

3. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение.- 1975.- т. 2.- С. 83 – 203.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - “Наука”, 1974.
5. Gao Hua, Brown M.W., Miller K.J. Mixed-mode fatigue thresholds // Fatigue of Engng. Materials and Structures. 1982, vol. 5, no. 1, p. 1 – 17.
6. Buzzard R.J., Gross B., Srawley J.E. Mode II fatigue crack growth specimen development // Fracture Mechanics, 1984, vol. 17, p. 329– 346.

ТОНКИЕ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМИ НИТЯМИ

А.Л.Смирнов, П.Е. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет

1. Введение.

Рассматривается тонкая упругая анизотропная оболочка из композитного материала. Оболочка состоит из упругой изотропной матрицы и N систем упругих волокон, расположенных параллельно срединной поверхности оболочки. С использованием гипотезы Кирхгофа-Лява в [1] были получены уравнения состояния для анизотропной оболочки в рамках двумерной модели. При этом предполагалось, что волокна являются линейно упругими, сопротивляющимися как сжимающим, так и растягивающим усилиям. В настоящей работе поведение волокон в случае сжатия считается существенно нелинейным, а именно, предполагается, что жесткость волокон становится пренебрежимо малой при достаточно больших усилиях сжатия. При этих предположениях получаются существенно нелинейные уравнения состояния, связывающие внутренние усилия и моменты с деформациями срединной поверхности оболочки. При этом оказывается, что как усилия, так и моменты зависят от обоих видов деформации срединной поверхности — тангенциальных и изгибных. В качестве примера рассмотрена цилиндрическая оболочка, армированная нитями, идущими по параллелям, и находящаяся под действием внутреннего давления.

2. Деформации и напряжения в композитной оболочке.

На срединной поверхности вводятся криволинейные координаты α_1 и α_2 , совпадающие с линиями кривизны. Координата z направлена по нормали к поверхности. Предполагается, что оболочка подкреплена N системами волокон, наклоненными под углами θ_k к оси α_1 , $k = 1, 2, \dots, N$. Напряжения в оболочке σ_{ij} представляют собой сумму напряжений в матрице $\sigma_{ij}^{(0)}$ и осредненных напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$, связанных с растяжением-сжатием волокон

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^{(k)}. \quad (2.1)$$

Согласно гипотезам Кирхгофа напряжения $\sigma_{33} = 0$, а напряжения σ_{i3} находятся из уравнений равновесия. Запишем соотношения между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} при $i, j = 1, 2$.

Для матрицы

$$\sigma_{11}^{(0)} = F_0(\varepsilon_{11} + \nu_0 \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12}^{(0)} = \frac{1 - \nu_0}{2} F_0 \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = F_0(\varepsilon_{22} + \nu_0 \varepsilon_{11}), \quad (2.2)$$

где $F_0 = E_0 \delta_0 / (1 - \nu_0^2)$, E_0 — модуль Юнга и ν_0 — коэффициент Пуассона для матрицы. Коэффициент $\delta_0 < 1$ определяет относительный объем оболочки занятой матрицей. Случай $\delta_0 = 1$ соответствует неподкрепленной оболочке.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа [2], деформации ε_{ij} являются линейными функциями координаты z

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \kappa_1 z, \quad \varepsilon_{12} = \omega + 2\tau z, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \kappa_2 z. \quad (2.3)$$

Здесь ε_1 , ω и ε_2 — деформации растяжения-сдвига, а κ_1 , τ и κ_2 — деформации изгиба-кручения срединной поверхности оболочки.

Рассмотрим одну систему волокон, наклоненных под углом θ_k к оси α_1 . Находим деформации $\varepsilon^{(k)}$ в волокнах

$$\varepsilon^{(k)} = \varepsilon_{11} c_k^2 + \varepsilon_{12} c_k s_k + \varepsilon_{22} s_k^2, \quad c_k = \cos \theta_k, \quad s_k = \sin \theta_k. \quad (2.4)$$

где деформации ε_{ij} те же, что и в равенствах (2.2) и (2.3).

Если волокно растягивается, то согласно закону Гука продольная сила, действующая в волокне, равна

$$P^{(k)} = E_k S_k \varepsilon^{(k)}, \quad (2.5)$$

где E_k — модуль Юнга, а S_k — площадь поперечного сечения волокна. Если волокно сжато в продольном направлении, то мы будем использовать соотношение более общего вида, чем (2.5). А именно, вводится следующая модель волокна: если $\varepsilon^{(k)} \geq -\varepsilon_0$, то выполняется равенство (2.5), в противном случае, то есть, если $\varepsilon^{(k)} < -\varepsilon_0$, то полагается $P^{(k)} = 0$. Пороговая константа ε_0 обсуждается в п. 3.

