

СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ
И АВИАЦИИ

Academy of Sciences of the USSR
Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the USSR
USSR National Committee on Theoretical and Applied Mechanics
Sergo Ordzhonikidze Moscow Aviation Institute

MODERN PROBLEMS OF MECHANICS AND AVIATION



MOSCOW
«MASHINOSTROENIE»
1982

Академия наук СССР

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Национальный комитет СССР по теоретической и прикладной механике

Московский авиационный институт имени Серго Орджоникидзе

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И АВИАЦИИ



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1982

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Образцов И. Ф., Рыбаков Л. С., Лукашина Н. В. О дискретном взаимодействии пластины и стержня.— Прикл. мех., 1979, т. 15, № 11, с. 82—87.
2. Лукашина Н. В., Образцов И. Ф., Рыбаков Л. С. Дискретное взаимодействие бесконечной пластины и полубесконечной балки.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4, с. 170—177.
3. Рыбаков Л. С., Черепанов Г. П. Дискретное взаимодействие пластины с полубесконечным стрингером.— ПММ, 1977, т. 41, № 2, с. 322—328.
4. Черепанов Г. П., Рыбаков Л. С. К расчету клепаных панелей.— Прикл. механика, 1977, т. 13, № 8, с. 3—7.
5. Budiansky B., Wu Tai Te. Transfer of load to a sheet from a rivet—attached stiffener.— J. Math. and Phys., 1961, V. 40, N 2, p. 142—162.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
7. Фельд Я. Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах.— ДАН СССР, 1955, т. 102, № 2, с. 257—260.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

А. Л. Смирнов, П. Е. Товстик
(Ленинград)

Задача об определении собственных частот и форм колебаний тонких упругих оболочек вращения в настоящее время достаточно хорошо изучена. Представляет интерес рассмотрение динамики оболочек вращения, вращающихся вокруг оси симметрии. Частные случаи такого рода исследованы в работах [1] и [2], где с помощью численных методов изучалось влияние вращения на собственные частоты круговых цилиндрических оболочек.

В настоящей работе динамика вращающихся оболочек вращения исследуется с помощью качественных асимптотических методов. Получены также некоторые количественные результаты.

1. Рассмотрим тонкую упругую оболочку вращения, вращающуюся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси симметрии OZ . На поверхности оболочки введем систему координат s, φ , где s — длина дуги образующей, φ — угол в окружном направлении. Проекции перемещений на направления образующей, параллели и внутренней нормали обозначим через u, v, w . Введем также цилиндрическую систему координат r, φ, z , вращающуюся вокруг оси OZ вместе с оболочкой, и обозначим через u_r, v, u_z проекции перемещений на орты этой системы. Тогда

$$u_r = u \cos \theta - w \sin \theta; \quad u_z = -u \sin \theta - w \cos \theta, \quad (1.1)$$

где θ — угол между внешней нормалью и осью OZ (рис. 1).

В отличие от невращающейся оболочки малые свободные или вынужденные колебания представим в виде суперпозиции бегущих волн

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= u(s) \cos(m\varphi - \omega t + \alpha) \\ [u, w, \gamma_1, \varepsilon_k, \alpha_k, T_k, M_k, N_1, X_1, X_3]; \\ v(s, \varphi, t) &= v(s) \sin(m\varphi - \omega t + \alpha) \\ [v, \omega_k, \tau, \gamma_2, S, H, N_2, X_2] \quad k=1, 2, m=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ω/m — угловая скорость бегущей волны при $m > 0$; α — начальная фаза. В квадратных скобках перечислены функции (перемещения, усилия и т. д.), представляемые по тем же формулам. Здесь использованы обозначения из [3].

После разделения переменных в (1.2) система уравнений движения оболочки может быть записана в виде

$$Lx + \omega^2 x + 2\Omega \omega L_c x + \Omega^2 L_e x + L_\Omega x + X = 0, \quad (1.3)$$

где $x = (u, v, w)$; $X = (X_1, X_2, X_3)$ — векторы перемещений и внешней нагрузки,

$$L_c = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & 0 \end{pmatrix}; \quad L_e = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Для круговых цилиндрических оболочек уравнения типа (1.3) рассмотрены в работах [1], [2]. В (1.3) Lx — известный оператор, соответствующий невращающейся оболочке и описанный, например, на с. 120 работы [3]. Второе, третье и четвертое слагаемые в (1.3) учитывают силы инерции относительного движения, Кориолиса и переносного движения оболочки. Слагаемое $L_\Omega x$ учитывает начальные напряжения, а также изменения формы оболочки, появляющиеся из-за ее вращения. Оператор L_Ω может иметь различный вид в зависимости от сохранения или отбрасывания тех или иных малых членов. Ниже обсуждается вид главной части этого оператора.

