Математические модели

Теория и приложения

7

Санкт-Петербург
2006

УДК 518

Ю. К. Демьянович, О. Н. Иванцова

ГЛАДКОСТЬ ПРОСТРАНСТВ СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Предварительные замечания

Известно, что среди полиномиальных сплайнов B-сплайны третьей степени однозначно характеризуются носителем из четырех соседних сеточных промежутков и принадлежностью к пространству C^2 (см.[1-4]), однако в некоторых случаях компьютерная реализация неполиномиальных сплайнов более эффективна (см. [5-6]). Минимальные (вообще говоря, неполиномиальные) сплайны второго порядка на неравномерной сетке построены в работах [7-8].

Цель данной работы построить минимальные неполиномиальные сплайны третьего порядка на неравномерной сетке, сформулировать необходимые и достатчные условия непрерывности этих сплайнов и их производных в узлах сетки, а также дать средства их эффективного построения. Для достижения поставленной цели разработан новый подход, ибо аппарат векторной алгебры в $\mathbb{R}^3$, существенно использовавшийся ранее (см. [7-8]), для рассматриваемого здесь случая оказался непригодным.

2. Некоторые обозначения

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.

Введем обозначения:

$\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j > 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^4$ – пространство четырехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{f}$; для нулевого вектора-столбца будем использовать символ $\mathbf{0}$.

Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются цифрами $0, 1, 2, 3$; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2, [\mathbf{a}]_3)^T$. К векторам применяются обычные матричные операции, так что для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ имеем $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sum_{s=0}^{3}[\mathbf{a}]_s[\mathbf{b}]_s$, в то время, как $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ — матрица с элементами $[\mathbf{a}]_p[\mathbf{b}]_q$ (p и q — номера строки и столбца соответственно, $p, q = 0, 1, 2, 3$). Квадратную матрицу четвертого порядка с вектор-столбцами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$ обозначим $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f})$, а ее определитель $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f})$.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 04-01-00692 и 04-01-00026

На конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X : \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots;$$

пусть

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to-\infty} x_j, \ \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to+\infty} x_j. \tag{2.1}$$

Введем обозначения: $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}} \ (x_j, x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+4}]$, $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-3, k-2, k-1, k\}$, $k, j \in \mathbb{Z}$.

При $K_0 \geq 1$ обозначим $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ класс локально квазиравномерных сеток на промежутке (α, β), т.е. класс сеток вида (2.1) со свойством $K_0^{-1} \leq (x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})^{-1} \leq K_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Введем характеристику h_X мелкости сетки X, полагая $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M, а $C^S(\alpha, \beta)$ — линейное пространство функций, непрерывных вместе со всеми производными до порядка S во внутренних точках интервала (α, β).

Рассмотрим множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^4$.

Пусть $A_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\mathbf{a}_{j-3}, \mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\Big)$, Множество $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det A_j \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Совокупность всех полных цепочек будем обозначать $\mathbb{A}$.

3. Пространства (X, A, φ)-сплайнов

Рассмотрим четырех-компонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Если $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$, то функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, однозначно определяются из условий

$$\sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin S_j \cap M. \tag{3.1}$$

По формулам Крамера из (3.1) находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \ \| \ {}^{\prime j}\varphi(t)\Big)}{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k}\Big)} \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}),\ \forall j \in J_k, \tag{3.2}$$

где значок $\| \ {}^{\prime j}$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\varphi(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Из соотношения (3.1)

ясно, что $\operatorname{supp}\,\omega_j \subset S_j$. Более наглядны, но менее удобны для доказ
тельств формулы, получающиеся развертыванием соотношения (3.2):

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-3}, \mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-3}, \mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} \quad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} \quad \text{при } t \in (x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})}, \quad \text{при } t \in (x_{j+2}, x_{j+3}),$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \mathbf{a}_{j+3})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \mathbf{a}_{j+3})}, \quad \text{при } t \in (x_{j+3}, x_{j+4}).$$

В линейном пространстве $\mathbb{X}(M)$ содержится линейное пространств

$$\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \omega_j(t) \forall t \in M, \ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}, \qquad (3$$

называемое *пространством минимальных* $(X, \mathbf{A}, \varphi)$*-сплайнов* (треть
порядка); функции ω_j, $j \in \mathbb{Z}$, называются *образующими* пространст
$\widetilde{X}_{(X,\mathbf{A},\varphi)}$.

