ISSN 0132-4624
ISSN 0024-0850

# ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '98

серия 1

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

выпуск 1

УДК 539.371:678.01 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1998, вып. 1 (№ 1)

*О. Н. Иванцова*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОНСОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИТОВ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу расчета собственных частот связанных изгибно-крутильных колебаний прямоугольной консольной пластины, изготовленной из упругого анизотропного композита, предполагая, что армирующие волокна направлены под углом $\varphi$ к продольной оси. Предположим также, что срединная поверхность пластины является плоскостью симметрии, а толщина пластины мала, так что для нее применима теория изгиба пластин Кирхгофа-Лява [1].

Пусть $W(x, y, t)$ — поперечный прогиб пластины в точке с координатами $(x, y)$ в момент времени $t$, $\rho$ — поверхностная плотность пластины, $l$ — длина пластины, $c$ — ширина пластины, $h$ — ее толщина. Для расчета частот и форм свободных колебаний применяем вариационный принцип Гамильтона. С этой целью вычисляем кинетическую энергию

$$T(W) = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-c/2}^{c/2} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dx\, dy$$

и потенциальную энергию деформирования

$$V(W) = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-c/2}^{c/2} \left[ D_{11}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + D_{22}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 + 4D_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + 4D_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right] dx\, dy .$$

Аргументы функции $W(x, y, t)$ опущены для более краткой записи. Здесь $D_{ij}$ — общепринятые обозначения для изгибных жесткостей, которые вычисляются по исходным модулям упругости и модулю сдвига (в главных осях), коэффициенту Пуассона и углу армирования $\varphi$ [1].

Предполагая гармонический характер колебаний:

$$W(x, y, t) = w_0(x, y)\sin \omega t,$$

вариационное уравнение получаем в форме

$$\delta\left[V(w_0) - \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-c/2}^{c/2} \omega^2 \rho w_0^2(x, y)\, dx\, dy\right] = 0 . \tag{1}$$

Здесь $\delta$ — знак вариации. Точное решение уравнения (1) найти не удается. Для его приближенного решения используем вариационный метод Канторовича [2] для двух различных способов задания формы упругой поверхности пластины, отличающихся количеством слагаемых. В двучленном представлении

$$w_0(x, y) = w(x) + y\theta(x) \tag{2}$$

введены две неизвестные функции продольной координаты: прогиб $w(x)$ и угол закручивания $\theta(x)$. Третье слагаемое в трехчленном представлении

$$w_0(x, y) = w(x) + y\theta(x) + \left[4y^2 - c^2/3\right]\Phi(x) \tag{3}$$

описывает кривизну изогнутой поверхности пластины в направлении поперечной оси.

Метод Канторовича приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций, входящих в представления (2), (3). Ее решение можно найти различными способами, например, используя метод Галеркина. Таким образом, были получены значения нескольких первых частот изгибных и крутильных колебаний пластины с различной относительной длиной $R = l/c$. Так как колебания связанные, то в общем случае их нельзя разделить на чисто изгибные и чисто крутильные. Идентификация колебаний как преимущественно изгибных или преимущественно крутильных облегчается с помощью приведенных в работах [3, 4] многочисленных примеров форм колебаний. При увеличении длины $l$ собственные частоты преимущественно изгибных колебаний убывают пропорционально $l^{-2}$, а преимущественно крутильных колебаний – пропорционально $l^{-1}$. Естественно поставить задачу нахождения асимптотического представления частот при неограниченном увеличении длины пластины.

**2. Асимптотическое поведение преимущественно изгибных и преимущественно крутильных частот колебаний при двучленном представлении приближенного решения.** Подставив представление (2) в вариационное уравнение (1), после ряда преобразований получим связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Введем безразмерную координату $\xi = x/l$, а также новые неизвестные функции $w_1(\xi) = w(l\xi)/l$, $\theta_1(\xi) = \theta(l\xi)$. Из механических соображений очевидно, что функции $w_1(\xi)$ и $\theta_1(\xi)$ ограничены вместе со своими производными при любых значениях $l$, в том числе и при $l \to \infty$. В итоге связанная система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка запишется в виде

$$\begin{gathered} w_1^{\mathrm{iv}}(\xi) - a_1 l^4 w_1(\xi) + b_1 \theta_1'''(\xi) = 0\,, \\ - c_1 w_1'''(\xi) + (d_1/l^2)\theta_1^{\mathrm{iv}}(\xi) - \theta_1''(\xi) - e_1 l^2 \theta_1(\xi) = 0\,, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = \omega^2 \rho / D_{11}, \qquad b_1 = 2D_{16}/D_{11}, \qquad c_1 = D_{16}/(2D_{66}), \\ d_1 = D_{11}c^2/(48D_{66}), \qquad e_1 = \omega^2 \rho c^2/(48D_{66}). \end{gathered}$$