Введем скалярное произведение векторов x_1, x_2 :

$$(x_1, x_2) = \int_{s_1}^{s_2} (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) B ds, \quad (1.5)$$

где $s_{1,2}$ — крайние параллели; B — расстояние до оси вращения.

Предположим, что граничные условия при $s = s_{1,2}$ являются самосопряженными (см. [3], с. 80), т. е. такими, что краевые усилия и моменты не производят работу. Тогда все операторы в (1.3) — формально-самосопряженные, т. е. $(Lu_1, u_2) = (Lu_2, u_1)$.

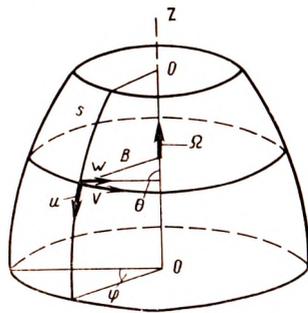


Рис. 1

Составим скалярное произведение выражения (1.3) и вектора x . Тогда после преобразований получим

$$\omega^2 T^{(0)} + 2\omega\Omega T^{(1)} + \Omega^2 T^{(2)} = \Pi_\varepsilon + h^2 \Pi_x + \Pi_\Omega - A, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= \int (u^2 + v^2 + w^2) B ds; \quad T^{(1)} = -2 \int u_2 v B ds; \\ T^{(2)} &= \int (u_2^2 + v^2) B ds; \quad A = \int x X B ds; \\ \Pi_\varepsilon &= (1 - \nu^2)^{-1} \int (\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2} \omega^2) B ds; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\Pi_x = [12(1 - \nu^2)]^{-1} \int (x^2 + 2\nu x_1 x_2 + x_2^2 + 2(1 - \nu) \tau^2) B ds.$$

Здесь Π_ε , Π_x пропорциональны потенциальным энергиям растяжения—сжатия и изгиба—кручения срединной поверхности, A — работе внешних поверхностных сил, h — толщина оболочки.

Здесь и ниже используются безразмерные переменные, которые связаны с соответствующими размерными (с тильдой) по формулам:

$$\begin{aligned} (x, R_k, B, h, s, l) &= R^{-1}(\tilde{x}, \tilde{R}_k, \tilde{B}, \tilde{h}, \tilde{s}, \tilde{l}); \\ (\varepsilon_k, \omega_k, \omega, \gamma_k) &= (\tilde{\varepsilon}_k, \tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}, \tilde{\gamma}_k) \\ (x, \tau) &= R(\tilde{x}, \tilde{\tau}); \quad (\omega, \Omega) = R\sqrt{Q/E}(\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}); \\ (T_k, S_{kl}, N_k) &= (E\tilde{h})^{-1}(\tilde{T}_k, \tilde{S}_{kl}, \tilde{N}_k) \\ (M_k, H, X) &= R(E\tilde{h})^{-1}(\tilde{M}_k, \tilde{H}, \tilde{X}); \end{aligned} \quad (1.8)$$

через R обозначен характерный размер срединной поверхности.

2. Обратимся к построению величины Π_Ω в (1.6). При этом считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние (индекс «0» сверху) является безмоментным и осесимметричным. Получаем [4]:

$$\begin{aligned} \Pi_\Omega &= \int [T_1^0(\gamma_1^2 + \omega_1^2) + T_2^0(\gamma_2^2 + \omega_2^2) + 2\gamma_1^0(T_1\gamma_1 + S\gamma_2) + 2\varepsilon_1^0 S\omega_2 + \\ &\quad + 2\varepsilon_2^0 S\omega_1] B ds, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}; \quad \gamma_2 = \frac{m\omega}{B} - \frac{v}{R_2}; \quad \omega_1 = \frac{dv}{ds}, \quad \omega_2 = \frac{-mu + B'v}{B}. \quad (2.2)$$

При написании (2.1) малые деформации ε_1^0 , ε_2^0 (по сравнению с единицей) отбрасывались.

Предположим, что начальные напряжения и деформации возникают только благодаря вращению оболочки. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dT_1^0}{ds} + \frac{B'}{B} (T_1^0 - T_2^0) &= -\Omega^2 BB'; \\ \frac{T_1^0}{R_1} + \frac{T_2^0}{R_2} &= \frac{\Omega^2 B^2}{R_2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

откуда находим

$$T_1^0 = \Omega^2 P \frac{R_2}{B^2}; \quad T_2^0 = \Omega^2 \left(B^2 - \frac{PR_2^2}{R_1 B^2} \right). \quad (2.4)$$

Величина P пропорциональна осевой силе, которая появляется из-за осевого растяжения оболочки в случае, когда оба края закреплены в направлении z .