Согласно этой модели осредненные напряжения в направлении $\theta^{(k)}$ для k -ой системы волокон определяются формулами

$$\sigma^{(k)} = \begin{cases} F_k \varepsilon^{(k)} & \text{для } \varepsilon^{(k)} \geq -\varepsilon_0, \\ 0 & \text{для } \varepsilon^{(k)} < -\varepsilon_0, \end{cases} \quad \varepsilon_0 \geq 0, \quad F_k = E_k \delta_k. \quad (2.6)$$

где δ_k относительный объем, заполненный k -ой системой волокон. Очевидно, что $\sum_{k=0}^N \delta_k = 1$. Здесь и далее пренебрегаем эффектом Пуассона, заключающемся в том, что поперечное сечение волокна изменяется при растяжении. Напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$ в соотношении (2.1) таковы:

$$\sigma_{11}^{(k)} = c_k^2 \sigma^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = c_k s_k \sigma^{(k)}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = s_k^2 \sigma^{(k)}. \quad (2.7)$$

3. О пороговой константе ε_0 .

Если $\varepsilon_0 = 0$, то жесткость волокон при сжатии становится равной нулю. Неравенство $\varepsilon_0 > 0$ может быть объяснено следующим образом. Во-первых, волокна изначально могут быть напряжены. Во-вторых, если рассматривать волокно как балку, расположенную на упругом основании, которая находится под действием сжимающей нагрузки, то прогиб балки, $w(s)$, описывается следующим уравнением:

$$D \frac{d^4 w}{ds^4} + P \frac{d^2 w}{ds^2} + cw = 0, \quad (3.1)$$

где s — продольная координата, D — изгибная жесткость, P — сжимающая сила, а c — жесткость основания (матрицы). Уравнение (3.1) имеет ненулевое ограниченное решение $w(s) = w_0 \sin(\lambda s)$ при

$$P(\lambda) = D\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2}. \quad (3.2)$$

Тогда минимальное значение P и соответствующее значение порогового напряжения ε_0 таковы

$$P_{min} = \min_{\lambda} P(\lambda) = 2\sqrt{Dc}, \quad \varepsilon_0 = \frac{2\sqrt{Dc}}{E_k S_k}. \quad (3.3)$$

4. Уравнения состояния.

Пренебрегая малыми величинами h/R_1 и h/R_2 по сравнению с 1, где h — толщина оболочки, а R_i — главные радиусы кривизны срединной поверхности, получаем выражения для усилий T_1 , T_2 и S и моментов M_1 , M_2 и H в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dz, & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dz, & S &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dz, \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z dz, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} z dz, & H &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z dz. \end{aligned} \quad (4.1)$$

где напряжения σ_{ij} вычисляются по формулам (2.2), (2.6), (2.7).

Если для всех $z \in [-h/2, h/2]$ и при всех $k = 1, 2, \dots, N$ выполняется неравенство $\varepsilon^{(k)} \geq \varepsilon_0$, то усилия и моменты линейно зависят от деформаций срединной поверхности ε_1 , ε_2 , ω , κ_1 , κ_2 и τ . Полагая, что оболочка симметрична относительно срединной поверхности, получаем те же уравнения состояния, что и в [1]

$$T_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} \varepsilon_j, \quad M_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} \kappa_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.2)$$

где для краткости записи принято, что $\varepsilon_3 = \omega$, $\kappa_3 = 2\tau$, $T_3 = S$, $M_3 = H$. Коэффициенты K_{ij} и D_{ij} определены в [1] и, например, K_{11} и D_{11} задаются формулами

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ D_{11} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(F_0 + \sum_{k=1}^N F_k c_k^4 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz. \quad (4.3)$$

Если неравенство $\varepsilon^{(k)} < -\varepsilon_0$ выполнено только для некоторых значений k и/или z , то соотношения (4.3) неверны, и зависимость усилий и моментов от деформаций срединной поверхности становится нелинейной. В этом случае более удобным становится анализ влияния каждой из систем волокон отдельно. А именно, представим усилия и моменты в виде

$$T_i = T_i^{(0)} + \sum_{k=1}^N T_i^{(k)}, \quad M_i = M_i^{(0)} + \sum_{k=1}^N M_i^{(k)} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Здесь величины $T_i^{(0)}$ и $M_i^{(0)}$ линейно зависят от деформаций срединной поверхности и могут быть вычислены по формулам (4.2), (4.3) при $F_k = 0$ для $k \neq 0$. Для остальных величин в (4.4) справедливы равенства

$$T_i^{(k)} = C_i^{(k)} \delta_k \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{(k)}(e^{(k)}) dz, \quad M_i^{(k)} = C_i^{(k)} \delta_k \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{(k)}(e^{(k)}) z dz. \quad (4.5)$$