На концах пластины имеем следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} w_1(0) = w_1'(0) = \theta_1(0) = \theta_1'(0) = 0, \\ w_1''(1) + b_1\theta_1'(1) = 0, \quad w_1'''(1) = 0, \\ \theta_1''(1) = 0, \quad -c_1 w_1''(1) + (d_1/l^2)\theta_1'''(1) - \theta_1'(1) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Сначала рассмотрим случай преимущественно изгибных колебаний.

**Утверждение 1.** *При $l \to \infty$ частоты преимущественно изгибных колебаний имеют вид $\omega_n^{\text{изг}} = A_n/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$, где $A_n$ — не зависящая от $l$ постоянная, указанная ниже.*

Доказательство. Предположим, что $\omega_n^{\text{изг}} = A_n/l^{2+\gamma}$, где $\gamma > -2$. Покажем, что задача (4), (5) имеет нетривиальное решение лишь при $\gamma = 0$, и укажем способ нахождения величин $A_n$.

Допустим, что $\gamma > 0$. В таком предположении величины $a_1 l^4$, $d_1/l^2$, $e_1 l^2$ стремятся к нулю при $l \to \infty$, так что в пределе из (4) получим систему

$$\begin{gathered} w_1^{\mathrm{iv}}(\xi) + b_1\theta_1'''(\xi) = 0\,, \\ c_1 w_1'''(\xi) + \theta_1''(\xi) = 0\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Продифференцируем второе уравнение системы (6), домножим на $b_1$ обе его части, в результате получим $b_1\theta_1'''(\xi) = -b_1 c_1 w_1^{\mathrm{iv}}(\xi)$. Подставляя найденное выражение в первое уравнение системы (6), имеем: $(1 - b_1 c_1) w_1^{\mathrm{iv}}(\xi) = 0$. Из механических соображений следует неравенство $1 - b_1 c_1 \neq 0$, и потому

$$w_1^{\mathrm{iv}}(\xi) = \theta_1'''(\xi) = 0.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$w_1(\xi) = a_2\xi^3 + b_2\xi^2 + c_2\xi + d_2, \qquad \theta_1(\xi) = a_3\xi^2 + b_3\xi + c_3.$$

Так как величина $d_1/l^2$ стремится к нулю при $l \to \infty$, то из условий (5) получаем

$$\begin{gathered} w_1(0) = w_1'(0) = \theta_1(0) = \theta_1'(0) = 0, \quad w_1'''(1) = \theta_1''(1) = 0, \\ w_1''(1) + b_1\theta_1'(1) = 0, \\ c_1 w_1''(1) + \theta_1'(1) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Однородная система (7) имеет тривиальное решение $w_1''(1) = \theta_1'(1) = 0$, так как ее определитель $1 - b_1c_1$ не равен нулю. Итак, граничные условия могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} w_1(0) = w_1'(0) = w_1''(1) = w_1'''(1) = 0, \\ \theta_1(0) = \theta_1'(0) = \theta_1'(1) = \theta_1''(1) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Исходя из (8), получаем $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$ и $a_3 = b_3 = c_3 = 0$. Значит, $w_1(\xi) = 0$ и $\theta_1(\xi) = 0$. Таким образом, при $\gamma > 0$ возможны лишь тривиальные решения.

Аналогичным образом доказывается, что и при $-2 < \gamma < 0$ нетривиальных решений нет. Итак, $\omega_n^{\text{изг}} = A_n/l^2$. Перейдем к вычислению постоянных $A_n$ и нахождению соответствующих «предельных» собственных форм колебаний. При $l \to \infty$ второе уравнение системы (4) сводится к следующему:

$$-c_1 w_1'''(\xi) - \theta_1''(\xi) = 0. \tag{9}$$

Найдем отсюда дифференцированием $w_1^{\text{IV}}(\xi)$ и подставим его в первое уравнение системы (4), в итоге получим

$$w_1^{\text{IV}}(\xi) - a_1 l^4/(1 - b_1c_1) w_1(\xi) = 0\,, \tag{10}$$

т. е. хорошо известное уравнение колебаний балки Тимошенко вида $w_1^{\text{IV}}(\xi) - \Omega_n^2 w_1(\xi) = 0$, решение которого должно удовлетворять граничным условиям $w_1(0) = w_1'(0) = w_1''(1) = w_1'''(1) = 0$. Аналитические выражения собственных форм колебаний $w_1(\xi)$ и соответствующих собственных частот $\Omega_n$ можно считать известными, ибо они приведены в стандартных курсах механики. Очевидно, что искомые частоты, входящие в уравнение (10), равны

$$\omega_n^{\text{изг}} = \frac{\Omega_n}{l^2}\sqrt{\frac{D_{11}D_{66} - D_{16}^2}{\rho D_{66}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