Рассмотрим возможность продолжения функции ω_j, $j \in \mathcal{Z}$, неп
рывным образом на интервал (α, β). Множество всех функций, неп
рывных на интервале (α, β), обозначим $C(\alpha, \beta)$; для любого натуральн
числа S введем также обозначение:

$C^S(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in C(\alpha, \beta) \ \ \forall i = 0, 1, 2, \ldots, S\}$, пола
$C^0(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta)$. Для вектор-функций

$$\mathbf{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} ([\mathbf{u}]_0(t), [\mathbf{u}]_1(t), [\mathbf{u}]_2(t), [\mathbf{u}]_3(t))^T$$

с компонентами $[\mathbf{u}]_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, введем пространства

$\mathbf{C}(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \mid [\mathbf{u}]_j \in C(\alpha, \beta) \forall j = 0, 1, 2, 3\}$,

$\mathbf{C}^S(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \mid [\mathbf{u}]_j \in C^S(\alpha, \beta) \ \forall j = 0, 1, 2, 3\}$; как обычно, счит
$\mathbf{C}^0(\alpha, \beta) = \mathbf{C}(\alpha, \beta)$.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in \mathbf{C}(\alpha, \beta)$, $\mathbf{A}$ *— полная цепочка векторо
пусть фиксированы* $k \in \mathcal{Z}$ *и* $t_* \in [x_k, x_{k+1}]$. *Для того, чтобы*

$$\lim_{t \to t_*, \ t \in (x_k, x_{k+1})} \omega_j(t) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \ \| \ {}'^{j}\varphi(t_*)\Big) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. При $t \in (x_k, x_{k+1})$ функция $\omega_j(t)$ имеет вид (3.2), так что, учитывая непрерывность вектор-функции $\varphi(t)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}] \in (\alpha, \beta)$, видим, что условия (3.4) и (3.5) эквивалетны. ∎

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in \mathbf{C}(\alpha, \beta)$, $\mathbf{A}$ — полная цепочка векторов, и в узле x_k выполнены условия*

$$\lim_{t\to x_k-0} \omega_{k-4}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to x_k+0} \omega_k(t) = 0. \tag{3.6}$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{t\to x_k-0} \omega_j(t) = \lim_{t\to x_k+0} \omega_j(t) \ \textit{при} \ j \in \{k-3, k-2, k-1\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Заменяя k на $k-1$ в соотношении (3.1), имеем

$$\sum_{j\in J_{k-1}} \mathbf{a}_j \omega_j(t) \equiv \varphi(t) \qquad \forall t \in (x_{k-1}, x_k),$$

откуда в пределе при $t \to x_k - 0$ ввиду первого из предположений (3.6) получаем

$$\sum_{j\in\{k-3,k-2,k-1\}} \mathbf{a}_j \lim_{t\to x_k-0} \omega_j(t) = \varphi(x_k). \tag{3.8}$$

Аналогично из (3.1) и второго соотношения в (3.6) находим

$$\sum_{j\in\{k-3,k-2,k-1\}} \mathbf{a}_j \lim_{t\to x_k+0} \omega_j(t) = \varphi(x_k). \tag{3.9}$$

Поскольку векторы $\{\mathbf{a}_j \mid j = k-3, k-2, k-1\}$ линейно независимы, то из тождеств (3.8) – (3.9) следуют соотношения (3.7). ∎

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathbf{C}(\alpha, \beta)$, $\mathbf{A}$ — полная цепочка векторов. Для того, чтобы функции $\omega_j(t)$ $(\forall j \in \mathcal{Z})$ могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α, β) необходимо и достаточно, чтобы предельные значения функций $\omega_j(t)$ $(\forall j \in \mathcal{Z})$ на границе носителя каждой из них были равны нулю.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Благодаря непрерывности вектор-функции $\varphi(t)$ достаточно исследовать непрерывность функций $\omega_j(t)$ в узлах сетки X. Если узел x_k находится на границе множества S_j, то непрерывность ω_j в этой точке вытекает из условия доказываемой теоремы. Если же узел x_k лежит внутри этого множества, то выполнены условия леммы 2, и, следовательно, справедливо соотношение (3.7). ■

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \mathbf{C}(\alpha,\beta)$, $\mathbf{A}$ — полная цепочка векторов. Для того, чтобы функции $\omega_j(t)$ $(\forall j \in \mathcal{Z})$ могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α,β), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены соотношения*

$$\det\bigl(\mathbf{a}_{k-3},\mathbf{a}_{k-2},\mathbf{a}_{k-1},\varphi(x_k)\bigr) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что обращение в нуль предельных значений функций $\omega_j(t)$ $(\forall j \in \mathcal{Z})$ на границе носителя каждой из них эквивалентно соотношениям (3.10).

Записывая формулу (3.2) для $k=j$, имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Bigl(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_j, j'\neq j} \ \| \ {}^{\prime j}\varphi(t)\Bigr)}{\det\Bigl(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_j}\Bigr)} \qquad \forall t \in (x_j, x_{j+1}),$$

или (что то же самое)

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-3},\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi(t)\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-3},\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j\bigr)} \quad \text{при } t \in (x_j, x_{j+1}).$$

Следовательно,

$$\omega_j(x_j+0) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-3},\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi(x_j)\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_{j-3},\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{a}_j\bigr)}$$

так что обращение в нуль на левом конце носителя эквивалентно равенству

$$\det\bigl(\mathbf{a}_{j-3},\mathbf{a}_{j-2},\mathbf{a}_{j-1},\varphi(x_j)\bigr) = 0,$$

что ввиду произвольности $j \in \mathbb{Z}$ совпадает с формулой (3.10).

