса родителей.

Этим проектом удалось привлечь в школу детей начальных классов и решить проблему занятости детей во второй половине дня. Через год диагностика показала, что ожидания родителей были оправданы, образовательные услуги в творческих объединениях ОДОД, по результатам их опроса, отвлекало детей от бездумного времяпрепровождения, способствовали лучшему усвоению учебного материала, развивало активность, уверенность в себе, помогало ребёнку адаптироваться к школе (Рис. 5).

В последующие два учебных года количество реализуемых программ и творческих объединений равнялось уже двадцати трём, а количество групп тридцати.

Новые образовательные стандарты 2009 года стали для педагогов школы новой возможностью для обобщения накопленного опыта работы в новом образовательном пространстве.

С 2011 года школа работала в статусе районной экспериментальной площадки над темой «Разработка модели единого образовательного пространства образовательного учреждения в соответствии с требованиями федерального образовательного стандарта».

Рис. 6. Модель единого образовательного пространства.

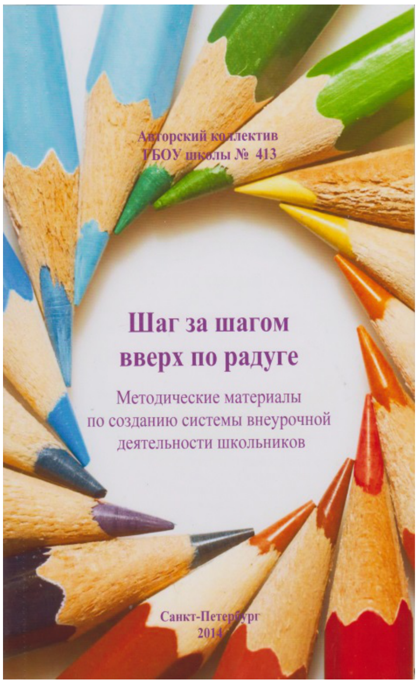
В основу созданного образовательного пространства школы был положен принцип интеграции основного и дополнительного образования (тогда моделью реализации внеурочной деятельности было отделение дополнительного образования), что создавало оптимальные условия для реализации требований заказчиков образовательных услуг в лице государства, общества, родителей и детей.

Рис. 7. Концепция модели образования.

В условиях введения новых образовательных стандартов это даёт возможность образовательным организациям разработать программу организационных действий, совершенствующих систему оценивания результатов качества образования.

В ценностном измерении качества наряду с предметными результатами образования стоят метапредметные и личностные — ключевые компетенции, соответствующие общественным потребностям.

Если основное образование более ориентировано на предметную составляющую результатов, то метапредметные и личностные результаты в большей степени проявляются во внеурочной деятельности.



Для решения различных задач образовательно-воспитательного деятельности используются программы основного (предметы школьного компонента учебного плана, элективные курсы), дополнительного образования и внеурочной деятельности.

В процессе работы в режиме эксперимента была разработана комплексная программа дополнительного образования «Шаг за шагом». Программа адресована младшим школьникам и дошкольникам с целью развития и социальной адаптации.

Эта программа — опыт системно-деятельностного подхода в выстраивании единого образовательного пространства школы, а также методические рекомендации по выстраиванию системы ценностно- ориентированной внеурочной деятельности.

В 2014 году сборник с материалами был представлен на городском конкурсе инновационных продуктов. Школа получила диплом лауреата конкурса в номинации «Управление образовательной организацией»

Проанализировав результаты основной деятельности за последние годы, мы увидели следующую картину.

Решена главная задача — сохранение контингента школы. С 2014 по 2016 год количество учащихся выросло с 289 до 424 человек. Появляется новая проблема — качество учебных результатов.

Качество образования начальных классов стабильно высокое. Наблюдается резкое его снижение при переходе учащихся из начальной школы на уровень основного общего образования (чуть более 30%). При переходе на уровень среднего общего образования качество образования снижается ещё больше, почти в 2 раза, и составляет менее 20%. Такими же неутешительными последние три года были результаты ЕГЭ по основным предметам.

В чём же причина? Ведь создано единое интегрированное образовательное пространство, позволяющее повысить образовательные, метапредметные и личностные результаты. Независимая оценка качества знаний выпускников 4-х классов подтвердила высокие результаты.

Одна из причин — достаточно большой отток мотивированных, с высокими образовательными результатами, детей в учреждения повышенного статуса после окончания начальной школы. В этом и прошлом году более 10 человек (более 20%) поступили в лицеи и гимназии города, что говорит о качественной подготовке выпускников начальной школы. При этом школа лишилась перспективных учащихся. Причины, какими мы их видим, — снижение в основной и старшей школе количества и разнообразия дополнительных образовательных услуг, ориентация программ дополнительного образования на начальную школу, отсутствие технического направления среди направлений дополнительного образования.

Ситуацию с решением проблемы осложняет активное обновление учительского корпуса: это касается педагогов основного и дополнительного образования. Диаграммы показывают, что почти половина педагогов в 2015 году и почти 40% в 2016 году не имеют квалификационной категории. Это означает, что в связи с быстрым ростом контингента учащихся, открытием новых классов, в школу пришло большое количество молодых специалистов. Они проходят аттестацию в установленные сроки и видно, что количество неаттестованных работников сократилось на 10%, что не снимает проблемы организации профессионального роста молодых специалистов.

Программу развития школы на 2016-2020 годы разрабатывали, следуя концепции обеспечения управляемого перевода школы в новое состояние, обеспечивающее качество образования, адекватное актуальным потребностям развивающейся личности, социума и государства. Новое качественное состояние предполагает возможности для учащихся:

1. *получения качественного образования на основе государственного стандарта;*
2. *овладения навыками самоанализа, самоопределения, самосовершенствования;*
3. *организация разнообразной интересной внеурочной деятельности обучающихся;*
4. *физическое развитие личности;*
5. *развитие сотрудничества между учащимися, учителями, между педагогами и родителями учеников.*

Для реализации этих задач коллективом школы была сформулирована концепция развития, заключающаяся в том, что ключевая миссия образования состоит в том, чтобы не просто обеспечить преподавание наук, но и сделать так, чтобы все участники педагогического процесса (учащиеся, педагоги, родители) действительно учились. Это смещение – от фокуса преподавания к фокусу обучения глубоко влияет на деятельность всей школы: требуются новые подходы в работе с педагогическими кадрами и новые подходы к результатам образования детей.

Инструментарий программы:

Подпрограмма 1. "Профессиональное сообщество обучения как модель работы педагогического корпуса школы"

Подпрограмма 2. "Создание эффективной школьной системы оценивания результатов образования"

Рис. 8. Профессиональное сообщество обучения.

Создание ПСО (профессиональное сообщество обучения), в задачи которого будет входить руководство изменениями процессов обучения педагогов, детей и родителей, организация работы опытных специалистов, оказывающих поддержку молодым педагогам основного и дополнительного образования, в режиме педагогической интернатуры.

Мощное сотрудничество, которое характеризует ПСО – это систематический процесс, в котором учителя работают вместе, анализируя и улучшая классные практики. Педагоги вовлечены в постоянный диалог - цикл поиска ответов на вопросы, которые способствуют рождению глубокого группового знания. Дополнительное образование менее заформализовано, позволяет взглянуть на ребёнка с разных позиций и выстроить отношения с ним и его родителями. Ведь многие педагоги школы совмещают работу в основном и дополнительном образовании.

Эффективность деятельности ПСО измеряется исключительно результатами учеников.

Система оценивания результата образования в школе тоже единая!

Внутришкольный мониторинг организуется администрацией образовательной организации, проводится ПСО, осуществляется педагогическое сопровождение психологом и заносится в индивидуальную карту учёта результатов классным руководителем. Индивидуальная карта учёта результатов учащихся + самоанализ + портфолио документов (грамоты, дипломы достижения детей в олимпиадах, соревнованиях, конкурсах, дополнительном образовании) - система фиксации результатов качества педагогической деятельности.

С целью сделать жизнь учащихся в школе более полезной и содержательной было возрождено школьное научное общество. Результатом работы является 3-х дневная общешкольная научная конференция, где дети 1-11 классов представили свои проекты и исследования.

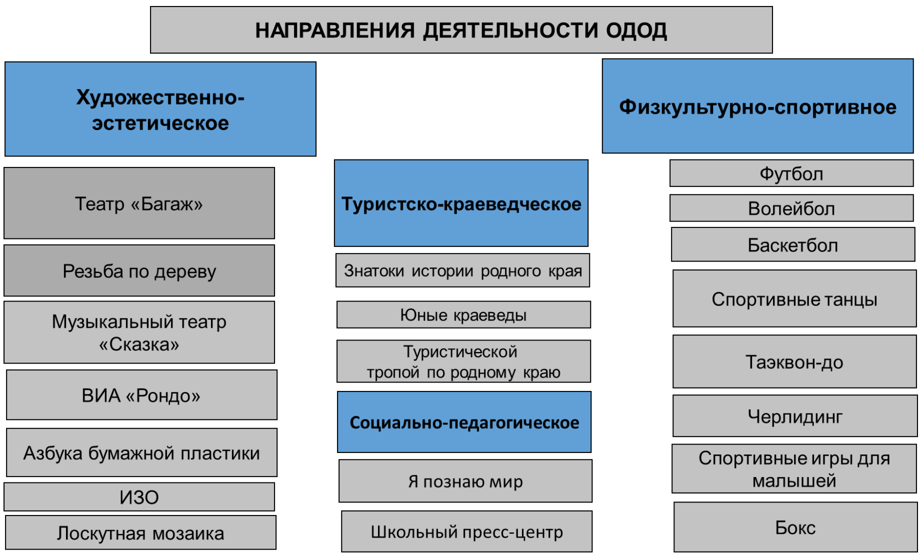


Рис. 9. Программы, реализуемые ОДОД.

В соответствии с программой развития школы в ОДОД разработаны и включены в учебный план программы социально-педагогической направленности для детей 11-17 лет: «Я познаю мир», «Школьный пресс-центр».

Программа «Я познаю мир» призвана обучать детей навыкам проектной работы и научно-исследовательской деятельности, которые являются основным методом обучения в основной школе.

Программа «Школьный пресс-центр» решает задачи основного образования по профессиональной ориентации и предпрофильной подготовке и имеет большой воспитательной потенциал по формированию у детей активной жизненной позиции, системы ценностей, коммуникативной культуры. Программа имеет большую техническую составляющую: владение фототехникой, компьютером, брошюровкой и т.д. Это дает перспективы развития технической направленности в работе ОДОД. Но, к сожалению, не все желаемые направления может вместить ОДОД.

Каждый руководитель понимает, что в одиночку успеха не добиться. Нужны единомышленники, команда, сотрудничество и т.д. Самые главные инвестиции руководитель должен вложить в развитие персонала, в педагогов. Сильные, мотивированные педагоги – главный ресурс для изменений и улучшений школы. Поэтому важно предоставить учителю время для профессионального развития и общения с коллегами, а также использовать все возможности социальных партнёров для позитивных изменений качества образования и удовлетворения всех запросов участников образовательных отношений.

Необходимо более подробно остановиться на опыте сотрудничества с математической Школой «УниШанс». Это сотрудничество началось с 2014 года и стало серьёзным подспорьем в повышении математического образования наших школьников. В Школе «УниШанс» не только учат решать серьёзные математические задачи, но и создают мотивирующую обучающую среду. На протяжении нескольких дней учащиеся в каникулярное время отрываются от своих семей и живут каждый момент чему-нибудь обучаясь. Это очень ценный опыт.

Какой мы ожидаем результат нашей деятельности к 2020 году.

1. Повышение результата ЕГЭ и ОГЭ по основным предметам до уровня выше среднего по району.

2. Увеличение доли учащихся, участников районного и городского этапов предметных олимпиад от общего количества учащихся по школе.

3. Доля педагогов, имеющих квалификационную категорию — 95%.

4. Увеличние доли учащихся и педагогов, охваченных проектной деятельностью — 100%.

5. Доля учащихся, вовлечённых в социально-значимую деятельность — 100%.

6. Доля учащихся, осваивающих дополнительные образовательные программы различной направленности (в том числе и технической) — 100%.

УДК 511.11

Востоков С.В., Орехов А.В., Востокова Р.П.

Построение числовых множеств

Бинарные операции. В статье приводится краткое изложение факультативного курса построения числовых множеств, для выпускных классов специализированных (физико-математических) средних общеобразовательных учреждений. Дополнением к предлагаемому ниже изложению должны стать доказательства теорем, большое количество примеров, поясняющих вводимые понятия, и упражнения для самостоятельного решения, которые в свою очередь способствуют закреплению нового материала.

Здесь также предполагается, что известны принципы построения десятичной системы счисления и определения следующих математических понятий: декартова произведения, отношения эквивалентности, отношения порядка, наибольшего (наименьшего) элемента множества, максимума (минимума), линейно упорядоченного множества, сечения линейно упорядоченного множества, отображения и изоморфизма [2, 3, 8, 9, 13].

Определение 1. Бинарной операцией на некотором множестве M называют отображение $\odot$ декартова произведения $M \times M$ в себя

$$\odot\colon \begin{cases} M \times M \hookrightarrow M \\ a,\, b \mapsto a \odot b. \end{cases}$$

Говорят, что бинарная операция $\odot$ обладает свойством ассоциативности на некотором множестве X, если: $\forall\, x,\, y,\, z \in X \,:\, (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$. Это свойство порождает следующую алгебраическую структуру.

Определение 2. Множество X с бинарной операцией $\odot$, которая обладает свойством ассоциативности, называют полугруппой [7].

Есть еще одно важное свойство бинарных операций которое называют коммутативностью, и определяют следующим образом; бинарная операция $\odot$ коммутативна на множестве X если: $\forall\, x,\, y \in X \,:\, x \odot y = y \odot x$.

Полугруппу, в которой справедливо свойство коммутативности, называют коммутативной полугруппой.

Если существует элемент $e \in X$, который при выполнении бинарной операции $\odot$ в X не изменяет значение второго операнда, то $e \in X$ называют нейтральным элементом.

Полугруппу X в которой существует нейтральный элемент по бинарной операции $\odot$ называют полугруппой с единицей, а если операция $\odot$ обладает еще и свойством коммутативности, то тогда X — коммутативная полугруппа с единицей.

Изначально потребность обыкновенного счета предметов привела к возникновению натуральных чисел. Дальнейшее развитие понятия числа происходило вместе с усложнением практических задач в таких областях, как товарообмен и денежные отношения, землепользование, строительство, и т. п. Окончательное формирование представления о числе и расширение этого понятия до современного уровня происходили главным образом в связи с потребностями самой математики.

Натуральные числа. Определим натуральные числа при помощи пяти аксиом Пеано.

Определение 3. Будем называть $\mathbb{N}$ — множеством натуральных чисел если:
1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ существует единственный $S(n) \in \mathbb{N}$, который называют следующим натуральным числом после n.
3. $S(n) \neq 1$. Не существует «следующих» натуральных чисел, равных 1.
4. Если $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$. Любое натуральное число следует не более, чем за одним числом.
5. Аксиома индукции. Если $Q \subset \mathbb{N}$ такое что: $1 \in Q$, и из того, что $n \in Q$ следует $S(n) \in Q$, то тогда $Q = \mathbb{N}$.

Аксиома индукции используется для доказательства истинности предикатов, зависящих от натурального аргумента, на всем множестве натуральных чисел. Этот способ доказательства называется «методом математической индукции». Чтобы доказать истинность $p(n)$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ необходимо сначала доказать базу индукции т. е. показать истинность высказывания $p\,(1)$, а затем осуществить индуктивный переход, т. е. предположив, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $p\,(n)$ — истинно (индуктивное предположение), формально показать, что из индуктивного предположения следует истинность $p\,(S(n))$.

Правомерность доказательства методом математической индукции обосновывается следующим образом. Рассмотрим множество $Q \subset \mathbb{N}$, на котором $p\,(n)$ — истинное высказывание. Сначала надо показать, что $Q \neq \varnothing$, для этого доказывается база индукции, т. е. $p\,(1)$ — истинно. Отсюда следует, что $1 \in Q$. Затем полагаем, что $p\,(n)$ — истинно, и исходя из этого предположения, доказываем, что $p\,(S(n))$ — истинно, т. е. показываем, что если $n \in Q \Rightarrow S(n) \in Q$.

Следовательно, множество Q удовлетворяет условиям пятой аксиомы Пеано, и $Q = \mathbb{N}$, т. е. $p\,(n)$ истинно для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Сложением натуральных чисел называется бинарная операция, которая $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ сопоставляет единственное $n + m \in \mathbb{N}$, обладающее свойствами:
1. $n + 1 = S(n)$.
2. $n + S(m) = S(n + m)$.

Исходя из принципов построения десятичной позиционной системы счисления и первого свойства сложения натуральных чисел, выпишем известные алгебраические равенства:

$$1 + 1 = 2;\ 2 + 1 = 3;\ \ldots\ 10 + 1 = 11;\ \ldots\ 100 + 1 = 101;\ \ldots$$

В общем случае, по второй аксиоме Пеано и первому свойству сложения для любого натурального числа $n \neq 1$ справедливо следующие представление: $n = m + 1$ где $m \in \mathbb{N}$.

Поэтому мы можем переписать первое и второе свойства сложения натуральных чисел в более удобной форме:

$$n + 1 = n + 1, \qquad n + (m + 1) = (n + m) + 1.$$

Используя метод математической индукции и эти равенства, можно доказать ассоциативность и коммутативность сложения на множестве натуральных чисел [1, 9].

Определение 5. Умножением натуральных чисел называется бинарная операция, которая $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ сопоставляет единственное $n \cdot m \in \mathbb{N}$, обладающее свойствами:
1. $1 \cdot n = n$.
2. $(m+1) \cdot n = m \cdot n + n$.

Говорят, что две бинарные операции (например «сложение» и «умножение») подчиняются распределительному (дистибутивному) закону на множестве X если:

$$\forall\ n,\ m,\ k \in X : n \cdot (m+k) = (m+k) \cdot n = n \cdot m + n \cdot k.$$

Используя метод математической индукции можно доказать дистибутивность умножения относительно сложения на $\mathbb{N}$, ассоциативность и коммутативность умножения натуральных чисел [1, 9].

Определение 6. Пусть $n,\ m \in \mathbb{N}$. Говорят, что n меньше m (n<m), если уравнение: $n + x = m$ имеет решение на множестве натуральных чисел.

Иначе говоря, n меньше, чем m, если m является суммой n и некоторого натурального числа x. Отсюда следует достаточно очевидный, но очень важный вывод: единица наименьшее натуральное число, т.е. для $\forall\ n \in \mathbb{N} \colon 1 \leqslant n$.

Действительно, если $n = 1$ то $1 = 1$. Если же $n \neq 1$, то, обозначив $n = 1 + x$, где $x \in \mathbb{N}$, получим: $1 + x = n \Rightarrow 1 < n$. Таким образом, натуральный ряд ограничен снизу единицей.

Теперь мы имеем все основания для того, чтобы обозначать натуральные числа в привычной для нас форме:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ \ldots\ ,9,\ 10,\ 11,\ \ldots\ ,99,\ 100,\ 101,\ ,\ldots\}.$$

В таком виде множество натуральных чисел принято называть «натуральным рядом».

Для обозначения множества натуральных чисел мы можем использовать любые символы, лишь бы для них выполнялись аксиомы Пеано. Эту мысль подтверждает наш жизненный опыт; натуральные числа можно записать, например, римскими цифрами, в двоичном коде и т. п.

Очевидно, что можно придумать бесконечно много различных способов для обозначения элементов множества натуральных чисел. В этой связи возникает следующая проблема; различными символами обозначается одно и тоже множество, или же напротив, существуют различные множества натуральных чисел? К счастью, ответ на последний вопрос является отрицательным [9].

Теорема 1. (об изоморфизме представления множества натуральных чисел)
Любые два множества для которых выполнены аксиомы Пеано изоморфны.

Справедливы следующие утверждения [9, 10].

Теорема 2. (о линейной упорядоченности множества натуральных чисел)

Множество $\mathbb{N}$ *линейно упорядочено, т. е. для* $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ *истинно только одно высказывание: или* $(n < m)$, *или* $(m < n)$, *или* $(n = m)$.

Теорема 3. (о монотонности отношения порядка)

Если $n < m$, *то для* $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства:*

$$n + k < m + k, \qquad n \cdot k < m \cdot k.$$

Теорема 4. (о соседних натуральных числах)

Для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *не существует* $k \in \mathbb{N} \mid n < k < n + 1$.

Можно доказать, что любое произвольное подмножество натурального ряда содержит минимальный элемент и любое непустое и ограниченное подмножество натурального ряда содержит максимальный элемент. Откуда следует, что любое сечение натурального ряда — скачок [9].

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с бинарными операциями «сложения» и «умножения» обладает следующими свойствами:

1. Замкнутость по сложению,
2. Ассоциативность сложения,
3. Коммутативность сложения,
4. Замкнутость по умножению,
5. Ассоциативность умножения,
6. Коммутативность умножения,
7. Существование нейтрального элемента по умножению,
8. Дистрибутивность умножения по сложению,
9. Линейная упорядоченность,
10. Транзитивность отношения порядка,
11. Монотонность отношения порядка по сложению,
12. Монотонность отношения порядка по умножению,
13. Аксиома Архимеда. Для $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k \in \mathbb{N} \mid n < k$.

    Эта аксиома наглядно очевидна, например $k = n + 1$. Линейно упорядоченные множества для которых справедлива аксиома Архимеда называют «архимедово упорядоченными».
14. Любое сечение множества $\mathbb{N}$ — скачок.

Операцию $n - m \in \mathbb{N}$, обратную к сложению, будем называть вычитанием натуральных чисел: $n - m \in \mathbb{N} \mid (n - m) + m = n$.

Легко заметить, $n - m$ является решением уравнения $x + m = n$, при этом необходимо, чтобы выполнялось условие $m < n$.

Операцию $n/m \in \mathbb{N}$, обратную к умножению, называют делением натуральных чисел: $n/m \in \mathbb{N} \mid (n/m) \cdot m = n$. Если n делится на m, то тогда говорят что n кратно m и существует $k \in \mathbb{N} \mid n = k \cdot m$.

Операция деления n на m имеет смысл на множестве натуральных чисел только тогда, когда $(m < n) \wedge (n$ кратно $m)$. Указанные условия выполняются одновременно достаточно редко, например, второе не будет выполнено, если n и m взаимно простые числа.

На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ заданы две бинарные операции сложение и умножение, а операции вычитания и деления не являются бинарными на $\mathbb{N}$, т. е. на множестве натуральных чисел можно без каких-либо ограничений производить два арифметических действия: сложение и умножение, но для выполнения операций вычитания и деления этих чисел недостаточно.

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ коммутативная полугруппа по сложению, и коммутативная полугруппа с единицей по умножению.

Теперь определим число нуль — 0 при помощи отношения следования через равенство: $1 = S(0)$.

Из свойств сложения и определения нуля — $0 + 1 = 1$.

Если $0 + n = n \Rightarrow 0 + (n + 1) = (0 + n) + 1 = n + 1$, следовательно, для любого натурального n: $0 + n = n + 0 = n$ и по определению $0 = n - n$, т. е. 0 нейтральный элемент по сложению на множестве $\mathbb{N}$.

Из свойств умножения очевидно следует, что $1 \cdot 0 = 0$.

Если $n \cdot 0 = 0 \Rightarrow (n + 1) \cdot 0 = (n \cdot 0) + 0 = 0 + 0 = 0$, поэтому для $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon 0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$.

И наконец, из определения нуля следует, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon 0 < n$.

Целые числа. Основным принципом при построении новых числовых множеств является их расширение до некоторого объемлющего множества. Под расширением числового множества X будем понимать множество Y, удовлетворяющее следующим четырем требованиям:

1) X — собственное подмножество расширения Y;

2) Все соотношения между элементами X определены для элементов расширения Y и имеют тот же самый смысл;

3) В Y выполнима операция, которая в X либо невыполнима, либо выполнима не всегда;

4) Расширение Y является минимальным из всех возможных, удовлетворяющих перечисленным выше трем требованиям, и однозначно определяется через X с точностью до изоморфизма [10]. В этом случае также говорят, что X вложено в Y.

При помощи нуля и отрицательных величин натуральный ряд можно расширить до множества целых чисел, на котором арифметическая операция вычитания выполняется всегда, что означает существование обратного элемента (который будет определен далее по тексту) по сложению.

Структуры абстрактной алгебры позволяют эффективно конструировать новые числовые множества. Основными алгебраическими объектами являются группы, кольца и поля. «Забегая вперед», отметим что любое кольцо является группой, а любое поле и кольцом и группой.

Определение 7. Группа — множество G с одной бинарной операцией

$$\odot\colon\ a, b \in G \longmapsto a \odot b \in G,$$

которая удовлетворяет следующим аксиомам:

1) ассоцаитивность: $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$;
2) существование нейтрального элемента: $\forall\, a \in G\colon e \odot a = a$;
3) существование обратного элемента: $\forall\, a \in G\ \exists\, a^{-1} \mid\ a^{-1} \odot a = e$.

В определении группы нейтральный и обратный элементы действовали слева; несложно показать, что в общем случае они могут действовать также и справа [3].

Рассмотрим выражение $a^{-1} \odot a \odot a^{-1}$:

$$(a^{-1} \odot a) \odot a^{-1} = e \odot a^{-1} = a^{-1} \Rightarrow (a^{-1} \odot a) \odot a^{-1} = a^{-1},$$

подействовав элементом, обратным к a^{-1}, на последнее равенство слева, получим

$$(a^{-1})^{-1} \odot (a^{-1} \odot a) \odot a^{-1} = (a^{-1})^{-1} \odot a^{-1} \Rightarrow$$

$$((a^{-1})^{-1} \odot a^{-1}) \odot (a \odot a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \odot a^{-1} \Rightarrow e \odot (a \odot a^{-1}) = e \Rightarrow a \odot a^{-1} = e.$$

Таким образом, обратный элемент может действовать как слева, так и справа и a является обратным для a^{-1}. Так как

$$a = e \odot a = (a \odot a^{-1}) \odot a = a \odot (a^{-1} \odot a) = a \odot e = a,$$

нейтральный элемент является и правым, и левым одновременно.

Теорема 5. *Пусть множество G — группа. Тогда G содержит единственный нейтральный элемент e, и для любого $a \in G$ существует единственный a^{-1} — обратный для a.*

Группу называют коммутативной или абелевой, если для

$$\forall\, a, b \in G \colon a \odot b = b \odot a.$$

Если бинарная операция в G — сложение, то группу называют аддитивной, если же бинарная операция умножение, то группу называют мультипликативной. Нейтральным элементом в аддитивных группах является нуль, в мультипликативных — единица.

Определение 8. Кольцо — множество A, в котором заданы две бинарные операции, обычно называемые «сложением» и «умножением»:

$$\text{«}+\text{»}\colon\ a,\, b \in A \longmapsto a + b \in A;$$

$$\text{«}\cdot\text{»}\colon\ a,\, b \in A \longmapsto a \cdot b \in A.$$

При этом A — абелева группа относительно сложения и сложение связано с умножением двумя распределительными (дистрибутивными) законами:
1) $a + b = b + a$;
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $\exists\,!\, 0 \in A \mid a + 0 = 0 + a = a$;
4) $\forall\, a \in A\, \exists\,!\, b \in A \mid a + b = 0$.
5) $a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$.

Более кратко можно сказать, что кольцо A — абелева группа по сложению, в которой задана еще бинарная операция умножения удовлетворяющая двум распределительным законам.

В подавляющем большинстве случаев изучаются кольца в которых дополнительно выполняется свойство ассоциативности умножения

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

такие кольца называют ассоциативными. Далее в этой статье под кольцом всегда будет подразумеваться ассоциативное кольцо.

Рассмотрим основные частные случаи колец.

1) Коммутативное кольцо — кольцо, в котором умножение коммутативно, то есть $a \cdot b = b \cdot a$;

2) Кольцо с единицей — кольцо, в котором существует нейтральный элемент по умножению, то есть $\exists\, 1 \in A \mid a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

3) Кольцо без делителей нуля — кольцо, в котором из $a \cdot b = 0$ следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$.

4) Область целостности — ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, без делителей нуля.

Множество $A' \subset A$ называют подкольцом, если A' является кольцом с теми же бинарными операциями, что и кольцо A.

Кольцо A называют минимальным кольцом, содержащим множество X, если в A нет подколец, содержащих X.

Определение 8. Минимальное кольцо содержащие $\mathbb{N}$, называют множеством целых чисел $\mathbb{Z}$.

Доказательство существования такого кольца [9] здесь опускается, но если принять соглашение, что такое кольцо существует, то множество целых чисел $\mathbb{Z}$ можно построить используя «наивную точку зрения», а именно будем расширять $\mathbb{N}$ до $\mathbb{Z}$ следующим образом. Сначала добавим к $\mathbb{N}$ нуль и получим множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+$.

Затем добавим к множеству неотрицательных целых чисел элементы обратные по сложению к натуральным числам при помощи взаимно-однозначного соответствия $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^-$, которое задается формулой $f(n) = -n$ ($\mathbb{Z}^-$ — множество отрицательных целых чисел).