так что коэффициенты $A_n$ вычисляются по формуле

$$A_n = \Omega_n\sqrt{\frac{D_{11}D_{66} - D_{16}^2}{\rho D_{66}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Итак, решение уравнения (10) найдено. Теперь остается подставить $w_1(\xi)$ в уравнение (9) и найти $\theta_1(\xi)$ с учетом соответствующих граничных условий. Очевидно, что величина $\theta_1(\xi)$ бесконечно мала по сравнению с величиной $w(l\xi) = lw_1(\xi)$, что и означает преимущественно изгибный характер найденных частот и форм колебаний.

Заметим, что частоты (11), при которых уравнение (10) имеет нетривиальное решение, меньше соответствующих парциальных частот изгибных колебаний (т. е. частот, находимых из первого уравнения системы (4) при $D_{16} = 0$, когда система распадается на два независимых уравнения) в $\sqrt{1 - b_1c_1} = \sqrt{1 - D_{16}^2/(D_{11}D_{66})}$ раз.

Теперь рассмотрим случай преимущественно крутильных колебаний.

**Утверждение 2.** *При $l \to \infty$ частоты преимущественно крутильных колебаний имеют вид $\omega_n^{\text{кр}} = B_n/l$, $n = 1, 2, \ldots$, где $B_n$ — не зависящая от $l$ постоянная, указанная ниже.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\omega_n^{\text{кр}} = B_n/l^{1+\gamma}$, где $\gamma > -1$. Аналогично утверждению 1 можно показать, что система (4) имеет нетривиальное решение лишь при $\gamma = 0$. Итак, $\omega_n^{\text{кр}} = B_n/l$, $n = 1, 2, \ldots$ Найдем постоянные $B_n$ и соответствующие "предельные" собственные формы колебаний.

Запишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned} &w_1^{\text{iv}}(\xi)/l^2 - a_1 l^2 w_1(\xi) + (b_1/l^2)\theta_1'''(\xi) = 0\,, \\ &-c_1 w_1'''(\xi) + (d_1/l^2)\theta_1^{\text{iv}}(\xi) - \theta_1''(\xi) - e_1 l^2 \theta_1(\xi) = 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

При $l \to \infty$ в левой части первого уравнения этой системы (в предположении ограниченности входящих в него функций и их производных) исчезают все слагаемые, кроме второго, стремящегося к величине $-B_n^2 \rho w_1(\xi)/D_{11}$. Следовательно, $w_1(\xi) = 0$. Второе уравнение системы (12) в итоге примет вид

$$\theta_1''(\xi) + \omega^2 l^2 \frac{\rho c^2}{48 D_{66}} \theta_1(\xi) = 0\,.$$

Значит, необходимо решить уравнение $\theta_1''(\xi) + \Omega_n^2 \theta_1(\xi) = 0$, решение которого должно удовлетворять всего двум граничным условиям, а именно $\theta_1(0) = \theta_1'(1) = 0$, поскольку произошло понижение порядка уравнения на две единицы. Итак, искомые частоты преимущественно крутильных колебаний вычисляются по формуле

$$\omega_n^{\text{кр}} = \frac{\Omega_n}{lc}\sqrt{48 D_{66}/\rho}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Величины $B_n$ находим по формуле

$$B_n = \frac{\Omega_n}{c}\sqrt{48 D_{66}/\rho}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что в отличие от предыдущего случая преимущественно изгибных частот здесь не происходит редукции крутильных частот по сравнению с парциальными крутильными частотами, находимыми из второго уравнения системы (4), формально получающегося при $c_1 = d_1 = 0$.

Формулы (11), (13) определяют поведение частот преимущественно изгибных и преимущественно крутильных колебаний пластины при ее бесконечном удлинении.

