

ISSN 2313-7304

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

ТОМ 9 (25)

**ТРУДЫ III МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ**

**Санкт-Петербург
4 – 8 апреля 2022 года**

ISSN 2313-7304

***CONTROL PROCESSES
AND STABILITY***

Vol. 9 (25)

**PROCEEDINGS OF THE LIII
INTERNATIONAL CONFERENCE**

**St. Petersburg
April 4 – 8, 2022**

PUBLISHING HOUSE
FEDOROVA G.V.
2022

ББК 22.1

П84

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Петросян (отв. редактор) (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Смирнов (зам. отв. редактора) (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. О. И. Дривотин (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Жабко (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. Д. Котина (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ю. Крылатов (СПбГУ)

Процессы управления и устойчивость. Том 9(25). № 1 / науч.
П84 редакторы тома Н. В. Смирнов., А. С. Еремин, Т. Е. Смирнова,
СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2022. 522 с.
ISSN 2313-7304

«Процессы управления и устойчивость» – ежегодное научное издание. Издаётся на факультете прикладной математики – процессов управления СПбГУ с 1998 года. Сборник традиционно формируется по результатам работы ежегодной Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» и включает статьи студентов, аспирантов, сотрудников СПбГУ и других высших учебных заведений, в том числе зарубежных, по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, информационным и компьютерным технологиям, теории управления социально-экономическими системами.

В Том 9(25) включены статьи участников 53-й Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (4 – 8 апреля 2022 года), прошедшие рецензирование и рекомендованные к публикации. Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.1

*Сборник издается при финансовой поддержке
факультета прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета*

ISSN 2313-7304

© Издательский Дом Федоровой Г. В., 2022
© Смирнов Н. В., 2022

Содержание

Пленарная сессия	9
Приглашенные лекторы	9
<i>Еремин А. С.</i> Непрерывные методы Рунге – Кутты для решения уравнений с запаздываниями	13
1. Математическая теория процессов управления	39
<i>Белов А. И.</i> Достаточные условия экспоненциальной устойчивости для линейной системы с запаздыванием	39
<i>Евтина Д. С.</i> Функционалы Ляпунова – Красовского для однородных уравнений с распределённым запаздыванием	44
<i>Жигалов В. С.</i> Проблема фильтрации в задаче наблюдения состояния в дифференциально-разностных системах	49
<i>Клименко И. С.</i> Реализация метода матричных отображений для решения системы дифференциальных уравнений	53
<i>Кудряков Д. А.</i> Новый критерий устойчивости для линейных систем нейтрального типа	58
<i>Литвишко И. Р.</i> Динамическое позиционирование автономного необитаемого подводного аппарата в мелководной зоне ...	63
<i>Паж Н. В.</i> Стабилизация маятника Фуруты с использованием обратной связи с многоцелевой структурой. Переход к цифровому управлению	72
2. Математические методы в механике и физике	77
<i>Алмазова Л. А., Седова О. С.</i> Численное исследование прочности алюминиевого сплава с дефектами при циклических нагрузках	77
<i>Вяльцева В. В., Седова О. С.</i> Применение обобщенного метода конечных элементов с локальным и глобальным решением к задаче Кирша	82
<i>Казанков В. К., Холодова С. Е.</i> Математическое моделирование магнитогидродинамических процессов в океанах	87
<i>Онегов Н. А.</i> Оценка и анализ нагрузки внутренних волн на морские нефтепромысловые сооружения	92

<i>Пегливанова М. М.</i> Коррозионный износ пластины из материала с пластической анизотропией при чистом изгибе	97
<i>Семина К. И., Седова О. С.</i> Анализ состава блоков сплава АМг5, созданных с помощью проволочно-дуговых аддитивных технологий	102
<i>Тран З.</i> Программный комплекс для решения уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами в сетеподобной области	108
<i>Хоанг В. Н.</i> Дифференциально-разностная система в соболевском пространстве функций с носителями на сетеподобной области	113
3. Математические модели медико-биологических систем	119
<i>Лориц Е. М.</i> Разработка алгоритма упаковки молекул воды в ограниченном объеме	119
<i>Сенаторова Н. М., Гук К. П.</i> Разработка систем уточнения онкологического диагноза на основе технологий обработки изображений	124
<i>Холодова С. Е., Черкай К. М.</i> Математическое моделирование движения крови по сосудам с учётом эффектов деформации стенок	132
<i>Andrienko V. A., Molin A. E.</i> Semantic breast ultrasound image segmentation with neural networks based on U-net architecture. .	141
<i>Katguria F. H., Goncharova A. B.</i> Determination of malignancy of neoplasm from mammograms	151
<i>Kurniawati A. C. D.</i> Telemedicine during COVID-19 pandemic: a review of the literature	156
4. Информационные и компьютерные технологии	165
<i>Андрейченко А. Г., Блеканов И. С.</i> Нейросетевые методы анализа мнений пользователей в дискуссиях социальных сетей . .	165
<i>Бальжин А. Ф.</i> Моделирование динамических характеристик аналоговых аудио компрессоров с использованием рекуррентных нейронных сетей	175

<i>Бевз Р. Ю.</i> Математическое моделирование формирования спроса на рынке контейнерных грузовых железнодорожных перевозок	184
<i>Васильев В. А., Кузнецова Д. С.</i> Алгоритм роя частиц и анализ его эффективности для решения задач безусловной однокритериальной оптимизации	190
<i>Ганаева Д. Д., Головкина А. Г.</i> Метод реконструкции нелинейных динамических систем по временным рядам	197
<i>Девришев Н. Э., Хэ Ю., Петросян О. Л.</i> Обнаружение аномалий во временных рядах с помощью методов прогнозирования	202
<i>Дзюба В. И.</i> Применение концепции федеративного обучения для решения задачи классификации текста	210
<i>Долженков С. Д.</i> Сравнительный анализ агломеративных методов кластеризации на примере модельного множества точек евклидовой плоскости	215
<i>Ежов Ф. В.</i> Исследование гибридных моделей нейронных сетей с применением SSA на примере реальных данных	223
<i>Ивкин К. А.</i> Разработка программного комплекса для управления роботом-манипулятором на примере FANUC M-20iA ...	232
<i>Ковгар А. В., Ходосов А. С., Чугунова Н. С.</i> Разработка системы сбора и обработки данных о распространении вирусных заболеваний	238
<i>Кравцов В. М.</i> Исследование методов прогнозирования в задаче нефтепереработки	243
<i>Кузнецов М. М.</i> Разработка сервиса юридической помощи на основе методов машинного обучения	248
<i>Куприянов И. В., Давыденко А. А.</i> Колоризация черно-белых изображений с помощью нейросетей	254
<i>Лаврова А. К., Якушкин О. О.</i> О проблемах и рисках для пользователей существующей архитектуры NFT	261
<i>Ларин Е. С.</i> Применимость исправления статистических критериев на примере задачи обнаружения сигнала во временных рядах	267
<i>Оглоблина А. Д., Плешканов Н. В.</i> Классификация статей Рikаbи по пользовательским тегам	272

<i>Разумилов Е. С., Блеканов И. С.</i> Аспектно-ориентированный сентимент-анализ пользовательских сообщений в социаль- ных сетях	280
<i>Смирнов Н. В., Сачков А. В., Смирнова Т. Е.</i> Численное мо- делирование и анализ экономических систем	289
<i>Хлопич И. В.</i> Предсказывание наличия болезни сердца у че- ловека с помощью машинного обучения	295
<i>Ходосов А. С., Ковгар А. В., Филатов И. С.</i> Сравнительный анализ систем хранения данных в мобильных приложениях под управлением iOS и Android	301
<i>Chang G., He D., Wei Y., Chen G.</i> Research on occlusion detec- tion algorithm based on self-attention mechanism	306
<i>Ding Z. H., Yang F. W., Petrosian O., Li Y., Liu Y.</i> Audio-visual speech recognition	311
<i>Fan X., Li P., Gong S., Fu G.</i> Based on Siamese Network world ancient celebrity portrayals recognition	319
<i>Liu Y., Sun Z., Liu J., Qu C.</i> Tweet sentiment extraction	324
<i>Ma R., Zhang Y., Liu J., Petrosian O.</i> Next running application prediction in OS using time-series forecasting and XAI	329
<i>Pavlova E., Yakushkin O., Pen E., Sedova O., Frikh-Khar A., Terekhina Ya., Lamzin N., Pirozhkov E., Bortov M., Karpenko V.</i> Unsupervised learning on narrowly focused data aggregated automatically	339
<i>Pu Y., Yuan S., Meng L.</i> Research on ceramic brick defect detection system based on Siamese Network	345
<i>Smirnov M. N., Smirnova M. A.</i> Control of an unmanned under- water vehicle	350
<i>Sun Q., Zhao C., Petrosian O., Li Y.</i> Power allocation in wireless cellular networks: stochastic algorithm based approach	357
<i>Useinov L., Makarov D., Beloshapko A., Korkhov V.</i> Neural networks transfer learning for KLT Bin pose estimation	363
<i>Yang W., Lan J., Li L., Li Z.</i> Intelligent OpenCV-based check-in and clock-in system	369
<i>Zhou X., Qu L., Qu C.</i> Research on smart city comprehensive security prevention and control system	374

5. Управление социально-экономическими системами..379

- Балас Т. Н.* Одна гибридная задача оптимального управления с несколькими переключениями.....379
- Белоусова А. В.* Построение оптимального расписания производственного процесса с использованием пакета Gurobi.....387
- Белоусова М. В.* Прогнозирование надежности технических систем на основе модели Хольта – Уинтерса 393
- Болатбек А.* Ценность информации о граничных условиях в задаче оптимального расходования запасов ресурсов при терминальных ограничениях.....398
- Кареева Ю. С.* Динамическая модель влияния на мнения участников социальной сети 403
- Мазанов Г. П.* Об устойчивости кооперации при косвенном взаимодействии игроков 408
- Маковеева П. Е.* Модель Фридкина – Джонсена при однократном воздействии на мнения социальной группы 415
- Немцев Д. Ю., Тур А. В.* Позиционное значение как мера центральности вершин графа 419
- Нечипорук А. А.* Эквивалентность моделей динамики мнений в социальных сетях с повторяющейся структурой.....427
- Петров М. М., Колбин В. В.* Многоцелевые стохастические одноэтапные задачи принятия решений. Доминантный принцип выбора.....432
- Сорокина П. Э.* Исследование и прогнозирование продолжительности жизни.....438
- Фиряго У. А., Кочеров И. П.* Моделирование динамики спроса на скоропортящуюся продукцию.....443
- Шконда А. Ю.* Задача об оптимальной политике фирмы.....449
- Chen G., Zhang B., Kou Z.* Prediction of PM2.5 concentration based on multiple linear regression model 454
- Feng A., Wang Z., Dang Y., Ren H.* Prediction of local multi-factor housing price model based on Sklearn linear model.....459
- Gao J.* Two-player opinion control game with limited observation moments.....464

<i>Qi D.</i> Spatial autocorrelation model of development differences based on ESDA	469
<i>Ran Y., Qian J., Gao Z., Wang Q.</i> Research on loan strategy of commercial housing purchase based on threat and risk assessment	474
<i>Tian M.</i> Statistical models and machine learning model in air quality index prediction in Peking	479
<i>Wang D., Guo Z.</i> Calculation of the main macroeconomic parameters of the China's economy based on the Leontief table	487
<i>Wu Y., Ye P.</i> Investigation of optimal pollution control problem with regime shifts	492
<i>Zhao C.</i> A simple variant of concealed voter model	498
<i>Zhou J., Petrosian O., Tur A., Gao H.</i> Pollution control problem with dynamic uncertainty updating	503
Contents	513
Именной указатель	519

*Пленарная
сессия*



Котина Елена Дмитриевна

*доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра теории управления,
факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербургский государственный университет*



Цифровая обработка медицинских изображений

Аннотация. Современная медицина владеет целым арсеналом диагностических изображений различной модальности. Это изображения, полученные методами компьютерной томографии (КТ), ультразвуковой томографии (УЗИ), магниторезонансной томографии (МРТ), однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ), позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ) и т.д. В докладе будет представлена краткая историческая справка о появлении данных методов, а также о том, какой физический смысл имеют цифры, лежащие в основе различных изображений. Приведены основные классы задач цифрового анализа изображений, рассмотрены примеры цифровой обработки радионуклидных изображений, полученных методами ОФЭКТ и ПЭТ. Представлен обзор задач цифровой обработки, а также рассмотрены современные тенденции и актуальные задачи в данной области.

Kotina Elena Dmitrievna

*D.Sc., Professor,
Department of Control Theory,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
Saint Petersburg State University*

Digital processing of medical images

Abstract. Modern medicine has a whole arsenal of diagnostic images of various modalities. These are images obtained by computed tomography (CT), ultrasound (ultrasound), magnetic resonance imaging (MRI), single-photon emission computed tomography (SPECT), positron emission tomography (PET), etc. The report will provide a brief historical background about the appearance of these methods, as well as about the physical meaning of the numbers underlying the various images. The main classes of digital image analysis tasks are given, examples of digital processing of radionuclide images obtained by the methods of SPECT and PET are considered. An overview of digital processing tasks is presented, as well as current trends and actual tasks in this area are considered.

Еремин Алексей Сергеевич

*кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра информационных систем,
факультет прикладной математики – процессов управления,
Санкт-Петербургский государственный университет*



Непрерывные методы Рунге – Кутты для решения уравнений с запаздываниями

Аннотация. Адаптация методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям с переменными или рационально соотносящимися постоянными запаздываниями является нетривиальной задачей. В докладе обосновывается выбор одношаговых методов для уравнений с запаздываниями и представлено использование непрерывных расширений методов Рунге – Кутты для их эффективного решения. Отдельное внимание уделяется случаю исчезающих (или просто очень малых) запаздываний, при которых применение даже явных методов становится полностью неявным. Приводится решение этой проблемы введением непрерывных расширений для каждого этапа. Рассматриваются варианты уменьшения вычислительной работы за счёт повторного использования некоторых этапов. Приводятся более экономичные методы на основе идеи методов Рунге – Кутты – Нюстрёма.

Eremin Alexey Sergeevich

*PhD, Associate Professor,
Department of Information Systems,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
Saint Petersburg State University*

**Continuous Runge – Kutta methods
for delay differential equations**

Abstract. Application of numerical methods for ordinary differential equations to equations with delays becomes nontrivial when time- or state-dependent delays, or even constant but non-rationally proportional delays are considered. In the talk the choice of one-step methods for delay differential equations is justified, and use of methods' continuous extensions for such equations is presented. Special mention is made of vanishing (or just very small) delays, for which the so-called overlapping occurs and even explicit methods are applied fully implicitly. The solution for the problem is made by continuous extension of the stages. Reduce of computational work by stages reuse and structural properties of the equation exploitation is also considered.

УДК 519.622, 519.642

Еремин А. С.

Непрерывные методы Рунге–Кутты для решения уравнений с запаздываниями

Введение. В работе рассматриваются уравнения с запаздывающим аргументом, обсуждается вопрос их численного решения. Рассматриваются методы Рунге–Кутты, их непрерывные варианты. Отдельно рассматривается дальнейшее расширение методов Рунге–Кутты – функционально-непрерывные методы, которые позволяют сохранить простоту реализации для уравнений с исчезающими запаздываниями и функциональных дифференциальных уравнений. В последнем разделе формулируются актуальные, пока нерешённые задачи.

1. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. В данной работе мы рассматриваем дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами (ДУЗА, *delay differential equations*), сосредоточенными в одной точке. Формально таких запаздываний может быть несколько, но для демонстрации принципа работы численных методов достаточно рассмотреть одно:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leq t_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь τ называется *дискретным запаздыванием* (или просто запаздыванием, если в контексте нет сравнения его с распределёнными запаздываниями). Оно может быть переменным и в общем случае зависеть, как он t , так и от $y(t)$. Функция $\varphi(t)$, определяющая поведение решения до начальной точки t_0 , называется *предысторией*. Она выполняет роль начальных данных, но в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не только $\varphi(t_0)$ определяет решение, но все значения $\varphi(t)$ на отрезке $t \in [\min_{t \geq t_0} (t - \tau); t_0]$.

Область применения ДУЗА весьма широка. Они используются при построении моделей в биологии, экологии, эпидемиологии, медицине, иммунологии, экономике, механике и инженерном деле, динамике жидкостей, релятивистской механике и т. д. Адресуем чита-

Еремин Алексей Сергеевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.eremin@spbu.ru, тел.: +7(921)871-89-37

телей к монографиям по приложениям ДУЗА и ссылкам на оригинальные источники моделей, приведённые там [1–3].

Уравнения с запаздывающим аргументом изучаются с теоретической точки зрения довольно давно (см., например, классические монографии [4,5]), и интерес к ним не ослабевает по сей день. Список даже недавних публикаций весьма обширен, поэтому здесь упомянем некоторые работы учёных факультета ПМ–ПУ, которые посвящены анализу поведения и устойчивости решений ДУЗА [6–16] и управлению в системах с запаздываниями [17–19]. В настоящей работе нас интересует численное решение, потому мы рассмотрим некоторые особенности ДУЗА по сравнению с ОДУ, которые будет необходимо учитывать при выборе или конструировании численных методов.

1.1. Некоторые особенности динамики. В связи с тем, что предыстория, определяющая решение является функцией, а не числом, возникает несколько существенных отличий ДУЗА от ОДУ.

Пример 1. В первую очередь следует отметить, что даже скалярное ДУЗА может демонстрировать периодическое и хаотическое поведение решения, в то время как они могут появиться лишь в системе из не менее чем двух (периодическое) или трёх (хаотическое) ОДУ. Известный пример такого поведения даёт уравнение Маккея–Гласса [20]

$$y'(t) = \frac{by(t-\tau)}{1+(y(t-\tau))^n} - ay(t)$$

при некотором наборе параметров (например, $a = 0,1$, $b = 0,2$, $n = 10$, $\tau = 20$).

Пример 2 [21]. Нет взаимно-однозначного соответствия между решением и начальными данными. В частности, уравнение

$$y'(t) = y(t-1)(y(t)-1), \quad t \geq 0,$$

имеет решение $y(t) \equiv 1$ для любой заданной на $[-1, 0]$ $\varphi(t)$ такой, что $\varphi(0) = 1$.

Пример 3 [21]. Наоборот, одной и той же предыстории могут удовлетворять несколько решений. В уравнении

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - |y(t)| - 1) + \frac{1}{2}, & t \geq 0, \\ y(t) = \begin{cases} 1, & t < -1, \\ 0, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \end{cases}$$

обе функции $\frac{3}{2}t$ и $\frac{1}{2}t$ являются решениями на $[0, 2]$.

Пример 4 [4]. Эльсгольц и Норкин приводят пример с обрывом решения в конечной точке:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - 2 - y^2(t)) + 5, & t \geq 0, \\ y(t) = \begin{cases} \frac{9}{2}, & t < -1, \\ -\frac{1}{2}, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \end{cases}$$

На отрезке $[0, \frac{125}{121}]$ решение легко найти

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - 1), & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{11}{2}(t - 1), & 1 \leq t \leq \frac{125}{121}. \end{cases}$$

Можно увидеть, что правее точки $\frac{125}{121}$ решение построить не удаётся, так как в ней запаздывающий аргумент равен в точности -1 , и каждая из веток предыстории будет давать решение, которое должно опираться на другую ветку (см. [4] для подробного разбора). Крайне интересным с точки зрения численного решения является показанный в [21] факт, что численный метод как правило не обнаруживает подобные обрывы и продолжает строить некое «фантомное» решение.

Отмеченные в примерах 2–4 особенности проявляются всё же далеко не во всех уравнениях и специальные подпрограммы для их отслеживания и обработки, скорее, могут являться некими дополнительными модулями к основной программе численного решения ДУЗА. Однако при решении уравнений с запаздываниями есть одна особенность, которую обязан учитывать любой метод.

1.2. Точки разрыва производных. В ОДУ при выполнении условий достаточной гладкости правой части сами решения также являются достаточно гладкими и методы можно применять на произвольно построенной сетке. В ДУЗА, даже если функции f , τ и φ обладают гладкостью высокого порядка, или вообще принадлежат классу C^∞ на всей области своего определения, чаще всего решение является лишь однократно-непрерывно дифференцируемым. Это является следствием того, что в начальной точке $\varphi(t_0)$, как правило, негладко соединяется с самим решением. Соответственно, при переходе $t - \tau$ через t_0 наблюдается скачок первой производной функции $y(t - \tau)$ и, соответственно, в точке $t - \tau$ само решение имеет скачок второй производной. Рассмотрим простейший

Пример 5.

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases}$$

Получаем решение интегрированием по отрезкам длиной 1:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{3}{2}, & t \in [1, 2], \\ -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t + \frac{17}{6}, & t \in [2, 3] \dots \end{cases}$$

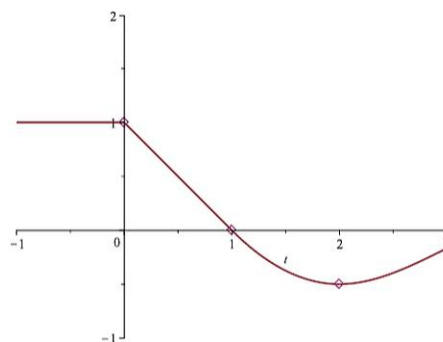


Рис. 1. Решение задачи из примера 5

Его график представлен на рис. 1. Легко увидеть, что

$$\begin{aligned} y'_-(0) = 0 &\neq y'_+(0) = -1, \\ y''_-(1) = 0 &\neq y''_+(1) = 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Вообще для любого $t = n \in \mathbb{N}$ данное решение имеет разрыв производной $n + 1$ -го порядка.

Как видно, по мере роста t гладкость решения возрастает. Это является свойством уравнений запаздывающего типа. Однако даже для них поведение *точек разрыва* может быть весьма сложным при

нескольких запаздываниях, и даже непредсказуемым при зависимости запаздываний от времени и решения. В последнем случае мы даже не можем вычислить эти точки заранее, чтобы включить их в сетку по времени. Дело ещё больше усложняется для уравнений *нейтрального типа*, которые в случае дискретных запаздываний имеют вид

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau), y'(t - \sigma)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (2)$$

с $\sigma > 0$. Для них не происходит сглаживания решения и точки разрыва приходится отслеживать и обрабатывать на всём интервале решения. При этом, все рассмотренные далее методы могут быть без особых изменений применены к уравнению (2), поэтому иметь в виду поведение точек разрыва в их случае также необходимо.

Рассмотрение задачи о поиске и включении точек разрыва производных в сетку по времени, выходит за рамки настоящей работы. Упомянем лишь, что некоторые подходы представленные, например, в [22, 23] используют итерационную процедуру поиска подходящей длины шага, оканчивающейся в точке разрыва. Более эффективный и быстрый алгоритм представлен в [24].

1.3. Выбор численного метода. С учётом сказанного о точках разрыва, следует отметить, что многошаговые методы, хоть и являются более быстрыми, чем одношаговые, для построения решения используют интерполяцию через несколько шагов. Соответственно, для построения приближения некоего порядка точности решение должно оставаться достаточно гладким на протяжении нескольких шагов. При нахождении точки разрыва производной, многошаговому методу придётся либо сменить порядок на меньший (в пределе — на первый) или вообще отказаться от использования точек левее точки разрыва и заново проводить стартовую процедуру (о многошаговых методах см., например, [25]). К тому же, интерполяция для нахождения решения между точками сетки, которая необходима для ДУЗА, также осуществляется через несколько шагов и порой вовсе невозможна при наличии нескольких точек разрыва в пределах малого числа шагов друг от друга.

В связи с приведённой аргументацией, в последнее время исследования в направлении решения ДУЗА сосредоточены на одношаговых методах, в частности методах Рунге – Кутты, вернее, их варианте с *непрерывными расширениями*, то есть интерполянтами, позволяю-

щими получить решение внутри шага. В следующих двух разделах рассмотрим *непрерывные методы* Рунге–Кутты применительно к уравнениям с запаздываниями.

2. Методы Рунге–Кутты для ДУЗА. Для полноты изложения рассмотрим сначала формулировку классических методов Рунге–Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений, покажем возможность их применения без изменений к самым простым уравнениям с запаздываниями, а затем перейдём к непрерывным методам, применимым к ДУЗА в рамках так называемого *стандартного подхода*.

2.1. Формулировка для ОДУ. Описание методов Рунге–Кутты можно встретить в любом классическом учебнике по численному решению ОДУ (см., например, [25–28]). Рассмотрим начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть выполнено n шагов рассматриваемым методом и получены точки $(t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$. $(n+1)$ -й шаг длиной h s -этапным методом Рунге–Кутты даёт приближение

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) \approx y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i), \quad T_{n+1}^i = t_n + c_i h, \\ Y_{n+1}^i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(T_{n+1}^j, Y_{n+1}^j), \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{4}$$

Для простоты мы, там где это не важно, опускаем у обозначения h индекс принадлежности к $(n+1)$ -му шагу, хотя, конечно, метод предполагает возможность реализации с переменной длиной шага, так что в общем виде каждый шаг h_{n+1} может иметь свою уникальную длину.

Число этапов s характеризует стоимость применения метода на одном шаге, так как основные затраты машинного времени для явных методов состоят в вычислении функции $f(t, y)$ — s раз, а для неявных — от s зависит размерность системы алгебраических уравнений, которые надо решить. Таким образом, одной из целей при построении метода является минимизация числа этапов при обеспе-

чении достаточной точности и устойчивости. Для сравнения методов по точности используются понятия порядков.

Определение 1. Говорят, что метод имеет *дискретный порядок точности* p (дискретный локальный порядок p), если для любой достаточно гладкой задачи Коши (3) и для достаточно малого h верно

$$\|y(t_1) - y_1\| = O(h^{p+1}),$$

или, что то же самое, ряды Маклорена по степеням h для приближения и точного решения совпадают до h^p включительно.

Определение 2. Говорят, что метод имеет *дискретный порядок сходимости* p (дискретный глобальный порядок p), если для любой достаточно гладкой на отрезке $[t_0, t_{end}]$ (или хотя бы на каждом шаге) задачи Коши и для достаточно малого h верно

$$\|y(t_{end}) - y_N\| = O(h^p),$$

где $N = (t_{end} - t_0)/h$.

Замечание 1. Для ОДУ методы, имеющие локальный порядок p на каждом шаге, сходятся с порядком p .

Традиционно коэффициенты метода (4) представляют в виде так называемой *таблицы Бутчера*:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} =: \frac{c}{b^T} A$$

Как правило их изучение начинается с более широко известных *явных* методов, для которых $c_1 = 0$ и $a_{ij} = 0$ при $i \geq j$, т. е. матрица коэффициентов A является строго нижнетреугольной. В таком случае значения Y_{n+1}^i находятся как явно заданные функции уже найденных ранее значений Y_{n+1}^j , $j = 1, \dots, i-1$, что упрощает их реализацию. *Неявные* методы предполагают необходимость решения алгебраической системы для определения всех (или части) Y_{n+1}^i .

2.2. Простейшая адаптация к ДУЗА. Для решения уравнения с запаздывающим аргументом (1) в случае одного постоянного запаздывания $\tau = \text{const}$, метод (4) может быть использован для его

решения с постоянной длиной шага $h = \tau/m$, $m \in \mathbb{N}$, в следующем виде:

$$y(t_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, Y_{n-m+1}^i),$$

$$T_{n+1}^i = t_n + c_i h, \quad i = 1, \dots, s.$$

$$Y_{n+1}^i = \begin{cases} u_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(T_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, Y_{n-m+1}^j), & i \geq 0, \\ \varphi(T_{n+1}^j - \tau), & i \leq 0. \end{cases}$$

Подобный вариант не требует никаких специальных изменений в самом методе и обеспечивает сохранение как порядка точности, так и порядка сходимости метода, но уже в случае двух запаздываний может оказаться либо вообще неприменимым в силу их иррационального соотношения, либо непрактичным в силу малости их общего делителя. Совершенно ясно, что метод не годится и для переменного запаздывания. В дальнейшем вариант нескольких иррационально соотносящихся запаздываний мы не будем рассматривать специально, объединяя всё в рассмотрение переменных запаздываний.

2.3. Непрерывные расширения методов Рунге – Кутты.

Для переменного запаздывания, зависящего от времени $\tau(t)$ (*time-dependent delay*), от решения в текущий момент времени $\tau(t, y(t))$ (*state-dependent delay*), или даже более общего вида, например, заданного неявно через $g(t, y(t), \tau, y(\tau)) = 0$, требуется обеспечить возможность найти достаточно точное приближение к решению не только в точках временной сетки $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, но и в любой момент t между ними.

Естественный вариант использования интерполянтов через несколько точек сетки имеет все те же ограничения, что и использование многошаговых методов, поэтому одношаговые методы снабжают собственным одношаговым вариантом построения *интерполанта* на основе *этапных приближений* Y_{n+1}^i . Например, коллокационные методы [29] по своему построению дают полиномиальное приближение к решению на всём шаге порядка s [21]. Различные подходы к построению таких интерполянтов для явных и неявных методов изучаются довольно давно (например, [30–32]). Достаточно полный их анализ

представлен в [21]. Эти интерполянты получили название *непрерывных приближений* или *плотной выдачи*, а сами методы, ими обладающие, называют *непрерывными методами Рунге – Кутты* (НРК).

2.3.1. Непрерывные методы для ОДУ. Для ОДУ (3) s -этапный НРК, расширяющий дискретный метод (4) даёт приближение в каждой точке $(n + 1)$ -го шага по формуле

$$y(t_n + \theta h) \approx \eta(t_n + \theta h) = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i), \quad (5)$$

где $\theta \in [0, 1]$, $b_i(0) = 0$ и $b_i(1) = b_i$ для всех i . Общий же интерполянт $\eta(t)$ составляется из получаемых таким образом кусочков, причём $y_n = \eta(t_n)$. При переменной длине шага для каждого шага используются свои значения $h = t_{n+1} - t_n$ и $\theta = \frac{t - t_n}{h}$.

Определение 3. Говорят, что метод имеет *равномерный порядок точности* q , если для любой достаточно гладкой задачи Коши (4) и для достаточно малого h верно

$$\|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q+1}) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + h],$$

или, что то же самое, ряды Маклорена по степеням θh для приближения и точного решения совпадают до h^p включительно.

Определение 4. Говорят, что метод имеет *равномерный порядок сходимости* q , если для любой достаточно гладкой на отрезке $[t_0, t_{end}]$ задачи Коши (4) и для достаточно малого h верно

$$\|y(t) - \eta(t)\| = O(h^q) \quad \forall t \in [t_0, t_{end}].$$

Замечание 2. Очевидно, что дискретный порядок всегда не меньше, чем равномерный.

Теорема 1 [21]. *При применении метода с дискретным порядком точности p и равномерным порядком точности q к достаточно гладкой на каждом шаге задаче Коши (3) равномерный порядок сходимости равен $\min(p, q + 1)$.*

В качестве примера приведём явный метод 3-го равномерного (и

дискретного) порядка, предложенный в [32]:

0	0			
$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$			
$\frac{4}{5}$	$-\frac{68}{375}$	$\frac{368}{375}$		
1	$\frac{31}{144}$	$\frac{529}{1152}$	$\frac{125}{384}$	
	$\theta - \frac{65}{48}\theta^2 + \frac{41}{72}\theta^3 \quad \frac{529}{384}\theta^2 - \frac{529}{576}\theta^3 \quad -\frac{125}{128}\theta^2 - \frac{125}{192}\theta^3 \quad -\theta^2 + \theta^3$			

Данный метод обладает интересной особенностью. В нём приближение в конечной точке получается за три этапа (так как $b_i(1) = a_{4i}$), а значит приближение 4-го этапа $Y_n^4 = y_n$. В то же время вследствие явности метода $Y_{n+1}^1 = y_n$, стало быть на новом шаге нужно будет вычислять f только в трёх новых точках, а не в четырёх и мы вправе считать этот метод трёхэтапным. Такой приём называется «первый как последний» (*first same as last*, [25]) или «повторным использованием» (*reuse*, например, [32]). Авторы [32] также построили явные НРК 4-го равномерного порядка с пятью (плюс дополнительный) и 5-го — с семью (плюс дополнительный) этапами.

2.3.2. Применение к ДУЗА. В данном разделе будет удобнее записать (1) не с запаздыванием, а с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), y(\omega(t, y(t)))), & t \geq t_0, \\ y(t) &= \varphi(t), & t \leq t_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где аргумент $\omega(t, y(t)) \leq t$ может быть задан в том числе неявно. НРК (5) применяется очевидным образом:

$$\begin{aligned} y(t_n + \theta h) &\approx \eta(t_n + \theta h) = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) f(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, \eta(\Omega_{n+1}^i)), \\ T_{n+1}^i &= t_n + c_i h, \quad \Omega_{n+1}^i = \omega(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i), \\ Y_{n+1}^i &= y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(T_{n+1}^j, Y_{n+1}^j, \eta(\Omega_{n+1}^j)), \end{aligned} \quad (7)$$

а сам интерполянт $\eta(t) = \varphi(t)$ при $t \leq t_0$.

2.4. Проблема «перекрытия». Допущение $\omega(t, y(t)) \leq t$ подразумевает возможность того, что на $(n + 1)$ -м шаге $\omega(t, y(t))$ окажется большим t_n (в частности, это наверняка происходит при *исчезающих запаздываниях*, или в уравнениях типа пантографа — $y'(t) = f(y(qt))$, $q \in (0, 1)$). Такую ситуацию попадания запаздывающего аргумента в текущий шаг численного метода называют *оверлепом (overlapping)* или перекрытием. В этом случае $\eta(t_n + \theta h)$ появляется в аргументах функций f в правой части уравнения (7) и даже в явных методах возникает необходимость решать полную систему алгебраических уравнений, что существенно увеличивает вычислительные затраты, а также усложняет программирование. К тому же требование однозначной разрешимости такой системы накладывает дополнительные ограничения на задачу.

Проблема явной реализации явных методов в случае перекрытия может быть решена, например, использованием интерполянта с предыдущего шага [33], или полаганием интерполянта константным и постепенным его уточнением при повторении шага несколько раз, или объединением этих подходов, как сделано, например, при реализации процедуры `ddesd` в MatLab [34]. Но использование интерполянта с предыдущего шага чревато переходом через точку разрыва, а повторение шага увеличивает затраты и затрудняет правильную оценку точности полученного приближения.

Наиболее простым в реализации и лишённым этих недостатков вариантом оказалось применение к уравнениям с перекрытием методов изначально построенных для функциональных дифференциальных уравнений запаздывающего типа вида

$$y'(t) = f(t, y_t), \quad y_t = y(t - \tau), \quad \tau \in [0, r],$$

то есть таких, где правая часть зависит от всех значений решения на интервале $[t - r, t]$ [35, 36]. Эти уравнения обобщают уравнения с дискретными и распределёнными запаздываниями, и более общие интегро-дифференциальные уравнения, и другие. Такие методы называются *функционально-непрерывными (functional-continuous)*, среди которых мы рассмотрим методы Рунге – Кутты (ФНРК). Существует и другое устоявшееся название, которое точнее описывает их с точки зрения их структуры: *этапно-непрерывные методы* или *методы с непрерывными этапами (continuous-stage methods)*.

Теория функциональных дифференциальных уравнений хорошо изложена в [37]. В настоящей статье мы не будем углубляться в неё и представим численные методы лишь на примере уравнения (6).

3. Функционально-непрерывные методы Рунге–Кутты.

Первые примеры таких методов были построены ещё в начале 1970-х годов для функциональных уравнений Вольтерры [35]. Интерес к ним возобновился в 1990-е в связи с уравнениями с перекрытиями [36]. Общий подход к их построению был представлен в [38], и более полно и систематично изложен в [39].

Как следует из альтернативного названия, данные методы содержат не только непрерывное расширение для приближения решения $y(t_n + \theta h)$ внутри шага, но и дают возможность найти приближение к решению внутри текущего шага на каждом из этапов, так что помимо Y_{n+1}^i , являющегося приближением в T_{n+1}^i , вводятся *этапные интерполанты* $H_{n+1}^i(t_n + \theta h)$, $\theta \in [0, c_i]$. Поскольку для полностью неявных методов проблема перекрытия не стоит так остро (она потребует лишь технического усложнения реализации) и они в своём подавляющем большинстве могут быть интерпретированы как коллокационные методы, для них все этапные интерполанты могут быть выбраны как итоговый $\eta(t)$. Поэтому здесь рассмотрим формулировку именно явных ФНРК.

3.1. Формулировка явных методов и их число этапов. На $(n + 1)$ -м шаге явный s -этапный ФНРК применительно к уравнению (6) даёт приближение

$$\begin{aligned}
 y(t_n + \theta h) &\approx \eta(t_n + \theta h) = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) K_{n+1}^i, \quad \theta \in [0, 1], \\
 K_{n+1}^i &= f(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, H_{n+1}^i(\Omega_{n+1}^i)), \\
 T_{n+1}^i &= t_n + c_i h, \quad Y_{n+1}^i = H_{n+1}^i(T_{n+1}^i), \quad \Omega_{n+1}^i = \omega(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i), \\
 H_{n+1}^i(t) &= \begin{cases} \varphi(t), & t < t_0, \\ \eta(t), & t \in [t_0, t_n], \\ y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\theta') K_{n+1}^j, & t \in [t_n, T_{n+1}^i], \quad \theta' = \frac{t - t_n}{h}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для обеспечения непрерывности этапных интерполянтов, коэффициенты $a_{ij}(\theta)$ удовлетворяют условиям $a_{ij}(0) = 0, \forall i, j$, а кроме того, $a_{ij}(c_i) = a_{ij}$, где a_{ij} — коэффициенты дискретного метода, лежащего в основе данного ФНРК.

Условия порядка — условия совпадения разложений точного и приближённого решений в ряды Тейлора до заданной степени h — для ФНРК сложнее, чем для НРК и, тем более, для простых методов Рунге–Кутты (РК). В связи с этим минимальное число этапов, необходимых для построения явных методов, больше. В таблице 1 представлено сравнение минимального числа этапов для построения явных методов соответствующих порядков (для РК — дискретного, для НРК — равномерного, для ФНРК — через дробь равномерного/дискретного).

Таблица 1. Минимальное число этапов явных методов

Порядок	1	2	3	4	5	6	7
РК	1	2	3	4	6	7	9
НРК	1	2	4	6	8		
ФНРК	1/1	2/2	4/3	7/6	11/9		

Приведём пример 4-этапного метода 3-го равномерного порядка из [38]:

0	0			
1	θ			
$\frac{1}{2}$	$\theta - \frac{1}{2}\theta^2$	$\frac{1}{2}\theta^2$		
1	$\theta - \frac{1}{2}\theta^2$	$\frac{1}{2}\theta^2$		
	$\theta - \frac{3}{2}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta^3$	0	$2\theta^2 - \frac{4}{3}\theta^3$	$-\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta^3$

Также как и в случае НРК можно построить методы с дискретным порядком за меньшее число этапов, а дополнительный этап использовать в качестве первого на следующем шаге [40]. Тогда метод 3-го равномерного порядка можно реализовать практически за три

этапа:

0	0		
$\frac{1}{2}$	θ		
$\frac{2}{3}$	$\theta - \theta^2$	θ^2	
1	$\theta - \frac{3}{4}\theta^2$	0	$\frac{3}{4}\theta^2$
	$\theta - \frac{5}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta^3$	0	$\frac{9}{4}\theta^2 - \frac{3}{2}\theta^3 - \theta^2 + \theta^3$

3.2. Комбинированный метод. Несомненно, ФНРК могут быть применены к уравнениям совсем без перекрытия или на шагах, где не возникает перекрытия, но начиная с 4-го порядка это будет приводить к лишним вычислениям. Логично было бы использовать НРК с пятью новыми этапами на шагах без перекрытия (например, [32]) и с шестью новыми этапами на шагах с перекрытием (например, [40]). Однако, с одной стороны, брать два сильно различающихся метода не стоит в силу разницы поведения их погрешностей и, как следствие, плохой работы алгоритма управления длиной шага, а с другой стороны, не всегда перед совершением шага известно, возникнет ли на нём перекрытие, и хотелось бы не отбрасывать уже совершённые вторым методом вычисления.

Из этого возникла идея построить метод, который, начиная как НРК в предположении отсутствия перекрытия, в любой момент мог бы перестроиться на функционально-непрерывную схему, которая тесно связана с просто непрерывной и имеет схожее разложение погрешности, что обеспечивает хорошую согласованность методов оценки погрешностей и выбора длины следующего шага [41]. Вообще удалось построить ФНРК, который при отсутствии перекрытия на четвёртом этапе имеет всего пять этапов (плюс дополнительный). Его таблица Бутчера в общем виде выглядит следующим образом (конкретные значения коэффициентов можно найти в [41], а здесь

для краткости они не приводятся)

0	0					
c_2	θ					
c_3	$a_{31}(\theta)$	$a_{32}(\theta)$				
c_4	a_{41}	0	a_{43}			
c_5	$a_{51}(\theta)$	0	$a_{53}(\theta)$	$a_{54}(\theta)$		
1	$a_{61}(\theta)$	0	0	$a_{64}(\theta)$	$a_{65}(\theta)$	0
	$b_1(\theta)$	0	0	$b_4(\theta)$	$b_5(\theta)$	$b_6(\theta)$

Если же на четвёртом этапе перекрытие всё-таки обнаруживается, то метод использует шестиэтапную (плюс дополнительный) полноценную схему ФНРК вида

0	0						
c_2	θ						
c_3	$a_{31}(\theta)$	$a_{32}(\theta)$					
c_4	$a_{31}(\theta)$	$a_{32}(\theta)$					
c_4	$a_{51}(\theta)$	0	$a_{53}(\theta)$	$a_{54}(\theta)$			
c_5	$a_{51}(\theta)$	0	$a_{53}(\theta)$	0	$a_{54}(\theta)$		
1	$a_{61}(\theta)$	0	0	0	$a_{64}(\theta)$	$a_{65}(\theta)$	0
	$b_1(\theta)$	0	0	0	$b_4(\theta)$	$b_5(\theta)$	$b_6(\theta)$

в которой этот «проблемный» этап считается повторно с достаточным порядком.

3.3. Функционально-явные методы Рунге–Кутты – Нюстрёма. Для обыкновенных дифференциальных уравнений известны явные методы Рунге–Кутты, которые изначально нацелены на решение уравнений второго порядка без зависимости от первой производной $y''(t) = f(t, y(t))$. Они позволяют получить ту же точность, что и классические методы Рунге–Кутты, за меньшее число этапов. Так 3-й порядок может быть получен за 2, 4-й – за 3, а 5-й – всего за 4 этапа. Такие методы, предложенные Нюстрёмом впервые

в 1925 году [42], сейчас принято называть методами Рунге–Кутты–Нюстрёма.

Для функциональных уравнений запаздывающего типа, имеющих схожую структуру, также можно получить методы с меньшим числом этапов, чем представлено в таблице 1 [40, 43].

Рассмотрим ДУЗА второго порядка

$$\begin{aligned} y''(t) &= f(t, y(t), y(\omega(t, y(t)))), & t \geq t_0, \\ y(t) &= \varphi(t), & t \leq t_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Такие уравнения описывают осциллирующие системы без демпфирования (см., например, [1]).

Для (9) функционально-непрерывный метод Рунге–Кутты–Нюстрёма имеет вид

$$\begin{aligned} y(t_n + \theta h) &\approx \eta(t_n + \theta h) = y_n + \theta h y'_n + h^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) K_{n+1}^i, \\ y'(t_n + \theta h) &\approx \hat{\eta}(t_n + \theta h) = y'_n + h \sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) K_{n+1}^i, \quad \theta \in [0, 1], \\ K_{n+1}^i &= f(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i, \mathbf{H}_{n+1}^i(\Omega_{n+1}^i)), \\ T_{n+1}^i &= t_n + c_i h, \quad Y_{n+1}^i = \mathbf{H}_{n+1}^i(T_{n+1}^i), \quad \Omega_{n+1}^i = \omega(T_{n+1}^i, Y_{n+1}^i), \\ \mathbf{H}_{n+1}^i(t) &= \begin{cases} \varphi(t), & t < t_0, \\ \eta(t), & t \in [t_0, t_n], \\ y_n + \theta' h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}(\theta') K_{n+1}^j, & t \in [t_n, T_{n+1}^i], \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где, как в (8), $\theta' = \frac{t-t_n}{h}$, $y_{n+1} = \eta(t_n + h)$, $y'_{n+1} = \hat{\eta}(t_n + h)$. Интерполянт для производной $\hat{\eta}(t)$ не участвует в решении, а предоставляется как дополнительный результат. Теоретически, он может быть найден, как производная $\eta(t_n + \theta h)$, но в общем случае это не обязательно.

С учётом повторного использования последнего этапа, которое здесь так же возможно, удалось построить метод третьего равномерного порядка по η и $\hat{\eta}$ с двумя новыми этапами (что сравнимо с результатом для ОДУ), а также метод четвёртого равномерного порядка по обоим интерполянтам — за четыре новых этапа на шаг

(что на два этапа меньше, чем требует ФНРК (8) четвертого равномерного порядка), и метод пятого порядка — за шесть новых этапов.

Помимо уравнения (9), преимущество может быть получено даже для более общего уравнения

$$\begin{aligned} y''(t) &= f(t, y(t), y'(t), y(\omega(t, y(t))))), & t \geq t_0, \\ y(t) &= \varphi(t), & t \leq t_0, \end{aligned} \quad (11)$$

учитывающего диссипацию энергии и затухание амплитуды колебаний, если только этот член не является запаздывающим, хотя здесь выигрыш возможен лишь для методов пятого порядка и выше. Работа на эту тему находится в стадии подготовки.

Здесь же стоит упомянуть, что идеи, основанные на изначальном подходе Нюстрёма, получили своё развитие в работах Олемского и дали семейство *структурных методов* Рунге–Кутты, которые для систем ОДУ, имеющих особую структуру, требуют меньше этапов на реализацию, чем классические методы [44–46]. Структурные методы также могут быть расширены до непрерывных [47] и функционально-непрерывных методов [48, 49] с сохранением преимущества по числу этапов.

4. Актуальные проблемы. В данном разделе обратимся к некоторым задачам, связанным с рассмотренной тематикой, которые всё ещё ждут своего решения.

4.1. Диагонально-неявные методы и методы Розенброка. В работах [35, 38, 39] изучаются теория функционально-непрерывных методов, но в качестве примеров приводятся только явные методы. В то же время, требования на численную устойчивость применяемых к жёстким задачам методов, являются актуальными и для уравнений с запаздываниями.

Для жёстких задач применяются неявные методы, и, с одной стороны, как говорилось выше, для них проблема перекрытия не стоит так остро. С другой стороны, полностью неявные методы являются весьма трудоёмкими, к тому же, желаемый равномерный порядок накладывает дополнительные ограничения на минимальное число этапов и реализация таких неявных методов для ДУЗА может повлечь крайне высокие затраты.

Возможным компромиссным решением стало бы применение диагонально-неявных методов [50], для которых решение полной

алгебраической системы распадается на отдельные системы меньшего порядка для каждого из этапов. Такие методы обычно работают быстрее, в то же время позволяя сохранить желаемые свойства устойчивости. Первые попытки построения функционально-непрерывных диагонально-неявных методов предприняты в [51], но эта тема далеко не исчерпана.

Методы Розенброка являются дальнейшим развитием диагонально-неявных методов, где решение нелинейных систем заменяется на решение нескольких линейных систем, полученных за счёт аналитического вычисления матрицы Якоби системы уравнений [50]. При этом для них также можно обеспечить необходимую устойчивость. Такие методы было бы интересно построить и для функциональных уравнений.

4.2. Численная устойчивость. На настоящий момент численная устойчивость непрерывных методов Рунге – Кутты для уравнений с запаздываниями изучена весьма неплохо, есть несколько определений и подходов к её оценке. При построении диагонально-неявных методов в [51] свойства устойчивости рассматривались только для дискретной части метода применительно к ОДУ. Для них, а также для методов Розенброка, необходимо проводить более тщательный анализ и оценивать устойчивость на примере систем ДУЗА. Мотивирующим примером, показывающим недостаточность исследования лишь устойчивости дискретной части для ОДУ, можно назвать магистерскую диссертацию «Устойчивость и применение методов Рунге – Кутты – Чебышёва для уравнений с запаздываниями», защищённую Т. С. Зубахиной в 2022 году в СПбГУ, в которой разные непрерывные расширения одних и тех же чебышёвских методов Рунге – Кутты на случай ДУЗА приводили к разным характеристикам устойчивости.

Отдельным важным исследованием является определение условий, накладываемых требованиями устойчивости на функционально-непрерывные методы. С одной стороны, этапные интерполянты участвуют в решении и следует выяснить, насколько свободно можно выбирать их и не должны ли они сами по себе давать какую-то устойчивость. С другой стороны, для функциональных уравнений такие требования могут оказаться более строгими, чем для ДУЗА с перекрытием.

4.3. Распределённые запаздывания. Выходящие за рамки рассмотрения настоящей работы уравнения с распределёнными запаздываниями, то есть уравнения в которых правая часть зависит, например, от свёртки решения с некоей функцией распределения $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\left(t, y(t), \int_{-\infty}^t \gamma(t-u)y(u)du\right), & t \geq t_0, \\ y(t) &= \varphi(t), & t \leq t_0, \end{aligned} \quad (12)$$

являются частным случаем функциональных уравнений и, в принципе, могут быть решены с помощью ФНРК. В то же время необходимо решать такие вопросы как вычисление интеграла на каждом из этапов, численная устойчивость получаемой разностной схемы и др. Фактически, такие уравнения представляют собой интегродифференциальные уравнения, и идеи методов их решения (см., например, [52]) могут быть применены к (12).

Тем не менее, методы, которые будут эффективно применимы к уравнениям, содержащим и дискретные, и распределённые запаздывания, должны объединять в себе свойства обеих групп.

4.4. Общие линейные методы. Несмотря на аргументы, приведённые в подразделе 1.3, в пользу выбора одношаговых методов, точки разрыва производных низких порядков встречаются в решении обычно далеко не на каждом шаге. Между соседними точками зачастую совершается довольно много шагов, на которых нет проблем с гладкостью решения и, соответственно, могут быть применены многошаговые методы, которые требуют куда меньше расчётов на свою реализацию. Хорошим компромиссом между порядком метода (который мы стремимся повысить) и числом шагов (которое всё же желательно брать меньшим) могут стать общие линейные методы [26], в частности, так называемые многошаговые методы Рунге–Кутты. Один пример построения двухшаговых функционально-непрерывных методов Рунге–Кутты приведён в препринте [53]. Развитие этого направления также представляет интерес.

Литература

1. Erneux Th. Applied Delay Differential Equations. Springer Science+Business Media, LLC, 2009. 204 p.

2. Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Springer Science+Business Media, LLC, 2011. 172 p.
3. Rihan F. A. Delay Differential Equations and Applications to Biology. Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2021. 286 p.
4. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Глав. ред. физ. мат. лит. изд-ва «Наука», 1971. 296 с.
5. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Глав. ред. физ. мат. лит. изд-ва «Наука», 1965. 356 с.
6. Egorov A. V., Kharitonov V. L. Approximation of delay Lyapunov matrices // International Journal of Control. 2018. Vol. 91. No 11. P. 2588–2596.
7. Купцова С. Е., Купцов С. Ю., Степенко Н. А. О предельном поведении решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 173–182.
8. Александров А. Ю., Воробьева А. А., Колпак Е. П. О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 72–88.
9. Екимов А. В., Чиждова О. Н., Зараник У. П. Устойчивость однородных нестационарных систем дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 415–424.
10. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.


11. Juárez L., Mondié S., Kharitonov V.L. Dynamic predictor for systems with state and input delay: A time-domain robust stability analysis // *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2020. Vol. 30. No 6. P. 2204–2218.
12. Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov–Krasovskii functionals // *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2021. Vol. 31. No 9. P. 3730–3746.
13. Александрова И. В., Жабко А. П. Функционалы Ляпунова–Красовского для однородных систем с несколькими запаздываниями // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2021. Т. 17. № 2. С. 183–195.
14. Portilla G., Alexandrova I. V., Mondié S., Zhabko A. P. Estimates for solutions of homogeneous time-delay systems: comparison of Lyapunov–Krasovskii and Lyapunov–Razumikhin techniques // *International Journal of Control*. 2021. Doi: 10.1080/00207179.2021.1949045.
15. Eremin A., Ishiwata E., Ishiwata T., Nakata Yu. Delay-induced blow-up in a planar oscillation model // *Japan J. Indust. Appl. Math.* 2021. Vol. 38. P. 1037–1061.
16. Alexandrova I. V. Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii functionals for homogeneous time delay systems of neutral type // *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2022. Vol. 32. No 6. P. 3251–3265.
17. Жабко А. П., Тихомиров О. Г., Чижова О. Н. О стабилизации класса систем с пропорциональным запаздыванием // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. № 2. С. 165–172.
18. Kvitko A. N., Eremin A. S., Firyulina O. S. An algorithm for solving local boundary value problems with perturbations and delayed control // *Stability and Control Processes: International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov / Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings – Cham: Springer Nature*. 2020. P. 65–72.

19. Гребенщиков Б. Г. Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 1. С. 81–96.
20. Mackey M. C., Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197. P. 287–289.
21. Bellen A., Zennaro M. Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Clarendon Press, 2013. 395 p.
22. Feldstein A., Neves K. W. High order methods for state-dependent delay differential equations with nonsmooth solutions // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21. No 5. P. 844–863.
23. Guglielmi N., Hairer E. Computing breaking points in implicit delay differential equations // Adv. Comput. Math. 2008. Vol. 29. P. 229–247.
24. Eremin A., Humphries A. R. Efficient accurate non-iterative breaking point detection and computation for state-dependent delay differential equations // Proc. of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014) / AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1648. Art. no 150006.
25. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи / пер. с англ. М.: Мир. 1990. 512 с.
26. Butcher J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, 2016. 513 p.
27. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 2009. 848 с.
28. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Изд-во «Лаборатория знаний», 2020. 636 с.
29. Brunner H. The use of splines in the numerical solution of differential and Volterra integral equation // Spline Functions and the Theory of Wavelets / CRM Proceedings and Lecture Notes (AMS series). 1999. Vol. 18. P. 15–32.

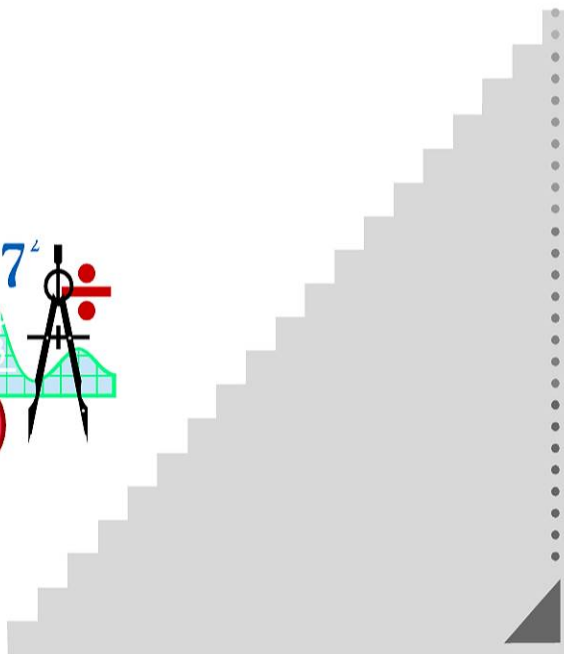
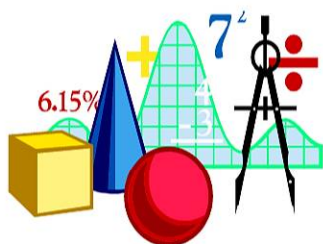
30. Horn M. K. Fourth and fifth-order scaled Runge-Kutta algorithms for treating dense output // *SIAM J. Numer. Anal.* 1983. Vol. 20. P. 558–568.
31. Enright W. H., Jackson K. R., Norsett S. P., Thomson P. G. Interpolants for Runge–Kutta formulas // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1986. Vol. 12, No 3. P. 193–218.
32. Owren B., Zennaro M. Derivation of efficient, continuous, explicit Runge–Kutta methods // *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 1992. Vol. 13 P. 1488–1501.
33. Пименов В. Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения*. 2001. Т. 37. № 1. С. 105–114.
34. Shampine L. F. Solving ODEs and DDEs with residual control // *Applied Numerical Mathematics*. 2005. Vol. 52. P. 113–127.
35. Tavernini L. One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1971. Vol. 8. No 4. P. 786–795.
36. Enright W. H., Hu M. Interpolating RKs for vanishing delay differential equations // *Computing*, 1995. Vol. 55 P. 223–236.
37. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications. Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.
38. Maset S., Torelli L., Vermiglio R. Runge–Kutta methods for retarded functional differential equations // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015. Vol. 15. No 8. P. 1203–1251.
39. Bellen A. et al. Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations // *Acta Numerica*. 2009. P. 1–110.
40. Eremin A. S. Functional continuous Runge–Kutta methods with reuse // *Applied Numerical Mathematics*. 2019. Vol. 146. P. 165–181.

41. Еремин А. С. Комбинированный функционально-непрерывный метод для дифференциальных уравнений с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 425–441.
42. Nyström E.J. Über die numerische Integration von Differentialgleichungen // Acta Soc. Sci. Fenn. 1925. Vol. 50. No 13. P. 1–54.
43. Eremin A. Functional continuous Runge–Kutta–Nyström methods // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Proc. 10th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ. 2016. Vol. 11. P. 1–17.
44. Олемской И. В., Коврижных Н. А. Семейство шестиэтапных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 3. С. 215–229.
45. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A., Olemskoy I. V. An explicit one-step multischeme sixth order method for systems of special structure // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 347. P. 853–864.
46. Olemskoy I. V., Eremin A. S. Algorithm of construction of effective explicit methods for structurally partitioned systems of ordinary differential equations // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17. No 4. P. 353–369.
47. Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A. Continuous extensions for structural Runge–Kutta methods // Computational Science and Its Applications – ICCSA 2017 / Springer Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10405. P. 363–378.
48. Eremin A. S., Olemskoy I. V. Functional continuous Runge–Kutta methods for special systems // Proc. of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2015 (ICNAAM-2015) / AIP Conf. Proc. 2016. V. 1738. Art. no. 100003.

49. Eremin A. S. Functional continuous Runge–Kutta methods for cross-dependent retarded systems // Proc. of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016 (ICNAAM-2016) / AIP Conf. Proc. 2017. Vol. 1863. Art. no 160005.
50. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи / пер. с англ. М.: Мир. 1999. 685 с.
51. Eremin A. S. Diagonally implicit functional continuous methods // Proc. of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2017 (ICNAAM-2017) / AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 1978. Art. no 120006.
52. Lubich Ch. Runge–Kutta theory for Volterra integrodifferential equations // Numerische Mathematik. 1982. Vol. 40. P. 119–135.
53. Tuzov A. Two-step general linear methods for retarded functional differential equations // ArXiv preprint No 1704.04619v1. 2017.



*1. Математическая
теория процессов
управления*



УДК 517.929.4

Белов А. И.

Достаточные условия экспоненциальной устойчивости для линейной системы с запаздыванием

Рекомендовано к публикации доцентом Александровой И. В.

1. Введение. Одним из основных подходов исследования экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием является метод функционалов Ляпунова – Красовского. Он заключается в построении функционала с заданной отрицательно-определенной вдоль решений системы производной и последующем исследовании его на положительную определенность [1]. Основной проблемой, возникающей при применении этого подхода, является конструктивная проверка положительной определенности функционала. В данной работе квадратичный функционал заменяется близким к нему функционалом, получаемым при помощи процедуры кусочно-линейной дискретизации, описанной в [2]. Анализ положительной определенности дискретизированного функционала сводится к проверке положительной определенности некоторой матрицы, что представляет собой достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы.

Введем обозначения. Пусть $H := PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ – пространство кусочно-непрерывных функций, определенных на $[-h, 0]$ и действующих в \mathbb{R}^n . Через $\|x\|$ обозначим евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Под записью $\|\varphi\|_h$ будем понимать $\sup \|\varphi(\theta)\|$, $\theta \in [-h, 0]$. Через $0_{n \times n}$, I_n обозначим нулевую и единичную $(n \times n)$ -матрицу соответственно. Под $\|U\|$ будем понимать $\max_{\theta \in [0, h]} \|U(\theta)\|$.

2. Основные понятия. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $h \geq 0$ – запаздывание, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A_0, A_1 – вещественные матрицы. Пусть $\varphi \in H$. Обозначим через $x(t, \varphi)$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Белов Александр Иванович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: famesyasd@gmail.com, тел.: +7(911)704-23-97

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых ученых, проект МК-2301.2022.1.1

Определение 1 [1]. Система (1) экспоненциально устойчива, если существуют числа $\gamma \geq 1, \sigma > 0$ такие, что любое решение системы $x(t, \varphi)$ удовлетворяет неравенству $\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, t \geq 0$.

Определение 2 [1]. Число $s \in \mathbb{C}$ называется собственным числом системы (1), если $\det(sE - A_0 - A_1 e^{-sh}) = 0$.

Определение 3 [1]. Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова системы (1), если она непрерывна и удовлетворяет свойствам:

1. $U'(\tau) = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1, \quad \tau > 0,$
2. $U(-\tau) = U^T(\tau),$
3. $U(0)A_0 + A_0^T U(0) + U(-h)A_1 + A_1^T U(h) = -W,$

где W – симметричная матрица.

Определение 4 [1]. Система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если не существует числа $s \in \mathbb{C}$ такого, что s и $-s$ – собственные числа системы.

Пусть существует матрица Ляпунова. Определим функционал $v_1: H \rightarrow \mathbb{R},$

$$v_1(\varphi) := \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-h - \theta)A_1\varphi(\theta)d\theta + \\ + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)A_1^T U(\theta_1 - \theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta.$$

В работе [3] рассматривается S – множество непрерывных функций, определенных на отрезке $[-h, 0]$ и действующих в \mathbb{R}^n таких, что $\|\varphi\|_h = \|\varphi(0)\|$.

Теорема 1 [4]. Система (1) экспоненциально устойчива, если она удовлетворяет условию Ляпунова и найдется число $\alpha > 0$ такое, что $\forall \varphi \in S \quad v_1(\varphi) \geq \alpha \|\varphi(0)\|^2$.

3. Процедура дискретизации квадратичного функционала. Применим процедуру дискретизации из [2, с. 183] для функционала v_1 , взяв в качестве функций

$$P := U(0), \quad Q(\theta) := U(-\theta - h)A_1, \\ R(\theta_1, \theta_2) := A_1^T U(\theta_1 - \theta_2)A_1, \quad S(\theta) := W.$$

Зафиксируем число узлов разбиения N , на которые делится отрезок $[-h, 0]$. Узлы задаются формулой $\theta_p := -ph/N, p = 0, 1, \dots, N$.

Введем обозначения $Q_p := Q(\theta_p)$, $R_{pq} := R(\theta_p, \theta_q)$, $S_p := S(\theta_p)$. Дискретизированный функционал выражается формулой

$$v_1^{(N)}(\varphi) := \int_0^1 (\varphi^T(0)\Psi^T(\alpha)) \begin{pmatrix} U(0) & \tilde{Q}_N \\ \tilde{Q}_N^T & \tilde{R}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha + \\ + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W\varphi(\theta)d\theta,$$

где $\tilde{Q}_N := (Q_0, \dots, Q_N)$, $\tilde{R}_N := \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & \dots & R_{0N} \\ R_{10} & R_{11} & \dots & R_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N0} & R_{N1} & \dots & R_{NN} \end{pmatrix}$,

и $\Psi(\alpha)$ – некоторый вектор, определяемый интегралами от начальной функции φ .

Введем матрицу $\tilde{S}_N := N \text{diag}(\frac{S_0}{h}, \dots, \frac{S_N}{h})$.

Для полученного дискретизированного функционала справедлива следующая

Теорема 2 [2]. Для любого числа узлов разбиения N и любой начальной функции $\varphi \in H$ выполняется

$$v_1^{(N)}(\varphi) \geq \int_0^1 (\varphi^T(0)\Psi^T(\alpha)) \begin{pmatrix} U(0) & \tilde{Q}_N \\ \tilde{Q}_N^T & \tilde{R}_N + \tilde{S}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha.$$

4. Лемма об оценке числа разбиения N для достижения ε -точности приближения функционала. Для заданного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим число

$$N(\varepsilon) := \left\lceil \frac{(\|A_0\| + \|A_1\|) \|A_1\| \max(\|A_1\|, 1) \|U\| h \max(h, 1)}{\varepsilon} \right\rceil. \quad (2)$$

Лемма 1. Для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ и $N := N(\varepsilon)$ из формулы (2) выполнено

$$\forall \varphi \in H \quad |v_1(\varphi) - v_1^{(N)}(\varphi)| \leq \varepsilon \|\varphi\|_h^2.$$

5. Достаточное условие устойчивости линейной системы с запаздыванием. Приведем основной результат данной работы.

Теорема 3. *Зададим число $\varepsilon > 0$ и вычислим число $N := N(\varepsilon)$ по формуле (2). Если выполнено условие Ляпунова и матрица*

$$A_N := \begin{pmatrix} U(0) - \varepsilon I_n & \tilde{Q}_N \\ \tilde{Q}_N^T & \tilde{R}_N + \tilde{S}_N \end{pmatrix}$$

положительно определена, то система (1) экспоненциально устойчива.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и построим для него дискретизированный функционал $v_1^{(N)}$ для $N := N(\varepsilon)$ из формулы (2). Из леммы 1 имеем

$$\forall \varphi \in S \quad |v_1(\varphi) - v_1^{(N)}(\varphi)| < \varepsilon \|\varphi(0)\|^2,$$

откуда

$$\forall \varphi \in S \quad v_1^{(N)}(\varphi) - \varepsilon \|\varphi(0)\|^2 < v_1(\varphi) < v_1^{(N)}(\varphi) + \varepsilon \|\varphi(0)\|^2. \quad (3)$$

По теореме 2, выражение $v_1^{(N)}(\varphi) - \varepsilon \|\varphi(0)\|^2$ на любой функции $\varphi \in H$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1^{(N)}(\varphi) - \varepsilon \|\varphi(0)\|^2 &= \int_0^1 (\varphi^T(0) \Psi^T(\alpha)) \begin{pmatrix} U(0) & \tilde{Q}_N \\ \tilde{Q}_N^T & \tilde{R}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha + \\ &+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) W \varphi(\theta) d\theta - \int_0^1 (\varphi^T(0) \Psi^T(\alpha)) \begin{pmatrix} \varepsilon I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \geq \\ &\geq \int_0^1 (\varphi^T(0) \Psi^T(\alpha)) \begin{pmatrix} U(0) - \varepsilon I_n & \tilde{Q}_N \\ \tilde{Q}_N^T & \tilde{R}_N + \tilde{S}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} d\alpha \geq \\ &\geq \int_0^1 \lambda_{\min}(A_N) \left\| \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{pmatrix} \right\|^2 d\alpha \geq \int_0^1 \lambda_{\min}(A_N) \|\varphi(0)\|^2 d\alpha = \\ &= \lambda_{\min}(A_N) \|\varphi(0)\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Окончательно, из (3) и (4) имеем

$$\forall \varphi \in S \quad v_1(\varphi) > \lambda_{\min}(A_N) \|\varphi(0)\|^2.$$

Экспоненциальная устойчивость системы (1) следует из теоремы 1, если взять число $\alpha := \lambda_{\min}(A_N)$, являющееся положительным за счет положительной определенности матрицы A_N .