Построенное таким способом множество целых чисел должно определять $\mathbb{Z}$ как минимальное кольцо, содержащее $\mathbb{N}$, с точностью до изоморфизма. Чтобы закрыть этот вопрос используется следующие утверждение [9].

Теорема 6. (об изоморфизме минимальных колец).
Все минимальные кольца, содержащие множество натуральных чисел, изоморфны друг другу.

Справедливы следующие утверждения [1, 9].

Теорема 7. (об области целостности).
Кольцо целых чисел — область целостности.

Теорема 8. (о соседних целых числах).
Для $\forall\, a \in \mathbb{Z}$ *не существует* $b \in \mathbb{Z} \mid a < b < a + 1$.

Теорема 9. (об ограниченном множестве целых чисел).
Любое ограниченное множество целых чисел содержит максимальный и минимальный элементы.

Следствие. *Любое сечение* $\mathbb{Z}$ *— скачок.*

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ обладает следующими свойствами:

1. Замкнутость по сложению,
2. Ассоциативность сложения,
3. Коммутативность сложения,
4. Существование нейтрального элемента по сложению,
5. Существование обратного элемента по сложению,
6. Замкнутость по умножению,
7. Ассоциативность умножения,
8. Коммутативность умножения,
9. Существование нейтрального элемента по умножению,
10. Дистрибутивность умножения по сложению,
11. Линейная упорядоченность,
12. Транзитивность отношения порядка,
13. Монотонность отношения порядка по сложению,
14. Монотонность отношения порядка по умножению,
15. Аксиома Архимеда: Для $\forall\, a \in \mathbb{Z}\ \exists\, k \in \mathbb{N} \ \mid\ a < k$.
16. Любое сечение множества $\mathbb{Z}$ — скачок.

Определение 9. Бинарную операцию $a/b \in \mathbb{Z}$, обратную к умножению, будем называть делением целых чисел:

$$a/b \in \mathbb{Z} \mid (a/b)\cdot b = a.$$

Определение 10. Пусть $a,\ b \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$. Если $a - b$ делится на m, то тогда говорят, что a сравнимо с b по модулю m, и пишут:

$$a \equiv b(mod\, m).$$

Теорема 10. (о делении целых чисел с остатком). [4]
Любое $a \in \mathbb{Z}$ можно единственным образом представить в виде:

$$a = a_0 b + r, \quad \text{где}\ \ (b, r, a_0 \in \mathbb{Z}) \wedge (0 \leqslant r < |b|) \wedge (b \neq 0).$$

Число r называют остатком при делении a на b.

Рассмотрим $a,\ b \in \mathbb{Z}$, имеющих одинаковые остатки r $(0 \leqslant r < m)$ при делении на $m > 0$,

$$\begin{cases} a = a_0 m + r \\ b = b_0 m + r \end{cases} \Rightarrow a - b = a_0 m + r - b_0 m - r = (a_0 - b_0)m$$

откуда следует, что разность $a - b$ делится на m, то есть $a \equiv b(mod\, m)$.

Верно и обратное.

Пусть $(a \equiv b(mod\, m)) \wedge (a = a_0 m + r_1) \wedge (b = b_0 m + r_2)$. По определению сравнения $a - b$ делится на m, но на m также делится разность:

$$(a_0 m + r_1) - (b_0 m + r_2) = (a_0 - b_0)m + (r_1 - r_2).$$

Следовательно и $r_1 - r_2$ делится на m, то есть кратно этому числу, а так как и r_1, и r_2 неотрицательны и строго меньше, чем m, их разность $r_1 - r_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$.

Таким образом, сравнение по модулю некоторого m задает на множестве целых чисел отношение эквивалентности. Счетные классы эквивалентности (или классы вычетов) содержат те и только те целые числа, остатки которых при делении на m равны. В качестве представителей этих классов обычно выбирают так называемые наименьшие неотрицательные вычеты: $0, 1, \ldots, m-1$.

Рациональные числа. Операция деления имеет смысл на множестве целых чисел только тогда, когда делимое a кратно делителю m, то есть сравнимо с нулем по модулю m и, следовательно, принадлежит соответствующему классу эквивалентности. Поэтому множество $\mathbb{Z}$ не замкнуто относительно арифметической операции деления.

Эта проблема решается при помощи рациональных дробей, на множестве которых можно выполнять все четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Последнее означает существование для любого рационального числа, неравного нулю, обратного элемента по умножению. Кстати, заметим, исторически рациональные дроби появились раньше отрицательных чисел.

Для построения рациональных чисел нам понадобится алгебраическая структура поля. Дадим несколько равносильных определений. Сначала самое короткое.

Поле — это область целостности, в которой для любого ненулевого элемента есть обратный по умножению (смотри чуть выше), то есть

$$\forall\, a \neq 0\; \exists\, b \in K \;\mid a \cdot b = 1.$$

Обычно поля обозначают либо немецкой буквой K (от первой буквы немецкого слова Körper , откуда и пошли определения полей), либо латинской буквой F (от первой буквы английского слова Field).

Другое определение.

Поле K — это множество с двумя бинарными операциями: сложением и умножением. Относительно сложения множество K является абелевой группой, а множество $K^* = K \setminus \{0\}$ — абелева группа относительно умножения, и эти бинарные операции связаны распределительным (дистрибутивным) законом $a(b+c) = ab + ac$.

Теперь дадим общее определение.

Определение 11. Множество K с двумя бинарными операциями — сложением и умножением

$$\text{«}+\text{»}:\; a, b \in K \;\longmapsto a + b \in K;$$

$$\text{«}\cdot\text{»}:\; a, b \in K \;\longmapsto a \cdot b \in K.$$

называют полем, если: K — коммутативное кольцо с единицей, множество ненулевых элементов K не пусто и образует мультипликативную абелеву группу:

1) $\forall\, a, b, c \in K\colon (a+b)+c = a+(b+c)$;
2) $\forall\, a, b \in K\colon a+b = b+a$;
3) $\exists\, 0 \in K \mid \forall\, a \in K\colon 0 + a = a + 0 = a$;

4) $\forall\, a \in K\ \exists\ -a \in K \mid a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5) $\forall\, a, b, c \in K\colon (ab)c = a(bc)$;
6) $\forall\, a, b \in K\colon ab = ba$;
7) $\exists\, 1 \in K \mid \forall\, a \in K\colon a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8) $\forall\, a \neq 0 \in K\ \exists\, a^{-1} \in K \mid aa^{-1} = a^{-1}a = 1$;
9) $\forall\, a, b, c \in K\colon a(b + c) = (b + c)a = ab + ac = ba + ca$.

Начнем построение множества рациональных чисел, и поскольку мы находимся в мире строгой математики, то обязаны дать точное определение этого понятия, а в нем есть определенная тонкость, сущность которой поясняют следующие два замечания.

Во-первых. Разные «на вид» дроби на самом деле оказываются равными, например $2/6 = 4/12$. Поэтому такого типа дроби мы должны объединять в один класс эквивалентности, в одну дробь.

Во-вторых. Попытка определить рациональные числа как несократимые дроби является некорректной, так как множество таких дробей незамкнуто относительно операций и сложения, и умножения.

Например, $1/6 + 1/3 = 3/6$.

Дадим определение рациональной дроби (рационального числа), используя при этом известные нам целые числа.

Определение 12. Рациональной дробью или рациональным числом a/b, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b > 0$ будем называть множество пар целых чисел

$$a/b = \frac{a}{b} = \{(c, d) \mid c, d \in \mathbb{Z},\ d > 0\}$$

для которых выполнено условие $ad - bc = 0$.

Определение 13. Множеством рациональных чисел будем называть множество классов равных рациональных дробей

$$\mathbb{Q} = \left\{ a/b = \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 \right\}$$

в котором равенство дробей определено формулой

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' - b'a = 0 \tag{1}$$

Заметьте, равенство новых объектов (дробей), определено через равенство уже известных объектов — целых чисел.

Равенство (1) задает отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{Q}$.

Нам надо проверить следующие условия:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(рефлексивность)},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad \text{(симметричность)},$$

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} = \frac{e}{f}\right) \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \qquad \text{(транзитивность)}.$$

Даже с проверкой рефлексивности, которая на вид кажется совсем уж тривиальной, связана некая проблема, суть которой проявляется если вместо кольца $\mathbb{Z}$ взять какое-нибудь другое кольцо, в котором нет свойства коммутативности $ab = ba$. Но в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ рефлексивность действительно тривиальна. Аналогичное замечание надо сделать и относительно симметричности, проверка которой тоже представляется тривиальной; но только в коммутативном случае. В общем случае, когда не выполняется условие коммутативности умножения, свойство симметричности не будет выполнено.

Проверим транзитивность. По определению равенства дробей имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad - bc = 0 \tag{2}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow cf - de = 0 \tag{3}$$

Отсюда нам надо получить, что $af - be = 0$, откуда будет следовать равенство $a/b = e/f$. Для этого равенство (2) умножим на e, а равенство (3) на a и сложим их.

Тогда получим:

$$0 = acf - bce = (af - be)c = 0 \tag{4}$$

И тут мы приходим к еще одному нюансу. Находясь в кольце целых чисел, мы можем смело сократить на c и получить требуемое равенство $af - be = 0$. Но при переходе к другим кольцам, такое сокращение не всегда возможно. Например, в кольцах с так называемыми «делителями нуля».

Следующим шагом в получении алгебраической структуры поля рациональных чисел, будет задание бинарных операций на множестве $\mathbb{Q}$:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \longmapsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ (сложение)}, \tag{5}$$

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \longmapsto \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ (умножение)}. \tag{6}$$

Здесь нас тоже поджидает некоторая тонкость; вспомним, что рациональная дробь a/b неоднозначно определена целыми числами a и b, и поэтому нам надо проверить независимость результатов сложения и умножения от выбора представителей классов эквивалентности.

Пусть

$$\left(\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}\right) \wedge \left(\frac{c'}{d'} = \frac{c}{d}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)$$

что означает корректность задания бинарных операций.

Так как по определению сложения

$$\left(\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}\right) \wedge \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\right)$$

то нам надо проверить, что:

$$(a'd' + b'c')bd - b'd'(ad + bc) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a'b - b'a)d'd + (c'd - d'c)b'b = 0 \tag{7}$$

Но $a'/b' = a/b$ и $c'/d' = a/d$ по условию, значит, $a'b - b'a = 0$ и $c'd - d'c = 0$, откуда следует (7).

Корректность операции умножения проверяется аналогично, после чего можно доказать следующие утверждение.

Теорема 11. *Множество рациональных дробей $\mathbb{Q}$ является полем относительно бинарных операций сложения и умножения. Это поле называется полем рациональных чисел.*

Множество рациональных чисел можно построить и по-другому.

Множество $K' \subset K$ называют подполем поля K, если K' само является полем с теми же бинарными операциями что и K.

Множество K — минимальное поле содержащее X, если в K нет других подполей, содержащих X.

Определение 14. Полем частных коммутативного кольца без делителей нуля называют минимальное поле, содержащее это кольцо.

Отсутствие делителей нуля в коммутативном кольце является необходимым и достаточным условием существования поля частных [13].

Определение 15.Множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$ называют поле частных кольца $\mathbb{Z}$.

Теорема 12.(об изоморфизме полей частных кольца целых чисел) [13]. *Поле $\mathbb{Q}$ единственно с точностью до изоморфизма.*

Каждая дробь является упорядоченной парой:

$$(p,\, q) = p/q = \frac{p}{q},$$

где p — числитель; q — знаменатель.

Если дробь p/q — элемент поля частных кольца K, то

$$\forall\, a \neq 0 \in K\colon \frac{p}{q} = \frac{p\,a}{q\,a}.$$

Множество Q распадается на систему непересекающихся классов эквивалентности равных дробей. Класс к которому принадлежит упорядоченная пара $(a,\, b)$, будем записывать в виде дроби a/b, имея в виду, что $a/b = a'/b' \Leftrightarrow ab' = ba'$. По определению частного элементов коммутативного кольца без делителей нуля

$$p\,a = (p\,a)(q\,a)(q\,a)^{-1} = q\,a\frac{p\,a}{q\,a} \Rightarrow p\,a = q\,a\frac{p\,a}{q\,a} \Leftrightarrow p\,a\,a^{-1} = \frac{p\,a}{q\,a}\,q\,a\,a^{-1} \Leftrightarrow$$

$$p = \frac{p\,a}{q\,a}\,q \Leftrightarrow p\,q^{-1} = \frac{p\,a}{q\,a}\,q\,q^{-1} \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{p\,a}{q\,a}.$$

Следовательно, дробь можно сокращать на любой общий множитель её числителя и знаменателя, поэтому в каждом классе эквивалентных пар, представляющих рациональные числа, обязательно присутствует дробь со взаимно простыми числителем и знаменателем. Такие дроби называются несократимыми, а представление рационального числа несократимой дробью — каноническим.

Множество $\mathbb{Q}$, обладает следующими свойствами:

1. Замкнутость по сложению,
2. Ассоциативность сложения,
3. Коммутативность сложения,
4. Существование нейтрального элемента по сложению,
5. Существование обратного элемента по сложению,
6. Замкнутость по умножению,
7. Ассоциативность умножения,
8. Коммутативность умножения,
9. Существование нейтрального элемента по умножению,
10. Существование обратного элемента по умножению,
11. Дистрибутивность умножения по сложению,
12. Линейная упорядоченность,
13. Транзитивность отношения порядка,
14. Монотонность отношения порядка по сложению,
15. Монотонность отношения порядка по умножению,
16. Аксиома Архимеда: Для $\forall\, p \in \mathbb{Q}\; \exists\, k \in \mathbb{N} \;\mid\; p < k$.

Вещественные числа. Однако оказалось, что рациональные числа не позволяют полностью решить проблему измерения различного рода величин. Например, несложно показать, что гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами не может быть выражена рациональной дробью. Таким образом множество рациональных чисел является «неполным» в том смысле, что существуют величины (иррациональные числа), значения которых невозможно выразить через рациональные дроби.

Итак, рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами. По теореме Пифагора длина его гипотенузы равна $\sqrt{2}$. Покажем от противного, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда существует каноническое представление этого числа в виде дроби $n/m \mid \sqrt{2} = n/m$.

Возведем последнее равенство в квадрат, тогда:

$$2 = \frac{n^2}{m^2} \Leftrightarrow 2m^2 = n^2 \Rightarrow n \text{ — четное} \Rightarrow$$

$$n = 2k \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m \text{ — четное},$$

что противоречит несократимости n/m. Следовательно, класс эквивалентных пар целых чисел, определяющих «рациональное число $\sqrt{2}$», не содержит канонического представления этого числа, чего не может быть.

Это противоречие доказывает, что длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами, равная $\sqrt{2}$, не может быть выражена рациональным числом. Возникшую ситуацию необходимо изучить подробнее. Докажем, используя идею У. Рудина [11], что сечение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}^{\triangle}|\mathbb{Q}^{\triangledown}$, произведенное числом $\sqrt{2}$, является щелью, то есть в нижнем классе $\mathbb{Q}^{\triangle}$ нет максимального элемента, а в верхнем $\mathbb{Q}^{\triangledown}$ — минимального.

Сначала докажем, что $\forall\, p \in \mathbb{Q}^{\triangle}\; \exists\, q \in \mathbb{Q}^{\triangle} \mid p < q < \sqrt{2}$.

Рассмотрим рациональное число $p \in \mathbb{Q}^{\triangle} \mid (p > 1) \wedge (1 < p^2 < 2)$ и придадим этому числу p приращение, равное $1/n$.

Очевидно, что $0 < 1/n < 1$.

Пусть $q = p + 1/n$. Надо подобрать n так, чтобы $q^2 < 2$:

$$q^2 = \left(p + \frac{1}{n}\right)^2 = p^2 + \frac{2p}{n} + \frac{1}{n^2} = p^2 + \left(2p + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Так как $1/n < 1$, то

$$q^2 < p^2 + (2p+1)\frac{1}{n}.$$

Рассмотрим неравенства

$$q^2 < p^2 + (2p+1)\frac{1}{n} < 2 \Rightarrow (2p+1)\frac{1}{n} < 2 - p^2.$$

Согласно аксиоме Архимеда и построению рационального числа q для любого натурального n, такого что

$$n > \frac{2p+1}{2-p^2},$$

справедлива оценка $1 < p^2 < q^2 < 2$. Следовательно, $p < q < \sqrt{2}$.

Теперь докажем, что для $\forall\, p \in \mathbb{Q}^{\nabla}\ \exists\, q \in \mathbb{Q}^{\nabla} \mid \sqrt{2} < q < p$.

Пусть $p \in \mathbb{Q}^{\nabla}$. Положим $q = p - 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$q^2 = p^2 - 2p\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = p^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 2p\right) > p^2 - \frac{2p}{n}.$$

Рассмотрим систему неравенств

$$q^2 > p^2 - \frac{2p}{n} > 2 \Rightarrow p^2 - \frac{2p}{n} > 2 \Leftrightarrow p^2 - 2 > \frac{2p}{n}.$$

Согласно аксиоме Архимеда и по построению рационального числа q для любого натурально n, такого что

$$n > \frac{2p}{p^2 - 2},$$

справедлива оценка: $2 < q^2 < p^2 \Rightarrow \sqrt{2} < q < p$.

Сечение, производимое на множестве $\mathbb{Q}$ числом $\sqrt{2}$, является примером, в котором как множество, ограниченное сверху (нижний класс), не имеет точной верхней грани (супремума), так и множество, ограниченное снизу (верхний класс), не имеет точной нижней грани (инфимума).

Если сечение множества $\mathbb{Q}$ производится рациональной дробью, то такое сечение является дедекиндовым, так как элемент, производящий это сечение, можно отнести либо к верхнему классу, в котором он будет минимальным элементом, либо к нижнему, в котором он будет максимумом. На примере же числа $\sqrt{2}$ мы показали, что возможно сечение множества $\mathbb{Q}$, которое является щелью. В этом случае в нижнем классе нет максимального элемента, а в верхнем классе нет минимального элемента то есть на множестве рациональных чисел возможны два вида сечений. Понятно, что если некоторый элемент задаёт на множестве сечение, являющееся щелью, то он сам не принадлежит этому множеству, поэтому множество рациональных чисел, в определенном смысле, является «неполным».

Аксиоматически расширим поле рациональных чисел таким образом, чтобы любое сечение полученного расширения было дедекиндовым.

Определение 16. Поле $\mathbb{R}$, удовлетворяющее ниже приведенной системе аксиом, называют множеством вещественных чисел:

1. Замкнутость по сложению,
2. Ассоциативность сложения,
3. Коммутативность сложения,
4. Существование нейтрального элемента по сложению,
5. Существование обратного элемента по сложению,
6. Замкнутость по умножению,
7. Ассоциативность умножения,
8. Коммутативность умножения,
9. Существование нейтрального элемента по умножению,
10. Существование обратного элемента по умножению,
11. Дистрибутивность умножения по сложению,
12. Линейная упорядоченность,
13. Транзитивность отношения порядка,
14. Монотонность отношения порядка по сложению,
15. Монотонность отношения порядка по умножению,
16. Аксиома Архимеда: Для $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, k \in \mathbb{N} \mid x < k$,
17. Аксиома полноты: Любое сечение поля $\mathbb{R}$ — дедекиндово.

Поля, для которых справедлива аксиома полноты, называют непрерывными [6].

Аксиома полноты означает следующее: пусть x — произвольное вещественное число, производящие сечение множества $\mathbb{R}$. Если в нижнем классе нет максимального элемента, то x является минимальным элементом верхнего класса, если же в верхнем классе нет минимального элемента, то x — максимальный элемент нижнего класса.

Множество вещественных чисел непрерывно и архимедово упорядочено. На этом множестве выполнимы не только все арифметические операции, но и любые геометрические измерения.

Множество $\mathbb{R}$ обладает уникальными свойствами (принцип Вейерштрасса, принцип вложенных отрезков, принцип Больцано, принцип Архимеда) [5, 6, 9, 11, 12]. Но самым важным свойством $\mathbb{R}$ является его полнота, которая позволяет эффективно осуществлять на $\mathbb{R}$ операцию предельного перехода, который в свою очередь (предельный переход) является основным инструментом дифференциального и интегрального исчисления.

Существует несколько способов определения множества вещественных чисел. Эквивалентность этих способов основана на том, что все непрерывные архимедово упорядоченные поля изоморфны [6, 9]. То есть аксиоматически определенное поле вещественных чисел изоморфно множеству бесконечных десятичных дробей [5]; изоморфно системе дедекиндовых сечений множества рациональных чисел [12]; изоморфно фактор-множеству последовательностей Коши.

Изучая проблему несоизмеримых отрезков, к понятию вещественного числа подошли еще древнегреческие математики, но строгая теория этих чисел была построена только в конце XIX века Г. Кантором, Р. Дедекиндом и К. Вейерштрассом.

Комплексные числа. Но множество вещественных чисел «алгебраически незамкнуто», т. е. не все алгебраические уравнения имеют решения на этом множестве, например, $x^2 = -1$.

Идея формального решения квадратных уравнений, при котором в соответствующих формулах под знаком квадратного корня стоит отрицательное число привело к «изобретению» комплексных чисел. На множестве комплексных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления. Однако многие свойства комплексных чисел отличаются от свойств вещественных чисел; например, нельзя ответить на вопрос какое из двух комплексных чисел больше другого.

Символ i для обозначения мнимой единицы, являющейся решением уравнения $x^2 = -1$, предложил Эйлер, взявший для этого первую букву латинского слова imaginarius — «мнимый». Он также высказал предположение об алгебраической замкнутости множества комплексных чисел. К такому же выводу пришел д'Аламбер, но первое строгое доказательство этого факта принадлежит Гауссу; который и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число».

Можно разными способами определять множество комплексных чисел $\mathbb{C}$, получая при этом изоморфные, а значит, с точки зрения алгебры, эквивалентные (одинаковые) множества.

Здесь используем два способа: первый, построим комплексные числа как множество матриц специального вида

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,\, b \in \mathbb{R} \right\},$$

и второй где $\mathbb{C}$ множество упорядоченных пар вещественных чисел

$$\mathbb{C} = \{(a,\ b) \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}.$$

Сначала рассмотрим первый способ. На множестве матриц определены две бинарные операции — сложение и умножение. Легко заметить, что эти операции не выводят нас из множества $\mathbb{C}$, то есть, если $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha + \beta \in \mathbb{C}) \wedge (\alpha \cdot \beta \in \mathbb{C})$.

Действительно:

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Теорема 13. *Множество*

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

является полем относительно бинарных операций

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}.$$

Определим вложение поля $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$

$$\sigma\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \hookrightarrow \mathbb{C} \\ a & \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \end{cases}$$

При матричном задании комплексного числа широко распространенная ошибка — желание представить элемент поля $\mathbb{C}$ не как квадратную матрицу второго порядка, а как её определитель, что является заблуждением.

Перейдем теперь к алгебраической записи комплексного числа.

Введем следующие обозначения: $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В этой случае

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a + bi,$$

$$\beta = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = c + di.$$

Поэтому производя формальные арифметические действия и учитывая формулы (8) и (9) имеем:

$$\alpha + \beta = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Рассмотрим второй вариант построения поля комплексных чисел

$$\mathbb{C}' = \{(a,b) \mid a,\, b \in \mathbb{R}\},$$

на котом сложение и умножение задаются следующим образом:

$$\alpha = (a,\, b),\ \beta = (c,\, d) \mapsto \alpha + \beta = (a+c,\, b+d);$$

$$\alpha = (a,\, b),\ \beta = (c,\, d) \mapsto \alpha\beta = (ac-bd,\, ad+bc).$$

Кстати, заметим, в первом варианте построения комплексных чисел, менее загадочным является определение умножения, которое возникает просто из умножения матриц.

Теорема 14. *Множество $\mathbb{C}'$ является полем, которое содержит поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.*

Теорема 15. *Поля $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}'$ — изоморфны.*

Каждый раз, проверяя, что какое-то новое числовое множество является наименьшим, мы требовали, чтобы содержащее его поле имело бы соответствующее новое свойство. Так поле, содержащее целые числа, должно иметь обратный элемент по умножению к любому ненулевому целому числу, а поле, содержащее рациональные числа должно быть полным, то есть содержать пределы всех сходящихся последовательностей. Наше построенное поле комплексных чисел отличается от поля вещественных чисел тем, что в нем можно решать уравнение $x^2 + 1 = 0$. Вот такое поле и должно быть наименьшим.

Теорема 16. *Пусть поле $\mathbb{K}$ содержит поле вещественных чисел и имеет все корни уравнения $x^2 + 1 = 0$. Тогда поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ в него изоморфно вкладывается, то есть содержится в нем.*

Основная теорема алгебры, доказанная Гауссом, говорит, что любое уравнение $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, где $\forall\ a_k \in \mathbb{Q}$ имеет решение в поле комплексных чисел. Современное алгебраическое доказательство этой теоремы требует знания теории Галуа, которой мы не касаемся в этой статье.

Список литературы

[1] Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз., 1938. 480 с.

[2] Биркгоф Г. Теория решеток / пер. с англ. М.: Наука., 1984. 586 с.

[3] Ван-дер-Варден Б. Л. Алгебра / пер. с нем. М.: Наука., 1979. 624 с.

[4] Виноградов И. М.Основы теории чисел. М.: Наука., 1981. 176 с.

[5] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. в 2 ч. Ч. 1. М.: Изд-во Московского ун-та., 2006. 672 с.

[6] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: в 3 т. Т. 1. М.: «Высшая школа»., 1988. 712 с.

[7] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз., 1962. 396 с.

[8] Ленг С. Алгебра / пер. с англ. М.: Мир., 1968. 564 с.

[9] Орехов А. В. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2014. 228 с.

[10] Проскуряков И. В. Числа и многочлены. М.: Просвещение., 1965. 284 с.

[11] Рудин У. Основы математического анализа / пер. с англ. СПб.: «Лань»., 2002. 320 с.

[12] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т.1. СПб.: «Лань»., 1997. 608 с.

[13] Шмидт Р. А. Алгебра. в 3 ч. Ч. 1. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2008. 360 с.

Секция 1.

Общие вопросы преподавания математики в средних учебных заведениях

УДК 512.5

Орехов А.В., Востоков С.В., Востокова Р.П.

Эквивалентность, отношение порядка и изоморфизм в курсе математики для специализированных средних учебных заведений

Декартово произведение множеств. Для корректного определения числовых множеств необходимо предварительное знакомство с такими понятиями как: декартово произведение, отношение эквивалентности, отношение порядка, сечение линейно упорядоченного множества, изоморфизм.

Обычно в программе по математике старших классов средней школы рассматриваются неупорядоченные множества. При этом, пара фигурных скобок является общепринятым обозначением при перечислении их элементов например: $X = \{a,\, b,\, c\} = \{b,\, c,\, a\}$ и т. п. Неупорядоченное множество X состоит из трех элементов $a,\, b,\, c$ расположение которых внутри него не имеет никакого значения. Однако, достаточно часто приходится рассматривать теоретико-множественные объекты, в которых расположение элементов имеет решающие значения. Такие множества называются упорядоченными и для их обозначения вместо фигурных, используются круглые скобки.

$X = \{a, b\} = \{b, a\}$ — неупорядоченное множество.

$Y = (a, b)$ — упорядоченное множество.

$Z = (b, a)$ — упорядоченное множество.

X, Y, Z — различные множества.

Рассмотрим важнейший вид системы упорядоченных множеств.

Определение 1. Декартовым произведением множеств X и Y называется система Z, элементами которой являются все возможные упорядоченные пары (x, y), где $x \in X,\ y \in Y$.

Обозначение: $Z = X \times Y = \{z \mid z = (x, y),\ x \in X,\ y \in Y\}$.

Декартово произведение двух множеств удобно записывать в виде прямоугольной таблицы, которую называют матрицей.

В этом случае элементами матрицы будут соответствующие упорядоченные пары $(x, y) \in X \times Y$.

Рассмотрим пример.

Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{a, b, c\}$, тогда произведение $X \times Y$ можно представить в виде матрицы:

$$\begin{Vmatrix} (1,a) & (1,b) & (1,c) \\ (2,a) & (2,b) & (2,c) \\ (3,a) & (3,b) & (3,c) \\ (4,a) & (4,b) & (4,c) \end{Vmatrix}$$

В общем случае матрицу состоящую из n столбцов и m строк обозначают следующим образом

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Если число строк в матрице равно числу столбцов, то такую матрицу называют квадратной. В квадратной матрице можно выделить главную диагональ, которую составляют элементы для которых номер строки, в которой он находится, совпадает с номером столбца.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Наглядной иллюстрацией для декартова произведения $X \times X$ и его подмножеств являются матрицы смежности [2].

Если множество X содержит n элементов, то декартово произведение $X \times X$ можно изобразить в виде квадратной матрицы размера $n \times n$. Заменив каждую упорядоченную пару принадлежащую $X \times X$ на единицу, мы получим его матрицу смежности.