**3. Асимптотическое поведение преимущественно изгибных и преимущественно крутильных частот колебаний при трехчленном представлении приближенного решения.** Подставив выражение (3) для формы упругой поверхности пластины при колебаниях в вариационное уравнение (1), после громоздких преобразований получаем систему из трех связанных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} &w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\beta_{16}\theta_1'''(\xi) + 8\beta_{12}\Phi_1''(\xi) = k_B^2 w_1(\xi)\,, \\ &-24R^2\beta_{16}w_1'''(\xi) + \theta_1^{\text{iv}}(\xi) - \beta_{66}\theta_1''(\xi) + 16\beta_{16}\Phi_1'''(\xi) - \\ &-192R^2\beta_{26}\Phi_1'(\xi) = k_B^2\theta_1(\xi)\,, \\ &90R^4\beta_{12}w_1''(\xi) - 15R^2\beta_{16}\theta_1'''(\xi) + 180\beta_{26}R^4\theta_1'(\xi) + \\ &+\Phi_1^{\text{iv}}(\xi) - 5\beta_{66}\Phi_1''(\xi) + \beta_{22}\Phi_1(\xi) = k_B^2\Phi_1(\xi)\,, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$(\beta_{ij})_{i,j=1,2,6} = \frac{1}{D_{11}}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & 720R^4 D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & 48R^2 D_{66} \end{pmatrix}, \; k_B^2 = \frac{\omega^2\rho l^4}{D_{11}}.$$

Здесь $\Phi_1(\xi)$ — прогиб пластины в поперечном направлении. На концах пластины имеем следующие граничные условия:

$$
\begin{gathered}
w_1(0) = w_1'(0) = \theta_1(0) = \theta_1'(0) = \Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = 0\,,\\
w_1''(1) + 2\beta_{16}\theta_1'(1) + 8\beta_{12}\Phi_1(1) = 0\,,\\
w_1'''(1) + 2\beta_{16}\theta_1''(1) + 8\beta_{12}\Phi_1'(1) = 0\,,\\
\theta_1''(1) + 16\beta_{16}\Phi_1'(1) = 0\,, \quad \Phi_1''(1) = 0,\\
24R^2\beta_{16}w_1''(1) - \theta_1'''(1) + \beta_{66}\theta_1'(1) + 192R^2\beta_{26}\Phi_1(1) = 0\,,\\
15R^2\beta_{16}\theta_1'(1) - \Phi_1'''(1) + 5\beta_{66}\Phi_1'(1) = 0\,.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Рассмотрим случай преимущественно изгибных колебаний.

**Утверждение 3.** *При $l \to \infty$ частоты преимущественно изгибных колебаний имеют вид $\omega_n^{\text{изг}} = A_n/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$, где $A_n$ — не зависящая от $l$ постоянная, указанная ниже.*

Доказательство. Предположим, что $\omega_n^{\text{изг}} = A_n/l^{2+\gamma}$, где $\gamma > -2$. Покажем, что система (14) имеет нетривиальное решение лишь при $\gamma = 0$.

Допустим, что $\gamma > 0$. Тогда в пределе получим систему

$$
\begin{gathered}
w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\tilde\beta_{16}\theta_1'''(\xi) + 8\tilde\beta_{12}\Phi_1''(\xi) = 0\,,\\
\tilde\beta_{16}w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\tilde\beta_{66}\theta_1'''(\xi) + 8\tilde\beta_{26}\Phi_1''(\xi) = 0\,,\\
\tilde\beta_{12}w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\tilde\beta_{26}\theta_1'''(\xi) + 8\tilde\beta_{22}\Phi_1''(\xi) = 0\,,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

где $\tilde\beta_{ij} = D_{ij}/D_{11}$. Аналогично делая предельный переход в граничных условиях (15) при $l \to \infty$, получаем две однородные системы

$$
\begin{gathered}
w_1'''(1) + 2\tilde\beta_{16}\theta_1''(1) + 8\tilde\beta_{12}\Phi_1'(1) = 0\,,\\
w_1'''(1) + 2\tilde\beta_{16}\theta_1''(1) + 8\tilde\beta_{12}\Phi_1'(1) = 0\,,\\
\tilde\beta_{16}w_1'''(1) + 2\tilde\beta_{66}\theta_1''(1) + 8\tilde\beta_{26}\Phi_1(1) = 0\,,\\
\theta_1''(1) + 16\tilde\beta_{16}\Phi_1'(1) = 0\,,\\
\tilde\beta_{16}\theta_1''(1) + 16\tilde\beta_{66}\Phi_1'(1) = 0\,.
\end{gathered}
$$