6. Заключение. В данной работе получено достаточное условие экспоненциальной устойчивости для линейной стационарной системы с одним запаздыванием. Условие заключается в проверке положительной определенности матрицы, найденной с помощью кусочно-линейной дискретизации квадратичного функционала с заданной производной.

Литература

1. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 1-2. С. 110–117.
2. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time Delay Systems. Boston: Birkhäuser, 2003. 353 p.
3. Жабко А. П., Медведева И. В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 9–20.
4. Egorov A. An improved Lyapunov stability test for Linear Time-Delay Systems // 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2020. P. 2489–2494.

УДК 517.929.4

Евтина Д. С.

Функционалы Ляпунова – Красовского для однородных уравнений с распределённым запаздыванием

Рекомендовано к публикации доцентом Александровой И. В.

1. Введение. Метод функционалов Ляпунова – Красовского [1] используется при решении многих задач, в частности, для анализа устойчивости решений нелинейных систем с запаздывающим аргументом. В работах [2, 3] для однородных систем с сосредоточенным запаздыванием при помощи функций Ляпунова – Разумихина доказано, что если система без запаздывания асимптотически устойчива, то нулевое решение соответствующей ей системы с запаздыванием асимптотически устойчиво. Структура функционалов Ляпунова – Красовского для однородных систем впервые предложена в статье [4]. Целью данной работы является построение функционалов Ляпунова – Красовского для анализа устойчивости решений однородных систем с распределённым запаздыванием на примере скалярного уравнения.

В качестве пространства начальных функций будем рассматривать $PC([-h, 0], \mathbb{R})$ – пространство кусочно-непрерывных функций $\phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, где $h = \max_j h_j$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^m a_j x^\mu(t - h_j) + \sum_{j=1}^m b_j \int_{-h_j}^0 x^\mu(t + \theta) d\theta, \quad (1)$$

где $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $h_0 = 0$, $h_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$, – запаздывания, а $\mu > 1$ – рациональное число с нечётным числителем и знаменателем.

Задача заключается в построении функционала Ляпунова – Красовского для уравнения (1) с целью исследования асимптотической устойчивости нулевого решения этого уравнения.

Евтина Диана Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: diana.evtina@mail.ru, тел.: +7(981)883-27-89

3. Конструкция функционала. По аналогии с [5, 6] зададим функционал на пространстве $PC([-h, 0], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
v_1(\phi) = & \underbrace{\phi^2(0)}_{I_1} + 2\phi(0) \underbrace{\sum_{j=1}^m a_j \int_{-h_j}^0 \phi^\mu(\theta) d\theta}_{I_2} + \\
& + 2\phi(0) \underbrace{\sum_{j=1}^m b_j \int_{-h_j}^0 (\theta + h_j) \phi^\mu(\theta) d\theta}_{I_3} + \\
& + \underbrace{\left[\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 (a_j + (h_j + \theta)b_j) \phi^\mu(\theta) d\theta \right]^2}_{I_4} + \\
& + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 (W_1 + (h_j + \theta)W_2) \phi^{\mu+1}(\theta) d\theta}_{I_5}, \quad W_1, W_2 > 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) воспользуемся достаточными условиями устойчивости из статьи [7]. Для этого оценим сверху производную функционала (2) вдоль решений уравнения (1) и построим оценку снизу самого функционала.

4. Оценка производной функционала. Введём обозначение $\alpha = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j + b_j h_j)$ и предположим, что $\alpha < 0$. Выберем величины W_1 и W_2 из условия $W_1 + W_2 \sum_{j=1}^m h_j = |\alpha|$.

Продифференцируем функционал (2) вдоль решений уравнения (1):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} v_1(x_t) = & \alpha x^{\mu+1}(t) - W_1 \sum_{j=1}^m x^{\mu+1}(t - h_j) + \\
& + 2\alpha x^\mu(t) \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 (a_j + (h_j + \theta)b_j) x^\mu(t + \theta) d\theta - \\
& - W_2 \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 x^{\mu+1}(t + \theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{3}$$

В правой части (3) оценим третье слагаемое, принимая во внимание, что $\theta + h_j \leq h_j$, $j = \overline{1, m}$, и используя неравенство $2AB \leq A^2 + B^2$.

Пусть $|x_t|_h \leq H_1$, где $H_1 = \text{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_1(x_t) &\leq -x^{\mu+1}(t)|\alpha|\left(1 - H_1^{\mu-1} \sum_{j=1}^m h_j\right) - \\ &\quad - W_1 \sum_{j=1}^m x^{\mu+1}(t - h_j) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 x^{\mu+1}(t + \theta) d\theta \left(W_2 - H_1^{\mu-1} |\alpha| \left(|a_j| + |b_j| h_j\right)^2\right). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Лемма 1. Производная функционала (2) вдоль решений уравнения (1) допускает оценку

$$\frac{d}{dt}v_1(x_t) \leq -c_0 x^{\mu+1}(t) - \sum_{j=1}^m c_j \int_{-h_j}^0 x^{\mu+1}(t + \theta) d\theta, \quad |x_t|_h \leq H_1, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= |\alpha| \left(1 - H_1^{\mu-1} \sum_{j=1}^m h_j\right), \quad c_j = W_2 - H_1^{\mu-1} |\alpha| \left(|a_j| + |b_j| h_j\right)^2, \\ H_1^{\mu-1} &< \min_{j=1, m} \left\{ \frac{1}{\sum_{k=1}^m h_k}, \frac{W_2}{|\alpha| \left(|a_j| + |b_j| h_j\right)^2} \right\}. \end{aligned}$$

5. Оценка функционала. Теперь перейдём непосредственно к оценке снизу функционала (2). Оценим сверху по модулю сумму слагаемых I_2 и I_3 , входящих в состав функционала:

$$\begin{aligned} \left| 2\phi(0)\delta \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \frac{\phi^\mu(\theta)}{\delta} (a_j + (h_j + \theta)b_j) d\theta \right| &\leq \phi^2(0)\delta^2 \sum_{j=1}^m h_j + \\ &+ \sum_{j=1}^m \frac{\left(|a_j| + |b_j| h_j\right)^2}{\delta^2} \int_{-h_j}^0 \phi^{2\mu}(\theta) d\theta, \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Так как если $|a| < c$, то $a > -c$, запишем

$$I_1 + I_2 + I_3 \geq \phi^2(0) \left(1 - \delta^2 \sum_{j=1}^m h_j\right) - \sum_{j=1}^m \frac{\left(|a_j| + |b_j| h_j\right)^2}{\delta^2} \int_{-h_j}^0 \phi^{2\mu}(\theta) d\theta.$$

Исходя из условия $\delta^2 < \frac{1}{\sum_{j=1}^m h_j}$, выберем δ .

Пусть $|\phi|_h \leq H_2$, где $H_2 = \text{const}$. Тогда оценка функционала (2) примет вид

$$v_1(\phi) \geq \phi^2(0) \left(1 - \delta^2 \sum_{j=1}^m h_j\right) + \sum_{j=1}^m \int_{-h_j}^0 \phi^{\mu+1}(\theta) d\theta \left(W_1 - \frac{H_2^{\mu-1}}{\delta^2} (|a_j| + |b_j| h_j)^2\right) + I_4.$$

Лемма 2. Функционал (2) допускает оценку снизу вида

$$v_1(\phi) \geq k_0 \phi^2(0) + \sum_{j=1}^m k_j \int_{-h_j}^0 \phi^{\mu+1}(\theta) d\theta, \quad |\phi|_h \leq H_2, \quad (5)$$

где

$$k_0 = 1 - \delta^2 \sum_{j=1}^m h_j, \quad k_j = W_1 - \frac{H_2^{\mu-1}}{\delta^2} (|a_j| + |b_j| h_j)^2,$$

$$\delta^2 < \frac{1}{\sum_{j=1}^m h_j}, \quad H_2^{\mu-1} < \min_{j=1, m} \left\{ \frac{W_1 \delta^2}{(|a_j| + |b_j| h_j)^2} \right\}.$$

6. Основной результат. Основным результатом работы является достаточное условие устойчивости нулевого решения уравнения (1), полученное путём объединения результатов лемм 1, 2.

Теорема. Если

$$a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j + b_j h_j) < 0, \quad (6)$$

то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Замечание. Теорема является частным случаем результата, полученного в [8] методом функций Ляпунова–Разумихина.

7. Заключение. В работе построены функционалы Ляпунова–Красовского для однородного уравнения с распределённым запаздыванием, которые применены к доказательству асимптотической устойчивости нулевого решения этого уравнения. Построенные функционалы могут быть применены к анализу неустойчивости решений однородных уравнений, а также распространены на более общие классы однородных систем с распределённым запаздыванием.

Литература

1. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 1. С. 110–117.
2. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 393–403.
3. Aleksandrov A. Yu., Hu G.-D., Zhabko A. P. Delay-independent stability conditions for some classes of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. Vol. 59. No 8. P. 2209–2214.
4. Александров А. Ю., Жабко А. П., Печерский В. С. Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Труды 8-й Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». Воронеж: Научная книга. 2015. С. 5–8.
5. Zhabko A. P., Alexandrova I. V. Complete type functionals for homogeneous time delay systems // Automatica. 2021. Vol. 125. No 109456.
6. Александрова И. В., Жабко А. П. Функционалы Ляпунова–Красовского для однородных систем с несколькими запаздываниями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 2. С. 183–195.
7. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 3. С. 315–327.
8. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Delay-independent stability of homogeneous systems // Applied Mathematics Letters. 2014. No 34. P. 43–50.

УДК 517.977.1

Жигалов В. С.

Проблема фильтрации в задаче наблюдения состояния в дифференциально-разностных системах

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. В работе рассматривается система дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(\alpha t) + f(t), \quad (1)$$

где A_0, A_1 – $(n \times n)$ -матрицы, $\alpha \in (0, 1)$, $f(t)$ – заданная на $[t_0, T]$ кусочно-непрерывная функция.

Зададим наблюдение

$$y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

где $y(t)$ – известная вектор-функция размерности r , C – $(r \times n)$ -матрица.

Определение 1. Система (1), (2) называется полностью наблюдаемой на промежутке $[t_0, T]$, если по значениям вектора наблюдений $y(t)$ на $[t_0, T]$ можно однозначно восстановить движение системы на начальном множестве – вектор $\phi(t)$.

Системы и уравнения с линейным запаздыванием встречаются в математических моделях радиоактивного распада [1], работы информационного сервера [2], смесительного бака [3] и в ряде других случаев.

В рассматриваемом далее методе предполагается наблюдение всего вектора состояния $x(t)$ и используется производная наблюдения, что влечет существование шума, поэтому в работе предлагается метод фильтрации для восстановления движения системы (1). Рассматривается также случай неполного наблюдения, в котором решение основано на применении асимптотического наблюдателя.

Жигалов Валентин Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zhigalovvs.98b@gmail.com, тел.: +7 (914) 324-31-26

2. Вспомогательные сведения. Рассмотрим на отрезке $[t_0, \alpha^{-1}t_0]$ систему (1) с кусочно-непрерывной начальной функцией $\phi(t)$, заданной на промежутке $[\alpha t_0, t_0]$.

Определение 2. Фундаментальной матрицей системы (2) называется матричная функция $\Phi(t, t_0)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{cases} \Phi(t, t_0) \equiv 0, & t < t_0, \\ \Phi(t, t_0) = E, & t = t_0, \\ \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = A_0 \Phi(t, t_0) + A_1 \Phi(\alpha t, t_0), & t > t_0. \end{cases}$$

Известно, что общее решение системы (1) в форме Коши имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\alpha^{-1}t_0} \Phi(t, \tau)A_1\phi(\alpha\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

В работе [4] показано, что при $t \in [t_0, \alpha^{-1}t_0]$ выполняется

$$\Phi(t, t_0) = \exp(A_0(t - t_0)).$$

3. Предварительные рассуждения. Рассмотрим случай вырожденной матрицы A_1 .

Существуют такие матрицы D , что $DA_1 = \mathbb{O}$. Если для какой-нибудь из них $DA_0 = \Lambda D$, то при домножении левой и правой частей системы (1) на D и замены $Dx = z$ получаем систему

$$\dot{z} = \Lambda z + Df(t). \quad (3)$$

Система (3) – ненаблюдаемая часть системы (1). Данные рассуждения применимы для любых начальных точек t_0 . Из чего следует

Теорема 1. Если матрица A_1 – вырожденная, и для некоторой ненулевой матрицы D выполнены условия $DA_1 = \mathbb{O}$ и $DA_0 = \Lambda D$, то система (1), (2) не является полностью наблюдаемой.

Далее считаем матрицу A_1 невырожденной.

4. Построение начальной функции. Сделаем в системе (1), (2) замену $x(t) = e^{A_0 t}z(t)$. Получим

$$\begin{cases} e^{A_0 t} \dot{z}(t) = A_1 \phi(\alpha t) + f(t), \\ y(t) = e^{A_0 t} z(t). \end{cases} \quad (4)$$

Из первого уравнения системы (4) при условии $\det A_1 \neq 0$ найдем

$$\phi(\alpha t) = A_1^{-1} [e^{A_0 t} \dot{z}(t) - f(t)].$$

Дифференцируя второе уравнение системы (4), получаем

$$\dot{y}(t) = A_0 e^{A_0 t} z(t) + e^{A_0 t} \dot{z}(t).$$

откуда можно выразить $e^{A_0 t} \dot{z}(t)$.

5. Пример фильтра. Обозначим за $x_{\text{ист}}(t)$ реальное движение системы (1). Тогда в качестве фильтра, решающего задачу наблюдения, можно предложить следующий:

$$\dot{x}_{\text{ист}}(t) \approx \frac{1}{K\delta} \sum_{j=1}^K [x(t - 2j\delta) - x(t - (2j - 1)\delta)], \quad (5)$$

где δ – малая величина, K – целое.

6. Случай неполного наблюдения. Предположим, что в (2) матрица $C \neq E$. Введем вспомогательную систему уравнений

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(\alpha t) + L_0 (Cz(t) - y(t)) + L_1 (Cz(\alpha t) - y(\alpha t)), \quad (6)$$

которую назовем асимптотическим наблюдателем.

Теорема 2. Если существуют такие матрицы L_0 и L_1 , что $(A_0 + L_0 C)$ – гурвицева матрица, а матрица $(A_0 + L_0 C)^{-1} (A_1 + L_1 C)$ имеет все собственные числа в единичном круге, то справедливо предельное соотношение

$$z(t) \rightarrow x(t) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Вычитая из системы (6) систему (1), с учетом равенства (2) и обозначения $u(t) = z(t) - x(t)$, получаем систему уравнений

$$\dot{u}(t) = (A_0 + L_0 C)u(t) + (A_1 + L_1 C)u(\alpha t).$$

Тогда в соответствии с работой [5] $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Далее начальная функция строится по изложенному в пункте 4 алгоритму с наблюдением $y(t) = x(t)$, где вектор $y(t)$ равен асимптотическому приближению $z(t)$.

7. Заключение. В работе представлена конструктивная теорема, дающая необходимое условие полной наблюдаемости систем вида (1), (2) и получен метод определения движения системы в случае неполной наблюдаемости. Также предложен фильтр (5), позволяющий на основе наблюдения приближенно найти производную решения (1), (2).

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М: Мир, 1967. 548 с.
2. Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 11. № 3. С. 105–115.
3. Жабко А. П., Чижова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 4. С. 843–850.
4. Жигалов В. С. Условия управляемости дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. №1. С. 55–60.
5. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

УДК 519.62

Клименко И. С.

Реализация метода матричных отображений для решения системы дифференциальных уравнений

Рекомендовано к публикации доцентом Головкиной А. Г.

1. Введение. В данной работе предлагается алгоритм на основе матричных отображений для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) в полиномиальной форме. Главное отличие от традиционных пошаговых методов интегрирования заключается в однократном вычислении матриц отображения, которые полностью описывают динамику системы при любых начальных данных. Отображение строится также в полиномиальной форме и определяется символьными (числовыми) матрицами вплоть до необходимо порядка нелинейности. Основные преимущества такого подхода заключаются в том, что: а) использование символьных вычислений позволяет менять коэффициенты в уже построенных матрицах отображения; б) отсутствует необходимость решать СОДУ заново при изменении начальных условий или параметров системы; в) используются только операции умножения матрицы на вектор и сложения векторов.

Все эти свойства значительно снижают время вычислений по сравнению с традиционными методами в случае, когда необходимо многократно решать СОДУ при разных параметрах и начальных условиях. Кроме того, алгоритм построения матричных отображений допускает использование параллельных вычислений на графических процессорах, что дает значительный прирост в скорости вычислений по сравнению с традиционными методами.

2. Краткое описание метода. В данном разделе приводится краткое описание метода на основе матричных отображений для решения СОДУ в полиномиальной форме. Матрицы отображения могут быть получены в символьном или численном виде.

Клименко Илья Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tweetklim@gmail.com, тел.: +7(900)651-88-14

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, проект ID 90317740

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений [1] в полиномиальной форме

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{k=1}^n P_k X^{[k]}, \quad (1)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$, $X^{[k]}$ – степень Кронекера k -го порядка для фазового вектора X (является частным случаем тензорного умножения, при котором элементы получившегося вектора записываются в лексикографическом порядке без повторов), P_k – численная матрица коэффициентов.

Будем искать приближенное решение задачи Коши для системы (1) в виде полинома по кронекеровым степеням начального вектора $X = X_0$

$$X(t) = \sum_{i=1}^j R_i(t) X_0^{[i]}. \quad (2)$$

Формула (2) задает отображение $\mathcal{M} : X_0 = X(t_0) \rightarrow X(t)$, матрицы R_i которого определяются моментом времени t . Далее будем рассматривать отображение фазового вектора на фиксированном временном интервале Δt , таком что $t = t_0 + \Delta t$.

2.2. Алгоритм решения задачи. Для нахождения неизвестных матриц R_i отображения продифференцируем равенство (2):

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^j \frac{dR_i(t)}{dt} X_0^{[i]}. \quad (3)$$

Приравняв правые части уравнений (1) и (3), получим

$$\sum_{k=1}^n P_k X^{[k]} = \sum_{i=1}^j \frac{dR_i(t)}{dt} X_0^{[i]}. \quad (4)$$

Сопоставляя коэффициенты в левой и правой части уравнения (4) при одинаковых степенях $X_0^{[k]}$, получим систему дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных матриц R_i , $i = \bar{2}, \bar{j}$.

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = P_k \frac{\partial X^{[k]}}{\partial (X_0^{[k]})^T}. \quad (5)$$

Решая систему (5) с начальными условиями $R_1 = \mathbb{E}$, $R_i = \mathbb{O}$, $i = \overline{2, j}$ на промежутке $[0, \Delta t]$ любым доступным численным методом решения СОДУ, получим искомые матрицы R_i отображения (2).

3. Особенности численной реализации. При численной реализации алгоритма пункт 2.2 необходимо решить три задачи:

1. Реализация операции возведения в степень Кронекера.
2. Построение уравнений (5) для нахождения матриц R_i .
3. Решение системы (5) и нахождение матриц R_i .

3.1. Кронекеровская степень. Кронекеровская степень [2] является частным случаем тензорного произведения векторов. Например, для $n = 2$, получим $X \otimes X = (x_1^2, x_1x_2, x_2x_1, x_2^2)^T$, а $X^{[2]} = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)^T$, т. е. элементы получившегося вектора записываются в лексикографическом порядке без повторов.

3.2. Построение уравнений для нахождения матриц R_i . Подставим (2) в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \frac{dR_i(t)}{dt} X^{[k]} &= \sum_{k=1}^n P_k \left(\sum_{i=1}^j R_i(t) X_0^{[i]} \right)^{[k]} = \\ &= P_1 \left(R_1(t) X_0 + R_2(t) X_0^{[2]} + \dots + R_j(t) X_0^{[j]} \right) + \\ &\quad \dots \\ &+ P_n \left(R_1(t) X_0 + R_2(t) X_0^{[2]} + \dots + R_j(t) X_0^{[j]} \right)^{[n]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее необходимо перегруппировать коэффициенты при одинаковых степенях X_0 для получения системы уравнений относительно неизвестных матриц R_i . Для этого использовалась операция символического дифференцирования правой части равенства (6) по каждой компоненте вектора $X^{[k]}$. В реализации использовалась библиотека языка Python `sympy`, предоставляющая необходимый инструментарий символьных вычислений.

3.3. Нахождение матриц R_i в численном виде. Взяв за начальное условие [3] $R_1(0) = \mathbb{E}$, $R_2 = \mathbb{O}, \dots, R_j = \mathbb{O}$ на интервале $[0, \Delta t]$ и численно решив задачу Коши для системы (5), найдем R_i . Стоит отметить, что матрицы R_i вычисляются независимо от заданного вектора начальных значений X_0 . Для нахождения матриц R_i

может использоваться любой из методов численного решения задачи Коши.

4. Результаты расчетов. Рассмотрим в качестве примера систему Хенона–Хейлеса с хаотичной динамикой, задаваемой следующей нелинейной СОДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -x - 2\lambda xy, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -y - \lambda(x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (7)$$

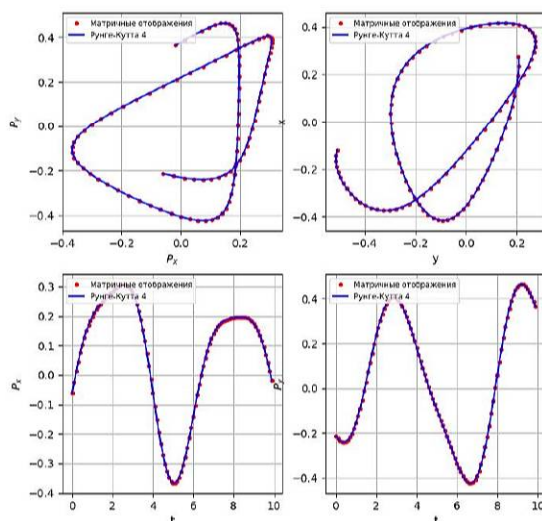


Рис. 1. Результаты интегрирования (7) методом матричных отображений и методом Рунге–Кутты четвертого порядка

Пусть параметр $\lambda = 1$, $X_0 = (-0,5; -0,1; -0,1; -0,2)^T$, $j = 3$. Будем считать матрицы отображения на промежутке $[0; 0,1]$, а метод Рунге–Кутты четвертого порядка будем применять с шагом $0,001$. Стоит отметить, что если параметр λ неизвестен, матрицы R_i могут быть вычислены с параметром λ , заданном в символьном виде.

При этом конкретное значение λ можно подставить непосредственно в R_i или найти, сопоставляя измеренные и вычисленные траектории системы. Указанная особенность дает возможность использовать метод матричных отображений, в том числе для параметрической идентификации СОДУ.

На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи Коши методом матричных отображений с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка для вычисления матриц R_i и классическим пошаговым методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Видно, что графики решений полностью совпадают. Для указанных параметров алгоритма ошибка одного шага отображения составляет $-5 \cdot 10^{-6}$, глобальная ошибка на всем промежутке интегрирования $-5 \cdot 10^{-4}$, а время вычисления 0.001 сек. В то же время глобальная ошибка метода Рунге–Кутты равна 10^{-2} , а время вычисления 0.01 сек.

5. Выводы. Рассмотренный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет сохранять свойство каноничности преобразований на протяжении длительных интервалов времени. Описанная в работе численная реализация дает возможность решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений любой размерности и с любой точностью.

Литература

1. Иванов А. Н. Символьные вычисления в моделировании динамики пучков заряженных частиц // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. ун-та, 2011. С. 127–133.
2. Андрианов С. Н. Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. 368 с.
3. Ivanov A., Golovkina A., Iben U., Polynomial neural networks and Taylor maps for dynamical systems simulation and learning // IOS Press Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. 2020. Vol. 325. P. 1230–1237.

УДК 517.929.4

Кудряков Д. А.

Новый критерий устойчивости для линейных систем нейтрального типа

Рекомендовано к публикации доцентом Александровой И. В.

1. Введение. Целью настоящей работы является разработка новых методов исследования устойчивости линейных стационарных дифференциально-разностных систем с параметрами методом функционалов Ляпунова–Красовского. В работе [1] показано, что для анализа устойчивости таких систем положительную определенность функционалов с заданной производной достаточно проверять только на множестве функций, удовлетворяющих условию $\|\varphi(\theta)\| \leq \|\varphi(0)\|$, $\|\varphi'(\theta)\| \leq k\|\varphi(0)\|$, $\theta \in [-h, 0]$ для некоторого $k > 0$. В данной работе показано, что это условие может быть применено и для проверки отрицательной определенности производной функционалов вдоль решений систем, зависящих от параметров. При этом используются функционалы, определенные на комплексных функциях. Предварительные результаты для систем запаздывающего типа получены в статье [2].

Введем обозначения: $\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{C}^n$; $PC^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ – пространство кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций, действующих из $[-h, 0]$ в \mathbb{C}^n , с нормой $\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$; $A^* = (\overline{A})^T$ – эрмитово сопряжение матрицы A ; $\Re(z)$ – действительная часть $z \in \mathbb{C}$; $\stackrel{\text{н.в.}}{=} -$ равенство почти всюду.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с одним запаздыванием вида

$$\frac{d}{dt}(x(t) - Dx(t-h)) \stackrel{\text{н.в.}}{=} Ax(t) + Bx(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{C}^n$, $A, B, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h > 0$, $x(t) - Dx(t-h)$ абсолютно непрерывна на $[0, t]$ при $t \geq 0$. Пусть $\varphi \in PC^1([-h, 0], \mathbb{C}^n)$ – начальная

Кудряков Дмитрий Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068497@student.spbu.ru, тел.: +7(922)218-75-90

Работа выполнена при финансовой поддержке ММЦ-СПбГУ, НИР № 075-15-2019-1619

функция: $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$; $x_t(\varphi) : \theta \mapsto x(t+\theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$, – состояние системы. Предположим, что D устойчива по Шуру (в ином случае система (1) не является экспоненциально устойчивой [3]). Введем для некоторого $k \geq 0$ множество

$$S = \left\{ \varphi \in C^1([-h, 0], \mathbb{C}^n) \mid \begin{aligned} &\|\varphi(\theta)\| \leq \|\varphi(0)\|, \\ &\|\varphi'(\theta)\| \leq k\|\varphi(0)\|, \theta \in [-h, 0] \end{aligned} \right\}.$$

Цель настоящей работы – исследование возможности использования множества S в условии об отрицательной определенности производных функционалов Ляпунова–Красовского в силу системы (1) для анализа экспоненциальной устойчивости.

3. Предварительные сведения. Введем базовые утверждения.
Лемма 1 [3]. *Если матрица D устойчива по Шуру, то*

$$\exists d \geq 1, \rho \in (0, 1) : \|D^j\| \leq d\rho^j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Положим теперь $k = (\|A\| + \|B\|)d/(1 - \rho)$.

Определение 1. Непрерывная матрица $U(\tau)$, при $\tau \geq 0$ удовлетворяющая

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(U(\tau) - U(\tau - h)D) &= U(\tau)A + U(\tau - h)B, \quad U(-\tau) = U^T(\tau), \\ -W &= U(0)A + U(-h)B + A^T U(0) + B^T U(h) - \\ &- A^T U(-h)D - D^T U(h)A - B^T U(0)D - D^T U(0)B, \end{aligned}$$

называется *матрицей Ляпунова* системы (1), ассоциированной с матрицей $W = W^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Замечание 1 [3]. Если система (1) экспоненциально устойчива, то существует единственная ассоциированная с W матрица Ляпунова, причем она является вещественной.

4. Функционал с заданной производной, определенный на комплексных функциях. Пусть матрица $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ положительно определена. Функционал $v_0(\varphi)$ такой, что

$$\dot{v}_0(x_t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} -x^*(t)Wx(t), \quad t \geq 0,$$

определенный на комплексных функциях, имеет вид

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) &= \varphi^*(0) (U(0) - U(-h)D - D^T U(h) + D^T U(0)D) \varphi(0) + \\ &+ 2\Re \left(\varphi^*(0) \int_{-h}^0 (U(-h - \theta) - D^T U(-\theta)) (B\varphi(\theta) + D\varphi'(\theta)) d\theta \right) + \\ &+ \int_{-h}^0 (B\varphi(\theta_1) + D\varphi'(\theta_1))^* \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2) (B\varphi(\theta_2) + D\varphi'(\theta_2)) d\theta_2 d\theta_1 \end{aligned}$$

и является непосредственным обобщением выражения, приведенного в [3] для случая вещественных начальных функций.

Замечание 2. Функционалы v_0 и \dot{v}_0 , определенные на комплексных функциях, принимают только вещественные значения.

Кроме того, имеет место

Лемма 2 [1]. *Если система (1) экспоненциально устойчива, то функционал v_0 допускает квадратичную оценку*

$$\exists \alpha_0 > 0 : v_0(\varphi) \geq \alpha_0 \|\varphi(0)\|^2, \quad \varphi \in S.$$

5. Основной результат. Получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда существуют функционалы $v(\varphi)$, $w(\varphi)$: $PC^1([-h, 0], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что*

1. $v(\lambda\varphi) = |\lambda|^2 v(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
2. $\exists \alpha_0 > 0$, такое что $v(\varphi) \geq \alpha_0 \|\varphi(0)\|^2$, $\varphi \in S$;
3. $\exists \dot{v}(x_t) \stackrel{n.g.}{=} -w(x_t)$, $t \geq 0$;
4. $\exists w_0 > 0$, такое что $w(\varphi) \geq w_0 \|\varphi(0)\|^2$, $\varphi \in S$.

Введем для $\tau \geq h$ в рассмотрение модифицированный аналог множества S , удобный для применения в задаче робастной устойчивости:

$$S(\tau, k) = \left\{ \varphi \in C^2([- \tau, 0], \mathbb{C}^n) \left| \begin{aligned} \|\varphi(\theta)\| &\leq \|\varphi(0)\|, \quad \|\varphi'(\theta)\| \leq k \|\varphi(0)\| \\ \|\varphi''(\theta)\| &\leq k^2 \|\varphi(0)\|, \quad \theta \in [- \tau, 0] \end{aligned} \right. \right\}.$$

Замечание 3. Теорема 1 останется справедливой, если множество S в ней заменить на $S(\tau, k)$.

6. Применение теоремы 1 к анализу робастной устойчивости. Предположим, что система (1) экспоненциально устойчива и рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\stackrel{\text{п.б.}}{=} (D + \Delta_D)y(t - h - \eta) + (A + \Delta_A)y(t) = \\ &= D\dot{y}(t - h) + Ay(t) + By(t - h) + f(y_t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta_D, \Delta_A, \Delta_B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h + \eta > 0$, $D + \Delta_D$ устойчива по Шуру. Тогда производная функционала $v_0(\varphi)$ вдоль решений системы (2)

$$\begin{aligned} \dot{v}_0(y_t) &\stackrel{\text{п.б.}}{=} -y^*(t)Wy(t) + l(y_t), \\ l(\varphi) &= 2\Re \left(f^*(\varphi) \left([U(0) - U(-h)D] \varphi(0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-h}^0 U(-h - \theta)(B\varphi(\theta) + D\varphi'(\theta))d\theta \right) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (3) является прямым обобщением выражения, приведенного в [3], на случай комплексных аргументов. Для анализа устойчивости системы (2) применим замечание 3. Пусть $w(\varphi) = \varphi^*(0)W\varphi(0) - l(\varphi)$, тогда

$$\begin{aligned} w(\varphi) &\geq (\lambda_{\min}(W) - \rho)\|\varphi(0)\|^2, \quad \varphi \in S(\tau, k_\Delta), \\ \rho &= 2(\rho_1|\eta|k_\Delta + \|\Delta_B\| + \|\Delta_A\| + \rho_2|\eta|k_\Delta^2 + \|\Delta_D\|k_\Delta) \times \\ &\quad \times \left(\|U(0) - U(-h)D\| + \int_{-h}^0 \|U(-h - \theta)B\|d\theta + \right. \\ &\quad \left. + k_\Delta \int_{-h}^0 \|U(-h - \theta)D\|d\theta \right), \\ \rho_1 &= \min\{\|B\|, \|B + \Delta_B\|\}, \quad \rho_2 = \min\{\|D\|, \|D + \Delta_D\|\}, \\ k_\Delta &= \frac{(\|A + \Delta_A\| + \|B + \Delta_B\|)\Delta_d}{1 - \Delta_\rho}, \quad \tau = \max\{h, h + \eta\}, \end{aligned}$$

Δ_d, Δ_ρ – числа, аналогичные d, ρ из леммы 1, определяемые по матрице $D + \Delta_D$, $\lambda_{\min}(W)$ – минимальное собственное число матрицы W .

Поэтому из замечания 3 следует

Теорема 2. Если система (1) экспоненциально устойчива, и

$$\lambda_{\min}(W) > \rho,$$

то система (2) экспоненциально устойчива.

7. Заключение. Представлен новый критерий устойчивости, примененный для линейных стационарных дифференциально-разностных систем, зависящих от параметров. Получены новые условия робастной устойчивости. Их преимуществом является свобода в выборе зависимостей параметров правой части системы. В дальнейшем планируется сравнить полученные в [4, 5] условия робастной устойчивости с условием теоремы 2.

Литература

1. Alexandrova I. V., Zhabko A. P. Stability of neutral type delay systems: a joint Lyapunov – Krasovskii and Razumikhin approach // Automatica. 2019. Vol. 106. No 14. P. 83–90.
2. Кудряков Д. А. Анализ устойчивости линейных систем с запаздыванием и неопределенными параметрами // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. P. 74–78.
3. Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.
4. Alexandrova I. V. New robustness bounds for neutral type delay systems via functionals with prescribed derivative // Applied Mathematics Letters. 2018. No 76. P. 34–39.
5. Rodriguez S. A., Kharitonov V., Dion J.-M., Dugard L. Robust stability of neutral systems: a Lyapunov-Krasovskii constructive approach // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2004. Vol. 14. No 16. P. 1345–1358.

УДК 681.5.013

Литвишко И. Р.

Динамическое позиционирование автономного необитаемого подводного аппарата в мелководной зоне

Рекомендовано к публикации доцентом Жабко Н. А.

1. Введение. Задача динамического позиционирования – одна из основных задач управления морскими объектами. В настоящий момент представлены многочисленные решения данной проблемы для надводных судов [1–5]. Однако для автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) получено меньшее количество результатов. В частности, в [6, 7] предложен подход, основанный на принципе разделения настройки наблюдателя и регулятора, но представленная система управления не является астатической, что ограничивает ее применение в реальных условиях. В данной статье рассмотрена указанная система и введено дополнительное слагаемое в закон управления, которое доставляет астатизм. Этот способ аналогичен уже имеющемуся подходу к синтезу системы управления для морского надводного судна, представленному в [5].

2. Математическая модель АНПА. Для определения модели аппарата рассматриваются две системы координат: абсолютная и относительная. Движение в относительной системе координат описывается шестью компонентами скорости $\boldsymbol{\nu} = [u, v, w, p, q, r]^T$ – линейные скорости продольной, поперечной и вертикальной качки, угловая скорость крена, дифферента и рыскания соответственно. В абсолютной системе координат, связанной с Землей, используются три компонента положения и три угла ориентации аппарата $\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T$. Связь скоростей в обеих системах координат описывается выражением

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu},$$

Литвишко Ирина Романовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069069@student.spbu.ru, тел.: +7(909)843-54-22

где матрица перехода

$$J(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} J_1(\boldsymbol{\eta}) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix},$$

$$J_1(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c\psi \cdot c\theta & (c\psi \cdot s\theta \cdot s\varphi - s\psi \cdot c\varphi) & (s\psi \cdot s\varphi + c\psi \cdot c\varphi \cdot s\theta) \\ s\psi \cdot c\theta & (c\psi \cdot c\theta + s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi) & (s\theta \cdot s\psi \cdot c\varphi - c\psi \cdot s\varphi) \\ -s\theta & c\theta \cdot s\psi & c\theta \cdot c\psi \end{bmatrix},$$

$$J_2(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & s\varphi \cdot t\theta & c\varphi \cdot t\theta \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & \frac{s\varphi}{c\theta} & \frac{c\varphi}{c\theta} \end{bmatrix}.$$

Здесь c , s и t означают \cos , \sin и tg соответственно.

Подробный вывод модели подводного аппарата представлен в [8]. Необходимо отметить, что цель динамического позиционирования – достичь заданной позиции и ориентации. В таком случае в мелководной зоне относительная скорость аппарата по отношению к воде будет очень мала, что, согласно [9], позволяет описать движение АНПА следующей системой:

$$\begin{aligned} M\dot{\boldsymbol{\nu}} + D\boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матрица инерции и добавленной массы (положительно определенная), $D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матрица демпфирования (положительно определенная), $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^6$ – вектор гравитационных и восстанавливающих сил и моментов, $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^6$ – вектор сил и моментов внешнего возмущения любой природы, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$ – вектор управляющего воздействия.

3. Система динамического позиционирования для АНПА. От замкнутой системы управления требуется, чтобы:

- существовало положение равновесия $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$, где $\boldsymbol{\eta}_d = (x_d, y_d, z_d, \varphi_d, \theta_d, \psi_d)$ – желаемое положение аппарата;
- положение равновесия было глобально асимптотически устойчивым;
- управление обеспечивало астатизм замкнутой системы.

3.1. Структура системы динамического позиционирования. Систему с желаемыми свойствами можно представить в виде

$$M\dot{z}_\nu = -Dz_\nu - g(\eta) + \tau + J^T(\eta)K_1(\eta - z_\eta), \quad (2)$$

$$\dot{z}_\eta = J(\eta)z_\nu + K_2(\eta - z_\eta),$$

$$\tau = g(\eta) - K_d z_\nu - J^T(\eta)K_p(z_\eta - \eta_d) + F(s)(\eta - z_\eta), \quad (3)$$

где s – переменная Лапласа, $z_\nu \in \mathbb{R}^6$ и $z_\eta \in \mathbb{R}^6$ – оценки векторов ν и η соответственно, $K_1, K_2, K_d, K_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – заданные постоянные матрицы.

Наблюдатель вида (2) построен на основе наблюдателя, представленного в работе [6], в которой доказано, что для обеспечения глобальной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия системы ошибок

$$M\dot{\varepsilon}_\nu = -D\varepsilon_\nu - J^T(\eta)K_1\varepsilon_\eta + d(t), \quad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}_\eta = J(\eta)\varepsilon_\nu - K_2\varepsilon_\eta,$$

полученной вычитанием (2) из (1), где $\varepsilon_\nu = z_\nu - \nu$, $\varepsilon_\eta = z_\eta - \eta$, при $d(t) \equiv 0$ достаточно, чтобы матрицы K_1, K_2 имели диагональный вид и были положительно определенными.

Закон управления (3) построен на основе управления, представленного в работе [7], с добавлением слагаемого $F(s)(\eta - z_\eta)$. В соответствии с принципом разделения [7], матрицы необходимо взять такими, чтобы управление

$$\tau^* = g(\eta) - K_d \nu - J^T(\eta)K_p(\eta - \eta_d) \quad (5)$$

при замыкании системы (1) стабилизировало ее в положении равновесия $\nu = \mathbf{0}$, $\eta = \eta_d$, при этом это положение являлось глобально асимптотически устойчивым. Тогда закон управления, использующий оценки положений и скоростей, будет обладать теми же свойствами. Для этого матрицы K_p, K_d достаточно взять положительно определенными.

Таким образом, задача синтеза закона управления сводится к определению поправки $F(s)(\eta - z_\eta)$. Во-первых, ее присутствие в законе управления не должно изменять положение равновесия замкнутой системы (1)–(3) и в целом нарушать устойчивость системы. Во-вторых, она должна обеспечивать астатизм системы.

3.2. Определение дополнительного слагаемого в управлении. Для начала введем постоянные матрицы α , β , γ , μ , при этом матрица α – гурвицева, и запишем передаточную матрицу в виде $F(s) = \gamma(E_l s - \alpha)^{-1} \beta + \mu$, ей соответствует система в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \alpha p + \beta \varepsilon_\eta, \\ \xi &= \gamma p + \mu \varepsilon_\eta,\end{aligned}\tag{6}$$

где $p \in \mathbb{R}^l$ – вектор состояний системы, $\varepsilon_\eta = z_\eta - \eta \in \mathbb{R}^6$ – вход системы, $\xi \in \mathbb{R}^6$ – выход системы.

Формулировка следующей теоремы повторяет формулировку соответствующей теоремы для морского надводного судна [5], но рассматриваемые системы имеют иную структуру из-за увеличения числа компонентов, описывающих движение аппарата, и учета влияния гравитационных и восстанавливающих моментов и сил $g(\eta)$.

Теорема 1. *Если система (6) асимптотически устойчива, то положение равновесия $\nu = 0$, $\eta = \eta_d$ замкнутой системы (1)–(3) глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Заметим, что z_η , z_ν можно исключить из уравнения (3), используя векторы ошибки наблюдателя ε_η , ε_ν и τ^* . Принимая во внимание системы (4), (6) и уравнение (5) и предполагая, что $d(t) \equiv 0$, можно записать (1)–(3) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_\nu &= -M^{-1} D \varepsilon_\nu - M^{-1} J^T(\eta) K_1 \varepsilon_\eta, \\ \dot{\varepsilon}_\eta &= J(\eta) \varepsilon_\nu - K_2 \varepsilon_\eta, \\ \dot{p} &= \alpha p + \beta \varepsilon_\eta, \\ \dot{\nu} &= -M^{-1} D \nu - M^{-1} g(\eta) + M^{-1} \tau^* + \\ &\quad + M^{-1} (K_d \varepsilon_\nu + J^T(\eta) K_p \varepsilon_\eta + \gamma p + \mu \varepsilon_\eta), \\ \dot{\eta} &= J(\eta) \nu.\end{aligned}\tag{7}$$

С учетом вида τ^* четвертое уравнение системы (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\nu} &= (-M^{-1} D - M^{-1} K_d) \nu - M^{-1} J^T(\eta) K_p (\eta - \eta_d) + \\ &\quad + M^{-1} (K_d \varepsilon_\nu + J^T(\eta) K_p \varepsilon_\eta + \gamma p + \mu \varepsilon_\eta).\end{aligned}\tag{8}$$

Введем переменные $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{p}^T, \boldsymbol{\nu}^T, (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d)^T)^T$, $\mathbf{x}_2 = (\boldsymbol{\varepsilon}_\nu^T, \boldsymbol{\varepsilon}_\eta^T)^T$ и запишем систему (7) с учетом (8) в следующей форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= A_c(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_d(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= A_o(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2.\end{aligned}$$

Данная система с учетом увеличения размерности матриц идентична системе, полученной в работе [10], где устойчивость положения равновесия замкнутой системы доказывается для морских судов. Таким образом, доказательство глобально асимптотической устойчивости положения равновесия $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$ замкнутой системы (1)–(3) полностью повторяет доказательство, представленное в [10].

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что наблюдатель, матрицы K_p , K_d и передаточную функцию $F(s)$ в регуляторе можно настраивать отдельно друг от друга. Имеющаяся свобода в построении передаточной матрицы позволяет доставить системе желаемые динамические свойства как относительно высокочастотных компонент внешнего возмущения, так и низкочастотных. В частности, для обеспечения астатизма замкнутой системы, т. е. для обеспечения стремления невязки $\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d$ к нулю при $t \rightarrow +\infty$ при воздействии на систему постоянного возмущения $\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{d}_0$, верна следующая теорема. Ее формулировка совпадает с формулировкой аналогичной теоремы для морского судна из [5], но рассматриваемые объекты соответствуют модели подводного аппарата.

Теорема 2. *Если выполняется следующее условие:*

$$\det \begin{pmatrix} -D & -J^T(\boldsymbol{\eta}_d)K_1 \\ J(\boldsymbol{\eta}_d) & -K_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

и если передаточная матрица $F(s)$ удовлетворяет равенству:

$$F(0) = K_\Delta,$$

где $K_\Delta = -(D + K_d)J^T(\boldsymbol{\eta}_d)K_2 - J^T(\boldsymbol{\eta}_d)(K_p + K_1)$, тогда система (1)–(3) является астатической относительно вектора невязки $\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d$ для любого $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{R}^6$.

Доказательство. Предположим, что положение равновесия $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$ замкнутой системы (1)–(3) существует при некотором фиксированном внешнем возмущении $\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{d}_0$. Рассмотрим

систему (4) в положении равновесия:

$$\begin{aligned} 0 &= -D\varepsilon_\nu - J^T(\eta_d)K_1\varepsilon_\eta + \mathbf{d}_0, \\ 0 &= J(\eta_d)\varepsilon_\nu - K_2\varepsilon_\eta. \end{aligned}$$

Учитывая первое условие теоремы 2, правомерно утверждать, что приведенная выше система имеет единственное решение $(\varepsilon_{\nu 0}^T, \varepsilon_{\eta 0}^T)^T$ при любом $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{R}^6$. Теперь рассмотрим уравнения наблюдателя и регулятора (2),(3) в найденном положении равновесия:

$$\begin{aligned} 0 &= -Dz_\nu - \mathbf{g}(\eta_d) + \tau + J^T(\eta_d)K_1\varepsilon_{\eta 0}, \\ 0 &= J(\eta_d)z_\nu + K_2\varepsilon_{\eta 0}, \\ \tau &= \mathbf{g}(\eta_d) - K_d z_\nu - J^T(\eta_d)K_p(z_\eta - \eta_d) + F(0)\varepsilon_{\eta 0}. \end{aligned}$$

Из данной системы с помощью простых математических действий можно получить второе условие теоремы: $F(0) = K_\Delta$.

Теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы видно, что два условия, приведенные в ее формулировке, гарантируют нулевую ошибку $\mathbf{e}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d$ при $t \rightarrow +\infty$, так как $\mathbf{e}_\eta = \varepsilon_\eta - \varepsilon_{\eta 0}$. Это эквивалентно тому, что для каждого постоянного внешнего возмущения $\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{d}_0$ управление τ , определенное формулой (3), обеспечивает астатизм замкнутой системы.

Таким образом, для обеспечения системы желаемыми свойствами в качестве передаточной матрицы $F(s)$ достаточно взять постоянную матрицу K_Δ .

4. Моделирование в среде Simulink. Для иллюстрации данного подхода проведено моделирование в среде Simulink на примере АНПА Камбага, исследованного в работе [11]. Начальное положение аппарата принималось равным $\boldsymbol{\eta}_0 = (2, 0, 1, 0, 0, 1)$, желаемое положение – $\boldsymbol{\eta}_d = (6, 0, 5, 0, 0, 0)$.

Для моделирования волн использовались суммы из передаточных функций:

$$h_i(s) = \frac{\sigma s}{s^2 + 2\zeta\omega_i s + \omega_i^2}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Такой подход к учету внешнего возмущения подробно представлен в [8]. Каждая передаточная функция соответствует влиянию волн одной частоты. В качестве доминирующих частот волнового спектра

взяты $\omega_1 = 0,6283$ рад/с, $\omega_2 = 0,7628$ рад/с, $\omega_3 = 0,2762$ рад/с. Параметр, отвечающий за интенсивность волн, принимался равным $\sigma = 1$, коэффициент демпфирования $\zeta = 0,1$.

Матрицы K_1 , K_2 для наблюдателя (2), в соответствии с [6], имеют следующий вид:

$$K_1 = E_{6 \times 6}, \quad K_2 = \text{diag}\{30,0063; 35,3594; 15,9928; 1; 1; 1\}.$$

Матрицы управляющего воздействия (3) выбраны следующий образом [7]:

$$K_d = 10E_{6 \times 6}, \quad K_p = 30E_{6 \times 6}.$$

Позиционирование аппарата начинается в 50 с. Кроме того, для иллюстрации астатизма замкнутой системы, начиная с 25 с, на аппарат действует постоянное возмущение вдоль осей x и z . Необходимо упомянуть, что Камбага имеет пять подруливающих устройств, установленных в двух отдельных плоскостях, которые позволяют ему двигаться только с пятью степенями свободы, по оси y аппарат является неуправляемым.

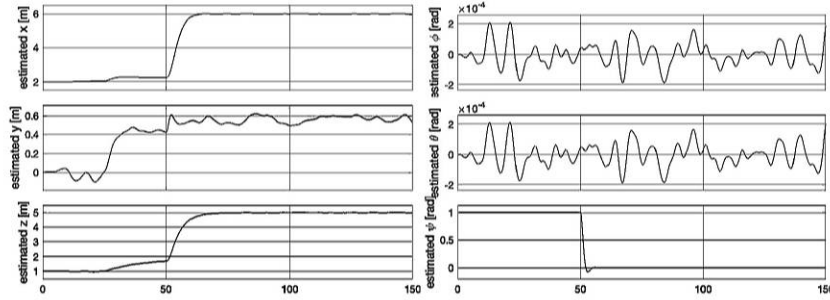


Рис. 1. Переходный процесс замкнутой системы при наличии поправки $K_{\Delta}(\eta - z_{\eta})$

Рассмотрим результат моделирования. Как видно на рис. 1, аппарат действительно устанавливается в заданной позиции с заданной ориентацией с учетом неуправляемости по компоненту y , т.е. замкнутая система является астатической. На рис. 2 представлен переходный процесс системы без учета введенной поправки в законе

управления, аппарат отклоняется от заданного положения из-за влияния постоянного возмущения, астатизм не обеспечивается.

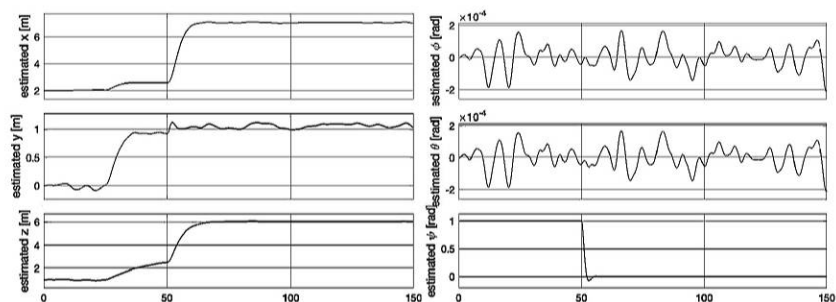


Рис. 2. Переходный процесс замкнутой системы в отсутствие поправки $K_{\Delta}(\eta - z_{\eta})$

5. Заключение. Рассмотренная система управления решает задачу динамического позиционирования АНПА. Введенная поправка обеспечивает астатизм замкнутой системы, при этом она строится на основе уже имеющихся матриц наблюдателя и регулятора и не требует настройки дополнительных параметров.

Литература

1. Loria A., Fossen T. I., Panteley E. A separation principle for dynamic positioning of ships: Theoretical and experimental results // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2000. Vol. 8. No 2. P. 332–343.
2. Федорова М. А. Синтез и компьютерное моделирование астатической системы управления курсом морского судна // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 368–373.

3. Яковлев А. А. Синтез алгоритмов управления для стабилизации программного движения морского судна // Процессы управления и устойчивость. 2018. Т. 5. No 1. С. 392–397.
4. Смирнова М. А. Обеспечение астатизма в системах управления движением морских судов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Т. 10. No 2. С. 141–153.
5. Veremey E. I., Sotnikova M. V. Optimal filtering correction for marine dynamical positioning control system // Journal of Marine Science and Application. 2016. Vol. 15. P. 452–462.
6. Liu S., Wang D., Poh E. K. A nonlinear observer for AUVs in shallow water environment // 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2004. Vol. 2. P. 1130–1135.
7. Liu S., Wang D., Poh E. K., Wang Y. Dynamic positioning of AUVs in shallow water environment: Observer and controller design // Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. 2005. Vol. 1. P. 705–710.
8. Fossen T. I. Guidance and Control of Ocean Vehicles. New York: John Wiley & Sons, 1994. 480 p.
9. Strand J. P. Nonlinear position control system design for marine vessels: Ph.D dissertation. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 1999. 184 p.
10. Veremey E. I. Dynamical correction of positioning control laws // 9th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems. 2013. Vol. 25. No 33. P. 31–36.
11. Silpa-Anan C. Autonomous underwater robot: Vision and control: Master's thesis. The Australian National University, Canberra, 2001. 158 p.

УДК 681.5.013

Пак Н. В.

Стабилизация маятника Фуруты с использованием обратной связи с многоцелевой структурой. Переход к цифровому управлению

Рекомендовано к публикации профессором Уткиным Л. В.

1. Введение. В последние годы в научных исследованиях большое внимание уделяется методам синтеза законов управления для нелинейных динамических систем [1]. Несмотря на существование подходов, обеспечивающих устойчивость отдельных движений, не существует универсального метода решения задач для широких классов [2]. В качестве нелинейного объекта для исследования различных методов синтеза часто рассматривается маятник Фуруты. В данной работе для стабилизации маятника применён многоцелевой подход к синтезу обратной связи, который ранее практически не использовался для нелинейных объектов, действующих в различных режимах функционирования [3]. Важной частью работы является построение цифрового регулятора для рассматриваемого нелинейного объекта, что обусловлено характером работы цифровых вычислительных средств, играющих основную роль в современных информационных системах [4]. Особое внимание уделяется подавлению колебаний элементов системы под воздействием возмущений колебательного характера.

2. Постановка задачи. Маятник Фуруты – это перевернутый вертикальный маятник, размещённый на вращающемся основании. Положение системы с маятником в пространстве однозначно определяется углом поворота платформы α и углом отклонения маятника β от верхнего вертикального положения [5–7].

В данной работе ставится задача синтеза цифрового регулятора для нелинейного объекта с использованием обратной связи с многоцелевой структурой. Найденное управление должно удовлетворять

Пак Нелли Вадимовна – аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; e-mail: st049271@student.spbu.ru, тел.: +7(950)034-12-64

следующим условиям для каждого из рассматриваемых режимов функционирования объекта:

1. При собственном движении, определяемом ненулевым начальным отклонением от вертикали, управление должно возвращать маятник в нулевое положение равновесия.
2. При этом должна быть учтена неполнота измеряемой информации. В данном случае измеряются скорость вращения платформы и угол отклонения от вертикали.
3. При движении, определяемом воздействием колебательных возмущений, обратная связь должна удерживать систему в окрестности нулевого положения равновесия, подавляя колебания угла отклонения маятника от вертикали.

Кроме того,

1. Необходимо учитывать дискретизацию по времени для обрабатываемой информации.
2. Достижение описанных требований не должно приводить к использованию значительно больших энергетических ресурсов, чем при реализации управления, не учитывающего внешние возмущения.

Принятый подход позволяет декомпозировать общую задачу синтеза на последовательность локальных подзадач, каждая из которых относится к конкретным режимам движения объекта.

2.1. Математическая модель объекта. Математическая модель маятника Фуруты представляется следующей системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [5–7]:

$$M_0(q)\ddot{q} + M_1(q, \dot{q})\dot{q} + M_2(q) = Tu,$$

где $q(\alpha, \beta)'$ – вектор обобщённых координат системы, u – управляющий сигнал – напряжение, подаваемое на привод электромотора, матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta & -m_1 L_0 l_1 \cos \beta \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \beta & J_0 + m_1 l_1^2 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a} + & m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \sin \beta + \\ + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta} \sin 2\beta^2 & + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta^2 \\ - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin 2\beta^2 & C_1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \beta \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{K_t K_u}{R_a} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь J_0 и J_1 – моменты инерции платформы и маятника, C_0 и C_1 – коэффициенты сухого трения для этих элементов системы, K_t, K_b, K_u, R_a – коэффициенты электромотора, имеющие постоянные числовые значения. Особый интерес представляет верхнее неустойчивое положение равновесия.

2.2. Общая задача синтеза. Для обеспечения выполнения всех требований, предъявляемых к динамике процессов объекта, будем использовать обратную связь с многоцелевой структурой (МР) [8–10], которая в дискретном времени описывается следующими разностными уравнениями:

$$z[n+1] = A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]), \quad (1)$$

$$\tau[n] = K_d z[n] + \xi[n], \quad (2)$$

$$\xi[n] = F_d(\tilde{z})(y[n] - C_d z[n]). \quad (3)$$

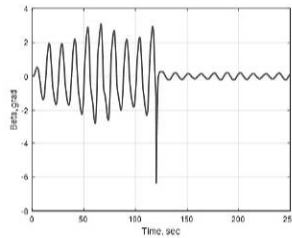


Рис. 1. Сравнение процессов по углу β Здесь A_d, b_d, C_d – матрицы дискретной линейной системы, которая соответствует непрерывной линейной системе, полученной из исходной путем линеаризации обратной связью. Первый элемент структуры представляет собой асимптотический наблюдатель (1), предназначенный для восстановления информации о векторе состояния объекта по результатам его измерений. С помощью второго элемента структуры формируется управляющий сигнал (2), подаваемый на электромотор. Основным назначением данного элемента является обеспечение устойчивости замкнутой системы. Третьим элементом

является динамический фильтр (3), который поддерживает устойчивость и обеспечивает желаемые динамические свойства замкнутой системы при движении в условиях воздействия внешних возмущений.

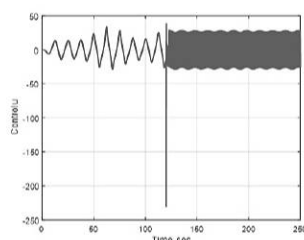


Рис. 2. Сравнение процессов по управлению u

ческого внешнего воздействия в модели предлагается использовать сумму трёх гармоник с разными частотами. Анализируя динамику процессов замкнутой системы с построенной цифровой многоцелевой структурой управления при включенном и выключенном цифровом фильтре, представленную на рис. 1, 2, видим, что для данного режима движения маятника фильтр подавляет колебания по углу, а по управлению амплитуда колебаний остаётся примерно на том же уровне. Таким образом, цифровой регулятор подавляет колебания маятника до небольших величин, и хотя увеличивает при этом затрачиваемые ресурсы на управление, тем не менее, они остаются ограниченными.

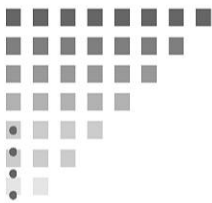
4. Выводы. В работе изучены вопросы построения стабилизирующих законов управления для вертикального маятника с вращающимся основанием (маятника Фуруты). В отличие от известных подходов, синтез обратной связи осуществлён на множестве законов управления с многоцелевой структурой. При выборе её элементов определяющую роль играли два режима движения системы. Построен цифровой регулятор для рассматриваемой динамической системы. На основании проведённых практических расчетов выполнено имитационное моделирование динамики замкнутой системы с синтезированной многоцелевой структурой управления, показавшее работоспособность и эффективность принятого подхода.

3. Результаты компьютерного моделирования. Цифровой регулятор.

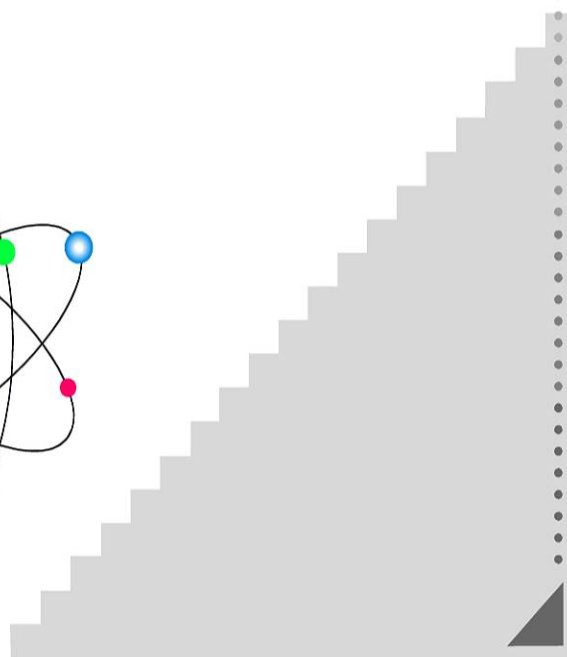
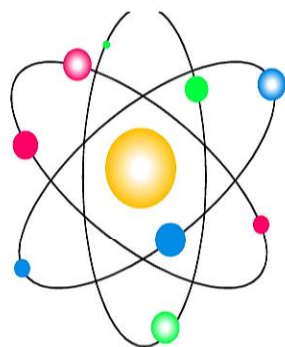

Здесь приводятся результаты применения описанного подхода к синтезу обратной связи с многоцелевой структурой для управления маятником Фуруты. Рассматривается движение маятника под воздействием внешних возмущений, начальное отклонение маятника считается нулевым. В качестве более реалистичного внешнего воздействия в модели предлагается использовать

Литература

1. Khalil H. K. Nonlinear Systems. Third edition. New Jersey: Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002. 766 p.
2. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Управление с прогнозирующими моделями. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. 214 с.
3. Пак Н. В. Управление маятником Фуруты с использованием обратной связи с многоцелевой структурой // Архив открытого доступа Санкт-Петербургского государственного университета. [Электронный ресурс]: URL:<http://hdl.handle.net/11701/25985> (дата обращения: 01.05.2021).
4. Сотникова М. В., Севостьянов Р. А. Цифровое управление контролируемыми переменными в заданном диапазоне с учетом запаздывания // Вестник Санкт-Петербургского университета Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 449–463.
5. Arnolds B. M. Identification and control of the rotary inverted pendulum // Technical Traineeship Report: University of Eindhoven. 2003. Vol. 2003.100. 60 p.
6. Furuta K., Iwase M. Swing-up time analysis of pendulum // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. 2004. Vol. 52. No 3. P. 153–163.
7. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 448 с.
8. Веремей Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2016. 408 с.
9. Veremey E. I. Separate filtering correction of observer-based marine positioning control laws // International Journal of Control. 2017. Vol. 90. Iss. 8. P. 1561–1575.
10. Veremey E. I. Optimization of filtering correctors for autopilot control laws with special structures // Optimal Control Applications and Methods. 2015. Vol. 37. Iss. 2. P. 323–339.



*2. Математические
методы в механике и
физике*



УДК 539.3

Алмазова Л. А., Седова О. С.

Численное исследование прочности алюминиевого сплава с дефектами при циклических нагрузках

1. Введение. В современном мире литейные алюминиевые сплавы находят все большее применение в промышленности благодаря своим механическим свойствам. Однако литейные сплавы всегда содержат определенное количество пористости и других дефектов, которые становясь концентраторами напряжений, снижают прочность и усталостную долговечность конструкций.

Помимо этого, серьезной проблемой для металлических объектов является коррозия. Некоторые задачи о конструкциях, подверженных равномерной коррозии решены аналитически [1, 2]. При рассмотрении задач о локальной коррозии решение можно получить численными методами [3, 4]. Одной из наиболее интенсивных форм локальной коррозии является точечная коррозия (питтинг), возникающая на поверхности в местах дефектов покрытия или неоднородности сплавов. Так как питтинги сложно обнаружить ввиду их малых размеров и продуктов коррозии, их маскирующих, изучение процесса локальной коррозии и его влияния на прочность материалов и конструкций имеет значительную практическую ценность.

Отмечается, что питтинги на поверхности сталей и алюминиевых сплавов имеют сложную форму, включающую основной и дополнительный питтинг на дне основного [5]. При этом показано, что наличие вторичного питтинга приводит к значительному росту коэффициента концентрации напряжений, а также изменению качественной картины распределения поля напряжений [6].

Цель работы – оценка усталостной прочности алюминиевого сплава в случаях кластеров дефектов сложной формы и дефектов без вторичного повреждения.

2. Постановка задачи. Рассматривается модель цилиндрического образца с круглым сечением, изготовленная из сплава AS7G06

Алмазова Лиана Алмазовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st080595@student.spbu.ru, тел.: +7(931)211-14-40

Седова Ольга Сергеевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.s.sedova@spbu.ru, тел.: +7(911)159-23-94

с Т6 пост-термической обработкой. Свойства материала показаны в таблице 1 [7]. Поведение материала описывается моделью с комбинированным изотропно кинематическим упрочнением, реализованной в ANSYS Workbench. В середине образца вдоль поперечного сечения расположены три поверхностных дефекта. Рассмотрены две возможные формы дефектов. Необходимо оценить напряженное состояние и прочность образца при циклических нагрузках.

Таблица 1. Механические свойства AS7G06

E (модуль Юнга) (ГПа)	$R_{0.2\%}$ (предел упругости) (МПа)	R_m (предел прочности) (МПа)	ν коэффициент Пуассона (%)
73	275	335	0,33

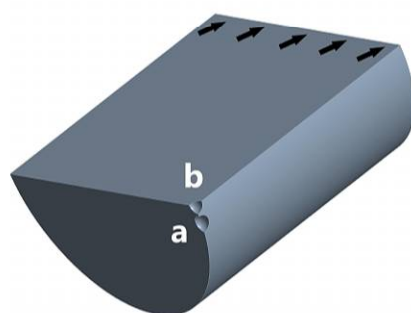


Рис. 1. Геометрическая модель. Плоскости а,б – плоскости сечения, стрелки указывают плоскость приложения и направление нагрузки

3. Конечно-элементная модель. Для решения поставленной задачи были построены геометрические модели в пакете ANSYS SpaceClaim. В качестве элементарной модели выступал цилиндр с диаметром 10 мм и высотой 20 мм, в котором вырезаны три основных сферических дефекта радиуса $R = 0,32$ мм с дополнительными повреждениями на дне радиуса $r = 0,08$ мм. Расстояние между дефектами 0,1 мм. Вторая геометрия имеет лишь основные сферические дефекты без вторичных повреждений. В обеих геометриях дефекты расположены в середине образца вдоль поперечного сечения, т.е. на окружности. В силу симметрии была построена одна четвертая часть от рассматриваемой модели.

На построенные геометрические модели наложены граничные условия (рис. 1): сила σ , соответствующая амплитуде в циклических испытаниях, на поперечное сечение, соответствующее границе рабочей части образца; условие симметрии на плоскостях сечения, ограничивающих рассматриваемую одну четвертую часть модели. Для решения задачи использовался метод конечных элементов. Реализованная вблизи дефектов сетка приведена на рис. 2.

4. Исследование усталостной долговечности. При определении долговечности в случае одноосного нагружения при многоциклового усталости широко используется модель Басквина [8]. Согласно этой модели, базирующейся на кривых усталости, разница между минимальным и максимальным напряжениями в цикле линейно связана с количеством циклов до разрушения. В данной работе числовые параметры модели Басквина определены по кривым усталости рассматриваемого сплава, полученным экспериментально в работе [9].

5. Анализ результатов. Распределения напряжений для рассматриваемых геометрий представлены на рис. 2. Они наглядно демонстрируют значительное увеличение значения напряжения Мизеса при наличии вторичного повреждения. Отметим, что в случае дефектов сложной формы максимальные значения напряжения достигаются на месте стыка вторичного дефекта с основным. Для геометрии с дефектами без вторичных повреждений максимум достигается на краях в пространстве между дефектами.