Если положить, что множество $X = \{a, b, c, d\}$, то матрица смежности для $X \times X$ будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Матрица смежности для какого-либо подмножества R декартова произведения $X \times X$ строится следующим образом.

Сначала берется квадратная матрица упорядоченных пар, принадлежащих декартову произведению $X \times X$, затем, если упорядоченная пара из этой квадратной матрицы принадлежит R, то вместо неё пишется единица, если не принадлежит – нуль.

Бинарные отношения.

Определение 2. Множество R называется бинарным отношением на множестве X, если $R \subset X \times X$.

На одном и том же множестве X можно задать различные отношения, которые определяются, в том числе, своими свойствами.

Определение 3. Бинарное отношение R на множестве X называется рефлексивным если для $\forall\, x \in X\colon\ (x, x) \in R$.

Определение 4. Бинарное отношение R называется антирефлексивным если для $\forall\, x \in X\colon\ (x, x) \notin R$.

Определение 5. Бинарное отношение R называется симметричным если для $\forall\, x, y \in X \mid\ (x, y) \in R \Rightarrow\ (y, x) \in R$.

Определение 6. Бинарное отношение называется антисимметричным если для $\forall\, x, y \in X \mid ((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R) \Rightarrow x = y$.

Определение 7. Бинарное отношение называется транзитивным если для $\forall\, x, y, z \in X \mid ((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$.

Если $(x, y) \in R$, то пишут $(x, y) = xRy$ и говорят, что x находится в отношении R к y.

Отношение эквивалентности.

Определение 8. Если бинарное отношение R, заданное на множестве X, рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R называется отношением эквивалентности.

Если $(x, y) \in R$, где R — эквивалентность, то в общем случае вместо xRy используется символическая запись $x \sim y$.

Отношение эквивалентности обладает очень важным свойством: оно разбивает множество X на непересекающиеся подмножества, которые называются классами эквивалентности. Верно и обратное, любое разбиение множества на непересекающиеся подмножества задает отношение эквивалентности.

Пусть x, y и z произвольные элементы множества X, такие что $x \sim y$ и $y \sim z$; в силу транзитивности x, y и z принадлежат одному и тому классу эквивалентности. Поэтому каждый класс однозначно определяется любым своим элементом; такие элементы называются представителями этого класса эквивалентности.

Система классов эквивалентности некоторого множества X называется фактор множеством и обозначается $X/\sim$. Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то изучая свойства X, мы можем иметь дело не со всем X, а только с фактор-множеством $X/\sim$, точнее сказать, с представителями различных классов эквивалентности.

Например, на множестве треугольников, подобие является отношением эквивалентности; изучая различного рода тригонометрические пропорции в прямоугольных треугольниках, мы рассматриваем в качестве представителя соответствующего класса эквивалентности прямоугольный треугольник с единичной гипотенузой.

Матрицу смежности отношения эквивалентности всегда можно свести к «блочному виду», когда элементы равные единице, образуют квадраты, главные диагонали которых совпадают с главной диагональю матрицы смежности декартова произведения $X \times X$. Если множество $X = \{a, b, c, d\}$, а отношение эквивалентности задается как $R = \{(a \sim b);\ (c \sim d)\}$, то матрица смежности в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Необходимо иметь в виду, что приведенное выше задание отношения R является сокращенным, так как, например, из $a \sim b$ согласно свойствам эквивалентности следует: $a \sim a$, $b \sim b$ и $b \sim a$.

Если отношение эквивалентности на X задано иначе, например так, $R = \{(a \sim c);\ (b \sim d)\}$, то вообще говоря мы получим матрицу смежности, вид которой будет отличаться от блочного. Но, принимая во внимание, что X неупорядоченное множество, мы можем поменять местами элементы b и c; тогда $X = \{a, c, b, d\}$ и мы снова получим матрицу смежности указанного выше вида.

Кстати, матрицы смежности наглядным образом иллюстрируют то, что бинарное отношение $R \subset X \times X$.

Важный частный случай отношения эквивалентности — отношение равества «=», которое является главной диагональю декартова произведения $X \times X$. Если снова $X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, то матрица смежности отношения «=» на этом множестве имеет следующий вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Упорядоченные множества.

Определение 9. Если бинарное отношение R, заданное на множестве X, рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то R называется отношением не строгого порядка. Если $(x,\ y) \in R$, то говорят, что х меньше либо равно у, и пишут $x \leqslant y$.

Определение 10. Если бинарное отношение R, заданное на множестве X, антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то R называется отношением строгого порядка. Если $(x,\ y) \in R$, то говорят, что х меньше (строго меньше) у, и пишут $x < y$.

Определение 11. Множество X, на котором задано некоторое отношение порядка R, называется упорядоченным или частично упорядоченным. Иначе говоря, множество X — упорядочено (частично упорядоченно), если $\exists\, x,\ y \in X \mid (x, y) \in R$.

Определение 12. Множество X, называется линейно упорядоченным или цепью, если для $\forall\, x,\ y \in X$ выполняется одно из высказываний: или $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$, где R — отношение порядка.

Пусть множество $X = \{a, b, c, d\}$ линейно упорядочено, например следующим образом: $R = \{a < b < c < d\}$.

Последняя цепочка неравенств означает следующие:

$$R = \{(a < b);\ (a < c);\ (a < d);\ (b < c);\ (b < d);\ (c < d)\}$$

В этом случае матрица смежности отношения строгого порядка для цепи X будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Если мы заменим отношение строгого порядка на множестве X, на нестрогий порядок: $R = \{a \leqslant b \leqslant c \leqslant d\}$, то матрица смежности изменится следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Если свойства отношения порядка выполняются на некотором множестве X, то тем более они выполняются на любом $Y \subset X$, и мы можем сделать следующие очевидное, но очень важное заключение. Любое подмножество упорядоченного множества, само упорядочено относительно того же самого отношения порядка. В частности любое подмножество цепи — тоже цепь [1].

Определение 13. Элемент M называется наибольшим в упорядоченном множестве X, если: $(M \in X) \wedge (\forall x \in X \mid x \leqslant M)$.

Определение 14. Элемент m называется наименьшим в упорядоченном множестве X, если: $(m \in X) \wedge (\forall x \in X \mid m \leqslant x)$.

В силу антисимметричности бинарного отношения порядка, если существует наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества X, то он единственный. В противном случае, если, например, x наибольший элемент множества X и существуют еще хотя бы один такой элемент, допустим y, то так как x наибольший элемент множества X, выполняется неравенство $y \leqslant x$, но y тоже наибольший элемент X, поэтому $x \leqslant y$, откуда $x = y$.

Определение 15. Элемент M называется максимумом упорядоченного множества X, если: $M \in X$ и не существует $x \in X \,|\, M < x$. Обозначение, $M = \max X$.

Определение 16. Элемент m называется минимумом упорядоченного множества X, если: $m \in X$ и не существует $x \in X \,|\, x < m$. Обозначение, $m = \min X$.

В общем случае, для произвольного частично упорядоченного множества всякий наибольший (наименьший) элемент, по определению, является максимальным (минимальным), но не наоборот.

Пусть, например, на множестве $X = \{a, b, c, d\}$ задано следующие отношение частичного порядка $R = \{(b < a), (b < c), (d < c)\}$, тогда в X не существует элементов строго больших чем a и c и нет элементов, строго меньших чем b и d. По определению элементы a и c — максимальные в X, а элементы b и d — минимальные в X, поэтому ни a ни c не могут быть наибольшими в множестве X, а b и d не могут быть наименьшими в X.

Определение 17. Пусть X упорядоченное множество, $Y \subset X$. Y называется ограниченным сверху, если $\exists\ x \in X \mid \forall\ y \in Y : y \leqslant x$, такой x называется верхней границей множества Y.

Множество всех верхних границ Y будем обозначать как $Y^{\text{в}}$.

Определение 18. Пусть X упорядоченное множество, $Y \subset X$. Y называется ограниченным снизу, если $\exists\ x \in X \mid \forall\, y \in Y : x \leqslant y$, такой x называется нижней границей множества Y.

Множество всех нижних границ Y будем обозначать как $Y_{\text{н}}$.

Если множество Y ограничено и сверху, и снизу, то оно называется ограниченным.

Определение 19. Если существует α, наименьший элемент множества верхних границ $Y^{\text{в}}$ некоторого ограниченного сверху множества Y, то α называется точной верхней гранью (супремумом) множества Y. Обозначение, $\alpha = \sup Y$.

Определение 20. Если существует β, наибольший элемент множества нижних границ $Y_{\text{Н}}$ некоторого ограниченного снизу множества Y, то β называется точной нижней гранью (инфимумом) множества Y. Обозначение, $\beta = \inf Y$.

Если некоторое множество X — цепь, то как следствие из определений, на нем выполняются два свойства.

Первое, для $\forall x, y \in X$ истинно только одно из трех высказываний: или $(x < y)$, или $(y < x)$, или $(x = y)$.

Второе, если $x, y, z \in X \mid (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$.

Первое свойство означает: так как X — цепь, то для любой пары элементов из X справедливо следующие, либо они равны, либо один из них строго меньше другого, а второе свойство — транзитивность отношения порядка.

Цепь является частным случаем упорядоченного множества. Далее, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только линейно упорядоченные множества. Для таких множеств понятие максимального (минимального) элемента совпадает с понятием наибольшего (наименьшего) элемента. Действительно, по определению наибольший (наименьший) элемент множества X не может быть ни строго больше, ни строго меньше максимума (минимума) X, значит по первому свойству цепи они равны. Если для некоторого ограниченного подмножества Y линейно упорядоченного множества X существуют супремум и инфимум, то по определению и по свойству цепи, справедливы равенства:

$$\alpha = \sup Y = \min Y^{\text{В}}, \qquad \beta = \inf Y = \max Y_{\text{Н}}.$$

Теорема 1. (о пересечении ограниченного множества со своими границами) [2]

Если пересечение ограниченного сверху (снизу) линейно упорядоченного множества Y, с множеством своих верхних границ (нижних границ) не пусто, то это пересечение содержит единственный элемент:

$$\max Y = \min Y^{\text{В}} = \sup Y, \qquad (\min Y = \max Y_{\text{Н}} = \inf Y).$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, когда не пусто пересечение Y с множеством своих верхних границ.

Для любого ограниченного сверху линейно упорядоченного множества Y понятия наибольшего и максимального элемента совпадают, из чего следует, что если такой максимальный элемент M существует, то он не только принадлежит Y, но одновременно, согласно определению, не меньше любого другого элемента Y т. е. $(M \in Y) \wedge (M \in Y^{\text{В}})$, следовательно $Y \cap Y^{\text{В}} \neq \varnothing$.

Единственность M следует из линейной упорядоченности Y.

Если бы существовал, как минимум, еще один такой максимальный элемент M' принадлежащий пересечению Y с $Y^{\text{В}}$, то в силу линейной упорядоченности Y истинным было бы только одно из трех высказываний: или $(M' < M)$, или $(M < M')$, или $(M = M')$. Но первые два неравенства ложные высказывания, в противном случае меньшие элементы в них не являлись бы максимальными для Y. Отсюда же следует, что максимальный элемент линейно упорядоченного множества Y является его минимальной верхней границей, так как любой элемент из Y, строго меньший, чем максимум, уже не будет верхней границей.

Следовательно если $Y \cap Y^{\text{B}} \neq \emptyset$, то оно содержит единственный элемент: $\max Y = \min Y^{\text{B}} = \sup Y$.

Для случая, когда не пусто пересечение Y с множеством своих нижних границ, все рассуждения аналогичны.

Если мы рассмотрим произвольное линейно упорядоченное множество X, то: $\max X$, $\sup X$, $\min X$, $\inf X$, могут как существовать, так и не существовать.

Если существует $\max X$ $(\min X)$, то, как было показано выше, существует $\sup X = \max X$ $(\inf X = \min X)$, обратное утверждение неверно.

Определение 21. Сечением $X^{\triangle}|X^{\triangledown}$ линейно упорядоченного множества X называется его разбиение на два непустых подмножества $X^{\triangle}$ и $X^{\triangledown}$ так что:

1. $X^{\triangle} \cup X^{\triangledown} = X$;
2. $X^{\triangle} \cap X^{\triangledown} = \emptyset$;
3. $(\forall\, y \in X^{\triangle}) \wedge (\forall\, x \in X^{\triangledown}) : y < x$.

$X^{\triangle}$ и $X^{\triangledown}$ называются нижним и верхним (соответственно) классами сечения линейно упорядоченного множества X.

Различают три типа сечений:

1. Скачок — в нижнем классе имеется максимальный элемент, а в верхнем классе — минимальный;
2. Щель — в нижнем классе нет максимального элемента, а в верхнем нет минимального;
3. Дедекиндово сечение — если в нижнем классе нет максимального элемента, то в верхнем классе обязательно имеется минимальный элемент, и наоборот, если в верхнем классе нет минимального элемента, то в нижнем классе обязательно имеется максимальный элемент.

Отображения. Пусть теперь X и Y произвольные множества.

Правило, соотношение и т. п., по которому каждому элементу $x \in X$ ставиться в соответствие вполне определенный элемент $y \in Y$, называется отображением и записывается как $y = y(x)$, или $y = f(x)$, или $f\colon X \longrightarrow Y$.

Собственно закон по которому элементу $x \in X$ ставиться в соответствие элемент $y \in Y$ принято записывать в виде: $x \longmapsto y$.

Определение 22. Множество X называется областью определения отображения, а элементы $x \in X$ — аргументами отображения.

Определение 23. Образом $A \subset X$, при отображении $y = f(x)$, называется множество: $f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\} \subset Y$.

Определение 24. Областью значений отображения $f\colon X \longrightarrow Y$ называется множество: $f(X) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\} \subset Y$.

Если положить, что $A = \{x\}$, то тогда $y = f(x)$ будет образом элемента $x \in X$. Обычно рассматривают только те отображения, при которых каждый аргумент имеет не более чем единственный образ.

Определение 25. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ и $B \subset Y$, тогда множество

$$f^{-1}(B) = \{x \mid y = f(x) \in B\} \subset X$$

называется полным прообразом множества B.

Если рассмотреть произвольный $y \in Y$, то $f^{-1}(y)$ будет полным прообразом элемента $y \in Y$. Множество $f^{-1}(y)$ может быть пустым, может содержать единственный элемент $x \in X$, может содержать множество элементов из X. Любой элемент принадлежащий полному прообразу $f^{-1}(y)$ называют прообразом элемента y.

Определение 26. Отображение f называется «отображением X на Y» или сюръекцией, если $f(X) = Y$ то есть: $\forall\, y \in Y,\ \exists\, x \in X \mid y = f(x)$.

Если $f(X)$ собственное подмножество Y, то тогда говорят, что f «отображение X в Y». Допуская вольность речи можно сказать, что отображение «на» «больше», чем отображение «в». Для «отображения в» используется специальное обозначение, например, «отображение X в Y» записывается следующим образом: $X \hookrightarrow Y$.

Определение 27. Отображение f называется «взаимно однозначным отображением X в Y» или инъекцией, если:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \ \mid\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

т. е. различные элементы из X имеют различные образы в Y.

Определение 28. Отображение f называется «взаимно однозначным отображением X на Y» или биекцией, если f одновременно и сюръекция, и инъекция. т. е. каждый элемент из X имеет единственный образ в Y, и каждый элемент из Y имеет единственный прообраз в X. Также говорят, что биекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами.

Если $f\colon X \longrightarrow Y$ и $g\colon Y \longrightarrow Z$ то отображение $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ определяемое для $\forall\, x \in X$ соотношением $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ называется композицией отображений g и f.

Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ и $g\colon Y \longrightarrow Z$ — биекции, тогда любому $x \in X$ соответствует единственный $y \in Y$, а каждому $y \in Y$, в свою очередь соответствует единственный $z \in Z$, при этом образ X совпадает с Y, а образ Y совпадает с Z. Следовательно, $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ также биекция.

Определение 29. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — биекция, тогда для

$$\forall\ y \in Y\ \exists!\,(\text{существует единственный})\ x \in X \mid x = f^{-1}(y)$$

$f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ называется обратным отображением.

Биекция $f\colon X \longrightarrow X$, при которой для $\forall x \in X\colon x = f(x)$ называется тождественным отображением.

Если f — биекция, то из определения обратного отображения очевидным образом вытекает, что композиция $x = f^{-1}(f(x))$ — тождественное отображение.

Изоморфизм.

Определение 30. Бинарной операцией на некотором множестве M называют отображение $\odot$ декартова произведения $M \times M$ в себя

$$\odot\colon \begin{cases} M \times M \hookrightarrow M \\ a,\, b \mapsto a \odot b. \end{cases}$$

Пусть дано множество X и некоторая бинарная операция $\odot$ или бинарное отношение R, заданное на этом множестве. Для краткости будем называть $\odot$ или R бинарным соотношением, и обозначать — $\odot_x$.

Пары $\{X, \odot_x\}$ и $\{Y, \odot_y\}$ — множества с бинарными соотношениями. В общем случае $\odot_x$ и $\odot_y$ могут быть различными.

Определение 31. Отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ называется гомоморфизмом, если для $\forall\, x_1,\, x_2 \in X\colon f(x_1 \odot_x x_2) = f(x_1) \odot_y f(x_2)$.

Таким образом гомоморфизм сохраняет все соотношения, заданные на рассматриваемых множествах; каждое соотношение между элементами: $x_1,\, x_2 \in X$ порождает соответствующие соотношение между элементами: $y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2) \in Y$.

Множество $f(X)$ называется гомоморфным образом множества X.

Если f — гомоморфизм и f — отображение в себя, то тогда f называется эндоморфизмом.

При гомоморфизме, элементы X имеющие один и тот же образ можно объединить в один класс. Любой $x \in X$ может принадлежать одному и только одному классу, т. е. прообразы из гомоморфного образа образуют непересекающиеся классы, которые определяют на X отношение эквивалентности.

Гомоморфизм задает взаимно однозначное соответствие между классами прообразов и элементами гомоморфного образа $f(X)$.

Например: отображение, при котором каждому прямоугольному треугольнику ставится в соответствие подобный ему треугольник с единичной гипотенузой, является эндоморфизмом, сохраняющим все пропорции в таких треугольниках (в качестве бинарного соотношения здесь можно взять отношение порядка, построенное на сравнении отношений катетов). В этом случае гомоморфным образом будет множество прямоугольных треугольников с единичной гипотенузой, а классами эквивалентности — множества, состоящие из подобных прямоугольных треугольников.

Определение 32. Изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Если между множествами X и Y существует изоморфное отображение, то пишут $X \cong Y$ и говорят, что X и Y — изоморфны.

Изоморфизм, отображающий X на себя, называется автоморфизмом. В частности, тождественное отображение, сохраняющие какие либо соотношения между элементами X является автоморфизмом.

Теорема 2. (об обратимости изоморфизма)

Если отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ — изоморфизм, то $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ так же изоморфизм.

Доказательство. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — изоморфизм, тогда каждому аргументу $x \in X$ соответствует единственный образ $y = f(x)$, и для $\forall\, x_1,\, x_2 \in X$ выполняется:

$$f(x_1 \odot_x x_2) = f(x_1) \odot_y f(x_2) = y_1 \odot_y y_2$$

При обратном отображении $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ каждому образу $y \in Y$ соответствует единственный прообраз $x = f^{-1}(y)$, и кроме того для $\forall\, y_1,\, y_2 \in Y$ справедлива цепочка равенств:

$$f^{-1}(y_1 \odot_y y_2) = f^{-1}(f(x_1) \odot_y f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 \odot_x x_2)) =$$

$$= x_1 \odot_x x_2 = f^{-1}(y_1) \odot_x f^{-1}(y_2)$$

что как раз и означает: $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ — изоморфизм.

Теорема 3 . (о композиции изоморфизмов)

Композиция изоморфизмов — изоморфизм.

Доказательство. Пусть отображения $f\colon X \longrightarrow Y$ и $g\colon Y \longrightarrow Z$ являются изоморфизмами.

$$\begin{cases} f(x_1 \odot_x x_2) = f(x_1) \odot_y f(x_2) = y_1 \odot_y y_2 \\ g(y_1 \odot_y y_2) = g(y_1) \odot_z g(y_2) = z_1 \odot_z z_2 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$g(f(x_1 \odot_x x_2)) = g(f(x_1) \odot_y f(x_2)) =$$

$$= g(y_1 \odot_y y_2) = g(y_1) \odot_z g(y_2) = z_1 \odot_z z_2$$

Следовательно $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ — изоморфизм.

Таким образом изоморфные отображения обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Поэтому, изоморфизм является отношением эквивалентности, и свойства всех изоморфных множеств из некоторого класса, можно выводить из свойств любого множества этого класса (с точностью до конкретного соотношения).

Пусть X – упорядоченное множество.

Тождественный автоморфизм $f\colon X \longrightarrow X$ задает на X «двойственное отношение порядка», если каждому соотношению $x < y$ ставится в соответствие неравенство $y > x$.

Двойственные отношения порядка различаются только терминологически, вместо x меньше y говорят, что y больше x и наоборот. Аналогично определяется двойственное отношение для нестрогого порядка.

Список литературы

[1] Биркгоф Г. Теория решеток / пер. с англ. М.: Наука., 1984. 586 с.

[2] Орехов А. В. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2014. 228 с.

УДК 517.9

Кальницкий В.С.

Тема исследовательской работы школьников: выпуклые кривые и средние величины.

Существует огромное количество простых и не очень, да и просто загадочных свойств средних (среднего арифметического, геометрического, гармонического и многих других). Свойств, которыми обладают кривые второго порядка (эллипс, парабола, гипербола), также известно немало. Многие из этих свойств впервые описал древнегреческий математик Апполоний, который доказал 387(!) теорем о кривых 2-го порядка. «Конические сечения» Аполлония оказали большое влияние на развитие астрономии, механики, оптики.

Не менее известны и средние величины. Пифагор, в частности, изучал их в связи с теорией музыки. Огромное значение средние играют в статистике. Ряд именных средних появилось в экономической теории, где они выступают в качестве моделей экономических процессов [1]. Принятое в современной математике определение среднего двух величин — это просто некоторая величина между ними. Можно себе представить, как их много, но не все эти величины равноправны между собой с точки зрения истории науки.

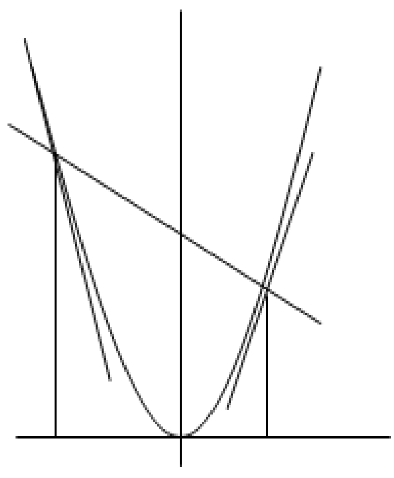
Как появляются на свет новые средние? Кто их придумывает? Как связаны между собой кривые второго порядка и средние?

Существует несколько способов строить средние по графику выпуклой или вогнутой (будем говорить – выгнутой) функции. Прежде всего – на основе теоремы Лагранжа о среднем значении. Для такой функции между любыми двумя точками найдется такое значение аргумента, что касательная к графику функции параллельна хорде

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(L(a,b)).$$

Здесь $L(a,b)$ —- среднее Лагранжа.

Мы поступим аналогично и посмотрим на параболу, заданную уравнением $y=x^2$. Любые две точки параболы задают три прямые линии — касательные в этих точках и хорду.



Или можно говорить о числах – – производные функции в этих точках — это коэффициенты прямых k_1, k_2 и коэффициент хорды k_3. Как связаны эти числа, если вообще связаны? На этот вопрос ответить очень легко

$$k_1=2a, \quad k_2=2b,$$

$$k_3=\frac{b^2-a^2}{b-a}=a+b.$$

Следовательно
$$k_3 = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Таким образом, для любых двух точек – хорда есть среднее арифметическое от касательных в ее концах. Оказывается, что других кривых (с точностью до растяжения), обладающих таким свойством нет. Этот факт – содержание еще одной теоремы Лагранжа.

Теорема. Непрерывными решениями уравнения
$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f'(a) + f'(b)}{2}.$$
являются лишь квадратные трехчлены: $a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2 \neq 0$, т.е. параболы.

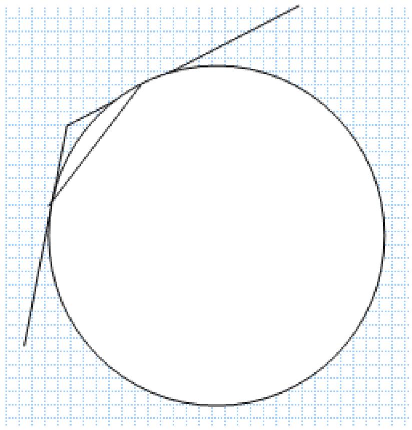
В таком виде, правда, мы не можем назвать это свойство характеристикой параболы, так как оно верно только для вертикально стоящих парабол. А что будет, если мы ее положим набок? Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Считаем что:
$$k_1 = f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}},$$
$$k_2 = f'(b) = \frac{1}{\sqrt{b}},$$
$$k_3 = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$
Следовательно
$$k_3 = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$
Хорда лежащей параболы – среднее гармоническое от касательных.

Этот факт был замечен и теорема, аналогичная теореме Лагранжа, была доказана польским математиком Кучмой в 1993 году. Он определил также кривую, которая соответствует среднему геометрическому — оказалось, гипербола, т.е. функция $y = 1/x$.

Принцип теперь ясен — для любой функции $f(x)$ легко выписать среднее. Важно только, чтобы ее график был выгнутым. Обозначим среднее $F(a, b)$, тогда
$$F(a, b) = \frac{f^{-1}(f'(b)) - f^{-1}(f'(a))}{f^{-1}(b) - f^{-1}(a)}.$$
Подставляем $f(x) = x^\alpha$:
$$F(a, b) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - b^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{a^{\frac{1}{\alpha-1}} - b^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$
Это известная серия средних — средние Столярского.

А что таит в себе последняя не упомянутая нами квадрика – окружность? Простые вычисления дают формулу
$$F(a, b) = \frac{\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} + ab - 1}{a + b}.$$

Но как посчитать среднее, если кривая не задана конкретной функцией. Оказывается, задавать функцию в явном виде совершенно не обязательно. Давайте посчитаем последнее полученное нами среднее для чисел 4 и 1/2.



Строим на клетчатой бумаге уголок из двух лучей с коэффициентами наклона 4 и 1/2. Вставляем в этот уголок круглый предмет. Отмечаем точки касания и соединяем. Получившийся коэффициент, который высчитывается по клеточкам — среднее. Все, что выгнуто, определяет среднее.

Задача: придумайте ручной инструмент для извлечения квадратного корня.

Заключение. В связи с задачей описания среднего по функции, возникают естественные и сложные математические вопросы. Какие средние порождаются выгнутыми линиями? Как это определить? Например, среднему Гёльдера не соответствует никакая кривая [2]. Можно ли по самому среднему можно определить — порождается оно линией или нет? Следует отметить, что найти кривую явно, вообще говоря, невозможно [3].

Как и многое в математике — эта тема глубока, далеко не исследована, но ее формулировка доступна школьнику.

Список литературы

[1] Акерман Э., Кальницкий В.С. Целевая функция в задаче эффективного распределения ресурсов предприятия, “MA SRQ 2001”, 18-22/06, СПб, Тез. Докл., 2001, стр. 204–207

[2] Кальницкий В.С. О неразрешимости разностного уравнения для среднего Гёльдера, Вестник СПбГУ, сер.1, Вып. 1, 2002, стр. 14–15

[3] Кальницкий В.С. Полное решение уравнения Кучмы, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica 10, 2011, p. 124–125

УДК 517.51

Потепун А. В.

Наглядное обоснование понятия натурального логарифма с помощью площади

Площадь — это функция, сопоставляющая подмножеству плоскости неотрицательное число (возможно, символ $+\infty$)

$$S\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

Площадь обладает следующими свойствами:
1) Если $A\cap B=\varnothing$, то $S(A\cup B)=S(A)+S(B)$,
2) $S([a,b]\times[c,d])=(b-a)(d-c)$.

Дополнительные свойства (следствия из (1) и (2)):
3) Если множество $A\subset B$, то $S(A)\leqslant S(B)$ и при условии, что площадь $S(A)<+\infty : S(B\backslash A)=S(B)-S(A)$,
4) Если $F(x,y)=(kx,y)$ при $k>0$ (растяжение в k раз вдоль оси Ox), то $S(F(A))=k\cdot S(A)$ и аналогично при растяжении вдоль Oy.

Рассмотрим функцию $1/x$ и участки её подграфика, т. е. множества

$$P[a,b]=\left\{(x,y)\ \mid\ a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{x}\right\}.$$

Обозначим $f(x)=S(P[1,x])$, если $x\geqslant 1$, и $f(x)=-S(P[x,1])$, если $0<x<1$. Тогда $f(1)=0$.

I) Докажем, что для $0<a<b \quad S(P[a,b])=f(b)-f(a)$.