В безразмерных переменных

$$\varepsilon_1^0 = T_1^0 - \nu T_2^0; \quad \varepsilon_2^0 = T_2^0 - \nu T_1^0, \quad (2.5)$$

откуда следует, что малость деформаций $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ влечет за собой малость Ω^2 по сравнению с единицей. В частности, для цилиндрической оболочки радиуса R при отсутствии осевой силы $\varepsilon_1^0 = -\nu\Omega^2$, $\varepsilon_2^0 = \Omega^2$. Заметим, что все величины с индексом «0» имеют множителем Ω^2 и $\Pi_\Omega = \Omega^2 \Pi_\Omega^0$.

Система (1.3) получается варьированием подынтегрального выражения в (1.6) по u, v, ω . В частности, $L_\Omega x$ получается при варьировании Π_Ω .

3. В разд. 3...7 рассматриваются свободные колебания. Поэтому положим в (1.3) и (1.6) $X=A=0$.

При отсутствии вращения ($\Omega=0$) частоты и формы собственных колебаний оболочки определяются из решения краевой задачи

$$Lx + \omega_0^2 x = 0; \quad \Gamma_{\gamma k} x(s_k) = 0 \quad (k=1, 2; \gamma=1, 2, 3, 4). \quad (3.1)$$

Пусть $\omega_0^2, x_0(s)$ — собственное значение и собственная функция задачи (3.4). Предположим, что граничные условия $\Gamma x=0$ таковы, что жесткие перемещения оболочки невозможны. Тогда $\omega_0^2 > 0$ и собственной функции x_0 соответствуют две бегущие в разные стороны волны, получающиеся из (1.2) при $\omega = \omega_0$ и $\omega = -\omega_0$. При равенстве амплитуд эти волны в сумме дают стоячую волну.

Перейдем к случаю $\Omega \neq 0, \Omega \ll 1$. Здесь по сравнению с предыдущим случаем, когда $\Omega=0$, появляются две волны, бегущие в разные стороны с различными скоростями, и их наложение в общем случае не может дать стоячей волны.

Пусть ω_0^2 — простое собственное значение задачи (3.1). Через ω_1, ω_2 и x_1, x_2 обозначим собственные значения и функции задачи (1.3), соответствующие ω_0^2 при $\Omega=0$. Представим $\omega_{1,2}$ в виде

$$\omega_{1,2} = \pm \alpha(\Omega) + \beta(\Omega), \quad \alpha > 0, \quad (3.2)$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha(\Omega) &= \omega_0 + \Omega^2 \alpha_2 + \Omega^4 \alpha_4 + \dots; \quad \beta(\Omega) = \beta_1^0 + \Omega^2 \beta_3 + \dots; \\ x_k(\Omega) &= x_0 \pm \Omega x^{(1)} + \Omega^2 x^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Метод возмущений для определения первых коэффициентов в (3.3) дает

$$\begin{aligned} Lx^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -2\omega_0(L_c x_0 + \beta_1 x_0); \\ Lx^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -2\omega_0(L_c x_1 + \beta_1 x_1) - (2\omega_0 \alpha_2 + \beta_1^2) x_0 - 2\beta_1 L_c x_0 - \\ &\quad - L_c x_0 - L_\Omega^0 x_0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $L_\Omega^0 = \Omega^{-2} L_\Omega$. Условием разрешимости (3.4) является ортогональность правых частей и вектора x , откуда находим:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{(L_c x_0, x_0)}{(x_0, x_0)}; \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1^2}{2\omega_0} - \frac{(L_c x^{(1)} + \beta_1 x^{(1)}, x_0)}{(x_0, x_0)} - \\ &\quad - \frac{(L_c x_0 + L_\Omega^0 x_0, x_0)}{2\omega_0 (x_0, x_0)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что случай $m=0$ представляет исключение, при этом $\omega_1 = -\omega_2$; $\beta \equiv 0$.

4. При изложении разд. 3 никак не использовались специфические свойства оболочки, и эти рассуждения пригодны для любого тела вращения. Для оболочки соотношения (1.3), (1.6) содержат два малых параметра h и Ω . Исследуем влияние вращения на различные виды колебаний оболочки в соответствии с классификацией, приведенной на с. 43 работы [3]. Будем оценивать порядки различных слагаемых в (1.6) по отношению к h . Через p обозначим показатель изменяемости главного напряженно-деформированного состояния оболочки.

Для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью ($0 \leq p \leq p < 0,5$) получаем асимптотические оценки

$$T^{(0)}, T^{(2)}, \Pi_\varepsilon \sim h, \quad T^{(1)} \sim h^p, \quad (4.1)$$

$$h^2 \Pi_x \sim h^{2-4p}, \quad \Pi_\Omega^0 \sim h^{-2p},$$

и соотношение (1.6) можно записать в виде

$$\omega^2 + 2a_1 \omega \Omega h^p = \omega_0^2 + a_0 \Omega^2 h^{-2p}; \quad a_k \sim h^0; \quad \omega_0 \sim 1. \quad (4.2)$$

Значок \sim ставим между величинами одного порядка.