Здесь $C_1^{(k)} = c_k^2$, $C_2^{(k)} = s_k^2$, $C_3^{(k)} = c_k s_k$ и в силу равенств (2.3) и (2.4) деформации $\varepsilon^{(k)}(z)$ являются линейными функциями от z : $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon_m^{(k)} + \kappa^{(k)} z$, где

$$\varepsilon_m^{(k)} = \sum_{i=1}^3 C_i^{(k)} \varepsilon_i, \quad \kappa^{(k)} = \sum_{i=1}^3 C_i^{(k)} \kappa_i, \quad (4.6)$$

а функции $\sigma^{(k)}(e^{(k)})$ определяются равенством (2.7). Здесь $\varepsilon_m^{(k)}$ — деформации растяжения-сжатия в направлении θ_k . При дальнейшем рассмотрении мы опускаем индекс k .

Пусть $\varepsilon_b = |\kappa|h/2$ — максимальное значение второго слагаемого в выражении для $\varepsilon^{(k)}$, соответствующего деформациям изгиба. Возможны следующие три случая.

Случай 1. Если $\varepsilon_m \geq \varepsilon_b - \varepsilon_0$, то волокна k -ой системы растянуты при всех значениях z и мы приходим к равенствам (4.3), полученным в [1]. Здесь деформации ε_j и κ_j действуют независимо, а именно $T_j^{(k)} = T_j(k)(\varepsilon_i)$ и $M_j^{(k)} = M_j(k)(\kappa_i)$.

Случай 2. Если $\varepsilon_m \leq -\varepsilon_b - \varepsilon_0$, то из равенств (4.8) получаем $F_j^{(k)} = M_j^{(k)} = 0$, и в этом случае волокна k -ой системы не сопротивляются сжатию.

Случай 3. В промежуточном случае $|\varepsilon_0 + \varepsilon_m| < \varepsilon_b$ волокна сопротивляются сжатию только в части объема оболочки, и равенства (4.5) для оболочек с симметричным поперечным сечением приводят к формулам, согласно которым как усилия $T_i^{(k)}$, так и моменты $M_j^{(k)}$ зависят и от деформаций растяжения-сдвига ε_j и от деформаций изгиба-кручения κ_j .

Если волокна равномерно распределены по толщине оболочки, то, вычисляя интегралы в (4.5) получаем

$$\begin{aligned} T_j^{(k)} &= C_j F_k \delta_k \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_b + \varepsilon_0}{2|k|} (\varepsilon_m + \varepsilon_b - \varepsilon_0), \\ M_j^{(k)} &= C_j F_k \delta_k \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_b + \varepsilon_0}{6k|k|} (2\varepsilon_b^2 - \varepsilon_m^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_m \varepsilon_b + \varepsilon_m \varepsilon_0 - 2\varepsilon_b \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти равенства справедливы как для $\kappa > 0$ так и для $\kappa < 0$. Соотношения (4.7) не используются при $\kappa = 0$, поскольку для малых $|k|$ имеют место только случаи 1 или 2.

5. Пример.

В качестве примера рассмотрим осесимметричную деформацию круговой цилиндрической оболочки радиуса R под действием равномерного внутреннего давления q . Оболочка подкреплена системой кольцевых нитей, равномерно распределенных по толщине оболочки. Вдали от краев оболочки нити растянуты и воспринимают внутреннее давление. В окрестности краев имеют место изгибные деформации, в результате чего в некоторых областях нити сжаты, и для вычисления усилия T_2 и изгибающего момента M_1 можно воспользоваться формулами (4.7). Далее считаем $\varepsilon_0 = 0$.

В окрестности жестко заделанного края $s = 0$ прогиб $w(s)$ является решением краевой задачи для уравнения $d^2 M_1 / ds^2 = T_2 / R$ или

$$(g_1(\eta)w''')'' + g_2(\eta)w = 1, \quad w(0) = w'(0) = 0, \quad w(\infty) = 1, \quad (5.1)$$

где безразмерные переменные связаны с переменными (s индексом 1) по формулам

$$\begin{aligned} s &= \frac{\mu s^1}{R}, \quad w = \frac{E_0 \delta_0 (1 + \gamma) w^1}{q R^2}, \quad \mu^4 = \frac{h^2 (1 + \nu_1 \gamma)}{12 R^2 \nu_1 (1 + \gamma)}, \quad \gamma = \frac{E_1 \delta_1}{E_0 \delta_0} \\ g_1(\eta) &= \frac{1 + \nu_1 \gamma f_1(\eta)}{1 + \nu_1 \gamma}, \quad g_2(\eta) = \frac{1 + \gamma f_2(\eta)}{1 + \gamma}, \quad \nu_1 = 1 - \nu_0^2. \end{aligned}$$