Если $1\leqslant a<b$, то по свойству 3

$$S(P[a,b])=S(P[1,b])-S(P[1,a])=f(b)-f(a).$$

Если $0<a<1\leqslant b$, то по свойству 1

$$S(P[a,b])=S(P[1,b])+S(P[a,1])=f(b)-f(a).$$

Если $0<a<b<1$, то по свойству 3

$$S(P[a,b])=S(P[a,1])-S(P[b,1])=-f(a)+f(b).$$

II) Докажем, что

$$f(ab)=f(a)+f(b) \tag{10}$$

Пусть $a\geqslant 1$ и отображение $F(x,y)=(u,v)$, где $u=bx, \quad v=y/b$.

Тогда по свойству 4 отображение F сохраняет площадь: $S(F(A))=S(A)$. Если $A=P[1,a]$, то

$$F(A)=\{(u,v)\ \mid\ u=bx,\quad v=y/b,\quad 1\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant 1/x\}.$$

Неравенство $1\leqslant x\leqslant a$ равносильно $1\leqslant u/b\leqslant a$, т. е. $b\leqslant u\leqslant ab$, а неравенство $0\leqslant y\leqslant 1/x$ равносильно $0\leqslant bv\leqslant b/u$, т. е. $0\leqslant v\leqslant 1/u$.

Получили:

$$F(A)=\{(u,v)\ \mid\ b\leqslant u\leqslant ab,\quad 0\leqslant v\leqslant 1/u\}=P[b,ab].$$

Тогда по пункту (I):

$$f(ab) - f(b) = F(S(A)) = S(A) = f(a),$$

т. е. $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Теперь рассмотрим случай 0<a<1. Аналогично предыдущему покажем, что $F(P[a,1]) = P[ab,b]$, тогда $f(b) - f(ab) = -f(a)$, т. е. снова

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

Таким образом, функция $f(x)$ обладает свойствами логарифма.

III) Докажем, что это действительно логарифм по некоторому основанию, заключённому между числами 2 и 4.

Поскольку при $a \leqslant x \leqslant b \quad 1/a \leqslant 1/x \leqslant 1/b$, множество $P[a,b]$ содержит прямоугольник $[a,b]\times[0,1/b]$ и содержится в прямоугольнике $[a,b]\times[0,1/a]$, по свойству 3 получаем неравенство:

$$\frac{b-a}{b} \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \frac{b-a}{a} \tag{11}$$

Если $b = 2, \quad a = 1$, то $1/2 \leqslant f(2) \leqslant 1$, тогда $f(4) = 2\cdot f(2) \geqslant 1$.

Из неравенства (11) следует, что при $b \to a$ или $a \to b \quad f(b) - f(a) \to 0$, т. е. f — непрерывная функция, и она принимает все промежуточные значения между $f(2) \leqslant 1$ и $f(4) \geqslant 1$, поэтому существует число e между 2 и 4 такое, что $f(e) = 1$.

Докажем, что $f(x) = \ln(x)$.

Из равенства (10) индукцией по n (количеству множителей) для функции f получим: $f(a^n) = n\cdot f(a)$, откуда для

$$a = e^{\frac{1}{n}} \quad 1 = f(e) = n\cdot f(e^{\frac{1}{n}}),$$

т. е.

$$f(e^{\frac{1}{n}}) = 1/n.$$

Взяв m сомножителей вида $e^{1/n}$, получим

$$f(e^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}.$$

Но по равенству (10)

$$f(e^{-\frac{m}{n}}\cdot e^{\frac{m}{n}}) = f(e^{-\frac{m}{n}}) + f(e^{\frac{m}{n}}) = f(1) = 0,$$

т. е.

$$f(e^{-\frac{m}{n}}) = -\frac{m}{n}.$$

Следовательно доказано, что для любого рационального r: $f(e^r) = r$.

Если число x иррационально, то рассмотрим всевозможные пары рациональных чисел r, s таких, что $r < x < s$, тогда $e^r < e^x < e^s$.

Поскольку функция $f(x)$ возрастает (из (11)), то

$$r = f(e^r) < f(e^x) < f(e^s) = s,$$

т. е. $f(e^x)$ заключено между теми же числами r и s, следовательно,

$$f(e^x) = x.$$

Получили, что для любого $a > 0, \quad f(a)$ равно той степени, в которую нужно возвести число e, чтобы получить a, т. е.

$$f(a) = \ln(a).$$

IV) Докажем, что определённое в пункте III число

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

В неравенстве (11) положим $a = 1, \quad b = 1 + 1/n$. Тогда

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

следовательно,

$$\frac{n}{n+1} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1.$$

Возводя в степень, получим:

$$e^{\frac{n}{n+1}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

Переходя к пределу при $n \longrightarrow +\infty$ в этом неравенстве, видим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

V) Докажем, что производная

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Если $\triangle x > 0$, то в неравенстве (11) положим $a = x, \quad b = x + \triangle x$ и разделим на $\triangle x$:

$$\frac{1}{x+\triangle x} \leqslant \frac{\ln(x+\triangle x) - \ln(x)}{\triangle x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Если $\triangle x < 0$, то в неравенстве (11) положим $a = x + \triangle x, \quad b = x$, разделим на $\triangle x$ и поменяем знак:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln(x+\triangle x) - \ln(x)}{\triangle x} \leqslant \frac{1}{x+\triangle x}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\triangle x \longrightarrow 0$, получим:

$$(\ln(x))' = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+\triangle x) - \ln(x)}{\triangle x} = \frac{1}{x}.$$

Секция 2.

Преподавание математики в старших классах и подготовка к государственным экзаменам различных уровней

УДК 372.851

Рязанова Е.В.

Чевианы и площади; задача одна — решения разные

В огромном саду геометрии
каждый найдет себе букет по вкусу.

Давид Гильберт

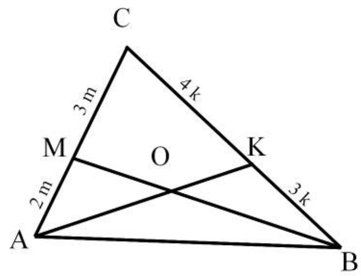
Решение планиметрических задач вызывает трудности у многих обучающихся. Умение решать задачу разными способами позволяет школьникам экономить время и силы на экзамене. В этой статье мы рассмотрим два типа задач; о делении отрезка и об отношении площадей.

Задача о делении отрезка.

Чевиана — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне или ее продолжении. Это название происходит от теоремы Чевы, дающей условие, при котором такие отрезки пересекаются в одной точке.

Рассмотрим способы нахождения отношений отрезков, на которые чевианы треугольника делятся точкой пересечения: метод подобия, обобщённая теорема Фалеса, теорема Менелая, центр масс.

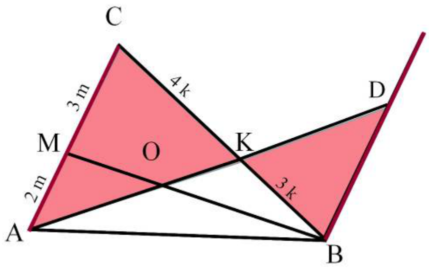
Задача 1. Пусть на сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K так, что $AM/MC = 2/3$, $BK/KC = 3/4$. Отрезок AK пересекает отрезок BM в точке O. В каком отношении AK делит отрезок BM, т. е. ищем BO/OM.



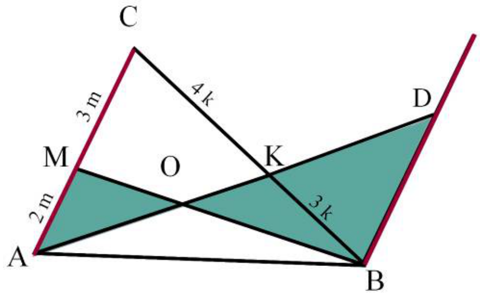
Рассмотрим четыре способа нахождения отношений отрезков, на которые чевианы треугольника делятся точкой пересечения.

Метод подобия:

Через точку B проведём прямую, параллельную стороне AC, и продолжим AK до пересечения с этой прямой. Обозначим эту точку пересечения через D и получим на построенной параллельной прямой отрезок BD. Треугольники ACK и DKB подобны по по 2 углам: $\angle CKA = \angle DKB$ — вертикальные, $\angle CAK = \angle KDB$ — накрест лежащие при $AC \parallel BD$ и секущей AD. Тогда:



$$\frac{AC}{BD} = \frac{CK}{KB}, \quad \frac{5m}{BD} = \frac{4}{3}, \quad BD = \frac{15m}{4}.$$



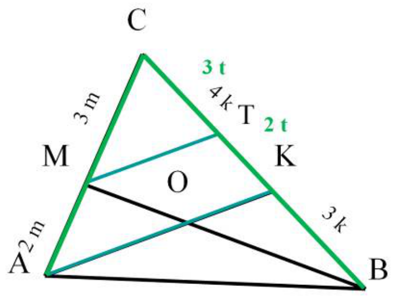
Два треугольника AMO и DBO подобны по по 2 углам: $\angle AOM = \angle DOB$ — вертикальные, $\angle MAO = \angle BDO$ — накрест лежащие при $AC \parallel BD$ и секущей MB. Тогда:

$$\frac{BD}{AM} = \frac{BO}{OM}, \quad \frac{BO}{OM} = \frac{15}{8}.$$

Преимущество метода: широко известная теория, отработанная при частом использовании.

Обобщённая теорема Фалеса:

Используем обобщённую теорему Фалеса, согласно которой параллельные прямые, пересекающие угол, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки.



Проведём параллельные прямые через точки A и M, так чтобы эти прямые пересекали стороны $\angle ABC$. По построению отрезки MT и AK — параллельны.

Из обобщённой теоремы Фалеса следует, что:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{KT}{TC} = \frac{2}{3}.$$

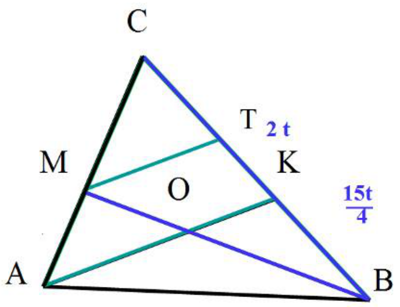
Тогда $KT = 2t, \quad TC = 3t, \quad KC = 5t.$

Так как

$$\frac{BK}{KC} = \frac{3}{4},$$

то

$$BK = \frac{3 \cdot KC}{4} = \frac{15t}{4}.$$



Стороны $\angle CAB$ пересекают параллельные прямые на которых лежат отрезки MT и OK. По обобщённой теоремы Фалеса

$$\frac{BK}{KT} = \frac{15}{4 \cdot 2} \Longrightarrow \frac{BO}{OM} = \frac{15}{8}.$$

Преимущество способа: наглядность и доступность.

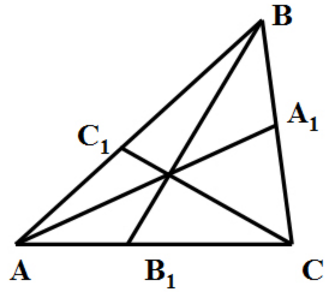
Применение теоремы Менелая:

Как указывалось выше, отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне, называется чевианой — по имени Джованни Чевы, итальянского математика, инженера-гидравлика, экономиста (XVII в). Общий подход к решению задач о делении чевиан даёт теорема Менелая.

Теоремы Чевы и Менелая входят в программу профильных классов, с их помощью относительно легко решается ряд задач на нахождение отношения длин отрезков.

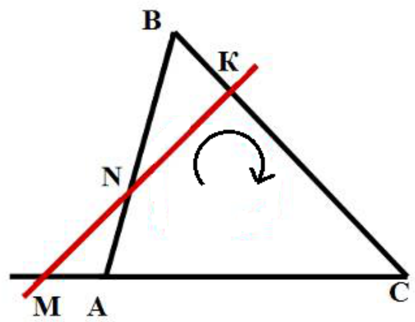
Теорема Чевы. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, противоположных вершинам A, B и C соответственно. Три отрезка: AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



Теорема Менелая. Произведение отношений отрезков, на которые произвольная прямая делит стороны треугольника (или их продолжения) равно единице

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$



Вернёмся к поставленной задаче. Рассмотрим треугольник BCM и секущую AK.

По теореме Менелая

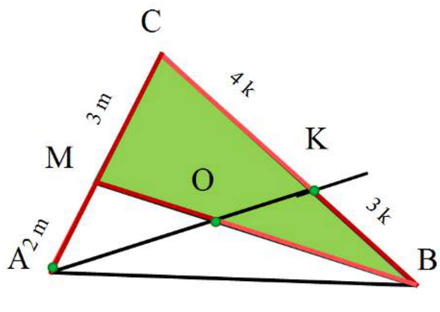
$$\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{MA}{AC}=1.$$

Акцентируем внимание учащихся: отрезки записываем последовательно, так, что каждый соединяет вершину треугольника и точку пересечения секущей и стороны (или её продолжения).

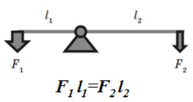
Итак,

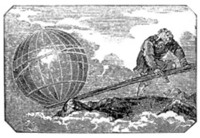
$$\frac{4}{3}\cdot\frac{BO}{OM}\cdot\frac{2}{2+3}=1\Longrightarrow\frac{BO}{OM}=\frac{15}{8}.$$

Преимущества: лаконичность, широкий спектр применения.

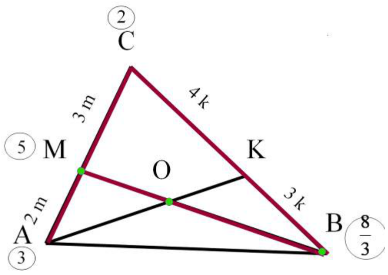


Центр масс:





В разделе "Реальная математика"ОГЭ по математике встречаются задачи на правило рычага. Известно, что произведение силы на плечо — величина постоянная. По легенде, осознав значение своего открытия, Архимед воскликнул: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!»



Можно назвать нестандартным применение барицентрического метода к решению геометрических задач.

Рассмотрим систему материальных точек AMC. Поместим в точку A массу $mA = 3$, а в точку - массу $m = 2$, т. к.

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{cases} mA \cdot AM = mC \cdot MC \\ \frac{AM}{MC} = \frac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mA = 3 \\ mC = 2 \end{cases}$$

M — центр масс, тогда $mM = 5$.

Рассмотрим систему материальных точек CKB

$$mC \cdot CK = mB \cdot BK \Longrightarrow mB = \frac{mC \cdot CK}{BK} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}.$$

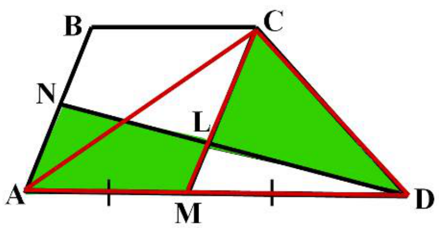
Рассмотрим систему материальных точек BOM

$$mB \cdot OB = mM \cdot OM \Longrightarrow \frac{BO}{OM} = \frac{mM}{mB} = \frac{15}{8}.$$

Преимущества барицентрического способа: минимум теории, отсутствие дополнительных построений, метапредметные связи.

Умение находить отношения отрезков помогает в задачах на вычисление площадей.

Задача об отношении площадей.

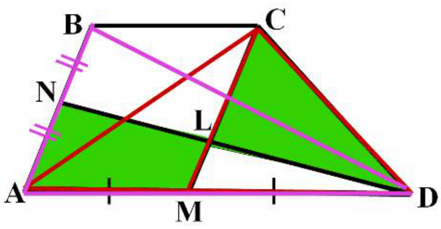


Задача 2. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD, точка N выбрана на стороне AB так, что площадь четырёхугольника $ANLM$ равна площади треугольника CLD, где L — точка пересечения отрезков и DN.

а) Найдите отношение отрезка AN к отрезку NB.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции $ABCD$ составляет площадь четырёхугольника $ANLM$, если $= 5$, $AD = 8$.

а) Так как $S_{ANLM} = S_{CLD}$, то треугольники AND и MCD равновелики.

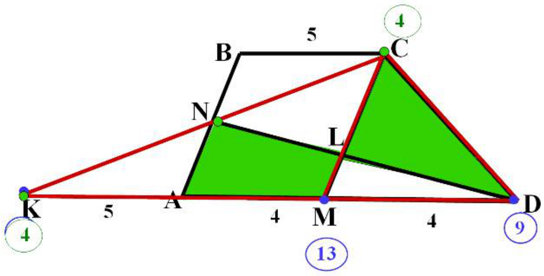


$S_{MCD} = 0.5 \cdot S_{ACD}$, т. к. CM — медиана треугольника D.

$S_{ABD} = S_{ACD}$, т. к. у этих треугольников равные высоты и общее основание.

Значит, $S_{MCD} = 0.5 \cdot S_{ABD}$ и $S_{AND} = 0.5 \cdot S_{ABD}$, но тогда треугольники AND и BND равновелики, $AN = NB$ и отношение AN к NB равно 1.

б) Переформулируем задачу. Так как площадь четырёхугольника $ANLM$ равна площади треугольника CLD, то найдём ту часть от площади трапеции $ABCD$, каторая равна площади треугольника CDL.



Проведём прямую, содержащую отрезок CN, так, что $CN \cap AD = K$.

Так как треугольники ANK и BNC равны, $S_{ABCD} = S_{CDK}$.

Найдём, какую часть от площади треугольника CDK составляет площадь треугольника CDL.

Рассмотрим систему материальных точек KMD. Поместим в точку K массу $mK = 4$, а в точку D — массу $mD = 9$, так как:

$$\frac{KM}{MD} = \frac{9}{4}.$$

M — центр масс, тогда $mM = 13$.

Рассмотрим систему материальных точек KNC. Так как N — середина отрезка , а $mK = 4$, то $mC = 4$. Рассмотрим систему материальных точек CLM.

$$mC \cdot CL = mM \cdot LM.$$

$$4CL = 13LM \Longrightarrow \frac{CL}{LM} = \frac{13}{4} \Longrightarrow CL = \frac{13}{17}CM.$$

Значит,

$$S_{CDL} = \frac{13}{4}S_{CDM}.$$

$$\frac{S_{CDM}}{S_{CDK}} = \frac{MD}{KD} = \frac{4}{13} \Longrightarrow S_{CDM} = \frac{4}{13}S_{CDK}.$$

Тогда

$$S_{CDL} = \frac{13}{17} \cdot \frac{4}{13}S_{CDK} = \frac{4}{17}S_{ABCD}.$$

Следовательно

$$S_{ANLM} = \frac{4}{17} S_{ABCD}.$$

Ответ: а) 1/1; б) 4/17.

Заметим, что отношение CL/LM можно найти, применив теорему Менелая. Рассмотрим треугольник CKM и секущую ND.

$$\frac{KN}{NC} \cdot \frac{CL}{LM} \cdot \frac{MD}{DK} = 1.$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{CL}{LM} \cdot \frac{4}{13} = 1.$$

$$\frac{CL}{LM} \cdot \frac{4}{13}.$$

Владение разными способами решения задач не только позволяет учащимся, в случае затруднения, выбрать другой путь к достижению цели, но и даёт уверенность в себе, уменьшает чувство дискомфорта в стрессовой ситуации экзамена.

Список литературы

[1] Пиголкина Т. С. «Математика. Планиметрия. Задания для 9 кл», МФТИ Заочная физико-техническая школа. г.Долгопрудный, 2015. 28 с.

[2] Вольфсон Г. И. «Метод масс в геометрии»
https://interneturok.ru/geometry/9-klass/itogovoe-povtorenie- kursa-geometrii-za-79-klassy/metod-mass-v-geometrii

[3] Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону: Легион, 2016. 376 с.

УДК 372.851

Неплохова В. Н.

Опыт использования компьютерных презентаций для подготовки учащихся 10-11 классов к ЕГЭ по математике

*Большинство жизненных задач
решаются как алгебраические уравнения:
приведением их к самому простому виду*

Л.Н. Толстой.

Последние годы учителя математики, работающие в 10-11 классах, сталкиваются с проблемой подготовки к ЕГЭ. За два последних года обучения в школе старшеклассники должны овладеть учебными программами по двум математическим предметам: алгебре и началам математического анализа, стереометрии.

Одна из главных целей, которую решает педагог в средней школе — подготовка обучающихся к сдаче ЕГЭ. Кроме этого есть еще цель формирования у учащихся необходимой мотивации к получению аттестата с достойными оценками и к поступлению в высшие и средние специальные профессиональные учреждения.

Таким образом, перед учителями математики 10-11 классов стоят основные задачи:

– обучить новым темам, понятиям, развить навыки их применения,

– организовать системное повторение материала по двум учебным предметам для подготовки к экзаменам.

При подготовке к ЕГЭ учителя должны учитывать следующие факты.

Во-первых, подготовка и отработка несложных заданий — умений и навыков для первой части контрольно-измерительных материалов (КИМ), т.е. заданий №1-12. Как мы знаем, за решение этих заданий дети получают 62-66 баллов из 100 (что соответствует 12 первичным баллам по итогам ЕГЭ 2016 года).

Во-вторых, подготовка и отработка очень сложных заданий — умений и навыков для второй части КИМА (это задания №13-19). За решение задач из второй части КИМа дети получают соответственно 38-34 балла из 100.

Из приведенной статистики (данные ЕГЭ 2016 года) видно, что успешное решение задач 1 части КИМа «приносит» детям больше баллов, чем 2-ой части.

В 2016 году автор проводила занятия с группой обучающихся в 11 классе из разных школ города и района. Дети оказались по-разному подготовленными. Поэтому был использован методический прием создания компьютерных презентаций для повторения и теоретического, и практического материала. При формировании презентаций были выбраны задачи из разных источников: из базы задач ФИПИ, из летних заданий ЕГЭ последних лет, из лекций во время обучения экспертов ЕГЭ, из Методических писем ФИПИ для учителей математики и др.

Наиболее востребованы обучающимися данной группы этого года были следующие темы:

1. Презентация №1 по теме «Демоверсия ЕГЭ проф.уровень»,
2. Презентация №2 по теме «Решение задач на смеси и сплавы»,
3. Презентация №3 по теме «Решение задач на работу. Таблетки»,
4. Презентация №4 по теме «Решение задач на движение»,
5. Презентация №5 по теме «Вероятность1».

Во время занятий сперва мы использовали обычную классную доску, решали задачу, полностью объясняя задание. Дети, которые усвоили тему, могли после этого переходить на работу за компьютер и пользоваться презентацией для решения следующих задач. использовался и другой метод, когда учащимся раздавали листы с распечатанными заданиями для дальнейшего самостоятельного решения.

В статье в качестве примера представлена презентация № 3. По мнению автора такой вид компьютерного пособия оказывает большую помощь учителю при подготовке к урокам, поскольку позволяет сократить время подборки заданий определенной тематики и необходимой сложности. Например, в теме «Производная функции» обучающиеся чаще всего сталкиваются с трудностью понимания геометрического смысла производной, и тогда нужно подобрать больше заданий на эту тему.

Компьютерные презентации можно использовать и для объяснения нового материала. Автор статьи готова поделиться опытом создания презентаций и имеющимся в ее распоряжении материалом с коллегами.

Рассмотрим в качестве примера презентацию по решению текстовых задач, связанных с понятиями работы, выработки, скорости производства, производительности труда. Основные понятия, которые необходимо крепко усвоить учащимся перед началом решения задач, таковы: РАБОТА, ВРЕМЯ РАБОТЫ, РАБОТА ЗА ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ (за 1 час, за 1 минуту, за 1 секунду) или ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ. Учитель должен внимательно и обстоятельно объяснить суть этих понятий и удостовериться, что учащиеся поняли и усвоили разницу в понятии РАБОТА и РАБОТА В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ, т.е. СКОРОСТЬ РАБОТЫ, которую мы называем ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬЮ.

Решим первую задачу с методическими объяснениями. Условие задачи представлено на рис. 1

Ответ на рис. 1 демонстрирует типичную ошибку учащегося, который не понимает разницы между работой и скоростью работы. Для разъяснения этого удобно воспользоваться таблицами или, как мы шутливо говорим "таблетками". Посмотрим на таблицу на рис.2, составленную по тексту задачи.

Как следует разъяснить учащимся правильное логическое построение решения? Первый вопрос, на который надо ответить, какова производительность труда каждого работника — отца и сына. Следует напомнить учащимся, что производительность труда — это количество выполненной работы в единицу времени, то есть за час или за минуту, в зависимости от условия задачи. Итак, какова производительность труда отца и производительность труда сына? На этот вопрос отвечает рис. 3

Теперь уже нетрудно составить соотношение, определяющее общую производительность отца и сына и найти решение задачи. Первое действие на

№11.1.

Участок на даче отец перекапывает за 3 часа, работая один, а сын – за 6 часов, работая один.

За сколько часов перекопают участок они, работая вместе?

Ответ: 6 + 3 = 9????

Типичная ошибка учащихся

Рис. 10. Условие задачи.

Составим таблицу

	РАБОТА	ВРЕМЯ	ЗА 1 ЧАС
Отец	1	3часа	1/3 участка
СЫН	1	6часов	1/6 участка
ВМЕСТЕ	1	?	1/3+1/6 участка

Рис. 11. Таблица по условию задачи.

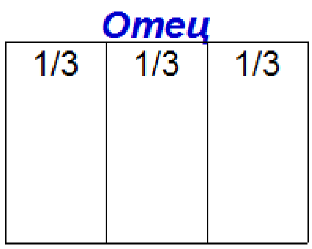


Рис. 12. Производительность работы отца.

рис. 6 определяет совместную производительность отца и сына. Здесь надо особо пояснить, что площадь всего участка принимается за единицу.

Таким образом, правильный ответ в задаче равен 2 часам. Ещё примеры на эту тему. Условие следующей задачи представлено на рис. 7.

По текстовому условию составляем "таблетку".

Теперь конкретизируем слова "на 3 часа меньше"(в таблице на рис. 8 вторая строка, второй столбец) и "на 3 детали больше"(вторая строка, третий столбец).

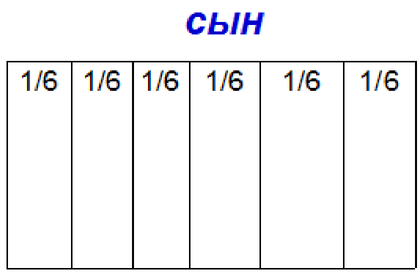


Рис. 13. Производительность работы сына.

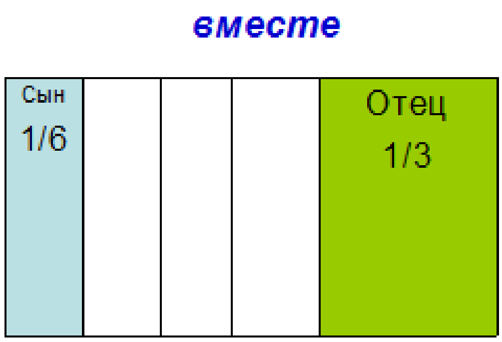


Рис. 14. Общая производительность отца и сына вместе.

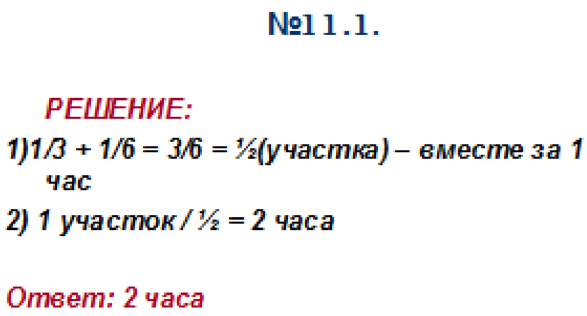


Рис. 15. Решение задачи.

Здесь необходимо привлечь внимание учащихся к тому факту, что уравнение составлено по ВРЕМЕНИ, следовательно деление РАБОТЫ на ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ определяет ВРЕМЯ РАБОТЫ. И еще следует сказать о том, что в уравнении производится деление на x и на $x+3$, а на ноль

№11.2.

- ***Заказ на 304 детали первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?***

Рис. 16. Условие задачи.

Составим таблицу

	РАБОТА	ВРЕМЯ	ЗА 1 ЧАС
1рабоч.	304дет.	на 3часа м.	на 3 дет.б.
2рабоч.	304дет.		? Х дет.

Рис. 17. Таблица по условию задачи.

Составим таблицу

	РАБОТА	*ВРЕМЯ*	*ЗА 1 ЧАС*
1рабоч.	304дет.	на 3часа м. 304/(x+3)	на 3 дет.б. (Х + 3)дет.
2рабоч.	304дет.	304/x	? Х дет.

$$304/x - 304/(x+3) = 3$$

Рис. 18. Конкретизированная таблица и уравнение.

делить нельзя. И по условию задачи минимальное число деталей, которые изготовлены, положительно и равно 3. Следовательно, деление возможно.

Окончательное уравнение и его решение имеют вид:

$$\frac{304}{x} - \frac{304}{x+3} = 3$$

Домножаем на произведение $x(x+3)$. Получаем

$$304(x+3) - 304x = 3x(x+3)$$

Переносим правую часть уравнение в левую, меняя знак

$$3x^2 + 9x - 912 = 0$$

Сокращаем на 3 и решаем квадратное уравнение. Получаем два корня $x_1 = 16$, $x_2 = -19$. Очевидно, второй корень не соответствует смыслу задачи, так как через x обозначено количество деталей. Окончательно имеем ответ: второй рабочий за час делает 16 деталей.