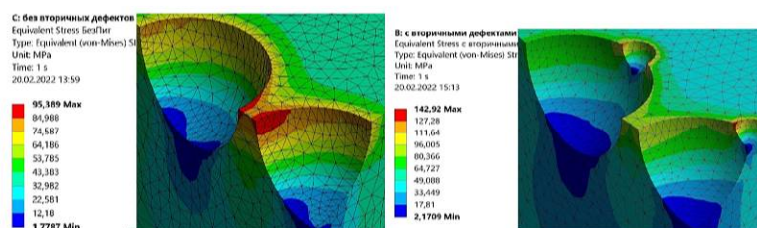


Рис. 2. Распределение напряжений для геометрии с дефектами без вторичных повреждений и дефектами сложной формы

На рис. 3 представлены графики зависимости усталостной долговечности построенных моделей от значений прикладываемых нагрузок. Видно, что максимальная долговечность у обеих конструкций совпадает, но в случае дефектов сложной формы она достигается максимально при нагрузке в 25 МПа, когда при дефектах без вторичного повреждения максимальная долговечность сохраняется до нагрузки в 37 МПа. При этом максимальная нагрузка, при которой конструкция с вторичными повреждениями не испытывает мгновенного разрушения, достигает 38 МПа, когда для второй модели это значение достигает 56 МПа. Таким образом, наличие вторичного дефекта на дне основных приводит к снижению прочности.

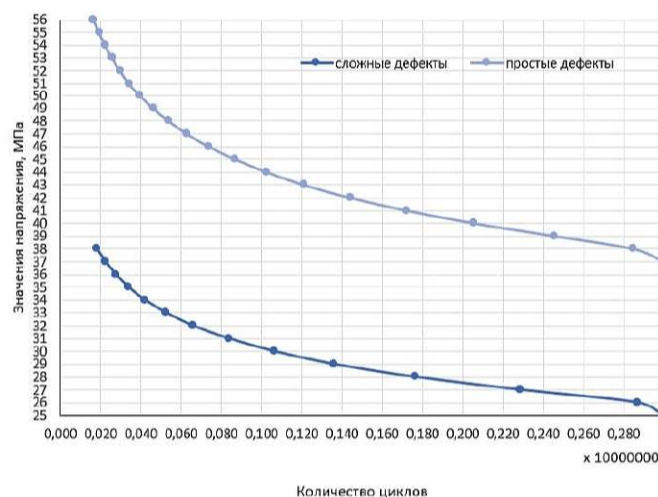


Рис. 3. График зависимости количества циклов от значений напряжения

6. Заключение. В работе представлено численное моделирование напряженного состояния образцов из алюминиевого сплава в условиях циклического одноосного нагружения с дальнейшим исследованием усталостной прочности. Показано, что, когда во внимание принимаются только полусферические дефекты, получаем завышенную оценку значения допустимых нагрузок по сравнению со случаем дефектов сложной формы. Таким образом, учет сложной формы коррозионных дефектов существенно влияет на прогнозируемую прочность конструкций.

Исследования были проведены с использованием мощностей Ре-

сурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ».

Литература

1. Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Т. 12. № 2. С. 33–44.
2. Седова О. С., Пронина Ю. Г., Кабриц С. А. Коррозия сферических элементов под действием давления и неравномерного нагрева // Деформация и разрушение материалов. 2018. № 1. С. 2–7.
3. Седова О. С., Хакназарова Л. А. Расчет напряжений в толстостенном сферическом элементе с наружной выемкой // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 212–218.
4. Okulova D. D., Sedova O. S., Pronina Y. G. The effect of surface defects interaction on the strength of a pressurised spherical shell // Procedia Structural Integrity. 2021. Vol. 33. P. 1055–1064.
5. Cerit M. Corrosion pit-induced stress concentration in spherical pressure vessel // Thin-Walled Structures. 2019. Vol. 136. P. 106–112.
6. Алмазова Л. А., Седова О. С. Моделирование влияния поверхностных дефектов на поведение алюминиевого сплава в условиях циклических нагрузок // Frontier Materials & Technologies. 2022. Т. 1. С. 7–14.
7. Ben Ahmed A., Houria M. I., Fathallah R., Sidhom H. The effect of interacting defects on the HCF behavior of Al-Si-Mg aluminum alloys // Journal of Alloys and Compounds. 2019. Vol. 779. P. 618–329.
8. Basquin O. H. The exponential law of endurance tests // American Society for Testing and Materials Proceedings. 1910. Vol. 10. P. 625–630.
9. Mu P., Nadot Y., Serrano-Munoz I., Chabod A. Influence of complex defect on cast AS7G06-T6 under multiaxial fatigue loading // Engineering Fracture Mechanics. 2014. Vol. 123. P. 148–162.

УДК 539.3

Вяльцева В. В., Седова О. С.

Применение обобщенного метода конечных элементов с локальным и глобальным решением к задаче Кирша

1. Введение. Метод конечных элементов широко применяется при решении задач о напряжённо-деформированном состоянии тел с выемками, трещинами, порами [1], хотя для отдельных задач получены аналитические решения [2]. Несмотря на широкую применимость метода конечных элементов (FEM), например, [3], при анализе задач механики разрушения он имеет достаточно серьезные ограничения, которые связаны с его зависимостью от сетки [4]. Во-первых, при рассмотрении трещин и границ зёрен материала, сетка FEM строится вдоль этих неоднородностей, что приводит к более сложной сетке. Во-вторых, наличие в геометрии таких неоднородностей как микро-трещины и другие микродефекты, требует построения очень мелкой сетки, по крайней мере в их окрестностях, что приводит к значительным вычислительным затратам. Эти особенности отмечены в работах [4, 5] и др. Существует несколько методов решения данной проблемы. Высокую эффективность показал обобщённый метод конечных элементов с локальным и глобальным решением (GFEM^{gl}) [5]. В данной работе рассмотрен обобщённый метод конечных элементов с локальным и глобальным решением. Метод реализован на основе FEM с использованием треугольных элементов первого порядка. Приведён пример численного решения задачи Кирша с помощью обобщённого метода конечных элементов с локальным и глобальным решением.

2. Основные положения используемых методов. Далее рассмотрим алгоритмы FEM и GFEM^{gl}.

2.1. Метод конечных элементов. Идея FEM состоит в аппроксимации кусочно-непрерывной функцией непрерывных вели-

Вяльцева Виктория Витальевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: valcevav@gmail.com, тел.: +7(952)892-77-38

Седова Ольга Сергеевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.s.sedova@spbu.ru, тел.: +7(911)159-23-84

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 21-19-00100

чин, значения которых известны в конечном числе точек рассматриваемых элементов. Таким образом, исследуемый объект разбивается на конечное число элементов, которые имеют фиксированные узловые точки. С использованием значений искомой величины в узлах и аппроксимирующей функции определяются значения величины внутри элементов.

Рассмотрим алгоритм ФЕМ для трёхузловых треугольных элементов [6]. Находим матрицу упругости для плоского напряжённого состояния:

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix},$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Находим матрицы Коши для каждого элемента:

$$B_s = (B_i \ B_j \ B_k),$$

где

$$B_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{pmatrix},$$

N_m – функция формы узла m , i , j и k – номера узлов, соответствующих элементу с номером s .

Находим матрицу жесткости каждого элемента:

$$K_s = B_s^T D B_s \delta,$$

где δ – площадь элемента. Затем глобальную матрицу жесткости K (алгоритм генерирования глобальной матрицы жесткости подробно изложен в [6]). Формируем систему уравнений МКЭ:

$$K \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \dots \\ F_{xn} \\ F_{yn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где F_{xi} – сила, приложенная к i -му узлу вдоль оси x , F_{yi} – сила, приложенная к i -му узлу вдоль оси y , n – количество узлов, u_i – перемещение i -го узла параллельно оси Ox , v_i – перемещение i -го узла

параллельно оси Oy . Подставляя в систему (1) граничные условия первого и второго рода, получаем вектор перемещения узлов. После чего находим деформации и напряжения для каждого элемента:

$$\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = B_s \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_s = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = D\varepsilon_s.$$

2.2. Обобщённый метод конечных элементов с локальным и глобальным решением (GFEM^{gl}). Данный метод основан на аддитивном представлении решения задачи. Решение складывается из двух частей: первая из них представляет собой гладкое глобальное решение, построенное на крупной сетке конечных элементов, вторая – решение задачи в сравнительно небольшой области (или нескольких таких областях), которое строится на базе мелкой сетки и учитывает неоднородности [7]. Глобальное и локальное решения строятся одним из известных численных методов, например МКЭ или обобщённым методом конечных элементов [8]. Итоговый вектор перемещений можно получить по формуле

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \hat{u}_j^t(x) + \sum_{K \in I_{gl,t}} N_k(x) u_k^{gl,t}(x), \quad (2)$$

где $N_j(x)$ – функция формы j -го узла глобальной сетки, $\hat{u}_j^t(x)$ – перемещение j -го узла, найденное глобальным решением, $N_k(x)$ – функция формы k -го узла крупной сетки, который попал в локальное решение, $u_k^{gl,t}$ – перемещение k -го узла, найденное локальным решением, x – точка на пластине.

3. Решение задачи Кирша. Рассмотрим тонкую пластинку из однородного изотопного материала с круглым отверстием в центре. Модуль Юнга $E = 2000$ МПа, коэффициент распределения Пуассона $\nu = 0,3$. Пластина размером $L = 1$ мм нагружена постоянным растягивающим усилием $p = 10$ Па, радиус отверстия $R = 0,05$ мм. Для решения глобальной задачи генерируем на пластине крупную сетку, в которой 180 узлов и 260 элементов (рис. 1).

Методом FEM получаем деформации для глобальной задачи и приступаем к решению локальной, генерируем вторую сетку для ло-

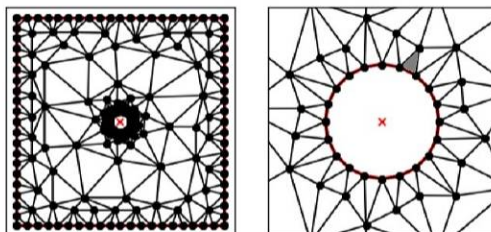


Рис. 1. Крупная сетка

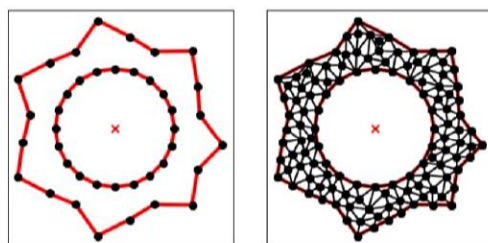


Рис. 2. Мелкая сетка вблизи отверстия

кальной области, выделенной на рис. 2, она содержит 123 узла и 190 элементов.

Реализуем FEM для данной области, с помощью формулы (2) находим итоговые перемещения, деформации, а затем и напряжения (элемент с максимальным напряжением по Мизесу после решения локальной задачи выделен серым на рис. 1.) Итоговое значение напряжения по Мизесу – 27,719 МПа. Аналитическое решение [9] даёт результат 32,654 МПа. Алгоритм, реализующий решение, написан на языке Python.

4. Вывод. В данной работе проведён обзор методов FEM и GFEM^{gl}. На языке Python реализован двумерный метод GFEM^{gl}, в котором глобальное и локальное решения ищутся методом конечных элементов. Метод успешно применен к задаче Кирша.

Литература

1. Окулова Д. Д., Вакаева А. Б., Седова О. С. Расчет напряжений в полой сфере с поверхностными дефектами // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 112–116.
2. Shuvalov G. M., Vakaeva A. B., Shamsutdinov D. A., Kostyrko S. A. The effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on stress concentration near the nanopatterned bimaterial interface // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. Vol. 16. No 2. P. 165–176.
3. Алмазова Л. А., Седова О. С. Моделирование влияния поверхностных дефектов на поведение алюминиевого сплава в условиях циклических нагрузок // Frontier Materials & Technologies. 2022. Т. 1. С. 7–14.
4. Belytschko T., Gracie R., Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2009. Т. 17. No 4. С. 043001.
5. Kim D. J., Pereira J. P., Duarte C. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarsegeneralized FEM meshes // International journal for numerical methods in engineering. 2010. Vol. 81. No 3. P. 335–365.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. 1975. 541 с.
7. Fonseca G. M., Barros F. B., de Oliveira T. S., Monteiro H. A., Novelli L., Pitangueira R. L. 2-D Crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2020. Vol. 118. P. 70–83.
8. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // International journal for numerical methods in engineering. 1999. Vol. 46. No 1. P. 131–150.
9. Жидков А. В., Любимов А. К. Плоские задачи теории упругости: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. 38 с.

УДК 51.73

Казанков В. К., Холодова С. Е.

Математическое моделирование магнитогидродинамических процессов в океанах

1. Введение. Представляется математическая модель, описывающая геофизические процессы электропроводящей несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью с учетом диффузии магнитного поля, гравитации и силы Кориолиса. Модель создана на основе решения краевой магнитогидродинамической задачи, описывающей длинные волны малой амплитуды. Используя данный подход, удается редуцировать систему дифференциальных уравнений векторного типа с частными производными к одному скалярному уравнению для модифицированной функции, описывающей возмущение свободной поверхности океана. Модель используется для воспроизведения магнитогидродинамических процессов океана в северном полушарии. При моделировании магнитного поля наблюдается его инверсия.

2. Постановка задачи. Система дифференциальных уравнений для несжимаемой электропроводящей жидкости представима в виде [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \rangle \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} [\text{rot } \mathbf{b} \times \mathbf{b}],$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{b} \times \mathbf{v}] + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{b},$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

Казанков Владислав Константинович – студент, Университет ИТМО;
e-mail: v.kazankov98@itmo.ru, тел.: +7(977)300-20-48

Холодова Светлана Евгеньевна – доцент, Университет ИТМО; e-mail:
kholodovase@itmo.ru, тел.: +7(965)021-00-41

с граничными условиями, заданными на поверхностях $z = h_B(x, y, t)$ и $z = Z(x, y)$, вида

$$b_z(x, y, h_B, t) = b_{z0}(x, y, t), \quad b_z(x, y, Z, t) = b_{z0}^{(e)},$$

где h_B – свободная океаническая поверхность слоя, вращающегося со скоростью ω , p – давление, ρ – плотность, \mathbf{b} – вектор магнитной индукции поля, μ – магнитная проницаемость, g – гравитационная постоянная, σ – электрическая проводимость, $Z(x, y)$ – непроницаемое твердое дно.

В приближении длинных волн малой амплитуды решение исходной краевой задачи сводится к решению уравнения

$$\mathcal{D} (\mathcal{D}_t^2 + \alpha^2) \left(\left(\mathcal{D}_t - \frac{\Delta}{\text{Re}_m} \right) \mathcal{D}_t - \frac{\mathcal{D}^2}{\mu\rho} \right) \Delta_2 \xi = \frac{b_{z0}^{(e)} - b_{z0}}{(\mu\rho)^2 H_0} \quad (1)$$

для некоторой модифицированной функции возмущения глубины слоя ξ [1], где Re_m – магнитное число Рейнольдса.

В работах [2, 3] доказано существование решения уравнения (1) в виде гармонической функции

$$\xi = \text{Im}(A \exp(i(kx + ly - \sigma t))), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

как для конечных, так и бесконечного значений магнитного числа Рейнольдса, причем частота σ является решением дисперсионного уравнения

$$P_n(\sigma) = \sum_{k=0}^n c_k \sigma^k, \quad (3)$$

где $c_k \in \mathbb{C}$ определяются из соотношений физических величин.

3. Моделирование. В работе [4] рассматривается метод и приводится алгоритм решения уравнения (3), что позволяет провести анализ эволюции магнитогидродинамических характеристик в зависимости от магнитного числа Рейнольдса [5]. Примем далее значения волновых чисел $k = l = 1$, а проекции внешнего магнитного поля на оси x и y – $b_{0x} = 0$ и $b_{0y} = 1$, соответственно. Тогда компоненты вектора скорости примут вид

$$v_x = \sigma (\eta + \widehat{b}_x) + i\alpha (\eta + \widehat{b}_y),$$

$$v_y = \sigma \left(\eta + \widehat{b}_y \right) - i\alpha \left(\eta + \widehat{b}_x \right),$$

$$v_z = \left(\frac{-i\sigma}{H_0 g} (\sigma^2 + \alpha^2) \eta + v_x \frac{\partial H_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) (z - Z) + v_x \frac{\partial Z}{\partial x} + v_y \frac{\partial Z}{\partial y},$$

где H_0 – функция невозмущенной глубины, а функции η , \widehat{b}_x , \widehat{b}_y имеют следующий вид:

$$\eta = \left(\alpha^2 + \left(\mu\rho (\alpha^2 - \sigma^2) \left(-i\sigma + \frac{2\alpha^2}{\text{Re}_m} \right) - i\sigma \right)^2 \right) \xi,$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{b}_x \\ \widehat{b}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha^2 - \sigma^2) \left((\alpha\mu\rho - i\mu\rho\sigma) \left(-i\sigma + \frac{2}{\text{Re}_m} \right) + 1 \right) \xi \\ (\alpha^2 - \sigma^2) \left((\alpha\mu\rho + i\mu\rho\sigma) \left(i\sigma - \frac{2}{\text{Re}_m} \right) + 1 \right) \xi \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора магнитной индукции

$$b_x = \mu\rho (\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left((\alpha\mu\rho - i\mu\rho\sigma) \left(-i\sigma + \frac{2}{\text{Re}_m} \right) + 1 \right) \xi,$$

$$b_y = \mu\rho (\alpha^2 - \sigma^2)^2 \left((\alpha\mu\rho + i\mu\rho\sigma) \left(i\sigma - \frac{2}{\text{Re}_m} \right) + 1 \right) \xi,$$

$$b_z = i(h_B - z)(b_x + b_y).$$

На рис. 1 показана эволюция магнитного поля в плоскости xOy , начало динамики которого представлено на изображении в левом верхнем квадранте, и заключение – на изображении в правом нижнем квадранте. Видно, что процесс имеет выраженную периодическую структуру, при этом через регулярный промежуток времени происходит резкая смена направления течения силовых линий. Такое же поведение магнитного поля описывается в теории контрастных структур. Например, в работе [6] рассматривается кинетическая модель, представляющая структуру галактического магнитного поля, в которой также возникает инверсия магнитного поля. Это явление, как правило, регистрируется на тонком слое, прилегающем к границе подобластей с разными знаками векторного поля магнитной индукции. Именно в этом пограничном слое градиент поля имеет большое значение и меняет знак. Представленный анализ также

демонстрирует существование у векторного поля магнитной индукции особых точек двух типов, а именно, узла и седла, причем узел, будучи устойчивым в некоторый момент времени, переходит с течением времени в неустойчивое состояние.

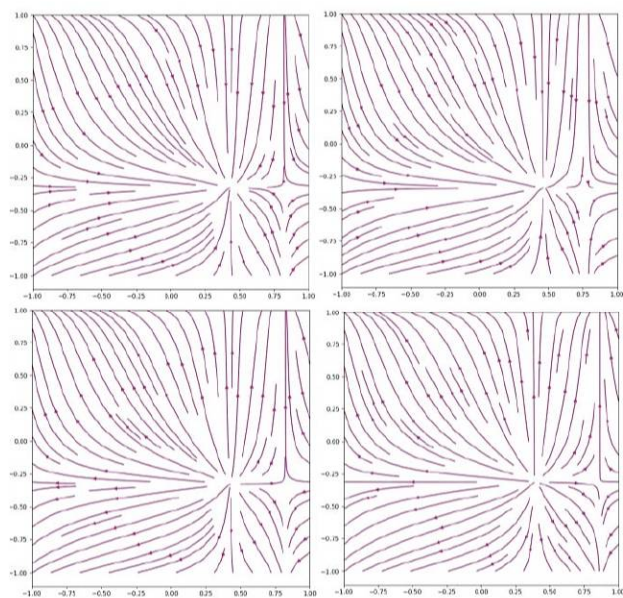


Рис. 1. Визуализация эволюции магнитного поля

4. Заключение. Продемонстрирована функциональная зависимость поля скоростей и поля магнитной индукции для океана в северном полушарии. При моделировании эволюции магнитного поля было зафиксировано явление инверсии магнитного поля с некоторой периодичностью.

Литература

1. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. On integration of the system of MHD equations modeling wave processes in a rotating liquid with arbitrary magnetic Reynolds number // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1268. No 1. Art. no 012055.
2. Peregudin S., Peregudina E., Kholodova S. The influence of dissipative effects on dynamic processes in a rotating electrically conductive liquid medium // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1359. No 1. Art. no 012118.
3. Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Вычислительная математика и математическая физика. 2008. Т. 48. № 5. С. 882–898.
4. Казанков В. К., Холодова С. Е. Исследование и анализ уравнения теории идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 131–137.
5. Холодова С. Е., Казанков В. К., Перегудин С. И. Математический и численный анализ динамических процессов в электропроводящей сплошной среде // Процессы в геосредах. 2021. Т. 30. № 4. С. 1345–1356.
6. Андреасян Р. Р., Михайлов Е. А., Андреасян А. Р. Структура и особенности формирования инверсий галактического магнитного поля // Астрономический журнал. 2020. Т. 97. № 3. С. 179–189.

УДК 532.591

Онегов Н. А.

Оценка и анализ нагрузки внутренних волн на морские нефтепромысловые сооружения

Рекомендовано к публикации профессором Перегудинным С. И.

1. Введение. Волны на поверхности жидкости – характерное физическое явление. Большой вклад в развитие теории движения жидкости внесли Леонард Эйлер и Жозеф Луи Лагранж. В работе [1] подробно рассматривается линейная волновая теория, в монографии [2] детально изучается вопрос внутренних возмущений в жидкости, а в статье [3] описываются явления взаимодействия вынужденных волн на процессы разлива и свойства жидкости. Так как в акватории совсем не редкость нахождение пресной оторочки на соленой, более тяжелой воде, актуальным является исследование влияния внутренней волны на морские нефтепромысловые сооружения с точки зрения оказываемой нагрузки.

2. Расчет параметров волны. Рассматривается задача о движении двух слоев идеальной неоднородной жидкости над горизонтальным твердым недеформируемым дном. Так в первом приближении можно описать массивную акваторию, в которой пресный слой находится над соленым. Все величины, характеризующие нижний слой, обозначаются индексом 1, а верхний – индексом 2. Введем декартову систему координат таким образом, чтобы невозмущенная поверхность слоев жидкости имела нулевую аппликату. Исходя из результатов исследований [2, 4], получим краевую задачу для системы уравнений с частными производными, решение которой – искомые волновые функции. Система уравнений состоит из уравнений движения Эйлера, условий несжимаемости и неразрывности потока:

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \tilde{v}_j \nabla \rho_j = 0, \quad \nabla \tilde{v}_j = 0, \quad \partial \rho_j \frac{dv_j}{dt} = \bar{g} \rho_j + \nabla p_j.$$

Для разрешения данной системы используется набор граничных условий: динамических, кинематических, а также условие непротекания.

Онегов Никита Андреевич – студент, Санкт-Петербургский горный университет; e-mail: n.a.onegov@gmail.com, тел.: +7(953)153-37-99

3. Исследование и оценка влияния возмущений. Предполагается, что плотность соленого слоя постоянна и принимает некоторое усредненное значение. Для описания исследуемого взаимодействия были заданы следующие параметры:

$$\tilde{\rho}_j = 10^5, \quad H_1 = 80, \quad H_2 = 20, \quad \tilde{\rho}_2 = 1000, \quad \tilde{\rho}_1 = 1050.$$

Принимается, что фазовая скорость распространения волны одинакова по всем направлениям, групповая же скорость оценивается по выражению:

$$U = \sqrt{\frac{g\lambda(\rho_1 - \rho_2)}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)}}.$$

Длина внутренней волны в акватории колеблется в достаточно широких диапазонах, принимается среднее значение для морей – 100 метров. В данных условиях групповая скорость составляет 1,95 м/с.

В рассматриваемой модели стратификации частота внутренних колебаний $N_j(z)$ постоянна, и дисперсное соотношение, связывающее частоту волны ω и волновой вектор k , для коротких волн можно получить при помощи приближения Буссинеска. Для рассматриваемого движения $\omega_j = N_j$.

При выполнении последующего анализа и вычислительного эксперимента использовались стандарты компании «Газпром» [5], которые декларируют рекомендуемые методики расчета комплексных нагрузок на специальные морские сооружения. Усилия, воспринимаемые кораблем, рассчитываются по специальной эмпирической формуле:

$$F = a \cdot b \cdot C \cdot U \cdot 3,287 \cdot 4,448,$$

где F – нагрузка, Н; a – осадка судна в футах, ft; b – размер воспринимающей части судна в футах, ft; C – специальный коэффициент формы, в данном случае равен 1; U – групповая скорость, м/с.

Рассматривается судно с осадкой 10 метров и длиной 400 метров. В данных условиях нагрузка от внутренних волн составит 456519 Н.

С использованием рекомендательных указаний, вычисляется профиль максимальных и средних нагрузок на опору платформы с диаметром 25 метров и осадкой 40 футов (см. рис. 1). Максимальная нагрузка в данных условиях имеет порядок 10^4 .

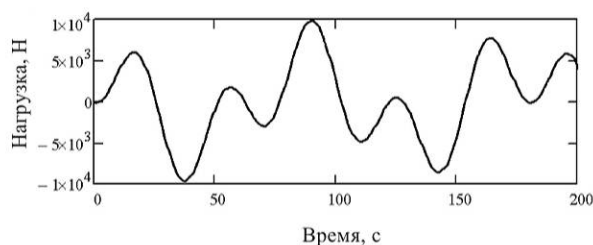


Рис. 1. Профиль нагрузок на опору платформы

Сама опора сконструирована на восприятие усилий седьмого порядка, из чего следует, что дополнительный вклад от внутренней волны не окажет значительного влияния, однако в точных расчетах необходимо его учитывать.

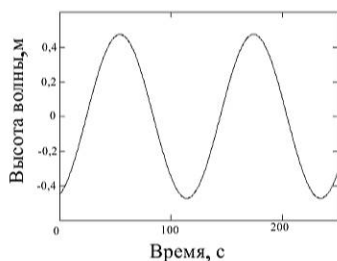


Рис. 2. Профиль волны

С точки зрения расчета насыпного острова наиболее важным показателем является высота волны, а не нагрузка, которую он воспринимает. Рассматриваемая система уравнений позволяет выявить аналитическое представление, описывающее изменение свободной поверхности жидкости. Если рассматривать остров с глубиной акватории 10 метров, глубиной

пресной оторочки 2 метра, то профиль волны принимает вид как показано на рис. 2. Высота волны получается достаточно значимой, однако, стоит отметить, что она может находиться в противофазе с волной ветрового наката, поэтому вопрос о значимости данного явления должен решаться в каждом случае индивидуально.

Следует отметить, что нагрузки и высота волны находятся в нелинейной зависимости от длины волны и глубины акватории (см. рис. 3, 4).

4. Вывод. В работе рассматривается модель акватории с пресной оторочкой. Построены поверхности колебательного движения и изучено влияние внутренних волн на морские объекты. Показано

взаимодействие и важность этого явления на нескольких сооружениях. Проведен вычислительный эксперимент и продемонстрирован нелинейный характер зависимостей.

Также следует упомянуть, что групповая скорость внутренней волны непосредственно оказывает влияние и на скорость волны ветрового наката. Волны такой природы всегда существуют в морях и океанах в связи с наличием плотностной и температурной стратификации, это позволяет заключить, что рассчитанные нагрузки являются долей от общих, а не существуют в виде добавочной составляющей, однако их точный и правильный расчет может уменьшить коэффициент запаса прочности сооружений, а значит увеличить экономию средств.

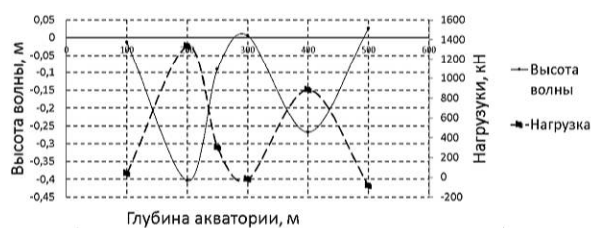


Рис. 3. Зависимость гидродинамических характеристик от длины волны

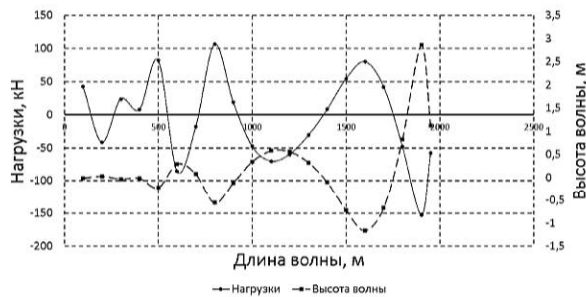


Рис. 4. Зависимость гидродинамических характеристик от глубины акватории

Литература

1. Krogstad H. E., Arntsen O. A. Linear wave theory Part A. Regular waves. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology Trondheim, 2000. 42 p.
2. Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2004. 288 с.
3. Онегов Н. А. Анализ влияния внутренних волн на процесс разлива и на основные характеристики флюида в нефтеносном пласте // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 138–143.
4. Алешков Ю. З. Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2002. Вып. 4. № 25. С. 35–43.
5. Стандарт организации «Методика расчета волновой нагрузки» от 25.04.2005. № 60 // Управлением техники и технологии разработки морских месторождений Департамента по добыче газа, газового конденсата и нефти ОАО «Газпром». 2005.

УДК 539.3

Пегливанова М. М.

Коррозионный износ пластины из материала с пластической анизотропией при чистом изгибе

Рекомендовано к публикации профессором Прониной Ю. Г.

1. Введение. На сегодняшний день проблема коррозионного износа металлических конструкций и защита их от коррозии является одной из важнейших научно-технических, экологических и экономических проблем. Она приобрела особую актуальность в промышленно развитых странах с большим металлофондом. По оценкам специалистов экономические потери в промышленно развитых странах составляют 2–4 % валового национального продукта. При этом потери металла, включающие массу вышедших из строя металлических конструкций, изделий, оборудования, составляют 10–20 % годового производства стали. Таким образом, при оценке прочности конструкций очень важно учитывать наличие коррозионных процессов. Данная работа посвящена исследованию задачи об оценке долговечности пластины при чистом изгибе в условиях равномерной поверхностной коррозии. При этом пластина изготовлена из материала, у которого предел текучести на сжатие выше предела текучести на растяжение (т. е. обладает пластической анизотропией), что имеет место для многих металлов и сплавов. Задачи об изгибе балок с пластической анизотропией без учета коррозии рассмотрены, например, в работах [1, 2]. В работе [3] получено выражение для долговечности такой пластины в условиях коррозии с постоянной во времени скоростью. В данной работе решение [3] обобщается на случай возможного затухания коррозионного процесса со временем.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача о долговечности пластины с известными в каждый момент времени скоростями равномерной затухающей коррозии. Исследуется металлическая

Пегливанова Мария Михайловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st067846@student.spbu.ru, тел.: +7(928)196-38-81

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00100)

пластина, толщина которой в начальный момент времени равна h_0 , находящаяся в условиях чистого изгиба под действием изгибающего момента M . Материал пластины считается идеальным упругопластическим, но предел текучести на сжатие (σ_y^-) в d раз выше предела текучести на растяжение (σ_y^+). Скорости коррозии с обеих сторон пластины считаем известными и в общем случае различными

$$V_1 = v_{10} \exp(-bt), \quad V_2 = v_{20} \exp(-bt). \quad (1)$$

Здесь b – коэффициент затухания коррозии, v_{10} и v_{20} – скорости коррозии на поверхностях пластины в начальный момент времени. Требуется определить время перехода пластины в пластическое состояние по всей толщине.

3. Решение. Исходя из формул (1), толщину пластины в каждый момент времени можно найти из уравнения

$$-\frac{dh}{dt} = V_1 + V_2 = (v_{10} + v_{20}) \exp(-bt). \quad (2)$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение (2) по t от 0 до t , а по h от h_0 до h , получим

$$h = h_0 - \frac{(v_{10} + v_{20}) \exp(-bt)}{b}. \quad (3)$$

Если в начальный момент времени пластина находится в полностью упругом состоянии, то процесс ее перехода в пластическое состояние при уменьшении толщины можно разделить на три стадии: (I) стадия чисто упругого изгиба (длится до момента достижения предела текучести на растягиваемой поверхности); (II) стадия односторонней пластичности (длится до момента достижения предела текучести на сжимаемой поверхности); (III) стадия двусторонней пластичности (длится до момента перехода пластины в пластическое состояние по всей толщине) [1, 2]. При этом на второй и третьей стадиях происходит смещение нейтральной плоскости пластины в сторону сжатых волокон.

В работе [3] получено соотношение, связывающее величину момента с толщиной пластины в тот момент времени, когда пластина полностью перешла в пластическое состояние:

$$M^* = \frac{\sigma_{\pm}^y h^2 d}{2(d+1)}. \quad (4)$$

Выразив из формулы (4) h и подставив его в (3), получим искомую долговечность

$$t^* = -\frac{1}{b} \ln(1 - k), \quad (5)$$

$$k = \frac{h_0 - \sqrt{2M^*(d+1)/\sigma_y^+ d}}{v_{10} + v_{20}} b. \quad (6)$$

4. Численные примеры. В качестве примеров рассмотрим два случая расчета долговечности пластины с затухающей скоростью коррозии в пакете MATLAB [4]. В первом случае зададим начальные скорости коррозии $v_{10} = 0,001$ и $v_{20} = 0,005$ мм/год, а во втором $v_{10} = 0,0001$ и $v_{20} = 0,0005$. Зададим величины $h_0 = 14$ мм, $M = 3 \times 10^5$ Па·м³. Величину d будем рассматривать на промежутке (1; 1,5). Рассмотрим различные значения коэффициента затухания коррозии: $b_1 = 0,001$, $b_2 = 0,002$, $b_3 = 0,003$. На рис. 1 и 2 представлены зависимости долговечности t^* от величины d при различных значениях затухания коррозии.

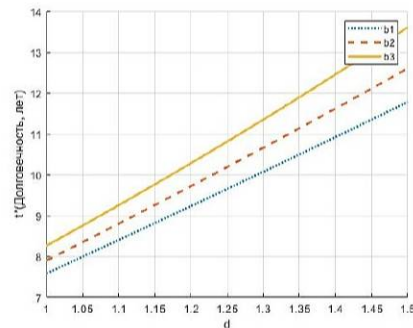


Рис. 1. Случай 1: $v_{10} = 0,001$ и $v_{20} = 0,005$ мм/год

для всех трех коэффициентов затухания, которые мы рассматриваем, долговечность стала отрицательной. Это объясняется тем, что при малых начальных скоростях коррозии, напряжение, которое возникает в пластине выходит на плато, так и не достигнув предела прочности. Так как долговечность определяется точкой пересечения кривой напряжения с пределом текучести, то в данном случае, она считается бесконечной.

На рис. 1 видно, что при большем коэффициенте затухания пластина имеет большую долговечность. Помимо этого наблюдается увеличение долговечности с ростом величины d .

На рис. 2. можно увидеть, что

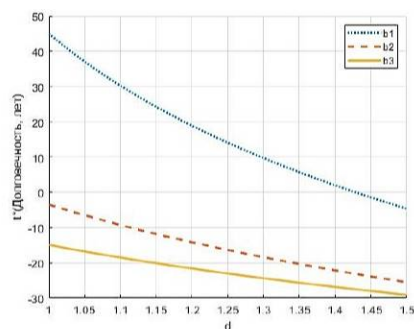


Рис. 2. Случай 2: $v_{10} = 0,0001$ и $v_{20} = 0,0005$ мм/год

ности может как быть бесконечной, так и найденной по формуле (5). В том случае, когда выражение (6) меньше 1, то долговечность находится по формуле (5). Заметим, что при наличии неоднородностей в материале пластины полученное решение перестает быть справедливым, так как локальные повреждения вызывают концентрацию напряжений в их окрестности и могут привести к изменению эффективных свойств [6, 7].

5. Выводы. Рассмотрена задача о долговечности пластины при чистом изгибе, подверженной равномерной затухающей коррозии с известными в каждый момент времени скоростями. Получена формула для вычисления времени перехода пластины в пластическое состояние и условия ее применимости. Рассмотрены примеры и произведен их анализ.

Литература

1. Павилайнен Г. В. Математическая модель задачи изгиба пластически анизотропной балки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. 2015. Т. 2. № 4. С. 633–638.
2. Максимов А. Б., Пронина Ю. Г. Исследование изгиба толстолистового проката с градиентом прочностных свойств по толщине // Известия вузов. Черная металлургия. 2022. Т. 65. № 1. С. 21–27.

Таким образом, прежде чем производить расчет долговечности пластины по формуле (5) необходимо сначала оценить выражение (6). Если оно больше 1, долговечность будет бесконечной, если равно 1, в зависимости от погрешности

3. Пегливанова М. М. Коррозия пластины из упругопластического материала с SD-эффектом // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 144–148.
4. Колпак Е. П. Вычисления в Matlab. Учебное пособие. Казань: ООО «Бук», 2016. 173 с.
5. Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Т. 12. № 2. С. 33–44.
6. Абакаров А. М., Пронина Ю. Г. Об эффективных упругих свойствах материала с взаимно перпендикулярными системами параллельных трещин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. № 1.
7. Shuvalov G. M., Vakaeva A. B., Shamsutdinov D. A., Kostyrko S. A. The effect of nonlinear terms in boundary perturbation method on stress concentration near the nanopatterned bimaterial interface // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 2. С. 165–176.

УДК 539.3, 539.4, 539.5

Семина К. И., Седова О. С.

Анализ состава блоков сплава АМг5, созданных с помощью проволочно-дуговых аддитивных технологий

1. Введение. Аддитивное производство — процесс создания трёхмерного объекта путём поэтапного наложения слоёв того или иного сплава с помощью автоматизированной системы. В последние несколько лет данный метод начал привлекать всё больше внимания ввиду ряда преимуществ. По сравнению с традиционным способом производства деталей аддитивный метод позволяет не только создавать монолитные конструкции произвольной формы любой сложности, но и экономить при этом ресурс: время, материал и денежные затраты [1]. Описанные преимущества являются ключевыми, если речь идёт о создании деталей особо крупных размеров, как например, в авиации или машиностроении. Именно эти отрасли применяют исследуемый металл, АМг5, в производстве чаще всего [2, 3].

Данная технология берет начало с конца XX века. За это время удалось не только достичь теоретических результатов, но и внедрить описанные методы в практику. К 2020 году системы аддитивного производства по сравнению с предыдущими десятилетиями стали намного более доступными и теперь могут быть использованы в куда большем количестве отраслей. Но при таком типе производства возникают серьёзные проблемы, связанные с потерей или изменением первоначальных свойств металла, что может сильно повлиять на поведение и стать причиной нежелательных последствий. Именно поэтому необходимо проводить исследования над объектами, созданными с помощью аддитивного производства из различных сплавов, для выявления потенциальных дефектов, которые в дальнейшем могут влиять на характеристики материала.

Исследователями получены некоторые математические модели процессов создания изделий из металла: прессования [4], литья и

Семина Ксения Ильинична – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st087198@student.spbu.ru, тел.: +7(919)086-62-38

Седова Ольга Сергеевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.s.sedova@spbu.ru, тел.: +7(951)665-32-28

Работа выполнена в рамках инициативного проекта СПбГУ, № 77993931

кристаллизации сплавов [5, 6],ковки [7], и т. д. В последнее время появляются и модели аддитивного производства, хотя их построение существенно ограничено из-за сложности процессов и наличия множества параметров [8]. Однако ни одна из существующих моделей не учитывает все возможные аспекты аддитивного производства и не позволяет достоверно рассчитать характеристики готовых конструкций. Для дальнейшего создания более совершенных математических моделей необходимы экспериментальные и аналитические исследования, позволяющие оценить влияние тех или иных параметров на свойства изготавливаемых конструкций.

В данной работе исследовано изменение химического состава металла в процессе аддитивного производства.

2. Описание методов и используемых материалов. Для получения металлических объектов путём аддитивного производства существует более двадцати различных методов, основанных на применении разных форм исходного материала, расположения образца в системе, а также на применении дополнительных технологий во время непосредственного наложения слоёв сплава [3]. Все они в частных случаях имеют свои преимущества, поэтому наиболее эффективный метод для каждого сплава находят в отдельности.

Существуют способы построения с применением разной формы исходного сплава, которые делятся на: порошковый, пластовой и проволоочный. Последний является наиболее эффективным при работе со сплавами алюминия, но стоит отметить, что при производстве небольших по размеру деталей метод негативно влияет на их пористость и, как следствие, устойчивость [3]. Тем не менее, при создании крупных образцов проволоочная аддитивная технология выигрывает в производительности, доступности, затратах на материалы и необходимом оборудовании, что позволяет эффективно применять её в масштабном производстве [9]. Данный способ использован для создания исследуемых образцов.

Изготовление образцов производилось с применением лазерно-дугового сварочного технологического комплекса в лаборатории Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. Образцы 1 и 2 различаются режимом изготовления, один из которых приводит к образованию меньшего числа пор с меньшим средним размером поры.

образец	Al	Mg	Fe	Cr	Mn	K	Ti	Ga	Zn	Ca
проволока	94.748	4.602	0.154	0.128	0.088	0.086	0.065	0.016	-	0.114
1	94.479	4.943	0.165	0.132	0.021	0.164	0.063	0.016	0.018	-
2	94.742	4.712	0.140	0.119	0.096	0.091	0.073	0.016	0.011	-

Таблица 1. Химический состав экспериментальных образцов, %

Далее в ресурсном центре СПбГУ «Методы анализа состава вещества» было проведено исследование состава изготовленных образцов. Для этого был использован рентгенофлуоресцентный спектрометр EDX-800HS «Shimadzu», на базе кремниевых дрейфовых детекторов с термоэлектрическим охлаждением. Результаты анализа в процентном соотношении приведены в Таблице 1.

Ввиду относительно невысокой температуры кипения некоторые компоненты имеют тенденцию испаряться или выгорать во время плавления исходного материала. Таким образом, как видно из таблицы, наиболее сильно аддитивное производство сказалось на количественном содержании магния (Mg), что несомненно повлияет на свойства образцов №1 и №2.

3. Анализ. По результатам анализа химического состава можно сделать первоначальные выводы о поведении полученных образцов на практике. Заметное изменение процентного содержания того или иного элемента в ходе аддитивного производства может привести к изменению свойств изготовленной конструкции по сравнению с первоначальным материалом. Так, увеличение количества магния (Mg) ведёт к повышению коэффициента сгорания [10], что может привести к ухудшению термической стойкости образцов. Также, у образца №2 количественное содержание пор выше по сравнению с образцом №1. Это можно объяснить тем, что высокое содержание магния при условии, что оно $< 6\%$ всей массы детали, даёт меньшую пористость для полученного материала [10]. Обратное, соответственно, наблюдается при процентном содержании $> 6\%$. Кроме того, так как общее содержание магния не превышает 7% , в данном случае возрастает предел прочности на растяжение [10]. Увеличение количества железа (Fe) увеличивает прочность и пластичность алюминиевых сплавов [11, 12], а увеличение количества калия (K), напротив, снижает [13], однако в литературе отсутствуют данные о том, какое количественное изменение данных элементов приводит к существенному изменению свойств.

Изменение количества хрома (Cr) мало влияет на поведение про-

изведённого блока, так как коэффициент пористости в образцах № 1 и № 2 не коррелирует с процентным содержанием данного элемента [14]. Увеличение процентного содержания элементов марганца (Mn) и цинка (Zn), как в образце №2, может вести к повышению термостойкости. Конечный сплав, таким образом, может быть более устойчив к образованию трещин во время производства [15]. Остальные легирующие добавки оказались менее подвержены выгоранию в процессе проволочно-дугового аддитивного производства. Их изменённое содержание мало влияет на поведение полученного сплава.

4. Выводы. Таким образом, можно сделать несколько выводов.

1. При изготовлении деталей конструкций из сплава АМг5 проволочно-дуговым аддитивным методом существенно изменяется количество магния, железа, хрома и марганца.

2. Наибольшее влияние на изменение свойств образцов, полученных после применения лазерно-дуговых аддитивных сварочных технологий, оказывает содержание в них магния. При определённых условиях конечная деталь может иметь свойства, превосходящие первоначальный материал, либо сильно ему уступающие.

3. Изменения химического состава в результате процесса аддитивного производства влияют на пористость, прочность, другие свойства и, в конечном итоге, на эксплуатационные характеристики.

4. Метод, при котором в качестве исходного материала используют металлическую проволоку, является более эффективным по сравнению с пластовыми и порошковыми способами производства, ввиду более высокой производительности и меньших материальных затрат.

5. Заключение. В работе проведено исследование изменения химического состава алюминиевого сплава АМг5 при изготовлении проволочно-дуговым аддитивным методом. В различных режимах из проволоки сплава АМг5 были изготовлены образцы. Исследование химического состава исходного материала и образцов проведено с помощью рентгенофлуоресцентного спектрометра. Анализ результатов показал, что по сравнению с исходным материалом в изготовленных аддитивным методом образцах заметно изменяется содержание магния, железа, хрома и марганца, что влияет на прочность создаваемых данным методом изделий.

6. Благодарности. Работа проведена в Научном Парке СПбГУ. Авторы благодарят А. С. Еремина и Н. В. Смирнова за консультации при подготовке текста статьи.

Литература

1. Пелешенко С. И., Коржик В. Н., Войтенко А. Н., Хаскин В. Ю., Ткачук В. И. Анализ современного состояния аддитивных сварочных технологий изготовления объёмных металлических изделий // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2017. Т. 3. № 1. С. 42–52.
2. Starke E. A., Staley J. T. Application of modern aluminum alloys to aircraft // Progress in Aerospace Sciences. 1996. Vol. 32. No 2. P. 131–172.
3. Yilmaz O., Uglu A. A. Shaped metal deposition technique in additive manufacturing: A review // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. 2016. Vol. 230. No 10. P. 1781–1798.
4. Готлиб Б. М., Зайнулин А. К., Добычин И. А. Комплексная математическая модель процессов прессования алюминиевых сплавов // Эффективность прессового производства и качество прессизделий. 1983. С. 52–56.
5. Хацаюк М. Ю., Минаков А. В., Первухин М. В. Математическое моделирование процессов литья и кристаллизации алюминиевых сплавов в электромагнитном поле с учётом свободной поверхности жидкого металла // Актуальные проблемы энергосберегающих электротехнологий АПЭТ-2014: сборник научных трудов. Екатеринбург: УрФУ, 2014. С. 111–115.
6. Рафальский И. В., Луцник П. Е. Математическое моделирование процесса затвердевания и разработка технологий изготовления бездефектных отливок из алюминиевых сплавов // Литейное производство и металлургия. Беларусь: сборник трудов 25-й Международной научно-технической конференции, 2017. С. 127–133.
7. Соломонов К. Н., Костарев И. В., Абашкин В. П. Моделирование процессов объёмной штамповки иковки плоских заготовок. М.: МИСИС, 2008. 128 с.
8. Григоренко Г. М., Костин В. А., Жуков В. В. Моделирование металлургического аддитивного процесса создания конструкций из стали 09Г2С // Современная электрометаллургия. 2017. № 2. С. 35–44.

9. Williams S.W., Martina F., Addison A.C., et al. Wire plus arc additive manufacturing // *Material Science Technology*. 2016. Vol. 32. No 7. C. 641–647.
10. Ren L., Gu H., Wang W., et al. Effect of Mg content on microstructure and properties of Al-Mg alloy produced by the wire arc additive manufacturing method // *Materials*. 2019. Vol. 12. Art. no 4160. P. 1–12.
11. Lu H., Hou Z., Ma M., et al. Effect of Fe-content on the mechanical properties of recycled Al alloys during hot compression // *Metals*. 2017. Vol. 7. No 7. Art. no 262.
12. Yamasaki S., Okuhira T., Mitsuhara M., et al. Effect of Fe addition on heat-resistant aluminum alloys produced by selective laser melting // *Metals*. 2019. Vol. 9. No 4. Art. no 468.
13. Liu Z. K., Zhang S., Han Q., et al. The Effect of Impurities on the Processing of Aluminum Alloys. Final Report. Pennsylvania State Univ., University Park, PA. 2007. 75 p.
14. Portnoy V. K., Rylov D. S., Levchenko V. S., et al. The influence of chromium on the structure and superplasticity of Al-Mg-Mn alloys // *Journal of Alloys and Compounds*. 2013. Vol. 581. P. 313–317.
15. Klein T., Schnall M., Gomes B., et al. Wire-arc additive manufacturing of a novel high-performance Al-Zn-Mg-Cu alloy: Processing, characterization and feasibility demonstration // *Additive Manufacturing*. 2021. Vol. 37. Art. no 101663.
16. Yakout M., Elbestawi M. A., Veldhuis S. C. A review of metal additive manufacturing technologies // *Solid State Phenomena*. 2018. Vol. 278. P. 1–14.
17. Shehadeh L. M., Jalham I. S. The effect of adding different percentages of Manganese (Mn) and Copper (Cu) on the mechanical behavior of Aluminum // *Jordan Journal of Mechanical & Industrial Engineering*. 2016. Vol. 10. No 1. P. 19–26.
18. Xie C., Wu S., Yu Y., et al. Defect-correlated fatigue resistance of additively manufactured Al-Mg4.5Mn alloy with in situ micro-rolling // *Journal of Materials Processing Technology*. 2021. Vol. 291. Art. no 117039. P. 1–13.

УДК 517.977.56

Тран З.

Программный комплекс для решения уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами в сетеподобной области

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

1. Введение. В классе достаточно гладких функций рассматривается начально-краевая задача с многомерной пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области \mathfrak{Z} , принадлежащей евклидову пространству \mathfrak{R}^n ($n \geq 2$). Особенностью такой задачи является наличие узловых мест (мест ветвления) в сетеподобной области и, как следствие, потеря гладкости решения в этих местах. Результаты работы применимы в задачах оптимального управления процессами переноса сплошных сред (задачи тепломассопереноса [1–3]).

2. Пример численного решения. Для упрощения представления результатов исследования рассматривается тестовая начально-краевая задача для областей пространств \mathfrak{R}^n ($n = 2, 3$).

1. Двумерная область $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{R}^2$, состоящая из подобластей \mathfrak{Z}_k ($k = 1, 2, 3$) с узловыми местами ξ_1, ξ_2 (двухсторонними поверхностями примыкания (S_1 и S_2)). Структура такой области представлена на рис. 1. Количественные характеристики сплошной среды в области $\mathfrak{Z}_T, \mathfrak{Z}_T = \mathfrak{Z} \times (0, T)$, определяются начально-краевой задачей для функции $u(x, y, t)$:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad x, y, t \in \mathfrak{Z}_T \setminus \{S_1, S_2\}, \quad (1)$$

$$u(x, y, t)|_{S_1^+} = u(x, y, t)|_{S_1^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{S_1^+} = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{S_1^-}, \quad (2)$$

$$u(x, y, t)|_{S_2^+} = u(x, y, t)|_{S_2^-}, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{S_2^+} = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{S_2^-}, \quad (3)$$

$$u(x, y, 0)|_{\mathfrak{Z}_m} = \cos x \cos y, \quad \tilde{m} = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

Тран Зуё – аспирант, Воронежский государственный университет; e-mail: tranduysp94@gmail.com, тел.: +7(952)438-17-94

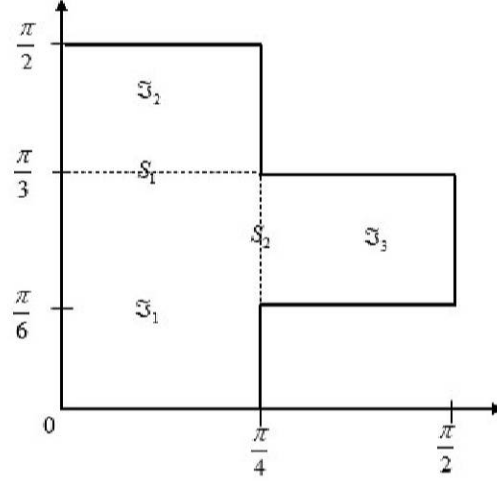


Рис. 1. Структура области $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^2$

$$u(0, y, t)_{y \in \mathfrak{S}_m} = e^{-2t} \cos y, \quad m = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

$$u\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right)_{y \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]} = e^{-2t} \cos \frac{\pi}{4} \cos y, \quad (6)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, t\right)_{y \in \mathfrak{S}_3} = 0, \quad u(x, 0, t)_{x \in \mathfrak{S}_1} = e^{-2t} \cos x, \quad (7)$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{6}, t\right)_{x \in \mathfrak{S}_3} = e^{-2t} \cos \frac{\pi}{6} \cos x, \quad (8)$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{3}, t\right)_{x \in \mathfrak{S}_3} = e^{-2t} \cos \frac{\pi}{3} \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}, t\right)_{x \in \mathfrak{S}_2} = 0. \quad (9)$$

Здесь (2), (3) – условия примыкания в узловых местах, (4) – начальное условие, (5)–(9) – граничные условия. Численные расчеты поля распределения $u(x, y, t)$ проводились методом, описанным в [1], по равномерной сетке области \mathfrak{S}_T шагами $\tau = 10^{-4}$, $h_x = 0,1571$, $h_y = 0,1047$. На рис. 2 представлены результаты расчета поля распределения $u(x, y, t)$.

2. Трехмерная область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$, состоящая из подобластей \mathfrak{S}_k ($k = 1, 2, 3$) с узловыми местами ξ_1, ξ_2 (двухсторонними поверхностями примыкания S_1 и S_2). Структура такой области представлена на рис. 3.

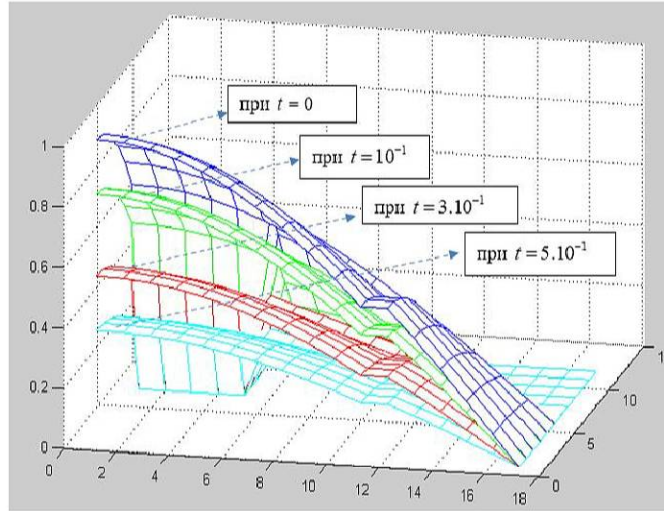


Рис. 2. Результаты численного расчета поля распределения $u(x, y, t)$

Количественные характеристики сплошной среды в области \mathfrak{S}_T , $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$ определяются, начально-краевой задачей для функции $u(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2}, \quad (10)$$

$$u(x, y, z, t)|_{S_1^+} = u(x, y, z, t)|_{S_1^-}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{S_1^+} = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{S_1^-}, \quad (12)$$

$$u(x, y, z, t)|_{S_2^+} = u(x, y, z, t)|_{S_2^-}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{S_2^+} = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{S_2^-}, \quad (14)$$

$$u(x, y, z, 0)|_{\mathfrak{S}_m} = \cos x \cos y \cos z, \quad m = \overline{1, 3}, \quad (15)$$

$$u(0, y, z, t)|_{y, z \in \mathfrak{S}_m} = e^{-2t} \cos y \cos z, \quad m = \overline{1, 3}, \quad (16)$$

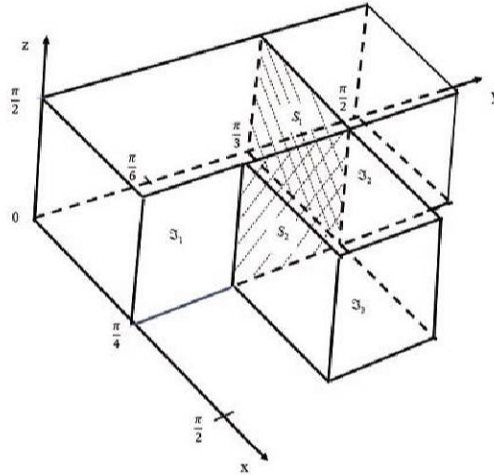


Рис. 3. Структура области $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}^3$

$$u\left(\frac{\pi}{4}, y, z, t\right)_{y \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}], z \in [0, \frac{\pi}{2}]} = e^{-2t} \cos \frac{\pi}{4} \cos y \cos z, \quad (17)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, z, t\right)_{y, z \in \mathfrak{S}_3} = 0, u(x, 0, z, t)_{x, z \in \mathfrak{S}_1} = e^{-2t} \cos x \cos z, \quad (18)$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{6}, z, t\right)_{x, z \in \mathfrak{S}_3} = e^{-2t} \cos \frac{\pi}{6} \cos x \cos z, \quad (19)$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{3}, z, t\right)_{x, z \in \mathfrak{S}_3} = e^{-2t} \cos \frac{\pi}{3} \cos x \cos z, \quad (20)$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}, z, t\right)_{x, z \in \mathfrak{S}_2} = 0. \quad (21)$$

Здесь (11)–(14) – условия примыкания в узловых местах, (15) – начальное условие и (16)–(21) – граничные условия. Численные расчеты поля распределения $u(x, y, t)$ проводились по равномерной сетке области \mathfrak{S}_T шагами $\tau = 10^{-4}$, $h_x = 0,1122$, $h_y = 0,0748$, $h_z = 0,1571$. На рис. 4 представлены результаты численного расчета поля распределения $u(x, y, z, t)$ при $t = 2 \cdot 10^{-2}$.

3. Заключение. В работе рассмотрен анализ начально-краевой задачи с многомерной пространственной переменной, принадлежащей евклидову пространству \mathfrak{R}^n ($n \geq 2$), для уравнения переноса

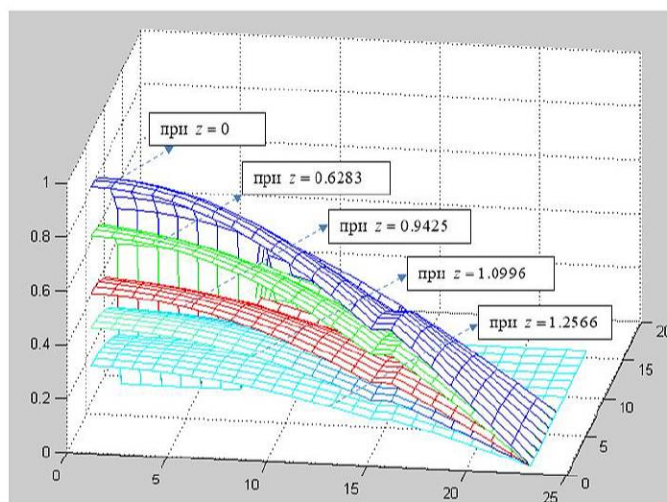


Рис. 4. Результаты численного расчета поля распределения $u(x, y, z, t)$

сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области. При этом использованы локально-одномерный метод и метод прогонки. В исследовании получены результаты для начально-краевой задачи в частных случаях при $n = 2$ и $n = 3$.

Литература

1. Тран З., Провоторов В. В. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9. № 3. С. 1–15.
2. Тран З., Парт А. А. Параметрическая оптимизация процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9. № 4. С. 1–14.
3. Провоторов В. В., Провоторова Е. Н. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 2. С. 209–224.

УДК 517.929.2

Хоанг В. Н.

Дифференциально-разностная система в соболевском пространстве функций с носителями на сетеподобной области

Рекомендовано к публикации профессором Провоторовым В. В.

1. Введение. Настоящая работа является естественным продолжением исследований дифференциальных систем на графе [1, 2] в направлении увеличения размерности сетеподобной области изменения пространственной переменной при изучении трехслойной дифференциально-разностной схемы с весами и оператором, определенным в соболевском пространстве.

2. Необходимые обозначения и определения. Далее областью изменения аргументов функций является сетеподобная ограниченная область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ($\partial\mathfrak{S}$ – граница \mathfrak{S}), состоящая из подобластей \mathfrak{S}_l , $l = \overline{1, N}$ ($\partial\mathfrak{S}_l$ – граница \mathfrak{S}_l), соединенных определенным образом между собой в M узловых местах ω_j ($j = \overline{1, M}$, $1 \leq M \leq N - 1$): $\mathfrak{S} = \widehat{\mathfrak{S}} \cup \widehat{\omega}$, $\widehat{\mathfrak{S}} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{S}_l$, $\widehat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$, $\mathfrak{S}_l \cap \mathfrak{S}_{l'} = \emptyset$ ($l \neq l'$), $\omega_j \cap \omega_{j'} = \emptyset$ ($j \neq j'$), $\mathfrak{S}_l \cap \omega_j = \emptyset$ ($l \neq j$) [3]. В каждом узловом месте ω_j определенное число подобластей \mathfrak{S}_l имеют общие границы, образующие поверхность их примыкания S_j ($\text{meas } S_j > 0$). Поверхность примыкания связывает между собой примыкающие к ней $1 + m_j$ области \mathfrak{S}_{l_0} и \mathfrak{S}_{l_s} ($s = \overline{1, m_j}$): $S_j = \bigcup_{s=1}^{m_j} S_{js}$ ($\text{meas } S_{js} > 0$), $S_j \subset \partial\mathfrak{S}_{l_0}$, $S_{js} \subset \partial\mathfrak{S}_{l_s}$ ($s = \overline{1, m_j}$). Таким образом, каждое узловое место ω_j определяется своею поверхностью примыкания S_j , для которой каждая поверхность S_{js} также является поверхностью примыкания \mathfrak{S}_{l_s} к \mathfrak{S}_{l_0} . Ясно, что при этом граница области \mathfrak{S} не содержит поверхности S_j ($j = \overline{1, M}$): $\partial\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^N \partial\mathfrak{S}_k \setminus \bigcup_{j=1}^M S_j$. Следует

Хоанг Ван Нгуен – аспирант, Воронежский государственный университет;
e-mail: fadded9x@gmail.com, тел.: +7(952)544-27-74

отметить, что структура области \mathfrak{Z} совпадает с геометрией графа-дерево с внутренними узлами (вершинами) ω [1, 3].

Используются общепринятые обозначения пространств Лебега и Соболева, причем интеграл Лебега применительно к сетеподобной области \mathfrak{Z} определяется соотношением $\int_{\mathfrak{Z}} u(x) dx = \sum_{l=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_l} u(x) dx$.

Пусть $L_2(\mathfrak{Z})$ – гильбертово пространство действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, скалярное произведение и норма в $L_2(\mathfrak{Z})$ определены соответствующими равенствами:

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}} = \int_{\mathfrak{Z}} u(x)v(x) dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}} = \sqrt{(u, u)}.$$

Обозначим $W_2^1(\mathfrak{Z})$ – гильбертово пространство функций $u(x)$ из $L_2(\mathfrak{Z})$, для которых $u_{x_\kappa}(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$, $\kappa = \overline{1, n}$. Соотношения

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}}^1 = \int_{\mathfrak{Z}} \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx, \quad (1)$$

$$\|u\|_{\mathfrak{Z}}^1 = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{Z}}^1},$$

определяют скалярное произведение и норму в $W_2^1(\mathfrak{Z})$, соответственно. Символ \mathfrak{Z} в обозначениях скалярного произведения и нормы в некоторых случаях для упрощения записи может опускаться. Тогда

$$L_2(\mathfrak{Z}) = \prod_{l=1}^N L_2(\mathfrak{Z}_l), \quad W_2^1(\mathfrak{Z}) = \prod_{l=1}^N W_2^1(\mathfrak{Z}_l).$$

Введем другие пространства функций с носителем на сетеподобной области $\mathfrak{Z} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{Z}_l$. При описании таких пространств необходи-

мо продолжать элементы $u(x)$ с области \mathfrak{Z} на $\overline{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{l=1}^N \overline{\mathfrak{Z}_l}$. Множество

$C(\overline{\mathfrak{Z}})$ непрерывных в $\overline{\mathfrak{Z}}$ функций $u(x)$, множество $C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$ ($l = \overline{1, N}$) функций из $C(\overline{\mathfrak{Z}})$, которые при каждом фиксированном l в $\overline{\mathfrak{Z}_l}$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$ и множество

$C^1(\overline{\mathfrak{Z}}) = \prod_{l=1}^N C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$ со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами (1), соответственно.

Далее, пусть $\tilde{C}^1(\mathfrak{S})$ – множество функций $u(x) \in C^1(\mathfrak{S})$, для которых имеют место условия примыкания в узловых местах ω_j :

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial \mathbf{n}_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \frac{\partial u(x)_{S_{ji}}}{\partial \mathbf{n}_{ji}} ds = 0, \quad (2)$$

$$x \in S_{ji}, \quad i = \overline{1, m_j},$$

на поверхностях S_j, S_{ji} всех узловых мест ω_j . Здесь $a(x) \in L_2(\mathfrak{S})$ и $a(x)_{S_j}, u(x)_{S_j}, a(x)_{S_{ji}}, u(x)_{S_{ji}}$ – сужения функций $a(x), u(x)$ на S_j и S_{ji} ; \mathbf{n}_j и \mathbf{n}_{ji} – внешние нормали к S_j и S_{ji} . В дальнейшем для упрощения записи индексы, означающие сужение, могут не использоваться. Вместе с $\tilde{C}^1(\mathfrak{S})$ введем множество $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{S})$, элементы $u(x)$ которого имеют компактный носитель в области \mathfrak{S} и принадлежат $\tilde{C}^1(\mathfrak{S})$; последнее означает, что $u(x)|_{\partial\mathfrak{S}} = 0$.

Определение 1. Пространство $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ – замыкание $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{S})$ в норме (1).

3. Дифференциально-разностная схема. На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, K\}$ с шагом $\tau = \frac{T}{K}$, $\bar{\omega}_\tau = \{0\} \cup \omega_\tau$. Будем рассматривать абстрактные функции (отображения) $y_\tau(t), f_\tau(t)$ дискретного аргумента $t = k\tau \in \bar{\omega}_\tau$ со значениями в пространстве $L_2(\mathfrak{S})$, так что $y_\tau(t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}) \subset L_2(\mathfrak{S})$. В дальнейшем индекс τ будем опускать и писать $y(k) := y(x; k) = y_\tau(x; k\tau), f(k) := f(x; k) = f_\tau(x; k\tau)$ ($k = 0, \dots, K$).

Семейство дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{1}{2\tau} [y(k+1) - y(k-1)] = \mathbf{L}y^{(\sigma)} + f(k), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (3)$$

$$y(0) = y_0(x), \quad y(1) = y_1(x),$$

зависящих от параметра $\sigma, y^{(\sigma)} = \sigma y(k+1) + (1-2\sigma)y(k) + \sigma y(k-1)$, $\mathbf{L} : \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}) \rightarrow L_2(\mathfrak{S}), \mathbf{L}u = \sum_{\kappa, \ell=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\ell}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \right)$. При этом в условиях примыкания (2) $a(x) = a_{\kappa\ell}(x)$. Система (3) связывает значения искомых функций $y(k), k = 2, \dots, K$, на слоях t_{k+1}, t_k, t_{k-1} . Функции $y_0(x), y_1(x), f(k), k = 1, \dots, K$ определяют начальные данные.