Для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью ($0,5 \leq p < 1$) соотношения (4.1) и (4.2) сохраняют свой вид, однако $\omega_0^2 \sim h^{2-4p}$.

Для квазитангенциальных колебаний ($0 \leq p < 1$)

$$T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)} \sim h^0, \quad \Pi_\varepsilon, \Pi_x, \Pi_\Omega^0 \sim h^{-2p} \quad (4.3)$$

и соотношение (1.6) дает

$$\omega^2 + 2a_1 \omega \Omega = \omega_0^2 + a_2 \Omega^2 h^{-2p}; \quad a_k \sim 1; \quad \omega_0 \sim h^{-p}. \quad (4.4)$$

Для удобства обсуждения полученных оценок введем обозначения

$$\Omega = h^q, \quad q > 0; \quad \Delta_{1,2} = \frac{|\omega_{1,2}| - \omega_0}{\omega_0}. \quad (4.5)$$

Для квазипоперечных колебаний

$$\begin{aligned} \Delta &\sim h^{p+q} + h^{kc}; \quad c = q - p \quad (0 \leq p < 0,5); \\ \Delta &\sim h^{3p+q-\Delta} + L^{kc}, \quad c = p + q - 1 \quad (0,5 \leq p < 1), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $k=2$ при $c>0$ и $k=1$ при $c<0$.

Для квазитангенциальных колебаний

$$\Delta \sim h^{p+q} + h^{2q} \quad (0 \leq p < 1). \quad (4.7)$$

В оценках (4.6) и (4.7) для величины Δ первое слагаемое дает порядок величины $\beta\omega_0^{-1}$, а второе — порядок $(\alpha - \omega_0)\omega_0^{-1}$, где α и β введены в (3.2). Из (4.6), (4.7) следует, что для рассмотренных видов колебаний различие 2β между частотами ω_1 и $-\omega_2$ относительно мало. Для квазитангенциальных колебаний относительно малыми оказываются и разности $\omega_1 - \omega_0$, $|\omega_2| - \omega_0$. Для квазипоперечных колебаний влияние вращения на указанные разности описывается параметром c . При $c>0$ частоты сдвигаются относительно мало, а при $c\leq 0$ сдвиг оказывается весьма существенным. Наиболее существенное влияние вращения оказывает на частоты квазипоперечных колебаний с промежуточной изменяемостью ($p=0,5$), ибо в этом случае c минимален. Это влияние растет с уменьшением толщины оболочки h и с увеличением скорости ее вращения Ω .

С учетом соотношений (4.5), (2.5) замечаем, что при $p=0,5$ неравенство $c\leq 0$ эквивалентно неравенству $\Omega^2 \geq h$ или $\varepsilon_2^0 \geq h$, где ε_2^0 — начальная деформация оболочки. Последнее неравенство возможно лишь для весьма тонких оболочек, ибо в противном случае при увеличении Ω сначала будет пройден предел прочности.

При $c\leq 0$ метод возмущений, описанный в разд. 3, не применим, а при $c>0$ он позволяет эффективно оценить влияние вращения. Пусть $c>0$ и пусть известны ω_0 и $x_0(s)$ для невращающейся оболочки. Малое слагаемое β в (3.2) можно найти по формулам (3.3), (3.5). Для вычисления a_2 по формуле (3.5) в общем случае необходимо знать решение $x^{(1)}$ первого из уравнений (3.4). При рассмотрении квазипоперечных либо квазитангенциальных колебаний с $p>0$ порядки различных слагаемых в выражении для a_2 оказываются различными. С погрешностью порядка h^{2p}

$$a_2 = -\frac{(L_{\Omega}^0 x_0, x_0)}{2\omega_0(x_0, x_0)} = \frac{\Pi_{\Omega}^0}{T^{(0)}} (a_2 \sim h^{-2p}); \quad a = \omega_0 + \frac{\Pi_{\Omega}}{2T^{(0)}\omega_0}, \quad (4.8)$$

где Π_{Ω} и $T^{(0)}$ вычисляются по формулам (1.7), (2.1) при $x=x_0(s)$.

Для квазипоперечных колебаний с той же погрешностью h^{2p} можно считать, что

$$\Pi_{\Omega} = \int (T_1^0 Y_1^2 + T_2^0 Y_2^2) B ds. \quad (4.9)$$

Для квазипоперечных колебаний с $p=0$ и любых квазитангенциальных колебаний подобные упрощения не имеют места, однако они и не нужны, ибо в этих случаях $\alpha_2 \sim h^0$ и с погрешностью порядка Ω^2 можно принять в (3.3) $\alpha = \omega_0$, отбросив член с α_2 .