Рассмотрим следующую задачу.

№11.3.

Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 513 литров она заполняет на 8 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 675 литров?

Рис. 19. Условие задачи.

Составим таблицу

	РАБОТА	ВРЕМЯ	ЗА 1 ЧАС
1труба	675л.	На 2л.мен.	
2труба	513л.	?л.	На 8 мин.м.

Рис. 20. «Таблетка».

Составим таблицу

	РАБОТА	ВРЕМЯ	ЗА 1 ЧАС
1труба	675л.	На 2л.мен. X -2 л.	675/(x-2)
2труба	513л.	?л. X л.	На 8 мин.м. 513/x

675/(x-2) - 513/x = 8

Рис. 21. Конкретизированная таблица.

№11.4.

- *На изготовление 374 деталей первый рабочий затрачивает на 5 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 462 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?*

Рис. 22. Условие задачи.

Ответ: 27 литров.

Таким образом можно тренировать учащихся по решению тех задач, в которых основным моментом является рассуждение о производительности труда работника или группы работников, если труд происходит совместно. После логического понимания того факта, что совместный труд является более производительным, а значит суммарное время работы уменьшается, они поймут, что итоговое время совместной работы должно быть меньше того времени, которое затрачивается при работе в одиночку.

УДК 372.851

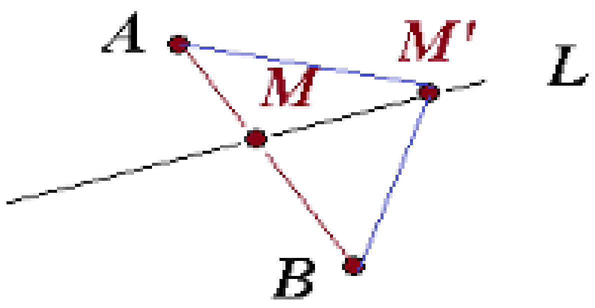
Гущин Д. Д.

Осевая симметрия: восемь экстремальных задач (из опыта преподавания геометрии).

Осевая симметрия (зеркальная симметрия, симметрия относительно прямой) — преобразование плоскости, при котором задана некоторая прямая L и любая точка A переходит в точку A' такую, что L является серединным перпендикуляром для отрезка AA'.

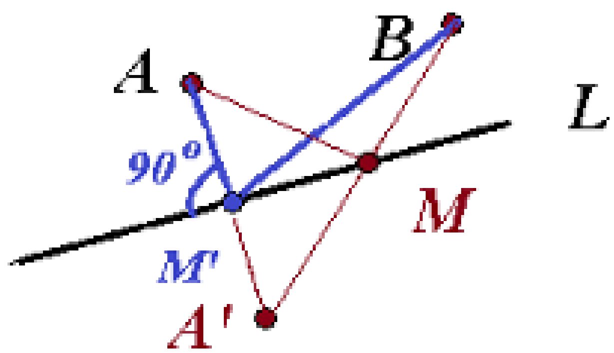
Применение симметрии оказывается удобным инструментом для решения широкого класса экстремальных геометрических задач. Задачи этого цикла объединяет общая идея: длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы [1].

Задача 1. По разные стороны от дороги (прямой) L расположены две деревни (точки) A и B. Найти точку M на дороге L такую, что сумма расстояний от неё до A и B минимальна.



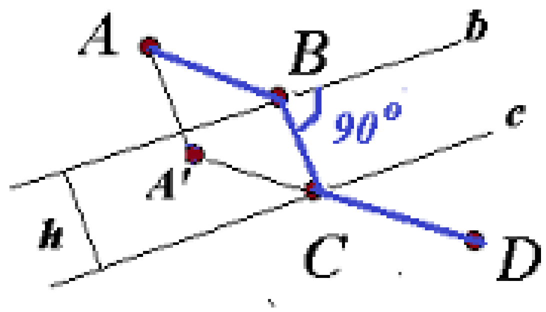
Решение. Проведём отрезок AB. Пусть он пересекает L в точке M. Тогда точка M — искомая. Действительно, рассмотрим любую другую точку M' на прямой L. Тогда в силу неравенства треугольника $AM' + M'B > AB$.

Задача 2 (Герон). По одну сторону от дороги (прямой) L расположены две деревни (точки) A и B. Найти точку M на дороге такую, что сумма расстояний от нее до A и B минимальна.



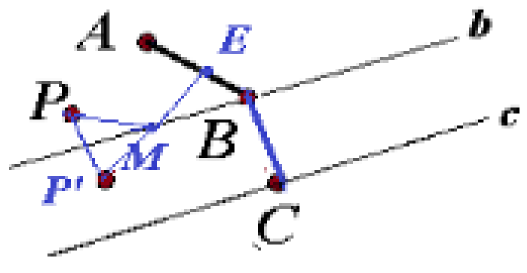
Решение. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой L. В силу симметрии $AM + MB = A'M + MB$. Тем самым, задача сведена к предыдущей: искомая точка M является точкой пересечения отрезка $A'B$ с прямой L, поскольку $A'M + M'B > A'M + MB = AM + MB$. Где M' любая точка прямой L отличная от M.

Задача 3. Населённые пункты A и D расположены на противоположных берегах реки ширины h. В каком месте реки следует построить мост BC, чтобы путь AB+BC+CD от A до D, идущий через мост, имел наименьшую длину? Берега b, реки параллельны, мост перпендикулярен берегам.



Решение. Построим отрезок AA', перпендикулярный b и равный h. Если BC — искомый мост, то четырёхугольник $AA'CB$ — параллелограмм и, следовательно, $AB + BC + CD = AA' + A'C + CD$. Путь $AA' + A'C + CD$ имеет наименьшую длину, если $A'C$+CD имеет наименьшую длину. То есть если A', C и D лежат на одной прямой. Таким образом, для нахождения положения моста BC нужно построить отрезок AA', перпендикулярный b и равный h; провести прямую $A'D$, найти точку пересечения прямой$A'D$ и прямой c; провести BC, перпендикулярно c.

Задача 4. Дорога AB подходит под острым углом к мосту BC через реку bc. Гонец находится в точке P внутри угла ABC вблизи реки. Его конь хочет пить, а гонец спешит выехать на дорогу AB и двигаться в сторону пункта . Где гонец должен напоить коня, чтобы скорее попасть на дорогу?



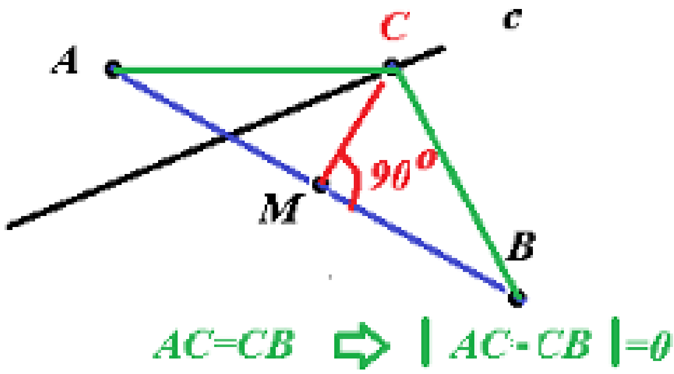
Решение. Обозначим через M произвольную точку на берегу реки, а через E произвольную точку на дороге. Очевидно, что кратчайшее расстояние

ME это перпендикуляр к AB. Построим точку P' симметричную точке относительно берега b и проведем перпендикуляр из точки P' к прямой AB. Тогда для точки на прямой b имеем: $M + ME = 'M + ME < PM' + M'E$ для любой другой точки M', так как PM это кратчайшее расстояние по симметрии, а ME — кратчайшее расстояние как перпендикуляр, опущенный из точки P' на прямую A. Точки P', M, E лежат на одной прямой по построению. Отметим, что если гонцу следовало бы двигаться по мосту в сторону пункта , то кратчайшее расстояние было бы по прямой .

Задача 5. Дана прямая L и две точки A и B, лежащие по разные стороны от этой прямой. Требуется найти такую точку С на прямой L, чтобы модуль разности $|AC - CB|$ был: а) наименьшим, б) наибольшим.

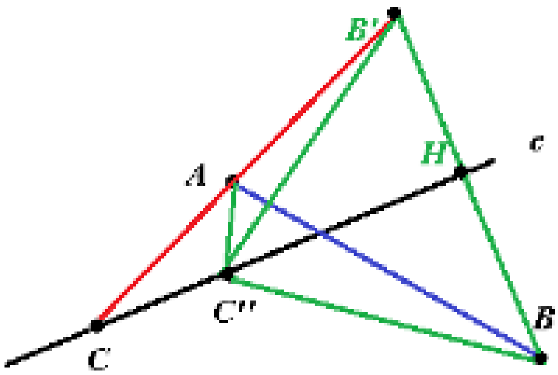
Решение.

а) Наименьшее значение модуля разности равно нулю для точки, лежащей на прямой L и находящейся на равных расстояниях от точек A и B. Искомая точка является точкой пересечения прямой L и серединного



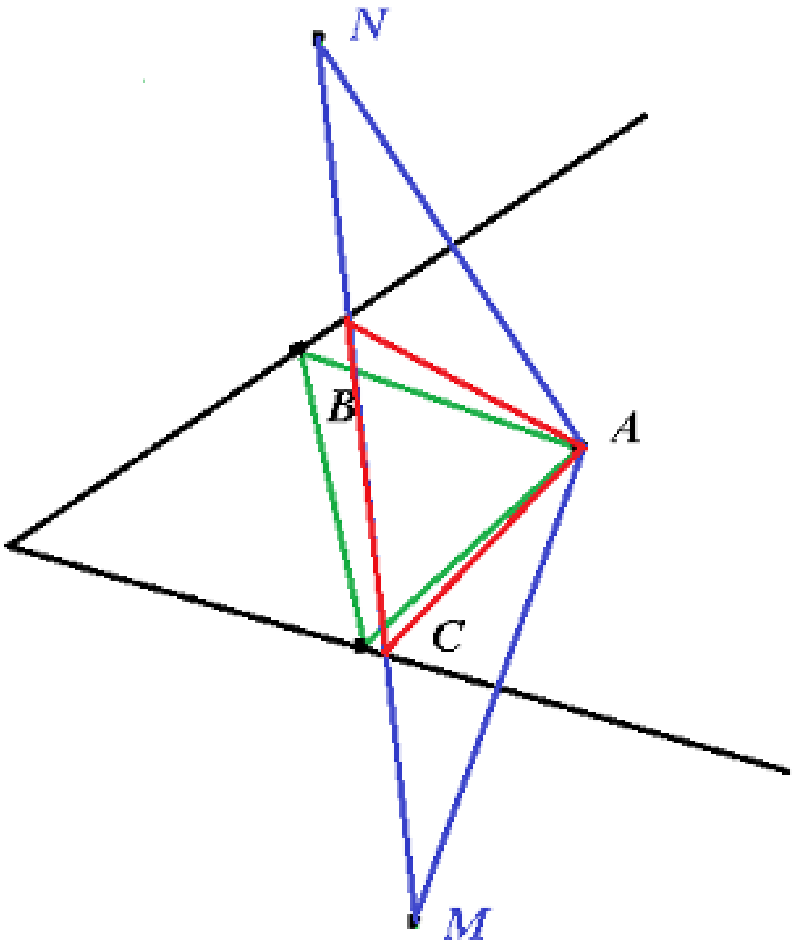
перпендикуляра к отрезку AB.

б) Из точки B опустим на прямую L перпендикуляр BH и отложим отрезок HB', равный BH. Прямая L будет серединным перпендикуляром к



отрезку BB', поэтому для произвольной точки C' на прямой L будет выполняться равенство $C'B = C'B'$, а разность $AC'\breve{}C'B$ будет наибольшей тогда и только тогда, когда наибольшей будет равная ей разность $AC'\breve{}C'B'$. Заметим, что $AC'\breve{}C'B' \leqslant AB'$. Следовательно, разность принимает наибольшее значение в случае, если $AC'\breve{}C'B' = AB'$, то есть если точки A, B', C' лежат на одной прямой. Таким образом, искомая точка C является точкой пересечения отрезка AB' с прямой L.

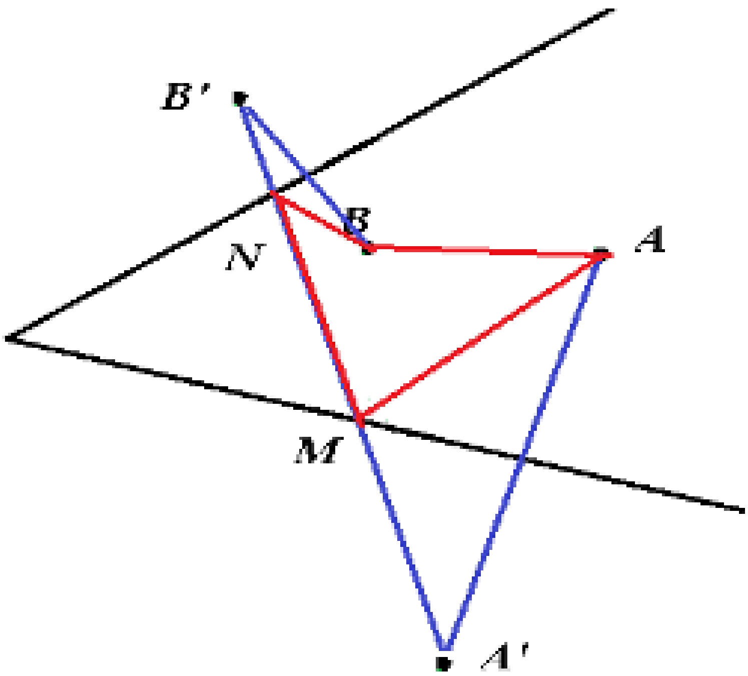
Задача 6. Внутри острого угла дана точка A. Построить треугольник ABC наименьшего периметра, вершины B и C которого принадлежат сторонам угла.



Решение. Построим точки M и N, симметричные точке A относительно сторон угла. Прямая MN пересекает стороны угла в искомых точках B и C. Действительно, рассмотрим какие-либо другие точки B' и C' на сторонах угла. Тогда

$$AB'+B'C'+C'A=MB'+B'C'+C'N > MN=MB+BC+CN=AB+BC+CA.$$

Задача 7. Пусть дан угол и две точки A и B внутри него. Найти на сторонах угла точки M и N такие, что периметр четырехугольника $MABN$ минимален.



Решение. Построим точку A', симметричную точке A относительно одной стороны угла и точку B', симметричную точке B относительно другой стороны угла. Прямая $A'B'$ пересекает стороны угла в искомых точках M и N, они и являются искомыми. Действительно, рассмотрим какие-либо другие точки M' и N' на сторонах угла. Тогда

$$AM' + M'N' + N'B + AB = A'M' + M'N' + N'B' + AB > A'B' + AB =$$

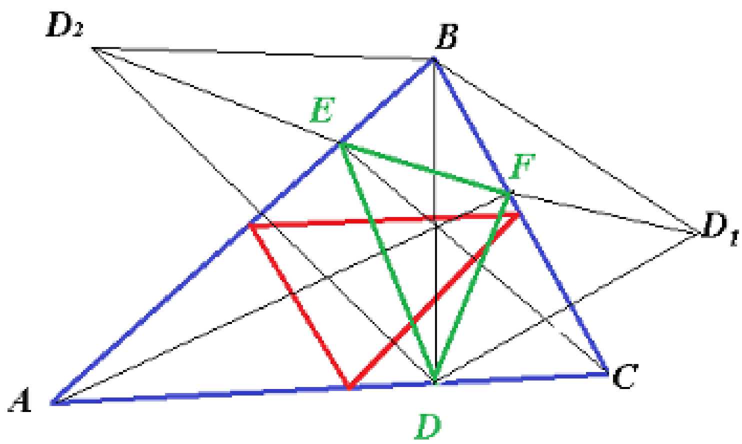
$$= A'M + MN + NB' + AB = AM + MN + NB + AB.$$

Задача 8 (Фаньяно). Вписать в остроугольный треугольник треугольник наименьшего периметра.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC и точку D на его стороне AC. Найдём на двух других сторонах такие точки E и F, что периметр треугольник DEF минимален.

Для этого применим привычный уже метод: отразим точку D относительно сторон AB и BC, получим точки D_1 и D_2. Заметим, что периметр треугольника DEF равен длине ломаной D_1EFD_2, которая имеет минимальную длину, если ее звенья лежат на одной прямой. Таким образом, ясно, как выбирать точки E и F, если точка D зафиксирована.

Как же выбирать точку D? Заметим, что в треугольнике D_1BD_2 угол при вершине вдвое больше угла ABC, то есть он постоянный. Еще можно



заметить, что $D_1B = DB = D_2B$. Таким образом, основание D_1D_2 равнобедренного треугольника D_1BD_2 будет минимально, если минимальна боковая сторона, то есть минимален отрезок BD. Таким образом, получаем, что D — основание высоты. Кроме того, ясно, что треугольник наименьшего периметра существует и единственен, значит, подобные рассуждения можно повторить, начав с точки E и с точки F.

Тем самым, решением задачи служит треугольник с вершинами в основаниях высот или ортотреугольник.

Решение этой задачи было подсказано автору Д.В. Мухиным в частной беседе.

Список литературы

[1] Смирнова И. М., Смирнов В. А. Экстремальные задачи по геометрии. //http://emmom.ru/books/MaxMin.pdf

Секция 3.

Дополнительное внешкольное образование и самообразование учащихся

УДК 372.851

Вольфсон Г. И.

Зачем нужна математика?

Многие ученики, а иногда и их родители часто меня спрашивают: зачем нужна математика? Ведь в жизни мы все это не применяем?

Я постараюсь ответить на этот вопрос.

И прежде всего, давайте оговоримся, что такое математика, ведь возможно, мы говорим об абсолютно разных вещах. Что же для вас математика? Набор формул и занудных доказательств? Непонятные теоремы и бесконечная их зубрежка? Если так, то я попробую вас немного переубедить: все это есть в математике, но математика – не только и не столько про это.

Математика — это умение оценить свой ответ. Не так давно дал небольшой тестик в школе, его писали разные дети с 5 по 11 класс. В одном из вопросов требовалось рассчитать дозировку таблеток для ребенка (задача вполне реальная — похожую недавно решал мой друг для своего ребенка).

И что бы вы думали? Ответы были от -100 таблеток до 16400. Нет, вы только подумайте: -100 таблеток! Я не опечатался, МИНУС СТО! А как вам 16400? Представляете, если такой ученик вырастет и потом будет лечить своего ребенка?! Мне его уже жалко... И ведь что самое ужасное, многие даже не задумываются над тем, что их ответ не слишком адекватен.

А вот другой пример. В начале урока дал задачу: оценить высоту дома напротив школы. Да-да, это тоже математика! Я бы даже сказал, именно это — настоящая математика, а не просто подставить циферки вместо букв в формулу! Так вот, ответы были от 10 метров до 240 метров! И это высота пятиэтажной хрущевки...

То есть, математика учит нас оценок адекватности своих выводов. Согласитесь, это умение полезно абсолютно в любом деле!

А вот и другая интересная сторона математики. Недавно задаю вопрос пятиклассникам, сколько будет 100 умножить на 100. Разумеется, ответы сыплются разные, есть и правильный — 10000. Но есть и неверные (100000, 1000, и т.д.)

Говорю, мол, ребята, окей, подскажу: правильный ответ либо 100000, либо миллион. Голосуем! И что вы думаете? Все проголосовали либо за один вариант, либо за второй!

Спрашиваю у тех, кто исходно говорил правильный ответ, как же так? Отвечают: ну вы же учитель, значит, правильно говорите. Я им: хорошо, а дважды два – это пять или шесть? Смеются, но кто-то начал понимать...

К чему это я? А к тому, что у хорошего математика нет слепого доверия к авторитетам: сначала докажи, что ты прав! И мне кажется, если бы многие взрослые жили следуя этой нехитрой логике, жить стало бы намного легче... А вот и еще одно интересное наблюдение. Дети иногда задаются вопросом: как вообще можно заниматься математикой, если это наука чисто абстрактная, ее нельзя «потрогать»? Условно говоря, вот применяю я теорему косинусов или считаю интеграл — а зачем это? Как мне это пригодится в жизни? Сразу отвечу, что многим эта абстрактность и «оторванность» от реального мира вполне по душе — еще бы: абсолютно идеальный мир формул и чисел, где все подчиняется правилам... С другой стороны, трудно не согласиться, интегралы в жизни вам, наверное, не пригодятся (если только ты не хочешь стать ученым или преподавать математику). Однако есть один нюанс.

Многие из нас посещают тренажерный зал. Допустим, Вы ходите туда и делаете упражнение «Жим штанги лежа». Полезное упражнение? Безусловно: развивает мышцы рук, груди и т.д. Но разве оно – само по себе – может пригодиться в жизни? Мне трудно представить себе, что кто-то в идет по улице и тут вдруг бац! — ложится на землю и делает жим лежа! Так что жим лежа хорош не сам по себе, а как упражнение, развивающее тело. Так же и математика развивает наш мозг, подчас, являясь лишь упражнением!

Резюмируя, хочется отметить следующее. Не стоит воспринимать математику слишком узко: «возьми это число, подставь сюда, примени эту формулу». Смотрите на нее шире, осознайте ее красоту и полезность для себя — и тогда часы наедине с математикой полетят незаметно!

УДК 374.1

Гладкая А. В., Кропачева Н.Ю.

Сочетание традиционного и электронного обучения

Традиционное преподавание, которое включает в себя известные методы обучения (лекции, практические занятия, лабораторные практикумы, курсовое и дипломное проектирование и т.п.), в силу своей исторической опробированности повсеместно используется в образовании и дает достойные результаты. Но так как в наше время происходит значительное увеличение потока информации, скорости роста объема знаний, традиционные методы не позволяют наиболее полно решить задачу повышения эффективности обучения - освоения и применения знаний. Один из способов решения этой проблемы – применение информационных и телекоммуникационных технологий во всех формах современного учебного процесса. Тем более, что одним из требований образовательных стандартов является широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных методов обучения [1].

Электронные формы обучения, базирующиеся на компьютерных технологиях, в настоящее время открывают невиданные ранее возможности познания, общения, хранения и обмена информацией. При этом происходит изменение соотношения традиционных и инновационных форм, средств и методов обучения.

Одной из форм электронного обучения является дистанционное обучение, которое не является абсолютно новой формой учебного процесса. Это приспособленная к современным реалиям форма заочного обучения. Основные этапы развития дистанционного обучения отражены в таблице [2].

Развитие дистанционной (заочной) системы обучения	
Формы, методы и инструменты обучения	Годы
Использование почты для доставки учебных материалов	1800 – 1900
Использование радио и телевидения в процессе заочного обучения	1920 – 1970
Применение заранее подготовленных видеозаписей, кассет с аудио материалами. Зарождение «кейс-технологий»	1970 – 1980
Появление видеоконференций. Кассетные записи учебных видео материалов. Рост количества телевизионных учебных программ. Дальнейшее развитие «кейс-технологий»	1980 – 1990
Доступность персональных и планшетных компьютеров. Бурное развитие интернет-технологий	1990 – наши дни

Дистанционное обучение – это использование в образовательном процессе совокупности задач и методов эффективного обучения, базирующийся на современных компьютерных и телекоммуникационных технологиях, ориентированных на средства обмена информацией на любых расстояниях через сеть Интернет.

Дистанционное обучение представляет из себя три взаимодополняющих, но в тоже время существующих самостоятельно технологий обучения [3]. Схема дистанционного обучения представлена на рисунке:

Комплексные кейс-технологии основаны на самостоятельном изучении печатных и мультимедийных учебно-методических материалов, предоставляемых обучаемому в специальной форме (кейса). При этом существенная роль отводится очным формам занятий. Эти занятия включают установочные лекции, а главное – активные семинарские, тренинговые, игровые формы, а также консультационные и контрольно-проверочные формы. Подобные технологии используют мультимедийные ресурсы электронного обучения для проведения консультаций, конференций, ответов на вопросы и обеспечения обучающихся учебной информацией из электронных библиотек, баз данных учебных заведений. В мультимедиа-технологии дополнительно к пакету учебно-методических материалов используются такие средства, как звук, анимация, изображения высокого качества.

Наиболее перспективной считается сетевая технология, которая обеспечивает открытый доступ к системе дистанционного обучения как обучаемых, так и преподавателей. В сетевой технологии могут быть реализованы как традиционные способы и методы обучения и контроля, так и современные: электронные учебники, электронные библиотеки, научные телеконференции, интерактивные учебные программы, тестирующие обучающие системы и аттестующие системы, виртуальные экскурсии, то есть все, что ранее было названо автоматизированной обучающей системой (АОС). Чаще всего дистанционное обучение базируется на сети Интернет, в связи с уже сформировавшейся к настоящему моменту большой зоной охвата аудитории. Каждый преподаватель может по своему усмотрению использовать тот или иной элемент АОС, доступный в сети Интернет. Например, в сети можно найти большое количество вариантов визуализации математических фактов, которые традиционно сопровождаются лишь аналитическим доказательством. На уроке алгебры при изучении темы по алгебре «Выделение полного квадрата» иллюстрация, спроецированная на экран, значительно повышает уровень понимания данного материала.

С одной стороны, электронные формы обучения изменяют характер распространения, представления и приобретения знаний, развития и закрепления умений и навыков. Свободные от ограничений в месте и времени они представляют возможность каждой личности выстроить свой сценарий обучения, получить больший объем информации за определенный промежуток времени. Они способствуют стимулированию когнитивных аспектов обучения, таких как восприятие и осознание информации, формированию мотивов к самообучению и саморазвитию.

С другой стороны, происходит сворачивание социальных контактов, сокращение взаимодействия и общения, формирование индивидуализма. Обучающийся не получает достаточной практики диалогического общения, формирования и формулирования мысли на профессиональном языке. Наконец, чрезмерное и неоправданное использование компьютерной техники негативно отражается на здоровье всех участников образовательного процесса.

Также следует отметить, что при обучении математике особенно требуется строгая последовательность в изложении, освоении и усвоении материала, преподаватель, излагающий материал и иллюстрирующий его на доске «шаг за шагом», играет существенную роль. Кроме этого, стоит сказать и о подготовке школьников к выпускному тестированию (ОГЭ и ЕГЭ). «Натаскивание» на варианты, которое можно успешно осуществлять при помощи интернет-ресурсов, необходимо, но при этом обучающийся должен иметь фундаментальную подготовку, формирующую системные знания и навыки. А это возможно получить только при «живом», непосредственном общении с преподавателем.

Основной вывод состоит в том, что, только разумное сочетание электронных ресурсов с классическим преподаванием позволяет значительно повысить качество обучения математике. Современные информационные технологии должны дополнять классические методы, чтобы развивать у обучающихся способности восприятия информации и умения ею оперировать, грамотно использовать коммуникационные сети глобального масштаба, подходить творчески к решению научных задач.

В качестве примера приведем школу «УниШанс», которая первые годы работала только в режиме On-lain. Сайт Интернет-школы «УниШанс» существует с 2007 года, консультации в ней осуществляют ведущие учителя математики города Санкт-Петербурга, преподаватели и аспиранты СПбГУ, СПбПУ, СПб ИТМО и СПб АППО. Обучение школе является бесплатным и доступно абсолютно в любой точке нашей страны. Проект «УниШанс» как раз и задумывался для того, чтобы предоставить возможность школьникам старших классов из отдаленных регионов получать бесплатные консультации профессионалов университетского уровня по решению задач и освоению школьного материала. Сайт школы помогает решать задания по подготовке ОГЭ (ИГА) и ЕГЭ по математике. Но востребованность сайта, с одной стороны, в связи с расширением круга таких предложений в интернет-пространстве, и с другой, незнанием учителей о таком интернет-ресурсе, постепенно падала. Поэтому у организаторов возникла идея проведения параллельно очных семинаров для учителей и школьников Ленинградской области и Северо-Западного региона. На этих семинарах проводятся как и лекционные занятия так и практические. В итоге, если первоначально школа «УниШанс» существовала только как интернет-ресурс, то в настоящее время школа работает по нескольким направлениям – это обучение по базовой и расширенным программам посредством Интернета, а также очное обучение на выездных семинарах. Семинары проводятся два раза в год в дни осенних и весенних каникул. В июне-июле преподаватели школы «УниШанс» организуют кружки по математике и информатике в ОК «Университетский». И следует отметить, что в связи с этими направлениями деятельности, популярность школы резко возросла. В школах области среди приходится производить отбор среди желающих участвовать в работе семинаров. Также школьники чаще стали «заглядывать» на сайт школы. Такая организация деятельности школы «УниШанс» позволяет гораздо эффективнее воплощать в жизнь девиз школы «Математика — это просто!».