При фиксированном $k, k = 1, \dots, K-1$, и параметре σ функция $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ определена как решение (3) с краевым условием

$$y(k) |_{x \in \partial\mathfrak{S}} = 0. \quad (4)$$

Дифференциально-разностную систему уравнений (3) с краевыми условиями (4) при $k = 2, \dots, K$ назовем трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемой (3), (4). Ее коэффициенты $a_{\kappa l}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 < a_* \xi^2 \leq a_{\kappa l}(x) \xi_\kappa \xi_l \leq a^* \xi^2, \quad a_{\kappa l}(x) = a_{l\kappa}(x), \\ a_{\kappa l}(x) \xi_\kappa \xi_l = \sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l}(x) \xi_\kappa \xi_l, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \end{aligned} \quad (5)$$

с фиксированными постоянными a_* , a^* и произвольными параметрами ξ_1, \dots, ξ_n , кроме того

$$y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{S}), \quad k = 1, \dots, K. \quad (6)$$

Определение 2. Совокупность функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, $k = \overline{2, K}$ является слабым решением дифференциально-разностной системы (3), (4), если выполнено

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}} y(k)_t \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \\ k = 1, \dots, K-1. \end{aligned}$$

Здесь $y(k)_t = \frac{1}{2\tau} [y(k+1) - y(k-1)]$, а билинейная форма $\ell(y^{(\sigma)}, \eta)$ определена соотношением

$$\ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l}(x) \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_l} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} dx.$$

Теорема 1. Пусть для функций $a_{\kappa l}(x)$, $y_0(x)$, $y_1(x)$ и $f(x)$ выполнены условия (5), (6). Функции $y(k)$ ($k = 1, \dots, K$), определяющие слабое решение системы (3), (4), при достаточно малых τ и $\sigma > 0$ однозначно определяются как элементы пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Далее используется составная норма вида

$$\begin{aligned} \|Y(k+1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2, \\ \|Y(1)\|^2 &= \frac{1}{4} \|y_1 + y_0\|_{(1)}^2 + \|y_1 - y_0\|_{(2)}^2, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ – некоторые нормы пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Теорема 2. Дифференциально-разностная схема (3) устойчива к малым изменениям начальных условий $y_0(x)$, $y_1(x)$ и правой части $f(k)$, $k = 1, \dots, K$, если выполнены условия (5), (6) и $\sigma > \frac{1}{4}$. Для слабого решения дифференциально-разностной системы (3), (4) справедлива априорная оценка при всех $k = 1, \dots, K - 1$:

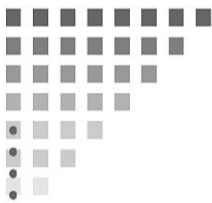
$$\|Y(k+1)\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{S}} + \sqrt{\sigma - 1/4}\|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{S}} + \frac{1}{\sqrt{8c_1}}\|f(k)\|.$$

Здесь $\|f(k)\| = \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{S}}^2 \right)^{1/2}$ и c_1 – произвольные положительные постоянные, зависящие только от $\text{meas}\mathfrak{S}$, a_* .

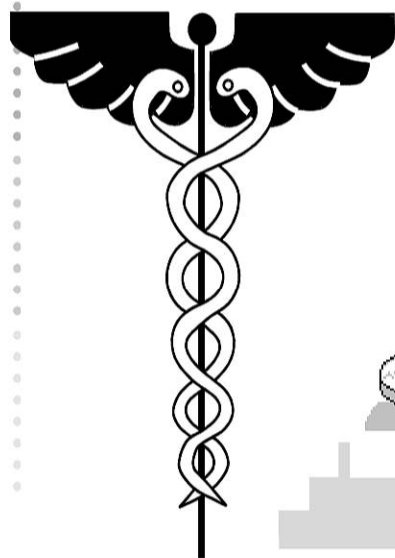
4. Заключение. В работе получены априорные оценки слабого решения трехслойной дифференциально-разностной системы уравнений на сетеподобной ограниченной области и условия устойчивости дифференциально-разностной схемы, соответствующей этой системе.

Литература

1. Хоанг В. Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. №. 1. С. 127–132.
2. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17. No 3. P. 277–286.
3. Zhabko A. P., Shindyapin A. I., Provotorov V. V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019. Vol. 15. No 4. P. 457–471.



*3. Математические
модели медико-
биологических систем*



УДК 51-72

Лориц Е. М.

Разработка алгоритма упаковки молекул воды в ограниченном объеме

Рекомендовано к публикации доцентом Губар Е. А.

Введение. Вопрос о плотнейшей упаковке является подзадачей предсказания строения вещества, в частности структуры кристалла, информация о которой позволяет предсказать практически все его свойства. Данная работа проводилась в сотрудничестве с Институтом Химии СПбГУ и является междисциплинарным исследованием.

Актуальность данной темы подтверждается большим количеством работ о предсказании структур кристаллов [1]. К. К. Фишер изучил способ поиска строения вещества с использованием машинного обучения и современных квантовомеханических методов [2]. Группа ученых из Нью-Йоркского государственного университета в Буффало описала эволюционный алгоритм XtalOpt и его усовершенствования [3]. А. Р. Оганов и К. В. Гласс разработали надежную методологию для предсказания структуры кристаллов на основе эволюционных алгоритмов и продемонстрировали эффективность этого метода для систем с числом атомов до 30–40 на клетку [4]. А затем, А. О. Ляхов, А. Р. Оганов, Х. Т. Стокс и К. Зху доработали предыдущий алгоритм и достигли надежного представления для систем из 200 атомов на клетку [5].

Постановка задачи. Целью данной работы является создание алгоритма упаковки молекул воды с учетом их химических свойств в замкнутом пространстве, которое является прямоугольным параллелепипедом.

Для этого молекула воды была представлена в виде правильного тетраэдра, у которого две вершины соответствуют атомам водорода в молекуле (вершины типа А), а две другие – электронным парам (вершины типа В). Связи между ними продемонстрированы на рис. 1. Вследствие химических свойств воды, связи между молекулами могут образовываться только между водородом и электронной

Лориц Екатерина Михайловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077304@student.spbu.ru, тел.: +7(952)237-91-92

парой, т. е. будут рассматриваться исключительно связи вида $A\sim B$ или $B\sim A$ [6]. Значит необходимо, чтобы алгоритм учитывал типы вершин при присоединении молекул и не допускал соединений вида $A\sim A$ и $B\sim B$.

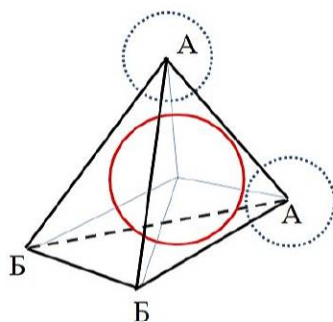


Рис. 1. Представление молекулы воды. Пунктирные окружности – атомы водорода, непрерывная – атом кислорода

Алгоритм. Алгоритм имеет практическую ценность, поскольку позволяет определить количество молекул воды, которое возможно разместить в прямоугольном параллелепипеде с заданными значениями длины, ширины и высоты. Алгоритм состоит из последующих шагов:

1. Задается объем, допустимый для заполнения.
2. Формируется матрица, которая будет содержать информацию о координатах вершин всех добавленных молекул.
3. В соответствии с представлением молекулы воды, определяются координаты вершин тетраэдра для первой молекулы.
4. Координаты вершин молекулы заносятся в матрицу, сформированную на шаге 2.
5. На график наносится изображение тетраэдра, соответствующего добавленной молекуле.
6. Определяются две переменные, хранящие информацию о положении последнего добавленного тетраэдра. Одна из них сохраняет координаты вершины тетраэдра с наибольшей абсциссой,

а другая – количество вершин с наибольшей абсциссой (1 или 2). Эти переменные будут обновляться после добавления каждой новой молекулы.

7. Аналогичным образом определяются две переменные, хранящие информацию о положении первого тетраэдра в строке. Они будут обновляться после перехода на новую строку.
8. Реализуется цикл присоединения молекул: проводится проверка, определяющая, может ли новая молекула быть добавлена в одну строку с предыдущей. Если это возможно, осуществляется добавление молекулы с использованием функции, определяющей координаты вершин. Повторяются шаги 4–6. Иначе, молекула попадает в следующий ряд. Реализуются шаги 4–7. Если и в этом случае она выходит за пределы допустимого объема, то осуществляется добавление в первую строку нового слоя. В этом случае повторяются шаги 4–7.

В цикле на шаге 8 алгоритма используется процедура, позволяющая сориентировать присоединяемую молекулу так, чтобы создать соединение водород – электронная пара. Эта процедура осуществляет определение координат вершин тетраэдра, соответствующего добавляемой молекуле, в зависимости от расположения предыдущей молекулы (с учетом требования связи типа $A \sim B$, $B \sim A$).

Процедура на языке MATLAB. Приведенный выше алгоритм реализован в среде MATLAB. Программа вычисляет количество молекул, укладываемое в данный объем, а также формирует таблицу с координатами вершин тетраэдров в декартовой системе координат с центром в одной из вершин прямоугольного параллелепипеда. Более того, в программу добавлена возможность определения интервала между молекулами по любой из координат. Фрагмент кода на языке MATLAB для добавления новой молекулы в текущую строку или для перехода на новую имеет вид:

```
if (rightest(1)+3*step_x+h_x) <= stop_x
    k = k + 1;
    [M(4*k-3,:), M(4*k-2,:), M(4*k-1,:), M(4*k,:),
    rightest,type] = NewPutTriangle
    (type,rightest,step_x,step_y,step_z,h_x);
elseif ((type == 1)&&((h_y+3*step_y+rightest(2))<=stop_y))
||((type == 2)&&((h_y+4*step_y+rightest(2))<=stop_y))
```

```

k = k + 1;
if type1str == 1
    b2 = [r1s(1)-3*step_x, r1s(2)+h_y+ step_y, r1s(3)];
    c2 = [b2(1)+3*step_x, b2(2)+step_y, b2(3)];
    d2 = [c2(1), b2(2)-step_y, b2(3)];
    a2 = [b2(1)+2*step_x, b2(2), b2(3)+step_z];
    rightest = d2; type = 2;
else
    a2 = [r1s(1)-3*step_x, r1s(2)+h_y+step_y, r1s(3)];
    b2 = [a2(1), a2(2)+2*step_y, a2(3)];
    c2 = [a2(1)+3*step_x, a2(2)+step_y, a2(3)];
    d2 = [a2(1)+step_x, a2(2)+step_y, a2(3)+step_z];
    rightest = c2; type = 1;
end
type1str = type; r1s = rightest;
M(4*k-3,:) = a2; M(4*k-2,:) = b2;
M(4*k-1,:) = c2; M(4*k,:) = d2;
DrawTriangle(a2,b2,c2,d2);

```

Результаты. Разработан алгоритм упаковки, осуществлена его реализация в среде MATLAB, а также проведен ряд численных экспериментов.

Для иллюстрации расположения молекул воды, полученного в результате работы алгоритма, программа выводит график с изображением тетраэдров см. рис. 2. и 3. Звездочками отмечены вершины типа А.

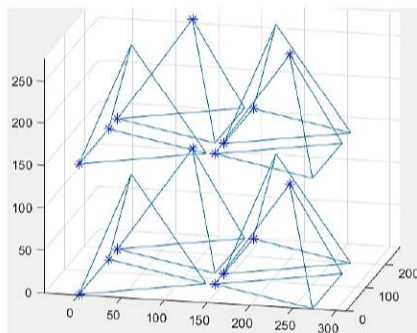


Рис. 2. Иллюстрация результата работы алгоритма для 8 молекул.

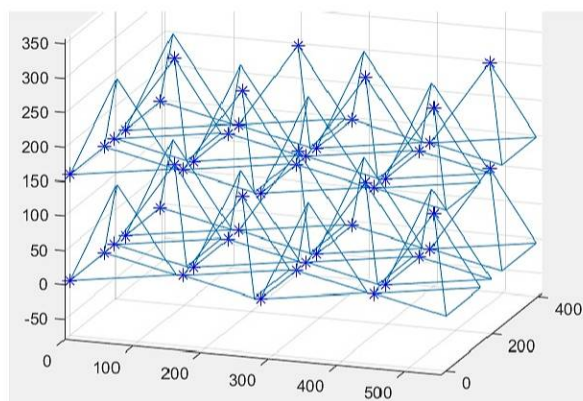


Рис. 3. Иллюстрация результата работы алгоритма для 24 молекул.

В результате серии экспериментов установлено, что оптимальное число молекул, для которого программная реализация алгоритма работает достаточно быстро, равно 1000. Для этого количества молекул время работы программы составляет примерно 10 секунд.

Литература

1. Novikov A. C. Symmetry in quantum and computational chemistry // *Symmetry*. 2020. Vol. 12. No 12. Art. no 2028.
2. Fischer C. C. A Machine Learning Approach to Crystal Structure Prediction, PhD thesis. Cambridge: MIT, 2007. 147 p.
3. Falls Z., Avery P., Wang X. et al. The XtalOpt evolutionary algorithm for crystal structure prediction // *The Journal of Physical Chemistry*. 2021. Vol. 125. No 3. P. 1601–1620.
4. Oganov A. R., Glass C. W. Crystal structure prediction using evolutionary algorithms: principles and applications // *The Journal of chemical physics*. 2006. Vol. 124. Art. no 244704.
5. Lyakhov A. O., Oganov A. R., Stokes H. T., Zhu Q. New developments in evolutionary structure prediction algorithm USPEX // *Computer Physics Communications*. 2013. Vol. 184. P. 1172–1182.
6. Некрасов Б. В. Основы общей химии. Т. 1. М.: Химия, 1972. 656 с.

УДК 004.932

Сенаторова Н. М., Гук К. П.

Разработка систем уточнения онкологического диагноза на основе технологий обработки изображений

Рекомендовано к публикации профессором Щеголевой Н. Л.

1. Введение. Сегодня рак груди – одна из основных причин смерти женщин от онкологии. Высокие показатели смертности и распространение этого заболевания во всем мире показывают важность исследования и разработки средств выявления и ранней диагностики такого вида рака. Однако исследования показывают, что радиологи могут не обнаружить значительную часть аномалий в дополнение к высокому уровню ложноположительных результатов [1]. Именно поэтому получает широкое распространение разработка систем компьютерного обнаружения и диагностики для повышения точности работы врачей [2]. В случае с раком груди такие системы опираются на распознавание образов при обработке цифровых маммографических снимков для выявления признаков злокачественных опухолей (микрокальцинатов, колючих масс и других), что требует извлечения текстурных, статистических и структурных признаков из областей изображения и обработки этих признаков с помощью алгоритмов машинного обучения.

2. Постановка задачи. Целью данной работы является разработка системы, способной распознавать на маммограммах шесть основных видов злокачественных и доброкачественных аномалий.

Существуют различные варианты таких систем, например [3, 4]. Однако представленные системы могут лишь указать на наличие злокачественной или доброкачественной аномалии на снимке, но не определить ее вид.

Сенаторова Наталья Максимовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068742@student.spbu.ru, тел.: +7(911)091-28-30

Гук Ксения Павловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068928@student.spbu.ru, тел.: +7(952)095-64-33

3. Архитектура первой системы. В рамках поставленной задачи предложены две системы, в которых классификация маммограмм происходит с помощью предварительной обработки изображений и извлечения нескольких категорий признаков. Затем полученный вектор признаков используется для классификации. Общая схема первой системы представлена на рис. 1.



Рис. 1. Общая схема первой из двух представленных систем

3.1. Датасет. Для решения поставленной задачи был использован набор маммограмм mini-MIAS [5], состоящий из 330 изображений разрешения 1024×1024 пикселей. Все снимки в датасете представлены в косой медиолатеральной проекции. В этом наборе каждое изображение относится к одному из семи классов:

- NORM – здоровая грудь;
- CALC – кальцификация тканей;
- CIRC – четко видимые массы;
- SPIC – колючие массы;
- MISC – другие злокачественные образования, не попадающие в предыдущие категории;
- ARCH – архитектурное искажение тканей;
- ASYM – асимметрия.

Если на маммограмме присутствует аномалия, дополнительно указаны ее центр и примерный радиус в пикселях.

3.2. Предварительная обработка изображений. Все 330 маммограмм из датасета mini-MIAS предварительно обрабатываются с помощью алгоритма CLAHE для увеличения контрастности [6]. Также со всех изображений удаляются артефакты (бирки) и обрезаются неинформативные части (например, черные полосы). Для увеличения точности последующей классификации со всех изображений удаляется грудная мышца, так как она имеет такую же плотность, как и некоторые раковые образования. Результаты предварительной обработки показаны на рис. 2.

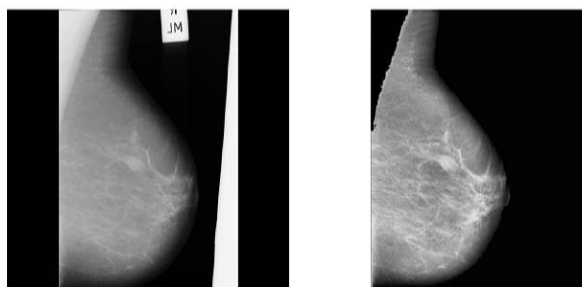


Рис. 2. Сравнение результата обработки маммограммы (справа) с ее первоначальным видом (слева) на примере изображения mdb012.png

После предварительной обработки датасета производится извлечение признаков из каждой маммограммы.

3.3. Фильтр Габора. К каждому снимку применяется фильтр Габора, широко использующийся в задачах обработки изображений для выделения и усиления границ объектов [7]. Данный фильтр математически представляется как гауссиан, умноженный на гармоническую функцию. В представленной системе к изображению применяются фильтры с ориентацией от 0 до 180 градусов с шагом 11,25 градусов, затем результаты фильтрации совмещаются в единое изображение для дальнейшего анализа.

3.4. Матрица смежностей уровня серого. *Матрица смежностей уровня серого* (или полутоновая матрица смежности, GLCM –

Gray Level Co-Occurrence Matrix) – это матрица, которая показывает распределение уровня серого между соседними пикселями на изображении. Такие матрицы представляют свойства текстуры изображения, но не удобны для прямого применения при анализе медицинских изображений из-за большого размера. В связи с этим часто они лишь используются для вычисления различных метрик для более компактного представления текстур. В данном случае для каждого изображения извлекаются 14 характеристик, предложенных Р. Хараликом в 1973 г. [8] и используемых для задачи классификации текстур (среди них энергия, корреляция, энтропия, контраст и другие).

3.5. Deskриптор особых точек ORB. Данный дескриптор представляет собой комбинацию алгоритмов детектора FAST (Features from Accelerated Segment Test) и дескриптора BRIEF (Binary Robust Independent Elementary Features) с некоторыми модификациями [9]. Этот дескриптор разрабатывался и сейчас используется в различных системах как эффективная и быстрая альтернатива широко используемому для выявления локальных признаков дескриптору SIFT (The Scale-Invariant Feature Transform). В представленной системе для каждого изображения извлекаются особые точки, их дескрипторы, и эти данные используются для дальнейшей классификации.

3.6. Классификация. Полученные после выполнения предыдущих этапов векторы характеристик Харалика и векторы дескриптора ORB поступают на вход классификаторам. Для данной системы сравнивались классификаторы Random Forest (RF) и Multi-Layer Perceptron (MLP). В результате работы из всех вариантов наилучшую точность 95% (отношение правильно классифицированных тестовых данных ко всему объему тестовых данных) показала комбинация характеристик Харалика в сочетании с алгоритмом классификации RF. Результаты работы классификаторов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Точность, чувствительность и специфичность, полученные в результате работы первой системы

	Точность, в %	Чувств., в %	Специф., в %
ORB + RF	76	51	91
ORB + MLP	86	75	96
Haralick feat + RF	95	93	99
Haralick feat + MLP	72	35	89

Из таблицы 1 также видно, что алгоритм хорошо распознает здоровые ткани, однако точность для снимков больных тканей снижена, т. е. имеется риск ложноотрицательного диагноза. Это видно по значениям чувствительности – параметра, отражающего долю положительных результатов, которые правильно идентифицированы как таковые.

4. Архитектура второй системы. Теперь рассмотрим вторую систему. Ее общая схема представлена на рис. 3.

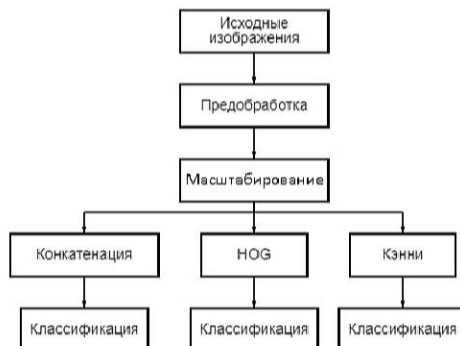


Рис. 3. Общая схема второй из двух представленных систем

4.1. Масштабирование вниз процедурой Scale. Первый этап предобработки в данной системе аналогичен рассмотренному ранее (удаление неинформативных участков, CLAHE и т. д.). На следующем этапе для применения методов экстракции признаков изображения предварительно перемасштабируются до размеров 128×100 пикселей. Для этого используется процедура усреднения соседних

пикселей. Необходимость масштабирования обусловлена большими объемами исходных данных.

4.2. Конкатенация в вектор яркостных признаков. Яркостные матрицы изображений преобразуются в векторы путем конкатенации строк. В итоге каждой маммограмме ставится в соответствие вектор, состоящий из 12800 элементов. Стоит отметить, что данный метод извлечения яркостных признаков крайне прост в реализации и при этом достаточно эффективен.

4.3. Гистограмма направленных градиентов. Следующий метод экстракции яркостных признаков – гистограмма направленных градиентов (Histogram of Oriented Gradients – HOG) [10]. Входными данными являются маммограмма, количество интервалов для составления гистограммы, размерность одной ячейки (в пикселях), по которой будет составляться гистограмма, размерность блока (в ячейках), для которого будет проводиться нормализация перед составлением итогового вектора признаков. Результатом является соответствие изображению вектора, состоящего из значений гистограммы для каждой ячейки, нормализованных относительно блоков.

4.4. Алгоритм Кэнни. Оператор Кэнни [11] традиционно используется для обнаружения границ изображения. В данной работе алгоритм используется для получения альтернативных наборов признаков, помещенных в вектор, аналогично пункту 4.2.

4.5. Классификация. Для анализа признаков, получаемых в результате работы представленных методов, были рассмотрены классификаторы библиотеки Scikit-learn [12]. Самыми эффективными оказались следующие четыре классификатора:

- метод опорных векторов (SVM);
- дерево принятия решений (DT);
- метод К-ближайших соседей (KNN);
- линейный дискриминантный анализ (LDA).

Результаты работы выбранных классификаторов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты работы второй системы

	Точность, в %	Чувств., в %	Специф., в %
ПВ + SVM	96	96	97
ПВ + DT	57	45	87
ПВ + KNN	68	12	68
ПВ + LDA	70	40	94
HOG + SVM	94	83	99
HOG + DT	66	47	89
HOG + KNN	90	67	99
HOG + LDA	85	69	98
Canny + SVM	84	52	99
Canny + DT	52	47	83
Canny + KNN	88	66	99
Canny + LDA	79	38	99

Анализ данных, представленных в таблице 2, показывает, что наиболее точные результаты получены с помощью сочетания метода опорных векторов с преобразованием изображения в вектор (ПВ), чуть менее точные, но более чем приемлемые результаты получают при сочетании классификатора SVM с методом HOG.

5. Заключение. Согласно [1], «для маммографии характерен высокий уровень ложноположительных и ложноотрицательных заключений», более того, «рентгенологи до сих пор пропускают от 10 до 30% случаев рака». Соответственно, точность алгоритмов как минимум достигает точности врачебной диагностики, а значит, применение предложенных систем может снять значительную часть нагрузки с медицинских сотрудников. Более того, в ряде случаев точность алгоритмов выше результатов врачебной диагностики, поэтому предложенные системы являются эффективным способом обнаружения образований, подозрительных на онкологию.

Литература

1. Меских Е. В., Оксанчук Е. А. и др. Рак молочной железы: диагностические сложности и ошибки [Электронный ресурс] URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rak-molochnoy-zhelezy-diagnosticheskie-slozhnosti-i-oshibki> (дата обращения: 19.03.2022).
2. Купеева И. А., Разнатовский К. И., Раводин Р. А. и др. Оценка эффективности интеллектуальной системы поддержки принятия врачебных решений // Вестник Санкт-Петербургского

университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Т. 12. № 2. С. 62–68.

3. Das S., Kar D., Schwenker F., Sarkar R. Computer aided breast cancer detection using ensembling of texture and statistical image features // *Sensors*. 2021. Vol. 21. No 11. P. 3628.
4. Matos C., Souza J., Diniz J. et al. Diagnosis of breast tissue in mammography images based local feature descriptors // *Multimedia Tools and Applications*. 2019. Vol. 78. No 10. P. 12961–12986.
5. The mammographic image analysis society digital mammogram database [Электронный ресурс]: URL:<http://peipa.essex.ac.uk/info/mias.html> (дата обращения: 10.03.22).
6. Kareem M. A., Al-Juboori R. A. L. Contrast enhancement of the mammographic image using retinex with CLAHE methods // *Iraqi Journal of Science*. 2022. Vol. 58. No 1B. P. 327–336.
7. Roslan R., Jamil N. Texture feature extraction using 2-D Gabor Filters // *2012 International Symposium on Computer Applications and Industrial Electronics (ISCAIE)*. 2012. P. 173–178.
8. Haralick R. M., Shanmugam K., Dinstein I. Textural features for image classification // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1973. Vol. SMC-3. No 6. P. 610–621.
9. Rublee E., Rabaud V., Konolige K., Bradski G. ORB: An efficient alternative to SIFT or SURF // *2011 International Conference on Computer Vision*. 2011. P. 32564–32571.
10. Athraa H. Farhan, Mohammed Y. Kamil. Texture analysis of mammogram using histogram of oriented gradients method // *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2020. Vol. 881. P. 12149.
11. Canny Edge Detection [Электронный ресурс]: URL:https://docs.opencv.org/3.4/da/d22/tutorial_py_canny.html (дата обращения: 15.03.22).
12. Scikit-learn [Электронный ресурс]: URL:<https://scikit-learn.org/stable/> (дата обращения: 15.03.22).

УДК 51

Холодова С. Е., Черкай К. М.

Математическое моделирование движения крови по сосудам с учётом эффектов деформации стенок

1. Введение. Кровь внутри живого организма является неотъемлемой составляющей в обеспечении нормального процесса жизнедеятельности [1]. Таким образом, понимание динамики крови в организме является ключевой проблемой для своевременного предотвращения сосудистых заболеваний. Однако из-за невозможности визуально наблюдать картину течения встаёт вопрос о математическом описании движения крови по сосудам.

Вопрос описания движения крови по сосудам не является новым, однако до сих пор остаётся актуальным. В большом количестве представленных работ, посвящённых данному вопросу, авторы зачастую упрощают используемую в своих исследованиях математическую модель, рассматривая одномерное течение крови по сосудам [2], либо предлагают в своих исследованиях численное моделирование геометрии рассматриваемых сосудов и движения крови по ним в соответствии с полными системами уравнений движения для жидкости в пространстве [3–5].

Основной проблемой составления одномерной модели и её использования в практических целях является недостаточная точность по сравнению с экспериментальными результатами, в то время как одним из недостатков использования численных методов является отсутствие аналитического решения, в связи с чем усложняется задача определения качественных особенностей течения крови при различных значениях параметров модели. Таким образом, остаётся нерешённым вопрос о нахождении аналитических функциональных зависимостей, которые бы описывали движение крови по сосудам, близкое к истинному, вследствие чего в представленной работе изучается двумерная модель движения крови, в частности, рассматривается

Холодова Светлана Евгеньевна – доцент, Университет ИТМО; e-mail: kholodovase@yandex.ru, тел.: +7(965)021-00-41

Черкай Константин Михайлович – студент, Университет ИТМО; e-mail: tcherckaj11@gmail.com, тел.: +7(921)655-32-52

осесимметричная модель движения крови как в плоской, так и в цилиндрической геометрии с учётом наличия эффектов деформации стенок.

2. Постановка задачи и методы решения. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой однородной жидкости в цилиндрическом сосуде переменной глубины, к поверхности которого приложено поверхностное напряжение, и проведём анализ возмущений, при которых наблюдается плоскопараллельная или осесимметричная динамика. В случае плоскопараллельного движения систему координат введём таким образом, чтобы высота поверхности сосуда относительно отсчётного уровня $y = 0$ задавалась функцией $R + \eta(x, t)$, а направления осей Ox и Oy выберем параллельным оси сосуда и к стенке сосуда соответственно, так, чтобы система Oxy образовывала правую прямоугольную систему координат. В случае осесимметричного движения предполагается, что азимутальная компонента скорости равна нулю, все гидродинамические параметры не зависят от азимутальной координаты и уравнение поверхности сосуда, возмущённой некоторой волной $\eta(z, t)$, имеет вид $r = R + \eta(z, t)$, где r, z – цилиндрические координаты.

Уравнения движения однородной вязкой несжимаемой жидкости имеют вид [6]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v} – скорость, p – давление, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение неразрывности (2) позволяет ввести функцию тока ψ равенствами:

- для плоскопараллельного движения

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

- для осесимметричного движения

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Тогда задача определения поля скорости сводится к решению уравнения для функции тока:

- для плоскопараллельного движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = \nu \Delta^2 \psi;$$

- для осесимметричного движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \nu \Delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\nu}{r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Откуда

$$\psi(x, y, t) = (Ae^{ky} + Be^{ly}) e^{i(kx+\sigma t)}, \quad l = \sqrt{k^2 + \frac{i\sigma}{\nu}},$$

$$\psi(r, z, t) = \left(C_1 r I_1(\kappa r) + \frac{A \nu r}{\sigma} I_1(\kappa r) \right) e^{ikz+\sigma t},$$

где $I_1(\kappa r)$ – функция Инфеляда первого порядка, $\kappa = \sqrt{k^2 + \frac{\sigma}{\nu}}$, A, C_1 – постоянные для плоскопараллельного и осесимметричного движений соответственно.

Учитывая граничные условия прилипания для жидкости [7]

$$\begin{aligned} v_x|_{y=R} = 0, \quad v_y|_{y=R} = \tilde{v}_0 e^{i(kx+\sigma t)}, \\ v_r|_{r=R} = \tilde{v}_0 e^{ikz+\sigma t}, \quad v_z|_{r=R} = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{v}_0 = -ikv_0$ – неизвестная составляющая амплитуды поперечной компоненты скорости на поверхности сосуда, получим следующие представления распределения скоростей:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{klv_0}{l-k} \left(e^{k(y-R)} - e^{l(y-R)} \right) e^{i(kx+\sigma t)}, \\ v_y = \frac{ikv_0}{l-k} \left(ke^{l(y-R)} - le^{k(y-R)} \right) e^{i(kx+\sigma t)}, \end{aligned}$$

и

$$v_r = \frac{ikv_0}{D} \left(\kappa I_0(\kappa R) I_1(kr) - k I_0(kR) I_1(\kappa r) \right) e^{ikz+\sigma t},$$

$$v_z = \frac{\kappa k v_0}{D} \left(I_0(kR) I_0(\kappa r) - I_0(\kappa R) I_0(kr) \right) e^{ikz+\sigma t},$$

где $D = k I_0(kR) I_1(\kappa R) - \kappa I_0(\kappa R) I_1(kR)$.

Далее, применяя к уравнению движения оператор дивергенции, с учётом уравнения неразрывности и построенного поля скорости, получим, что функция давления является гармонической. Тогда

$$p(x, y, t) = p_1 e^{ky+i(kx+\sigma t)},$$

$$p(r, z, t) = p_1 I_0(kr) e^{ikz+\sigma t}.$$

Для определения дисперсионного соотношения воспользуемся динамическими граничными условиями. Пусть на поверхности сосуда в случае плоскопараллельного движения действует напряжение $\vec{\tau} = \tau_{yx} \hat{\mathbf{x}} + \tau_{yy} \hat{\mathbf{y}}$. Тогда на поверхности сосуда $y = R + \eta(x, t)$, считая возмущение η малым по сравнению с R , должны выполняться граничные условия

$$\tau_{yy}|_{y=R} = T_1 e^{i(kx+\sigma t)}, \quad \tau_{yx}|_{y=R} = iT_2 e^{i(kx+\sigma t)},$$

где $\mu = \rho\nu$ — коэффициент динамической вязкости. Пусть в случае осесимметричного движения на поверхности сосуда действует напряжение $\vec{\tau} = \tau_{rr} \hat{\mathbf{r}} + \tau_{rz} \hat{\mathbf{z}}$, тогда на поверхности сосуда будут выполняться граничные условия

$$\tau_{rr}|_{r=R} = \tau^2(R) e^{ikz+\sigma t}, \quad \tau_{rz}|_{r=R} = i\tau^1(R) e^{ikz+\sigma t}.$$

Откуда дисперсионное соотношение запишется в виде

- для плоскопараллельного движения

$$\sigma(k) = i\nu k^2 \left[\frac{\mathcal{P}}{2} + \sqrt{\frac{\mathcal{P}^2}{4} + \frac{4}{\vartheta}} \right],$$

$$\text{где } \mathcal{P} = 1 - \frac{4}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta^2}, \quad \vartheta = \frac{T_2}{T_1};$$

- для осесимметричного движения

$$\sigma(k) = \frac{4\nu}{R^2} + \frac{8\nu\vartheta}{kR^3} - \nu k \left(\frac{3k}{2} + \frac{\vartheta}{R} \right) - \sqrt{\left[\frac{4\nu}{R^2} + \frac{8\nu\vartheta}{kR^3} - \nu k \left(\frac{k}{2} + \frac{\vartheta}{R} \right) \right]^2 + \frac{8\nu^2}{R^2} \left[k^2 - \frac{2I_1(kR)}{I_0(kR)} \frac{kR + \vartheta}{R^2} \right]},$$

где $\vartheta = \frac{\tau^1(R)}{\tau^2(R)}$.

Дисперсионное соотношение позволяет составить зависимость смещения стенок сосуда от волнового числа. Так как $\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx v_y|_{y=R}$, то вертикальное смещение сосуда:

$$\eta(x, t) = \frac{k\nu T_1(k-l)}{l\mu\sigma^2} e^{i(kx+\sigma t)}.$$

Имея полное аналитическое описание рассматриваемой модели движения крови, можно вычислить амплитуды компонент напряжения T_1 и T_2 на стенках сосуда, учитывая возможность проведения измерений давления и пульса, а именно, требуемые величины будут удовлетворять системе алгебраических уравнений, являющихся следствием аналитического представления поля давления и дисперсионного соотношения, решение которой имеет вид

$$\frac{T_1}{\tilde{p}} = 1, \quad \frac{T_2}{\tilde{p}} = \frac{1}{q} \left(\sqrt{4 + \frac{q^2}{1-q}} - 2 \right), \quad q = \frac{\sigma}{i\nu k^2}, \quad (3)$$

где \tilde{p} – амплитуда давления, измеренная на стенке сосуда.

Также можно оценить величину смещения стенок сосуда, которое при малых возмущениях связано с радиальной составляющей скорости следующей формулой:

$$\eta(z, t) = \int_0^t v_r|_{r=R} dt = -\frac{ikv_0}{\sigma} e^{ikz+\sigma t}.$$

Таким образом, полное аналитическое описание рассматриваемой модели движения крови позволяет выразить амплитуды напряжений через давление, частоту колебаний и волновое число:

$$\frac{\tau^1(R)}{\tilde{p}} = \frac{2x^2}{y^2 - x^2} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} - \frac{x(y^2 + x^2)}{y(y^2 - x^2)} \frac{I_1(y)}{I_0(y)},$$

$$\frac{\tau^2(R)}{\tilde{p}} = \frac{2x^2}{y^2 - x^2} \left[\frac{I_1(y)}{yI_0(y)} - \frac{I_1(x)}{xI_0(x)} \right] + 1, \quad (4)$$

где $x = kR$, $y = \kappa R$, \tilde{p} – амплитуда давления, измеренная на стенке сосуда.

3. Результаты. Проведённый анализ позволяет составить графические интерпретации полученного поля гидродинамических величин, характеризующих динамический процесс в кровеносном сосуде, которые представлены на рис. 1 – для плоскопараллельного движения, на рис. 2 – для осесимметричного движения.

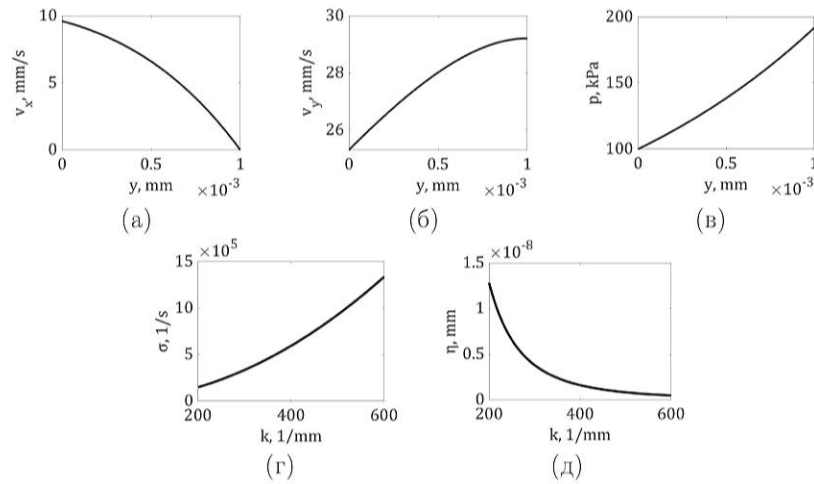


Рис. 1. Графики зависимостей гидродинамических величин в плоской геометрии

Анализ графических зависимостей скоростей в случае плоской геометрии, представленных на рис. 1а, б, позволяет утверждать, что рассматриваемое течение образует профиль скоростей, схожий с параболическим, характерным для течения Пуазёйля. Таким образом,

можно сделать вывод о ламинарном течении крови по сосудам [6, 7]. Графическая зависимость давления показывает, что при приближении к стенкам сосуда давление жидкости увеличивается и достигает своего максимального значения у самой стенки. График зависимости смещения стенки сосуда от волнового числа, представленный на рис. 1д, позволяет утверждать, что при увеличении волнового числа значение смещения стенки сосуда уменьшается.

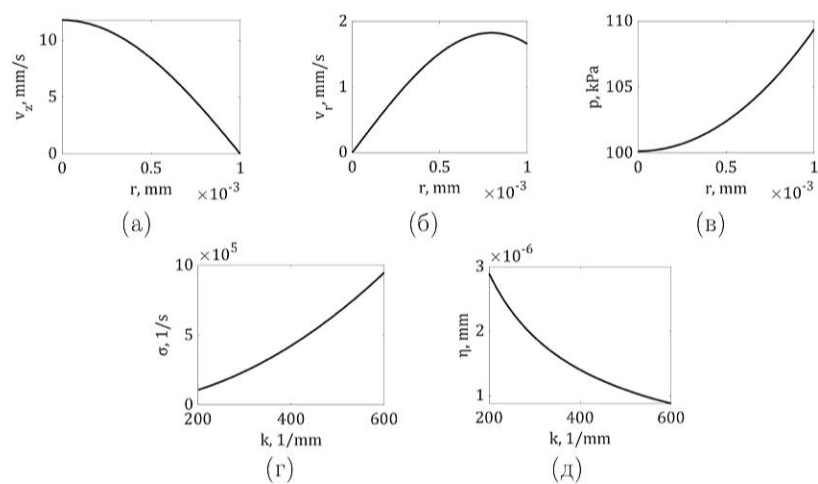


Рис. 2. Графики зависимостей гидродинамических величин в цилиндрической геометрии

В случае осесимметричного движения (рис. 2) можно наблюдать, что полученные распределения скоростей образуют несколько иной профиль по сравнению с плоскопараллельным движением. Несмотря на это, полученный профиль, как и для плоской геометрии, имеет некоторую схожесть с течением Пуазейля, и, следовательно, можно говорить о ламинарном течении крови по сосудам. Из графика зависимости давления можно сделать вывод: при удалении от центра сосуда давление жидкости увеличивается и достигает своего максимума у стенок сосуда. Полученная дисперсионная кривая приближённо изменяется по параболическому закону. Графическая интерпретация

смещения стенки сосуда показывает, что с ростом волнового числа значение смещения уменьшается.

Полученные зависимости амплитуд напряжений от гидродинамических параметров (3), (4) позволяют построить графические интерпретации, которые представлены на рис. 3а, б – для плоской геометрии, на рис. 3в, г – для цилиндрической геометрии, из анализа которых следует, что напряжение растёт пропорционально давлению внутри сосуда.

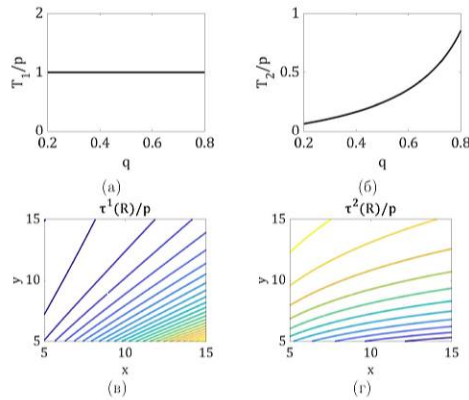


Рис. 3. Графики зависимостей отношения амплитуд напряжений к амплитуде давления

амплитуды напряжений к амплитуде давления в то время как амплитуда нормальной компоненты напряжения убывает.

4. Выводы. Проведено моделирование гидродинамических процессов в кровеносном сосуде. В частности, рассмотрены модели движения в плоской и цилиндрической геометриях с учётом наличия эффектов деформации стенок. Для каждой геометрии сосуда представлена краевая задача для уравнений с частными производными, аналитически найдены функциональные зависимости для гидродинамических параметров крови, построено дисперсионное соотношение как функция частоты колебаний от волнового числа. Построены функциональные зависимости для амплитуд действующего на поверхности сосуда напряжения от амплитуды давления, волново-

В случае плоской геометрии характерен рост амплитуды касательной компоненты напряжения с увеличением значения q , в то время как амплитуда нормальной компоненты напряжения не зависит от данной величины вовсе. В случае же цилиндрической геометрии характерен рост амплитуды касательной компоненты напряжения с ростом отношения величины x к величине y , в то время как амплитуда нормальной компоненты напряжения убывает.

го числа и частоты колебаний, позволяющие сформулировать метод оценки динамики крови по измеренным значениям пульса и давления.

В дальнейшем предполагается проведение математического моделирования с помощью привлечения элементов теории упругости с целью учёта наличия толщины и неоднородности стенок сосуда, а также сравнительного анализа полученных результатов с экспериментальными данными.

Литература

1. Трегубов В. П., Радичкина А. О. Математическое моделирование кинематики левого желудочка сердца человека в процессе его сокращения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Т. 9. № 4. С. 66–72.
2. Mitsotakis D., Dutykh D., Li Q. Asymptotic nonlinear and dispersive pulsatile flow in elastic vessels with cylindrical symmetry // Computers and Mathematics with Applications. 2018. Vol. 75. No 11. P. 4022–4047.
3. Захаров Ю. Н. и др. Численный метод прогнозирования гемодинамических эффектов в сосудистых протезах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 399–414.
4. Selmi M., Belmabrouk M., Bajahzar A. Numerical study of the blood flow in a deformable human aorta // Applied sciences. 2019. Vol. 9. No 6. P. 1–11.
5. Pontrelli G. Blood flow through an axisymmetric stenosis // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H. 2000. Vol. 215. No 1. P. 1–10.
6. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.
7. Слѣзкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 521 с.

UDC 004.93

Andrienko V. A., Molin A. E.

Semantic breast ultrasound image segmentation with neural networks based on U-net architecture

Recommended for publication by associate professor Blekanov I. S.

1. Introduction. Worldwide cancer study statistics [1] states that breast cancer is the most diagnosed cancer type in the world and surpasses lung cancer with an estimated 2.3 million new cases (11.7%). It is still unknown what causes this problem, but probably it reflects lifestyle changes such as increasing obesity, alcohol drinking, cigarette smoking [2], and a rare breast cancer screening examination [3]. Mortality rates are also increasing due to limited access to treatment [4, 5].

To deal with high mortality rate it is necessary to detect cancer at a very early stage before symptoms appear. Breast ultrasound imaging is often used for tumor detection [6] though in case of high breast tissue density the sensitivity can be low [7, 8].

However, some patients with clear signs of breast cancer have no tumor detected on ultrasonography [9]. To confirm cancer surgeons perform a biopsy, but it can have an impact on the patient, so breast imaging is evolving to avoid unnecessary biopsy.

Ultrasonography requires a well-trained specialist to interpret a breast ultrasound image and interpretation among specialist can have a high variation rate. To help doctors to localize a tumor and make an accurate diagnosis, pattern recognition technique were applied in this field. The goal of this research is not to replace doctors with computers, but rather to give them a second opinion during diagnosing.

Initially FCN is trained with training samples and one-hot images and then after feeding with another set of images it can create segmentation results. The chosen architecture of the full-convolutional network is U-net [10] and its two other variants: Dual U-net and Tight U-net which are based on the idea of deep convolutional framelets [11]. This idea has an advantage over the initial U-net architecture because it allows to reduce

Viktor Andrienko – graduate student, Saint-Petersburg state University; e-mail: st087306@student.spbu.ru, phone: +7(921)955-23-99

Aleksandr Molin – graduate student., Saint-Petersburg state University; e-mail: st084824@student.spbu.ru, phone: +7(900)628-94-55

noise during segmentation process thus giving more accurate result. All three architectures were tested during experiments to evaluate which one is better. Though FCN can give quite an accurate segmentation result, they are still can be refined. This paper proposes two methods to achieve such goals. One of them is to calculate wavelet form for every image in the training set – such approach can give neural network more details during training. Another method is to use conditional random field which takes into account the whole context of an image and produces smoothed prediction results removing coarse edges.

2. Related work. In semantic segmentation there are two problems that need to be addressed in order to achieve high segmentation accuracy. One problem is about effective different object classification. The other is how to keep consistency of the classified objects. The first problem was solved by early developed methods such as Scale Invariant Feature Transform (SIFT) [12] and Histograms of Oriented Gradient (HOG) [13] which extract image features. The extracted features are further used to train machine learning algorithms including Support Vector Machines and Random forest [14]. They are also used in cluster analysis [15] for classification. The evolution of deep learning technics and neural networks has made a great advance in past years. Therefore, semantic segmentation nowadays commonly means image classification by Convolutional Neural Networks (CNN). To solve the second problem, context models have been developed, such as Markov Random Field (MRF) [16] and Conditional Random Field (CRF). These two models are quite effective in keeping object consistency by linking together neighboring pixels. The newest technic developed to solve this problem is Recurrent Neural Networks (RNN) [17].

3. Proposed method. The proposed method can be divided into four major steps:

1. **Image preprocessing:** Before feeding neural networks with images from training set, they need to be prepared in order to improve accuracy of segmentation. First, wavelet image transformation is applied and then the size of training set is increased by augmentation.
2. **Training:** The prepared images are fed into a neural network to produce a model.

3. **Segmentation:** The trained model is fed with images from test dataset to acquire segmentation results.
4. **Post-processing with CRF:** Since, full-convolutional neural networks perform classification for every pixel individually. This can lead to misclassification of some pixels. So, the objects probably won't be outlined in one shape. CRF solves this problem with energy minimization which puts together pixels belonging to one class.

In spite of unquestionable advantages, the original U-net has its own drawback such as the duplication of low frequency branch which leads to noisy output.

One way to deal with this previously mentioned limitation is to apply dual frame. As opposed to the original U-net, in the Dual U-net the residual signal is upsampled in the low-resolution part by the unpooling layer. This can be easily done by adding new connections in the low-resolution part as it illustrated in Fig. 1 (b). This small modification to the network corresponds to the frame condition.

Similarly to the original U-net, Dual U-net at the end has the concatenation operation and convolution layer.

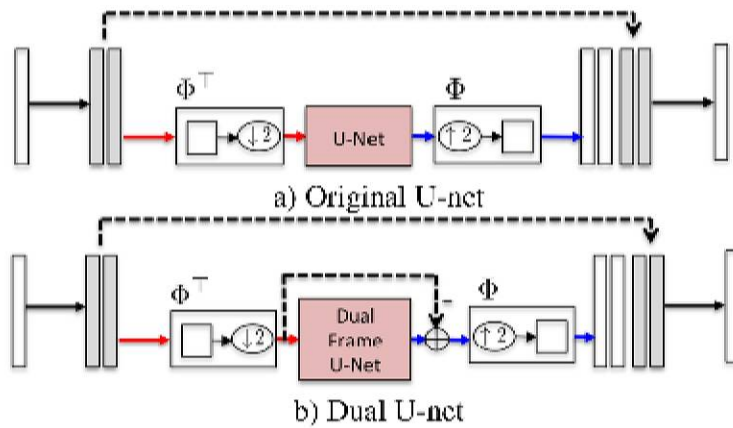


Figure 1. Simplified 1-D realization of the U-net architecture and its dual frame U-net variation

The other approach to improve the output accuracy of U-net with minimal noise is to use tight filter-bank frames or wavelet transformation.

There are some crucial tight filter bank frames. The simplest one is the Haar wavelet transform with low and high sub-band decomposition in which the low-pass subband is equal to the pooling operation.

Hereby, Haar wavelet transform is tight. Tight U-net based on this idea is illustrated in Fig. 2. As opposed to the original U-net, it has additional high pass connection. Like in the original U-net, in the Tight U-net every subband signal is sent via single concatenation as shown in the mentioned two figures. After that comes convolutional layer which learns from data. The idea of this modification is the same as discrete wavelet transform. The only difference is that previously wavelet transformation was applied on every image before feeding them into the neural network, now the wavelet transformation is performed in the neural network itself.

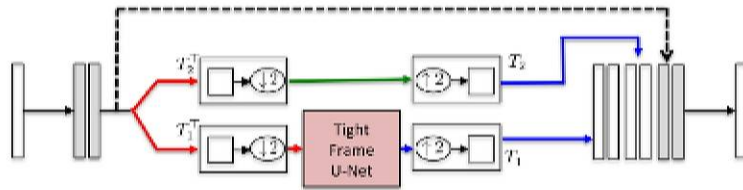


Figure 2. Simplified 1-D realization of the Tight U-net architecture

4. Experiments. This section gives result and explanation of conducted experiments.

4.1. Dataset. The performance of the proposed methods and the comparison with previous methods are evaluated using a BUS image dataset of 141 cases. 140 cases in the dataset contain breast tumors, and 1 case doesn't have tumor. Since the resolution of each image is different, they were all resized to 128x128. Some cases are collected by the Second Affiliated Hospital of Harbin Medical University. The imaging systems are VIVID 7 (GE) and EUB-6500 (Hitachi); some other cases are collected by the First Affiliated Hospital of Harbin Medical University, and the machine is Aixplorer US system (SuperSonic Imagine). Ground truths delineated by radiologists are utilized for training and evaluation of models performance.

Because number of available breast ultrasound images is quite lim-

ited, it is necessary to use such technique as image augmentation. Initially, there were 141 images which were split into two groups saved as numpy arrays. One array was created to train neural networks, it has 119 images. Another array was created to test accuracy of neural networks and it has 22 images. But 119 images are too few for training and this can lead to model overfitting. In order address this issue new additional images are created by rotation in range from 1 to 360 degrees. This technique allows to create as many images as needed. During experiments it was decided to feed into neural networks 300 images per epoch.

4.2. Training. All three mentioned U-net architectures were trained with Adaptive Moment Estimation optimization algorithm (Adam). Initial learning rate was set to $\lambda = 10^{-4}$. When accuracy or loss doesn't improve the learning rate reduces by multiplying with number 0.15. The number of epochs was 30. In this research two experiments were conducted with each U-net architecture. In the first experiment neural networks were tested for the capability for two class problem: tumor and background. In the second they were tested for the capability for five class problem: tumor, fat, mammary, muscle, background. Accordingly, the last convolution layer in the first experiment uses sigmoid activation function and SoftMax activation function in the second.

4.3. Evaluation metric. Evaluation metric of choice is Jaccard coefficient [18]: a measurement that is used to compare similarity of the predicted and the actual classes.

Formula for Jaccard coefficient is

$$J = \frac{TP}{TP + FP + FN},$$

where

- True Positive – both the predicted and the actual class equals true.
- True Negative – both the predicted and the actual class equals false.
- False Positive (Type 1 error) – the predicted class equals true, but the actual class equals false.
- False Negative (Type 2 error) – the predicted class equals false, but the actual class equals true.

4.4. Segmentation performance. Table 1 shows Jaccard coefficients obtained by evaluating results of test set segmentation. The neural networks were tested for performance for two class problem. As it can be seen Dual U-net trained with wavelet transformed images demonstrated the best results. Tight U-net wasn't trained with wavelet transformed images because as it was mentioned above the architecture of this neural network already includes wavelet transformation.

Table 1. Jaccard coefficients of single class classification results

Two class	Original U-net	intense	0.695147777
		wavelet	0.680443946
	Dual U-net	intense	0.725613554
		wavelet	0.746991613
	Tight U-net	intense	0.720342889

Table 2 shows results of testing for five class problem. As it can be seen this time Tight U-net demonstrated the best result.

Table 2. Jaccard coefficients of multiclass classification results

Five-class	Original U-net	intense	general	0.803414993
			tumor	0.775358005
		wavelet	general	0.795357218
			tumor	0.835844763
	Dual U-net	intense	general	0.803370201
			tumor	0.817118021
		wavelet	general	0.797167636
			tumor	0.827430818
	Tight U-net	intense	general	0.815919729
			tumor	0.839819759

As it was told previously there is another way to improve the result of segmentation. Table 3 shows results of segmentation after application of Conditional Random Field.

Table 3. Jaccard coefficients of single class classification results after CRF application

Two class	Original U-net	intense	0.695147777
		wavelet	0.684523084
	Dual U-net	intense	0.72715613
		wavelet	0.754702947
	Tight U-net	intense	0.731257245

Table 4 shows the improved results of five-class segmentation after CRF application.

Table 4. Jaccard coefficients of multiclass classification results after CRF application

Five-class	Original U-net	intense	general	0.803694927
			tumor	0.774838588
Dual U-net	wavelet	intense	general	0.792494179
			tumor	0.837104773
Tight U-net	intense	wavelet	general	0.803659873
			tumor	0.820206624
Dual U-net	intense	wavelet	general	0.798690110
			tumor	0.828299658
Tight U-net	intense	wavelet	general	0.816118704
			tumor	0.841585690

Table 5 shows comparison between results of three U-net architectures combined with Conditional Random Field and the other four fully automatic segmentation techniques. This time another set of images including altogether 560 images was used for testing segmentation methods for two class segmentation problem. To train neural networks these 560 images were split into 10 groups with 56 images in every single one. Nine groups (504 images) were used for training and one group (54 images) was used for evaluation. In general, 10 experiments were conducted taking one group of 54 pictures for evaluation and the over nine for training. In order to prevent overfitting the same augmentation technic was also applied feeding into the neural networks 1500 images per epoch.

After improving segmentation results with Conditional Random Field ten Jaccard coefficients were calculated for every experiment, the average is shown in the Table 4.

Table 5. Comparison with other methods

Original U-net + CRF	0,859241173
Dual U-net + CRF (Proposed method 1)	0.865616481
Tight U-net + CRF (Proposed method 2)	0.858312868
Graph Model [19]	0.666968753
Neural Network [20]	0.491215407
Saliency [21]	0.520361285
FCN + CRF [22]	0.8211

5. Conclusion. This paper addressed the problem of breast ultrasound image segmentation. In order to achieve better accuracy, such approaches as wavelet images transformation and Conditional Random Field were combined with new U-net architectures. According to the results of experiments the best method for two class problem with tumor and background is feeding Dual U-net with wavelet transformed images and then refining the segmentation result with Conditional Random Field.

For the five-class problem (tumor, background, fat, mammary, muscle) the best method is to feed Tight U-net with original intense images and then refine the result with Conditional Random Field.

References

1. Sung H., Ferlay J., Siegel R. L. et al. Global cancer statistics 2020: GLOBOCAN estimates of incidence and mortality worldwide for 36 cancers in 185 Countries // *CA Cancer J Clin.* 2021. Vol. 71. No 3. P. 209–249.
2. Yi-Sheng Sun, Zhao Zhao, Zhang-Nv Yang et al. Risk factors and preventions of breast cancer // *International journal of biological sciences.* 2017. Vol. 13. No 11. P. 1387–1397.
3. Barrios C., Reinert T., Werutsky G. Global breast cancer research: moving forward // *American Society of Clinical Oncology Educational.* 2018. Vol. 38. P. 441–450.
4. Torre L. A., Siegel R. L., Ward E. M. et al. Global cancer incidence and mortality rates and trends // *Cancer Epidemiology, Biomarkers Prevention.* 2016. Vol. 25. No 1. P. 16–27.
5. Lima S. M., Kehm R. D., Terry M. B. Global breast cancer incidence and mortality trends by region, age-groups, and fertility patterns // *EclinicalMedicine.* 2021. Vol. 38. Art. no 100985.
6. Warriar S., Tapia G., Goltsman D. et al. An update in breast cancer screening and management // *Womens Health.* 2016. Vol. 12. No 2. P. 229–239.

7. Mandelson M. T., Oestreicher N., Porter P. L. Breast density as a predictor of mammographic detection: comparison of interval- and screen-detected cancers // *Journal of the National Cancer Institute*, 2000. Vol. 92. No 13. P. 1081–1087.
8. Kolb T. M., Lichy J., Newhouse J. H. Comparison of the performance of screening mammography, physical examination, and breast US and evaluation of factors that influence them: an analysis of 27,825 patient evaluations // *Radiology*. 2002. Vol. 225. No 1. P. 165–175.
9. Beyer T., Moonka R. Normal mammography and ultrasonography in the setting of palpable breast cancer // *American journal of surgery*. 2003. Vol. 185. No 5. P. 416–419.
10. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional networks for biomedical image segmentation // 18th International Conference, Munich, Germany, October 5–9, 2015, Proceedings, Part III/ Editors: Nassir Navab, Joachim Hornegger, William M. Wells, Alejandro F. Frangi: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI 2015)*, 2015. P. 234–241.
11. Jong Chul Ye, Yoseob Han, Eunju Cha. Deep convolutional framelets: A general deep learning framework for inverse problems // arXiv:1707.00372. 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1707.00372>
12. Azeem A., Sharif M., Shah J. et al. Hexagonal scale invariant feature transform (H-SIFT) for facial feature extraction // *Journal of Applied Research and Technology*. 2015. Vol. 13. P. 402–408.
13. Bin Li, Guang Huo. Face recognition using locality sensitive histograms of oriented gradients // *Optik*. 2016. Vol. 127. P. 3489–3494.
14. Silva A., Lozkins A., Bertoldi L. R. et al. Semantic textual similarity on Brazilian Portuguese: An approach based on language-mixture models // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer science. Control Processes*. 2019. Vol. 15. No 2. P. 235–244.
15. Lozkins A., Bure V. M. The probabilistic method of finding the local optimum of clustering // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer science. Control Processes*. 2016. No 1. P. 28–37.

16. Renqian Zhang, Yuru Huang, Sirui Fu. The development of Markov random field theory and applications on image segmentation algorithm // 2016 International Conference on Communication and Electronics Systems (ICCES). 2016. P. 1–5.
17. Visin F., Ciccone M., Romero A. et al. ReSeg: A recurrent neural network-based model for semantic segmentation // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2016. P. 426–433.
18. Shoji Hirano, Shusaku Tsumoto. Representation of granularity for non-euclidian relational data by Jaccard coefficients and binary classifications // 7th International Conference, RSCTC 2010, Warsaw, Poland, June 28-30, 2010. Proceedings / Editors: Marcin Szczuka, Marzena Kryszkiewicz, Sheela Ramanna, Richard Jensen, Qinghua Hu: International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. 2010. P. 721–729.
19. Xian M., Zhang Y., Cheng H. D. Fully automatic segmentation of breast ultrasound images based on breast characteristics in space and frequency domains // Pattern Recognition. 2015. Vol. 48. Iss. 2. P. 485–497.
20. Shan J., Cheng H. D., Wang Y. X. Completely automated segmentation approach for breast ultrasound images using multiple-domain features // Ultrasound in Medicine Biology. 2012. Vol. 38. Iss. 2. P. 262–275.
21. Shao H., Zhang Y., Xian M. et al. A saliency model for automated tumor detection in breast ultrasound images // 2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). 2015. P. 1424–1428.
22. Huang K., Cheng H. D., Zhang Y. et al. Medical knowledge constrained semantic breast ultrasound image segmentation // 2018 24th International Conference on Pattern Recognition (ICPR). 2018. P. 1193–1998.

UDC 004.932

Kamguia F. H., Goncharova A. B.

Determination of malignancy of neoplasm from mammograms

1. Introduction. Cancer in general and breast cancer in particular has been a great threat to health and life for many years now [1]. GLOBOCAN data from 2020 shows that female breast cancer has exceeded all other cancers in terms of new cases, with an estimated 2.3 million new cases (11.7%) [2]. This can explain the increase in scientific works for early diagnosis, among which much work has been done on the classification of mammograms. With the coming of convolutional neural networks (CNN), this technology has been applied in computer vision problem resolution with impressive results: object detection [3,4]. In the classification of mammograms with success, or in the detection of neoplasms in mammograms [5]. This paper proposes to determine the malignancy of neoplasm in a given mammogram using convolutional neural network. We successfully trained the model with pre-processed images and obtained state-of-art results. The obtained result from the model permits us to show area of interest on the input image and give a degree of malignancy expressed in percentage.

2. Problem statement. Determining the malignancy of neoplasm in a medical image (mammogram), by building a model based on CNN.

3. Dataset. The data set used in our experiment was derived from the Digital Database for Screening Mammography, a publicly available data set maintained collaboratively by the University of South Florida [6,7]. Which has both mediolateral oblique (MLO) and craniocaudal (CC) views of each breast (all gray scale images). Each image is tagged with text-based disease definition labels (where each image can have multi-level labels) derived from radiology reports. Data augmentation and contrast-limited adaptive histogram equalization was used to pre-process these images. The obtained data set has 13128 images resized

Kamguia Feukwi Herve – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail:st093241@student.spbu.ru, phone: +7(911)930-19-50

Goncharova Anastasia Borisovna – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: a.goncharova@spbu.ru, phone: +7(812)428-47-26

to 277×277 pixels [8]. The images were randomly divided into training, verification, and testing sets (60%, 20%, and 20% of the full data set), with the testing set not used in the training phase.

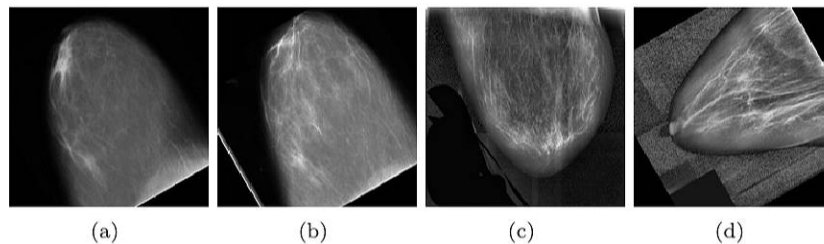


Figure 1. Examples of mammographic images of Benign (a-b) and Malignant lesions (c-d)

4. Model. With CNN models, convolution layers extract data from images to learn features (characteristics). Pullup reduces the dimensions of the receptive fields as inputs to each layer, however it goes deeper (in dimension) to learn more precisely what features are being identified by the convolution network. In order to counter the problem of overlapping tissues, CNN uses a to-and-fro learning process (forward and backward learning) [9]. In order to build our model we used the TensorFlow library which is built on the Keras library. TensorFlow ease the development of machine learning models with the help of its sequential API. TensorFlow is one of the most used libraries in the recent years to build machine learning models thanks to its parallelism, graphical support and scalability [10, 11].

The proposed model is a sequential set of sixteen layers. The model consists of 3 Conv2D layers, 3 MaxPooling2D layers, 6 ModuleWrapper layers, 2 Dense layers, 1 Flatten layer and 1 Rescaling layer. The Rescaling layer takes in the input image and scale it to the desired dimension in our 244×244 pixels. It is worth mentioning that the training and validation dataset were autotune using the TensorFlow autotune function to ensure that the dataset does not become a bottleneck while training the model, there were later on normalised in the range of (0,1) which is an ideal range for the model. In a model with backpropagation process batch normalisation can be used to regularize inputs. It also helps avoid overfitting. Batch normalisation layers were added after each activation layer. Adam Optimization Algorithm was used with a learning rate of

0.001, batch size of 32, 10 Epochs and other default values. The result of the CNN model is shown in Figure 2.

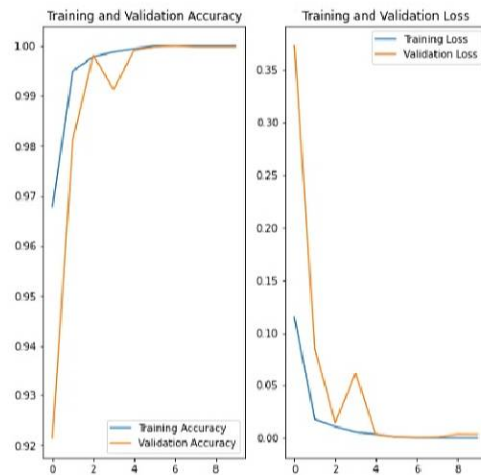


Figure 2. Accuracy and Loss functions value on the training and validation sets

5. Experimental results and discussion. Table 1 illustrates the results of applying the model to the test data set.

Table 1. Classification results of the proposed CNN model

True Classes	Predicted Classes	
	Malignant	Benign
Malignant	1431	2
Benign	1	1192

A saliency map of some images is shown in Figure 3, which allows us to estimate what each area contributes to the result of our model. Diagnostic medical characteristics obtained are as follows: sensitivity of CNN model determines the ability to identify breast cancer patients – 0.998; specificity determines the ability to identify patients with a benign breast mass – 0.999; predictability of a positive result – 0.999; predictability of a negative result – 0.998; accuracy – 0.999. Neural network model characteristics obtained are as follows: precision – 0.9989, recall – 0.9988. An analysis of the model’s quality revealed that the proposed

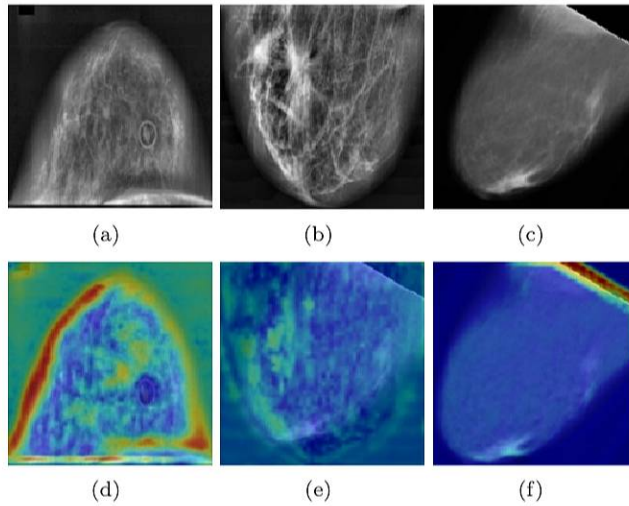


Figure 3. Example of initial mammograms (Malignant (a,b) and Benign (c)) and corresponding solidity maps (Malignant (d,e) and Benign (f))

CNN model classified benign and malignant images with a very high degree of accuracy.