Определители этих однородных систем не равны нулю, следовательно, они имеют только тривиальное решение $w_1'''(1) = \theta_1''(1) = \Phi_1'(1) = 0$. Итак, граничные условия (15) можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
w_1(0) = w_1'(0) = \theta_1(0) = \theta_1'(0) = \Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = 0,\\
\Phi_1''(1) = 0, \qquad w_1'''(1) = \theta_1''(1) = \Phi_1'(1) = 0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Решения системы (16) имеют вид

$$
\begin{gathered}
w_1(\xi) = a_2\xi^3 + b_2\xi^2 + c_2\xi + d_2,\\
\theta_1(\xi) = a_3\xi^2 + b_3\xi + c_3,\ \ \Phi_1(\xi) = a_4\xi + b_4.
\end{gathered}
$$

Учитывая (17), получаем, что $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$, $a_3 = b_3 = c_3 = 0$, $a_4 = b_4 = 0$. Таким образом, при $\gamma > 0$ возможны лишь тривиальные решения. Аналогичным образом доказывается, что и при $-2 < \gamma < 0$ нетривиальных решений нет.

Итак, $\omega_n^{\text{изг}} = A_n/l^2$ и система (14) при $l \to \infty$ сводится к следующей:

$$
\begin{gathered}
w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\tilde\beta_{16}\theta_1'''(\xi) + 8\tilde\beta_{12}\Phi_1''(\xi) = k_B^2 w_1(\xi)\,,\\
\tilde\beta_{16}w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\tilde\beta_{66}\theta_1'''(\xi) + 8\tilde\beta_{26}\Phi_1''(\xi) = 0\,,\\
\tilde\beta_{12}w_1^{\text{iv}}(\xi) + 2\tilde\beta_{26}\theta_1'''(\xi) + 8\tilde\beta_{22}\Phi_1''(\xi) = 0.
\end{gathered}
$$

Рассматривая ее как систему линейных алгебраических уравнений относительно $w_1^{\mathrm{iv}}(\xi)$, $\theta_1'''(\xi)$, $\Phi_1''(\xi)$, придем к дифференциальному уравнению

$$w_1^{\mathrm{iv}}(\xi) - \frac{\det_2}{\det_3} k_B^2 w_1(\xi) = 0\,,$$

где

$$\det_2 = \begin{vmatrix} \tilde\beta_{66} & \tilde\beta_{26} \\ \tilde\beta_{26} & \tilde\beta_{22} \end{vmatrix}, \qquad \det_3 = \begin{vmatrix} 1 & \tilde\beta_{16} & \tilde\beta_{12} \\ \tilde\beta_{16} & \tilde\beta_{66} & \tilde\beta_{26} \\ \tilde\beta_{12} & \tilde\beta_{26} & \tilde\beta_{22} \end{vmatrix}.$$

Это известное уравнение колебаний балки Тимошенко. Следовательно, аналитические выражения собственных форм колебаний $w_1(\xi)$ и соответствующие собственные частоты могут быть найдены, как и выше. Величины $A_n$ вычисляются по формулам вида

$$A_n = \Omega_n \sqrt{\frac{D_{11}\det_3}{\rho\det_2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим случай преимущественно крутильных колебаний.

**Утверждение 4.** *При $l \to \infty$ частоты преимущественно крутильных колебаний имеют вид $\omega_n^{\text{кр}} = B_n/l$, $n = 1, 2, \ldots$, где $B_n$ — не зависящая от $l$ постоянная, а именно:*

$$B_n = \frac{\Omega_n}{c}\sqrt{\frac{48D_{66}}{\rho}\Big(1 - \frac{D_{26}^2}{D_{22}D_{66}}\Big)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

Заметим, что в случае трехчленного представления (3) происходит редукция как преимущественно изгибных, так и преимущественно крутильных частот колебаний по сравнению с соответствующими парциальными частотами. Расчеты показали, что такая ситуация точнее описывает реальное поведение свободных колебаний консольных образцов по сравнению с первой моделью.

SUMMARY

*Ivantsova O. N.* Frequency determination for composite cantilever plates.

Asymptotical representations of the frequencies of the bending and torsion vibrations for composite cantilever plates with length infinite increasing are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винсон Ж. Р., Сираковский Р. Л.* Поведение конструкций из композитных материалов. М., 1991. 264 с.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962. 708 с.
3. *Lin D. X., Ni G., Adams R. D.* Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates // J. Composite Materials. 1984. Vol. 18. P. 132–152.
4. *Crawley E. F.* The natural modes of graphite/epoxy cantilever plates and shells // J. Composite Materials. 1979. Vol. 13. P. 195–205.

Статья поступила в редакцию 25 февраля 1997 г.