Список литературы

[1] Кропачева, Н.Ю., Павилайнен Г.В. Некоторые вопросы совершенствования учебных планов магистратуры. / Н.Ю. Кропачева, Г.В. Павилайнен. В кн. Особенности подготовки специалистов в вузе в условиях экономического кризиса. СПб: Материалы всероссийской научно-методической конференции. СПб ГТУ РП, 2009. I ч. - С.14-15.

[2] Шкопоров, А.Б. Дистанционное обучение и дистанционные образовательные технологии в дополнительном профессиональном образовании. [Электронный ресурс] / А.Б. Шкопоров - Режим доступа: ra-kurs.spb.ru- статья в интернете. - Дата обращения: 15.03.2017 г.

[3] Кропачева, Н.Ю. Применение элементов моделирования в обучении. /Н.Ю.Кропачева //Теория и практика сервиса. СПб: Изд-во ЦНИТ "АСТЕРИОН". -2010. №3. -С.120-124.

УДК 374.1

Рудакова Т. В., Павилайнен Г. В.

Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века.

Ведение. Образование это, по большому счёту, единственный и необходимый инструмент в руках человечества, обеспечивающий ему защиту и, следовательно, выживание в системе мироздания, и наша страна с её системой ценностей, в частности, как подсистема, жива до тех пор, пока хватает сил защищаться этим «инструментом» в рамках общей системы. В этой связи, очевидно, что на выживание может рассчитывать государство, где основой государственной политики является образование в самом широком смысле этого слова.

Воистину, «во многом знании много печали», но к счастью История распорядилась так, что образование оказалось органически связанным с наукой, а наука определяет сегодня и содержание образования, и его методическое обеспечение, и его организацию, а самая чёткая и убедительная оценка её статуса осуществилась в самом историческом процессе. Наука стала основой образования людей, в рамках которого происходит их формирование как субъектов принадлежащих современной культуре, их социализация.

Важнейшей проблемой современного процесса образования является вопрос о его эффективности, как для личности, так и для общества в целом. Поэтому образование сегодня — это наиболее динамичный фактор воздействия на все сферы жизни общества: экономику, социальные процессы, культуру, систему ценностей, образ жизни.

XX столетие — век беспрецедентных социальных преобразований и научно-технического прогресса — превратило мировое сообщество в единое, хотя и весьма противоречивое целое в процессе глобализации экономики и демократизации общества. Обеспечить исторический переход к новому этапу развития человечества интеллектуальной энергией и нравственными ориентирами — важнейшая задача народного образования. Отсюда особое значение интегративного, целостного восприятия мира, которое позволит избавиться от характерного для нашего времени сочетания глубокого понимания явлений в узкопрофессиональной области, с вопиющим непониманием за её пределами. Решение этой задачи создаст лучшие условия для взаимопонимания и сотрудничества представителей разных специальностей, разных стран и культур.

В настоящее время общество переживает системный кризис образования, проявляющийся в слабой устойчивости получаемых знаний, в низкой эффективности общекультурной компоненты образования, в отсутствии чёткой ориентации на целостное восприятие мира, в перегруженности учащихся, в неэффективности методик образования, неудовлетворительном качестве учебных пособий, слабом использовании неформальной компоненты образования, особенно с применением средств массовой информации. Перегруженность учащихся при невысоком качестве образовательного процесса приводит к понижению у них интереса к получению знаний, к снижению их психического и физического здоровья.

От эффективного решения этих проблем зависит существование нашей цивилизации в XXI веке. Именно современное образование призвано дать устойчивую систему знаний, умений и общественно значимых ценностей и должно создать основу физического, психического и морального здоровья личности [1].

Системообразующим звеном образования, конечно, являются школа и вуз, где закладывается фундамент образования человека, формируются интеллектуальные способности, складывается система жизненных ценностей, определяется тип его психики, его телесная организация, т.е. направление его дальнейшего развития и жизни в целом. Именно здесь, в школе и в вузе, необходимо стремиться привить формирующейся личности понимание органического взаимодействия различных предметов, их симбиоз, если хотите, что позволит увидеть в самых разных ракурсах знание, полученное в рамках отдельной дисциплины. Фиксация внимания на научной картине мира, на острейших проблемах развития человечества и, особенно, современности, этическая ориентация в представлении материала любой дисциплины, исторический подход к её изложению резко повышают интерес к учебному процессу, и тем самым содействуют её устойчивому усвоению, развивая не только интеллект учащегося, но и сохраняя его здоровье. Поэтому одной из важнейших задач школы и вуза является развитие у учащегося устойчивой потребности в совершенствовании образования и способности осуществлять самообразование. Более того общекультурная составляющая образования должна быть сосредоточена не только в комплексе особых дисциплин, но и в любом предмете. Она заключается в выявлении методологических особенностей каждой дисциплины, её связей с другими науками, в обращении к истории и философии при раскрытии её содержания, убедительной демонстрации её значимости для развития общества и, в конечном счёте, его выживания. Важнейшей мотивацией образования должен быть познавательный интерес, стремление учащегося научиться что-то делать самостоятельно.

Системный подход к образованию. Целостное систематическое мировоззрение личности возможно на основе системного, синергетического подхода в сфере образования.

Рассмотрим основные методы, используемые в управлении образованием. К ним можно отнести четыре: диалектический, системный, синергетический, теория циклов.

Диалектический подход основан на применении теории и метода познания — диалектики, основоположником которой был Геродот (484–425 гг. до н.э.). Основные научные категории и законы диалектики сформулированы Гегелем (1770–1831). Диалектический подход изучается в курсе философии и не нуждается в подробном изложении в нашем докладе.

Системный подход базируется на диалектической теории и, по сути, выступает как прикладная диалектика. Основным понятием является фундаментальное понятие «система». Очевидно, что существует множество определений этого понятия в связи с его повсеместной применимостью. Однако строгого, единого определения для понятия система в настоящее время нет. Анализируя различные взаимно дополняющие понятия системы, следует отметить, что наиболее полное определение должно включать и элементы, и связи, свойства, цель, и наблюдателя (исследователя), а также его язык, с помощью которого отображается объект или процесс. Как и любое фундаментальное понятие, система конкретизируется в процессе рассмотрения её основных свойств. С нашей точки зрения, общее определение системы — это совокупность взаимосвязанных элементов или компонентов, взаимодействующих между собой таким образом, что достигается определенный результат (цель).

Одновременно под словом «система» мы будем понимать совокупность элементов, объединенных внутренними связями и образующих качественно новое целое, взаимодействующее с окружающей средой посредством внешних связей. Такое определение не только практически универсальное, но и обладает большой наглядностью в отражении основных системных свойств (рис. 23).

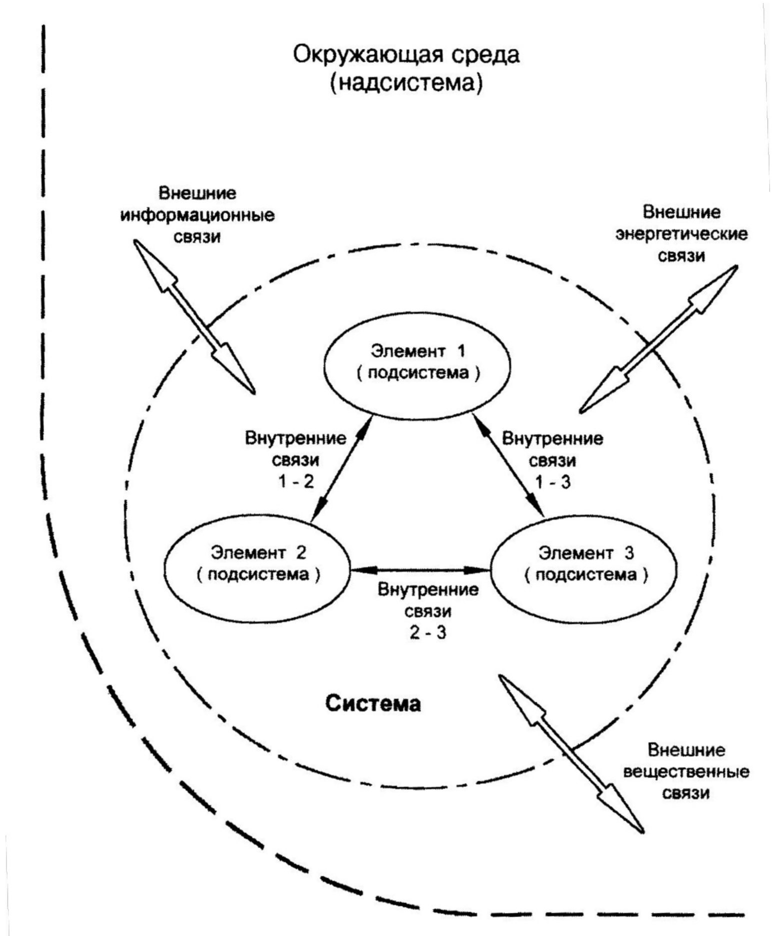


Рис. 23. Иерархическая структура открытой системы. Источник: Лобачёв А. И. Концепции современного естествознания: учебник для вузов. М., 2001. С. 40.

Центральное место в определении понятия «система» занимает понятие целого, приобретающего в результате объединения отдельных элементов новое системное качество, не присущее этим элементам порознь, и направленное на достижение определенной цели.

Первое свойство называется эмерджентностью и связано с появлением нового качества системы, что по сути дела свидетельствует о рождении системы как таковой.

Второе важнейшее общесистемное свойство — так называемая иерархичность любого системного образования, определяемая как существование различных взаимосвязанных структурных уровней рассмотрения систем. Указанное свойство связано с использованием в структуре системы понятия элементов, которые по отношению к ней можно рассматривать в качестве систем более низкого уровня, или подсистем. Соответственно сама исходная система также может быть представлена лишь как отдельный элемент в системе более высокого уровня общности, или в так называемой надсистеме, роль которой с успехом способна выполнять, в том числе и структура, обозначаемая как окружающая среда, или внешняя среда.

Третьим важным системным свойством, также вытекающим из исходного определения, можно считать открытость систем, степень которой полностью определяется видом внешних связей с окружающей средой. При наличии активных двусторонних связей система называется открытой и эффективно взаимодействует с внешним миром. В качестве дополнительной характеристики свойства открытости систем обычно выделяют основные возможные виды системных связей, к числу которых в естествознании относятся: вещественные связи, энергетические связи и информационные связи.

В открытых системах, свободно обменивающихся энергией, веществом и информацией с внешней средой, могут происходить явления самоорганизации, усложнения или спонтанного возникновения порядка. Очевидно, что при таком обмене вещество, энергия и информация способны преобразовываться друг в друга, т. е. меняться качественно, и меняться в размерах, скорости и интенсивности воздействия, т. е. количественно. Модели событий, описываемые открытыми системами, наиболее сложны как при создании, так и при анализе результатов моделирования. В связи с этим часто используются упрощенные модели, к которым относятся замкнутые и закрытые системы.

Замкнутые системы обмениваются только энергией, но не обмениваются веществом с окружающей средой. В случае односторонних связей, направленных внутрь системы, говорят о закрытой системе, не имеющей отклика на внешние воздействия. Такого рода система представляет собой для внешней среды некий «чёрный ящик» и малоэффективна для контактов. Самая простая и наиболее изученная модель системы — изолированная система, которая характеризуется полным отсутствием связей системы с внешней средой. Любое внешнее взаимодействие с изолированной системой невозможно, в то время как внутри этой системы могут происходить многочисленные процессы.

Абсолютно изолированных систем в природе не существует, это идеальная абстракция. Как правило, можно говорить лишь о большей или меньшей степени изолированности системы от внешней среды, например в качестве изолированной системы можно рассматривать Земную цивилизацию. Четвертое системное свойство — так называемая стационарность, под которой понимается неизменность параметров системы во времени. Системы, условно обладающие этим свойством, носят название стационарных. Однако полностью стационарных систем (как и совершенно изолированных) в окружающем мире не существует. Говоря о стационарности какой-либо системы, всегда необходимо указывать интервал времени, в течение которого можно считать, что её параметры не претерпевают изменений, т.е. речь идёт лишь об условной стационарности, выгодной для упрощения различного рода расчётов. Реальный окружающий мир состоит из систем нестационарных.

Пятое системное свойство, заключающееся в способности системы возвращаться в равновесное состояние после прекращения действия внешних сил, характеризует так называемую устойчивость. Тем самым проявляется способность системы сопротивляться деструктивным, разрушающим её целостность, воздействиям внешней среды.

Интересная трактовка указанного свойства, предложенная академиком А.Н. Колмогоровым (1903–1987), предполагает, что все основные параметры системы находятся внутри некоторой области устойчивости. Рассмотрение существования системы во времени приводит к преобразованию этой области в так называемую трубку устойчивости. Невыход параметров системы за пределы этой трубки свидетельствует о её системной устойчивости в течение рассматриваемого интервала времени. Напротив, выход какого-либо параметра за пределы области, или трубки, свидетельствует о потере устойчивости системой, превращении её в неустойчивую систему (рис. 24).

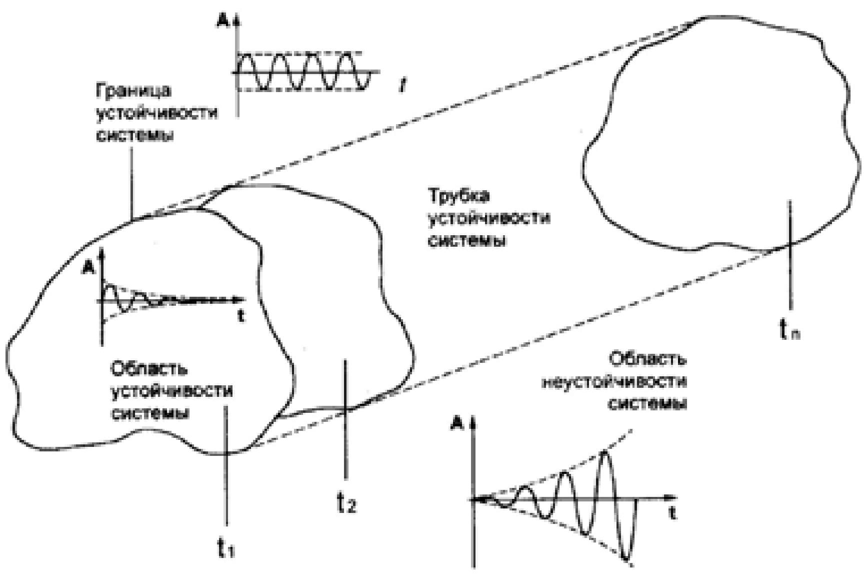


Рис. 24. Область и трубка устойчивости системы. Источник: Лобачёв А. И. Концепции современного естествознания: учебник для вузов. М., 2001. С. 43.

Таким образом, свойство устойчивости не всегда присуще системе — оно способно исчезать при изменениях внешней среды или свойств самой системы. Однако потеря устойчивости может повлечь за собой полное разрушение системы или превращение её в какую-либо иную систему. Поэтому в настоящее время разработано большое число методов, позволяющих с высокой степенью точности определять границы устойчивости любых систем.

Чрезвычайно интересно рассмотреть поведение систем, находящихся на границе устойчивости. Приведение системы в подобное, так называемое неравновесное состояние, трактуется как необходимое условие возникновения процессов самоорганизации систем, лежащих в основе системной эволюции и подробно рассматриваемых сравнительно новым научным направлением — синергетикой.

Шестым важным системным свойством выступает детерминированность, характеризующая полную определённость описания и определения систем. Совершенно очевидно, что такого рода системы также — всего лишь удобная идеализация, упрощающая многие сложные расчёты.

В реальности весь окружающий мир и существующие в нём системы обязательно обладают достаточной степенью стохастичности, отличительная черта которой — случайный, вероятностный характер всех протекающих в них процессов и явлений. Появление любого события в этом мире характеризуется лишь большей или меньшей степенью вероятности, но никогда не может быть реализовано с абсолютной надежностью.

Седьмое системное свойство — инерционность, или способность систем пассивно сопротивляться внешним воздействиям либо изменениям. Доля инерционности в системе может быть очень мала или близка к нулю, но обязательно всегда присутствует. В этом заключается фундаментальное свойство природы — её консерватизм, «нежелание» мгновенно изменяться под действием внешних факторов. Следы проявления инерционности в окружающем мире можно найти везде: в механике, где её мерой служит масса; в электромагнитных явлениях, где она выступает в виде индуктивности; в биологии, где её проявлениями можно считать свойство наследственности, и даже инерционность сознания.

Именно благодаря инерционному консерватизму оказывается возможным существование ещё одного очень важного системного свойства — колебательности, под которой понимается способность системы к периодическому изменению собственных параметров. Будучи отражением уже рассмотренного свойства нестационарности любой системы, колебательность проявляется особенно ярко в различных переходных процессах, когда система периодически изменяет значения своих параметров при приближении к новому своему состоянию.

Объединяет инерционность и колебательность любой системы то, что оба свойства не только относятся к числу общесистемных, но и образуют внутри множества системных свойств группу так называемых динамических свойств, отражающих поведение системы в состоянии движения, динамики, изменения параметров. Особенно важно учитывать указанные динамические свойства при анализе устойчивости систем.

Понятие сложной системы. Разделение систем на простые и сложные является фундаментальным понятием в современном естествознании.

Простыми считаются системы в том смысле, что в них входит небольшое число элементов, и поэтому взаимоотношения между ними поддаются математической обработке и подчиняются универсальным законам. К простым системам относятся закрытые устойчивые системы, без обратных связей, неживые, растительные неразумные и т.п.

Помимо простых систем, существуют сложные системы (открытые, неустойчивые, с обратной связью, живые, животные, разумные и т.д.), состоящих из большого числа элементов (подсистем) и, стало быть, большого количества связей между ними что, естественно, затрудняет исследование объекта и выведение закономерностей его функционирования. Трудность изучения таких систем объясняется ещё и тем обстоятельством, что чем сложнее система, тем больше у нее эмерджентных свойств.

Среди всех сложных систем наибольший интерес представляют системы с так называемой обратной связью. Это ещё одно важное понятие в современном естествознании. Если поведение системы (поведением будем называть любое изменение системы по отношению к окружающей среде) зависит от воздействия от него, то говорят, что в такой системе имеется обратная связь — между воздействием и реакцией на него. Иногда воздействия окружения на систему называют входами системы, а отклик системы на воздействия — её выходами. Особый случай – наличие обратных связей, как положительных, так и отрицательных, когда выход системы действует на саму систему как одни из входов. Положительная обратная связь усиливает внешнее воздействие входов, отрицательная ослабляет. В результате положительная обратная связь возбуждает систему; при активной обратной связи и достаточно сильном входном воздействии система может «пойти вразнос» (режим с обострением). Например, такое системное явление, как горение (пожар), возможно при наличии следующих элементов (компонентов): горючее вещество, окислитель, источник воспламенения.

Основная модель, претендующая на объяснение процессов самоорганизации, образования структур и их сверхбыстрого развития, — это математические закономерности процессов горения и теплопроводности (диффузии) в открытых нелинейных средах. Человеческий организм, по сути, тоже процесс горения в открытой среде — непрерывное окисление и воссоздание.

Отрицательная обратная связь стабилизирует систему; даже сильные сигналы на входе умеряются ею. Особый случай — гомеостатические обратные связи, которые сводят внешнее воздействие к нулю. Например, температура тела человека, которая остается постоянной благодаря гомеостатическим обратным связям. Таких механизмов в живом организме огромное количество. Механизм обратной связи делает систему принципиально иной, повышая степень её внутренней организованности, что дает возможность говорить о самоорганизации в этой системе.

Наличие механизма обратной связи позволяет считать, что сложная система преследует некоторые специфические цели, т.е. её поведение целесообразно. Активное поведение системы может быть случайным или целесообразным. Основатель теории информации Н. Винер (1894–1964) считал, что целесообразное «действие или поведение допускает истолкование как направленное на достижение некоторой цели, т.е. некоторого конечного состояния, при котором объект вступает в определенную связь в пространстве или во времени с некоторым другим объектом или событием. Нецелесообразным поведением является таковое, которое нельзя истолковать подобным образом» [2].

Как правило, всякое целенаправленное поведение технических систем требует наличия отрицательной обратной связи (например, торпеда, снабженная механизмом поиска цели). Научное понимание целесообразности строится на обнаружении в изучаемых системах объективных механизмов целеполагания. Цель системного анализа, в частности, информационной безопасности состоит в том, чтобы выявить причины, влияющие на появление нежелательных событий (аварий, катастроф, пожаров, травм и т.д.), и разработать предупреждающие мероприятия, уменьшающие вероятность их появления [3].

Системный анализ — это совокупность методологических средств, используемых для подготовки и обоснования решений по сложным проблемам образования, в частности, по освоению знаний и умений, развитию у учащегося устойчивой потребности в совершенствовании образования и способности осуществлять самообразование.

В современном понимании системный подход представляет собой путь решения сложной проблемы или задачи, исходя из рассмотрения её как системы в целом, во взаимосвязи с другими сопутствующими проблемами с большим числом внутренних и внешних связей, в результате чего обеспечивается не только нахождение большинства возможных альтернативных решений, но и скорейший выбор оптимального из них.

Попытки разработать общие принципы системного подхода были предприняты ещё русским врачом, философом и экономистом А. А. Богдановым (1873–1928) в работе «Всеобщая организационная наука (тектология)». Многие идеи и научные гипотезы этой работы были впоследствии исследованы и подтверждены многими учеными, например, Н. Винером, У. Росс Эшби, Л. Фон Берталанфи и другими. Основа тектологии — это признание того факта, что целое больше чем сумма его частей. Чем больше разница целого и суммы частей, тем более оно организовано, системно.

Л. Фон Берталанфи (1901–1972) считается создателем общей теории систем на основе принципа изоморфизма (одинаковости) законов в различных областях знаний. Важнейшие принципы системного анализа в сфере безопасности жизнедеятельности таковы:

1. процесс принятия решения должен начинаться с выявления и четкого формулирования конечных целей;
2. всю проблему надо рассматривать как единое целое;
3. необходим анализ альтернативных путей достижения цели;
4. подцели не должны вступать в конфликт с общей целью.

В середине XX в. сформировался новый подход в теории систем и науке в целом, названный синергетикой.

Новый синергетический подход означает необходимость рассмотрения физики процессов в открытых системах, из которых состоит весь реальный мир, и проявляющихся в живой и неживой природе, а также в общественных и социальных системах.

Бурное развитие системного анализа в 80-е годы XX столетия сменилось ныне пониманием того, что одним системным методом нельзя охватить всё многообразие проявлений окружающего мира. Синергетика объединила разрозненные научные исследования о коллективном поведении частей сложных систем, связанных с неустойчивостями и касающихся процессов самоорганизации. Синергетика — это теория самоорганизации систем различной природы.

Создатели синергетики — немецкий математик Г. Хакен (р. 1927), который в 1970-е годы ввёл этот термин, и бельгийский учёный, Нобелевский лауреат 1977 года, И.Р. Пригожин (1917–2003) — положили в её основу термодинамическую теорию сильно неравновесных открытых систем. Основная идея заключается в том, что сложная динамическая система, состоящая из подсистем, в процессе эволюции проходит через стадии устойчивого развития и бифуркации (от лат. bifurcum – «раздвоение, развилка дорог») термин введен впервые Анри Пуанкаре (1854–1912) при исследовании особых решений дифференциальных уравнений. На стадии устойчивого развития у системы преобладают отрицательные обратные связи, обеспечивающие ее гомеостаз (др.-греч. *ὁμοιοστάσις* — «неизменность состояния»). Поэтому эволюция происходит постепенно, лишь слегка изменяя характеристики системы, но наступает момент, когда количество переходит в качество — гомеостаз нарушается, а положительные обратные связи начитают преобладать над отрицательными, и система теряет устойчивость, попадая в точку бифуркации. Дальнейшая эволюция может пойти двумя или несколькими разными путями, причем для перехода ее с прежней траектории на какую-либо другую из новых может потребоваться лишь небольшой толчок, а выбор той или иной дальнейшей траектории в значительной степени случаен. Достаточно часто некоторые из возможных путей ведут из точки бифуркации к хаосу, а другие – к различным вариантам порядка. Для характеристики таких процессов используется понятие энтропии, введенное Р. Клаузиусом (1822–1888) в 1865 г. для определения меры необратимости рассеяния энергии.

Используя термодинамическую аналогию, утверждается, что организованная система, обладая меньшей энтропией по сравнению с окружающей средой, функционирует устойчиво, если наблюдается рост энтропии. Но за её счёт внутри системы может увеличиваться порядок. Энтропия используется как мера неупорядоченности или хаоса системы.

Более корректно такое понимание процессов в открытых системах нашло отражение в принципе производства минимума энтропии, названного принципом Пригожина–Гленсдорфа [4]. Под производством энтропии понимают отношение изменения энтропии dS к единице объема системы. Степень упорядоченности открытой системы можно определить по этому принципу производством энтропии. Общее изменение энтропии

$$dS = dS_{i_{(\text{внутреннее})}} + dS_{e_{(\text{внешнее})}}$$

где dS — полное изменение энтропии в системе, dS_i — изменение энтропии, обусловленное происходящими в системе внутренними необратимыми процессами, и dS_e — энтропия, перенесенная через границу системы из внешней среды.

В изолированной системе $dS_e = 0$, а $dS_i > 0$ и тогда в целом $dS > 0$. В открытой системе $dS = 0$ или даже $dS < 0$, поскольку dS_e может компенсировать энтропию dS_i, произведенную внутри системы, или превзойти её. Тогда $dS_e < 0$, т.е. энтропия в систему не поступает (поступает с отрицательным знаком), а, наоборот, выводится. Условие $dS = 0$ означает стационарное состояние, $dS < 0$ — рост и усложнение открытой системы. Соответственно, изменение энтропии в этом случае определяется соотношением $dSe \leqslant dSi$, которое показывает, что энтропия, произведенная необратимыми процессами внутри системы, переносится в окружающую среду. По существу в этом и заключается процесс самоорганизации — создание определенных структур из хаоса, неупорядоченного состояния. Реальные системы как бы структурируют энергию их внешней среды — упорядоченная ее часть остается в системе, а неупорядоченную энергию система «сбрасывает», возвращает в природу.

Системы, подверженные потоку энергии и вещества, могут переходить в состояние, далекое от термодинамического равновесия, в «нелинейный» режим и переходить к новым организованным состояниям через точки бифуркации. Фундаментальное свойство неравновесных систем проявляется в способности переходить в упорядоченное состояние в результате флуктуаций, т.е. осуществлять порядок через флуктуации. Возникновение и поддержание организованных неравновесных состояний обусловлены диссипативными процессами, эти состояния называются диссипативными структурами (или диссипативными системами). Это устойчивые состояния, возникающие в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивании) энергии, которая поступает в систему извне. Поэтому в целом диссипация увеличивает энтропию, и за её счёт внутри системы может увеличиваться порядок. Именно развитие синергетики и смежных ей разделов математики (прежде всего теории катастроф) показало, что эволюция различных диссипативных систем проходит через стадии устойчивого развития и бифуркации. Развитие таких самоорганизующихся систем происходит двумя фазами: плавное эволюционное развитие (адаптация) с предсказуемыми изменениями, которые в итоге подводят систему к некоторому неустойчивому критическому состоянию, сменяется одномоментным выходом из критического состояния, скачком, в новое устойчивое состояние (бифуркация). Важная особенность второй фазы — случайность в точке бифуркации (рис. 25).

Рис. 25. Схема развития самоорганизующейся системы. Источник: Пригожин И., Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах. М., 1979. С. 67.

Информация и образование. Развитие науки на рубеже второго тысячелетия подтолкнуло ученых к окончательному признанию информации полноценным элементом динамических систем наряду с веществом и энергией (полем). Теорию информации создал Норберт Винер, который в 40-е годы XX в. заложил основы новой науки и назвал, следуя Платону (428–348 гг. до н.э.), кибернетикой (др.-греч. *κυβερνητικη* — «кормчий»).

Понятие «информация» очень динамично. В современной трактовке под термином «информация» обычно понимают сведения, знания, сигналы, сообщения, независимо от формы из представления, об окружающем мире и протекающих процессах, получаемые органами чувств человека или устройствами и передаваемые устно, письменно любыми техническими средствами, т.е. всё то, что используется для управления – целенаправленного влияния на свойства системы.

Несмотря на широкое распространение этого термина, в настоящее время не существует единого определения информации и понятие информации — одно из самых дискуссионных в науке. С точки зрения различных областей знания, это понятие описывается своим специфическим набором признаков.

Приведем несколько определений.

Информация – одно из наиболее общих понятий науки, характеризующее знания и их совокупность, обозначение содержания, полученного из внешнего мира в процессе приспособления к нему (Н. Винер); отрицание энтропии (Л. Бриллюэн); коммуникация и связь, в процессе которой устраняется неопределенность в знании о системе (К. Шеннон); передача разнообразия (У. Эшби); мера сложности структур (А. Моль); вероятность выбора (И. Яглом) и многие другие.

Различают три формы информации: биологическая (внутри живого); машинная (внутри машин); социальная (внутри сообщества).

Информация рассматривается в следующих аспектах:

1. информационном — накопление и переработка данных о природе;
2. управленческом — в процессе функционирования системы для достижения целей управления;
3. организационном — морфология и степень совершенства самой системы.