6. Conclusion. This paper presents the architecture of an ultra-precise neural network for solving the problem of determining the oncology of a neoplasm by mammograms. The use of batch normalisation layers and dataset cache in our model helped overcome the problem of bottle neck, which is common in medical computer vision problems. Proposed CNN model showed outstanding results as the calculation of sensitivity, specificity, positive and negative values can show.

References

1. Bray F., Laversanne M., Weiderpass E. et al. The ever-increasing importance of cancer as a leading cause of premature death worldwide // Cancer. In press. 2021. Vol. 127. No 16. P. 3029–3030.
2. Sung H., Ferlay J., Siegel R. L. et al. Global cancer statistics 2020: GLOBOCAN estimates of incidence and mortality worldwide for 36

- cancers in 185 countries // *CA: A Cancer Journal for Clinicians*. 2021. Vol. 71. No 3. P. 209–249.
3. Girshick R., Donahue J., Darrell T. et al. Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation // *Proc. of the Int. Conf. IEEE on computer vision and pattern recognition*. 2014. P. 580–587.
 4. Carneiro G., Nascimento J., Bradley A. P. Unregistered multiview mammogram analysis with pre-trained deep learning models // *In International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*. 2015. P. 652–660.
 5. Agarwal R., Diaz O., Yap M. H. et al. Deep learning for mass detection in Full Field Digital Mammograms // *Comput. Biol. Med.* 2020. Vol. 121. P. 103–774.
 6. Bowyer K., Kopans D., Moore R. et al. The digital database for screening mammography // *Proc. of the 5th Int. Workshop on Digital Mammography*. 2001. P. 212–218.
 7. Heath M., Bowyer K., Kopans D. et al. Current status of the digital database for screening mammography in digital mammography // *Proc. of the 4th Int. Workshop on Digital Mammography*. 1998. P. 457–460.
 8. Lin T., Huang M.-L. Dataset of Breast mammography images with Masses // *Mendeley Data*. 2020. Vol. 5. [Internet resource]: URL:http://medicalresearch.inescporto.pt/breastresearch/index.php/Get_INbreast_Database (date: 02.09.21).
 9. Preet B., Sharma K. Classification of mammogram images by using CNN classifier // *Proc. of the Int. Conf. on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. 2016. P. 1743–2749.
 10. TensorFlow. [Internet resource]: URL:<https://www.tensorflow.org> (date: 02.09.21).
 11. Keras. [Internet resource]: URL:<https://keras.io> (date: 12.12.21).

UDC 614.39, 004.5

Kurniawati A. C. D.

Telemedicine during COVID-19 pandemic: a review of the literature

Recommended for publication by associate professor Goncharova A. B.

1. Introduction. Since the Coronavirus was first discovered in Wuhan, China, in December 2019, there has been a lockdown in almost all countries. In the health sector, telemedicine can reduce the spread of the virus because it can minimize the social distance between patients and healthcare provider. Telemedicine is a health service using information technology to exchange information, diagnosis, treatment, disease prevention, research, and evaluation to remove various obstacles in health services and improve health services to patients. With telemedicine Patients and doctors do not have to meet in person but can use a particular application to conduct consultations and health services [1, 2]. Telemedicine also provides opportunities to be beneficial, cost-efficient, and satisfactory for patients and provider [3].

In the UK and the US, telemedicine is actively promoted to reduce the risk of transmission from the COVID-19 virus [4]. In Vietnam, telehealth, which is part of telemedicine, has become a modern technology during the COVID-19 outbreak and effectively shortened the patient care [5]. A study conducted on patient satisfaction with endovascular neurosurgery consultations using telemedicine showed that patients agreed that telemedicine was considered the safest way to consult after they received treatment telemedicine [6]. Digital medical technology enables remote care and provides high-quality care for patients during the COVID-19 outbreak [7]. Telemedicine is becoming a new structure to help treat pediatric patients during the COVID-19 pandemic [8]. In St. Petersburg, the satisfaction rating of psychiatric outpatients with telemedicine services is very high. Most patients are ready to switch to telepsychiatric care, and telepsychiatry is proven to provide accessible outpatient care for psychiatric patients during the current COVID-19 pandemic [9].

Kurniawati Anastasia Cynthia Dewi – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st098657@student.spbu.ru; phone: +7(960)276-55-53

2. Methods. The method of this research uses the process of systematic literature review, where the technique of the literature review is used to identify, assess, and interpret all findings on a research topic, to answer the research question to guide this study, as seen in Figure 1 [10].

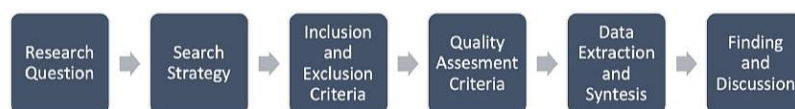


Figure 1. Method of study

The review protocol employed in this study depicts the review protocol, which comprises six activities: development of research questions, search strategies, inclusion and exclusion criteria, quality assessment criteria, data extraction, synthesis, and report findings and discussion.

2.1. Research question. Accordingly, this research aims to address the following research questions:

RQ 1: How is telemedicine being implemented during the pandemic COVID-19?

RQ 2: How has telemedicine affected healthcare during the COVID-19 pandemic?

RQ 3: How is patient satisfaction with telemedicine changing during the COVID-19 pandemic?

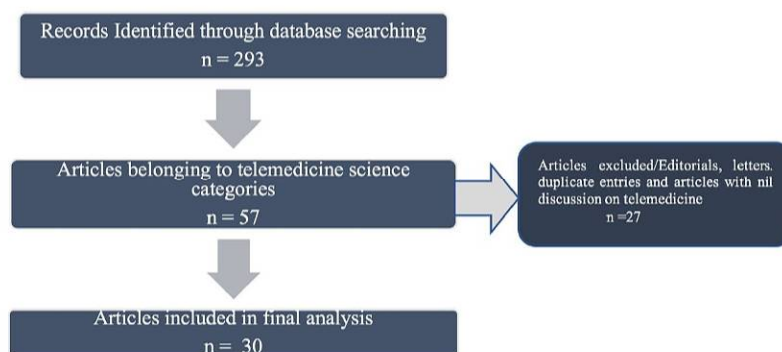


Figure 2. PRISMA Flowchart

2.2. Search strategy. We searched through the Scopus database; the search was carried out from January 2021 to December 2021 for the following specific keywords separated by the specified Boolean operators: (telemedicine or telehealth) and (COVID-19' or pandemic) in the title of the article. The refinement in this review study was conducted based on the Preferred. The search results retrieved 293 articles using the keywords mentioned above. Next, 236 studies were removed after confirming from the title and abstract that the papers were not associated with the research questions being explored, resulting in 57 and finally, 30 studies were selected based on inclusion and exclusion criteria mentioned. The Papers Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analysis (PRISMA) flowchart is presented in Figure 2.

2.3. Inclusion and exclusion criteria. Papers were eligible for inclusion if they were focused on the theme of telemedicine and telehealth during the COVID-19 pandemic. Articles were selected mainly from January 2021 to December 2021. Besides, the review included studies published as academic outlets, such as journals, conference proceedings, and document reports, books, and online sources were excluded from this review, as were papers not written in English [11].

2.4. Quality assessment criteria. A higher level of the rigor-ousness of studies is employed to check the quality of papers. To this end, a quality assessment checklist that evaluates if the selected articles were indexed in the Scopus database was used to assess the quality of the studies chosen [11].

2.5. Data extraction and synthesis. This review stage aims to synthesise and categorise the selected papers based on their scope of telemedicine and virtual software platforms during the COVID-19 pandemic. Thus, the selected studies were reviewed in detail, and relevant data were extracted, analysed, and synthesised to provide answers to the research questions (see Research questions section) [12].

3. Information search results. In accordance with the questions asked about the inclusion of literature in the review, the following sources were found.

3.1. The implementation of telemedicine during the pandemic COVID-19. The development of telemedicine has increased significantly during the pandemic COVID-19 [9,13,14]. Russia reported an increase of 6000 calls every day after the Department of Health of Moscow launched a service remotely via video call and voice call [15].

Other studies have shown that telemedicine indicates a reduction in disparity and an increase in access following the dramatically increased use of telemedicine in the wake of the COVID-19 pandemic [19]. Telemedicine application during the pandemic COVID-19 also positively impacts patients with type 2 DM where telemedicine can lower HbA1C with points of 1.66 the average, where patients in the previous study had Baseline HbA1c of about 10 in Saudi Arabia. Telemedicine helped with glycaemic control and has reduced the risk of exposure to infection by having a minimal number of visits [16]. Telemedicine also can improve patient safety, improve the quality and accessibility of services and support scalable and high-quality care during the COVID-19 pandemic [1, 12, 17, 19].

Telemedicine also has proved to have benefits on patient outcomes and provided valuable tools for care, treatment, and monitoring of patients with suspected or confirmed COVID-19 during the pandemic [18]. In Mumbai Telemedicine effectively helps patients guide their symptoms drug side effects, monitor results and ECG, and arrange to receive prescriptions without interruption [21]. In the UK, telemedicine is an effective alternative for providing neonatology prenatal consultations for pregnant women with a diagnosis of fetal anomalies during the pandemic [22].

3.2. Impact of telemedicine on health care during pandemic COVID-19. The use of the platform IntelliSpace PACS DCX solution on the radiology department in the region of Sakhalin IntelliSpace Portal is a single solution that combines tools such as specialised 3D processing tools, standalone workstations, remote access, and web viewers. This platform helps the clinical analyse and provide information, including a diagnostic room, using the PACS archive and remotely [15]. Telemedicine is an efficient way of care delivery because it can reduce the number of in-person visits. A study conducted in Verona, Wisconsin, in the United States reported an increase in the use of telemedicine during the COVID-19 pandemic and a decrease in outpatient visits. The use of telemedicine was considered compatible with the sexual medicine [23].

In Saudi Arabia, the use of telemedicine was able to reduce patient visits with type 2 diabetes during a pandemic where most patients (64%) needed only a few in-person visits, and only approximately (20%) required more frequent visits (i.e., four or more visits in a period of 4 months) [19]. Telemedicine is also helpful in identifying aspects of the neuro-ophthalmologic examination and provided enough information for medical decision-making. That could be improved with more

technologically-accessible methods, even though the Doctor stated that virtual health visits are limited by patient preparation, inability to perform certain aspects of examination (fundoscopy and pupil), and technological problems with connection to patient [24]. Telemedicine solutions to the anticipated lack of healthcare personnel and the National Health Service (NHS) vulnerability exposed by the COVID-19 pandemic [25]. According to other sources telemedicine minimizes the physical and geographic barrier of patient care and improve access to care, opening the opportunity for more patients to receive headache care from various levels of healthcare professionals, including headache medicine specialists and primary care clinicians [26].

3.3. Patient satisfaction with telemedicine during COVID-19 pandemic. Telemedicine has driven its rapid expansion during the COVID-19 pandemic. This represents an essential change in delivering healthcare. The patient satisfaction survey in neuro-ophthalmology during the COVID-19 pandemic reported that patients felt satisfied and comfortable at virtual neuro-ophthalmology visits. Virtual neuro-ophthalmology visits offer most patients appointments that satisfy their needs, and the majority of providers obtain adequate clinical information for the decision making [24].

The experience of patients with diabetes using home based TMTA (telemedicine and teleassistance) services during the COVID-19 pandemic in Italy also showed that 64% of patients expressed their willingness to continue using TMTA services even beyond the COVID-19 of the total sample of 569 patients [27]. These results are similar in the Netherlands. There was a positive response shown by patient satisfaction through telephone consultations, while the adoption of other forms of telemedicine in providing care for patient RMDs [28]. During the COVID-19 pandemic, the use of telemedicine also experienced an increase in patient satisfaction with the video visit experience [3, 18, 19, 23, 30–32]. Improved patient satisfaction based on several factors, including less travel, ease of scheduling, and time savings [33].

4. Conclusion. Telemedicine provides care with technology through personal proliferation computers, internet, mobile devices, and video conferencing software to provide care directly to the patient's home or other non-institutional [34]. This study shows that the effect of telemedicine during the COVID-19 pandemic has a positive impact. Telemedicine can improve the quality and accessibility of services and

support scalable and high-quality care during the COVID-19 pandemic. Telemedicine can also assist doctors in analysing and providing diagnoses in treatment. The use of telemedicine during the COVID-19 pandemic also gives satisfaction to patients, especially when doing teleconsultation. Telemedicine has numerous advantages but also has additional challenges with technology adaptation [34].

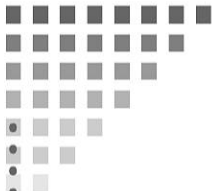
References

1. Wootton R. et al. Long-running telemedicine networks delivering humanitarian services: experience, performance and scientific output // *Bull World Health Organ.* 2012. Vol. 90. No 5. P. 341–347.
2. Goncharova A. B., Busko E. A. Software implementation for diagnostic decision-making based on multiparametric ultrasonography parameters of breast masses // *The Siberian Journal of Clinical and Experimental Medicine.* 2020. Vol. 35. No 4. P. 137–142.
3. Aashima A., Nanda M., Sharma R. A review of patient satisfaction and experience with telemedicine: a virtual solution during and beyond COVID-19 pandemic // *Telemed E-Health.* 2021. Vol. 27. No 12. P. 1325–1331.
4. Ohannessian R., Duong T. A., Odone A. Global telemedicine implementation and integration within health systems to fight the COVID-19 pandemic: a call to action // *JMIR Public Health Surveill.* 2020. Vol. 6. No 2. P. 1–12.
5. Nguyen N. H. et al. Using emerging telehealth technology as a future model in Vietnam during the COVID-19 pandemic: practical experience from Phutho general hospital // *JMIR Form. Res.* 2021. Vol. 5. No 6. P. 1–6.
6. Majmundar N. et al. Telemedicine for endovascular neurosurgery consultation during the COVID-19 era: patient satisfaction survey // *World Neurosurgery.* 2021. Vol. 158. P. e577–e582.
7. Smith A. C. et al. Telehealth for global emergencies: implications for coronavirus disease 2019 (COVID-19) // *Jornal Telemedicine Telecare.* 2020. Vol. 26. No 5. P. 309–313.

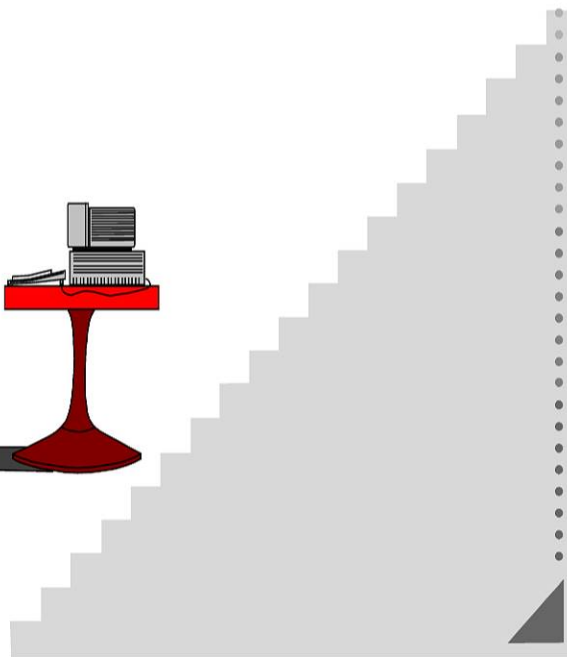
8. Tornese G. et al. The effect of the COVID-19 pandemic on telemedicine in pediatric diabetes centers in Italy: Results from a longitudinal survey // *Diabetes Research and Clinical Practice*. 2021. Vol. 179. P. 1–5.
9. Chumakov E. M., Azarova L. A., Limankin O. V. Telemedicine in psychiatric care in the community and its satisfaction by outpatients during the COVID-19 outbreak in St. Petersburg, Russia // *Vestnik St. Petersburg University Medicine*. 2021. Vol. 16. No 2. P. 106–115.
10. Kitchenham B., Charters S. M. Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering. Department of Computer Science University of Durham UK. 2007. 57 p.
11. Bokolo A. Jnr. Implications of telehealth and digital care solutions during COVID-19 pandemic: a qualitative literature review // *Informatika for Health and Social Care*. 2020. Vol. 46. No 1. P. 68–83.
12. Bokolo A. Jnr. Exploring the adoption of telemedicine and virtual software for care of outpatients during and after COVID-19 pandemic // *Irish Journal of Medical Science*. 2021. Vol. 190. No 1. P. 1–10.
13. Cui W., Finkelstein J. Impact of COVID-19 pandemic on use of telemedicine services in an academic medical center // *In Public Health and Informatics*. 2021. Vol. 258. P. 407–411.
14. Garg A. et al. Implementation of telemedicine in a tertiary hospital-based ambulatory practice in Detroit during the COVID-19 pandemic: Observational study // *JMIR Public Health Surveill*. 2021. Vol. 7. No 1. P. 1–10.
15. Gareev I. et al. The opportunities and challenges of telemedicine during COVID-19 pandemic // *Frontiers in Bioscience Elite*. 2021. Vol.13. No 2. P. 291–298.
16. Tourkmani A.M. et al. The impact of telemedicine on patients with uncontrolled type 2 diabetes mellitus during the COVID-19 pandemic in Saudi Arabia: Findings and implications // *Journal Telemedicine and Telecare*. 2021. Art. no 1357633X20985763.

17. Severini D. S. G. et al. Fast, cheap and feasible: Implementation of pediatric telemedicine in a public hospital during the Covid-19 pandemic // *Journal Pediatric*. 2021. Vol. 98. No 2. P. 183–189.
18. Fioretti A. C. et al. Effectiveness of telemedicine in response to the COVID-19 pandemic // *Rev Assoc Med Bras*. 2021. Vol. 67. No 10. P. 1427–1431.
19. Dekker P. K. et al. Telemedicine in the wake of the COVID-19 pandemic: Increasing access to surgical care // *Plastic Reconstuction Surgery Global Open*. 2021. Vol. 9. No 1. Art. no e3228.
20. Moura L. M. V. et al. Telemedicine can support measurable and high-quality epilepsy care during the COVID-19 pandemic // *American Journal of Medical Quality*. 2021. Vol. 36. No 1. P. 5–16.
21. Udwadia Z. et al. Effective use of telemedicine in Mumbai with a cohort of extensively drug-resistant XDR tuberculosis patients on bedaquiline during COVID-19 pandemic // *Lung India*. 2021. Vol. 38. No 1. P. 98–99.
22. Lapadula U. M. et al. Evaluating patients and neonatologists satisfaction with the use of telemedicine for neonatology prenatal consultations during the COVID-19 pandemic // *Frontiers in Pediatrics*. 2021. Vol. 9. P. 1–8.
23. Rabinowitz M. J. et al. The Impact of telemedicine on sexual medicine at a major academic center during the COVID-19 pandemic // *The Journal of Sexual Medicine*. 2021. Vol. 9. No 3. P. 1–8.
24. Conway J. et al. Telemedicine evaluations in neuro-ophthalmology during the COVID-19 pandemic: patient and physician surveys // *Journal of Neuro-Ophthalmology*. 2021. Vol. 41. No 3. P. 356–361.
25. Battineni G. et al. Are telemedicine systems effective healthcare solutions during the COVID-19 pandemic // *Journal of Taibah University Medical Sciences*. 2021. Vol. 16. No 3. P. 305–306.
26. Chiang C. C. et al. Patient experience of telemedicine for headache care during the COVID-19 pandemic: an american migraine foundation survey study // *The Journal of Head and Face*. 2021. Vol. 61. No 5. P. 734–739.

27. Maietti E. et al. The experience of patients with diabetes with the use of telemedicine and teleassistance services during the COVID-19 pandemic in Italy: factors associated with perceived quality and willingness to continue // *Diabetes Research and Clinical Practice*. 2021. Vol. 180. P. 1–9.
28. Bos W. H. et al. Telemedicine for patients with rheumatic and musculoskeletal diseases during the COVID-19 pandemic; a positive experience in the Netherlands // *Rheumatology International*. 2021. Vol. 41. No 3. P. 565–573.
29. Haxhihamza K. et al. Patient satisfaction with use of telemedicine in university clinic of psychiatry: Skopje, North Macedonia during COVID-19 Pandemic // *Telemedicine E-Health*. 2021. Vol. 27. No 4. P. 464–467.
30. Sathiyaraj A. et al. Patient satisfaction with telemedicine for prechemotherapy evaluation during the COVID-19 pandemic // *Future Oncology*. 2021. Vol. 17. No 13. P. 1593–1600.
31. Sharara A. et al. Patient perceptions on telemedicine eye clinics during COVID-19 pandemic // *Internal Journal Clinical Practice*. 2021. Vol. 75. No 11. P. 1–2.
32. Orrange S. et al. Patient satisfaction and trust in telemedicine during the COVID-19 pandemic: Retrospective observational study // *JMIR Human Factors*. 2021. Vol. 8. No 2. P. 1–12.
33. Ahmad F. et al. Patient perspectives on telemedicine during the COVID-19 pandemic // *American Association For Hand Surgery*. 2021. P. 1–5.
34. Holzman S. A. et al. Telemedicine and patient satisfaction during the COVID-19 pandemic: a casecontrol study of outpatient pediatric urology patients // *Journal Child Health Care*. 2021. Art. no 136749352111058272.



*4. Информационные
и компьютерные
технологии*



УДК 004.912

Андрейченко А. Г., Блеканов И. С.

Нейросетевые методы анализа мнений пользователей в дискуссиях социальных сетей

1. Введение. По данным Global Digital 2022 62,5% населения планеты Земля используют интернет, что составляет 4,95 млрд людей [1]. В тоже время 4,62 млрд из них являются пользователями социальных сетей. Такая популярность социальных сетей играет значительную роль для социологических, политических или психологических исследований, ведь каждый пользователь создает контент, который впоследствии можно анализировать. Научное направление Social Network Analysis исследует различные взаимосвязи пользователей социальных сетей, отношения пользователей к различным событиям, особенности генерации и семантического анализа пользовательского контента и т.п. В общем доступе есть множество работ в области анализа данных социальных сетей различной направленности [2, 3]. В настоящее время особо популярными задачами, относящимися к обработке естественного языка (Natural Language Processing, NLP) в контексте анализа социальных сетей, являются сентимент-анализ [4, 5] и детектирование фэйковых новостей [6]. Однако при решении задач анализа текстового контента пользователей возникает ряд проблем, которые влияют на качество используемых для решения задач методов NLP. К таким проблемам относятся зашумленность текстовых данных, короткие тексты, мультиязычность и разнообразность лингвистической стилистики текстового контента и др. Для решения указанных проблем применяются различные методы препроцессинга текстового контента (например, основанные на эмпирических, статистических и семантических текстовых характеристиках и связях между ними), позволяющие выделять наиболее полезную информацию в общем потоке текстовых данных пользователей и влиять на качество используемых методов NLP. Данная

Андрейченко Алёна Григорьевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st073575@student.spbu.ru, тел.: +7(951)655-85-36

Блеканов Иван Станиславович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.blekanov@spbu.ru, тел.: +7(921)339-53-43

Статья подготовлена при поддержке «Центра международных медиаисследований» СПбГУ, проект № 92564627

работа направлена на разработку и развитие нейросетевых методов предобработки пользовательского текстового контента для повышения качества интеллектуального анализа мнений пользователей в социальных сетях.

Выбранные методы основываются на мультязычных нейросетевых моделях, которые адаптированы для анализа текстов на русском языке, что обуславливается ограниченным количеством возможностей и исследований в русскоязычном сегменте. При этом на январь 2022 года 72,7% населения Российской Федерации являются пользователями социальных сетей [1].

2. Эксперимент. На сегодняшний день для задач NLP наиболее успешными и современными подходами являются нейросетевые методы на основе трансферного обучения [7]. Эффективность и распространенность таких методов возросли после представления компанией Google новой языковой модели *BERT* [8]. При использовании трансферного обучения нет необходимости обучать модель с нуля на больших корпусах данных, как в классических подходах машинного обучения, а только дообучить на целевых данных. Отсюда следует сокращение временных и вычислительных ресурсов, так как предварительно полученные данные используются повторно.

2.1. Постановка эксперимента. В работе поставлен эксперимент по оценке качества четырех моделей трансферного обучения, предобученных на мультязычных (включая русский язык) корпусах текстов, для задачи бинарной классификации мнений пользователей с помощью общепринятых метрик. Выбранные модели были настроены с помощью специальной процедуры (*fine-tune*) на целевых наборах данных для классификации новостей и комментариев.

2.1.1. Модели. Для эксперимента отбирались модели по нескольким критериям. Во-первых, эти модели являются методами трансферного обучения, т. е. уже предобучены на корпусе данных для некоторой задачи. Чаще всего модели обучены для задач предсказания следующего предложения и задачи *masked LM*, предсказание слова на месте маркера [MASK]. Во-вторых, модели поддерживают русский язык как основной или как один из набора возможных. Например, *Multilingual DistilBERT* [9] обучен на объединении страниц Википедии на 104 различных языках, включая русский, когда *DistilRuBERT Conversational* на OpenSubtitles, Dirty, Pikabu и сегменте Social Media корпуса Taiga. Слово *Distil* в названии означа-

ет, что модель дистиллированная, которую обучают воспроизводить поведение более крупной модели [9]. Дистиллированная модель компактнее и быстрее оригинальной. В-третьих, изначально по документации или некоторым исследованиям доказана высокая эффективность выбранных моделей для задач NLP и классификации текстов в частности [10, 11].

Все модели построены на концепции архитектуры трансформеров [12]. В архитектуре моделей *DistilRuBERT Conversational*, *RuBERT* [13] и *Multilingual DistilBERT* лежит представленная в 2018 году компанией Google языковая модель *BERT*. *DistilRuBERT Conversational* – это дистиллированная модель языка *RuBERT*, обученная на отличном от оригинала корпусе данных. *RuBERT* же обучен на русской части Википедии и новостных данных.

Модель *Multilingual USE* [14] встраивает предложения с использованием компонента кодировщика архитектуры трансформера. Эта модель схожа с *BERT* использованием двунаправленного внимания для вычисления контекстно-зависимых представлений токенов в предложении, с учетом как порядка, так и идентичности токенов [15].

2.1.2. Датасеты. Для оценки моделей в качестве целевых данных был составлен агрегированный датасет на основе следующих двух уже имеющихся в открытом доступе:

- первый датасет собран с новостного портала Газета.ru и опубликован в [16]. Для поставленной задачи были выделены заголовки новостей. В результате объем данного набора составил 70 тысяч уникальных заголовков;
- второй датасет [17] представлен набором комментариев с *Рiкaвu.ru* и *2ch.ru* для анализа токсичности текстов. В датасет были добавлены тексты комментариев, составляющие 14,5 тысяч уникальных значений.

В процессе агрегации в данные добавлен новый атрибут разметки – «News». Таким образом, получен агрегированный датасет для дообучения моделей, размеченный на два класса: «0» – комментарий пользователя, «1» – новость. В связи с ограничениями вычислительных ресурсов общий датасет был уменьшен до 10 000 сообщений и равномерно отбалансирован по количеству сообщений в каждом классе («Комментарий» и «Новость»). Полученный датасет был разделен на три части: обучающую (*train*), проверочную (*valid*) и

тестовую (*test*) в процентном соотношении 70, 20 и 10 соответственно. Обучение каждой модели проходило 6 эпох при оптимизаторе AdamW, входящего в пакет *transformers*.

2.1.3. Метрики. Для оценки качества и понимания эффективности настройки моделей в эксперименте использовались метрики *loss*, *accuracy*, *f1-мера*, *precision* и *recall*. Для расчета *accuracy* вычислялось отношение количества верно предсказанных классов к общему объему набора *train* или *valid*, а при определении *loss* использовалась функция `torch.nn.CrossEntropyLoss()` со следующей формулой:

$$L = 1/N \sum_{j=1}^N [t_j \log(p_j) + (1 - t_j) \log(1 - p_j)],$$

где t_j – значение истинности, 0 или 1, а p_j – вероятность для j -й точки. Метрика:

$$precision = TP / (TP + FP),$$

где *TP* (*True Positive*) – количество верно определенных значений класса Positive, *FP* (*False Positive*) – количество значений, ошибочно отнесенных к классу Positive. Следующая метрика:

$$recall = TP / (TP + FN),$$

где *FN* – количество ошибок вида *False Negative*. *F1-мера* вычисляется по формуле:

$$f1 = (2 \cdot precision \cdot recall) / (precision + recall).$$

2.2. Результаты эксперимента. Так как модели отобраны таким образом, что все изначально обучались на русском языке, необходимо изучить эффективность их настройки. В таблице 1 представлены значения метрик до настройки (*fine-tuning*): *recall*, *precision*, *f1-мера*, *loss* и *accuracy*.

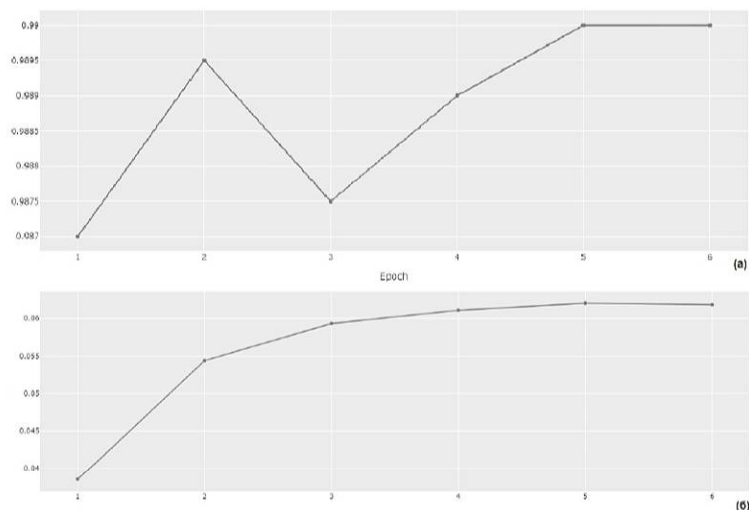


Рис. 1. Зависимость а) *accracy* и б) *loss* от эпохи настройки *DistilRuBERT* на наборе данных *valid*

Таблица 1. Значения метрик качества моделей до настройки

	DistilRuBERT	DistilBERT	RuBERT	USE
recall	0,63639	0,49904	0,31867	0,49104
precision	0,64956	0,26126	0,31867	0,48925
f1-мера	0,63197	0,34297	0,318	0,46793
loss	0,68306	0,69758	0,73664	0,7040
accuracy	0,6205	0,511	0,309	0,4710

Таблица 2. Значения метрик качества моделей после настройки

	DistilRuBERT	DistilBERT	RuBERT	USE
recall	0,98797	0,98329	0,98014	0,97689
precision	0,98797	0,98276	0,97982	0,97733
f1-мера	0,98797	0,98297	0,97996	0,97699
loss	0,05226	0,09870	0,06161	0,0763
accuracy	0,9905	0,984	0,9855	0,9750

В таблице 2 представлены значения качественных метрик после 6 эпох работы алгоритмов при одинаковых наборах данных *train* и *valid*. При сравнении таблиц 1, 2 отмечается эффективность процедуры fine-tuning для каждой модели.

На рис. 1 представлены графики изменения качества классификации по эпохам для модели *DistilRuBERT Conversational*. Изначальные показатели модели достаточно успешны, что видно и в таблице 1.

На рис. 2 показаны изменения в качестве классификации моделью *Multilingual USE*.

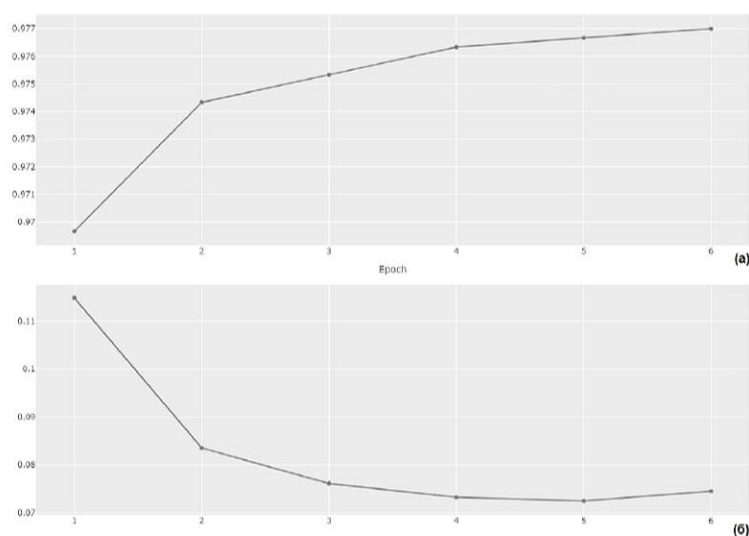


Рис. 2. Зависимость а) *accrasy* и б) *loss* от эпохи настройки *USE* на наборе данных *valid*

Модель *Multilingual DistilBERT* после настройки имеет наибольшее значение функции *loss*. Подробности обучения данной модели представлены на рис. 3.

Результаты настройки языковой модели *RuBERT* показаны на рис. 4 для каждой эпохи. Если по показателям *loss* и *accrasy* *RuBERT* превосходит *Multilingual DistilBERT*, то по метрикам *recall*, *precision* и *f1*-мера в таблице 2 *DistilBERT* демонстрирует значения выше.

2.3. Выводы. Результаты эксперимента показывают, что все исследуемые модели имеют приемлемые показатели *loss* и *accrasy*. В таблице 1 в среднем лучшие показатели у модели *DistilRuBERT*

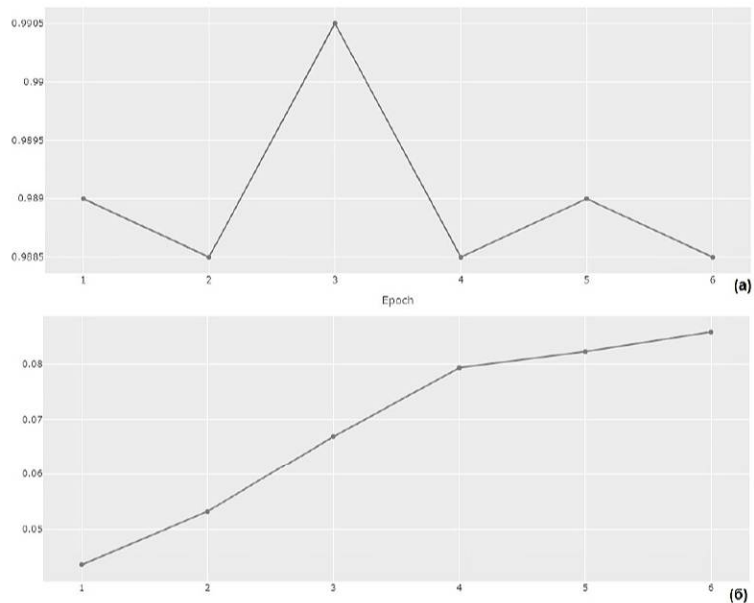


Рис. 3. Зависимость а) accuracy и б) loss от эпохи настройки *DistilBERT* на наборе данных *valid*

Conversational. На данный факт могли повлиять несколько факторов. Во-первых, *DistilRuBERT* непосредственно разработан для русского языка, что теоретически повышает его эффективность. Во-вторых, данные датасета комментариев [17] имеют отличительные особенности, такие как сленг, просторечие и мат, что также свойственно корпусам, на которых обучалась данная модель. По завершению дообучения моделей лучшие показатели также показывает модель *DistilRuBERT Conversational*, но каждая модель по показателям точности и качества классификации близка к наилучшему результату.

RuBERT является моделью русского языка, как и *DistilRuBERT Conversational*, но показатели ее работы хуже до настройки и после. При этом *Multilingual DistilBERT* и *Multilingual USE* показывают

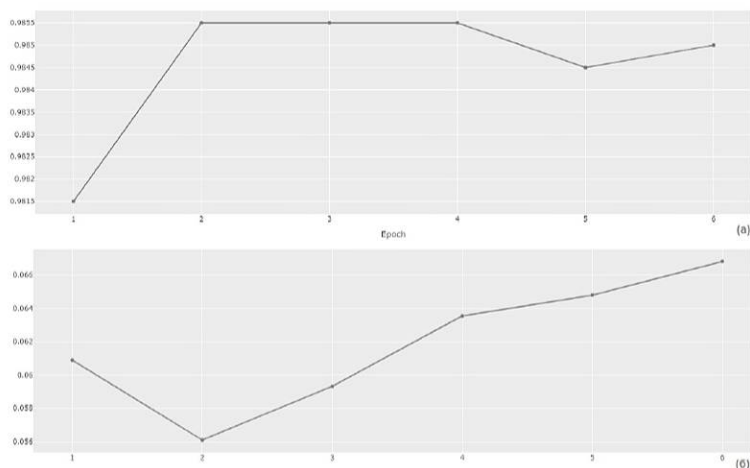


Рис. 4. Зависимость а) *accuracy* и б) *loss* от эпохи настройки *RuBERT* на наборе данных *valid*

результаты лучше до дообучения, чем *RuBERT*. После настройки моделей значения метрик для данных моделей близки.

Таким образом, эксперимент показал, что на данный момент имеются модели трансферного обучения, готовые к решению задачи классификации русских текстов с высокими показателями эффективности.

3. Заключение. Эксперимент демонстрирует эффективность применения нейросетевых методов в задаче классификации пользовательского контента на новость и комментарий для русского языка. Лучшим подходом решения задачи по результатам является *DistilRuBERT Conversational*. Во время эксперимента не было отмечено явной связи эффективности модели с моно- или мультязычностью, так как модель *RuBERT* изначально показала качество хуже мультязычных моделей, а после настройки показала близкий к ним результат.

В дальнейшем планируется расширить эксперимент и применить полученные методы на реальной пользовательской дискуссии в соци-

альной сети ВКонтакте. Кроме того, целесообразно оценить эффективность использования полученных методов в качестве процедуры предобработки пользовательского контента, например, в задачах сентимен-анализа.

Литература

1. Digital 2022: global overview report // Datareporter. 2022. [Электронный ресурс]: URL:<https://datareportal.com/reports/digital-2022-global-overview-report> (дата обращения: 01.03.2022).
2. Blekanov I., Krylatov A., Ivanov D., Bubnova Y. Big Data analysis in social networks for managing risks in clothing industry // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52. No 13. P. 1710–1714.
3. Blekanov I. S., Tarasov N., Maksimov A., Bodrunova S. S. Transformer-based abstractive summarization for Reddit and Twitter: single posts vs. comment pools in three languages // Future Internet. 2022. Vol. 14. No 3. Art. no 69.
4. Su S., Blekanov I. Neural network methods for messages analysis in user discussions on YouTube // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 372–376.
5. Ненашев М. Д. Анализ тональности новостных статей // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 326–330.
6. Ahn Y., Jeong C. Natural language contents evaluation system for detecting fake news using deep learning // 16th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE). 2019. P. 289–292.
7. Malte A., Ratadiya P. Evolution of transfer learning in natural language processing [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1910.07370> (дата обращения: 10.03.2022).
8. Devlin J., Chang M.-W., Lee K., Toutanova K. BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1810.04805> (дата обращения: 15.12.2021).

9. Sanh V., Debut L., Chaumond J., Wolf T. DistilBERT, a distilled version of BERT: smaller, faster, cheaper and lighter [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1910.01108> (дата обращения: 15.12.2021).
10. Guven Z. A. Comparison of BERT models and machine learning methods for sentiment analysis on turkish tweets // 6th International Conference on Computer Science and Engineering (UBMK). 2021. P. 98–101.
11. Wu W., Wang H., Liu T., Ma S. Phrase-level self-attention networks for universal sentence encoding // Proceedings of the 2018 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2018. P. 3729–3738.
12. Wang C., Li M., Smola A. J. Language models with transformers [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1904.09408> (дата обращения: 20.02.2022).
13. Kuratov Y., Arkhipov M. Adaptation of deep bidirectional multilingual transformers for russian language [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1905.07213> (дата обращения: 20.11.2021).
14. Cer D. et al. Universal sentence encoder [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1803.11175> (дата обращения: 02.02.2022).
15. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. et al. Attention is all you need // Advances in neural information processing systems. Vol. 30. 2017. P. 5998–6008.
16. Gusev I. Dataset for automatic summarization of russian news // Hugging Face. 2020. [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co/datasets/IlyaGusev/gazeta> (дата обращения: 26.11.2021).
17. Toxic russian comments from Pikabu and 2ch // Kaggle. 2020. [Электронный ресурс]: URL:<https://www.kaggle.com/aybatov/toxic-russian-comments-frompikabu-and-2ch> (дата обращения: 26.11.2021).

УДК 004.942

Балыкин А. Ф.

Моделирование динамических характеристик аналоговых аудио компрессоров с использованием рекуррентных нейронных сетей

Рекомендовано к публикации доцентом Блекановым И. С.

1. Введение. Одним из основных инструментов для работы со звуком, наряду с эквалазацией, является компрессия. Компрессия звука – преобразование сигнала, которое сужает его динамический диапазон, подавляя всплески громкости, делая громкие звуки тише. Существует множество вариантов реализации аудио компрессоров, но каждый из них использует следующие основные параметры [1]:

- **Threshold (dB)** – порог срабатывания компрессора, если сигнал по громкости превосходит данный порог, тогда компрессор начинает работать и делает сигнал тише;
- **Ratio (n:1)** – коэффициент ослабления громкости. Все, что выше значения **Threshold**, уменьшится в n раз. В большинстве компрессоров допускается параметр $n = \infty$, такая компрессия называется лимитированием;
- **Attack (ms)** – время, которое компрессор ждет, прежде чем начать ослаблять сигнал при превышении им заданного порогового значения;
- **Release (ms)** – время, в течение которого компрессор продолжает работать, после того, как сигнал стал ниже порогового значения.

Аналоговые аудио компрессоры, построенные на транзисторной или ламповой светотехнике, на протяжении долгого времени использовались для задач телерадиовещания, производства аудио контента и звукорежиссуры. Такие приборы обладают уникальными характеристиками и окрасом звучания, но имеют высокую стоимость из-за дороговизны компонентов [2].

Балыкин Андрей Федорович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: 4antii@gmail.com, тел.: +7(961)711-00-06

После бурного развития вычислительной техники и персональных компьютеров, большинство аудио записывается в цифровые рабочие станции (DAW), поэтому существует большой спрос на правдоподобные цифровые эмуляции аналоговых компрессоров, которые позволяют записывать звук без дорогостоящих вложений в оборудование.

У компьютерных моделей имеется ряд неоспоримых преимуществ, по сравнению с аналоговым оборудованием. Так как цифровые модели ограничены только вычислительными мощностями ПК, можно использовать множество таких экземпляров одновременно, без траты средств на покупку и поиска свободного места на установку дополнительного аналогового оборудования.

Данная работа относится к научной области на стыке цифровой обработки сигналов, теории управления и вычислительной математики, которая ставит своей целью разработку методов программного эмулирования данного оборудования и называется Virtual Analog Modeling [3]. Метод, рассмотренный в данной работе, можно отнести к методам «черного ящика».

2. Постановка задачи. Процесс работы какого-либо аналогового устройства с произвольным входом x можно представить как непрерывное отображение $f(x) : R \rightarrow R$ для приборов работающих в моно, $f(x) : R \rightarrow R^2$ для расширяющих приборов (реверб или дилэй) или $f(x) : R^2 \rightarrow R^2$ для стереоприборов в случае, если устройство имеет только одно состояние. Если устройство имеет вектор параметров ϕ из множества параметров P , тогда имеем отображение $f(x, \phi) : R^2 \times P \rightarrow R^2$ в случае стерео.

В самом общем смысле можно поставить задачу поиска дискретной функции $g(n)$, которая равна $f(n)$ на всем наборе входных данных:

$$g(\phi, n) = f(\phi, n) \quad \forall \phi, n. \quad (1)$$

Однако на практике не удастся построить модель, выполняющую равенство (1), поэтому требуется применять функцию потерь, по значениям которой можно определить, насколько хорошо построенная модель справляется с эмуляцией физического устройства. Пусть $y = f(\phi, x)$ и $\hat{y} = g(\phi, x)$ для заранее фиксированного x . Задача в общем случае может ставиться как:

$$L(x, \phi, y, \hat{y}) \rightarrow \min.$$

При построении модели, одной из наиболее сложных проблем является работа с высокой частотой дискретизации. Некоторые приборы и эффекты, такие как, например, гитарные усилители [4], нелинейные фильтры или педали дисторшена, могут быть смоделированы с помощью уже разработанных моделей, использующих расширенную свертку, чувствительность которой может достигать 2048 сэмплов [5]. Однако, при частоте дискретизации 44100 сэмплов в секунду, для моделирования параметра Release компрессора, который может быть равен 3 секундам потребуется расширенная свертка с чувствительностью 132300 сэмплов, что затрудняет применение подобных моделей к задачам компрессии.

Используя тот факт, что заранее известен алгоритм работы компрессора, можно построить модель специальной структуры, разделяя исходную, более сложную задачу, на несколько более простых подзадач:

- прогнозирование изменения громкости сигнала;
- применение спрогнозированной громкости к сигналу;
- изменение амплитудно-частотных характеристик и моделирование гармонических искажений с помощью актуальных для этого моделей.

Таким образом, можно сформировать суперпозицию из моделей, в которой каждая модель должна решать только свою задачу. Это упрощает отладку, поскольку можно тестировать и оптимизировать каждый модуль по отдельности, что значительно проще отладки всей сети целиком. Данная работа фокусируется на первых двух подзадачах.

В качестве первой подзадачи было выбрано построение модели, способной по входной громкости и настроек компрессора предсказывать динамику сигнала на выходе. Для этого звук разбивается на буферы и для каждого буфера подсчитывается входное и выходное среднеквадратичное значение (RMS).

В качестве второй подзадачи была выбрана разработка алгоритма приведения громкости оригинального сигнала к предсказанному значению (gain matching). Таким образом, можно получить систему моделирования динамических характеристик аналоговых аудио компрессоров, которая при этом значительно не влияет на амплитудно-частотную характеристику сигнала.

3. Алгоритм решения. Исходя из поставленной задачи, аудио разбивается на буферы, например, по 64 сэмпла, в которых считается только два RMS-значения сигнала для левого и правого входного канала, вследствие этого исходная задача сильно упрощается. В самом деле, вместо того чтобы предсказывать каждый сэмпл, на частоте дискретизации в 44100 сэмплов в секунду, данной модели нужно предсказывать только 690 значений громкости буферов в секунду.

Плюсы такого подхода заключаются в снижении размерности исходной задачи, получении возможности применения классических и уже известных методов для обучения модели. Поскольку такое обучение будет происходить быстрее, появляется теоретическая возможность использовать эту модель в режиме реального времени в качестве плагина для цифровых аудио станций (DAW).

Для моделирования динамической работы компрессора была выбрана архитектура, состоящая из двух последовательных моделей: LSTM и MLP (Multilayer Perceptron). Исходные буферы собираются в последовательности, к каждому элементу которой добавляются значения параметров Attack и Release компрессора. Далее такие последовательности собираются в батчи и поступают на вход LSTM-сети.

Сеть Long-Short Term Memory (LSTM) способна улавливать закономерности на длительных промежутках времени, генерируя вектор скрытых представлений h_t в соответствии с формулами [6].

$$\begin{aligned} i_t &= \sigma(W_{ii}x_t + b_{ii} + W_{hi}h_{t-1} + b_{hi}), \\ f_t &= \sigma(W_{if}x_t + b_{if} + W_{hf}h_{t-1} + b_{hf}), \\ g_t &= \text{th}(W_{ig}x_t + b_{ig} + W_{hg}h_{t-1} + b_{hg}), \\ o_t &= \sigma(W_{io}x_t + b_{io} + W_{ho}h_{t-1} + b_{ho}), \\ c_t &= f_t \otimes c_{t-1} + i_t \otimes g_t, \\ h_t &= o_t \otimes \text{th}(c_t). \end{aligned}$$

Чтобы получить конечный результат из полученного вектора h_t для каждого элемента последовательности, требуется пропустить его через несколько слоев перцептрона с функцией активации ReLU. Выходные RMS-значения для каждого канала получаются путем активации через MLP скрытого временного представления, которое запоминается между соседними вызовами сети (stateful LSTM). Архитектура модели представлена на рис. 1.

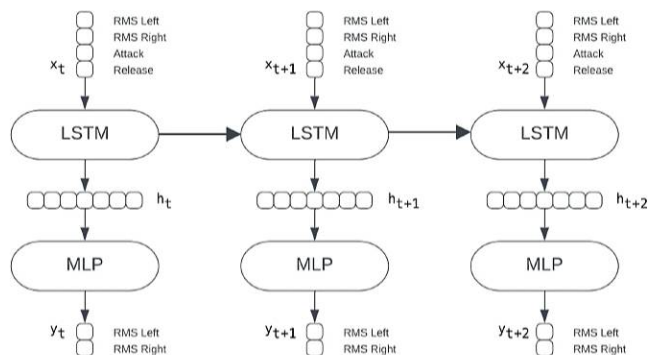


Рис. 1. Архитектура используемой сети

После предсказания значений громкости, оригинальный сигнал на каждом окне приводится к полученным значениям громкости. Коэффициент ослабления сигнала равен отношению RMS-значений на входе и выходе:

$$c = \frac{\text{RMS}_{out}}{\text{RMS}_{inp}}.$$

С использованием вектора таких коэффициентов строится огибающая громкости (*envelope*), получающаяся путем интерполяции промежуточных значений между сэмплами окон по переменной x и коэффициентами ослабления y [8]. При слишком быстром управлении громкости может возникнуть эффект модулированного дисторшена, что негативно влияет на качество звука. Чтобы избежать этого, к огибающей громкости может быть применен фильтр низких частот для сглаживания сигнала. В качестве такого фильтра был выбран фильтр Савицкого–Голея.

После этого огибающая применяется к сигналу путем скалярного произведения огибающей на значения сигнала в каждой точке:

$$y_{comp} = y_{orig} \cdot envelope.$$

В качестве функции потерь при обучении модели используется MSE (Mean Squared Error), которая оптимизируется с помощью алгоритма ADAM. Для оценки работы алгоритма предложено использовать несколько критериев: MAE (Mean Absolute Error), Integrated RMS (на всем файле), Integrated LUFs (Loudness Unit Full Scale). Параметры модели перечислены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры модели

№ Название параметра	Значение параметра
Окно разбиения (window)	64 сэмплов
Длина последовательности (seq_len)	128 окон
Размерность LSTM сети (hidden_dim)	1024 переменных
Количество слоев LSTM сети (n_layers)	3 слоя
Размер батча (batch_size)	256 элементов
Коэффициент скорости обучения	10^{-5}

4. Эксперимент. В качестве аналогового компрессора для моделирования был выбран компрессор Alesis 3630, поскольку он является распространенной и доступной моделью. Для предусиления и оцифровки сигнала был использован аудио интерфейс SSL 2+ с установленной частотой дискретизации 44100 сэмплов в секунду.

Компрессор Alesis 3630 имеет отдельную обработку каналов, на каждом канале настраивается определенный набор параметров: Threshold, Attack, Release, Ratio, Output и два переключателя режима Knee и детектора. Все ручки параметров сделаны в виде потенциометров и количество их значений непрерывно.

При этом, если сосчитать количество всех возможных положений ручек по нарисованным на корпусе меткам, то получится ≈ 4200 вариантов. Учитывая длину аудио файла в 7 минут, для снятия такого датасета ушло бы 490 часов реального времени. В связи с этим было принято решение оставить свободными только два параметра Attack и Release, а остальные зафиксировать. Таким образом, датасет представляет собой 25 аудио файлов с разными настройками рассматриваемых параметров, каждый из которых разделен на тестовую и тренировочную выборку в соотношении 1 к 6 соответственно.

Обучение проводилось с использованием сервиса Google Colab на видеокarte Tesla k80 и заняло около 40 часов. При этом инференс данной модели на 7-минутном аудио файле выполняется меньше чем за 2 минуты, что может свидетельствовать о том, что такая модель

может быть имплементирована в виде плагина для работы в режиме реального времени. Задержка в реальном времени для такой сети будет составлять 185 миллисекунд, поскольку на вход сети подается последовательность из 128 элементов по 64 сэмпла на окно. Все параметры датасета приведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры датасета

№	Название параметра	Значения параметров
	Attack	0.1, 5, 50, 150, 200 ms
	Release	50, 150, 500, 2000, 3000 ms
	Threshold	-10dB
	Ratio	2:1
	Output	0dB
	Knee	Hard
	Detector	Peak

5. Результаты эксперимента. В качестве основного результата данной работы была построена и обучена модель, которая компрессирует выбранный аудио файл в соответствии с заданными параметрами. Для теста берется случайный элемент тестовой выборки и извлекается левый канал выхода модели. Сравнение выхода нейронной сети с тестовыми данными продемонстрировано на рис. 2.

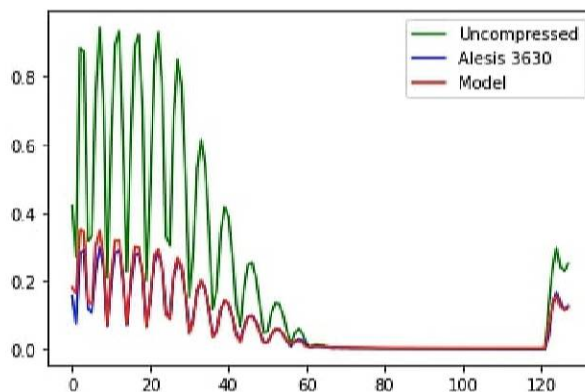


Рис. 2. Результат предсказания громкости на тестовой выборке. По оси x обозначены окна, а по оси y – RMS-значения

Выход нейронной сети отправляется на вход алгоритма подавления громкости, который производит интерполяцию огибающей громкости и ее фильтрацию. Сравнение подавления громкости с использованием фильтра и без него показано на рис. 3. Сравнение выхода модели и оригинального прибора предоставлены на рис. 4, результаты в таблице 3.

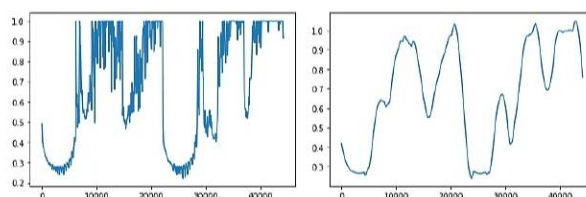


Рис. 3. Сравнение алгоритма подавления громкости до и после интерполяции. По оси x обозначены отсчеты, а по оси y – коэффициент подавления

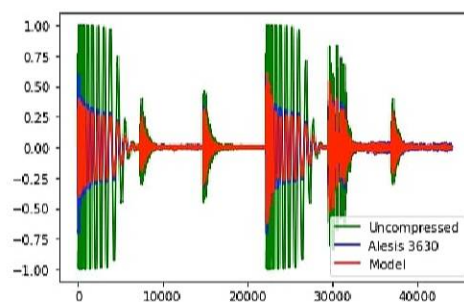


Рис. 4. Сравнения волновых форм модели с оригиналом. По оси x обозначены отсчеты, а по оси y – значения амплитуды сигнала

Таблица 3. Результаты работы модели

Attack	Release	MAE	RMS	LUFs
0,1	50	0,018125	0,046887	1,8
0,1	150	0,018897	0,048589	1,7
5	50	0,020094	0,049210	0,9
5	150	0,019580	0,049646	1,7

6. Заключение. Предложен альтернативный подход к моделированию приборов динамической обработки аудио, который заключается в построении нейронной сети, способной предсказывать громкость, и разработки алгоритма применения предсказания к сигналу. Поставлен эксперимент, результатами которого являются датасет, снятый с аналогового прибора, и обученная модель, протестированная и адекватно работающая на тестовых данных. Также разработан алгоритм применения прогноза громкости на окнах к сигналу, который включает в себя применение интерполяционных методов и фильтров. В дальнейшем, планируется решить третью из поставленных подзадач.

Литература

1. Компрессия звука: основные параметры и их практическое применение [Электронный ресурс]: URL:<https://waveforum.ru/biblioteka/kompressiya-zvuka#robochka> (дата обращения: 10.03.22).
2. Компрессия – Wikisound [Электронный ресурс]: URL:<http://wikisound.org/compression> (дата обращения: 10.03.22).
3. William P. C. Designing audio effect plugins in C++ : for AAX, AU, and VST3 with DSP theory. New York: Focal Press, 2019. 654 p.
4. Wright A. D., Damskägg E.-P. D., Välimäki V. D. Real-time guitar amplifier emulation with deep learning // Applied Sciences. 2020. Vol. 10. No 3. Art. no 766.
5. Oord A., Dieleman S. Wavenet: A generative model for raw audio // arXiv:1609.03499. 2016. P. 1–15.
6. LSTM – PyTorch 1.11.0 Documentation [Электронный ресурс]: URL:<https://pytorch.org/docs/stable/generated/torch.nn.LSTM.html> (дата обращения: 11.03.22).
7. Steinmetz C., Reiss J. Efficient neural networks for real-time analog audio effect modeling // arXiv:2102.06200. 2021. P. 1–8.
8. Reiss J. D., McPherson A. P. Audio Effects Theory, Implementation and Application. New York: CRC Press, 2015. 338 p.

УДК 51-7

Бевз Р. Ю.

Математическое моделирование формирования спроса на рынке контейнерных грузовых железнодорожных перевозок

Рекомендовано к публикации доцентом Балыкиной Ю. Е.

Введение. Методы математического моделирования являются мощным инструментом для анализа множества макроэкономических показателей и факторов в отрасли железнодорожных контейнерных перевозок в России. Они дают возможность построить прогнозные модели потребности в перевозках и найти оценки влияния показателей на рассматриваемые факторы для принятия оптимальных решений компанией в менеджменте.

Постановка задачи. Цель данной работы – предложить идеологию математического моделирования применительно к задачам области формирования спроса в грузовых контейнерных перевозках. Для достижения поставленной цели определены следующие задачи: а) анализ рынка, выявление сущностей и построение информационно-логической модели; б) сбор, обработка и анализ данных; в) статистический инфлюентный анализ выявленных показателей.

Анализ рынка контейнерных перевозок. Рассмотрены основные принципы рынка железнодорожных контейнерных перевозок в России. Во-первых, для России применима диаграмма взаимоотношений участников на рынке, представленная на рис. 1. В частном случае эта диаграмма представляет собой так называемую схему триангуляции. В целом общая динамика объемов перевезенных грузов контейнерами за последние годы положительна по всей номенклатуре [1].

Во-вторых, были изучены принципы соотношения спроса и предложения на соответствующие транспортные услуги в России. Основные факторы, влияющие на формирование внутрирегионального спроса, можно сгруппировать в следующие категории [2]:

Бевз Роман Юрьевич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: maxysmart14@gmail.com, тел.: +7(914)666-00-06

1. Экономические факторы, определяющие типы и количество производимых грузов, а также места производства и потребления этих грузов.
2. Логистические факторы, определяющие как отрасли и отдельные фирмы получают, производят, направляют и продают свою продукцию.
3. Транспортные факторы, влияющие на то, как удовлетворяется спрос на грузоперевозки.
4. Политические факторы, регулирующие уровни экономики, логистики и транспорта.

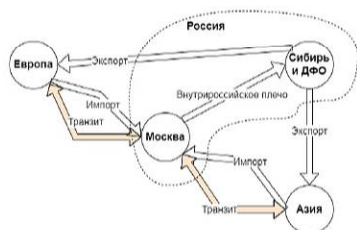


Рис. 1. Диаграмма железнодорожных контейнерных перевозок

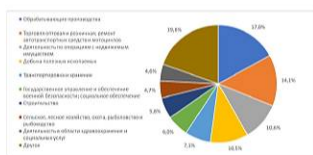


Рис. 2. Структура ВРП Российской Федерации в 2020 г.

В качестве иллюстрации, на рис. 2 приведены данные Росстата, отражающие доли отраслей, формировавших величину внутреннего регионального продукта в 2020 году.

Можно сделать вывод, что на внутреннем рынке России в целом имеется положительная динамика грузевого контейнерного транспорта, следовательно, спрос на их перевозку является эластичным.

На основе вышеизложенного была составлена информационно-логическая модель, отражающая структуру рынка железнодорожных контейнерных перевозок в России (рис. 3). Данное описание позволяет рассмотреть рынок как систему взаимосвязанных факторов. На основе данного анализа сформулирована задача математического моделирования – сбор и обработка данных.

Сбор и обработка данных. В настоящее время статистика о деятельности транспортных компаний и отрасли в целом агрегируется в неструктурированных базах данных или в простых массивах

данных (OLAP-кубы или сводные таблицы). Потому необходимо использовать методы интеллектуального анализа таких данных – Data

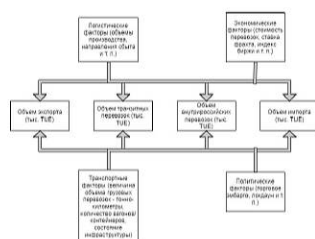


Рис. 3.
Информационно-логическая модель рынка

mining. Далее следует воспользоваться методами представления информации с помощью технологий Business Intelligence (BI).

Необходимо также определить набор наиболее значимых параметров для будущей математической модели. На примере работ [3,4] были выделены следующие важные методики: метод главных компонент (Principal component analysis, PCA); метод классификации на основе ABC-анализа; экспертные оценки.

Таблица 1. Объясняющие переменные

X	Описание
x_1	Объем отрасли торговли (млн руб.)
x_2	Объем отрасли автомобилестроения (млн руб.)
x_3	Объем производства отрасли сельского хозяйства (млн тонн)
x_4	Объем производства отрасли химической промышленности (млн тонн)
x_5	Объем производства пиломатериалов (млн тонн)
x_6	Величина ВВП (млн руб.)
x_7	Ставка фрахта на морские перевозки по данным портовых индексов (млн руб.)
x_8	Таможенные пошлины (млн руб.)

Таблица 2. Объясняемые переменные

Y	Описание
y_1	Годовой объем контейнерных перевозок (тыс. TUE)
y_2	Общий объем импорта из стран Азии и Европы, (тыс. TUE)
y_3	Общий объем экспорта из России (тыс. TUE)
y_4	Общий объем транзитных перевозок (тыс. TUE)
y_5	Общий объем внутрироссийских перевозок (тыс. TUE)

Таким образом, на основе проведенного фундаментального анализа, в основу математической модели взяты следующие факторы X (таблица 1) и объясняемые переменные Y (таблица 2).

Представим основные зависимости показателей следующим образом:

$$\begin{aligned} y_2 = x_1 + x_2, \quad y_3 = \sum_{i=3}^5 x_i, \quad y_4 = x_7 + x_8, \\ y_5 = \sum_{i=1}^8 x_i, \quad y_1 = \sum_{i=2}^5 y_i. \end{aligned} \quad (1)$$

При составлении математической модели количественные параметры рассматриваются как случайные величины. Соответственно, возникает задача в определении оценки степени влияния изменения экзогенных факторов на эндогенные. Для решения данной проблемы предлагается методология инфлюентного анализа, основанная на регрессионном факторном анализе.

Математическая модель. Имеется заданная выборка плановых и фактических значений результирующего показателя y и выбранной совокупности факторов x_1, \dots, x_n , т. е. y^0, x^0, y^1, x^1 , где $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ – это плановые и фактические значения факторов x_1, \dots, x_n . Построим, соответственно, две регрессионные модели $y_0 = f_0(x_1, \dots, x_n)$ и $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$. Необходимо найти оценки влияния изменений значений факторов x_i на отклонение значений результирующего показателя y , а именно, найти оценки $A_{x_i}^f$ влияния факторов x_i на отклонение $\Delta f = f_1^1 - f_0^0$ регрессионных значений f_1^1 и f_0^0 результирующего показателя y .

Следовательно, необходимо выполнение равенства

$$\Delta f = f_1(x_1^1, \dots, x_n^1) - f_0(x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_{i=1}^n (A_{x_i}^f + A_{ost}^f + \delta y),$$

где A_{ost}^f – регрессионная оценка влияния неучтенных факторов, $A_{x_i}^f$ – регрессионные оценки влияния факторов x_i на отклонение $\Delta y = y_1^1 - y_0^0$ значений результирующего показателя y ; δy – девиация значений Δy [5]. Оценки A_{ost}^f и $A_{x_i}^f$ называются *инфлюентами*.

Для нахождения инфлюент применительно к данной задаче, используется композиционная факторная модель регрессии. Она имеет следующий вид:

$$y = f(x_1, \dots, x_n | \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\alpha_j f_j(x_j)),$$

где $f_j(x_j) = \alpha_{0j} + \sum_{m=1}^n (\alpha_{mj} x_j^m)$ – однофакторные кривые регрессии y по x_j с соответствующими коэффициентами, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор неотрицательных параметров, находящихся из условия минимизации остаточной дисперсии. Следовательно, инфлюенты находятся в виде

$$A_{x_j}^{f_j} = [f_j^1(x_j^1) - f_j^0(x_j^0)] - (a_{0j}^1 - a_{0j}^0).$$

При этом для изменения Δy (отклонения фактического значения y^1 от планового y^0) должно выполняться следующее равенство [6]:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}^f.$$

После нахождения инфлюент, для выражения $y_5 = \sum_{i=1}^8 x_i$ из системы уравнений (1) получим равенство

$$\Delta y = \sum_{j=1}^8 \Delta y(x_j),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta y(x_j) &= \Delta x_j = x_j^1 - x_j^0 = \\ &= A_{x_j}^y + (A_{x_j}^{f_j} - A_{x_j}^y) + (a_{0j}^1 - a_{0j}^0) + (\Delta y(x_j) - \Delta f_j(x_j)). \end{aligned}$$

Заключение. В данной работе проведен фундаментальный анализ предметной области и построена математическая модель для нахождения зависимостей между факторами. Рассмотрены ключевые проблемы: сбор, анализ данных и влияние факторов. В качестве инструмента взят метод статистического инфлюентного анализа. Показано, что оценки степени влияния изменения экзогенных факторов на эндогенные (инфлюенты) могут быть найдены через композитную факторную модель регрессии. Таким образом, при прогнозировании значений Y необходимо минимизировать отклонения в соответствии с системой взаимозависимых факторов.

Литература

1. Федеральная служба государственной статистики // ВРП ОКВЭД 2. с 2016 года [Электронный ресурс]: URL:https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/VRP_OKVED2.xlsx (дата обращения: 19.03.2022).
2. Grenzeback L. R., Brown A., Fischer M. J. et al. Freight Transportation Demand: Energy-Efficient Scenarios for a Low-Carbon Future // Transportation Energy Futures Series. Washington, DC. 2013. 96 p. [Электронный ресурс]: URL:<http://www.nrel.gov/docs/fy13osti/55641.pdf> (дата обращения: 19.03.2022).
3. Jianguo Z., Gang Q. Application of BP neural network forecast model based on principal component analysis in railways freight forecas // IEEE International Conference on Computer Science and Service System. 2012. P. 2201–2204.
4. Ziyadin S., Sousa R. D., Suiubayeva S. et al. Differentiation of logistics services on the basis ABC analysis // E3S Web of Conferences. 2020. No 159. P. 1–8.
5. Трухаев Р. И., Горшков И. С. Факторный анализ в организационных системах. М.: Радио и связь, 1985. 185 с.
6. Трухаев Р. И. Инфлюентный анализ и принятие решений. М.: Наука, 1984. 236 с.