5. В разд. 4 рассмотрены колебания, для которых $\omega_0 \sim h^0$. Перейдем к случаю колебаний со сверхнизкими частотами ($\omega_0 \sim hr$, $r > 0$) (см. гл. V работы [3]). Такие колебания возможны лишь в случае, когда потенциальная энергия растяжения—сдвига Π_ε мала ($\Pi_\varepsilon \lesssim h^{2r}$). При этом в (1.6) порядок членов, зависящих от Ω , сохраняется, однако их относительное влияние на частоту ω значительно возрастает.

Начнем с колебаний рэлеевского типа, для которых $\Pi_\varepsilon = 0$. Пусть существует удовлетворяющее условиям закрепления истинное изгибание x_0 , характеризуемое изменяемостью $0 < p < 0,5$. Тогда имеют место соотношения (4.1), (4.2), (4.9), в которых нужно считать $\Pi_\varepsilon = 0$, $\omega_0 \sim h^{1-2p}$. Для величины Δ получаем оценку (4.6):

$$\Delta \sim h^{3p+q-1} + h^{kc}; \quad c = p + q - 1; \quad 0 < p < 0,5, \quad (5.1)$$

из которой следует, что влияние вращения Ω возрастает с уменьшением изменяемости p .

Обратимся к случаю $p=0$, который включает в себя самую низкую частоту колебаний $\omega_0 \sim h$ и в котором влияние вращения наиболее сильно. В этом случае выражение (2.1) можно взять в виде

$$\Pi_2 = \int [T_1^0(\gamma_1^2 + \omega_1^2) + T_2^0(\gamma_2^2 + \omega_2^2)] B ds, \quad (5.2)$$

ибо тангенциальные усилия T_1, S в (2.1) малы.

Нетрудно показать, что во всех случаях колебаний со сверхнизкими частотами выражение (5.2) является главной частью выражения (2.1). Учитывая (4.9), можно сделать заключение, что во всех случаях, когда величину Π_2 нужно учитывать, она может быть взята в виде (5.2).

Будем считать, что $P=0$ в (2.4). Тогда из (1.6) следует, что

$$\omega^2 T^{(0)} + 2\omega \Omega T^{(1)} = \Pi_\varepsilon + h^2 \Pi_* + \Omega^2 \Pi_*, \quad (5.3)$$

где в рассматриваемом случае

$$\Pi_\varepsilon = 0; \quad \Pi_* = \int [B^3(\gamma_2^2 + \omega_2^2) - B(u_2^2 + v^2)] ds. \quad (5.4)$$

Рассмотрим величину Π_* подробнее. Случаи $m=0$ и $m=1$ соответствуют жестким смещениям оболочки и здесь не рассматриваются. Пусть $m \geq 2$. Пользуясь равенством

$$\varepsilon_2 = B^{-1}(u \cos \theta + mv - \omega \sin \theta) = 0, \quad (5.5)$$

исключим ω из подинтегрального выражения в (5.4). Тогда это выражение оказывается положительно определенной квадратичной формой переменных u и v . Следовательно, $\Pi_* > 0$ и уравнение (5.3) имеет вещественные корни разных знаков. При $\Omega \sim h$ влияние последнего слагаемого в (5.3) того же порядка, что и влияние потенциальной энергии изгиба срединной поверхности.

Рассмотрим, в частности, кольцевой диск, закрепленный по внутренней окружности. Для него $R_1^{-1} = R_2^{-1} = 0$ и $u = v = 0$, $w(s) \neq 0$ является изгибанием для любой функции w . При этом в (5.3) $T^{(1)} = 0$ и возможно появление стоячих волн, так как $\omega_1 = -\omega_2$. При этом ω_k находятся из уравнения

$$\frac{h^2}{12(1-v^2)} \Delta \Delta w + \Omega^2 m^2 w = \omega^2 w; \quad \Delta w = \frac{d}{ds} \left(s \frac{dw}{ds} \right) - \frac{m^2}{s^2}, \quad (5.6)$$

которое может быть получено варьированием (5.3) по w . Из (5.6) следует, что $\omega_k^2 = \omega_0^2 + m^2 \Omega^2$, где ω_0 — частота колебаний невращающегося диска.

Пусть теперь собственная форма x_0 состоит из двух частей — изгибания, удовлетворяющего тангенциальным закреплениям (тангенциально возможное изгибание, см. с. 246 работы [3], и краевого эффекта, снимающего невязку в нетангенциальных закреплениях. Тогда при наличии невязки в прогибе w в (5.3) Π_ε имеет порядок $h^{1/2}$; при наличии невязки только в угле поворота γ_1 энергия Π_ε имеет порядок $h^{3/2}$. Остальные слагаемые в (5.3) в первом приближении остаются без изменения. В этих случаях частота колебаний возрастает, а относительное влияние вращения снижается.

6. Рассмотрим «хорошо» закрепленную оболочку нулевой или отрицательной гауссовой кривизны. Под «хорошим» здесь подразумевается закрепление, исключающее тангенциально возможные изгибания. Низкочастотные колебания таких оболочек характеризуются формами, близкими к изгибаниям (псевдоизгибания). Для них энергия Π_ε мала, а число волн в окружном направлении (m) велико.