В кибернетике понятие информации в самом широком смысле слова есть определенная форма взаимодействия между двумя или несколькими объектами любой физической природы. Н. Винер дал в своих книгах следующее определение: информация — это обозначение содержания, полученное нами из внешнего мира в процессе приспосабливания к нему нас и наших чувств.

Именно в кибернетике впервые получило фундаментальный статус понятие информации как меры организованности системы в противоположность понятию энтропии как меры неорганизованности, установив обратно пропорциональную зависимость между информацией и энтропией. Связь информации с энтропией свидетельствует и о связи информации с энергией. Винер приводит такой пример: "Кровь, оттекающая от мозга, на долю градуса теплее, чем кровь, притекающая к нему". Энергия характеризует количественную меру различных видов движения и взаимодействия всех видов материи в любых формах. Информация характеризует меру разнообразия систем. Информация растет с повышением разнообразия системы и на это указывает один из основных законов кибернетики — закон необходимого разнообразия. В соответствии с ним эффективное управление какой-либо системой возможно только в том случае, когда разнообразие управляющей системы больше разнообразия управляемой системы. Учитывая связь между разнообразием и управлением, можно сказать, что чем больше мы имеем информации о системе, которой собираемся управлять, тем эффективнее будет этот процесс.

Объективную информацию современная кибернетика определяет как объективное свойство материальных объектов и явлений порождать многообразие состояний, которые посредством фундаментальных взаимодействий материи передаются от одного объекта (процесса) другому, и запечатлеваются в его структуре.

В природе множество состояний системы представляет собой информацию, сами состояния представляют собой первичный код, или код источника. Таким образом, каждая материальная система — это источник информации. Информация передаётся в форме сообщений от некоторого источника информации к её приёмнику посредством канала связи между ними. Источник посылает передаваемое сообщение, которое кодируется в передаваемый сигнал. Этот сигнал посылается по каналу связи. В результате в приёмнике появляется принимаемый сигнал, который декодируется и становится принимаемым сообщением. Передача информации по каналам связи часто сопровождается воздействием помех, вызывающих искажение и потерю информации.

Информацию можно измерить количественно. Подходы к определению информацию с использованием математических понятий вероятности и логарифма, разработали Р. Хартли и К. Шенон. Американский инженер Р. Хартли в 1928 г. процесс получения информации рассматривал как выбор одного сообщения из конечного наперёд заданного множества из N равновероятных сообщений, а количество информации I, содержащееся в выбранном сообщении, определял как двоичный логарифм N.

Формула Хартри:

$$I = \log_2 N.$$

Американский учёный К. Шенон, один из создателей теории информации, предложил в 1948 г. другую формулу определения количества информации, учитывающую возможную неодинаковую вероятность сообщений в наборе.

Формула Шеннона:

$$I = p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + \ldots + p_N \log_2 p_N,$$

где p_i — вероятность того, что именно i-е сообщение выделено в наборе из N сообщений.

В качестве единицы информации Клод Шеннон предложил принять один бит (англ. bit — binary digit — «двоичная цифра»). Помимо двух рассмотренных подходов к определению количества информации, существуют и другие. Важно помнить, что любые теоретические результаты применимы лишь к определённому кругу случаев, очерченному первоначальными допущениями.

К концу XX века информация стала рассматриваться как универсальная субстанция, пронизывающая все сферы человеческой деятельности, служащая проводником знаний и мнений, инструментом общения, взаимопонимания и сотрудничества, утверждения стереотипов мышления и поведения. Такое определение дает А. Н. Колмогоров [5].

Однако при построении теории информации и в информационном подходе были выявлены методологические недостатки, связанные с несоблюдением закона сохранения энергии при интенсивном обмене веществом или информацией в неравновесном состоянии, но положение удалось исправить с помощью развития теории циклов в 1985 году.

Понятие «цикл» заключается в следующем: предполагается законченность определенного процесса, повторяемость или диахронность развития и существование «памяти системы», т.е. передача системно-генетической информации от одного поколения результатов к другому. В информатике и программировании это осуществляется применением методологии объектно-ориентированного программирования с теорией циклов — этой модели «жизни» определенной системы.

Введение понятия цикличности позволяет говорить о возможных энергетических скачках, разрывах функции энтропии, и её скачкообразном изменении, после чего процесс развития как бы начинается заново, в новой системе координат. Процесс самоуничтожения системы математически описывается моделями дискретной математики, а сама идея математического моделирования переходных процессов в системах получила название «теория катастроф». Первые научные работы этой тематики принадлежат В.И. Арнольду и появились в 1970 г. Общая математическая теория катастроф изложена в его книге «Теория катастроф».

В XXI веке изменяется парадигма развития науки. Двигаясь по пути узкой специализации, мы построили уникальную цивилизацию — научились летать в Космос, жить под водой, можем накормить, вылечить, можем уничтожить себя, но оказалось, что мы пришли в глобальный тупик, утратив целостность окружающего нас мира. Сегодня существуют тысячи узких специальностей и специалистов, которые детально знают и понимают собственную предметную область и движутся каждый в своей парадигме, зачастую не понимая друг друга, но при этом мы очень плохо знаем мир, в котором живем, — нам открыто менее 5% информации, и эта ситуация усугубляется...

Заключение. Мы достигли той стадии, когда дальнейшее развитие науки, образования, промышленности возможно только на междисциплинарной основе, взаимопроникновении наук и технологий, конвергенции естественнонаучного и гуманитарного знания, а это требует принципиальных изменений в системе организации и финансирования науки и образования.

К сожалению, школа продолжает работать в прежней парадигме, не понимая, что мир уже изменился, что ушла в небытие прежняя логика формирования школьной программы, не отвечающая современным информационным вызовам. Необходимо пересмотреть методические принципы подачи материала. Сегодня любая образовательная программа, любая область знания, в том числе гуманитарного, не может обходиться без использования физических методов исследования и математического аппарата, как универсального языка, и этот системный подход должен доминировать как в учебном процессе, так и в процессе разработки учебников.

Сегодня система образования в России не приспособлена к подготовке и проведению междисциплинарных исследований, необходимых для перехода к технологическому переделу нового поколения, и это может оказаться серьёзным препятствием не только в развитии страны, но и в её выживании.

Разумеется, как и в науке, узкая специализация в образовании должна сохраниться, но глобально необходимо перейти к принципам междисциплинарности и конвергентности в процессе слияния гуманитарного и естественнонаучного знания. В вузах такой междиспицлинарный подход уже есть в новых стандартах: курс «Концепции современного естествознания» — новая интегративная учебная дисциплина, введённая в Государственный образовательный стандарт РФ с 1995 года и ставшая обязательной для всех специальностей гуманитарного, технического и естественнонаучного профиля. Именно в этой дисциплине в процессе обучения формируется целостное систематическое мировоззрение личности на основе системного подхода.

В России подготовка междисциплинарно подготовленных специалистов уже началась. Президент НИЦ «Курчатовский институт» М.В. Ковальчук сформулировал стратегию развития в России принципиально нового научно-технологического направления, основанного на объединении нано-, био-, информационных, когнитивных и социогуманитарных наук и технологий (НБИКС-технологий), и создал не имеющий мировых аналогов Курчатовский НБИКС–центр НИЦ «Курчатовский институт» (с 2006 г.), где под его научным руководством заложены основы конвергенции современных технологий с «конструкциями» живой природы. НИЦ «Курчатовский институт» в 2005 году открыл совместную кафедру оптики, спектроскопии и физики наносистем на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, в мае 2009 года — первый в мире факультет НБИКС-технологий в МФТИ. В феврале 2017 года открыта междисциплинарная площадка для школьников Санкт-Петербурга и Ленинградской области на базе образовательного ресурсного центра по направлению «Физика» Научного парка СПбГУ. Новый экспериментальный центр включает в себя лаборатории, оснащённые уникальным оборудованием позволяющим проводить эксперименты по всем темам, школьной программы с 7 по 11 класс. Самое современное оборудование на сумму более 15 миллионов рублей было закуплено Университетом по предложению декана физического факультета СПбГУ, профессора М. В. Ковальчука [6].

Настало время готовить специалистов, способных заниматься междисциплинарными научными исследованиями на крупных исследовательских комплексах (мегаустановках), но подготовка таких «конвергентных» специалистов требует широкой эрудиции и высокой концентрации интеллекта самих обучающихся.

Каким должен быть конечный результат конвергенции в образовании и науке? — Вырастить поколение думающих людей, способных видеть цель, координировать деятельность узких специалистов, направлять их к созданию принципиально новых природоподобных технологий и систем, с минимальным ущербом окружающей среде, что, возможно, позволит восстановить нарушенный человеком баланс между биосферой и техносферой. Это действительно вызов планетарного масштаба [7].

Список литературы

[1] Купцов В. И. Образование, наука, мировоззрение и глобальные вызовы XXI

века. СПб., 2009. 428 с.

[2] Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.,1983. С.51. 216 с.

[3] Павилайнен Г. В., Колесников Е. К., Рудакова Т. В.,Цибаров В. А. Безопасность учебно-научного труда и жизнедеятельности: учеб. пособие. СПб., 2013. 204 с.

[4] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. М., 1973. 218 с.

[5] Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. М., 1987. 304 с.

[6] В поединке со временем: страницы истории физфака / ред.-сост. А. Е. Грищенко, Т. В. Рудакова. – СПб., Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 2014. – 176 с.

[7] Генеральная Ассамблея ООН, 29 сентября 2015 г. Выступление Президента Российской Федерации В. В. Путина.

УДК 523.2+523.6

Соколов Л.Л.

Астрономические сюжеты для школьников

Введение. Сегодня существует много возможностей, чтобы увлекательно и доходчиво показать школьникам, какие задачи решает современная наука и каким образом она это делает. Это повысит их интерес к учебе и вообще к окружающему миру, поможет раскрыть их способности, а некоторым – и выбрать будущую профессию.

Мы ограничиваемся здесь точным естествознанием, а конкретнее — некоторыми темами, связанными с астрономией и небесной механикой. Следует подчеркнуть междисциплинарный характер современных научных проблем; для правильного их понимания требуется, так сказать, общая грамотность, что и является по идее целью обучения в школе. Широчайшие возможности для быстрого получения, обработки и осмысления новой информации дает интернет.

Важная составляющая общей грамотности — точное словоупотребление. Красивый пример совсем недавно продемонстрировал В.В. Путин, спросивший у школьника, где заканчивается граница России. Правильный ответ — она нигде не заканчивается. Причина в том, что граница в общем случае — замкнутая линия, топологически эквивалентная окружности, все точки ее равноправны, конца нет. Этот вопрос можно рассматривать и как вопрос по географии (со школьниками по этому поводу встречался В.В. Путин), и как вопрос по геометрии (топологии), и как вопрос по русскому языку.

Пояс Койпера, или транснептуновые планеты. В средствах массовой информации время от времени появляются сообщения, что астрономы открыли новую планету в нашей Солнечной системе.

В самом конце прошлого и начале нынешнего столетия произошло резкое увеличение точности астрономических наблюдений, астрономы увидели много нового, в частности и в Солнечной системе. Так, была открыта новая популяция объектов — пояс Койпера (по имени американского астронома), или транснептуновые объекты (ТНО), т.е. расположенные за Нептуном.

Их характерные размеры порядка сотен км, число превышает несколько сотен и постоянно растет. Открытие, определение и уточнение орбит этих объектов — рутинный процесс. Отметим, что размеры Солнечной системы увеличились в результате раза в три. Кроме того, время от времени астрономы пытаются открыть новую планету «на кончике пера» подобно тому, как Нептун обнаружили по его влиянию на Уран. Однако вполне однозначных бесспорных результатов в этом направлении пока не получено, хотя полностью исключить такую возможность сейчас нельзя.

Экзопланеты. На стандартный вопрос «есть ли жизнь на других планетах?» еще лет тридцать назад можно было задать вопрос «есть ли другие планеты?» (не у Солнца, а у других звезд). Сейчас известно, что есть, и их много. Еще лет 15 назад было известно 2-3 десятка, сегодня — порядка трех тысяч. Старая классическая задача об устойчивости Солнечной системы существенно обогатила свое содержание. Какие формы жизни мы можем там встретить — никакой фантазии не хватит.

Как уронить Луну на Землю. Сегодня исследования Луны «в тренде». Все ли школьники знают, что Луна всегда повернута к Земле одной стороной? Случайно ли это? Ветераны рассказывали, что в середине 50-х годов прошлого века собралось представительное (но не широкое) совещание ведущих советских ученых (Королев, Келдыш, Капица...) и научной молодежи, на котором обсуждался вопрос о будущем искусственном спутнике Земли. В частности, как сделать, чтобы он был ориентирован «куда надо», а не кувыркался как попало. Петр Леонидович Капица сказал, что нужно разобраться, почему Луна повернута к Земле одной стороной, и сделать также. Разобрались, сделали. Работает.

Луна движется вокруг Земли в плоскости, близкой к проскости эклиптики, по которой движется Земля вокруг Солнца. Что будет, если плоскости орбиты Луны повернуть примерно ортогонально к плоскости эклиптики? Оказывается, Луна через несколько лет упадет на Землю. Это выяснил Михаил Львович Лидов — выдающийся советский небесный механик, исследовавший и проектировавший траектории наших космических аппаратов [1].

Соответствующий небесно-механический эффект носит название «эффект Лидова-Кодзаи»"по имени Лидова и японского ученого, открывшего его одновременно (в начале 60-х годов прошлого века) и независимо от М.Л. Лидова для астероидов. Сегодня этот эффект весьма активно изучается, особенно применительно к экзопланетам.

Солнечный парус. В школе по физике «проходят», что свет оказывает давление, и что это открыл русский физик Лебедев. Идеи использовать солнечное световое давление как движитель для космических аппаратов появились еще в первой половине прошлого века. Первые экпериментальные образцы солнечных парусов испытывались на нашей орбитальной станции.

Вопрос школьникам (по физике): на движение больших или малых тел оказывает большее влияние световое давление?

Давление пропорционально квадрату размеров, масс — кубу, поэтому ускорение обратно пропорционально размерам (при фиксированной плотности). Поэтому для пылинок световое давление может играть важнейшую роль. А эффективный солнечный парус должен иметь огромные размеры (при очень малой толщине отражающего свет паруса).

Ясно, что чем ближе к Солнцу, тем солнечный парус как движитель эффективнее. Однако там жарко, и очень тонкая пленка может сгореть. Естественно вспоминается древняя легенда об Икаре и Дедале. Вопрос школьникам (по физике или географии): почему зимой холодно, а летом тепло? Простейшие геометрические построения показывают, что когда Солнце у горизонта, на единицу площади поверхности Земли падает заметно меньше солнечной энергии, чем когда оно в зените, над головой. Поэтому чтобы парус не сгорел, его можно ставить «на ребро» почти параллельно солнечным лучам вблизи Солнца. Этот прием применяется при исследовании возможностей будущих космических аппаратов с солнечным парусом.

Гравитационные маневры космических аппаратов. Как проще всего упасть на Солнце? Оказывается, выгоднее с энергетической точки зрения сначала долететь до Юпитера, а Юпитер «уронит» космический аппарат на Солнце. Целенаправленное изменение орбиты космического аппарата (КА) при тесном сближении его с планетой (или ее естественным спутником) называется гравитационным маневром. Используется «даровая» гравитационная энергия Солнечной системы. Так движется сегодня большинство космических аппаратов в дальнем космосе. Например, космический аппарат «Кассини» сначала три раза сблизился с Венерой и Землей, затем «оттолкнулся» от Юпитера, и только после этого направился к Сатурну и достиг его. Кстати, первый гравитационный маневр совершил советский космический аппарат, впервые сфотографировавший обратную сторону Луны в 1959 году. Это было целенаправленное изменение орбиты при сближении с Луной, обеспечившее успех экспедиции при экономии ресурсов. Вышеупомянутый Михаил Львович Лидов был одним из тех, кто соответствующую траекторию конструировал.

Движение космических аппаратов с гравитационными маневрами в Солнечной системе в некотором смысле аналогично движению шаров при игре в бильярд, соударение шаров соответствует сближению КА и планеты. Возможные траектории КА с гравитационными маневрами также разнообразны, как варианты игры в бильярд, а конструировать эти траектории не менее интересно, чем в бильярд играть...

Астероидно-кометная опасность. Проблема астероидно-кометной опасности сегодня не подвергается сомнению. После недавнего падения астероида под Челябинском об этом знают не только ученые. Указанной проблеме посвящена, например, монография [2]. Современные наблюдательные средства позволяют более реально оценить опасность, угрожающую Земле, а развитие космических технологий позволяет ставить в практическую плоскость мероприятия по предотвращению соударений астероидов с Землей. Регулярно проводятся соответствующие наблюдения, обнаруживаются новые опасные астероиды, уточняются их орбиты, находятся опасные траектории и оцениваются вероятности неблагоприятного развития событий (пока, к счастью, малые). Эту информацию можно найти на различных сайтах. Один из них: neo.jpl.nasa.gov/ risk/. Это сайт американской Лаборатории Реактивного Движения (JPL). На нем приведены данные о более чем шести сотнях астероидов, столкновение с которыми Земли возможно в ближайшие сто лет. Приводятся масса, размеры, характеристики орбит и их точность, даты возможных соударений и характеристики соответствующих траекторий (включая энергию соударений в мегатоннах), а также многие другие характеристики.

Приводимые на указанном сайте характеристики регулярно обновляются. Любой пользователь интернета может следить за тем, как регулярно появляется новый опасный астероид (иногда размером в несколько сот метров); по мере уточнения его орбиты вероятности его соударений вначале растут, а затем резко падают; астероид «летит мимо» и обычно через некоторое время (порядка месяца) исключается из списка опасных. Однако соударение с астероидом размером в несколько сот метров вызовет тяжелые не вполне предсказуемые последствия; напомним, что размеры «Тунгусского метеорита» оцениваются в 60 метров, а Челябинского — в 17 метров. В этом смысле даже событием с вероятностью одна миллионная трудно пренебречь.

Один из опасных астероидов, внимание к которому специалистов было приковано долгое время, носит имя Апофис по имени древнеегипетского божества. Его тесное сближение с Землей 13 апреля 2029 года на расстояние около 38 тысяч км от центра Земли достоверно установлено. После сближения — как в бильярде — движение становится практически недетерминированным, и можно выделить множество к счастью маловероятных опасных сценариев. Выделение соответствующих опасных траекторий, ведущих к соударениям — сложнейшая математическая задача. Наши исследования показывают, что ее исчерпывающее решение еще не получено, по крайней мере для большинства известных опасных астероидов. [3], [4], [5].

Заключение. Для каждого из приведенных сюжетов в интернете легко найти массу материала. Уже его систематизация может быть хорошей задачей для пытливого школьника. Регулярное слежение за новостями на приведенном сайте JPL интересно само по себе, позволяет получить адекватную картину астероидной опасности, и конечно способствует изучению английского языка. Вести дневник погоды — хорошее задание для младших школьников; здесь полная аналогия.

Не вызывает сомнения, что занятия наукой на разных уровнях не только полезны, но и интересны, увлекательны. Школьники должны это почувствовать.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-02-04340) и СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

Список литературы

[1] М.Л.Лидов – яркое имя в космической науке. Сборник докладов под ред. М.А. Вашковьяка. Москва, ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016, 196 с.

[2] Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра. Под ред. Б.М. Шустова, Л.В. Рыхловой. Москва, Физматлит, 2013, 384 с.

[3] Sokolov L.L., Bashakov A.A., Pitjev N.A. Peculiarities of the motion of asteroid 99942 Apophis. Solar System Research, 2008, vol.42, issue 1, pp. 18-27.

[4] Соколов Л.Л., Кутеева Г.А. О характеристиках возможных соударений астероидов с Землей. Вестник СПбГУ, 2012, сер.1. вып.4, стр. 133 - 138.

[5] Соколов Л.Л., Кутеева Г.А. Возможные соударения астероида Апофис после уточнения его орбиты. Вестник СПбГУ, 2015, сер.1. вып.1, стр. 148-156.

УДК 374

Кутеева Г.А.

Некоторые образовательные сайты дополнительно к школьному учебнику

Автор этого доклада, к.ф.-м.н. Г.А. Кутеева в течение последних десяти лет занималась организацией олимпиады по теоретической механике среди студентов младших курсов Санкт-Петербургского государственного университета. При подготовке к организации олимпиады (в том числе, к составлению задач) приходится просматривать образовательные сайты современного Интернет-пространства. Здесь мы рассмотрим наиболее интересные математические сайты для старшеклассников и их учителей.

Описание сайта «Математические этюды» (2002-2017). Среди образовательных сайтов современного пространства Интернета выделяется сайт www.etudes.ru — «Математические этюды» (2002-2017). Этот сайт создан и поддерживается сотрудниками Математического института имени В.А. Стеклова Российской Академии Наук (Н. Андреев, М. Калиниченко, Р. Кокшаров, Н. Панюнин, Н. Шавельзон). Некоторые задачи напрямую связаны со школьными учебниками по математике и физике; есть задачи, иллюстрирующие объекты, изучаемые в высших технических заведениях; обсуждаются и нерешенные специалистами задачи.

В первой строчке сайта даются разделы:

1. Этюды, 2. Миниатюры, 3. Модели, 4. Диски, 5. iMath, 6. Colloquium, 7. Контакты.

Разберем первый раздел «Этюды». Наиболее объемный и популярный раздел. Здесь увлекательно даются небольшие рассказы о математических и физических задачах. Это именно рассказы как в книгах с примерами, с небольшой визуализацией — мультипликацией, иллюстрирующей данную задачу.

Этюды собраны в 15 подразделов: «Замечательные кривые», «Кривые (фигуры) постоянной толщины», «Внутренняя геометрия многогранников», «Внешняя геометрия многогранников», «Геометрия с листом бумаги», «Математика и техника», «Инструменты», «Шарнирные механизмы», «Площади и объемы», «Геометрия формул», «Непрерывность», «Поверхности второго порядка», «Наилучшее расположение точек», «Другие интересные темы», «Исторические сюжеты».

В каждом из подразделов есть задачи школьного содержания. Например, в подразделе Замечательные кривые обсуждаются эллипс, циклоида, цепная линия. В качестве дополнения к школьному учебнику по математике можно дать примеры из нового этюда «Убывание геометрической прогрессии» (http://www.etudes.ru/ru/etudes/geometricprogression_gears/). Рассмотрим второй раздел «Миниатюры». Как сказано на сайте, миниатюра — это визуализация математических сюжетов. Здесь к минимуму сведено текстовое описание и комментарий к задаче. Есть подразделы: «Нерешенные задачи», «Многогранники», «Кривые на плоскости», «Геометрия формул», «Математическое оригами», «Задачник», «Разное».

Есть миниатюры, созданные в виде маленького фильма, объясняющего математическое определение или правило.

Например, в подразделе «Многогранники», правильные многогранники (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр) необходимо повертеть с помощью мышки, внимательно рассмотреть сколько вершин, ребер, граней, и в конце убедиться, что многогранник был правильным. В конце дается определение: Правильный многогранник — это многогранник, у которого все его грани правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одинаковое число граней. Есть миниатюры в виде совсем маленьких тестов, который проходит пользователь, в конце миниатюры выписано – к какой нерешенной специалистами задаче приводит этот тест (например, в подразделе «Нерешенные задачи», число π).

Интересна новинка этого раздела: тест, созданный на основе книги «Математическая составляющая», редакторы-составители Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. – М., 2015. – 151 с.

В разделе «Модели» предлагается делать из различных материалов интересные конструкции, например, круг превратить в почти прямоугольник (см. подраздел «Площадь круга». «Сведение к площади прямоугольника»). Для таких построений обсуждаются геометрические формулы. Есть подразделы: «Площади фигур и равносоставленность», «Объемы», «Конические сечения», «Многогранники», «Геометрия формул», «Разное».

В разделе «Диски» указывается, что Фонд «Математические этюды» по мере возможностей высылает диски с содержимым сайта бесплатно в регионы учителям математики и физики и в библиотеки. Необходимо заполнить соответствующие формы и отправить с сайта. Также возможно создание самим образов диска с локальной версией сайта.

В разделе "iMath" дается описание математических приложений для iPhone и iPad, созданных фондом «Математические этюды». Это, в основном, головоломки и ребусы, доступные школьнику и их учителям.

В разделе "Colloquium"есть интересное обсуждение новостей и фактов из истории математики (от составителей сайта).

Описание сайта «Механизмы Чебышева». Укажем сайт tcheb.ru, в котором собирается информация о механизмах знаменитого математика Пафнутия Львовича Чебышова. Эта информация представлена в виде схем, компьютерной анимации или мультипликации работы механизмов (3-D графики), всевозможные комментарии, материалы, информация о музеях, где хранятся эти механизмы в настоящее время.

Заключение. В современном образовании старшеклассников важно использовать возможности Интернета. Лучшие образовательные сайты дают пытливому школьнику возможность посмотреть на задачи с различных точек зрения: как описание теорем или задачи в обычном учебнике, как наглядная картинка или видео-файл – демонстрация применения этой теоремы в технике, построение моделей с математическими интересными свойствами своими руками, учеба с помощью математических ребусов, в том числе для iPhone и многое другое. Учителя могут направлять ребят в выбранной тематике.

УДК 374.31

Каткова И.Б.

Проблемы непрерывного образования в России

Надо учить не содержанию науки,
а деятельности по ее усвоению.

В.Г. Белинский

Сегодня, практически у каждого есть возможность получить любую интересующею его информацию из любой точки планеты, буквально не выходя из дома. Интернет становится единым мировым каналом связи, способным объединить людей с одинаковыми интересами, где бы они ни находились. С развитием Интернета появилась возможность обучения и постоянного совершенствования навыков всех категорий людей, от школьников с проблемами здоровья до работников образовательных учреждений вне зависимости от их территориального расположения. Теперь каждый при наличии желания может пройти интересные и полезные для него онлайн-курсы, записаться на вебинар, дистанционно обучаться, получать те компетенции, которые не отражены в его образовательном учреждении, повысить свой профессионализм и найти ответ на любой вопрос.

Традиционные подходы к образованию, основанные на простой передаче знаний от учителя к ученикам — больше не работают так эффективно, как раньше. Только постоянное, непрерывное образование, проходящее через все его ступени, дающее знания, умения, воспитывающее понимание, увеличивающее доступность и широко использующее новые телекоммуникационные средства и дистанционные методы, способно адаптировать человека к современному миру. В современных технологиях, гаджетах и смартфонах дети порой разбираются лучше своих учителей, но не каждый ученик способен сориентироваться в столь широких информационных потоках, выделить для себя доступность тех или иных дистанционных образовательных площадок, сравнить различные ресурсы и информацию предоставленную на них. Условия непрерывного и индивидуального, дистанционного образования создаются и созданы, осталось заинтересовать.

Таким образом, стремительное развитие рынка смартфонов, коммуникаторов и планшетных компьютеров приносит новые веяния в индустрию непрерывного образования, подталкивая развитие мобильного обучения. Но движение в этом направлении вполне очевидно. По данным РАЭК сегодня в России уже около 5 миллионов пользователей мобильного интернета, и большинство из них в возрасте 16-19 лет. В ближайшем будущем также начнут появляться различные приложения для внедрения в социальные сети, что обусловлено огромной интеграцией жизни большинства людей молодого поколения с социальными сетями.

Концепцией долгосрочного социально-экономического развития РФ на период до 2020 года «Развитие образования» предусматривается сформировать систему непрерывного образования, ключевым элементом которой является повышение квалификации и профессиональная переподготовка.

Обновленный федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» прекратил государственную аккредитацию дополнительных профессиональных программ. Свидетельства о государственной аккредитации образовательных учреждений, выданные до дня вступления в силу нового Федерального закона, переоформлены в части исключения дополнительных профессиональных программ. Поэтому на первое место в оценке качества ДПО выходят такие процедуры как общественная аккредитация организаций, и профессионально — общественная аккредитация образовательных программ, создание саморегулируемых организаций (СРО). Таким образом, перед системой ДПО в настоящее время стоят задачи, как в области оценки качества образования, так и перехода на новые правовые отношения. Одной из мер направленных на решение этих задач, является инициатива Департамента государственной политики в сфере подготовки рабочих кадров и ДПО Минобрнауки РФ по разработке концепции развития непрерывного образования в России.

Современное непрерывное образование обладает рядом характеристик, основными из которых являются:

– повсеместное внедрение образовательные технологии на основе информационно-коммуникационных технологий,

– открытость и доступность образования,

– гарантия высокого качества обучения при одновременной ориентации на массовое образование,

– эффективная поддержка слушателей.

Актуальность проблемы для всех стран мира очевидна. В России, традиционно большинство студентов – это молодые люди, только закончившие школу. В тех же США, по данным федерального департамента образования в США, только 43% студентов вузов находятся в возрасте моложе 25 лет. Остальная часть студентов — люди взрослые, обремененные семейными и деловыми заботами, уже осознающие необходимость в жизни выбранной учебной программы. Для них актуальны формы образования с частичным отрывом от привычных забот, либо вообще без отрыва от них. Система непрерывного образования США отвечает требованиям современной жизни, особенно, если учесть не только транспортные расходы, но и расходы на организацию всей системы очного обучения. Отсюда все повышающийся интерес к очному обучению с элементами дистанционных образовательных технологий, либо вообще к обучению полностью в дистанционном формате.