УДК 519.688

Васильев В. А., Кузнецова Д. С.

**Алгоритм роя частиц
и анализ его эффективности
для решения задач безусловной
однокритериальной оптимизации**

Рекомендовано к публикации профессором Крылатовым А. Ю.

1. Введение. В современной науке наблюдается увеличение количества исследований, посвященных методам роевой оптимизации. Этот процесс является следствием развития окружающих человека систем, где для принятия оптимальных управленческих решений использование классических методов становится невозможным. Например, многие экономические задачи, в том числе задачи транспортной маршрутизации, являются NP-трудными и нахождение точного решения на больших размерностях становится невозможным. Усложняется постановка задачи, и у целевой функции отсутствуют свойства выпуклости, дифференцируемости, унимодальности [1].

В этом случае для решения задач используют приближенные методы оптимизации, одним из которых является алгоритм роя частиц [2] и его модификации. В различных областях знаний есть исследования, посвященные этому подходу: от логистики [3] до медицины, где предлагается вычислять параметры камерных моделей позитронной эмиссионной томографии сердца [4]. Особый интерес представляет использование алгоритма роя частиц в дискретных задачах, например, в задачах равновесного распределения транспортных потоков [5, 6]. Зачастую алгоритмы роевого интеллекта сравниваются с появившимися ранее эволюционными алгоритмами и первые показывают большую эффективность. Во многом это объясняется одновременным обновлением положения каждого агента популяции

Васильев Владимир Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: Vasilev975312468@gmail.com, тел.: +7(921)927-94-71

Кузнецова Дарья Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: darya.kuznecova99@gmail.com, тел.: +7(918)786-83-83

Работа выполнена при поддержке Ассоциации выпускников СПбГУ

на всех итерациях, а не заменой лишь нескольких особей, что дает более равномерное приближение к экстремуму.

Целью данной работы является реализация классического алгоритма роя частиц в среде Wolfram Mathematica, а также анализ его работы на тестовых функциях.

2. Описание алгоритма роя частиц. Алгоритм роя частиц был предложен в 1995 году социальным психологом Джеймсом Кеннеди и инженером-электриком Расселом Эмберхартом [7]. Алгоритм использовался для оптимизации непрерывных нелинейных функций.

На первом этапе каждая частица является случайным решением на области допустимых значений оптимизируемой функции. Далее ей присваивается вектор скорости – значение, на которое следует переместить частицу по области поиска. Это значение обновляется на всех итерациях. Для частицы рассчитывается значение целевой функции. Частица запоминает лучшее решение, которое нашла она и рой за все пройденные итерации.

Обновление вектора скорости реализуется по формуле

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_1 (p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 r_2 (p_{gj}(t) - x_{ij}(t)),$$

где i – количество частиц в рое, $i \in [1, \dots, n]$; j – количество переменных в исследуемой функции, $j \in [1, \dots, d]$; v_{ij} – компонента скорости частицы i на итерации t ; $V_i = [v_{i1}, \dots, v_{id}]$ – вектор скорости частицы i , где $v_{ij} \in [v_{min}, v_{max}]$; x_{ij} – координата частицы i на итерации t алгоритма; p_{ij} – координата лучшего решения, найденного частицей; $P_i = [p_{i1}, \dots, p_{id}]$ – вектор координат, соответствующий лучшему найденному решению частицы i на предыдущих итерациях; p_{gj} – координата j лучшего решения, найденного всеми частицами; $P_g = [p_{g1}, \dots, p_{gd}]$ – вектор координат, соответствующий лучшему решению, которое было найдено частицами на предыдущих итерациях; r_1, r_2 – случайные числа на интервале $(0, 1)$; c_1, c_2 – весовые коэффициенты.

Далее корректируем текущую координату каждой частицы

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1).$$

После рассчитывается значение целевой функции в каждой новой точке, частица проверяет, не стала ли новая координата лучшей среди всех точек, где она побывала. Затем среди всех новых точек проверяем, не нашли ли мы новую глобально лучшую точку. В случае если нашли, то запоминаем ее координаты и значение целевой функции в ней.

3. Анализ работы алгоритма. Эффективность работы алгоритма проверялась на следующих тестовых функциях: Растригина, Экли, сферы, Бута и Била. Глобальный минимум этих функций равен нулю. Эксперимент проводился для роя, состоящего из 10, 100, 500 и 1000 особей. Каждый тест проводился со 100 итерациями. В таблицах 1, 2 зафиксированы лучшее минимальное значение, найденное роем, и среднее минимальное значение, полученное при реализации алгоритма 100 раз.

Таблица 1. Минимальное значение функции, найденное роем

Функция	10 особей	100 особей	500 особей	1 000 особей
Растригина	1,274	0,833	0,006	0,028
Экли	0,019	0,005	0,001	0,0004
сферы	0,325	0,0298	0,001	0,003
Бута	$3,78 \cdot 10^{-4}$	$5,79 \cdot 10^{-6}$	$1,94 \cdot 10^{-7}$	$2,43 \cdot 10^{-6}$
Била	$1,55 \cdot 10^{-4}$	$1,11 \cdot 10^{-5}$	$3,27 \cdot 10^{-7}$	$1,59 \cdot 10^{-7}$

Результаты показали, что увеличение частиц в рое до 500 агентов приводит к улучшению искомого значения целевой функции. Так, для функции Растригина лучшее найденное значение уменьшилось с 1,274 до 0,006 для 10 и 500 частиц в рое соответственно. Однако дальнейшее увеличение популяции с 500 до 1000 улучшило результаты только в двух из пяти испытаниях.

Таблица 2. Среднее минимальное значение функции, найденное роем за 100 повторений алгоритма

Функция	10 особей	100 особей (в 10 раз)	500 особей (в 5 раз)	1 000 особей (в 2 раза)
Растригина	4,450	1,684	0,355	0,164
Экли	0,313	0,052	0,016	0,009
сферы	250,84	11,16	1,78	0,63
Бута	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$
Била	$9,3 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$

Важно отметить, что изменение сокращения погрешности целевого значения не произошло именно для лучшего минимального значения, в то время как среднее минимальное значение уменьшилось во всех случаях. Это говорит о необходимости многократного повторения экспериментов для получения более точного результата. С увеличением частиц в рое увеличивается вероятность, что эксперимент дал результат достаточно близкий к настоящему глобальному экстремуму. Анализ изменения относительностей погрешности при

увеличении численности роя представлен в таблице 3. У функций Бута и Би́ла в среднем погрешность для перехода от 10 к 1000 уменьшилась примерно в 500 и в 5000 раз соответственно, от 100 к 1000 — в 15 раз, и от 500 к 1000 — в 2 раза.

Таблица 3. Относительное уменьшение погрешности при увеличении численности роя

Функция	в 10 раз (от 10 к 100)	в 5 раз (от 100 к 500)	в 2 раза (от 500 к 1000)	в 100 раз (от 10 к 1000)
Растригина	2,64	4,74	2,16	27,13
Экли	6,02	3,25	1,78	34,78
сферы	22,48	6,27	2,83	398,16
Бута	29,00	7,14	2,21	457,89
Би́ла	290,63	6,27	2,43	4428,57

В таблице 4 представлено время работы алгоритма при выполнении 100 итераций для роя, состоящего из 10, 100, 500 и 1000 особей.

Таблица 4. Время работы 100 запусков алгоритма

Функция	10 особей	100 особей	500 особей	1 000 особей
Растригина	1,31	9,04	45,17	89,41
Экли	4,84	43,57	205,49	443,06
сферы	4,17	35,59	173,94	362,17
Бута	3,85	31,93	175,85	374,66
Би́ла	4,02	39,25	189,37	390,59

Затраты на работу алгоритма растут линейно, так как с увеличением роя в таком же объеме возрастает количество действий, которые необходимо проводить над частицами. Подтверждение предположения о линейной зависимости работы алгоритма представлено в таб. 5. Как видно из таблицы, время работы алгоритма изменяется пропорционально изменению численности роя.

Таблица 5. Зависимость времени работы алгоритма от увеличения числа частиц в рое

Функция	с 10 особей до 100 (в 10 раз)	с 100 особей до 500 (в 5 раз)	с 500 особей до 1000 (в 2 раза)
Растригина	7	5	2
Экли	9	5	2
сферы	9	5	2
Бута	8	6	2
Би́ла	10	5	2

Рис. 1 был построен по значениям, найденным как прологарифмированное по основанию отношения числа частиц относительное изменение погрешности. Эта величина показывает порядок зависимости точности от числа частиц в относительных величинах. По графику видно, что эти значения приблизительно одинаковые для всех функций, причем наибольший разброс наблюдается при переходе от 10 к 100 (от 0,4 до 2,5). При увеличении числа частиц в 2 раза (с 500 до 1000) относительная погрешность меняется пропорционально. На всех задачах (также в среднем), получается увеличение времени в 2 раза и уменьшение погрешности целевого значения приблизительно в 2,2 раза. Можно считать, что зависимость линейная.

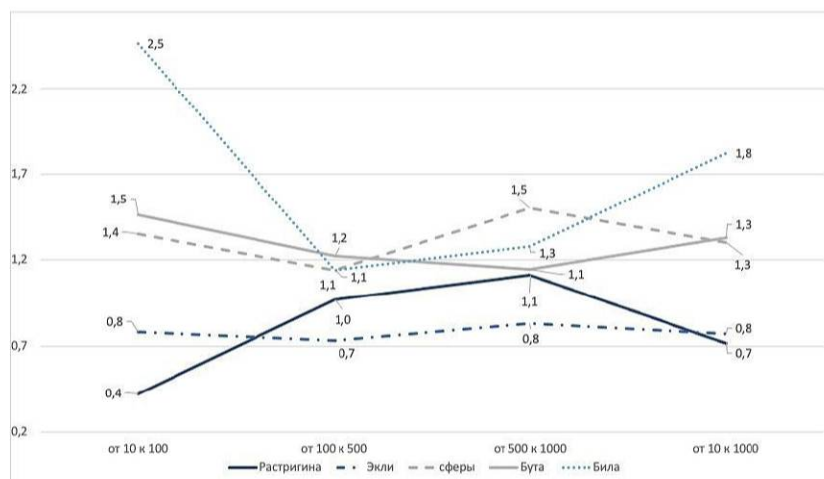


Рис. 1. Порядок зависимости точности от числа частиц в относительных величинах

Также был проанализирован минимальный, максимальный и средний шаг, на котором роem было получено лучшее решение. Результаты представлены в таблице 6.

Таблица 6. Минимальный, максимальный и средний номер итерации, на котором роем было найдено лучшее решение

Функция	10 особей	100 особей	500 особей	1 000 особей
Растригина	1;97;43	5;98;43	1;98;47	2;98;42
Экли	2;97;39	2;97;36	1;97;39	1;97;38
Сферы	2;98;36	1;96;37	1;98;38	2;98;42
Бута	1;97;41	4;94;41	1;98;40	1;98;40
Била	4;97;52	1;97;47	3;97;43	2;98;46

В среднем минимальное лучшее значение за 100 итераций вычисляется роем на 40 шаге, однако это значение может варьироваться от 1 шага, когда лучшее найденное значение не менялось с первой итерации, до 98. Увеличение количества итераций также может улучшить результаты работы алгоритма.

4. Заключение. Таким образом, в работе реализован [8] и проанализирован классический алгоритм роя частиц. Для роя, состоящего из 1000 особей лучшее найденное значение отличалось от настоящего глобального минимума от $1,59 \cdot 10^{-7}$ до 0,28 для исследуемых функций. Это позволяет говорить об эффективности алгоритма в нахождении глобального минимума функций разного вида, в том числе с большим количеством локальных экстремумов. Исходя из проведенных экспериментов, можно сказать, что целесообразно проводить не менее 40 повторений алгоритма при численности роя более 100 особей. При этом следует помнить, что данные параметры необходимо варьировать для каждой конкретной решаемой задачи.

Литература

1. Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учебное пособие. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. 446 с.
2. Alaia B., Harbaoui I., Borne P., Bouchriha H. A comparative study of the PSO and GA for the m-MDPDPTW // International Journal of Computers Communications Control. 2018. Vol. 13. No 1. P. 8–23.
3. Nouri M., Bekrar A., Jemai A., et al. An effective and distributed particle swarm optimization algorithm for flexible job-shop scheduling problem // Journal of Intelligent Manufacturing. 2014. Vol. 29. P. 603–615.

4. Стрельцова А. А. Вычисление параметров камерных моделей позитронной эмиссионной томографии сердца с использованием метода роя частиц // Процессы управления и устойчивость. 2018. Т. 5. № 1. С. 245–249.
5. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Т. 10. № 2. С. 121–130.
6. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления пропускной способностью маршрутов транспортной сети // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 2. С. 182–192.
7. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization // Proceedings of International Conference of Neural Networks. 1995. P. 1942–1948.
8. Кузнецова Д. С. PSO-algorithm-CPS-22 [Электронный ресурс]: URL: <https://github.com/daturare/PSO-algorithm.git> (дата обращения 19.03.2022).

УДК 681.5.015

Ганаева Д. Д., Головкина А. Г.

Метод реконструкции нелинейных динамических систем по временным рядам

1. Введение. Проблема восстановления нелинейных динамических систем по имеющимся измерениям является центральной во многих дисциплинах [1]. Это объясняется тем, что для решения различных прикладных задач требуется информация о поведении процесса при различных воздействиях и условиях, иными словами, требуется построить математическую модель.

Традиционно вывод уравнений модели основан на предварительных знаниях о природе системы, например, на физических законах. Однако во многих случаях лежащая в основе системы динамика неизвестна или известна частично, но при этом доступно большое количество наблюдений или измерений [2].

В последнее время возможность получать необходимые измерения становится более доступной благодаря развитию технологий датчиков и интернета вещей. Таким образом, проблема идентификации нелинейных систем по данным сейчас привлекает к себе повышенный интерес [3].

В данной статье предлагается метод реконструкции нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам. При этом вид правой части предполагается неизвестным, а измерения могут производиться через неодинаковые промежутки времени. Разработанный алгоритм сравнивался с библиотекой с открытым исходным кодом PySINDy [3, 4], в основе которой лежит метод разреженной идентификации систем [5].

2. Постановка задачи. Необходимо по многомерному временному ряду данных, соответствующему некоторому физическому процессу, восстановить математическую модель в виде системы диффе-

Ганаева Дарья Дмитриевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ganaeva.dd@mail.ru, тел.: +7(911)004-31-84

Головкина Анна Геннадьевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.golovkina@spbu.ru, тел.: +7(921)300-61-17

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, проект ID 90317740

ренциальных уравнений. При этом сами данные могут быть распределены во времени с разной частотой.

3. Метод реконструкции системы дифференциальных уравнений. Предлагаемый алгоритм реконструкции системы обыкновенных дифференциальных уравнений в полиномиальном виде использует подход, основанный на искусственной генерации новых данных, аналогичный описанному в статье [6].

Пусть известны значения компонентов $X_j(t), j = \overline{1, n}$, вектора $X(t) \in \mathbb{R}^n$ в моменты времени t_0, \dots, t_M . Предполагается, что указанный временной ряд соответствует некоторому динамическому процессу, который может быть представлен системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{k=1}^N P^k X^{[k]}, \quad (1)$$

где $X^{[k]}$ – степень Кронекера k -го порядка для вектора X , P^k – неизвестные матрицы соответствующих размерностей.

Если данные временного ряда измерены достаточно часто через равные промежутки времени, то неизвестные матрицы P^k можно вычислить, решая систему линейных уравнений, которая получается после замены производных $\frac{dX}{dt}$ конечными разностями в каждой точке временного ряда:

$$AP = B, \quad (2)$$

где A – матрица измерений, P – матрица неизвестных коэффициентов, B – матрица конечных разностей. Исходя из размерностей этих матриц и необходимого условия разрешимости системы линейных уравнений, можно составить условие на необходимое количество измерений M . В то же время, если измерения получены с разной частотой, через большие промежутки времени, то указанный подход к таким данным применить нельзя, в силу того, что система (2) может оказаться неопределенной, а конечные разности для аппроксимации производных будут вычислены с большой погрешностью.

Чтобы обойти это препятствие, предлагается сначала аппроксимировать компоненты вектора измерений $X_j(t_i), j = \overline{1, n}, i = \overline{1, M}$, с помощью сплайнов и затем сгенерировать с их помощью точки для аппроксимации производных в (1) с достаточной степенью точности и решения системы (2).

Однако предварительно необходимо определить параметры метода, которые влияют на качество аппроксимации Y . Для построения сплайнов в работе использовалась библиотечная функция `scipy.interpolate.interpld` языка Python, которая принимает на вход вектор входных точек данных и степень сплайна n . Качество аппроксимации зависит в том числе и от максимальной степени K вектора X в правой части системы (1) и количества новых точек s , генерируемых с помощью сплайна. Таким образом, у предлагаемого алгоритма есть три настраиваемых параметра, которые, вообще говоря, должны быть найдены как решение оптимизационной задачи

$$n, K, s = \arg \min \|X - Y\|.$$

4. Результаты. Временной ряд для реконструкции системы был синтетически сгенерирован с помощью численного решения $(x(t), y(t))$ системы уравнений осциллятора Ван дер Поля:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases} \quad (3)$$

А именно, в качестве тренировочных данных использовалось частное решение системы (3) на промежутке $[0, 10]$ с начальным условием $(x_0, y_0) = (1, 4)$ и шагом $h = 0,01$. Из него формировались равномерный временной ряд с заданным шагом прореживания и неравномерный, для которого случайным образом бралось необходимое количество точек.

Решение оптимизационной задачи осуществлялось путем перебора параметров метода, в качестве критерия близости использовалась величина средней абсолютной ошибки (MAE – mean absolute error). В качестве тестовых данных для проверки качества восстановления системы использовалось частное решение системы (3) с начальным условием $(x_0, y_0) = (1, 1)$ на промежутке $[5, 15]$. Результаты представлены на рис. 1, 2. На графиках слева показаны точки, использованные в качестве входного набора данных, на графиках справа – истинная фазовая траектория $y(x)$ системы, а также траектория восстановленной системы с помощью предложенного метода

и с помощью библиотеки PySINDy.

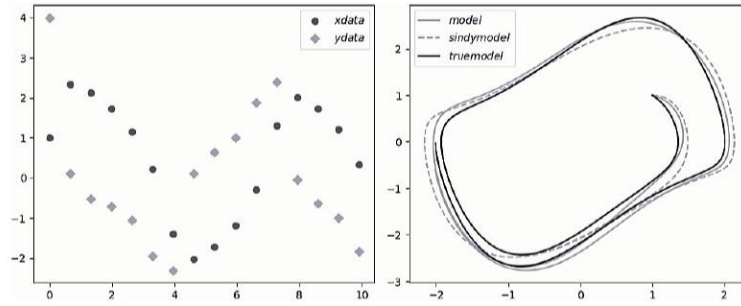


Рис. 1. 15 равномерно расположенных точек, $n = 5$, $K = 3$, $s = 50$,
MAE = 0,00825, PySINDy MAE = 0,03941

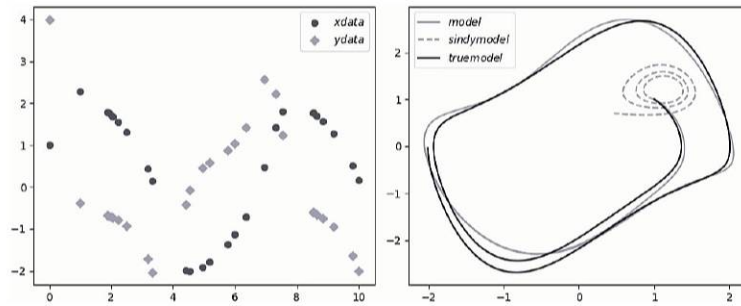


Рис. 2. 27 неравномерно расположенных точек, $n = 5$, $K = 3$, $s = 70$,
MAE = 0,00656, PySINDy MAE = 0,082

5. Заключение. В работе предложен метод восстановления неизвестной системы дифференциальных уравнений по доступным измерениям, который сравнивался с широко используемой библиотекой PySINDy. Результаты тестирования показали, что для PySINDy точность восстановления падает при уменьшении количества и нерегулярности данных, однако предложенный в работе метод дает ста-

бильный результат независимо от частоты входных данных. Ошибка восстановления для регулярных данных в среднем в 4,77 раз меньше, чем у PySINDy, а для нерегулярных – в 12,5 раз.

Литература

1. Wang W. X., Laic Y. C., Grebogie C. Data based identification and prediction of nonlinear and complex dynamical systems // *Physics Reports*. 2016. Vol. 644. P. 1–76.
2. Nguyen D., Drumetz L., Oualla S., Fablet R. Variational deep learning for the identification and reconstruction of chaotic and stochastic dynamical systems from noisy and partial observations [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/2009.02296> (дата обращения: 19.03.22).
3. De Silva B. M., Champion K. P., Quade M. et al. PySINDy: A Python package for the sparse identification of nonlinear dynamical systems from data // *Journal of Open Source Software*. 2020. Vol. 5. No 49. P. 2104.
4. Библиотека PySINDy [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/dynamicslab/pysindy> (дата обращения: 19.03.22).
5. Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2016. Vol. 113. No 15. P. 3932–3937.
6. Golovkina A. G., Kozynchenko V. A., Kulabukhova N. V. Reconstruction of ordinary differential equations from irregularly distributed time-series data // *Proc. of GRID'2021, Dubna, Russia*. 2021. Vol. 3041. P. 342–347.

УДК 510

Девришев Н. Э., Хэ Ю., Петросян О. Л.

Обнаружение аномалий во временных рядах с помощью методов прогнозирования

1. Введение. В настоящее время выявление аномалий применимо к широкому кругу областей [1]. Оно используется банковскими системами безопасности для обнаружения мошеннических действий, в промышленности – для предотвращения неисправностей оборудования из-за отсутствия своевременного ремонта, в системах поиска вторжений. В связи с высокой востребованностью методов выявления аномалий было разработано и протестировано большое количество техник для решения данной задачи [1]. В статье рассматривается метод прогнозирования, который включает в себя алгоритм, с определённой точностью приближающий исходный временной ряд, и модуль, позволяющий классифицировать отклонения от прогноза модели в качестве аномалий.

Применимо к обнаружению аномальных значений во временных рядах метод прогнозирования можно выделить по многим причинам. Во-первых, прогнозирование временных рядов – это отдельная быстроразвивающаяся сфера, соответственно, нам доступны все её инструменты. Во-вторых, метод прогнозирования показывает впечатляющие результаты поиска аномалий как в одномерных, так и в многомерных временных рядах. В-третьих, данная техника прозрачна и легко объяснима.

В настоящей работе продемонстрированы все вышеупомянутые преимущества на наборе данных, предоставленных соревнованием платформы Hexagon-ML [2], используя для прогнозирования ансамблевые (LightGBM, XGBoost) и нейросетевые (FCNN, Bi-GRU, Bi-LSTM) алгоритмы, с последующим выбором наилучшего. В процессе исследований были использованы результаты работ [3–6].

Девришев Надир Эльнурович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077036@student.spbu.ru, тел.: +7(902)182-90-11

Хэ Юйлун – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: heyulong1998@gmail.com, тел.: +7(999)226-63-45

Петросян Ованес Леонович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru, тел.: +7(911)740-80-19

2. Соревнование. Метод опробован на наборе данных соревнования «Multi-dataset Time-Series Anomaly Detection Competition, SIGKDD 2021» [2] от популярной платформы Hexagon-ML.

2.1. Описание данных. В описании данных рассматриваемого соревнования составители говорят о длительном застое в поиске методов выявления аномалий, а также об однообразии данных, принятых эталонными, к которым исследователи применяют свои методы, что не позволяет отразить всю вариативность задачи. В связи с этим организаторы соревнования «*Multi-dataset Time-Series Anomaly Detection*» предоставляют к изучению 250 одномерных независимых временных рядов, каждый из которых содержит ровно по одному аномальному участку. Предложенный набор отражает результат двадцатилетнего исследования научных статей на тему обнаружения аномалий. Кроме того, такое разнообразие данных требует найти единый для всех временных рядов обобщённый алгоритм выявления аномалий.

2.2. Визуализация данных. Данные представляют собой 250 одномерных временных рядов, отображённых в 250 файлах формата .txt. В названии каждого файла содержится информация о количестве тренировочных и тестовых данных `<id>_<name>_<split-number>.txt`. Например, название `004_UCR_Anomaly_2500.txt` говорит о том, что в четвёртом по порядку наборе данных 2500 значений представлены для обучения нашей модели, а остальные — для тестирования (рис. 1). Участок с аномальным значением может находиться лишь в тестовой части рассматриваемых данных.



Рис. 1. Представление данных с разбиением на тестовую (до 2500) и тренировочную (от 2500) выборки

Каждый временной ряд состоит из повторяющихся видов простых паттернов и одного ярко выраженного аномального участка (рис. 2).

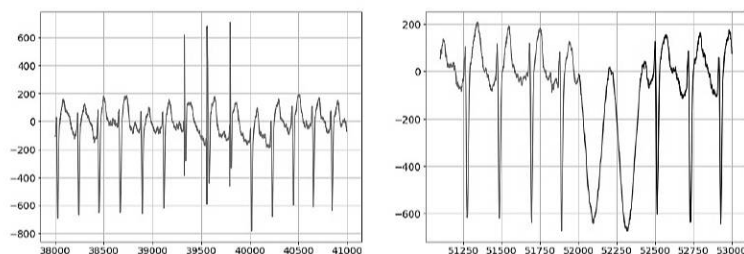


Рис. 2. Пример временного ряда и аномального участка

3. Подход к решению. На сегодняшний день найдено большое количество техник, с разной степенью точности решающих задачу поиска аномалий в различных её вариациях [1]. Даже для метода прогнозирования не существует единого алгоритма, который бы одинаково хорошо обнаруживал аномалии абсолютно для всех типов временных рядов или, по меньшей мере, для большинства.

Возникновению настоящей работы весьма сильно поспособствовало открытое соревнование по обнаружению аномалий во временных рядах «Power Laws: Detecting Anomalies in Usage» [7] от компании Schneider Electric, предоставившей в свободный доступ не только набор собственных данных, но и алгоритмы финалистов турнира, которые и были взяты нами за основу исследования. В качестве основных алгоритмов прогнозирования временного ряда, использованных призёрами соревнования, можно выделить градиентный бустинг (XGBoost) и простую полносвязную нейронную сеть (Fully Connected Neural Networks, или FCNN). Данные модели с высокой точностью приближали временной ряд, после чего аномальными признавались значения, не входящие в доверительный интервал предсказания.

Качество метода прогнозирования в задаче поиска аномалий определяется преимущественно качеством прогнозирования временного ряда используемой модели. Несмотря на высокую точность приближения временного ряда в наборе данных Schneider Electric, в рассматриваемом соревновании представленные алгоритмы могут не обладать такой же прогнозной способностью. В связи с этим было принято решение заменить алгоритмы финалистов соревнования Schneider Electric на другие предпочтительные для прогнозирования временных рядов алгоритмы, такие как LightGBM, LSTM, Bi-GRU, и сравнить результаты.

3.1. Полносвязная нейронная сеть. Полносвязная нейронная сеть – это сеть, в которой каждый нейрон связан со всеми остальными нейронами, находящимися в соседних слоях. Несмотря на свою простоту, данная архитектура неплохо справляется с предсказанием значений временного ряда. Зачастую, для предотвращения эффекта переобучения используют технологию прореживания.

3.2. Bi-LSTM. Двухнаправленные сети с долгой краткосрочной памятью (англ. *bidirectional long short-term memory*) – модификация рекуррентных нейронных сетей, способная учитывать долговременные зависимости. Архитектура показала неплохие результаты в задачах с данными, представленными в виде последовательностей, в частности, в прогнозировании временных рядов. Кроме того, подобные сети улавливают зависимости значений последовательностей как с начала, так и с конца.

3.3. Bi-GRU. Управляемые рекуррентные нейроны (англ. *bidirectional gated recurrent units*) являются упрощённой, но не менее эффективной версией сетей LSTM. Мы так же использовали двухнаправленную архитектуру из-за её превосходства над классической в прогнозировании временных рядов.

3.4. XGBoost. Градиентный бустинг (англ. *extreme gradient boosting*) – это техника машинного обучения, строящая модель предсказания в виде ансамбля слабых предсказывающих моделей. Градиентный бустинг обучает множество моделей постепенно, аддитивно и последовательно.

3.5. LightGBM. Light Gradient Boosting Machine – более эффективная, экономная и быстрая реализация градиентного бустинга, основанная на ансамбле над решающими деревьями. Данный алгоритм показал впечатляющие результаты на соревновании «The M5 forecasting competition» в 2020-м году.

3.6. Следующий шаг. Поиск аномалий не ограничивается одним лишь прогнозированием временного ряда. После обучения алгоритма с хорошей прогнозной способностью необходимо понять, какие именно значения считать аномальными. В задаче с нефиксированным числом аномалий используют построение доверительного интервала прогноза и обозначают аномалиями значения, которые из данного интервала выбиваются. Для правильной работы метода необходимо обеспечить отсутствие в обучающей выборке аномальных значений, чтобы модель не подстраивалась под них. Ввиду специфики задачи необходимо внести некоторые изменения в вышеописан-

санный метод обозначения аномалий, так как в рассматриваемых нами временных рядах содержится всего одно аномальное значение. На первый взгляд может показаться, что аномалией можно обозначить наиболее отклонившееся от прогноза значение, но практическим путём было выяснено, что данный метод не является действенным, и в качестве ответа выдаются значения, на которых ошиблась рассматриваемая модель. Решением является использование интегрального отклонения, т. е. суммы отклонений на отдельно взятом участке, вычисляемой по формуле

$$R_k = \sum_{i=k-\frac{w}{2}}^{k+\frac{w}{2}} |y_i - \tilde{y}_i|, \quad k = \frac{w}{2}, n - \frac{w}{2},$$

где n – длина временного ряда, w – ширина окна, y_i – истинные значения, \tilde{y}_i – прогнозируемые.

О других интересных методах обнаружения аномалий можно узнать в статьях [6, 8, 9].

4. Результаты. Для всех вычислений использовался компьютер с процессором Intel(R) Core(TM) i3-7020U @ 2.30GHz, оперативной памятью 4,00 Гб и операционной системой Windows 10 Home. Реализация описанных алгоритмов проводилась в Jupyter Notebook 6.4.5.

Здесь оцениваются и сравниваются между собой результаты работы пяти алгоритмов, о которых было написано в пункте 3.

4.1. Точность моделей. Как уже было заявлено ранее, метод прогнозирования в задаче поиска аномалий сильно зависит от качества прогнозирующей модели, поэтому крайне важно обратить внимание на выбор правильного алгоритма.

В таблице 1 представлено сравнение среднего коэффициента детерминации (R^2 , R-квадрат) для пяти используемых моделей прогнозирования. Среднее считалось по подвыборке наборов данных.

Таблица 1. Качество алгоритмов

	Коэффициент детерминации
Neural Networks	0,78577447
XGBoost	0,96153277
LightGBM	0,95830702
Bi-LSTM	0,85766110
Bi-GRU	0,86914308

4.2. Поиск аномалий. После применения прогнозирующей модели для приближения временного ряда следующим важным шагом является детекция аномалий. В таблице 2 представлена точность обнаружения аномалий различными алгоритмами. Для проверки точности поиска аномалий была выбрана подвыборка, так как изначально набор данных содержал большое количество однообразных временных и рядов.

Таблица 2. Качество алгоритмов

	Процент верно обнаруженных аномалий
Neural Networks	52,9%
XGBoost	23,5%
LightGBM	47,1%
Bi-LSTM	88,2%
Bi-GRU	58,9%

4.3. Выводы. Полученные результаты показали зависимость между качеством алгоритма прогнозирования и точностью обнаружения аномалий.

Как легко заметить, высокая прогнозируемая способность не гарантирует высокой точности выявления аномальных значений. Наоборот, достаточно хорошие прогнозирующие модели XGBoost и LightGBM обладают плохой способностью правильно обнаруживать аномалии. Это объясняется сложностью и мощностью алгоритмов. Они способны приближать не только данные, встречающиеся в обучающей выборке, но и аномальные значения.

Другой же крайностью являются полносвязные нейронные сети и сети Bi-GRU, которые обладают более слабой прогнозной способностью, из-за чего среди большого количества сильных отклонений истинных значений от прогнозируемых сложно выделить аномальные.

Лучшим выбором для рассматриваемой задачи оказался алгоритм Bi-LSTM, который достаточно хорошо ввиду своей сложности приближает временную последовательность, но при этом не подстраивается под аномальные значения из тестовой выборки (рис. 3).

5. Заключение. Метод прогнозирования является очень эффективной техникой обнаружения аномалий. Точность данного метода коррелирует с прогнозной способностью используемой модели. Но к выбору алгоритма стоит подходить осторожно, выбирая среднее

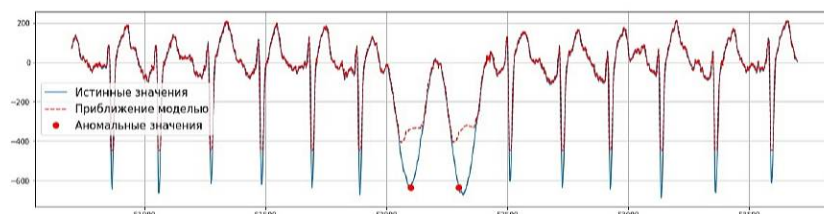


Рис. 3. Пример работы алгоритма Vi-LSTM

между сложной и мощной моделью и моделью совсем слабой, обладающей плохой обобщающей способностью.

Литература

1. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly detection: A survey // ACM Computing Surveys. 2009. Vol. 41. No 3. P. 1–58.
2. Multi-dataset Time-Series Anomaly Detection Competition, SIGKDD 2021 [Электронный ресурс]: URL:<https://competitions.hexagon-ml.com/practice/competition/39/> (дата обращения: 01.03.22).
3. Староверова К. Ю., Буре В. М. Мера различия временных рядов, основанная на их характеристиках // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 1. С. 51–60.
4. Zhang Y., Xu F., Zou J., Petrosian O. L., Krinkin K. XAI evaluation: evaluating black-box model explanations for prediction // II International Conference on Neural Networks and Neurotechnologies (NeuroNT). 2021. P. 13–16.
5. Zhang Y., Ma R., Liu J., Liu X., Petrosian O. L., Krinkin K. Comparison and explanation of forecasting algorithms for energy time series // Mathematics. 2021. Vol. 9. No 21. Art. no 2794.
6. Zou J., Petrosian O., Xu F. Explainable AI: using Shapley value to explain the anomaly detection system based on machine learning approaches // Процессы управления и устойчивость. 2020. Vol. 7. No 1. P. 355–360.

7. Power Laws: Detecting Anomalies in Usage [Электронный ресурс]: URL:<https://www.drivendata.org/competitions/52/anomaly-detection-electricity/> (дата обращения: 01.03.22).
8. Zou J., Xu F., Zhang Y., Petrosian O.L., Krinkin K. High-dimensional explainable AI for cancer detection // International Journal of Artificial Intelligence. 2021. Vol. 19. No 2. P. 195–217.
9. Zou J., Petrosian O.L. Explainable AI: Using shapley value to explain complex anomaly detection ML-based systems // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. 2020. Vol. 332. P. 152–164.

УДК 004.75

Дзюба В. И.

Применение концепции федеративного обучения для решения задачи классификации текста

Рекомендовано к публикации доцентом Корховым В. В.

1. Введение. Задачи обработки естественного языка активно изучаются научным сообществом [1], и данные оказывают существенное влияние на процесс машинного обучения. Современные алгоритмы нуждаются в огромном объеме данных, как правило, сосредоточенных на конкретной вычислительной машине. Помимо трудностей с централизованным хранением, возникают вопросы, связанные со сбором чувствительной информации, например, личных данных клиентов финансовых компаний.

Федеративное обучение – это концепция машинного обучения, позволяющая использовать конфиденциальные данные без агрегирования на центральном сервере. Основная идея состоит в том, чтобы обучать модели машинного обучения на данных, которые распределены по множеству устройств-клиентов. Вместо того, чтобы отправлять данные на сервер, клиенты обрабатывают свои локальные данные и отправляют на сервер обновления для модели. Веса, полученные от большого числа клиентов, агрегируются сервером и объединяются для создания улучшенной глобальной модели (рис. 1).

В ходе исследования смулирована система федеративного обучения для решения классической задачи классификации текста [2].

В данной работе представлен анализ решения, основанный на сравнении параметров точности и времени работы федеративной и централизованной систем.

2. Постановка задачи. Целью данной работы является выявление особенностей, преимуществ и недостатков метода федеративного обучения в сравнении с классическим подходом на примере решения типовой задачи обработки естественного языка.

Задача состоит в разработке прототипа системы федеративного обучения, позволяющей классифицировать текст по эмоциональной окраске.

Дзюба Виктория Игоревна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069505@student.spbu.ru, тел.: +7(969)793-48-00

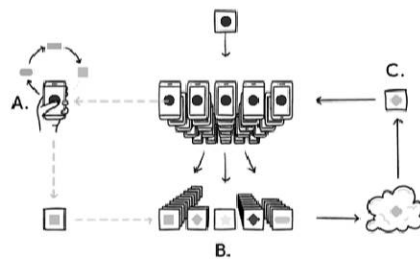


Рис. 1. Процесс федеративного обучения

3. Процесс федеративного обучения модели. Сервер управляет процессом обучения до тех пор, пока процесс обучения не будет остановлен (момент остановки задается разработчиком системы):

1. Выбор клиента: сервер выбирает клиентов, удовлетворяющих требованиям. Например, смартфон может быть подключен к раунду обучения, только если он подключен к сети, имеет подключение к wi-fi и не занят задачами пользователя.
2. Рассылка: выбранные клиенты загружают текущие веса модели и обучающую программу (например, TensorFlow graph [3]) с сервера.
3. Вычисления на клиентах: каждый клиент локально рассчитывает обновление модели, выполняя обучающую программу, которая может быть запуском SGD на локальных данных, так называемое федеративное усреднение [4].
4. Агрегирование: сервер агрегирует обновления клиентов, причем процесс обновления глобальной модели может начаться по достижении необходимого числа ответов от клиентов, например, Google Keyboard производит глобальный тюнинг при наличии обновлений от 1000 клиентов. Это позволяет ускорить процесс. На этом этапе могут добавиться дополнительные оптимизации, такие как безопасное агрегирование для дополнительной безопасности, сжатие агрегатов для повышения эффективности коммуникации, добавление шума и отсечение обновлений для дифференциальной конфиденциальности.

5. Обновление модели: сервер обновляет глобальную модель, обновляясь на обновлениях, полученных в этом раунде обучения.

4. Представленное решение. В рамках данной работы разработан прототип системы, решающей задачу бинарной классификации настроений в тексте. Текущий прототип состоит из трех клиентов и двух раундов обучения, ввиду небольшого размера датасета и простоты модели.

1. Данные. Для обучения выбран датасет Movie Review Data [5], содержащий около 2000 документов, размеченных с учетом их общей полярности настроений (положительной или негативной). Данные подверглись подготовке, в частности, были удалены специальные символы, единичные символы, множественные пробелы, произведена лемматизация с последующей векторизацией.
2. Выбор алгоритма. В качестве решающего алгоритма выбрана логистическая регрессия как классическое решение для бинарной классификации.
3. Выбор библиотек для машинного обучения. Для создания модели логистической регрессии выбран scikit-learn, как базовое решение для исследовательских задач классического машинного обучения. Для обработки текста дополнительно использовалась библиотека Natural Language Toolkit.
4. Выбор федеративного фреймворка. Для прототипирования выбран фреймворк Flower [6] языка программирования Python, ввиду наличия стабильной версии, поддерживающегося репозитория и активного сообщества.
5. Выбор алгоритма федеративной оптимизации. Для текущего этапа разработки взят базовый алгоритм федеративной оптимизации Federated Averaging [7], так как датасет относительно небольшой и сложные оптимизации для него не требуются.
6. Функция ошибки и метрики. В качестве функции ошибки выбрана логарифмическая функция потерь, а качество оценивалось по метрике Ассигасу, так как выборка сбалансированная.

5. Анализ результатов. Система федеративного обучения в данном случае работала дольше, что обусловлено необходимостью

коммуникации между клиентами и координирующим обучение сервером. Ухудшение точности глобальной модели обусловлено симуляцией нахождения разных данных на разных узлах: каждый узел получал на обучение выборку меньшего размера, чем исходная. Результаты представлены в таблице.

Таблица. Результаты эксперимента

Тип системы	Время работы	Функция потерь	Точность
Централизованная	0,04	0,4683	0,835
Федеративная	4	0,5640	0,8133

6. Заключение. Федеративное обучение позволяет распределенным клиентам обучать общую модель машинного обучения, сохраняя свои данные приватными, разделяя машинное обучение и необходимость хранить данные централизованно. В данной работе сделан краткий обзор федеративного подхода и представлены результаты работы прототипа для решения задачи классификации текста. Результаты показали увеличение времени работы системы и уменьшение показателя точности в сравнении с централизованным подходом, что обусловлено архитектурными особенностями системы. В дальнейшем планируется расширить спектр задач обработки естественного языка, решаемых с помощью данного метода, а также улучшить показатели работы системы путем ее конфигурирования.

Литература

1. Abramov R. V., Kulakov K. A., Lebedev A. A., Moskin N. D., Rogov A. A. Research of features of Dostoevsky's publicistic style by using n-grams based on the materials of the "Time" and "Epoch" magazines // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 4. С. 389–396.
2. Ненашев М. Д. Анализ тональности новостных статей // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 326–330.
3. Abadi M., Agarwal A., Barham P. et al. TensorFlow: Large-Scale Machine Learning on Heterogeneous Distributed Systems [Электронный ресурс]: URL:\https://research.google/pubs/pub45166/ (дата обращения: 19.03.22).

4. Kairouz P., McMahan B. H., Avenet B. et al. Advances and Open Problems in Federated Learning [Электронный ресурс]: URL: [\https://research.google/pubs/pub49232/](https://research.google/pubs/pub49232/) (дата обращения: 19.03.22).
5. Maas A. L., Daly R. E., Pham P. T. et al. Learning Word Vectors for Sentiment Analysis // Proceedings of the 49th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies. Portland, Oregon, USA. 2011. P. 142–150.
6. Beutel D. J., Topal T., Mathur A. et al. Flower: A friendly federated learning framework [Электронный ресурс]: URL: [\https://arxiv.org/abs/2007.14390](https://arxiv.org/abs/2007.14390) (дата обращения: 19.03.22).
7. Sun T., Li D., Wang B. Decentralized Federated Averaging [Электронный ресурс]: URL: [\https://arxiv.org/abs/2104.11375](https://arxiv.org/abs/2104.11375) (дата обращения: 19.03.22).

УДК 519.237.8

Долженков С. Д.

Сравнительный анализ агломеративных методов кластеризации на примере модельного множества точек евклидовой плоскости

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Ореховым А. В.*

1. Введение. Кластерный анализ – это многомерная статистическая процедура, предназначенная для классификации объектов некоторой выборки по мере их близости относительно друг друга. Результатом кластеризации является разбиение исходного множества на подмножества, называемые кластерами. «Меры близости» могут быть весьма разнообразны и в общем случае произвольная мера не обязана быть метрикой.

Выделяют два класса методов иерархической кластеризации: агломеративные и дивизивные. В агломеративных методах новые кластеры создаются путём объединения мелких кластеров в более крупные, а в дивизивных методах наоборот, за счёт деления крупных кластеров на более мелкие. Во всех случаях иерархической кластеризации одной из основных проблем является определение двух взаимосвязанных понятий: предпочтительного числа кластеров и момента остановки процесса кластеризации [1, 2].

Сейчас наиболее известными методами определения момента остановки процесса агломеративной кластеризации и определения предпочтительного числа кластеров являются «коэффициент силуэта» [3, 4] и «метод локтя» [5]. До последнего времени «метод локтя» являлся сугубо эвристическим, но не так давно был создан подход, который является аналитическим обобщением этого метода [6, 7]. Основными элементами нового подхода являются аппроксимационно-оценочные критерии [6, 8] и «гипотеза $e - 2$ » [9].

Как было отмечено Олдендерфером (Aldenderfer) и Блэшфильдом (Blashfield), для агломеративных методов кластеризации характерно возникновение «цепного эффекта», когда уже сформировавшиеся кластеры начинают объединяться между собой, и в

Долженков Сергей Дмитриевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069751@student.spbu.ru, тел.: +7(914)950-24-77

конце концов вся выборка объединяется в один кластер [10]. Основная идея «гипотезы $\epsilon - 2$ » состоит в том, чтобы при помощи аппроксимационно-оценочного критерия определить момент начала «цепного эффекта» [8, 9].

Цель данной работы – провести сравнительный анализ агломеративных методов кластеризации на примере модельного множества точек на евклидовой плоскости. При этом сравниваются не только методы кластеризации, но и два способа определения момента остановки; за счёт «коэффициента силуэта» и при помощи «гипотезы $\epsilon - 2$ ».

В качестве модельных данных используется множество точек на евклидовой плоскости (см. рис. 1). Точки образуют пять кластеров, три из которых хорошо обособлены, а оставшиеся два расположены в непосредственной близости друг от друга.

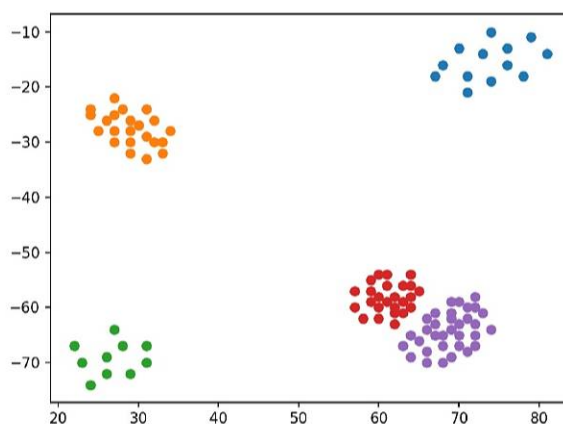


Рис. 1. Модельные данные

2. Методы агломеративной кластеризации. Рассмотрим подробнее используемые методы агломеративной кластеризации.

2.1. «Меры близости» между кластерами. Для определения схожести двух кластеров рассмотрены следующие методы вычисления «мер близости» между ними:

- метод одиночной связи

$$R_{min}(U, V) = \min_{u \in U, v \in V} \rho(u, v),$$

- метод полной связи

$$R_{max}(U, V) = \max_{u \in U, v \in V} \rho(u, v),$$

- метод средней связи

$$R_{avg}(U, V) = \frac{1}{|U||V|} \sum_{u \in U} \sum_{v \in V} \rho(u, v),$$

- центроидный метод

$$R_c(U, V) = \rho \left(\sum_{u \in U} \frac{u}{|U|}, \sum_{v \in V} \frac{v}{|V|} \right),$$

- метод Уорда

$$R_{ward}(U, V) = \sum_{x \in U \cup V} \rho^2(x, \bar{x}) - \sum_{u \in U} \rho^2(u, \bar{u}) - \sum_{v \in V} \rho^2(v, \bar{v}),$$

где

$$\bar{x} = \sum_{x \in U \cup V} \frac{x}{|U \cup V|}, \quad \bar{u} = \sum_{u \in U} \frac{u}{|U|}, \quad \bar{v} = \sum_{v \in V} \frac{v}{|V|}.$$

2.2. Определение числа кластеров. Рассмотрим «коэффициент силуэта» и «гипотезу $e - 2$ », основанную на аналитическом обобщении «метода локтя».

«Силуэт» для конкретной точки i , которая принадлежит кластеру C_I , определяется, как

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max(a(i), b(i))}, \quad |C_I| > 1,$$

$$s(i) = 0, \quad |C_I| = 1,$$

где

$$a(i) = \sum_{j \in C_I, i \neq j} \frac{\rho(i, j)}{|C_I| - 1}, \quad b(i) = \min_{J \neq I} \sum_{j \in C_J} \frac{\rho(i, j)}{|C_J|}.$$

Далее определим «коэффициент силуэта» для всей выборки

$$SC = \max_{\kappa} \tilde{s}(\kappa),$$

где $\tilde{s}(\kappa)$ является средним $s(i)$ для κ кластеров. Таким образом, значение κ , при котором SC достигает максимума, является оптимальным числом кластеров для разбиения.

Теперь рассмотрим «гипотезу $e - 2$ », она основана на анализе последовательности минимальных расстояний, найденных на каждом шаге. Из этой последовательности выделяем по четыре значения $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ и при помощи аппроксимационно-оценочного критерия определяем момент, когда характер возрастания последовательности минимальных расстояний начинает меняться с линейного на параболический [8].

Квадратичная форма аппроксимационно-оценочного критерия для четырёх точек имеет вид

$$\delta^2(4_0) = \frac{1}{245} (19y_1^2 - 11y_2^2 + 41y_3^2 + 12y_1y_2 - 64y_1y_3 - 46y_2y_3),$$

где $y_1 = F_{n+1} - F_n$, $y_2 = F_{n+2} - F_n$, $y_3 = F_{n+3} - F_n$.

Если $\delta^2(4_0) \leq 0$, то возрастание y_n является линейным, если же квадратичная форма $\delta^2(4_0) > 0$, то возрастание y_n стало нелинейным. Это говорит о том, что в данный момент процесс иерархической кластеризации может быть остановлен.

Но аппроксимационно-оценочный критерий обладает большой чувствительностью, и в общем случае может быть получен неудовлетворительный момент остановки кластеризации. Введём преобразование $y_i = F_i + qi$ и будем последовательно увеличивать q . Такое преобразование последовательности минимальных расстояний позволяет получить систему множеств устойчивой кластеризации $Q_1, Q_2, \dots, Q_{e-2}, Q_{e-1}, Q_e$, где каждый промежуток Q_i содержит значения q , при которых момент остановки одинаков, т. е. для любого q из Q_i получается один и тот же результат кластеризации. Собственно, «гипотеза $e - 2$ » заключается в том, что предпочтительное количество кластеров получается при значениях q из Q_{e-2} , так как

при q из Q_{e-1} наблюдается «цепной эффект», а при q из луча Q_e все объекты выборки объединяются в один кластер.

Для оценки качества кластеризации используется V-мера, которая является средним гармоническим между однородностью и полнотой. Данная мера принимает значения от 0 до 1, чем ближе её значение к единице, тем выше качество кластеризации [11]. Если V-мера равна единице, то это означает, что результат автоматической кластеризации полностью совпал с эталонной кластеризацией объектов модельной выборки.

3. Результаты математического моделирования. Для проведения вычислительных экспериментов был использован язык программирования Python версии 3.9. Визуализация выполнена при помощи библиотеки Matplotlib. Для вычисления V-меры использовалась функция `sklearn.metrics.v_measure_score` из библиотеки Scikit-learn.

Модельные данные были кластеризованы агломеративными методами. Для каждой «меры близости» между кластерами были применены оба метода выбора оптимального числа кластеров. Таким образом, получилось десять вариантов кластеризации. Результаты представлены в таблицах 1–5.

Прежде всего стоит отметить, что метод одиночной связи при числе кластеров равном пяти даёт неверный результат, в то время как остальные методы достигают эталонного результата. Но коэффициент силуэта при каждой «мере близости» указывает, что четыре – это предпочтительное количество кластеров. Так как при каждой «мере близости» выборка разбивается на четыре одинаковых подмножества, коэффициент силуэта во всех случаях даёт одинаковый результат кластеризации. Также стоит отметить, что «коэффициент силуэта» при разбиении на пять кластеров даже не стоит на втором месте по величине.

В отличие от «коэффициента силуэта» «гипотеза $e - 2$ » показывает различные результаты. Прежде всего при методе одиночной связи «гипотеза $e - 2$ » абсолютно не справляется с задачей. Но в то же время связка «гипотезы $e - 2$ » и метода средней связи безупречно кластеризуют объекты, о чём свидетельствует значение V-меры, равное единице. В остальных случаях «гипотеза $e - 2$ » выдаёт тот же результат, что и метод силуэта.

Таблица 1. Метод одиночной связи

Количество кластеров	Коэффициент силуэта	Интервал устойчивой кластеризации	V-мера
2	0,493	–	0,398
3	0,720	$e - 1$	0,724
4	0,825	–	0,856
5	0,735	–	0,834
6	0,751	–	0,820

Таблица 2. Метод полной связи

Количество кластеров	Коэффициент силуэта	Интервал устойчивой кластеризации	V-мера
2	0,580	–	0,537
3	0,726	$e - 1$	0,766
4	0,825	$e - 2$	0,856
5	0,658	–	1,0
6	0,596	–	0,973

Таблица 3. Метод средней связи

Количество кластеров	Коэффициент силуэта	Интервал устойчивой кластеризации	V-мера
2	0,615	–	0,592
3	0,720	$e - 1$	0,724
4	0,825	–	0,856
5	0,658	$e - 2$	1,0
6	0,596	–	0,973

Таблица 4. Центроидный метод

Количество кластеров	Коэффициент силуэта	Интервал устойчивой кластеризации	V-мера
2	0,615	–	0,592
3	0,720	$e - 1$	0,724
4	0,825	$e - 2$	0,856
5	0,658	$e - 3$	1,0
6	0,596	–	0,973

Таблица 5. Метод Уорда

Количество кластеров	Коэффициент силуэта	Интервал устойчивой кластеризации	V-мера
2	0,580	–	0,537
3	0,726	$e - 1$	0,766
4	0,825	$e - 2$	0,856
5	0,658	–	1,0
6	0,611	–	0,937

4. Заключение. Результаты вычислительных экспериментов позволяют сравнить, как работает «коэффициент силуэта» и «гипотеза $e - 2$ » с описанными выше «мерами близости» кластеров.

Как видно из результатов, нечёткие границы между кластерами существенно мешают точно определить предпочтительное число кластеров, даже несмотря на то, что четыре «меры близости» на одном из этапов кластеризации дают эталонный результат. «Коэффициент силуэта» вообще не может правильно определить предпочтительное число кластеров, поскольку он основан на среднем расстоянии объекта до объектов своего кластера и среднем расстоянии объекта до объектов другого ближайшего кластера.

Основанная на анализе аппроксимационно-оценочным критерием последовательности минимальных «мер близости», «гипотеза $e - 2$ » также имеет трудности с определением предпочтительного числа кластеров, но безупречно справляется с задачей в связке с методом средней связи.

Литература

1. Hartigan J. A. Clustering Algorithms. New York: John Wiley & Sons, 1975. 351 p.
2. Everitt B. S. Cluster Analysis. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2011. 330 p.
3. Rousseeuw P. J. Silhouettes: a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis // Computational and Applied Mathematics. 1987. Vol. 20. P. 53–65.
4. de Amorim R. C., Hennig C. Recovering the number of clusters in data sets with noise features using feature rescaling factors // Information Sciences. 2015. Vol. 324. P. 126–145.
5. Thorndike R. L. Who belongs in the family? // Psychometrika. 1953. Vol. 18. No 4. P. 267–276.
6. Orekhov A. V. Quasi-deterministic processes with monotonic trajectories and unsupervised machine learning // Mathematics. 2021. Vol. 9. No 18. P. 1–26.

7. Bodrunova S. S., Orekhov A. V., Blekanov I. S., Lyudkevich N. S., Tarasov N. A. Topic detection based on sentence embeddings and agglomerative clustering with markov moment // Future Internet. 2020. Vol. 12. No 9. P. 1–17.
8. Орехов А. В. Марковский момент остановки агломеративного процесса кластеризации в евклидовом пространстве // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 1. С. 76–92.
9. Orekhov A. V. Agglomerative method for texts clustering // Lecture Notes in Computer Science / ed. by S. S. Bodrunova. Cham: Springer, 2019. P. 19–32.
10. Aldenderfer M. S., Blashfield R. K. Cluster Analysis. Beverly Hills: SAGE Publications, 1984. 88 p.
11. Rosenberg A., Hirschberg J. V-measure: a conditional entropy-based external cluster evaluation measure // Proc. of the 2007 Joint Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and Computational Natural Language Learning (EMNLP-CoNLL). 2007. P. 410–420.

УДК 004.852

Ежов Ф. В.

Исследование гибридных моделей нейронных сетей с применением SSA на примере реальных данных

Рекомендовано к публикации доцентом Голяндиной Н. Э.

1. Введение. В настоящее время прогнозирование временных рядов является важной задачей [1–3]. Без нейросетевых подходов не обошлось и здесь, в частности в статье [2] описано применение сверточных нейронных сетей для прогнозирования временных рядов. В данной работе рассматривается использование алгоритма SSA в качестве предобработки вместе с методами прогнозирования в рамках задачи прогнозирования временных рядов. Такие методы называются гибридными. В работе [4] было продемонстрировано улучшение точности гибридного метода SSA-ANN по сравнению с обычным ANN на примере модельных и реальных данных. Рассматривался один и тот же набор гиперпараметров для гибридного и для обычного метода. В данной работе сравнение обычных и гибридных методов проведено шире. Рассмотрено четыре нейронные сети. Использовалась полносвязная сеть (MLP, далее в работе именуемая ANN), описанная в работе [5], а также рекуррентные нейронные сети RNN, GRU и LSTM [7–9]. На реальных данных проведено сравнение обычных и гибридных методов. Исследовалась устойчивость гибридных методов к изменению набора гиперпараметров. Гиперпараметры методов перебирались по сетке. В качестве меры ошибки использовалась метрика RMSE.

2. Метод SSA (Singular Spectrum Analysis). Метод SSA используется для разложения исходного ряда в сумму рядов, которые легко интерпретировать и понять их поведение. Обычно исходный ряд раскладывается в сумму трех рядов: тренд – медленно меняющаяся компонента, сезонность – циклическая компонента с фиксированным периодом и шум. Информацию про базовый алгоритм SSA и связанные с методом фундаментальные понятия можно найти в [10].

Ежов Федор Валерьевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: morememes@yandex.ru, тел.: +7(921)867-32-56

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-01-00067

Рассмотрим алгоритм SSA. Для общности обозначим временной ряд $X_N = (x_1, \dots, x_N)$. Считаем, что каждый временной ряд состоит из компоненты S_N – сигнала и ξ_N – шума (случайный процесс с нулевым математическим ожиданием): $X_N = S_N + \xi_N$.

Параметры: L – длина окна, r – количество первых компонент.

Входные данные: временной ряд X_N .

Результат работы: оценка сигнала \hat{S}_N .

Алгоритм работы SSA:

1. Построение траекторной матрицы:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_L \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_K & x_{K+1} & \cdots & x_N \end{pmatrix}, \quad K = N - L - 1.$$

2. Применение метода SVD к матрице \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d, \quad \mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad d = \max\{i : \lambda_i > 0\}.$$

3. Группировка первых r собственных троек:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_r, \quad r \leq d.$$

4. Путем диагонального усреднения матрицы $\hat{\mathbf{X}}$ получаем оценку сигнала временного ряд \hat{S}_N .

3. Методы. Для прогнозирования временного ряда используются четыре нейронные сети: одна полносвязанная сеть с одним скрытым слоем – ANN и три рекуррентных сети – RNN, GRU, LSTM. Гибридными методами называем те, которые используют предобработку данных с помощью SSA.

У каждой нейронной сети есть гиперпараметр – размер скрытого слоя h .

Обычный метод получает на вход последовательность длиной $[x_1, \dots, x_T]$ и выдает прогноз на одну точку вперед (\hat{x}_{T+1}).

На примере RNN:

$$\hat{x}_{T+1} = \text{RNN}_h\{[x_1, \dots, x_T]\}.$$

Гибридный метод получает на вход последовательность, обработанную с помощью метода SSA – $[\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_T]$, и прогнозирует на одну точку вперед.

На примере SSA-RNN:

$$\hat{x}_{T+1} = \text{SSA-RNN}_h\{\{\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_T\}\}.$$

4. Данные. В разделе описывается процесс подготовки данных, так же приводится описание данных, используемых в статье.

4.1. Подготовка данных. Рассмотрим Z_N – временной ряд длины N . Разобьем ряд Z_N на тренировочную, валидационную и тестовую выборку. Сделаем разбиение, исходя из того, что будем прогнозировать по T точкам ряда следующую точку.

Пусть оператор \mathcal{T}_L переводит временной ряд в траекторную матрицу для длины окна, равной L . Тогда обратный оператор \mathcal{T}^{-1} переводит матрицу во временной ряд. Построим траекторную матрицу для длины окна $T + 1$:

$$\mathbf{Z} = \mathcal{T}_{T+1}(Z_N) = \left(\begin{array}{cccc|c} z_1 & z_2 & \cdots & z_T & z_{T+1} \\ z_2 & z_3 & \cdots & z_{T+1} & z_{T+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{N-T} & z_{N-T+1} & \cdots & z_{N-1} & z_N \end{array} \right).$$

Левую часть матрицы \mathbf{Z} обозначим \mathbf{Z}^x , а правую часть – \mathbf{Z}^y . Также разобьем матрицу по строчкам на три части: тренировочную (train), валидационную (val) и тестовую (test). Пусть τ , v и t номера последних строчек в каждой соответствующей части. Обозначим $\mathbf{Z}_{a,b}^{(c,d)}$ часть матрицы \mathbf{Z} с a по b строчку и с c по d столбец. Тогда части train, val, test записываются как $\mathbf{Z}_{\text{train}} = \mathbf{Z}_{1,\tau}^{(1,T+1)}$, $\mathbf{Z}_{\text{val}} = \mathbf{Z}_{\tau+T+1,v}^{(1,T+1)}$, $\mathbf{Z}_{\text{test}} = \mathbf{Z}_{v+T+1,t}^{(1,T+1)}$. В этих же обозначениях $\mathbf{Z}^x = \mathbf{Z}_{1,N-T}^{(1,T)}$, $\mathbf{Z}^y = \mathbf{Z}_{1,N-T}^{(T+1,T+1)}$.

4.2. SSA-предобработка. Предобработка SSA для тренировочной выборки описывается следующим алгоритмом:

1. Преобразуем train часть матрицы \mathbf{Z} во временной ряд $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{Z}_{\text{train}})$.
2. Получим ряд $\hat{\mathbf{Z}} = \text{SSA}_{L,r}(\tilde{\mathbf{Z}})$.
3. Получаем траекторную матрицу $\hat{\mathbf{Z}} = \mathcal{T}_{T+1}(\hat{\mathbf{Z}})$, которая будет результатом работы предобработки SSA для тренировочной выборки.

Предобработка SSA для валидационной или тестовой выборки отличается от предыдущей, ввиду разных предназначений выборок. В отличие от тренировочной выборки, о которой все известно, считается, что о валидационной и тестовой выборках нет информации. В этих случаях SSA-обработку следует применять так, чтобы предыдущие значения ряда не получали информации от будущих («заглядывание в будущее»).

Пусть $Z_{b,e} = [z_b, \dots, z_e]$ подряд ряда Z , где b – начальный индекс, e – конечный индекс. Пусть p – индекс ряда, такой что $b < p < e$. Следующий алгоритм описывает процедуру получения ряда $Z_{p+1,e}$, обработанного с помощью SSA без «заглядывание в будущее»:

1. Пусть есть ряд $Z_{b,e}$ и задано p . Тогда $Q = e - p$ – размер ряда $Z_{p+1,e}$. Пусть $\hat{Z}_Q = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_Q)$ – ряд размера Q .
2. Для каждого $i = [1, \dots, Q]$ получим

$$\hat{Z}'_{b+i-1,p+i} = \text{SSA}_{L,r}(Z_{b+i-1,p+i}).$$

Присвоим значение последнего элемента полученного ряда \hat{z}'_{p+i} значению ряда \hat{Z}_Q с соответствующим индексом, $\hat{z}_i = \hat{z}'_{p+i}$.

3. Получили ряд \hat{Z}_Q размера Q , значения которого являются значениями ряда $Z_{p+1,e}$, обработанные с помощью SSA без «заглядывания в будущее».

Обозначим процедуру получения $\hat{Z}_Q = \text{SSA}^{(p)}(Z_{b,e})$. Тогда алгоритм предобработки для валидационной выборки запишется следующим образом:

1. Запишем $\mathbf{Z}_{1,v}^{(1,T+1)}$ как $Z_{1,v+T+1}$.
2. Выберем $p = \tau + T + 1$.
3. Получим $\hat{Z}_Q = \text{SSA}^{(p)}(Z_{1,v+T+1})$.
4. Перейдем обратно к траекторной матрице $\hat{\mathbf{Z}}_{\text{val}} = \mathcal{T}_{T+1}(\hat{Z}_Q)$, которая будет результатом предобработки SSA для валидационной выборки.

Размерность $\hat{\mathbf{Z}}_{\text{val}}$ будет совпадать с размерностью \mathbf{Z}_{val} . Аналогичным образом строится тестовая выборка.

4.3. Обучение методов на подготовленных данных. Во время обучения, как и в классических задачах классификации или

регрессии, методы «учатся» (алгоритм обратного распространения ошибки) по левой части траекторной матрицы тренировочной выборки $\mathbf{Z}_{\text{train}}^x$ предсказывать правую часть $\mathbf{Z}_{\text{train}}^y$. Для гибридных методов в отличие от обычных левая часть траекторной матрицы преобразована с помощью SSA по алгоритмам, описанным в пункте 4.2.

4.4. Реальные данные. Эксперимент проведен на временном ряде (см. рис. 1) длины 1500 точек, на котором отображены средне-месячное количество осадков в Индии (далее «Indian rain»). Данные взяты из статьи [5] (прямая ссылка на скачивание [6]).

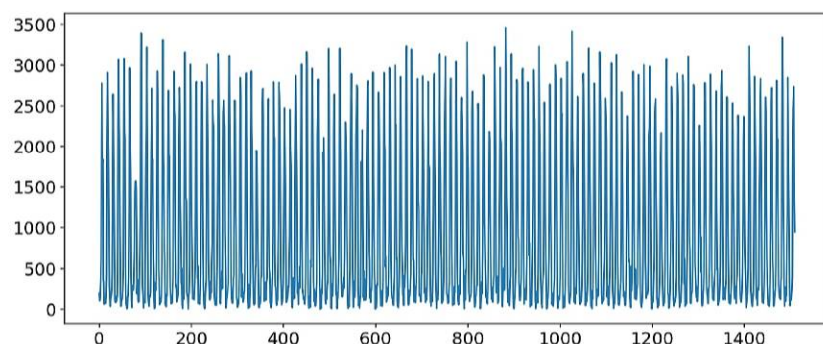


Рис. 1. Данные «Indian rain»

5. Эксперимент. Здесь приводится сравнение обычных и гибридных методов с помощью метрики RMSE на данных «Indian Rain». Временной ряд разобьем на выборки 750, 500, 250 точек ($\tau = 750 - T$, $v = 1250 - T$, $t = 1500 - T$) для тренировочной, валидационной и тестовой выборки соответственно. Для гибридных методов возьмем следующие гиперпараметры SSA: $L = 500$ (половина тренировочной выборки), $r = 7$. Подробности выбора гиперпараметров SSA можно найти в [10].

Сравним методы на сетке параметров T и h . Параметр T перебираем по сетке от 12 до 480 с шагом 36, h – по сетке от 10 до 100 с шагом 15. Тогда для каждой модели получится 7 результатов для каждого T .