При $\eta \geq 1$ нити растянуты при всех z и $g_j(\eta) = f_j(\eta) \equiv 1$, а при $\eta < 1$ в силу (4.7)

$$f_1(\eta) = \frac{(1+\eta)(2+\eta-\eta^2)}{4}, \quad f_2(\eta) = \frac{(1+\eta)^2}{4\eta}, \quad \eta = \frac{2\mu^2 R w(s)}{h|w''(s)|}.$$

Нелинейную краевую задачу (5.1) интегрируем численно методом стрельки при следующих значениях параметров: $R/h = 100$, $\nu = 0.45$. Параметру γ , имеющему смысл отношения жесткости на растяжение волокон к жесткости матрицы, будем придавать различные значения.

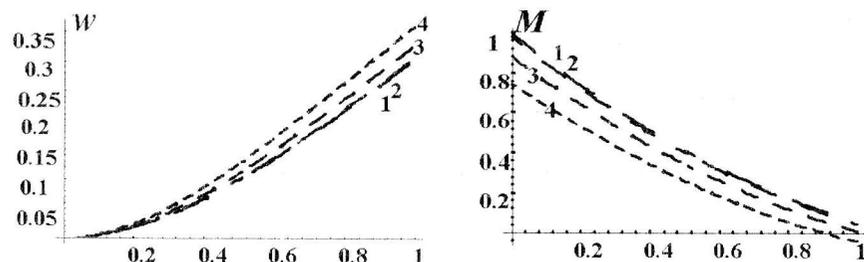


Рис. 1: 1: $\gamma = 0$ (изотропная оболочка); 2: $\gamma = 0.1$; 3: $\gamma = 1$; 4: $\gamma = 10$

На рис. 1 приведены графики безразмерных прогиба $w(s)$ и изгибающего момента $M_1(s)$ в окрестности края $s = 0$ для четырех значений γ . Краевой эффект для изотропной оболочки ($\gamma = 0$) рассмотрен в [3]. Для $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.1$ графики практически совпадают. При $s \rightarrow \infty$ для прогиба $w \rightarrow 1$ и для момента $M_1 \rightarrow 0$. Участок оболочки, на котором имеются сжатые волокна, простирается от края $s = 0$ до $s = 0.81$, $s = 0.76$ и $s = 0.69$ для $\gamma = 0.1$, $\gamma = 1$ и $\gamma = 10$ соответственно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01.01.00327.

Список литературы.

1. E.M. Haseganu, A.L. Smirnov and P.E. Tovstik. Buckling of Thin Anisotropic Shells // *The Transactions of the CSME*, 24(1B), pp.169-178, (2000).
2. В.В.Новожилов. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
3. Tovstik P.E., Smirnov A.L. Asymptotic Methods in the Buckling Theory of Elastic Shells – World Scientific Publishing Co. Ltd., 2001.

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОШИ-РИМАНА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ

А.Ф.Улитко

Киевский национальный университет имени Тараса
Шевченко

При решении осесимметричных задач теории упругости и уравнений Стокса для несжимаемой вязкой жидкости внутри или вне сферической линзы важным этапом в построении точных аналитических решений указанных задач являются формулы решения сопряженных уравнений типа Коши-Римана для сферической линзы. В цилиндрических координатах сопряженные уравнения записываются по формулам

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\omega) = -\frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (1)$$

Переходя к тороидальным координатам ξ, η по формулам

$$r = c \frac{\text{sh } \xi}{\text{ch } \xi - \cos \eta}, \quad z = c \frac{\sin \eta}{\text{ch } \xi - \cos \eta}, \quad (2)$$

$$(0 \leq \xi < \infty, \quad -\pi < \eta < \pi)$$

уравнения (1) представим в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi}(r\omega) = -\frac{\partial \theta}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}(r\omega) = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \quad (3)$$

В тороидальных координатах сферическая линза представляется как тело, образованное пересечением сферических сегментов различного радиуса по окружности радиуса $r = c$. Причем, сферическим поверхностям линзы соответствуют постоянные значения координаты η , ($\eta = \text{const}$), а координата ξ изменяется в полуограниченном интервале, $0 \leq \xi < \infty$. Граничной окружности линзы $r = c$ соответствует $\xi \rightarrow \infty$, а бесконечности: $\xi = \eta = 0$.