Эта проблема особенно актуальна для России с ее огромными территориями и сосредоточием научных центров в крупных городах. Проблема непрерывного образования, профессиональной переориентации актуальна сегодня, как никогда раньше, и ее значимость будет с годами возрастать по мере развития рыночной экономики в нашей стране, усиления миграции населения.

В этой связи, система ДПО, или шире, система непрерывного образования, призвана сегодня не только восполнять потребность в знаниях для людей, ограниченных в ресурсе времени на перемещения и / или возможности перемещений, но и решать специфические задачи, относящиеся к развитию творческой составляющей образования:

– усиление активной роли учащегося в собственном образовании: в постановке образовательных целей, выборе доминантных направлений, форм и темпов обучения в различных образовательных областях;

– резкое увеличение объёма доступных образовательных массивов, культурно-исторических достижений человечества, доступ к мировым культурным и научным сокровищам для людей из любого населённого пункта, имеющего телесвязь и интернет.

Российская система непрерывного образования к настоящему времени в основном уже сформировалась. Она является частью общей системы образования и представляет собой совокупность дополнительных образовательных программ, государственных образовательных стандартов, образовательных учреждений и иных организаций, реализующих дополнительные образовательные программы, общественных организаций, основной уставной целью которых является образовательная деятельность в области дополнительного образования, объединений (ассоциаций и союзов) образовательных учреждений дополнительного образования, общественных и государственно-общественных объединений, научных и методических советов, органов управления дополнительным образованием, подведомственных им предприятий, учреждений, организаций и др.

В систему непрерывного образования, курируемую только Министерством образования и науки Российской Федерации, входят свыше 1350 образовательных учреждений и структурных подразделений высших и средних специальных учебных заведений, реализующих дополнительные профессиональные программы повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов.

В этой связи, в ближайшем будущем рынок непрерывного образования в России будет характеризоваться следующими тенденциями:

– появление новых игроков, которые будут активно использовать сочетание формального и неформального образования;

– рост числа участников профессиональных сообществ по электронному обучению;

– рост рынка вебинаров и вебконференций наряду с постепенным сокращением очных форм обучения;

– в долгосрочной перспективе рынок непрерывного образования, по примеру мировых тенденций, начнет смещаться в сторону TMS (Talent Management System – система управления талантами).

Прогнозы в сфере развития образования включают ряд тенденций, по каждой из которых уже есть опыт реализации проектов. Мировое будущее непрерывного образования связывают со следующими трендами:

1. *E-learning* — электронное или цифровое обучение, т.е. обучение с использованием технологичных устройств для удаленного изучения информации, чаще всего с передачей через Интернет, но с возможностью обучаться и без подключения к сети. Уже сегодня в России в массовом порядке образовательные организации используют сочетание очных образовательных технологий с дистанционными и такое сочетание позволяет не только не потерять в качестве образования, но и в разы повысить его доступность для слушателя.

2. *Обучение через личные компьютеры, планшеты и мобильные устройства.* Современный мир диктует необходимость владение навыками получения информации через высокотехнологичные устройства, коммуникаторы,

смартфоны, планшеты. Образовательные организации обязаны адаптировать образовательный контент с учетом этого требования времени.

3. *Смешанное обучение* —- обучение с использованием традиционного очного формата вместе с интерактивными инструментами и цифровыми материалами. Такой формат на лидирующих площадках дистанционного обучения используется на долгосрочных, среднесрочных и краткосрочных программах.

Особенно ценно предоставление цифровых материалов для обязательного и дополнительного изучения в дополнение к очным лекциям, а также проведение в очном формате отдельных модулей и дисциплин, освоение которых упрощается через очное общение.

Всем этим тенденциям отвечает вводимый ФГОС СО, позволяющий сократить разрыв между школьным, до вузовским образованием и обучением в высшем учебном заведении. Так в отличие от реализуемых образовательных стандартов 2004 года, лозунгом которых была фраза «Образование для жизни», девиз ФГОС среднего образования – «Образование на протяжении всей жизни». Одаренные и просто способные дети получают возможность повысить качество своего обучения, метапредметность изучаемых дисциплин в свою очередь способствует гармоничному и всестороннему развитию личности.

Таким образом, федеральные государственные образовательные стандарты, вводимые в соответствии с федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» должны обеспечивать:

– единство образовательного пространства Российской Федерации;

– преемственность основных образовательных программ начального общего, основного общего, среднего (полного) общего, начального профессионального, среднего профессионального и высшего профессионального образования.

Переход от одной ступени образования к другой становиться плавным и незаметным. Так выбранный еще в школе проект, может быть усовершенствован и доработан на следующей этапе обучения и так далее. Теперь уже в школе учащиеся получат первые навыки составления выпускной квалификационной работы и ее защиты. В рамках реализации ФГОС СО становятся возможны и необходимы, такие формы организации учебного процесса как:

1. *Обучение в виртуальных классах* —- обучение через Интернет в онлайн связи с преподавателем и другими слушателями. Вебинары на отдельных платформах, электронные семинары в системах дистанционного обучения.

2. Массовые открытые онлайн-курсы — мировая практика, которую уже переняли в России, организации бесплатных курсов с видеолекциями от 15 минут до часа с тестовыми вопросами и возможность удаленно получить сертификаты от известных преподавателей и / или учебных заведений.

3. *«Перевернутое» обучение* — означает, что традиционный метод чтения лекций и самостоятельного выполнения заданий, заменяется на обратный. При активном использовании разных форматов предоставления учебных материалов, время преподавателя целесообразнее тратить на практические занятия и разъяснения непонятного, разбор конкретных кейсов.

4. *Асинхронное обучение* —- возможность обучаться вместе с группой, но в индивидуальном графике. При опоре на цифровые учебные материалы и информационные технологии это становится совершенно реально.

5. *Самостоятельно направляемое обучение* предполагает возможность выбора учащимися дисциплин для изучения и их объема. Так до 40% учебной программы может приходиться на изучение профильных предметов.

Список литературы

[1] Асмолов А. Г. Стратегия социокультурной модернизации образования: на пути к преодолению кризиса идентичности и построению гражданского общества [Текст] // Вопросы образования. – 2008. – № 1. – С. 65-86.

[2] Барабаш Н.С Непрерывное образование в России и мир: новые подходы, тенденции и технологии. [Текст] // Инновации и экспертиза. – 2015. - №1. –С. 14

[3] Пережовская А. Н Непрерывное образование: цели, задачи, содержание, функции, перспективы развития [Текст] // Проблемы и перспективы развития образования: материалы VI Междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2015 г.). — Пермь: Меркурий, 2015. — С. 38-41.

[4] Феденко Л. Н. Федеральные государственные образовательные стандарты общего образования: особенности и порядок введения [Текст] //Управление образованием №5, 2011. - С. 20–25

[5] Шленов Ю., Мосичева И., Шестак В. Непрерывное образование в России. [Текст] //Высшее образование в России № 3,2005, с. 36 – 50

УДК 374.1

Корешкова Л.С.

Коллективные способы обучения и методика А.Г. Ривина в работе математического профиля образовательного лагеря «Формула Единства»

Лагерь «Формула Единства» призван дать участникам возможность расширить свои знания в области одного из учебных профилей (по выбору участника), а также развить их творческие способности и навыки плодотворной работы в команде.

В основу программы заложена методика коллективного творческого воспитания (КТВ), разработанная в 50 – 60-х годах прошлого века, которая также известна под другими названиями:

– методика коллективных творческих дел,

– коммунарская методика,

– методика И.П. Иванова,

– педагогика общей заботы,

– педагогика социального творчества.

Подробнее о методике можно прочитать на сайте ***kommunarstvo.ru.*** Её основные принципы — забота об улучшении окружающей жизни, отношения товарищества и коллективная творческая деятельность. Создатель этой методики, академик Игорь Петрович Иванов, реализовал её в работе «Коммуны юных фрунзенцев» (1959–1968), а затем — в деятельности студенческого коллектива «Коммуны имени А.С. Макаренко» (1963–1991).

Главную ценность этого педагогического направления мы видим в том, что это наиболее последовательная и сильная (из известных нам) попытка погрузить подростков и взрослых в мир подлинно человеческих отношений — отношений людей, какими они в идеале должны быть. То есть отношений, основанных на искренности, ответственности, доверии, внимании и уважении к каждому, заботе друг о друге и о мире вокруг. Отношений, в которых нет места отчуждению, использованию друг друга для решения внешних, посторонних задач. Тем самым, как сказал М.М. Чекмарёв (участник коммуны имени Макаренко), «создаются элементы общества гуманизма в рамках потребительского общества».

Факторы, благодаря которым такой мир возникает и живёт, просты и широко известны по отдельности; уникальным для методики И.П. Иванова «сильнодействующим средством» является их сочетание. Вот эти факторы:

1. Интенсивное коллективное творчество: работа над задачами, требующими полной вовлечённости каждого члена группы, координации между участниками, высокой самоотдачи и «настройки друг на друга» в условиях сжатого времени. Это и ведёт к возникновению неотчуждённых отношений между людьми и актуализации необходимых для этого человеческих качеств.

2. Коллективное планирование, совместная реализация планов и анализ сделанного — коллективная рефлексия полученного опыта.

3. Неформальность. Критически важно, что коммунарские коллективы

возникают и живут не по заказу каких-либо вышестоящих структур, не по требованиям рынка, а по велению души организаторов и, в конечном счёте, всех участников.

4. Преемственность. Очень ценно, когда в возникающем коллективе есть в достаточном количестве люди с прежним опытом подобных отношений — носители традиций и «атмосферы».

5. Также очень важен личностный фактор. Часто подобные коллективы складываются вокруг лидера и распадаются с его уходом. Однако (об этом подробно пишет В.И. Ланцберг в статье «Педагогическая мифология») методика КТВ работает не только в руках редких харизматичных лидеров: она работает в любых добрых и чистых руках. Личностный момент действительно важен, но он заключается не в том, что надо быть личностью с какими-то особыми талантами, а в том, что надо просто быть самим собой и вкладывать себя в создаваемые отношения (методика не работает «механически»).

Очевидно, что при таких условиях работы в группе меняется и подход к профильному обучению. Мы понимаем и принимаем тот факт, что ленинградские математические кружки — один из лучших способов обучения олимпиадной математике. Поэтому мы не отказываемся от ликбезов и подборок задач в деятельности математического профиля лагеря. Но, помимо этого, нам хочется сформировать в детях умение работать в команде и не только над решением поставленных сверху задач. Поэтому за несколько лет существования нашего лагеря, а начался он как математический, позднее придя к идее многопрофильности, мы пришли к необходимости включения нестандартных способов обучения. Давайте остановимся на них подробнее.

Итак, давайте представим себе нашу группу. В ней обычно два преподавателя, около 12-14 ребят приблизительно одного возраста и одного уровня подготовки, 72 астрономических часа за смену. Работу профиля предваряет устная олимпиада, включающая в себя и теоретические вопросы, которая позволяет определить необходимый минимум тем, требующий разбора.

Современная олимпиадная математика помимо личных первенств предлагает участие и в командных соревнованиях. Помимо традиционных математических боев сейчас в России проводятся и турниры по математическим играм. Многие из них довольно известны — это и абака, и карусель, и домино. Но что будет, если предложить участникам профиля самостоятельно придумать правила игры и подобрать к ней задачи? Разумеется, этот трюк сработает только с высокоуровневыми ребятами, которые уже готовы к самостоятельной работе. Как показывает наш опыт, из четырех команд по 3-4 человека 9-10 класса, три справляются с задачей на отлично. При этом, мы учим детей сразу нескольким важным вещам:

1. Умение подбирать задачи. Разумеется, для того, чтобы предложить свою игру другим командам, нужно знать решение задач и понимать, какие из выбранных задач сложнее, какие легче.

2. Умение составлять правила игры. Это, скорее, творческое занятие, нежели техническое, но то, как вольно обращаются дети со знакомыми играми ставит преподавателей иногда в тупик. На сменах нашими ребятами были разработаны и математический покер, и шахматы, и морской бой.

3. Умение проводить и организовывать игру. Это полезное качество, ко-

торое обязательно пригодится в будущем.

Таким образом, одно большое дело задействует и разные цели, и разных людей. Приведу пример игры, разработанной на зимней смене нашими ребятами под руководством Дмитрия Кривопальцева, участника нашего лагеря и выпускника проекта.

Игра «Лабиринт».

Участники игры делятся на команды по 3-4 человека. У каждой команды на руках пустая карта лабиринта. Команда знает лишь точку входа. К каждой команде прикреплятся ведущий. У него на руках полная карта лабиринта. В некоторых местах (как правило после развилок) стоят задачи. Если задача решена верно, то открывается проход дальше и начисляется 1 очко. За нахождение тупика начисляется 2 очка. При определении победителя наибольший приоритет имеет нахождение выхода, а только потом количество очков. За 3 очка можно взять подсказку. За 5 пропустить задачу. Одновременно можно брать не более 3-х задач (это связано с тем, что по лабиринту можно перемещаться в любое время).

Это одна из первых групповых методик, которую мы стали практиковать в работе профиля. Заметно, что дети более мотивированы на создание собственного результата, нежели чем на участие в играх, которые предлагаются руководителем профиля. Вообще, общая идея работы лагеря не только в профильной, но и в творческой части — это возможность дать детям быть не объектом, а субъектом педагогической работы.

Помимо игровой практики, групповая работа применяется и в теоретико-практических методах обучения.

«Среди педагогов первой трети 20 века, искавших подходы к изменению сложившейся системы образования, имя Ривина занимает особое место. К сожалению, оно гораздо менее других известно педагогической общественности. Метод, предложенный Ривиным, реально позволяет "взломать многолетние оковы классно-урочной системы"и выстроить учебный процесс на совершенно иных основаниях. Разноуровневое и разновозрастное обучение, индивидуальный темп изучения материала, воспитание в процессе обучения самостоятельного, ответственного, творческого ученика, одновременное изучение разных предметов по выбору, обучение на разных языках ... стали возможны с применением на практике подхода к организации обучения, предложенного Ривиным.

К сожалению, сохранилось чрезвычайно мало сведений о самом Александре Григорьевиче Ривине. Известно, в частности, что в 1918 году он уже учительствовал на Украине и умер в доме для престарелых во время Великой Отечественной войны. Публикаций текстов Ривина (кроме одной известной) практически нет. О развитии метода Ривина в двадцатые годы сохранились лишь воспоминания его учеников, немногочисленные статьи коллег и отклики современников. В дальнейшем мы и будем на них опираться.» — из статьи Михаила Эпштейна, «Метод Ривина, история развития идеи и практики применения»

Очевидно, что задачи, которые решал Ривин в свое время и наши задачи явным образом различаются. Мы не ставим перед собой цели обучить неграмотных ребят письму и счету. Напротив, мы ставим задачу поднять уровень математической грамотности со среднего школьного уровня до уровня хорошего олимпиадника. Поэтому идеи Александра Григорьевича в чистом виде нами не применяются. Скорее, наш метод — это результат объединения метода Ривина, коллективного метода обучения и метода взаимопередачи тем.

Преподаватели профиля заранее подготавливают материал, так называемые карточки, по разным темам. Например, «Арифметико-геометрическая прогрессия», «Числа Каталана», «Н-мерный куб», «Экскурсия в теорию перколяций». Карточки должны быть разного уровня, чтобы материал был интересен всем участникам рабочей группы. Количество карточек должно совпадать с количеством пар в группе. Каждая карточка устроена следующим образом:

– Небольшая теоретическая справка по теме. Содержит определения, формулировки теорем, доказательства их, при необходимости.

– Решения некоторых задач по теме. Примеры должны быть качественно разобраны, чтобы у ребят была возможность самостоятельно разобраться с их решениями.

– Набор задач для самостоятельного решения.

Приведу в пример отрывки текста карточки по теме «теория сравнений».

Карточка «теория сравнений»

Определение сравнения. Если a и b — два целых числа и их разность $a-b$ делится на число m, мы выражаем это записью $a \equiv b(mod\, m)$, которая читается так: a сравнимо с b по модулю m. Делитель m мы предполагаем положительным; он называется модулем сравнения. Наше высказывание означает, что $a - b = m \cdot k$, где k — целое число.

Примеры:

1) $23 \equiv 8(mod\, 5)$, так как $23 - 8 = 15 = 5 \cdot 3$;
2) $47 \equiv 11(mod\, 9)$, так как $47 - 11 = 36 = 9 \cdot 4$;
3) $-11 \equiv 5(mod\, 8)$, так как $-11 - 5 = -16 = 8 \cdot (-2)$;
4) $81 \equiv 0(mod\, 27)$, так как $81 - 0 = 81 = 27 \cdot 3$.

Алгебра сравнений:

Из алгебры мы помним, что уравнения можно складывать, вычитать, умножать. Точно такие же правила справедливы для сравнений. Предположим, что мы имеем сравнения

$$a \equiv b(mod\, m), \quad c \equiv d\ (mod\, m).$$

По определению, это означает, что $a = b + mk$, $c = d + ml$, где k и l — целые числа. Сложим эти сравнения и получим

$$a + c = b + d + m \cdot (k + l),$$

что можем записать как

$$a + c \equiv b + d(mod\, m);$$

другими словами, два сравнения можно складывать.

Таким же образом можно показать, что одно сравнения можно вычитать

$$a - c \equiv b - d (mod\, m).$$

Пример.

$11 \equiv -5(mod\, 8)$ и $7 \equiv -9(mod\, 8)$.
Складывая их, получаем
$18 \equiv -14(mod\, 8)$,
а вычитая,
$4 \equiv 4(mod\, 8)$.
Оба эти сравнения справедливы.

Можно также перемножить два сравнения

$$ac = bd + m \cdot (kd + bl + mkl),$$

таким образом,

$$ac \equiv bd(mod\, m).$$

Пример.

Когда два сравнения из прошлого примера перемножены, получается
$77 \equiv 45(mod\, 8)$.

Сравнение $a \equiv b(mod\, m)$ может быть умножено на любое целое число c, при этом получаем $ac \equiv bc(mod\, m)$. Это можно рассматривать как частный случай умножения сравнений при $c = d$. Его можно также рассматривать как прямое следствие из определения сравнения.

В дальнейшем примеры усложняются и в конце карточка содержит набор задач, предлагаемых для решения.

В начале работы вся группа разбивается на пары. У каждой пары две одинаковые карточки. Каждый этап, кроме завершающего, длится одинаковое время. Тайминг выбирается в зависимости от возможностей группы и сложности карточек. Предположим, что у нас есть 50 минут на каждый этап. Что происходит в течение первого этапа? Каждая пара разбирается со своей карточкой. Читает теорию, смотрит на примеры, старается решить задачи. После первого этапа, пары меняются. При этом, в каждой новой паре теперь две карточки. Каждая из которых знакома лишь одному участнику. Его задача — объяснить эту карточку своему напарнику и выслушать карточку партнера. После чего в паре происходит решение задач уже с двух карточек, по разным темам. Если судить из нашего опыта, в этот момент удобнее удлинить длительность этапа на 10-15 минут, в зависимости от возможностей группы. После чего, пары снова перемешиваются, причем партнеры меняются карточками! А значит, в новой паре на третьем этапе будут два человека, которые видели свои карточки лишь в течение предыдущего этапа. В чем техническая сложность такого метода? Во-первых, нужно правильно организовать пространство для работы — у каждой пары должен быть свой стол, у преподавателя — возможность наблюдать за работой каждой из пар, при необходимости, отвечая на вопросы. Опять же, из моего опыта, удобно иметь под рукой ноутбук с доступом в интернет, чтобы ребята могли самостоятельно найти необходимую им информацию. Правда, предпочтительнее, иметь не ноутбук, а учебники и методички, подобранные по темам. Это сложнее реализуемо, но работа с книгами гораздо более сложна, но и более продуктивна, нежели чем работа с поисковыми системами. Во-вторых, нужно правильно организовать сменяемость пар. Мы решили это с помощью небольшой программы, которая генерирует последовательность смен пар. В противном случае, ест возможность сбиться с обхода полного графа, что приведет к повторному изучению тем в некоторых парах.

В финале, когда каждый из участников группы прошел по всем темам, устраивается «час разбора» — выбирается спикер из ребят, который в формате небольшой лекции рассказывает о теме, которой была посвящена выбранная им карточка. Если желающего на роль спикера не находится, эту роль должен взять преподаватель. Возможно, это свидетельствует о сложности выбранного материала для карточки. После доклада возможно обсуждение вопросов. Если тема показалась ребятам интересной, то можно углубиться в ее изучение уже стандартным образом – на ликбезе или с помощью подборки задач для индивидуального решения.

Преподаватели математического профиля «Формулы Единства» уверены, что за коллективными способами обучения большое будущее. Это позволяет, во-первых, перестать видеть в учениках объекты педагогики. Во-вторых, это приближает ребят ко взрослому взаимодействию в командах, учит их взаимопомощи и совместному труду. В-третьих, это повышает уровень мотивации. Ведь при таком подходе к изучению у обучающихся нет за спиной учителя со стопкой проверочных и самостоятельных, а есть лишь друзья, которым требуется помощь в изучении материала.

Список литературы

[1] http://www.formulo.org/ru/что-такое-фе/методика/

[2] http://altruism.ru/sengine.cgi/5/7/8/4/8

УДК 372.851

Кузьмина Е. Ю.

Организация внеклассной работы по математике

Задача учителя не в том, чтобы дать ученикам максимум знаний, а в том,чтобы привить им интерес к самостоятельному поиску знаний, научить добывать знания и пользоваться ими.

Константин Кушнер

Современная жизнь предъявляет к человеку новые требования. Общество нуждается в людях творчески мыслящих, любознательных, активных, умеющих принимать нестандартные решения и брать ответственность за их принятия, а также умеющих осуществлять жизненный выбор.

В последние десятилетия, при переходе к постиндустриальному обществу логика развития производственной сферы привела к осознанию того, что истинное совершенствование жизни связано не столько с внешней образованностью человека, усвоением им той или иной системы знаний и умений, сколько с развитием его ума и способностей, системы ценностей и мотивационных установок. Сегодня - это не просто вопрос успешности человека в жизни, что, естественно, очень важно. Но это еще и вопрос безопасности и конкурентоспособности страны, условие ее расцвета и мирного развития.

Внеклассные занятия с учащимися, проявляющими к изучению математики повышенный интерес и способности, отвечает следующим основным целям:

– пробуждение и развитие устойчивого интереса учащихся к математике и ее приложениям;

– расширение и углубление знаний учащихся по программному материалу;

– развитие математических способностей, мышления, культуры учащихся;

– развитие у учащихся умения самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой;

– привитие учащимся навыков научно-исследовательского характера;

– расширение и углубление представлений учащихся о практическом значении и культурно-исторической ценности математики, о роли ведущих ученых-математиков в развитии мировой науки.

Наиболее распространенные формы внеклассной работы с учащимися по математике:

– система спецкурсов, кружков, факультативов;

– олимпиады по математике;

– математические соревнования, школьная математическая печать, математические вечера, недели (декады) математики;

– математические экскурсии;

– внеклассное чтение по математике;

– школьные математические конференции;

– математические общества учащихся.

В гимназии № 446 создан математический кружок, который называется «Занимательная логика».

Изначально кружок был создан для подготовки наиболее способных учащихся к математическим олимпиадам. Но посещать его изъявили желание дети с различным уровнем подготовки. Для организации занятий использовалось много литературы по внеурочной работе, затем, мы стали сами придумывать задачи. Выяснилось, что детям больше всего нравятся детективные задач. В поисках новых интересных задач мы нашли сайт http://varnike.ru/index.html

На страницах этого сайта предлагается подборка логических задач с «детективным» уклоном, хорошо известных представителям старшего поколения и любимых ими. С этими задачами читатели знакомились на страницах журналов и газет «Наука и жизнь», «Щит», «Тасвир», «За рубежом» др. в 60–70 годы прошлого века.

Инспектор Варнике, детектив Людовик, майор Аниськин, инспектор Вернер, доктор Меридит, доктор Квик, инспектор Борг и сержант Блюм, инспектор Винтерс, Лерой Браун и, конечно, Шерлок Холмс предлагают решить огромное количество детективных задач.

С тех пор практически каждое занятие начинается с решения одной из детективных задач. Использование сайта очень удобно, т.к. видно какие задачи уже решены, и каждый раз мы можем пуститься в новое детективное путешествие, причем с одинаковым азартом в него вовлекаются как «отличники», так и «троечники».

В последнее время популярность приобретает развлекательная активность, приятная уму в большей степени, чем телу. В Санкт-Петербурге появились разнообразные реалити-квесты. Несколько занятий мы сделали выездными и прошли некоторые из них. Квест (от англ. «Quest – поиск») – это интерактивная игра с сюжетной линией, которая заключается в решении различных головоломок и логических заданий. Долгое время популярным развлечением молодежи были онлайн-квесты, сейчас все больший интерес вызывают так называемые живые квесты в реальности.

Квест – это, прежде всего, отличная тренировка логики, памяти и сообразительности. Игровые квесты учат импровизации, адаптации к быстрым изменениям среды (очень актуально сейчас, почему и возникла мода на квесты), моментальному принятию решений и прозорливости. Будучи активной игрой, квест заставляет двигаться и заряжает доброй дозой эндорфинов.

Точного определения слова квест в реальности нет, но его суть вот в чем: для погружения в сюжет игроков запирают в помещении, где спрятаны различные загадки, подсказки и предметы, цель – пройти определенную миссию, найти спрятанные предметы и подсказки, выполнить задания, разгадать загадки и головоломки и выбраться из помещения за отведенное время. Нередко quest игры проходят с участием профессиональных актеров. Именно квест позволяет развить и натренировать логику и воображение в легкой игровой форме.

Занятия кружка проходят по субботам, этот день выходной для семиклассников, но ребята с удовольствием приходят и увлеченно решают задачи. Конечно, кроме детективных задач и квестов мы используем и другие виды деятельности (конференции, мат.бои, различные игры, и т.д.), но направления, описанные в этой статье для нас новы, поэтому хотелось поделиться данным материалом с коллегами.

Любой ученик способен к творческой деятельности, поэтому учителю необходимо уметь организовывать такую деятельность, которая побуждала бы каждого школьника к раскрытию своих творческих способностей, активности и самостоятельной деятельности.

Основными информационными источниками при организации внеклассной работы по математике могут быть журналы: «Внешкольник», «Математика в школе», «Квант», «Народное образование», «Инновации в образовании», «Новые знания», «Педагогика», «Развитие личности», «Специалист», «Учитель», «Школа», «Школьные технологии», «Элитное образование»; газета «Математика» (приложение к газете «Первое сентября») и электронные ресурсы:

http://www.1september.ru/ (сайт ИД «1 сентября»)

http://varnike.ru/index.html

http://spb.mir-kvestov.ru

Список литературы

[1] Альхова З.Н. Внеклассная работа по математике / З.Н. Альхова, А.В. Макеева. – Саратов: Лицей, 2003.

[2] Балк М.Б. Математика после уроков / М.Б. Балк, Г.Д. Балк. – М.: Просвещение, 1971.

[3] Внеклассная работа по математике в средней школе / под ред. В.В. Сухорукова. – Балашов, 1994.

[4] Дополнительное образование детей. – М.: ВЛАДОС, 2000.

[5] Дробышев Ю.А. Олимпиады по математике / Ю.А. Дробышев. – М.: Первое сентября, 2003.

[6] Дышинский Е.А. Игротека математического кружка / Е.А. Дышинский. – М.: Просвещение, 1972.

[7] Казакова Е.И. Проектирование образовательных программ. – СПб., 1994.

[8] Ключ к успеху: Авторские программы педагогов дополнительного образования. – М., 2006.

[9] Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики / В.Г. Коваленко. – М.: Просвещение, 1990.

[10] Математика: Интеллектуальные марафоны, турниры, бои: 5–11 классы. – М.: Первое сентября, 2003.

[11] Мерлина, Н.И. Дополнительное математическое образование школьников и современная школа. – М.: Гелиос АРВ, 2000.

[12] Организация внеклассной работы по математике в средней школе / под ред. В.Л. Пестеревой. – Пермь, 2010. – 240 с.

[13] Программное обеспечение учреждений дополнительного образования. – СПб., 1995.

[14] Предметные недели в школе. Математика / сост. Л.В. Гончарова. – Волгоград: Учитель, 2002.

[15] Фарков А.В. Внеклассная работа по математике. 5–11 классы / А.В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2009.

[16] Фарков А.В. Математические кружки в школе. 5–8 классы / А.В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2005.

[17] Фарков А.В. Школьные олимпиады / А.В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Содержание

Пленарные доклады

Секция 1. Общие вопросы преподавания математики в средних учебных заведениях

Секция 2. Преподавание математики в старших классах и подготовка к государственным экзаменам различных уровней

Секция 3. Дополнительное внешкольное образование и самообразование учащихся