Результаты сравнения представлены на рис. 2. Каждая точка получена путем усреднения соответствующих 7 результатов для каждого метода. Как видно из рис. 2, стабильнее всего ведут себя ги-

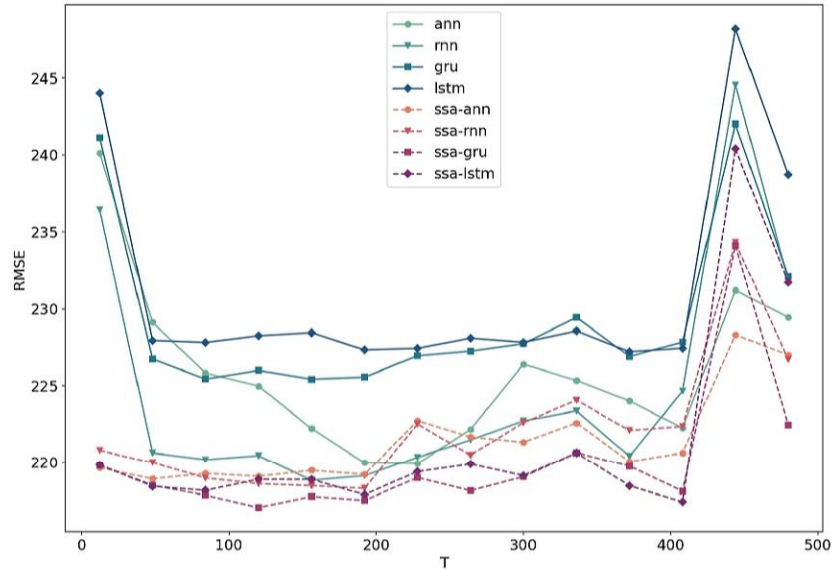


Рис. 2. Зависимость ошибки от размера входного вектора

бридные методы. Также наилучший результат принадлежит методу SSA-GRU. Можно заметить существенное улучшение точности у гибридных методов для $T = 12$. Исходя из результатов, можно говорить, что корректное использование предобработки SSA улучшает точность методов, а также уменьшает зависимость результатов от параметров методов. Также можно говорить о большем количестве тренировочных данных, ввиду хорошей точности для $T = 12$ (меньше T , больше тренировочных пар). Еще гибридные методы позволяют выбрать менее сложную модель, что ведет к ускорению вычислений при несущественной потере в точности.

Для разных начальных весов методов проведем сравнение, чтобы исключить случайности в полученных результатах. Зафиксируем $T = \{12, 156\}$, сетку для h оставим такую же, а количество различных наборов начальных весов положим равным 7. Полученные результаты усредним по наборам начальных весов для каждого соответствующего h . Построим график зависимости усредненной ошибки по метрике RMSE от размера скрытого слоя h .

На рис. 3 показаны результаты для $T = 12$. Видим существенное улучшение точности для гибридных методов.

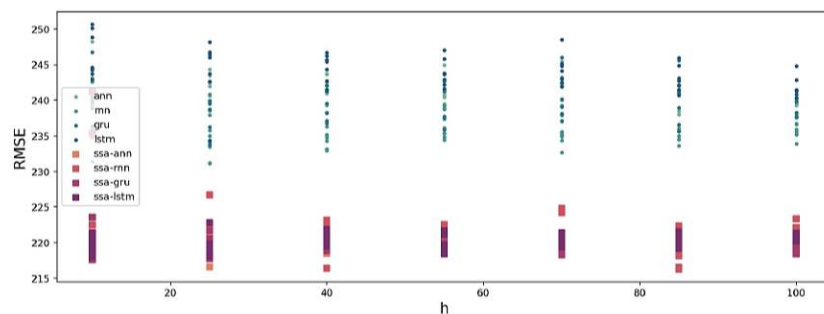


Рис. 3. Зависимость ошибки от размера скрытого слоя, $T = 12$

На рис. 4 показан результат для $T = 156$. На нем можно наблюдать, что гибридные методы имеют меньший разброс, что делает такую модель стабильнее. Также средние ошибок для гибридных моделей ниже.

Результаты второго эксперимента подкрепляют выводы первого. Гибридные модели с предобработкой SSA показали себя лучше на данных «Indian Rain».

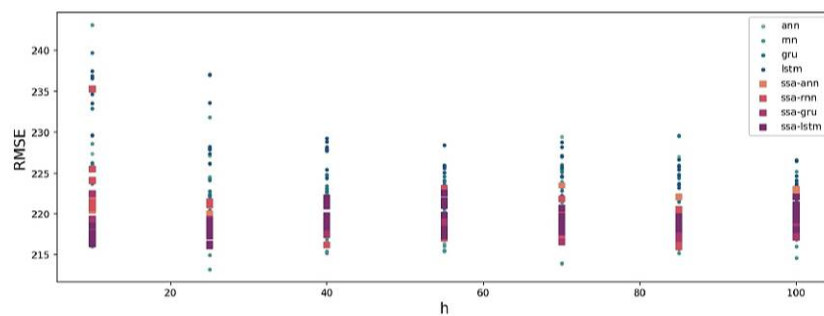


Рис. 4. Зависимость ошибки от размера скрытого слоя, $T = 156$

6. Заключение. На примере реальных данных показано, что правильное использование метода SSA в качестве предобработки данных приводит к улучшению точности в прогнозе. Также показано уменьшение зависимости ошибки от параметров метода прогнозирования, что делает метод более устойчивым. Это позволяет выбрать менее сложную модель, что приводит к меньшему количеству вычислений. Также использование гибридных методов позволяет снизить размерность входного вектора, тем самым увеличивая количество тренировочных пар.

Литература

1. Ковалев С. С. Прогнозирование средневзвешенной цены торгов нефтепродуктами на бирже классическими методами анализа временных рядов // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 387–391.
2. Коваленко Л. А. Применение сверточных нейронных сетей для прогнозирования временных рядов // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 292–296.
3. Калинин В. И. Подход к прогнозированию дорожного трафика через моделирование многомерных временных рядов // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 377–381.
4. Ezhov F. On using singular spectrum analysis in machine learning for time series prediction // International Student Conference “Science and Progress”. Saint-Petersburg: SBORKA, 2021. P. 104.
5. Du K., Zhao Y., Lei J. The incorrect usage of singular spectral analysis and discrete wavelet transform in hybrid models to predict hydrological time series // Journal of Hydrology. 2017. Vol. 552. P. 44–51.
6. Данные «Indian rain» [Электронный ресурс]: URL: https://tropmet.res.in/static_pages.php?page_id=53 (дата обращения: 13.04.22).
7. Elman J. L. Finding structure in time // Cognitive science. 1990. Vol. 14. No 2. P. 179–211.

8. Cho K. et al. Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation // arXiv preprint [Электронный ресурс]; URL: <https://arxiv.org/abs/1406.1078> (дата обращения: 13.04.22).
9. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory // Neural computation. 1997. Vol. 9. No 8. P. 1735–1780.
10. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001. 320 p.

УДК 519.687.4

Ивкин К. А.

Разработка программного комплекса для управления роботом-манипулятором на примере FANUC M-20iA

Рекомендовано к публикации доцентом Шиманчуком Д. В.

1. Введение. В современном мире робототехника занимает особое место в науке. Быстро развивающиеся технологии позволяют достигать все более высокого уровня робототехники и роботостроения. Для управления роботами различного вида используется самое разнообразное программное обеспечение, поэтому вопрос его разработки встает особенно остро. В данной статье рассматривается возможный подход к разработке программного комплекса для роботоманипулятора. Необходимо заметить, что построенный в процессе работы программный комплекс можно модифицировать исходя из особенностей конкретного робота и поставленной перед ним задачи. Благодаря тому, что при разработке был использован широко распространенный язык программирования Python, процесс модификации становится более простым и понятным.

В ходе работы над построением программного комплекса рассмотрена необходимая техническая документация, а также ряд интернет-ресурсов. Принцип работы с контроллером FANUC R-30iA, при помощи которого происходит управление роботом-манипулятором FANUC M-20iA, представлен в [1]. Информация о языке программирования KAREL, используемом при реализации сокет-сервера, а также инструкции как компилировать код изложены в [2, 3]. Для реализации сокет-клиента применена Python-библиотека socket [4]. В качестве фреймворка для имплементации веб-сервера выбран fastapi [5]. Результаты работы оформлены в виде репозитория на GitHub [6].

2. Постановка задачи. Необходимо разработать программный комплекс с открытым кодом для управления роботами манипуляторами при помощи ЭВМ. Открытость кода способствует свободному

Ивкин Кирилл Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054655@student.spbu.ru, тел.: +7(911)703-31-30

использованию и модификации полученных результатов и позволяет интегрировать в полученный программный комплекс другие библиотеки с открытым кодом. Это в свою очередь гарантирует возможность непрерывной модификации и улучшения полученного результата в условиях быстро развивающихся технологий.

3. Реализация. Для решения задачи выбрана следующая архитектура программного комплекса (см. рис. 1). В ней присутствует две основных составляющих: веб-сервер и контроллер робота. При помощи веб-сервера происходит коммуникация между контроллером робота манипулятора и оператором робота.

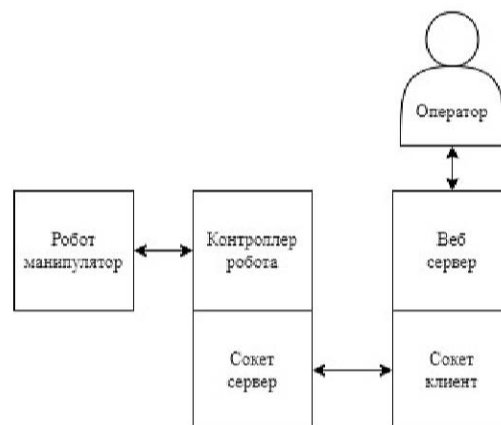


Рис. 1. Схема программного комплекса

Схема работы программного комплекса:

1. Оператор отправляет запрос на веб-сервер.
2. Запрос валидируется и преобразуется в байтовое сообщение, отправляемое сокет-клиентом на сокет-сервер.
3. Сокет-сервер в свою очередь валидирует пришедший ему запрос и отдает команду роботу-манипулятору.
4. Робот манипулятор совершает указанное оператором перемещение.

Рассмотрим отдельные звенья описанной цепи. Коммуникация между роботом и компьютером осуществляется посредством сокет-архитектуры.

Сокет – это сетевой программный интерфейс, обеспечивающий коммуникацию между процессами. Процессы, использующие сокет, могут находиться в одной системе или в разных системах, в разных сетях [7].

В сокетной архитектуре участвуют две составляющие: сервер, который настроен на получение и обработку данных, схема его работы представлена в виде блок-схемы (см. рис. 2), и клиент, отправляющий эти данные и получающий в качестве ответа результат обработки отправленных данных.

Логика работы сокет-клиента такова:

1. Клиент подключается к сокет-серверу, используя его сетевой адрес и сетевой порт.
2. Далее отправляет на сервер запрос в виде байтовой строки.
3. По завершению операций сервер возвращает клиенту ответ.
4. Клиент отключается от сервера.

Веб-сервер представляет собой связующее звено между оператором робототехнической системы и роботом. Он предназначен для преобразования сообщений из удобного для оператора формата в формат, необходимый для передачи сообщения сокет-серверу. Все сообщения веб-серверу передаются в виде сетевых (HTTP) запросов к программному интерфейсу приложения. Алгоритм работы оператора с веб-сервером представлен в виде блок-схемы (см. рис. 3).

4. Заключение. Таким образом построенный программный комплекс позволяет управлять роботом-манипулятором FANUC M-20iA с контроллером FANUC R-30iA. Необходимо заметить, что построенный программный комплекс можно модифицировать для работы с другими роботами-манипуляторами исходя из особенностей конкретного робота-манипулятора. Также подразумевается, что система позволяет управлять роботами-манипуляторами в автономном режиме. Это реализуемо при помощи дополнительных скриптов на любом языке программирования, работающего с протоколами HTTP, которые будут взаимодействовать с интерфейсом с помощью сетевых протоколов. Наконец, построенный программный комплекс можно модифицировать для управления группой роботов-манипуляторов или же включать в систему роботов другого типа [8]. Все эти факторы делают построенный программный комплекс достаточно гибким инструментом для управления роботами-манипуляторами.

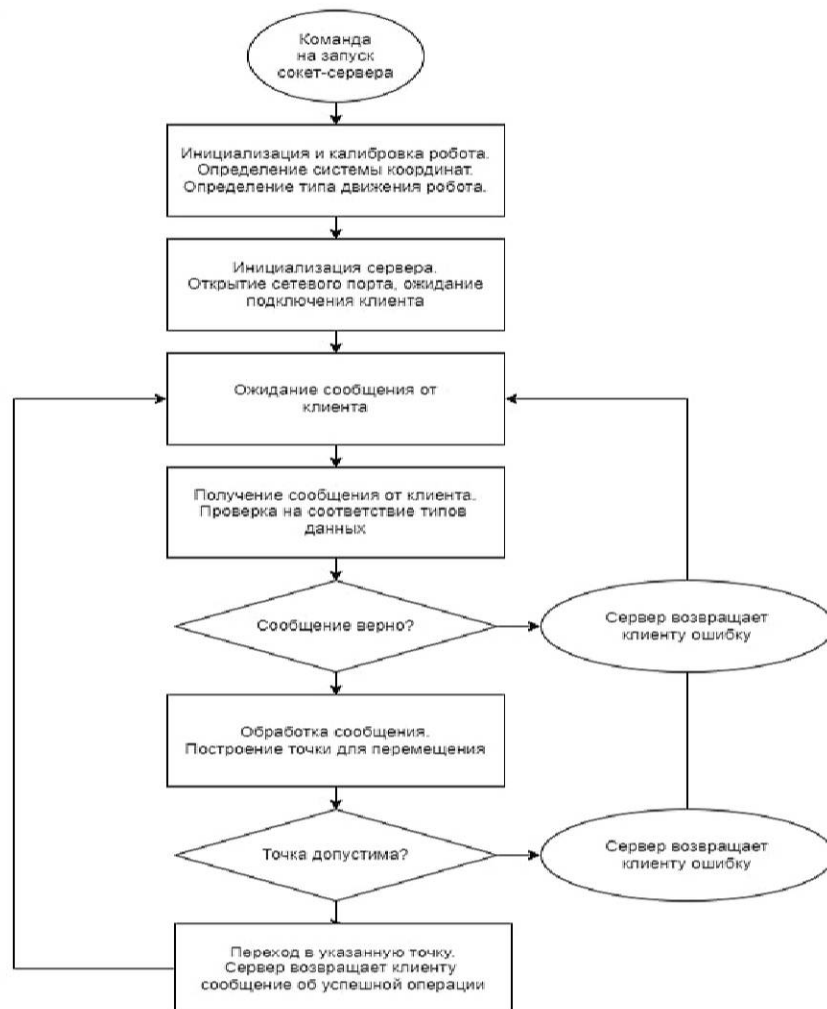


Рис. 2. Блок-схема работы сокет-сервера

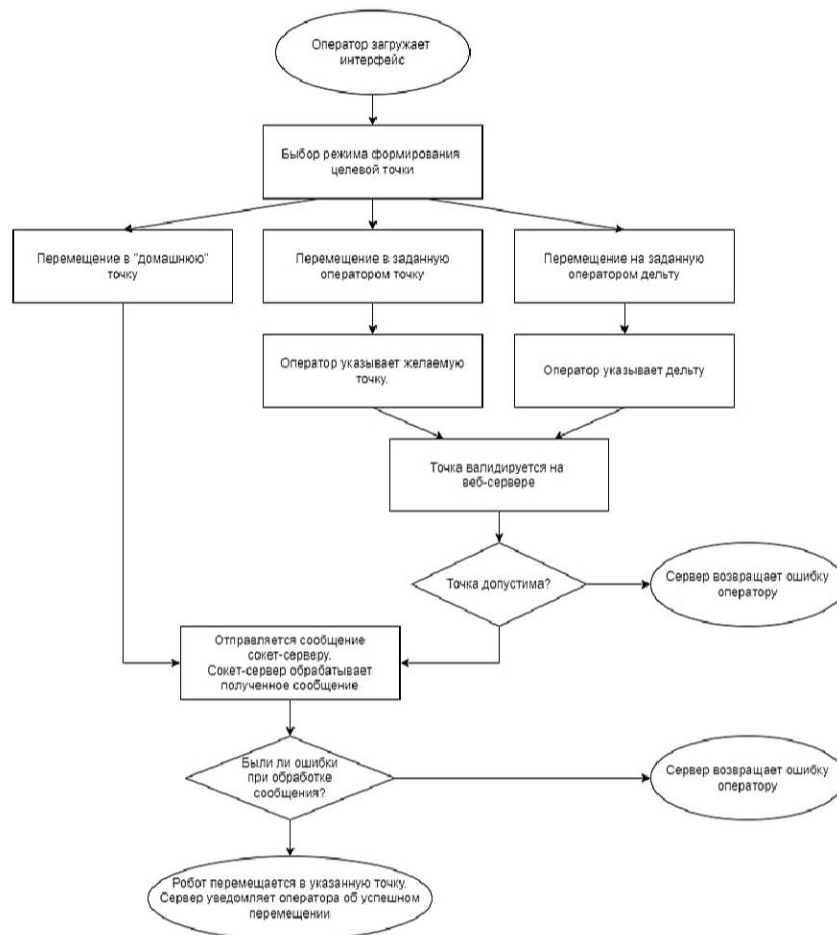


Рис. 3. Блок-схема работы веб-сервера

Литература

1. FANUC R-30iA/R-30iA Mate Controller KAREL Function Operator's Manual. FANUC Robotics America Corporation. 2012. 510 p.
2. FANUC Robotics system R-30iA and R-30iB Controller KAREL Reference Manual. FANUC Robotics America Corporation. 2012. 912 p.
3. Accompanying Training Manual Roboguide V6.40 Rev.B. FANUC Robotics Deutschland GmbH. 2012. 95 p.
4. Документация к Python библиотеке socket [Электронный ресурс]: URL:<https://docs.python.org/3/library/socket.html> (дата обращения: 07.02.22).
5. Документация к Python библиотеке fastapi [Электронный ресурс]: URL:<https://fastapi.tiangolo.com/> (дата обращения: 15.02.22).
6. Репозиторий с результатами работы [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/sitar777/fanuc-control> (дата обращения: 19.03.22).
7. IBM Socket programming [Электронный ресурс]: URL:<https://www.ibm.com/docs/en/i/7.1?topic=communications-socket-programming> (дата обращения: 07.02.22).
8. Ивкин К. А., Шиманчук Д. В. Автономное движение омниколесного робота по расчетной траектории // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 107–111.

УДК 004.415.2.031.43

Ковгар А. В., Ходосов А. С., Чугунова Н. С.

Разработка системы сбора и обработки данных о распространении вирусных заболеваний

Рекомендовано к публикации доцентом Корховым В. В.

1. Введение. На сегодняшний день задача прогнозирования распространения вирусных заболеваний стала одной из важнейших задач. Это связано с возникновением новых вирусов, обладающих высокой заразностью и представляющих угрозу человечеству. Пандемия COVID-19 показала, что существующие средства не дают необходимых результатов и нуждаются в дальнейшем совершенствовании.

Современные системы сбора и анализа данных о распространении вирусных заболеваний обладают рядом недостатков. Некоторые из них предоставляют лишь сводки по регионам, что не позволяет людям узнать информацию о количестве зараженных в местах, которые они часто посещают. Поэтому такие системы позволяют лишь оценить глобальную картину распространения вируса. Другие же системы крайне чувствительны к резкому росту количества пользователей из-за неправильно подобранных архитектурных решений.

2. Постановка задачи. Целью данной работы является разработка системы сбора и обработки данных о распространении вирусных заболеваний. Система должна удовлетворять ряду условий для обеспечения корректной работы при высоких нагрузках, а также для быстрого масштабирования при потенциально быстром многократном увеличении количества пользователей. Также система должна быть доступна к использованию широкому кругу пользователей. Данные, полученные в результате работы системы, должны быть

Ковгар Алексей Викторович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068309@student.spbu.ru, тел.: +7(952)793-01-33

Ходосов Александр Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068705@student.spbu.ru, тел.: +7(981)956-84-50

Чугунова Надежда Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068609@student.spbu.ru, тел.: +7(931)237-98-15

пригодны для их дальнейшего анализа и использования при прогнозировании [1].

3. Разработка системы. В последние несколько лет было создано большое количество систем, позволяющих осуществлять сбор и анализ данных о распространении вирусных заболеваний, в частности COVID-19. В источнике [2] можно увидеть большой список таких систем. Однако большая часть из созданных систем являются централизованными и имеют довольно ограниченный набор функционала.

В рамках поставленной задачи требуется создать универсальную систему сбора и обработки данных о распространении вирусных заболеваний, которая может быть использована различными клиентами и для решения различных задач.

3.1. Архитектура системы. Проектирование системы начинают с выбора архитектуры. Так как в дальнейшем от этого будут зависеть многие параметры системы, такие как производительность, масштабируемость и многие другие.

Архитектуры серверных приложений можно разбить на два больших класса: монолитные и микросервисные.

Монолитные приложения представляют собой единый программный модуль, выполняющий широкий спектр задач [3]. Такой подход не способен удовлетворить поставленным требованиям.

Приложения, построенные на основе микросервисной архитектуры, представляют собой набор слабо связанных сервисов, каждый из которых исполняет строго определенную небольшую часть функционала приложения [4]. Каждый микросервис является отдельным программным модулем, который развертывается независимо от других частей приложения. Такой подход позволяет гибко настраивать ресурсы, потребляемые конкретными микросервисами, а также при необходимости масштабировать перегруженные части приложения путем создания реплик.

3.2. Индексирование данных о местоположении пользователей. Для оптимизации количества хранимых данных и уменьшения количества производимых операций необходимо использовать систему индексации данных о местоположении пользователей.

Система геопространственной индексации H3 делит мир на шестиугольные ячейки [5]. Библиотека H3 реализует сеточную систему H3. Она включает в себя функции для преобразования координат

широты и долготы в ячейку НЗ, нахождения центра ячеек НЗ, определения геометрии границ ячеек НЗ, поиска соседей ячеек НЗ и многого другого.

4. Обзор полученной системы. Рассмотрим основные результаты проектирования и разработки системы.

4.1. Компоненты системы. В результате проектирования и разработки была получена система, схема которой представлена на рис. 1. В прототипе все компоненты взаимодействуют между собой посредством REST API, но при дальнейшем развитии системы возможно использование протокола gRPC или брокеров сообщений для достижения еще большей производительности системы.

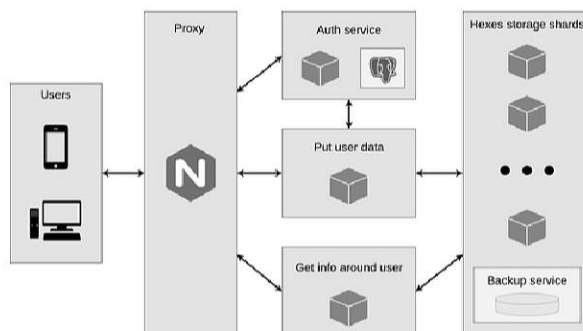


Рис. 1. Связи компонентов системы

Все сервисы запакованы в Docker контейнеры и размещены на платформе Kubernetes. Такой подход позволяет создавать необходимое число копий сервисов, не хранящих постоянных данных в оперативной памяти (stateless), т. е. всех сервисов, кроме хранилища. Также Kubernetes выполняет роль балансировщика нагрузки между созданными копиями.

Система имеет пять основных сервисов:

1. Хранилище накапливает обработанные данные о распространении вирусных заболеваний.
2. Сервис сбора данных от пользователей преобразует данные (координаты с временными метками), отправляемые пользователями, в НЗ-индексы и записывает их в хранилище.

3. Сервис выдачи данных обрабатывает пользовательские запросы по выдаче данных из хранилища.
4. Сервис авторизации выполняет задачи регистрации, авторизации и аутентификации.
5. Проxy объединяет в себе все доступные пользователям методы.

4.2. Сбор данных. Система ведет сбор данных в виде json файлов вида

```
[
  {"lat":0.122465,"lon":0.525335,"ts":1646580739},
  {"lat":0.122345,"lon":0.525655,"ts":1646580850},
  ...
]
```

Устройство пользователя ведет локальный сбор GPS координат и сохраняет время каждого сбора, далее в любой момент может отправить произвольное количество собранных данных.

4.3. Возвращаемые данные. Сервис, отвечающий за выдачу данных при запросе, собирает данные из узлов хранилища и формирует ответ. При этом существует несколько реализованных механизмов формирования ответа.

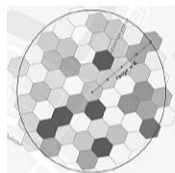


Рис. 2. Окрестность пользователя

Первый из них принимает на вход пару координат и возвращает набор НЗ-ячеек (шестиугольников), представляющий собой область некоторого радиуса вокруг пользователя, радиус может передаваться отдельным параметром. Эти данные могут использоваться, например, мобильными приложениями для мониторинга ситуации вокруг пользователя. Пример данных с радиусом 4 представлен на рис. 2.

Второй механизм используется для получения данных по произвольной области. Такие данные могут быть применены в специальных сервисах-анализаторах для оценки обстановки в определенных областях.

5. Заключение. Получены следующие результаты:

1. Разработанная система имеет высокую пропускную способность и при необходимости ее можно незамедлительно масштабировать.
2. Система может быть использована большим спектром клиентских устройств. Так, для сбора данных могут быть использованы IoT-устройства, обладающие GPS-трекером и модулем доступа к интернету. Для глобального территориального анализа данных могут быть использованы выделенные серверы для анализа данных. Мобильные приложения могут одновременно собирать данные и выполнять их анализ для конкретного пользователя.
3. Данные хранятся и предоставляются пользователям в обработанном виде и по ним невозможно восстановить данные конкретного пользователя.

Литература

1. Захаров В. В., Балькина Ю. Е. Прогнозирование динамики эпидемии коронавируса (COVID-19) на основе метода прецедентов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 249–259.
2. COVID-19 apps // Wikipedia [Электронный ресурс]: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19_apps (дата обращения: 21.02.2022).
3. Pattern: Monolithic Architecture // Microservice Architecture [Электронный ресурс]: URL: <https://microservices.io/patterns/monolithic.html> (дата обращения: 21.02.2022).
4. Pattern: Microservice Architecture // Microservice Architecture [Электронный ресурс]: URL: <https://microservices.io/patterns/microservices.html> (дата обращения: 21.02.2022).
5. H3 geospatial indexing system [Электронный ресурс]: URL: <https://h3geo.org/docs/> (дата обращения: 21.02.2022).

УДК 004.852

Кравцов В. М.

Исследование методов прогнозирования в задаче нефтепереработки

Рекомендовано к публикации доцентом Головкиной А. Г.

1. Введение. Актуальность задачи прогнозирования определяется развитием различных методов и алгоритмов машинного обучения [1], а также потенциальным эффектом от их использования. Например, с помощью этого инструмента можно автоматизировать большой объем ручной работы, а также существенно снизить риски от возникновения нестандартных значений анализируемых показателей, благодаря своевременному прогнозированию динамики процесса на заданный промежуток времени.

Данная работа представляет собой описание предлагаемого решения задачи прогнозирования целевого показателя по значениям косвенных признаков, измеренным в дискретные моменты времени. В качестве примера рассматриваются реальные данные технологического процесса очистки нефти, собранные на одном из нефтеперерабатывающих заводов России. Целевым показателем является признак, характеризующий качество процесса очистки, он зависит от химического состава перерабатываемой нефти, а также управляющих параметров и состояния системы. Построенная прогнозная модель может использоваться при факторном анализе и для решения задач оптимального управления процессом гидроочистки.

2. Описание решения. Данный раздел содержит информацию об исходном наборе данных, методах решения, а также полученных результатах.

2.1. Описание данных. Данные были предоставлены в анонимизированном виде одним из крупнейших нефтеперерабатывающих заводов в России. Набор данных состоит из одного целевого параметра CV1 и шесть косвенных, разбитых на две категории: наблюдаемые параметры (DV1) и управляющие параметры (MV1–MV5).

Кравцов Владимир Михайлович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077187@student.spbu.ru, тел.: +7(906)680-04-97

Задача состояла в том, чтобы по группам параметров MV, DV спрогнозировать значение параметра CV. Значения измерены с интервалом в 1 минуту. Для обучения и валидации использовались данные за 16 дней, собранные в период тестовой эксплуатации в октябре 2019 года (соотношение обучающей и валидационной выборки было взято равным 70/30). Для тестирования построенных моделей были предоставлены данные за весь 2019 год. Известно, что в некоторые моменты времени датчики, измеряющие показания, давали сбой, поэтому в тестовых данных присутствуют пропуски и недостоверные значения параметров.

2.2. Построение моделей. Для прогнозирования использовались методы машинного обучения. Изначально для сравнения было взято три модели – линейная регрессия (scikit-learn), градиентный бустинг (XGBoost) [2] и однослойная LSTM-нейросеть (keras) [3]. Метрики качества, выбранные в данной задаче – средняя абсолютная ошибка (MAE) и средняя абсолютная процентная ошибка (MAPE). Перед обучением также была проведена стандартизация данных. Результаты, полученные на валидационной выборке, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Первичные результаты на валидационной выборке

№	MAE	MAPE
Линейная регрессия	2,13	14,5%
Градиентный бустинг	1,9	13,69%
LSTM	2,9	17,84%

На этом этапе было решено отказаться от LSTM, так как она дала наихудший результат при том, что ее обучение требует наибольшего количества времени. Для двух других моделей были найдены пути улучшения результатов. В набор данных были добавлены дополнительные признаки: помимо значений признаков $MV[t_{i-1}]$, $DV[t_{i-1}]$ были также добавлены значения $MV[t_{i-60}, t_{i-120}]$, $DV[t_{i-60}, t_{i-120}]$, $CV[t_{i-60}, t_{i-120}]$, измеренные час и два часа назад, а также из состава предикторов исключен признак DV. Также вместо обычной линейной регрессии использовалась регрессия с L2-регуляризацией (ridge), а в качестве базового алгоритма для бустинга использовалась линейная модель вместо решающих деревьев. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты на валидационной выборке после преобразования набора данных

№	MAE	MAPE
Ridge	0,79	6,29%
Градиентный бустинг	0,81	6,37%



Рис. 1. Сравнение прогноза модели Ridge с полиномиальными признаками и реальных данных

Так как модель Ridge показала более высокое качество, от градиентного бустинга также было решено отказаться и продолжать улучшение результатов Ridge. Вместо линейной была использована полиномиальная регрессия второй степени, после чего был проведен отбор признаков с наибольшими весами. Опытным путем был подобран гиперпараметр регуляризации $\alpha = 0,1$. Итоговый результат на валидационных данных представлен на рис. 1.

На рис. 2 представлена информация о коэффициентах итоговой модели. Самыми важными признаками оказались $MV1(\text{час назад}) \times MV5(\text{час назад})$, $MV1(\text{час назад})$, $CV1(\text{час назад}) \times MV1(2 \text{ часа назад})$.

Обученная модель была протестирована на данных за весь год. Как уже отмечалось, в данных присутствовали пропуски и сбои, что отрицательно сказалось на результате. Пропуски были заполнены средними значениями, а к самим данным было применено сглаживание скользящим средним по всем предыдущим наблюдениям. Прогнозы также были сглажены, ошибки по месяцам представлены в таблице 3.

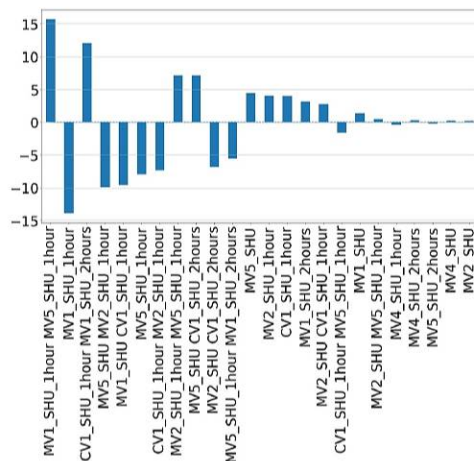


Рис. 2. Коэффициенты модели Ridge

Таблица 3. Ошибка по месяцам на тестовом множестве

№ месяц	MAE	MAPE
01.2019	3,459	30,037%
02.2019	2,427	23,596%
03.2019	2,028	19,089%
04.2019	2,633	26,816%
05.2019	3,075	30,002%
06.2019	32,103	65,646%
07.2019	1,568	15,976%
08.2019	0,617	5,997%
09.2019	0,616	5,584%
10.2019	3,301	26,444%
11.2019	71,436	66,539%
12.2019	1,182	12,474%
01.2020	3,485	37,860%

Значения ошибок в некоторые месяцы оказались довольно большими. Скорее всего это связано со сбоями датчиков. На рис. 3 видно, что данные в ноябре 2019 года сильно отличаются от валидационных на рис. 1 – модуль максимального и минимального значения значительно больше в ноябре 2019 года, также в этот период есть промежутки, на которых значение целевого признака практически не меняется. Возможно, причина в малом объеме обучающих данных

относительно тестовых. Тем не менее, можно сделать вывод, что в среднем, построенная модель хорошо улавливает динамику изменения целевого показателя в течение длительного промежутка времени. Кроме того, за счет использования полиномиальных признаков модель является интерпретируемой и может быть использована для факторного анализа процесса гидроочистки нефти.

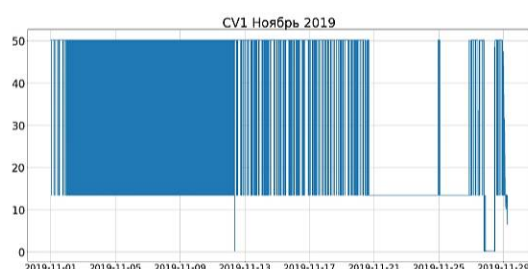


Рис. 3. Значения признака CV1 в ноябре 2019 года (максимальная MAE и MAPE)

3. Заключение. В данной работе представлено исследование основных методов прогнозирования на примере задачи нефтепереработки. Проведено исследование данных, их предварительная обработка, построение и выбор модели, ее настройка, улучшение и тестирование. После этого проведен анализ полученных результатов. В дальнейшем планируется продолжать исследования в этой области, изучить другие подходы к прогнозированию, а также автоматизировать подбор гиперпараметров моделей. Тестирование создаваемого инструментария для прогнозирования предполагается в том числе на других наборах данных.

Литература

1. Francesca L. Machine Learning for Time Series Forecasting with Python / ed. by J. York-Winegar. Philadelphia, University of California: Berkeley, 2021. 206 p.
2. XGBoost: A Scalable Tree Boosting System [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1603.02754.pdf> (дата обращения: 15.03.2022).
3. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // Neural Computing. 1997. Vol. 9. No 8. P. 1735–1780.

УДК 004.891.2

Кузнецов М. М.

Разработка сервиса юридической помощи на основе методов машинного обучения

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Стученковым А. Б.*

1. Введение. На сегодняшний день проблема получения базовой юридической помощи проявляется достаточно остро в повседневной жизни граждан. Несмотря на то, что в сети интернет присутствует огромное количество материалов по юриспруденции и Российскому законодательству, разобраться в этой массе разрозненной информации неподготовленному человеку крайне сложно. В то же время сервисов, удовлетворяющих потребность пользователей в быстрой и адекватной юридической помощи, фактически нет.

Для этих целей может подойти некоторая автоматизированная система для получения юридической консультации на основе законодательства РФ. Так, человек, нуждающийся в получении быстрой консультации, смог бы просто зайти на известный сайт и получить краткий ответ, а также подборку законов и нормативных актов для более подробного изучения.

Таким образом, целью данной работы является реализация сервиса, обеспечивающего получение юридической помощи по базовым вопросам, нацеленного на неподготовленное население, а также разработка решения в виде веб-сайта.

2. Обзор. Получение вопроса пользователя, а также последующий ответ на него является достаточно частой задачей в современных прикладных задачах обработки естественных языков [1]. Системы, решающие данную задачу зачастую называют *чат-ботами*. Чат-бот – компьютерная программа, разрабатываемая для общения с людьми, особенно посредством сети интернет. Такие системы распознают тематику разговора, намерения пользователя, ключевые слова разговора, а также имеют некоторую краткосрочную память для

Кузнецов Максим Михайлович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kuznetsovmm@mail.ru, тел.: +7(919)504-59-18

запоминания контекста разговора. На основе этих данных такие программы способны выбирать или генерировать некоторым образом лучший для текущей ситуации ответ. Рассмотрим их основные типы.

2.1. Системы, основанные на правилах. Существующие решения на рынке подобных продуктов представляют собой достаточно примитивные программы, действующие по принципу блок-схемы с переходами в зависимости от ответов пользователя. Такой подход может быть уместен и даже в полной мере эффективен для решения небольших задач по типу выбора ресторана или заказа билета в кино [2]. Однако с ростом сложности предметной области количество ручного труда, необходимое для построения качественной модели, совершающей адекватный отклик на любой запрос (или на приемлемый процент запросов) пользователя, увеличивается экспоненциально. Это обуславливает невозможность использования данных блок-схем для произвольной предметной области и, в частности, такой комплексной и иногда противоречивой как юриспруденция.

2.2. Обучаемые чат-боты. Главный недостаток систем, основанных на правилах – отсутствие гибкости. Описанные программы способны прекрасно моделировать общение по строго заданному сценарию, однако любая ошибка ввода пользователя или неописанный вариант ответа может привести к некорректному отклику. Данную проблему призвано решить машинное обучение. Чат-боты, основанные на таком подходе [3], способны как обобщать полученные данные, так и генерировать ответ. Это лишает полного контроля над откликом системы и усложняет разработку, однако качество в комплексных предметных областях значительно повышается.

В зависимости от назначения чат-бота возможна комбинация двух описанных подходов.

3. Построение модели. Юриспруденция – крайне сложная и обширная область, поэтому разработка системы, основанной на правилах, не представляется возможным. Таким образом, для реализации необходимо использовать подходы к обработке естественных языков, а также методы машинного обучения. Существует несколько фреймворков, предоставляющих построение чат-ботов. Наиболее популярными и эффективными из них являются *DeepPavlov* [4] и *Haystack by Deepset* [5]. Обе библиотеки предоставляют базовые методы анализа языка, однако со второй возможно построить гораз-

до более гибкую систему, предназначенную для ответов на вопросы. Архитектуру чат-бота можно разбить на следующие сущности:

1. *База знаний*, включающая в себя основные кодексы, законы и федеральные законы РФ.
2. *Сборщик* подходящих документов из базы знаний.
3. *Генератор ответа* по контексту найденных документов.

3.1. База знаний. При разработке рассматривались только основные сборники законов и нормативные акты РФ. Судебная практика не вошла в базу знаний. Тексты документов были получены из открытых источников сети интернет. Для составления файловой базы написана программа на Python, автоматически собирающая информацию с сайта [6].

В центре данной архитектуры находится база данных, хранящая всю известную информацию о предметной области. Именно от ее выбора зависит скорость и качество ответа на запрос. Поскольку данная предметная область может включать в себя тысячи различных статей, необходимо осуществлять быстрый поиск по ним. Для этих целей была выбрана *ElasticSearch* [7], позволяющая работать с огромным количеством записей без потери производительности.

3.2. Подбор документов. Для подбора документов по заданному запросу можно рассмотреть два подхода. Первый – использование алгоритма *BM25* – модификации алгоритма *TF-IDF*. Оригинальный алгоритм использует формулу:

$$TF-IDF = tf(t, d) \times idf(t, D),$$

где $tf(t, d)$ – число вхождений слова t в документ d , $idf(t, D)$ – инвертированная частота вхождения слова t в набор документов D . Таким образом, чем чаще слово встречается в документе и, в свою очередь, меньше – в остальных документах коллекции, тем данный документ более релевантен.

В основе *BM25* лежат те же идеи, однако вводятся дополнительные предположения. Первая заключается в том, чтобы контролировать рост $tf(t, d)$. Таким образом, если частота некоторого слова в документе достаточно велика, то вклад документа, имеющего даже большую частоту, будет незначительно больше первого. Другое улучшение – придание важности более коротким документам. Если некоторое слово встречается в коротком документе, то вероятно оно

более важно, чем в длинном тексте, упомянутое один или два раза. Функция $idf(t, D)$ в *BM25* также сильнее штрафует слова, встречающиеся во многих документах.

Итоговая оценка запроса представляет из себя сумму оценок каждого слова. Описанные модификации *TF-IDF* задаются формулой

$$Score(Q, D) = \sum_{t \in Q} \frac{f_{t,D}(k_1 + 1)}{f_{t,D} + k_1 \left(1 - b + b \frac{|D|}{A}\right)} \ln \left(1 + \frac{N - n_t + 0,5}{n_t + 0,5}\right),$$

где D – документ, Q – набор слов в запросе, $f_{t,D}$ – частота слова t в документе D , k_1 – параметр, ограничивающий рост $tf(t, d)$, b – параметр для настройки важности длины документа, A – средняя длина документов в коллекции, N – количество документов в коллекции, n_t – число документов, содержащий слово t .

Второй подход к поиску документов – использование нейронных сетей для создания так называемого плотного векторного представления [8]. Его отличие от представления *BM25* в том, что результирующий вектор не является разреженным. Данный метод лучшим образом подбирает документы, однако вычислительно значительно более сложный.

3.3. Поиск ответа. Для поиска ответа на вопрос в документе используются трансформеры [9] и модели, основанные на BERT. На сегодняшний день данные нейронные сети достигли наилучших показателей в области обработки естественных языков. Однако при всех своих достоинствах, они требуют мощную аппаратную составляющую, а также, в отличие от алгоритмов подбора документов, являются зависимыми от языка.

Haystack предоставляет возможность использовать любую доступную модель из репозитория *huggingface* [10]. В качестве базовой используется RoBERTa [11], однако она не обучена на русском языке, поэтому не является подходящей. Таким образом, в данной работе взята мультязычная модель *xlm-roberta-large-squad2*.

4. Графический интерфейс сайта. Для взаимодействия пользователя с построенным сервисом разработан графический интерфейс, включающий в себя два поля: одно для ввода вопроса и другое для отображения ответа. В текущей реализации система предоставляет пять лучших ответов, а также их источники для более подробного самостоятельного изучения. Внешний вид сервиса представлен на рис. 1.

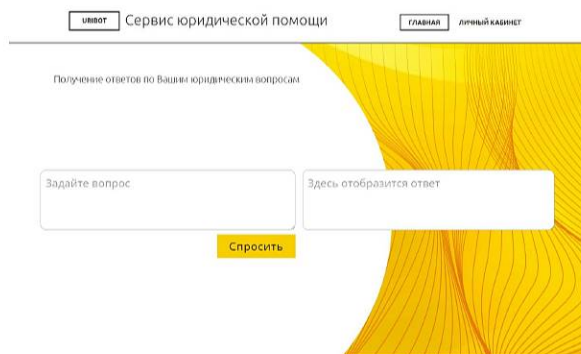


Рис. 1. Графический интерфейс

5. Апробация. Серверная часть данного сервиса реализована на языке программирования Python с использованием фреймворка *flask*. Выполнена следующая процедура проверки работы:

1. С помощью графического интерфейса вводится интересующий вопрос и нажимается кнопка «Спросить». Клиент делает POST HTTP-запрос с *json*-телом, имеющим поле *question*.
2. Сервер получает запрос, вызывает метод *answer* и дожидается ответа.
3. Полученные данные отправляются клиенту также в формате *json*. Далее клиент отображает полученный ответ на экране.

6. Результаты. Рассмотрены основные способы реализации автоматизированной системы юридической помощи, а также инструменты для ее разработки. С помощью языка программирования Python разработана программа, способная отвечать на вопросы пользователя. С помощью сборщика статей законодательства РФ подбираются наиболее подходящие, и далее нейросеть XLM RoBERTa производит поиск ответа по документам. Для взаимодействия с системой разработан графический интерфейс. В дальнейшем предполагается размещение сервиса в сети интернет.

Литература

1. Мозговой М. В. Простая вопросно-ответная система на основе семантического анализатора русского языка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 1. С. 116–123.

2. D'Avila T.C. KINO: an approach for rule-based chatbot development, monitoring and evaluation. Master's Thesis, Federal University of Minas Gerais [Электронный ресурс]: URL:<https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/30618/1/DissertacaoThiagoDAvila.pdf> (дата обращения: 17.03.22).
3. Adamopoulou E., Moussiades L. An Overview of Chatbot Technology // IFIP International Conference on Artificial Intelligence Applications and Innovations. 2020. Vol. 584. P. 373–383.
4. DeepPavlov. An open source conversational AI framework [Электронный ресурс]: URL:<https://deeppavlov.ai> (дата обращения: 17.03.22).
5. Haystack by Deepset [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/deepset-ai/haystack> (дата обращения: 17.03.22).
6. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: URL:<http://www.consultant.ru> (дата обращения: 17.03.22).
7. Elasticsearch [Электронный ресурс]: URL:<https://www.elastic.co/elasticsearch> (дата обращения: 17.03.22).
8. Karpukhin V., Oguz B., Min S. et al. Dense Passage Retrieval for Open-Domain Question Answering // arXiv [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/2004.04906> (дата обращения: 17.03.22).
9. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. et al. Attention Is All You Need // arXiv [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1706.03762> (дата обращения: 17.03.22).
10. Hugging Face [Электронный ресурс]: URL:<https://huggingface.co> (дата обращения: 17.03.22).
11. Liu Y., Ott M., Goyal N. et al. RoBERTa: A Robustly Optimized BERT Pretraining Approach // arXiv [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1907.11692> (дата обращения: 17.03.22).

УДК 004.932

Куприянов И. В., Давыденко А. А.

Колоризация черно-белых изображений с помощью нейросетей

1. Введение. Колоризация черно-белых фотографий – объемная и трудоемкая задача. Художники тратят большое количество времени для восстановления цвета, так как для того, чтобы понять, какой именно оттенок нужно присвоить каждому фрагменту фотографии, часто приходится находить цветные аналоги этих фрагментов. На одно изображение может уйти месяц работы, если художник хочет добиться максимальной точности. Автоматизация этого процесса [1] позволит значительно сократить время людей, занимающихся колоризацией вручную.

В данной работе используются *сверточные нейронные сети* для построения модели глубокого обучения [2], которая, принимая на вход черно-белое изображение, на выход выдает раскрашенное.

Так как раскрашивание любых фотографий требует объемного набора данных, было принято решение для начала работать с изображениями определенного класса: фотографии улиц, домов, переулков и прочей городской среды.

2. Подготовка данных. В первую очередь необходимо задать цветовое пространство для представления изображений.

2.1. Цветовое пространство. Если работать в классическом RGB , то на вход модели должно подаваться три матрицы, так как черно-белые изображения состоят из оттенков серого, которые получаются комбинацией красного, зеленого и синего в разных пропорциях. На выходе модели так же будет три матрицы для компонент R, G, B .

Но кроме RGB существуют и другие цветовые пространства, например цветовое пространство Lab . Здесь используется иная цветовая модель, где компонента L отвечает за значение «светлоты», а

Куприянов Илья Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st075958@student.spbu.ru, тел.: +7(999)520-55-17

Давыденко Александр Александрович – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.davydenko@spbu.ru, тел.: +7(911)210-57-92

компоненты a и b – за положение цвета в диапазоне от зеленого до красного и от синего до желтого соответственно.

В случае черно-белых изображений на вход модели будет подаваться всего лишь одна матрица, так как компонента L , по сути, и является черно-белым представлением изображения, а компоненты цветового пространства a и b отсутствуют. На выходе достаточно получать только компоненты a и b , так как за слой L можно взять исходное изображение. Поэтому выбор этого цветового пространства позволит сократить объем вычислений и количество затрачиваемой памяти.

2.2. Набор обучающих данных. В открытом доступе не было найдено готового набора данных, который подходит для поставленной задачи. Поэтому данные собирались самостоятельно. Для того чтобы понять, в каких пропорциях составлять *dataset*, было скачено около 300 старых фотографий городской среды, после чего использовался классификатор *InceptionResNetV2* [3], ставящий в соответствие изображению вектор, содержащий 1000 признаков, где каждый признак – вероятность принадлежности определенному классу. Для каждого изображения было выбрано три самых вероятных класса, затем подсчитано количество классов.

2.3. Обработка данных. Скаченные с помощью утилиты *Yandex Grabber* [4] изображения были преобразованы в квадратные, размером 256×256 пикселей. В цветовом пространстве *CIE Lab* значение цветов меняются от -128 до 128 . Если разделить каждое значение на 128 , то они окажутся в границах от -1 до 1 . Это сделано для того, чтобы можно было сравнивать погрешность вычисления, так как на выходе сети мы получаем значения именно в таких границах. Для достижения хороших результатов нужно много обучающих примеров. Для искусственного увеличения размера датасета используют прием, который называется *аугментация данных*. Главная идея метода – получение нескольких изображений из одного с помощью разных манипуляций. В этой работе для аугментации данных обучающие изображения преобразуются с помощью сдвига относительно центра, приближения, поворота и отражения по вертикали.

3. Первая версия модели. Для работы с изображениями в глубоком обучении используются *сверточные нейронные сети*. Они справляются намного лучше линейных моделей, потому что сохраняют пространственное представление изображения.

3.1. Архитектура. В этой работе используется модель, построенная на архитектуре [5] *Autoencoder* со вложенными сверточными слоями. Первый блок – кодировщик, состоит из *Convolutional* слоев. Вместо *MaxPooling* используются те же сверточные слои, но с шагом 2. Этот подход позволяет не терять пространственную информацию и избавиться от искажений при понижении размера изображений. Второй блок – декодировщик, нужен для повышения размера изображения, так как в первом блоке мы уменьшаем размер в 8 раз. Для повышения используются три слоя *UpSampling*.

3.2. Обучение и результаты. Первая версия модели обучалась с помощью *google colab*, без использования *GPU*. Размер батча экспериментальным путем был выбран равным 100. Обучение на 1000 эпохах заняло около 8 часов. На рис. 1 видно, что на первых 20 эпохах точность на валидационном множестве больше, чем при дальнейшем обучении. Но при попытке раскрасить черно-белые фотографии они получались тусклыми, и цвет почти не было заметно.

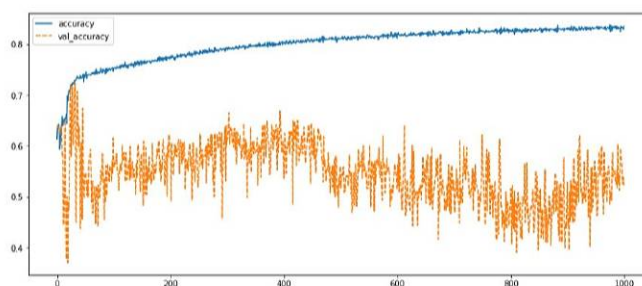


Рис. 1. График качества модели в зависимости от эпохи обучения

Для 400 эпох качество получилось равным 0,61. В цифрах это не много, но визуальные результаты выглядят приемлемо, хотя, конечно, есть определенные проблемы.

Если смотреть на раскрашенные с помощью модели черно-белые изображения, у которых нет цветных аналогов, нельзя оценить, насколько точно она справляется с передачей цвета. Поэтому были взяты цветные изображения, преобразованы в черно-белые, а затем запущена модель на «обесцвеченном» изображении (рис. 4).

4. Вторая версия модели. Ключевое отличие архитектуры второй версии модели [6] в том, что кодировщик и декодировщик

связаны через классификатор *InceptionResNetV2* (рис. 2).

4.1. Улучшение архитектуры. Классификатор обучен на датасете *ImageNet* [7], состоящем из более миллиона изображений. На вход классификатору подается изображение размером 299×299 пикселей, а на выход мы получаем вектор размером 1000, в котором значение i -го элемента обозначает вероятность принадлежности классу i . Данный подход, когда уже обученная модель используется в аналогичной задаче, называется *transfer learning*.

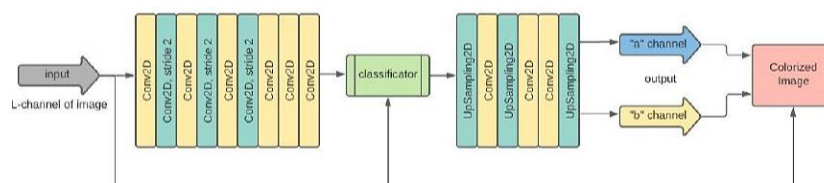


Рис. 2. Архитектура второй версии нейронной сети

Классификатор позволяет модели распознавать, что изображено на картинке, и сопоставлять представление объекта со схемой раскрашивания. Это означает, что модель будет «аккуратнее» раскрашивать изображения, т. е. цельные объекты должны быть раскрашены более равномерно, чем в предыдущей версии.

4.2. Обучение. Для обучения этой модели был расширен датасет, в итоге набор обучающих данных содержит 4000 изображений разных классов. Из-за увеличения датасета, google colab не справлялся с тем, чтобы загрузить все данные в память. Также в модель был добавлен классификатор, а это очень сильно нагружает вычислительные затраты на обучение. В итоге было принято решение обучать модель на стационарном компьютере с видеокартой TESLA P100. Одна эпоха занимала около 3 минут, но видеокарта сильно грелась, поэтому каждую пятую эпоху приходилось делать остановку на 5 минут, чтобы карта не перегревалась. В итоге обучение длилось около 10 часов, качество на тестовом наборе изображений получилась равным 0,56. Качество стало немного хуже, чем в прошлый раз, но это закономерно, ведь модель обучалась на большем количестве данных, причем новый датасет получился более обобщенным, чем предыдущий.

4.3. Метод скользящего окна. В обновленной модели появилась новая проблема. Дело в том, что модель обучена на изображе-

ниях размером 256×256 пикселей. Прошлая версия модели могла раскрашивать изображения произвольного размера, но в текущей версии это не работает, из-за наличия классификатора, т. е. раскрашивание возможно только для изображений размером 256×256 .

Первой идеей было разбить изображение на квадраты 256×256 , раскрасить их отдельно, и потом снова «склеить». Если изображение не квадратное, можно просто дополнять его черными линиями справа и снизу до квадратного так, чтобы стороны делились на 256. Но у такого метода есть один большой недостаток — так как части изображения раскрашиваются независимо друг от друга, стыки частей получатся очень заметными (рис. 3а).

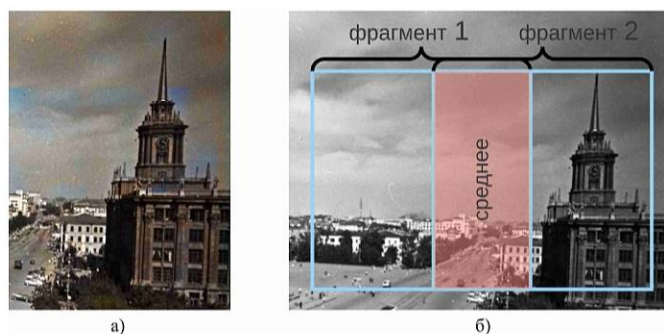


Рис. 3. а) часть изображения, состоящее из раскрашенных «склеенных» квадратов; б) схема работы метода скользящего окна

Для решения этой проблемы был применен метод скользящего окна (рис. 3б). Идея состоит в том, чтобы делить изображение на квадратные блоки, которые будут пересекаться, раскрашивать их отдельно, а в пересечении этих квадратов брать средний цвет. Чем меньше шаг (гиперпараметр скользящего окна), с которым будет двигаться это окно, тем менее заметны будут линии стыков.

4.4. Результаты и сравнение с предыдущей версией. Визуальное сравнение результатов работы первой и второй модели можно увидеть на рис. 4. Видно, что вторая версия модели стала раскрашивать фотографии более аккуратно, хотя определенные проблемы, такие как тусклость и скудность цветовой палитры остались. На рис. 5 представлено детальное сравнение на черно-белой фотографии, у которой нет настоящих цветных аналогов. Цветную версию

настоящей статьи можно посмотреть на ресурсе [9].



Рис. 4. Сравнение результатов работы



Рис. 5. Детальное сравнение результатов

5. Заключение. В результате работы было собрано несколько версий датасета, которые могут быть использованы в дальнейшем. Также было рассмотрено две архитектуры сети для раскрашивания черно-белых изображений и реализованы оба подхода [8]. Модель неплохо справляется с общими планам улиц, зданий и другими изображениями городской среды. С фотографиями людей и интерьеров все сложнее. В дальнейшем планируется разнообразить набор данных, чтобы модель могла раскрашивать фотографии разных классов.

Литература

1. Zhang R., Isola P., Efros A. A. Colorful image colorization // European Conference on Computer Vision (ECCV). 2016. P. 649–666.
2. Дрокин И. С. Об одном алгоритме последовательной инициализации весов глубоких нейронных сетей и обучении ансамбля нейронных сетей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Т. 12. № 4. С. 66–74.
3. Bhatia Y., Vajpayee A., Raghuvanshi D., Mittal H. Image captioning using Google’s inception-resnet-v2 and recurrent neural network // Twelfth International Conference on Contemporary Computing (IC3). 2019. P. 1–6.
4. Yandex Grabber – утилита для скачивания изображений [Электронный ресурс]: URL:<https://ufahameleon.ru/soft.aspx?id=2> (дата обращения: 15.10.2021).
5. Chen Y., Luo Y., Ding Y., Yu B. Automatic colorization of images from chinese black and white films based on CNN // International Conference on Audio, Language and Image Processing (ICALIP). 2018. P. 97–102.
6. Shankar S. R., Mahesh G., Murthy K. V., Ravibabu D. A Novel approach for gray scale image colorization using convolutional neural networks // International Conference on System, Computation, Automation and Networking (ICSCAN). 2020. P. 1–8.
7. Image Net dataset [Электронный ресурс]: URL:<http://www.image-net.org/> (дата обращения: 01.11.2021).
8. Реализация моделей и веса [Электронный ресурс]: URL:<https://github.com/IlyaKuprik/ColorizeImage> (дата обращения: 20.03.2022).
9. Конференция «Процессы управления и устойчивость». Архив [Электронный ресурс]: URL:<http://www.apmath.spbu.ru/ru/research/conference/pm/archive/> (дата обращения: 20.05.2022).

УДК 004.9

Лаврова А. К., Якушкин О. О.

О проблемах и рисках для пользователей существующей архитектуры NFT

1. Введение. NFT, невзаимозаменяемый токен – токен, созданный на основе смарт-контрактов Ethereum [1–3]. Ключевое отличие NFT от криптовалюты, например Bitcoin, заключается в его уникальности, что делает его подходящим для идентификации определенного предмета. Другими словами, особенность NFT в создании единственного цифрового представления некоторого объекта [4]. В свою очередь, криптовалюта или FT является стандартной монетой, каждый токен которой эквивалентен. Таким образом NFT кодирует уникальный цифровой артефакт, FT кодирует тип цифровой валюты. С точки зрения смарт-контрактов NFT кодируется уникальным идентификатором. Для пользователя обращающегося к смарт контракту возвращается ссылка на JSON-файл, основанная на этом идентификаторе. Файл технически может хранить в себе любую непроверяемую на момент создания-выпуска NFT информацию и ссылки на данные. На данный момент наиболее популярными вариантами использования NFT являются представления в формате токенов объектов различных сфер:

- цифровое искусство, музыка;
- виртуальная недвижимость;
- игровые активы;
- билеты на мероприятие, квитанции о посещении;
- доменные имена;
- токенизированные страховые полисы и обязательства.

Лаврова Анастасия Кирилловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st077238@student.spbu.ru, тел.: +7(994)019-91-14

Якушкин Олег Олегович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, тел.: +7(981)103-16-50

Предпринимаются попытки привязать NFT и к физическим объектам, например, запатентованная в 2019 году технология NIKE CryptoKicks [6].

2. Структура NFT. Сейчас большинство невзаимозаменяемых токенов работает на стандартах ERC-1155 и ERC-721 Ethereum-блокчейна. Вокруг интерфейсов, определенных в этих стандартах, формируются сервисы демонстрации, обмена, создания новых NFT. Интерфейс здесь подразумевает смарт-контракт с заранее определенным минимальным набором функций, которые необходимы для корректной работы сторонних приложений, таких как биржи и криптокошельки.

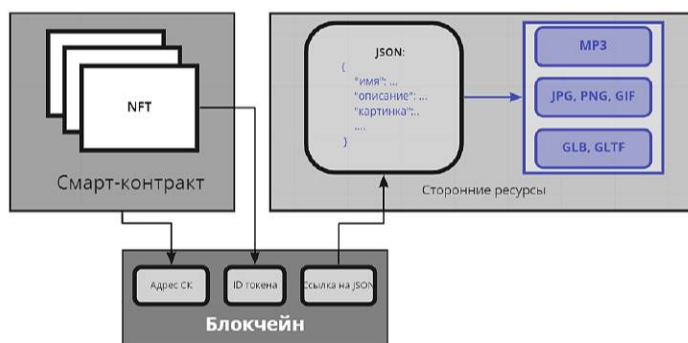


Рис. 1. Архитектура связей компонентов NFT

Универсальный алгоритм создания NFT выглядит следующим образом (см рис. 1):

1. Создание смарт-контракта, в котором основатель проекта задает набор основных характеристик для последующих NFT и настраивает дополнительные функции к базовому шаблону;
2. Минтинг – процесс создания уникального токена;
3. Торговля – обмен токенами между пользователями.

Всякий раз, когда NFT создается или продается за FT того же контракта, который его выпустил, требуется отправить новую транзакцию в виде запроса к соответствующему смарт-контракту. После подтверждения транзакции сведения о владении добавляются в блокчейн, тем самым гарантируя, что история NFT останется неизменной, а право собственности будет сохранено. Важно, что пользо-

ватели могут продавать и дарить друг другу NFT в обход вызова методов контракта эмитента. Таким образом, осуществление достоверного внешнего наблюдения за тем, как передавался токен возможно исключительно путем анализа проходивших в реестре транзакций.

3. Хранение метаданных и медиа-данных NFT. В самом распределенном реестре содержатся идентификаторы уникальных токенов, созданных смарт-контрактами, и их владельцы. Все характеристики идентифицируемых токенами объектов хранятся в виде JSON-файлов на сторонних ресурсах. Помимо этого, в каждом таком JSON-файле содержатся ссылки на медиафайлы, характеризующие «кодируемый» токенами объект.

В настоящее время существует три различных способа хранения характеризующей информации (JSON- и медиафайлов):

1. Персональный файловый сервер – эмитент NFT может хранить файлы на собственном HTTPS-сервере. Этот вариант является наименее безопасным способом, из-за возможности изменения или удаления соответствующих файлов любым пользователем с доступом к серверу.
2. IPFS (межпланетная файловая система) – децентрализованная сеть хранения данных. Единица данных, передаваемая в такой сети, представляет собой блок, который может содержать как части файла, так и ссылки на другие блоки. Сам файл (или каталог из нескольких файлов) собирается из ориентированного ациклического графа (DAG), в основе которого лежат определенные блоки. Пользователю IPFS предоставляет уникальные ссылки, содержащие хэш данных, значительно затрудняя их подмену. NFT содержащий ссылки на мета- и медиаданные в IPFS невозможно изменить, однако, если не останется ни одного узла, хранящего данные блока, пользователь также будет получать ошибку при попытке просмотра содержимого его NFT. Эмитент NFT может контролировать свой собственный IPFS-узел, гарантируя доступность именно тех файлов, которые связаны с выпущенными им NFT, при этом пользователь имеет гарантии, что содержимое мета- и медиафайлов не будет меняться.
3. Блокчейн для хранения файлов – децентрализованная сеть, сохраняющая при появлении каждого нового файла фрагментов из нескольких старых. Такой подход более надежен, чем IPFS,

благодаря алгоритмам консенсуса [3, 5] и репликации данных прошлого: данные, хранящиеся в распределенном реестре, не могут быть удалены или заменены. Однако хранение больших файлов в такого рода системах могут быть очень дорогостоящими. В настоящее время появляются блокчейны, оптимизированные для хранения больших файлов, например Arweave, однако они только начинают набирать популярность и поддерживаются меньшим количеством крипто-кошельков. В случае, если количество пользователей этих только появляющихся блокчейнов для хранения файлов сильно сократится, неминуема потеря данных, которую не сможет контролировать эмитент NFT.

Важно отметить, что ссылки на метаданные и медиафайлы осуществляются по протоколу HTTPS, а значит файлы получают в составе ссылок доменное имя. Это означает, что при блокировке домена доступ к метаданным прекращается.

4. Взаимодействие с NFT. Как было показано, основными составляющими NFT являются записи в блокчейне, метаданные и медиаданные, т.е. право владения NFT закреплено в блокчейне, однако в непригодном для просмотра пользователем виде. Поэтому, несмотря на разнообразие вариантов хранения метаданных, уникальный номер токена будет одинаково отображаться во всех NFT-совместимых крипто-кошельках пользователя, однако методы управления и просмотра токена в каждом случае будут разными.

Говоря о NFT цифрового творчества, т.е. о поддержке визуальных файлов (JPG, PNG, GIF и др.), музыкальных файлов (MP3 и др.), 3D-файлов (GLB и др.) и т.д., пользователь может просматривать и управлять своими токенами с помощью NFT-совместимых крипто-кошельков, которые поддерживают соответствующий блокчейн (в случае Ethereum – Metamask/TrustWallet и др.) или на специализированных рынках NFT (таких как OpenSea). Однако, например Metamask, позволит пользователю просматривать только двумерные картинки, в то время как OpenSea корректно отобразит трехмерные и аудиофайлы в дополнении к изображениям. Таким образом, различия систем представления и отсутствие согласованных, открытых правил хранения приводят к неполноценной поддержке хранимых в NFT данных.

5. Основные проблемы использования. Так как основные схемы использования NFT основываются на блокчейне Ethereum, то основными недостатками являются:

1. *Медленная обработка операций.* Так как операции, связанные с NFT, обрабатываются отправлением транзакций через смарт-контракты, проходя валидацию через единую для всех пользователей блокчейн сеть, то время подтверждения операций чрезвычайно медленно. Например, производительность Ethereum-сети – 20 транзакций в секунду, в то время как платежная система Visa может обрабатывать до 24 000 транзакций. Эта проблема решается масштабированием сети Ethereum с применением расширений (например L2 и Rollups), что сильно увеличивает сложность разработки приложений и повышает сложность входа для пользователей.
2. *Высокая стоимость газа.* Газ в Ethereum – это единица измерения количества вычислительных усилий, необходимых для совершения транзакции. Каждая транзакция, связанная с NFT, дороже, чем простая транзакция перевода, поскольку смарт-контракты требуют вычислительных ресурсов и хранилища для обработки. Для избежания уплаты газа можно использовать альтернативные платформы для создания токенов, такие как OpenSea или переходом на менее популярный блокчейн, например BNB Smart Chain, Polygon, Solana и другие.
3. *Блокчейн-совместимость.* Существующие блокчейн системы изолированы друг от друга, т.е. приобретая токен на сети Ethereum и решив уменьшить плату за газ, невозможно будет осуществить перенос своего NFT на другой блокчейн. Это же является существенным препятствием для внедрения экосистемы NFT в криптоигры, так как невозможно будет перенести свое игровое снаряжение между двумя одинаковыми играми, основывающимися на разных блокчейнах. Однако большинство проектов, связанных с NFT, используют Ethereum в качестве базовой платформы.
4. *Недоступность NFT-данных.* Из-за хранения данных вне основного блокчейна данные могут исчезнуть или измениться. Помимо этого, если при создании метаданных для токена были допущены ошибки в указании адресов соответствующих

файлов, то пользователь будет владеть лишь записью в блокчейне без возможности просмотра своих активов.