Выражения для псевдоизгибаний оболочки вращения нулевой кривизны (конической или цилиндрической оболочки средней длины) приведены на с. 266 работы [3]. Для них в (5.3)

$$T^{(0)} \sim h^0, \quad T^{(1)} \sim m^{-1}, \quad \Pi_\varepsilon \sim m^{-4}, \quad \Pi_x \sim m^4, \quad \Pi_* \sim m^2. \quad (6.1)$$

В связи с тем, что для псевдоизгибаний

$$T^{(1)} = 2 \frac{\sin^2 \theta}{m} T^{(0)}; \quad \Pi_* = (m^2 - \sin^2 \theta) T^{(0)}, \quad (6.2)$$

для вращающейся оболочки

$$\omega_{1,2} = 2\Omega \frac{\sin^2 \theta}{m} \pm [\omega_0^2 + (m^2 - \sin^2 \theta) \Omega^2]^{1/2}, \quad (6.3)$$

где $\pi/2 - \theta$ — угол при вершине конуса. Для цилиндрической оболочки $\theta = \pi/2$. Заметим, что ω_0 принимает наименьшее значение $\omega_0 \sim h^{1/2}$ при $m \sim h^{-1/4}$, а формула (6.3) пригодна для частот, лежащих вблизи наименьшей частоты, для которых $m \sim h^{-p}$, $0 < p < 0,5$.

Для оболочки отрицательной гауссовой кривизны $\Pi_\varepsilon \sim m^{-2}$, а для остальных величин в (5.3) оценки имеют вид (6.1). Наименьшая частота $\omega_0 \sim h^{2/3}$ получается при $m \sim h^{-1/3}$. Порядок влияния вращения на $\omega_{1,2}$ может быть оценен из соотношения (5.3).

Приведем оценки типа (4.6). Введем обозначения $m \sim h^{-p}$; $0 < p < 0,5$; $\omega_0 \sim h^r$. Тогда для оболочек нулевой и отрицательной кривизны

$$\Delta \sim h^{q+p-r} + h^{kc}, \quad c = q - p - r, \quad (6.4)$$

где для оболочки нулевой кривизны $r = \min(2p, 1 - 2p)$, а для оболочки отрицательной кривизны $r = \min(p, 1 - 2p)$. Из (6.4) следует, что в окрестности минимальной частоты на $\omega_{1,2}$ вращение оболочки оказывает несколько большее влияние в случае нулевой гауссовой кривизны.

7. При колебаниях длинных цилиндрических оболочек возможность появления псевдоизгибаний связана с большой длиной оболочки l (см. с. 324 работы [3]). Рассмотрим случай, когда оболочка совершает «балочные» колебания с $m=1$. При этом имеют место следующие приближенные соотношения:

$$v = w; \quad u = w' \sim l^{-1}; \quad \Pi_\epsilon = \Pi_\kappa = \int (w'')^2 ds \sim l^{-3}; \quad \Pi_\Omega^0 = \int (w')^2 ds \sim l^{-1}. \quad (7.1)$$

Теперь варьирование (1.6) по w приводит к уравнению

$$w^{IV} - \Omega^2 w'' + 2(\omega + \Omega)^2 w = 0, \quad (7.2)$$

решение которого при соответствующих главных граничных условиях (см. с. 268 работы [1]) определяет значения $\omega_{1,2}$. Например, для оболочки, оба края которой шарнирно оперты, имеем

$$w(s) = \sin \frac{n\pi s}{l}; \quad \omega_{1,2} = -\Omega \pm \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 + \Omega^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (7.3)$$

причем область применимости этих формул ограничена неравенством $l^2 \gg (n\pi)^2$, при выполнении которого оправданы упрощения, приводящие к формулам (7.1).

При малых Ω формулы (7.3) дают волны, бегущие в разные стороны. При $\Omega \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 = \omega_0$ получаем $\omega_1 = 0$, а при $\Omega > \omega_0$ бегущие волны движутся в одну сторону с разными скоростями.

8. Обозначим через ω_{mk} , $x_{mk}(s)$ собственные значения и функции краевой задачи (1.3) при $X=0$ и граничных условиях $Gx=0$. Здесь m введено в (1.2), k — номер собственного значения при данном m . Функции $x_{mk}(s)$ удовлетворяют условию ортогональности

$$(\omega_{mk} + \omega_{ml})(x_{mk}, x_{ml}) + 2\Omega(L_c x_{mk}, x_{ml}) = 0 \quad (\omega_{mk} \neq \omega_{ml}). \quad (8.1)$$

Выясним, как связаны ω_{mk} с возможностью появления резонанса при наличии внешних сил. Рассмотрим внешнюю силу вида

$$\bar{F} = \bar{F}_1(s, \varphi - \Omega_0 t) \cos \nu t + \bar{F}_2(s, \varphi - \Omega_0 t) \sin \nu t, \quad (8.2)$$

при которой поверхностная нагрузка вращается по оболочке с угловой скоростью Ω_0 и в то же время совершает гармонические колебания с частотой ν . Для неподвижной на оболочке нагрузки $\Omega_0 = 0$, для неподвижной в пространстве нагрузки $\Omega_0 = -\Omega$, для постоянной по времени нагрузки $\nu = 0$.