Аналогичным образом применение соотношения (3.2) для $k = j+3$ дает

$$\omega_j(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t),\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2},\mathbf{a}_{j+3}\bigr)}{\det\bigl(\mathbf{a}_j,\mathbf{a}_{j+1},\mathbf{a}_{j+2},\mathbf{a}_{j+3}\bigr)}, \quad \text{при } t \in (x_{j+3}, x_{j+4}),$$

откуда

$$\omega_j(x_{j+4}-0) = \frac{\det\big(\varphi(x_{j+4}), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \mathbf{a}_{j+3}\big)}{\det\big(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \mathbf{a}_{j+3}\big)},$$

так что обращение в нуль на правом конце носителя эквивалентно равенству

$$\det\big(\varphi(x_{j+4}), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \mathbf{a}_{j+3}\big) = 0,$$

что совпадает с формулой (3.10), если принять во внимание произвольность $j \in \mathbb{Z}$ и положить $j = k-4$.

Теорема полностью доказана. ∎

Замечание 1. Анализируя доказательство теоремы нетрудно заметить, что для возможности непрерывного продолжения функций $\omega_j(t)$ $(\forall j \in Z)$ на интервал (α,β) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство нулю предельных значений на функций на левом конце носителя (или на правом конце носителя).

В дальнейшем для вектор-функции $\varphi \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$ положим

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_k), \qquad \varphi_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{(i)}(x_k), \quad i = 0,1,\ldots,S, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3. *Пусть $S \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$. Для того, чтобы производные $\omega_j^{(S)}(t)$ функций $\omega_j(t)$, $t \in M$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, могли быть продолжены до функций, непрерывных на интервале (α,β), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det\big(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \varphi_k^{(S)}\big) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно продифференцировать соотношения (3.2) и применить рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве предыдущей теоремы. ∎

Следствие 1. *Пусть $\varphi \in \mathbf{C}^2(\alpha,\beta)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$. Для того, чтобы все функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, могли быть продолжены до функций класса $C^2(\alpha,\beta)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\det\big(\mathbf{a}_{k-3}, \mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \varphi_k^{(S)}\big) = 0 \qquad S = 0,1,2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

Положим

$$\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \det\begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} & \varphi''_{j+1} \\ \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+2}^T\varphi''_{j+1} \\ \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi_{j+1} & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}_{j+3}^T\varphi''_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

Положим

$$\mathbf{a}_j \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} & \varphi''_{j+1} \\ \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi_{j+1} & \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}^T_{j+2}\varphi''_{j+1} \\ \mathbf{d}^T_{j+3}\varphi_{j+1} & \mathbf{d}^T_{j+3}\varphi'_{j+1} & \mathbf{d}^T_{j+3}\varphi''_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

считая внешний определитель символическим (относительно первой строки).

Нетрудно видеть, что, если $\varphi \in \mathbf{C}^3[\alpha, \beta]$, а вронскиан $\det(\varphi, \varphi', \varphi''\varphi''')(t)$ отличен от нуля на отрезке $[\alpha, \beta]$, то при достаточно мелкой сетке из класса $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ цепочка векторов $\mathbf{a}_j$ полная, и вполняются соотношения (3.12). Таким образом, для построения минимальных сплайнов класса C^2 в качестве функций $[\varphi]_0$, $[\varphi]_1$, $[\varphi]_2$, $[\varphi]_3$ достаточно взять фундаментальную систему решений дифференциального уравнения вида $y''' + b_2(t)y'' + b_1(t)y' + b_0(t)y = 0$ с непрерывными коэффициентами на отрезке $[\alpha, \beta]$. В частном случае уравнения $y''' = 0$ получаем хорошо известные B-сплайны третьей степени (см., например, [2-4]).

Список литературы

[1] **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М. 1972. 316 с.

[2] **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 248 с.

[3] **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.

[4] **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Полиномиальные сплайны. Л., 1986. 120 с.

[5] **Buhmann M.D.** Multiquadratic Prewavelets on Nonequally Spaced Knots in One Dimension. Math. of Comput., 1995. Vol. 64, № 212. P. 1611-1625.

[6] **Davydov O., Nurnberger G.** Interpolation by C^1 splines of degree $q \geq 4$ on triangulations. J. Comput. and Appl. Math., 2000. Vol. 126. P. 159-183.

[7] **Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.** О сплайнах максимальной гладкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2004. Сер. 1. Вып. 4. С. 3-11. P. 1611-1625.

[8] **Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.** О гладкости сплайнов Ж. Математическое моделирование. 2004, т.16, №12. С.40-43