Разлагая \bar{F}_h в ряд Фурье по второму аргументу, представим в соответствии с (1.2) возмущение в виде суперпозиции бегущих волн:

$$X_{1,3}(s, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i, j=1,2} X_{1,3}^{(m, i, j)}(s) \cos(m\varphi - v_m^{(i)}t + \alpha_j); \quad (8.3)$$

$$X_2(s, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i, j=1,2} X_2^{(m, i, j)}(s) \sin(m\varphi - v_m^{(i)}t + \alpha_j),$$

где

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \pi/2; \quad v_m^{(1)} = m\Omega_0 + v; \quad v_m^{(2)} = m\Omega_0 - v. \quad (8.4)$$

Возьмем одно из слагаемых (8.3). Если $v_m^{(i)} \neq \omega_{mk}$ при $i=1,2$ и всех k , то неоднородная система (1.3) разрешима. Если же $v_m^{(i0)} = \omega_{mk0}$, то условием разрешимости (1.3) является ортогональность собственной функции и внешней нагрузки

$$(X^{(m, i0, j)}, x_{mk0}) = 0 \quad (j=1, 2). \quad (8.5)$$

В противном случае решение вида (1.2) не существует — правые части в (1.2) приобретают множитель t . Сказанное здесь имеет место для любого тела вращения. Рассмотрим примеры.

Для неподвижной в пространстве постоянной нагрузки ($\Omega_0 = -\Omega, v=0$) резонансными могут быть угловые скорости, для которых

$$-m\Omega = \omega_{mk} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (8.6)$$

Формула (8.6) хорошо известна (см. например, [5]). Если для оболочки с горизонтальной осью нагрузка образована лишь весом самой оболочки, то в (8.6) следует брать только $m=1$, ибо прочие слагаемые в (8.3) отсутствуют.

Для неподвижной на оболочке постоянной нагрузки ($\Omega_0=0, v=0$), которая, в частности, появляется при отклонениях от идеальной формы или по весу, резонанс имеет место при

$$\omega_{mk} = 0. \quad (8.7)$$

Из разд. 4 ... 7 следует, что при $P=0$ равенство (8.7) возможно лишь при $m=1$ и имеет место для длинных цилиндрических оболочек при некоторых Ω .

Для неподвижной на оболочке гармонической нагрузки ($\Omega_0=0$) условие резонанса:

$$\omega_{mk} = \pm v. \quad (8.8)$$

В силу (3.2), (3.3) при малых Ω оболочка имеет в общем случае близкие по модулю собственные значения разных знаков. Следовательно, при изменении v должны появиться пары близких резонансных частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang Shih-sen, Chen Ju. Effects of rotation on vibrations of circular cylindrical shells.—J. Acoust. Soc. Amer., 1974, V. 55, N 6, p. 1340—1342.
2. Zohar A., Aboudi J. The free vibrations of a thin circular finite rotating cylinder, «Int. J. mech. Sci.», 1973, V. 15, p. 269—278.
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 381 с.
4. Григолоук Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978, 360 с.
5. Бабанов И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968, 560 с.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТАНОВКИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

А. Ф. Улитко
(Киев)

Базируясь на линейных соотношениях полевой теории явления пьезоэффекта в керамических средах, обсуждаются физически реализуемые механические и электрические граничные условия для сред с такими свойствами. Основное внимание уделено анализу электрических граничных условий для различных режимов подвода и снятия электрической энергии. Показано, что с использованием данных этого анализа задачи о равновесии и колебаниях пьезокерамических тел приводятся к специального типа векторным граничным задачам математической физики. Представлены векторные уравнения, описывающие сопряженные электроупругие поля в пьезокерамических телах различной геометрии и поляризации, а также необходимые соотношения для определения магнитных полей внутри и вне колеблющихся пьезокерамических тел.

1. Основные соотношения полевой теории электромеханического взаимодействия в пьезокерамических средах были предметом обсуждения в работах ряда авторов [1 ... 4]. В известной степени их можно считать обоснованными экспериментальными данными на статическое и циклическое нагружение стандартных образцов [5 ... 7]. Эти соотношения включают:

а) уравнения Ньютона движения элемента сплошной среды

$$\operatorname{div} \hat{T} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}; \quad (1.1)$$

б) соотношения Коши линейной теории упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

в) квазистатическое приближение уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \psi; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (1.3)$$

г) соотношения пьезоэффекта (поляризация среды в направлении оси Oz)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}^E \varepsilon_x + c_{12}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z; & \sigma_y &= c_{12}^E \varepsilon_x + c_{11}^E \varepsilon_y + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z; \\ \sigma_z &= c_{13}^E (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + c_{33}^E \varepsilon_z - e_{33} E_z; & \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{xy}; \\ \tau_{yz} &= c_{44}^E \varepsilon_{yz} - e_{15} E_y; & \tau_{zx} &= c_{44}^E \varepsilon_{zx} - e_{15} E_x; \\ D_x &= \varepsilon_{11}^S E_x + e_{15} \varepsilon_{xz}; & D_y &= \varepsilon_{11}^S E_y + e_{15} \varepsilon_{yz}; \\ D_z &= \varepsilon_{33}^S E_z + e_{31} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + e_{33} \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Обозначения переменных сопряженного электроупругого поля и коэффициентов в (1.1) ... (1.4) совпадают с принятыми в работах [1, 4, 5]. В работе [1] имеются подробные данные по численным значениям электрофизических характеристик ряда составов керамик.

При использовании уравнений пьезоэффекта (1.4) необходимо помнить, что их форма записи относится к случаю, когда ось Oz декартовых координат совмещена в каждой точке тела с направлением вектора предварительной поляризации. Поэтому, если направление поляризации меняется от точки к точке внутри тела, то коэффициенты в (1.4) будут переменными функциями координат. Однако если поле предварительной поляризации обладает определенными свойствами симметрии, то в соответствующим образом подобранных криволинейных координатах удастся записать уравнения состояния (1.4) с постоянными коэффициентами во всем объеме тела. Запись уравнений пьезоэффекта для поляризации вдоль осей круговых цилиндрических координат и радиальной поляризации в сферических координатах приведена в работе [4].

Основные соотношения (1.1) ... (1.4) можно преобразовать в систему четырех дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка относительно компонент вектора упругих перемещений и электростатического потенциала.

Ниже приведены векторные уравнения электроупругости в перемещениях для типичных случаев поляризации керамических элементов, отнесенных к декартовым, цилиндрическим и сферическим координатам.

Уравнения движения в декартовых и цилиндрических координатах (поляризация вдоль оси Oz) записываются в виде [4]

$$\begin{aligned} & c_{11}^E \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \left(\frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} - c_{44}^E \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} + \vec{\kappa} \nabla^2 u_z \right) - \left(\frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} - c_{44}^E + c_{12}^E - c_{13}^E \right) \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\kappa} \operatorname{div} \vec{u} + \operatorname{grad} u_z) + \end{aligned}$$

УДК 531.3

Преображенский И. Н., Скурлатов Э. Д.

Некоторые вопросы статики и динамики перфорированных оболочек и пластин.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 250—262.

Трудность изучения живучести, надежности несущих конструкций при наличии в них отверстий произвольной формы увеличивается при нестационарном характере внешней нагрузки. Экспериментальному изучению некоторых вопросов по данной проблеме посвящена настоящая публикация. Выведены эмпирические соотношения, которые могут быть полезными инженерам и исследователям при проектировочных расчетах для определенного класса конструкций.

Ил. 9, список лит. 8 назв.

УДК 539.3

Румянцев В. В.

К задаче об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости с трением.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 263—272.

В нелинейной постановке исследуется задача об устойчивости вращения несимметричного гиростата на плоскости с вязким трением. Показано, что задача приводится к особому случаю критического случая двух нулевых корней; получены необходимые и достаточные условия устойчивости вращения гиростата, из которых сделаны некоторые качественные выводы. Кратко рассмотрены предельные случаи абсолютно гладкой и шероховатой плоскостей.

Список лит. 9 назв.

УДК 539.3

Рыбаков Л. С.

Дискретное взаимодействие пластины с поврежденным стержнем.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 273—280.

Исследуется плоская контактная задача о дискретном взаимодействии неограниченной пластины с разрушенным по какому-либо сечению бесконечным однородным стержнем через периодическую систему жестких круглых включений (заклепок). Задача приводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с коэффициентами, зависящими от разности индексов. Точное решение этой системы в квадратурах строится с помощью преобразования Лорана.

Ил. 2, список лит. 8 назв.

УДК 539.3 : 534.1

Смирнов А. Л., Товстик П. Е.

Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 280—290.

Рассматривается задача об определении собственных частот и форм колебаний тонких упругих оболочек вращения, вращающихся вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью. При исследовании использовались качественные и асимптотические методы. Получены также некоторые количественные результаты. Определяются резонансные угловые скорости вращения оболочек при воздействии различного рода внешних гармонических нагрузок.

Ил. 1, список лит. 8 назв.