6. Заключение. В статье рассмотрено устройство токена, варианты хранения метаданных, а также основные недостатки существующей архитектуры NFT. Разобраны вопросы хранения мета и мультимедиа данных NFT. Показаны существующие проблемы невзаимозаменяемых токенов. Наиболее острой проблемой по мнению авторов является возможность потери доступа или подмены файлов пользователей. Такая опасность появляется из-за нахождения мета и медиафайлов во вне распределенных реестров и отсутствия требований, правил и гайдлайнов по обеспечению безопасности хранения данных пользователей в основных стандартах, описывающих NFT (ERC-721 и ERC-1155).

Литература

1. Usman W. Chohan Non-Fungible Tokens: Blockchains, Scarcity, and Value. Sidney: Critical Blockchain Research Initiative, 2021. 14 p.
2. Shurov A., Malevanniy D., Iakushkin O., Korkhov V. Blockchain network threats: the case of PoW and ethereum // International Conference on Computational Science and Its Applications. 2019. P. 606–617.
3. Mieszko M. Non-Fungible Tokens (NFT). The Analysis of Risk and Return. Paris: ESSCA school of management, 2021. 34 p.
4. Akash A., Shailender K. Smart contracts and NFTs: non-fungible tokens as a core component of blockchain to be used as collectibles // Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. 2019. Vol. 73. P. 401–422.
5. Малеванный Д. М., Павлова Е. Д., Фалькина А. И., Якушкин О. О. Моделирование взаимодействие компонентов распределенного приложения по сети с помощью MADT // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 261–265.
6. Патент NIKE CryptoKicks [Электронный ресурс]: URL:<https://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO2&Sect2=HTOFF&p=1&u=/netahtml/PTO/search-bool.html&r=1&f=G&l=50&co1=AND&d=PTXT&s1=Nike&s2=Crypto&OS=Nike+AND+Crypto&RS=Nike+AND+Crypto> (дата обращения: 25.03.2022).

УДК 004.852

Ларин Е. С.

Применимость исправления статистических критериев на примере задачи обнаружения сигнала во временных рядах

Рекомендовано к публикации доцентом Голяндиной Н. Э.

1. Введение. Существует большое количество статистических критериев, которые являются радикальными, применение на практике которых невозможно из-за неограниченности ошибки первого рода, или консервативными, мощность которых меньше, чем у точных. Это порождает необходимость в алгоритмах исправления статистических критериев. В данной работе приведён алгоритм преобразования неточных статистических критериев в точные и рассмотрена применимость полученного алгоритма на примере задачи обнаружения сигнала во временных рядах.

2. Алгоритм поправки. Алгоритм, представленный далее, преобразовывает радикальные и консервативные критерии в точные.

2.1. Вход алгоритма. Нулевая гипотеза H_0 , альтернативная гипотеза H_1 , исследуемые данные X , уровень значимости α^* , радикальный или консервативный критерий проверки статистической гипотезы $t(X)$ (если $t(X) \in A_{\text{крит}}(\alpha^*)$, то H_0 отвергается), количество моделируемых данных M_1 . Предполагается некоторая параметрическая модель данных $\xi \in \mathcal{P}(S, \Theta)$, $H_0 : S = 0$. Параметры модели Θ предполагаются известными.

2.2. Выход алгоритма. Формальный уровень значимости $\tilde{\alpha}^*$, при котором ошибка первого рода асимптотически по M_1 стремится к уровню значимости α^* . Полученный критерий (если $t(X) \in A_{\text{крит}}(\tilde{\alpha}^*)$, то H_0 отвергается) является асимптотически точным при $M_1 \rightarrow \infty$.

Ларин Евгений Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: evgeny_larin@inbox.ru, тел.: +7(951)672-74-64

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-01-00067

2.3. Алгоритм. В этом разделе представлен алгоритм поправки.

1. Моделируется M_1 выборок объёма N согласно распределению $\mathcal{P}(0, \Theta)$.
2. По смоделированным данным строится зависимость ошибки первого рода от уровня значимости $\alpha_I(\alpha)$. Для каждой выборки X_i строится $t(X_i)$ и находится вероятностный уровень p_i . Зависимость $\alpha_I(\alpha)$ оценивается как эмпирическая функция распределения полученной выборки p_1, \dots, p_{M_1} .
3. Рассчитывается формальный уровень значимости с помощью функции, обратной к $\alpha_I(\alpha)$, полученной на предыдущем шаге $\tilde{\alpha}^* = \alpha_I^{-1}(\alpha^*)$. Точный критерий выглядит так: если $t(X) \in A_{\text{крит}}(\tilde{\alpha}^*)$, то H_0 отвергается.

Подстановка $\tilde{\alpha}$ в качестве формального уровня значимости в радикальный или консервативный критерий сделает его точным. При этом мощность полученного метода будет описываться ROC-кривой (графиком, показывающим зависимость мощности критерия $\beta(\alpha)$ против альтернативной гипотезы H_1 от ошибки первого рода $\alpha_I(\alpha)$).

Стоит отметить, что на практике параметры модели Θ не известны и на шаге 1 алгоритма выборка моделируется согласно $\mathcal{P}(0, \hat{\Theta})$, где $\hat{\Theta}$ — оценка Θ , построенная по выборке X . Проверим на примере, остаётся ли критерий точным при оцененных параметрах.

3. Исследование точности исправленного критерия на практическом примере. Рассмотрим применение этого алгоритма к задаче выделения сигнала в ряде, зашумлённом красным шумом. Эта задача рассматривается в работах [1–4]. Сравнение статистических критериев по мощности после поправки с помощью ROC-кривых для задачи обнаружения сигнала в зашумленном временном ряде приведено в работе [1]. Оценим, насколько сильно оценка параметров на шаге 1 алгоритма модели может сделать критерий неточным.

3.1. Задача. Рассмотрим временной ряд $F = S + R$, где S — синусоидальный сигнал $\{A \cos(2\pi\omega n + \phi)\}_{n=1}^N$, N — длина ряда, R — красный шум с параметрами $0 < \varphi < 1$ и δ^2 . Нулевая гипотеза H_0 заключается в том, что ряд состоит из чистого шума, т. е. $S = 0$.

Альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что в ряде присутствует сигнал, т. е. $S \neq 0$.

3.2. Статистические критерии. В качестве радикального критерия возьмём односторонний Multiple MC-SSA с проекцией на левые сингулярные векторы траекторной матрицы временного ряда. Этот алгоритм обозначен `me1` в работе [4].

4. Постановка эксперимента. Для демонстрации применимости алгоритма к реальным данным построим две группы искусственных временных рядов, по M_2 рядов в каждой. В одной группе будут ряды, состоящие из чистого шума $F = R$, для них верна гипотеза H_0 . По этим рядам можно оценить ошибку первого рода $\alpha_I(\alpha)$. Во второй группе будут ряды, содержащие сигнал $F = S + R$, для них верна гипотеза H_1 . По этим рядам можно оценить мощность $\beta(\alpha)$. Оценим $\alpha_I(\alpha)$ и $\beta(\alpha)$ по построенным рядам для рассматриваемого статистического критерия. Затем построим оценку параметров $\hat{\Theta}$, применим алгоритм поправки уровня значимости и оценим $\alpha_I(\alpha)$ и $\beta(\alpha)$ получившегося критерия по тем же данным. Аналогично оценим $\alpha_I(\alpha)$ и $\beta(\alpha)$, применив алгоритм с известными параметрами Θ . Для этого будем строить M'_2 рядов, содержащих сигнал, и M'_2 рядов из чистого шума. Построим графики ошибки первого рода, мощности и ROC-кривые и сравним их.

4.1. Данные. В качестве данных будем использовать синусоидальный сигнал с красным шумом. Таким образом, формула сигнала выглядит так $\{A \cos(2\pi\omega n)\}_{n=1}^N$, амплитуда $A = 1$, частота $\omega = 0,075$ длина ряда $N = 100$.

Шум – AR(1) с параметрами $\varphi = 0,7$ и $\delta = 1$.

Будем моделировать $M_1 = 1000$ рядов для построения $\tilde{\alpha}$ и строить $M_2 = 100$ рядов для расчёта α_I и β с оцененными параметрами $\hat{\Theta}$. Для расчёта α_I и β при применении алгоритма с известными параметрами Θ построим $M'_2 = 1000$ рядов.

Параметры критерия (описаны в [1, 3, 4]) возьмём следующие: $L = 90$, $G = 1000$.

5. Результаты. Построим графики ошибки первого рода, мощности и ROC-кривые до и после применения алгоритма исправления критерия.

5.1. До исправления. По графику ошибки первого рода на рис. 1 видно, что критерий радикальный. ROC-кривая на графике рис. 2 показывает мощность, которую будет иметь этот метод после

применения алгоритма поправки для задания формального уровня значимости.

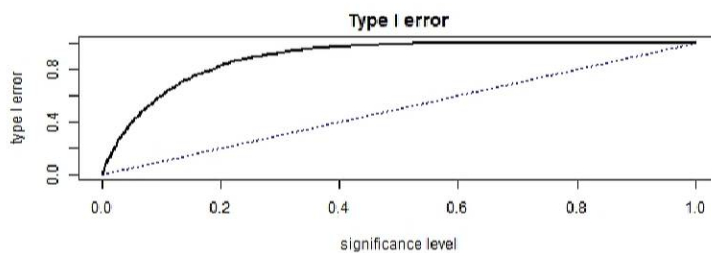


Рис. 1. $\alpha_I(\alpha)$ до применения алгоритма поправки уровня значимости

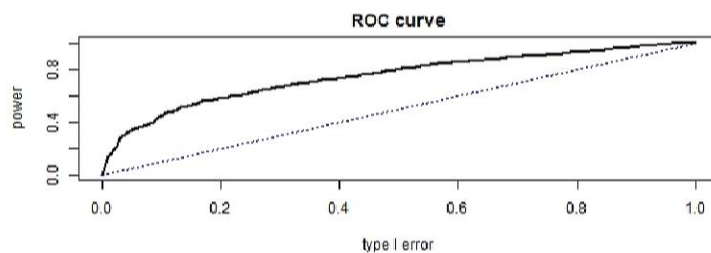


Рис. 2. ROC-кривая до применения алгоритма поправки уровня значимости

5.2. После исправления. По графику ошибки первого рода рис. 3 видно, что критерий стал точным. ROC-кривая на графике рис. 2 и график мощности рис. 4 совпадают. Графики на рис. 3, 4 показывают, что использование оцененных параметров модели $\hat{\Theta}$ вместо точных Θ не сильно ухудшает результат. В данном эксперименте критерий после применения алгоритма поправки с оцененными параметрами $\hat{\Theta}$ точный. Наличие большого количества изломов на графиках на рис. 3, 4 объясняется недостаточно большим значением M_2 .

6. Вывод. На продемонстрированном примере видно, что оценка параметров модели данных почти не искажает критерий после применения алгоритма поправки.

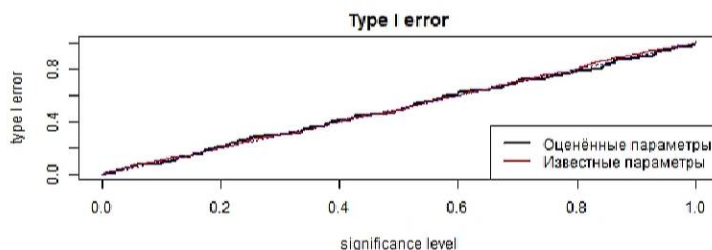


Рис. 3. $\alpha_I(\alpha)$ после применения алгоритма поправки уровня значимости

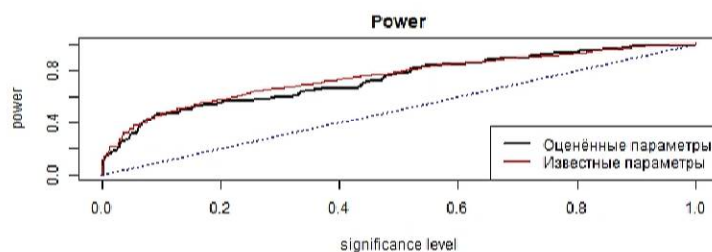


Рис. 4. $\beta(\alpha)$ после применения алгоритма поправки уровня значимости

Литература

1. Larin E. Monte Carlo SSA for signal detection: comparing test versions by ROC curves // Conference Abstracts International Student Conference “Science and Progress”. SPb. 2021. P. 109.
2. Allen M. R., Smith L. A. Monte Carlo SSA: Detecting irregular oscillations in the presence of colored noise // Journal of Climate. 1996. Vol. 9. No 12. P. 3373–3404.
3. Бояров А. А. Исследование статистических свойств метода Монте-Карло SSA: дис. магистра. СПбГУ, 2012. 68 с.
4. Golyandina N. Detection of signals by Monte Carlo singular spectrum analysis: Multiple testing // arXiv preprint [Электронный ресурс]; URL: <https://arxiv.org/pdf/1903.01485.pdf> (дата обращения: 14.04.2022).

УДК 004

Оглоблина А. Д., Плешканов Н. В.

Классификация статей *Pikabu* по пользовательским тегам

Рекомендовано к публикации профессором Андриановым С. Н.

1. Введение. Классификация текстов является одной из тем исследования в областях поиска информации, построения рекомендательных систем, анализа тональности и др. Задача настоящего исследования заключается в установке соответствия между документом и семантической меткой, которая строится, на основе содержания текста [1].

Разработки в данной области позволяют анализировать и систематизировать большие объемы текстовых данных. Несмотря на то, что существует множество алгоритмов классификации, вопросы о том, как повысить точность и подобрать алгоритм для конкретной задачи, являются актуальными.

В настоящее время различные сообщества и форумы, такие как Reddit, Habr, и *Pikabu*, ежедневно публикуют миллионы пользовательских текстов. С постоянным развитием информационных технологий количество данных увеличивается [2], что позволяет производить анализ данных, классификацию, кластеризацию для поиска схожих объектов в выборке [3].

Текстовые документы описанных ресурсов возможно использовать для обучения моделей классификации пользовательских текстов. Следует отметить, что система классификации данных способна упростить поиск и извлечение аналитических данных [4].

2. Постановка задачи. Целью работы является разработка модели мультитег-классификации текстов, с использованием пользовательских постов с сайта *pikabu.ru* и их тегов как меток классификатора. Кроме того, предполагается разработка программного решения, проведение экспериментов и сравнение результатов работы разных методов.

Оглоблина Алена Дмитриевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alyona.ogloblina@mail.ru, тел.: +7(960)500-28-73

Плешканов Никита Вячеславович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054644@student.spbu.ru, тел.: +7(981)965-43-64

Существует несколько видов классификации:

1. Бинарная классификация – способ классификации, разделяющий набор данных на два класса.
2. Мультиклассовая классификация заключается в присвоении тексту одной метки из набора классов, количество которых больше двух [5].
3. Мультилейбл-классификация – каждому тексту соответствует набор классов (меток) [5].

Поскольку в ходе данной работы используются тексты и набор тегов, необходимо рассмотреть мультилейбл-классификацию. В таком случае для обучения будет использоваться текст пользовательского поста, а также теги, которые поставил автор при публикации.

3. Подготовка данных. Для создания модели классификатора необходимы наборы текстов и метки классов. Предоставляемый авторами статьи код, реализующий сбор данных, представлен в [6].

3.1. Сбор статей. Портал Pikabu не предоставляет средств для свободного автоматизированного сбора данных, поэтому датасет собирался с помощью последовательного скачивания всех постов.

```
In[28]: df.head()
```

```
Out[28]:
```

id	title	author_id	author_name	comments	rating	rating_full	date	tags	views	saves	text
4442434	Китайская мудрость	1395543	IMMal	6	0	31:24	2016-09-01T07:20:41+03:00	['мой', 'Семья', 'брат', 'Младший брат', 'Му...']	0	0	Мой младший брат, когда ему было 9-7 лет. Си...
4442433	Манифест читателя (Как читать классическую лит...	1413157	Tolstokrijnik	8	0	17:28	2016-09-01T07:19:33+03:00	['Не мое', 'Чтение', 'Фигу', 'Литература', 'Д...']	0	1	Учусатель и критик соотносится так же, как ...
4442430	Призываются айтишники и системны, а так же вс...	220928	axelly	29	0	2:20	2016-09-01T07:15:17+03:00	['Компьютер', 'Компьютерщик', 'Компьютерное ж...']	0	1	Привет всем пикабушникам, этим холодным 1-св...
4442429	Битя может	773825	Vincher89	9	41	58:17	2016-09-01T07:14:56+03:00	['Тролли', 'Школьные', 'Обязанности', 'Текст']	0	1	Чтобы я не забыла вынести мусор, м...
4442428	О новой системе рейтинга в Overwatch	742541	Nidere2	10	-83	14:97	2016-09-01T07:14:45+03:00	['мой', 'Overwatch', 'Рейтинг', 'Неркоининг']	0	0	Решил я откалиброваться на тестовом сервере...

Рис. 1. Собранные данные

Собранные данные представлены на рис. 1. Произведена фильтрация по количеству символов и из полутора миллиона постов в датасете оставлено порядка восьмидесяти тысяч. Минимальное количество символов в каждом тексте – 2500.

3.2. Выбор меток для классификации. Отметим, что в используемых данных содержатся 31037 уникальных тегов. Проводить классификацию, используя все теги, задача с высокими требованиями к вычислительным ресурсам. Поэтому принято решение – выбрать некоторое множество тегов, на которых будет произведена классификация.

Изучив график распределения количества текстов по использованию самых часто встречающихся тегов (см. рис. 2), очевидно, что использовать теги «Текст», «Длиннопост» и «[мое]» не имеет смысла, так как они встречаются более чем в каждом втором тексте. Рассмотрев значения на следующих 17 тегах, было принято решение реализовать классификацию, используя именно эти метки.

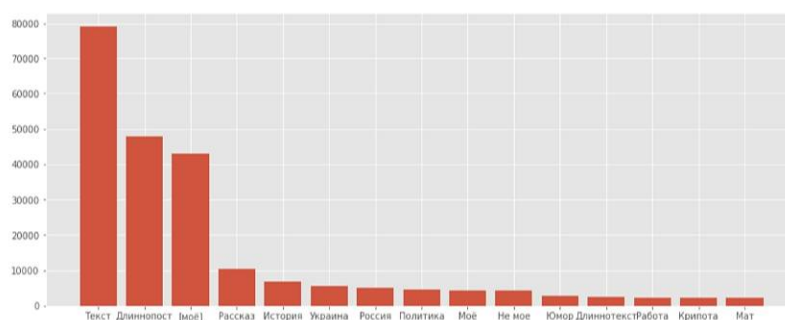


Рис. 2. Гистограмма распределения количества постов по часто встречающимся тегам

Поскольку основная задача в ходе работы именно мультилейбл-классификация, стоит убедиться, что полученный датасет имеет достаточно постов, к которым нужно отнести несколько меток. Результат этого анализа представлен на рис. 3. Как показано на графике, в датасете содержатся посты, имеющие от двух до шести тегов. Будем считать данные достаточными.

Отметим, что для удобства работы с алгоритмами обучения, вместо хранения списка всех тегов, принадлежащих посту, каждому посту добавляется 17 полей, соответствующие выбранным меткам, которые заполняются «0» или «1», характеризующими наличие или

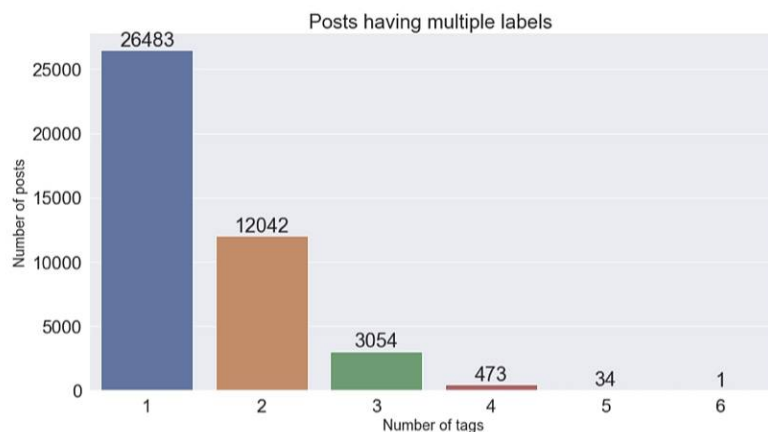


Рис. 3. Гистограмма зависимости количества постов от количества меток в каждом из них

отсутствие тегов. Реализация описанного в главе анализа представлена в [7].

3.3. Преобразование текстов в числовой вектор. Один из самых интуитивно понятных способов представить текст как набор чисел – создать словарь слов и использовать номер слова как его порядковый номер. Однако такой подход слабо выражает семантическую разность слов и их значимость в тексте.

Подход TF-IDF является модификатором примитивного алгоритма. Он заключается в том, что если термин встречается несколько раз в одном или нескольких документах, то считаем, что слово является существенным, и ему необходимо присвоить значение выше. Но когда термин встречается несколько раз во всех или в большинстве документов, он считается типичным и имеет более низкое числовое значение [8].

В программном коде используется модуль `TfidfVectorizer` из библиотеки `sklearn`. Преобразовав текстовые данные в наборы векторов, было произведено разделение данных на тренировочные и тестовые в соотношении 8 к 2.

4. Обучение модели. Подходы, описанные далее, преобразуют задачу мультилейбл-классификации в задачу бинарной классификации.

4.1. Выбор методов. Для решения задачи были использованы следующие методы мультилейбл-классификации:

1. *OneVsRestClassifier*. Данный подход разбивает задачу мультилейбл-классификации на подзадачи бинарной классификации, используя метки как отдельные классификаторы [9]. Для данного классификатора реализована последовательная бинарная классификация с помощью логистической регрессии. Таким образом с помощью вероятностной модели построены 17 классификаторов.
2. *BinaryRelevance*. Этот модуль, реализующий наивный байесовский подход с помощью модуля GaussianNB, использован для обучения набора однокомпонентных двоичных классификаторов.
3. *Label Powerset*. С использованием данного модуля и логистической регрессии с помощью LogisticRegression, были построены классификаторы со всеми возможными комбинациями меток.
4. *ClassifierChains*. Реализация метода построения цепочек классификатора так же, как и реализация некоторых подходов, содержит логистическую регрессию.

4.2. Анализ полученных данных. Одной из самых часто используемых метрик для оценки качества классификации является точность [10]. Ее значение вычисляется отношением количества правильно классифицированных данных к неправильным [11]. При этом к правильно классифицированным данным относятся как истинные положительные результаты, так и истинные отрицательные. Для подсчета всех данных суммируем также ложные отрицательные и положительные результаты. Для сравнения моделей используется функция accuracy_score [12] из библиотеки sklearn.metrics.

Таблица. Результаты проведенных экспериментов

Метод	Точность, %	Время, с
One-Vs-Rest	95	139
Binary Relevance	87	1155
Label Powerset	96	99
Classifier Chains	89	774

В качестве сравнения работы алгоритмов рассмотрим также время обучения модели. Стоит отметить, что полученная точность достаточно высокая для всех рассмотренных подходов.

Учитывая полученные результаты, метод, использующий ансамбли бинарных классификаторов, показал наихудшие результаты по времени и по точности. Цепочки классификаторов показали себя несколько лучше, однако точность менее 90% будем считать недостаточной.

Сравнивая результаты, представленные в таблице, отметим, что подход, использующий возможные корреляции между метками, справляется с 96% точностью за наименьшее количество времени. Учитывая полученные результаты, можно сделать вывод, что для обучения на выбранных данных подход Label-Powerset наиболее удачный.

Для классификации использовались всего 17 различных меток, а при увеличении количества меток, количество их комбинаций растет экспоненциально [13]. Следовательно, нельзя утверждать, что при увеличении количества классов не возрастет вычислительная сложность метода.

В таком случае в дальнейшем при работе с этими данными следует провести дополнительные эксперименты, включающие в себя увеличения количества меток. Можно предположить, что в этом случае подход One-Vs-Rest превзойдет по времени и, возможно, по точности подход, использующий комбинации классов.

5. Заключение. Задача классификации текста – очень популярное и востребованное направление. Разделение текста по семантическим группам упрощает анализ данных, а также позволяет реализовывать построение рекомендательной системы, поиск данных.

В рамках исследования решена задача мультитейбл-классификации пользовательских постов портала Pikabu. Описан процесс подготовки данных, приведение текстовых данных к числовым, рассмотрены разные методы обучения. В качестве эксперимента произведено сравнение точности и времени работы четырех подходов: One-Vs-Rest, Binary Relevance, Label Powerset и Classifier Chains.

В качестве модификации разработанного алгоритма необходимо произвести подбор параметров для обучения посредством кросс-валидации. Также возможно изменить выбор тегов, выбрать большее количество меток, которые пересекаются. В дальнейшем предполага-

ется рассмотреть другие подходы мультилейбл-классификации, например, не сводящиеся к бинарной классификации.

Литература

1. Alsukhni B. Multi-label arabic text classification based on deep learning // 12th International Conference on Information and Communication Systems (ICICS). 2021. P. 475–477.
2. Li Z., Shang W., Yan M. News text classification model based on topic model // IEEE/ACIS 15th International Conference on Computer and Information Science (ICIS). 2016. P. 1–5.
3. Jindal R., Taneja S. Ranking in multi label classification of text documents using quantifiers //IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering (ICCSCE). 2015. P. 162–166.
4. What is Data Classification? A Data Classification Definition [Электронный ресурс]: URL:<https://digitalguardian.com/blog/what-data-classification-data-classification-definition> (дата обращения 20.12.2021).
5. Solving Multi-Label Classification problems (Case studies included) [Электронный ресурс]: URL: <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2017/08/introduction-to-multi-label-classification/> (дата обращения 18.12.2021)
6. GitHub. Information-Retrieval [Электронный ресурс]: https://github.com/alexu247/Information-Retrieval/blob/master/Task_1 (дата обращения 02.12.2021).
7. GitHub. Pikabu-classification [Электронный ресурс]: <https://github.com/alexu247/pikabu-classification/blob/main/analysis/Analysis.ipynb> (дата обращения 10.11.2021).
8. Dalaorao G. A., Sison A. M., Medina R. P. Integrating collocation as TF-IDF enhancement to improve classification accuracy // IEEE 13th International Conference on Telecommunication Systems, Services, and Applications (TSSA). 2019. P. 282–285.

9. Tao W., Yongjia J., Xiangsheng R. A novel two-level One-vs-Rest classifier // 2nd International Conference on Information Systems and Computer Aided Education (ICISCAE). 2019. P. 645–648.
10. Understanding Data Science Classification Metrics in Scikit-Learn in Python [Электронный ресурс]: URL:<https://towardsdatascience.com/understanding-data-science-classification-metrics-in-scikit-learn-in-python-3bc336865019> (дата обращения 22.12.2021).
11. Ларин Е. С. Классификатор новостей с использованием метода Online LDA // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 307–312.
12. Accuracy classification score [Электронный ресурс]: URL:https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.metrics.accuracy_score.html (дата обращения 18.12.2021).
13. Deep dive into multi-label classification..! (With detailed Case Study) [Электронный ресурс]: URL:<https://towardsdatascience.com/journey-to-the-center-of-multi-label-classification-3384c40229bff> (дата обращения 19.12.2021).

УДК 004.912

Разумилов Е. С., Блеканов И. С.

Аспектно-ориентированный sentiment-анализ пользовательских сообщений в социальных сетях

1. Введение. Задача sentiment-анализа пользовательских сообщений, т. е. определение эмоциональной оценки мнений пользователей, является актуальной для множества сфер: маркетинг (в социальных сетях активно обсуждаются различные товары) [1], социология [2], политология (достаточно часто необходимо знать отношение людей к тому или иному событию или личности) [3] и т. п. Задача sentiment-анализа, сводящаяся к задаче классификации высказываний пользователей на три категории: «положительное», «нейтральное», «негативное», широко изучена [4]. Несмотря на это, при решении данной задачи возникает ряд серьезных проблем:

- наличие неопределенности в случаях, когда невозможно однозначно отнести сообщение пользователя к позитивному или негативному классу [5];
- шумность в текстовых данных пользователя. При генерации контента пользователь часто использует различные специальные символы, эмодзи, хештеги и т. п., которые усложняют обработку текста при sentiment-анализе [6];
- наличие коротких текстов в пользовательском контенте. В большинстве случаев пользователи, выражая мнение к какому-либо объекту, ограниченно генерируют свой контент. Иногда это ограничивается социальной сетью, например, максимальное число знаков в сообщении в Twitter – 280 символов [7];
- выделение аспектных слов в текстах в пользовательском контенте, которые позволяют определять наиболее важные ключевые слова в текстах пользователя, относительно которых пользователь выражает свое мнение (позитивное, негативное, нейтральное).

Разумилов Егор Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: razumiloves@gmail.com, тел.: +7(981)708-22-34

Блеканов Иван Станиславович – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.blekanov@spbu.ru, тел.: +7(921)339-53-43

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ЭИСИ, проект № 21-011-3127621

В данной работе эти проблемы решаются благодаря расширению классической задачи сентимент-анализа до так называемого *аспектно-ориентированного* сентимент-анализа с помощью языковых моделей, основанных на трансферном обучении, в частности, ставится эксперимент по сравнительному анализу качества трех моделей: TNet [8], AEN [9], LCF-АТЕРС [10].

2. Постановка задачи. Рассмотрим подзадачу аспектного сентимент-анализа под названием *классификация полярности аспектов* (Aspect Polarity Classification, APC) [8]. Имеется пара $(\mathbf{w}^T, \mathbf{w})$, где $\mathbf{w}^T = \{w_1^T, \dots, w_m^T\}$ – подпоследовательность последовательности слов $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_n\}$ в высказывании. Необходимо относительно аспекта \mathbf{w}^T оценить полярность высказывания \mathbf{w} . Цель – провести сравнительный анализ качества самых лучших подходов к решению данной задачи на трех датасетах (отзывы по ресторанам, по ноутбукам, Twitter) [11], и программно реализовать лучший из них.

3. Обзор существующих методов. Рассмотрим некоторые современные модели, которые были (или остаются) на момент своей публикации лучшими для решения задачи APC. При этом каждая из моделей определяет вероятность выбора того или иного класса сентимента, со следующей лосс-функцией (под названием *кросс-энтропия*):

$$\mathcal{L}_{APC} = - \sum_{j=1}^K t_j \log(p_j),$$

где K – количество различных меток задачи APC, p_j – вероятность сентимента j у текущего анализируемого аспекта, $t_j = 1$, если у аспекта метка j , иначе $t_j = 0$.

3.1. TNet. Одной из первых попыток использования глубокого обучения в задаче аспектного сентимент-анализа является применение рекуррентных нейронных сетей [8]. Авторы статьи разработали свой подход под названием TNet на основе нейросети LSTM. Сначала из эмбедингов (векторного представления токенов текста, размерность каждого вектора обозначим как \mathbb{H} – гиперпараметр модели) получают векторы $h_i^{(0)}$, $i \in \overline{1, N}$, где N – количество токенов в анализируемом сообщении, так называемые контекстуализированные эмбединги слов, с помощью двунаправленной сети LSTM. Далее, эти эмбединги (каждый отдельно взятый вектор h_i^l) подаются в модуль CPT (Context-Preserving Transformation), который для на-

чала применяет другую двунаправленную нейросеть LSTM только на слова из аспекта, получая контекстуализированные эмбединги $h_i^\tau, i \in \overline{1, N}$. Затем каждое такое представление ассоциируется с вектором h_i^l , который и был подан в блок СРТ. На основе этих ассоциаций строится вектор $r_i^\tau = \sum_{j=1}^m h_i^\tau \mathcal{F}(h_i^{(l)}, h_j^\tau)$, где функция \mathcal{F} отображает схожесть двух эмбедингов и вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(h_i^{(l)}, h_j^\tau) = \frac{\exp h_i^{(l)T} h_j^\tau}{\sum_{k=1}^m \exp(h_i^{(l)T} h_k^\tau)}.$$

Полученные векторы r_i^τ и $h_i^{(l)}$ конкатенируются и подаются в полносвязный слой с нелинейной функцией активации, так получается вектор $\tilde{h}_i^{(l)}$.

Для сохранения контекста авторы предлагают две схемы преобразования получившихся векторов:

- *пересылка без потерь* (Lossless Forwarding, LF). Вектор выхода из СРТ $h_i^{(t+1)} = \tilde{h}_i^{(t)} + h_i^{(t)}, i \in \overline{1, N}, t \in \overline{0, T}$, где T – количество применений модуля СРТ (является гиперпараметром модели);
- *адаптивное масштабирование* (Adaptive Scaling, AS). Такой способ позволяет веса входа и признаков изменять динамически. Для этого определяется так называемая gating function (потоконтролирующая функция), вводится переменная

$$t_i^{(t)} = \sigma(W h_i^{(t)} + b),$$

где σ – сигмоидная функция активации, $W \in \mathbb{R}^{\mathbb{H} \times \mathbb{H}}, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{H}}$ – обучаемые параметры. Таким образом, формула для выхода из модуля СРТ имеет вид

$$h_i^{(t+1)} = t_i^{(t)} \odot \tilde{h}_i^{(t)} + (1 - t_i^{(t)}) \odot h_i^{(t)},$$

где символ \odot обозначает поэлементное умножение.

Одна из этих двух схем применяется на выходе из СРТ, и результат работы снова подается в тот же модуль. Далее, когда каждый эмбединг проходит T раз СРТ, то все векторы выходов подаются в сверточную нейросеть, на основе которой и производится классификация по sentimentу.

3.2. AEN. С появлением таких механизмов машинного обучения, как attention и self-attention, и на основе этих модулей таких нейросетей, как BERT, архитектуры для решения задачи APC начали основываться на них, что, конечно же, повысило и метрики качества. Например, в [9] разработана архитектура, которая названа Attentional Encoder Network (AEN). Сначала необходимо получить эмбединги слов предложения (их можно представить в качестве матрицы $e^c \in \mathbb{R}^{N \times \mathbb{H}}$) и аспекта (их можно представить в качестве матрицы $e^t \in \mathbb{R}^{\alpha \times \mathbb{H}}$, α – количество токенов в аспекте), для этого авторы рассматривают две возможности: взять предобученные векторы либо из GloVe, либо из самой BERT. Впоследствии эти разные архитектуры будут называться AEN-GloVe и AEN-BERT.

К полученным эмбедингам применяется механизм Multi-Head Attention [12], который предлагается использовать и для самого высказывания, и для анализируемого аспекта, причем

$$e^c = \mathbb{M}(e^c, e^c), \quad e^t = \mathbb{M}(e^t, e^c),$$

т.е. при преобразовании и эмбедингов сообщения, и эмбедингов аспекта во внимание принимаются эмбединги сообщения.

Далее обе новые матрицы подаются в модуль Point-wise Convolution Transformation (PCT). Формально, это функция

$$\mathbb{P}(e) = \sigma \left(eW_p^{(1)} + b_p^{(1)} \right) W_p^{(2)} + b_p^{(2)},$$

где σ – экспоненциальная функция активации, $W_p^{(1)}, W_p^{(2)} \in \mathbb{R}^{\mathbb{H} \times \mathbb{H}}$, $b_p^{(1)}, b_p^{(2)} \in \mathbb{R}^{1 \times \mathbb{H}}$ – обучаемые параметры. После этого выходы подаются в *Softmax* и считается лосс-функция.

3.3. LCF-АТЕРС. Эта модель впервые представлена в [10]. Авторы исследования замечают, что перед тем, как решается задача APC, должна быть решена задача выделения аспектных терминов (aspect term extraction, АТЕ), и во время решения этой задачи из текста может быть извлечена полезная информация, которая может быть использована для решения уже задачи APC. Авторы переработали структуру стандартной BERT, дополнив ее некоторыми слоями. Сначала предложение подается в две модели BERT: одна из них будет получать свойства локального контекста, а другая – глобального (авторы допускают возможность использования для этих целей одну BERT, для экономии ресурсов). Назовем выход из локальной BERT как $O_l \in \mathbb{R}^{N \times \mathbb{H}}$, а из глобальной – $O_g \in \mathbb{R}^{N \times \mathbb{H}}$.

На основе O_g решается задача АТЕ:

$$p = S(O_g W_a),$$

$$\mathcal{L}_{ATE} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C t_{ij} \log(p_{ij}),$$

где p_{ij} – вероятность метки j у токена i , $t_{ij} = 1$, если у токена i метка j , иначе $t_{ij} = 0$, $W_a \in \mathbb{R}^{\mathbb{H} \times C}$ – обучаемая матрица параметров, C – количество различных меток задачи АТЕ.

Далее локальные признаки, полученные с помощью BERT, подаются в разработанный авторами модуль, называемый local context focus. Этот модуль основан на понятии семантического относительного расстояния (SRD), которое позволяет понять, находится ли слово в радиусе выделенного аспекта. Вычисляется SRD как

$$D_i = |i - P_a| - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor,$$

где i – индекс анализируемого токена, P_a – центральная позиция аспекта, m – длина аспекта, D_i представляет семантическое расстояние между анализируемым токеном и аспектом.

Далее, на основе этого расстояния, можно подать выходную матрицу признаков из локальной BERT в один из модулей (пусть X – это полученная матрица из любого модуля):

- *динамическое маскирование на основе контекстных признаков (CDM)*. Если D_i токена больше определенного порога α , то эмбединг этого токена домножится на ноль:

$$V_i = \begin{cases} 1, & \text{если } D_i \leq \alpha, \\ 0, & \text{если } D_i > \alpha, \end{cases}$$

$$V = [V_1, \dots, V_n], \quad X = VO_i;$$

- *динамическое взвешивание на основе контекстных признаков (CDW)*. Множитель, на который домножится эмбединг i -го токена, определяется из формулы

$$V_i = \begin{cases} 1, & \text{если } D_i \leq \alpha, \\ \frac{N - (D_i - \alpha)}{N}, & \text{если } D_i > \alpha, \end{cases}$$

$$V = [V_1, \dots, V_n], \quad X = VO_i;$$

- *слияние маскирования и взвешивания* (Fusion). Берутся оба выхода с предыдущих модулей и конкатенируются в $(N \times 2H)$ -матрицу.

В результате выходная матрица обрабатывается последовательно механизмами Multi-Head Self-Attention и Self-Attention.

3.4. Сравнение методов. Все методы, описанные выше, тестировались на датасетах с соревнования по определению эмоциональной оценки выделенного аспекта. В качестве датасетов были собраны отзывы пользователей о ноутбуках, ресторанах, а также пользовательские сообщения из социальной сети Twitter [11]. В таблицах 1, 2 показаны значения F_1 -меры и *Accuracy* для аспектного сентимент-анализа.

Таблица 1. Значение F_1 -меры

Название метода	Рестораны	Ноутбуки	Twitter
TNet	0,7127	0,7175	0,7360
AEN	0,7698	0,7631	0,7313
LCF-АТЕРС	0,8054	0,7786	0,7504

Таблица 2. Значение *Accuracy*

Название метода	Рестораны	Ноутбуки	Twitter
TNet	0,8079	0,7654	0,7497
AEN	0,8446	0,7993	0,7471
LCF-АТЕРС	0,8677	0,8097	0,767

Таким образом, модель LCF-АТЕРС является SOTA-моделью для решения задачи АРС.

4. Эксперимент. В рамках эксперимента была реализована модель LCF-АТЕРС на языке Python 3. Для реализации нейронной сети использованы фреймворки PyTorch (для построения самой модели) и PyTorch-Transformers (для импортирования BERT). Реализованная модель тестировалась на двух датасетах [13]:

- Tshirt – отзывы на футболки. В датасете 1871 тренировочных примеров, 472 тестовых;
- TV – отзывы на телевизоры. В датасете 3746 тренировочных примеров, 942 тестовых.

Из тренировочной выборки было отдельно выбрано 10% примеров для валидационного множества. Итоговые метрики, приведенные в [13] и полученные в ходе данного исследования, приведены в таблицах 3, 4. На рис. 1, 2 представлены графики лосс-функций для двух датасетов в зависимости от эпохи обучения.

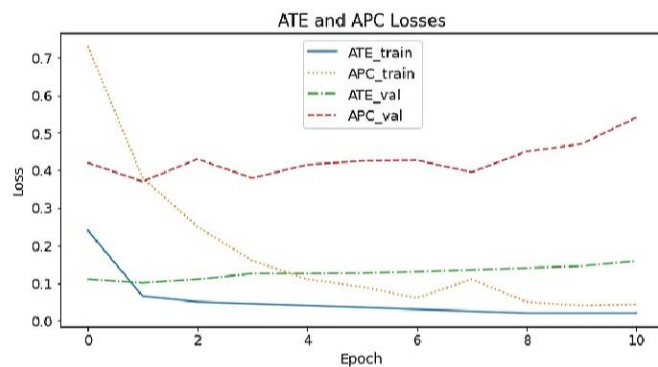


Рис. 1. Значения лосс-функций для датасета TV

Таблица 3. Значение Accuracy

Название метода	Tshirt	TV
Авторы датасета	0,9335	0,9036
LCF-АТЕРС	0,9385	0,9002

Таблица 4. Значение F_1 -меры

Название метода	Tshirt	TV
Авторы датасета	0,7386	0,7601
LCF-АТЕРС	0,7605	0,762

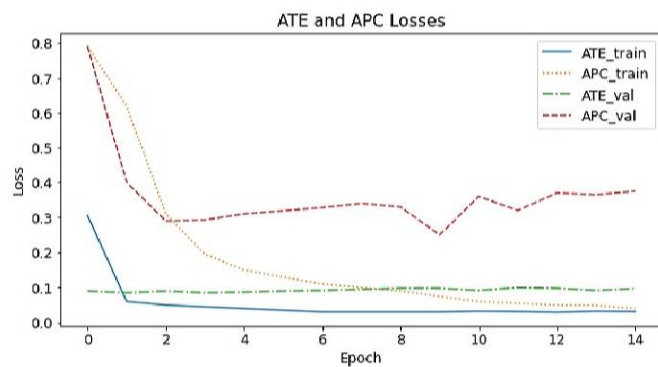


Рис. 2. Значения лосс-функций для датасета Tshirt

5. Заключение. Проведен обзор современных методов глубокого обучения в решении задачи классификации тональной полярности аспектов. Реализована и обучена лучшая на данный момент нейросетевая модель, которая показала высокие результаты и на новых датасетах.

Дальнейшее развитие исследования может проводиться во многих направлениях: во-первых, возможно расширение задачи на так называемый *end-to-end aspect-based sentiment analysis*, т.е. модель должна будет как выделять аспекты, так и классифицировать их полярность. Если воспринимать аспекты как темы анализируемого текста, то уже существуют исследования по их извлечению, например, [14]. Во-вторых, планируется провести разметку датасета, который был использован в [6] и получить результаты реализованной модели для русского языка.

Литература

1. Blekanov I., Krylatov A., Ivanov D., Bubnova Y. Big data analysis in social networks for managing risks in clothing industry // IFAC-PapersOnLine. 2019. Т. 52. No 13. P. 1710–1714.
2. Blekanov I., Tarasov N., Maksimov A. Topic modeling of conflict ad hoc discussions in social networks // Proceedings of the 3rd International Conference on Applications in Information Technology. 2018. P. 122–126.
3. Blekanov I., Kukarkin M., Maksimov A., Bodrunova S. Sentiment analysis for ad hoc discussions using multilingual knowledge-based approach // Proceedings of the 3rd International Conference on Applications in Information Technology. 2018. P. 117–121.
4. Batra H., Punn N. S., Sonbhadra S. K., Agarwal S. BERT-based sentiment analysis: a software engineering perspective // International Conference on Database and Expert Systems Applications. Springer, Cham. 2021. P. 138–148.
5. Yilmaz S. F., Kaynak B. E., Aykut K., Dibeklioglu H., Kozat S. S. Multi-label sentiment analysis on 100 languages with dynamic weighting for label imbalance // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2021. P. 1–13.

6. Куликов Л. В., Потапова Ю. В., Маленова А. Е., Блеканов И. С., Разумилов Е. С. Особенности использования пиктограмм-эмодзи в интернет-сообществах с разной частотой использования обценной лексики // Психолог. 2022. № 1. С. 1–18.
7. Novikova A., Stupnikov S. Sentiment analysis of short texts from social networks using sentiment lexicons and blending of machine learning algorithms // Proc. CEUR Workshop. 2017. P. 190–201.
8. Li X., Bing L., Lam W., Shi B. Transformation networks for target-oriented sentiment classification // Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. 2018. P. 946–956.
9. Song Y., Wang J., Jiang T. et al. Targeted sentiment classification with attentional encoder network // International Conference on Artificial Neural Networks. Springer, Cham. 2019. P. 93–103.
10. Yang H., Zeng B., Yang J. H. et al. A multi-task learning model for chinese-oriented aspect polarity classification and aspect term extraction // Neurocomputing. 2021. Vol. 419. P. 344–356.
11. Pontiki M., Galanis D., Pavlopoulos J. et al. Semeval-2014 task 4: Aspect based sentiment analysis // International workshop on semantic evaluation. 2014. P. 27–35.
12. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. et al. Attention is all you need // Advances in neural information processing systems. 2017. Vol. 30. P. 1–11.
13. Mukherjee R., Shetty S., Chattopadhyay S. et al. Reproducibility, replicability and beyond: Assessing production readiness of aspect based sentiment analysis in the wild // European Conference on Information Retrieval. Springer, Cham. 2021. P. 92–106.
14. Anggai S., Blekanov I. S., Sergeev S. L. Modification biterm topic model input feature for detecting topic in thematic virtual museums // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2018. Vol. 14. No 3. P. 243–251.

Численное моделирование и анализ экономических систем

Численное моделирование кредитных рисков. Математические модели в экономике находят широкое применение. Для небольших компаний малого и среднего бизнеса актуальны вопросы кредитования, особенно стартовых проектов развития. Речь идет, например, о ситуациях быстрого выхода на рынок. Динамические модели подобных процессов представлены в [1, 2]. Следуя этим работам, рассмотрим следующую модель:

$$\begin{cases} Q_{t+1} = Q_t + \lambda(pQ_t - C_t - H_t) - \mu Q_t, \\ z_{t+1} = z_t + \beta z_t - H_{Cr}, \\ z(0) = z_0, \quad Q(0) = \lambda z_0, \end{cases} \quad (1)$$

где Q_t – объем продукта, произведенного на этапе t , $C_t = nQ_t + c$ – издержки при производстве, n , c – некоторые коэффициенты, $H_t = H_{Cr} + H_F$, при этом H_{Cr} – деньги, выделенные на погашение кредита, H_F – доход владельца бизнеса, p – цена товара, z_t – величина долга на этапе t , β – кредитная ставка, λ и μ – коэффициенты фондоотдачи и выбытия соответственно.

Модель (1) представляет собой систему разностных уравнений, однако ее авторы делают переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и при ее анализе ограничиваются численным дифференцированием. В связи с этим можно отметить два существенных нюанса. Во-первых, актуальной задачей численного моделирования является непосредственная работа с разностной системой (1). Здесь прежде всего актуальны вопросы программного

Смирнов Николай Васильевич – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: n.v.smirnov@spbu.ru, тел.: +7(812)428-41-54

Сачков Александр Валерьевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st031354@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-41-54

Смирнова Татьяна Евгеньевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: t.smirnova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-41-54

управления, анализа устойчивости и стабилизации положений равновесия. С этой целью можно использовать алгоритмы, представленные в работах [3–11]. Во-вторых, можно модифицировать данную модель, настраивая ее на анализ различных сценариев [12, 13], в том числе ориентируясь на задачи многопрограммного управления [14–20], которые актуальны не только в экономических системах.

Так в [13] предложен вариант модели (1) с переменной ценой на продукцию фирмы, что более соответствует действительности. Цена моделируется периодической функцией, параметры которой можно настраивать с учетом реальных наблюдений, что очень удобно для численной реализации. Эту идею можно обобщить, если иметь в виду произвольный способ аппроксимации реальных данных, в том числе с применением элементов искусственного интеллекта. Там же рассматривается вариант управленческого сценария с целью быстрого погашения долга и увеличения выпуска продукции.

Динамические модели межотраслевого баланса и численные эксперименты. Модели межотраслевого баланса (МОБ) известны еще с начала прошлого века, когда появились первые работы В. В. Леонтьева. В настоящее время это международно признанный инструмент анализа макроэкономических процессов и тенденций [21]. Основу модели составляет матрица «затраты-выпуск», в которой отражено распределение произведенных и потребленных товаров между отраслями экономики.

Здесь рассмотрим модифицированную модель МОБ, позволяющую моделировать взаимное влияние сфер производства и потребления друг на друга [22–24]. В ее основе лежат две гипотезы. *Первая:* предполагается, что в экономике установилось динамическое равновесие, т. е. когда вся продукция, выпущенная секторами экономики, реализуется по заданной цене. *Вторая:* чистая прибыль или некоторая ее часть идет на инвестиции с целью расширения производства в каждом секторе экономики. В этом случае модель имеет вид

$$Cp_j(t) = Fe_j \dot{I}_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где Cp_j – инвестиции на расширение производства j -го сектора экономики, $I_j(t)$, Fe_j – выпуск продукции и фондоемкость каждого сектора экономики.

Если в систему (2) добавить внешние инвестиции, то их можно трактовать как управления. В таком варианте модель хорошо за-

рекомендовала себя в различных приложениях [24–27]. Более того, в работах [22, 24] предложен метод построения модифицированной динамической модели МОБ. Его основной особенностью является включение валового внутреннего продукта в вектор состояния системы. Это позволяет анализировать динамику сфер производства и потребления одновременно. Также построены варианты модели, учитывающие различные возможности управления процессом производства и потребления. Показано, что вариации налогов, ставок оплаты труда и других макроэкономических показателей приводят к нелинейным системам. Таким образом, в рамках данного подхода можно решать задачи прогнозирования и управления инвестиционными проектами на региональном и общегосударственном уровнях.

В четвертой главе [24] предложен конструктивный алгоритм полной идентификации параметров модифицированной, нелинейной модели МОБ на основе таблиц, публикуемых «Организацией экономического сотрудничества и развития», а также приведены примеры и решены задачи оптимального управления ставками налогов и оплаты труда на основе таблиц МОБ США, Индии и Китая. Программная реализация этих алгоритмов находится в открытом доступе [28].

Заключение. В данной работе продемонстрированы возможности описанных моделей для решения широкого круга задач моделирования экономических систем как на микроуровне развития фирмы, так и на макроуровне управления тенденциями в экономике государства.

Литература

1. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Исследование кредитного механизма, используемого для развития рынка новой продукции, на основе математического моделирования // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VI Международной школы-симпозиума АМУР–2012. Севастополь, 17–23 сентября 2012 / отв. ред. М. Ю. Кусый, А. В. Сигал. Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2012. С. 227–229.
2. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. М.: ООО «eТест», 2011. 336 с.
3. Александров А. Ю., Жабко А. П., Платонов А. В. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2015. 156 с.

4. Волик К. М., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Моделирование инвестиционных программ на основе импульсных программных управлений // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015, С. 419–420.
5. Волик К. М., Смирнов Н. В. Построение области достижимости в управляемой динамической модели межотраслевого баланса // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 597–604.
6. Гирдюк Д. В., Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Цифровые технологии в экономике – средство использования теории в практике управления // Финансы и бизнес. 2018. № 4. С. 24–36.
7. Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Социально ориентированная налоговая система страны как существенный инструмент управления развитием ее экономики // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В., 2015. С. 447–448.
8. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Тамасян Г. Ш. Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2016. 128 с.
9. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Modernization of the approach for bounded external disturbances compensation // Proceedings of The 2015 CACS International Automatic Control Conference. 2015. P. 418–421.
10. Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Optimization of the size of minimal invariant ellipsoid with providing the desired modal properties // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. “IMECS 2016 – International Multiconference of Engineers and Computer Scientists 2016”. 2016. P. 238–241.
11. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnov N. V. The method of accounting of bounded external disturbances for the synthesis of feedbacks with multi-purpose structure // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. “Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2014”. 2014. P. 301–304.

12. Владимиров Е. В., Смирнов Н. В. Сценарный подход моделирования развития предприятия, использующего кредитные ресурсы // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 458–464.
13. Владимиров Е. В., Смирнов Н. В. Моделирование развития предприятия, использующего кредитные ресурсы, при условии нестационарной цены // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 584–590.
14. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в одном классе социально-экономических моделей // Математическое моделирование и краевые задачи Труды тринадцатой межвузовской конференции. Редакционная коллегия: В. П. Радченко (отв. редактор), Э. Я. Рапопорт, М. Е. Лернер, Е. Н. Огородников (отв. секретарь), М. Н. Саушкин (отв. секретарь). 2003. С. 152–155.
15. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в экономике // В сборнике: Инновационные технологии в медиаобразовании. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. А. И. Ходанович (отв. ред.) [и др.]. 2015. С. 17–21.
16. Смирнов Н. В. Синтез гибридного идентификатора полного порядка в задаче многопрограммной стабилизации // Автоматика и телемеханика. 2006. № 7. С. 41–52.
17. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smimova T. E., Smirnov N. V. Multi-purpose control laws in motion control systems // Information. 2017. Vol. 20. No 4A. P. 2265–2272.
18. Смирнов Н. В., Шахов Я. А. Многопрограммная стабилизация квазилинейных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 4. С. 128–138.
19. Смирнов Н. В., Соловьева И. В. Применение метода позиционной оптимизации для многопрограммной стабилизации билинейных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 3. С. 251–259.
20. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Синтез многопрограммных управлений в билинейных системах // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. № 6. С. 929–932.

21. International Input-Output Association (ИОА) [Электронный ресурс]: URL:<http://www.iioa.org/> (дата обращения: 10.03.22).
22. Peresada V. P., Smirnov N. V., Smirnova T. E. Development control of a multicommodity economy based on the dynamical input-output model // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 4. С. 119–132.
23. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Прогнозирование макроэкономических тенденций и управление многопродуктовой экономикой на основе динамических моделей межотраслевого баланса // Финансы и бизнес. 2015. № 1. С. 42–53.
24. Межотраслевой баланс: анализ динамики и управление макроэкономическими тенденциями : учебное пособие для вузов / Н. В. Смирнов, В. П. Пересада, Т. Е. Смирнова [и др.] ; Под редакцией Н. В. Смирнова. Санкт-Петербург : Лань, 2021. 180 с.
25. Смирнов Н. В., Пересада В. П., Гирдюк Д. В., Постнов К. В., Попков А. С. Модель межотраслевого баланса – один из базовых элементов информационного обеспечения работы ситуационных центров регионов // Информатизация и связь. 2019. № 3. С. 20–25.
26. Смирнов Н. В., Пересада В. П., Попков А. С., Смирнова Т. Е. Применение динамических балансовых моделей для прогнозирования, планирования и коррекции макроэкономических тенденций // В сборнике: Система распределенных ситуационных центров как основа цифровой трансформации государственного управления. Труды всероссийского форума. 2018. С. 119–121.
27. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Постановки задач управления экономикой в рамках динамической модели «затраты-выпуск» // В сборнике: Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем. Сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума АМУР–2013. Под редакцией А. В. Сигала. 2013. С. 320–326.
28. Гирдюк Д. В. Динамическая модель межотраслевого баланса на основе таблиц ОЕСД [Электронный ресурс]: URL: https://github.com/iom2020/input_output_modelling (дата обращения: 22.06.2022).

УДК 004.9

Хлопин И. В.

Предсказывание наличия болезни сердца у человека с помощью машинного обучения

Рекомендовано к публикации доцентом Гришкиным В. М.

1. Введение. В большинстве развитых стран частой причиной утраты здоровья являются сердечно-сосудистые заболевания, поэтому важно найти способ преждевременного прогнозирования этих болезней. Задача решается разными способами, один из самых эффективных из них – это метод машинного обучения, который может облегчить жизнь врачам, взяв на себя часть работы по обнаружению болезней сердца на основе имеющихся данных о пациенте. Например, можно сразу составить группу риска из пациентов, подозрительных на наличие сердечно-сосудистых заболеваний.

Довольно часто задачи в медицине решаются именно машинным обучением, например, при работе со снимками данный метод особенно эффективен [1].

2. Постановка задачи. Прогнозирование болезни сердца – это задача бинарной классификации. Для решения этой задачи имеется набор данных, который разделяет пациентов на два класса: имеется болезнь сердца – 1, и не имеется – 0. Подобным образом можно решать любые задачи диагностики заболеваний, либо определять наиболее целесообразный способ лечения.

Набором данных выступает “Heart Failure Prediction Dataset” [2]. Основная проблема – это маленький объем данных. В наборе примерно 900 объектов, а если исключить объекты с незаполненными признаками, останется 746. Маленький набор данных сказывается на точности решения задачи. Но чтобы улучшить положение, можно нормализовать численные параметры в наборе данных, а признаки с ограниченными вариантами значения разделить на отдельные признаки.

Хлопин Игорь Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: khlopin2018@yandex.ru, тел.: +7(900)543-81-48

3. Структура данных. Каждый объект представлен парой $\langle x, y \rangle$ (набор признаков, ответ). Вектор описания объекта x состоит из 11 признаков:

- Age: возраст пациента [лет];
- Sex: пол пациента [M: Мужчина, F: Женщина];
- ChestPainType: тип боли в груди [TA: Типичная стенокардия, ATA: Атипичная стенокардия, NAP: Неангинальная боль, ASY: Бессимптомный];
- Cholesterol: сывороточный холестерин [мм/дл];
- FastingBS: уровень сахара в крови натощак [1: если BS натощак > 120 мг/дл, 0: в противном случае];
- RestingECG: результаты электрокардиограммы в состоянии покоя [Normal: Норма, ST: наличие аномалии зубца ST-T (инверсии зубца T и/или повышение или понижение $ST > 0,05$ мВ), LVH: наличие вероятной или определенной гипертрофии левого желудочка];
- MaxHR: достигнутая максимальная частота сердечных сокращений [Числовое значение от 60 до 202];
- ExerciseAngina: стенокардия, вызванная физической нагрузкой [Y: Да, N: Нет];
- Oldpeak: oldpeak = ST [Числовое значение, измеренное в депрессии];
- STSlope: наклон сегмента ST пикового упражнения [Up, Flat, Down];
- RestingBP: артериальное давление в состоянии покоя [мм рт. ст.].

HeartDisease – это значение y (1 – есть болезнь сердца, 0 – норма). В данном наборе данных каждый объект описывают 11 признаков, которому соответствует значение (1 либо 0), показывающее наличие заболевания сердца. Следовательно, данную задачу можно отнести к задачам классификации.

3.1. Преобразование данных. Для удобства работы с данными: 1) признаки, принимающие произвольные значения, были отображены на отрезок $[0, 1]$, где 0 – минимальное значение признака, 1 – максимальное значение признака; 2) признаки, принимающие значение из заранее известного небольшого множества вариантов,

были разделены на отдельные признаки (каждый вариант значения данного признака вынесен как отдельный признак).

4. Архитектура нейронной сети. Так как данные о пациенте представляют вектор признаков, размер которого достаточно мал, то целесообразно использовать архитектуру полносвязной нейронной сети [3]. Путём экспериментального подбора выбрана оптимальная архитектура полносвязной нейронной сети, состоящая из входного вектора, двух скрытых слоёв (по 5 нейронов каждый) и выходного вектора размерности два. Выбранная нейронная сеть реализована в среде Colaboratory [5], язык программирования – Python.

Функцией ошибки выбрана бинарная кросс-энтропия, которая хорошо подходит для задач классификации.

Метрика показывает, насколько качественно обучена сеть. Для решения задачи в качестве метрики взято отношение правильных предсказаний к общему количеству предсказаний (правильные/всего). Оптимизатором выбран Adam [4] с подобранным шагом обучения, равным 0,0001.

5. Подготовка данных перед обучением. Имеющиеся 746 объектов разделим на три группы (train – тренировочный набор данных, valid – валидационный набор данных, test – тестовый набор данных).

Путём корреляционного анализа выявлено, что существеннее всего коррелируются с наличием болезни сердца 7 признаков: Chest Pain Type ATA, Chest Pain Type ASY, MaxHR, Exercise Angine, Oldpeak, StSlopeUp, StSlopeFlat.

Обучив сеть на двух наборах данных (19 исходных признаков и 7 признаков с наибольшей корреляцией с болезнью сердца), можно сравнить их эффективность.

6. Обучение. Обучение сети происходит на тренировочном наборе данных train, оценка качества во время самого процесса обучения – на valid, а итоговый вывод о результате работы обученной сети делается на тестовом наборе данных test.

На каждой эпохе подаётся на вход набор данных (батч) размером с сам тренировочный набор данных (600 объектов), после вычисляется функция потерь на этом наборе, и с помощью оптимизатора изменяются веса нейронной сети.

Каждую тысячную эпоху фиксируются значения функции потерь

и метрики на тренировочном и валидационном наборах данных.

Обучение проводилось на наборе данных из всех имеющихся 19 признаков и на наборе данных, состоящем из признаков, наиболее существенно коррелирующих с наличием болезни сердца.

6.1. Результат обучения сети на 19 признаках. Для обучения сети на 19 признаках были выбраны следующие параметры обучения: количество эпох – 10 тысяч, шаг обучения оптимизатора Adam – 0,0001, размер батча – 600.

На каждой тысячной эпохе фиксировались значения функций потерь и метрик. На рис. 1. представлен график этих значений.

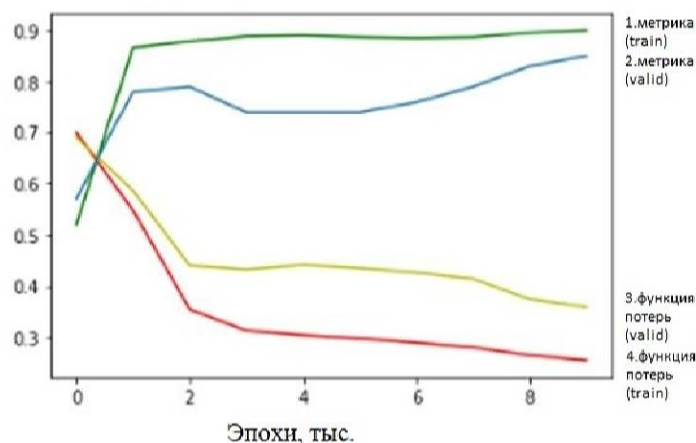


Рис. 1. График обучения на полном наборе признаков (10 тысяч эпох)

Метрика на тестовом датасете равняется 0,8. Значения обеих метрик на валидационном и тестовом датасетах примерно равняются 0,8.

Таким образом, нейронная сеть, обученная на полном наборе признаков, предсказывает наличие болезни сердца в 80% случаев.

6.2. Результат обученной сети на наборе из 7 признаков. Для сети с набором данных из 7 признаков выбраны следующие параметры обучения: количество эпох – 20 тысяч, шаг обучения оптимизатора Adam – 0,0001, размер батча – 600.

Точно так же на каждой тысячной эпохе фиксировались значения функций потерь и метрик. На рис. 2. представлен график этих значений.

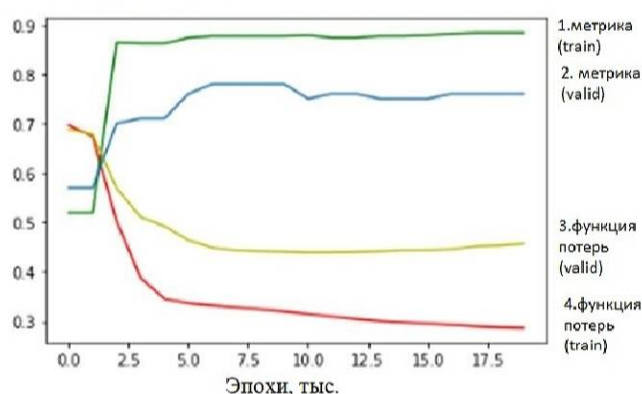


Рис. 2. График обучения на неполном наборе (20 тысяч эпох)

Вычисленная на тестовом датасете метрика равняется 0,71. Как и ожидалось, качество обучения уменьшилось с уменьшением количества признаков, на которых сеть обучалась.

Таким образом, нейронная сеть с 7 входными признаками (наиболее коррелирующими с наличием болезни сердца) верно предсказывает наличие болезни сердца в 71% случаев.

7. Вывод. Архитектура нейронной сети показала приемлемую работоспособность в задаче предсказания наличия болезни сердца. При этом лучший результат показала первая нейронная сеть с 19 входными признаками.

В результате эксперимента можно сделать вывод, что полносвязная нейронная сеть с 19 входными признаками, с двумя скрытыми слоями (по 5 нейронов каждый), с бинарной кросс-энтропией в роли функции потерь и с оптимизатором Adam может предсказывать наличие болезни сердца в 80% случаев.

В случае, если не хватает данных о пациенте, но имеется набор данных из 7 признаков, наиболее существенно коррелирующих с наличием болезни сердца, то вторая нейронная сеть предскажет наличие болезни сердца в 71% случаев.

Предлагаемый подход по прогнозированию наличия болезни сердца может ускорить процесс диагностирования, повысить его качество и сэкономить время врачам.

Литература

1. Шиманчук Д., Кванчиани К., Блеканов И. Нейросетевые методы повышения качества медицинских изображений для обнаружения и сегментации опухолей [Электронный ресурс]: URL:<http://hdl.handle.net/11701/32412> (дата обращения: 05.04.2022).
2. Kaggle. Обучающий набор данных [Электронный ресурс]: URL:<https://www.kaggle.com/fedesoriano/heart-failure-prediction> (дата обращения: 20.03.2022).
3. Popescu M., Balas V., Perescu-Popescu Nikos L., Mastorakis N. Multilayer perceptron and neural networks [Электронный ресурс]: URL:https://www.researchgate.net/publication/228340819_Multilayer_perceptron_and_neural_networks (дата обращения: 05.04.2022).
4. Loshchilov I., Hutter F. Decoupled Weight Decay Regularization [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1711.05101> (дата обращения: 05.04.2022).
5. Github. Код проекта [Электронный ресурс]: URL:https://github.com/IgorvH-Developer/ColaboratoryFailes/blob/main/Heart_Failure_Prediction.ipynb (дата обращения: 20.03.2022).

УДК 004.623

Ходосов А. С., Ковгар А. В., Филатов И. С.

Сравнительный анализ систем хранения данных в мобильных приложениях под управлением iOS и Android

Рекомендовано к публикации доцентом Корховым В. В.

1. Введение. Мобильные приложения стали неотъемлемой частью жизни любого человека. Они позволяют людям общаться, узнавать новости и отдыхать, а также помогают следить за здоровьем [1]. В наше время распространение вирусных заболеваний стало одной из самых явных угроз, поэтому приложения, которые помогут контролировать, предсказывать и, как следствие, останавливать эпидемии как никогда актуальны. При разработке мобильных приложений все чаще используются технологии, фреймворки и языки программирования, которые позволяют получить кроссплатформенное приложение. В частности, бурно развивается фреймворк Flutter [2] от Google. В этом контексте, при разработке любого приложения необходимо проанализировать существующие способы хранения данных на мобильном устройстве и выбрать оптимальный для конкретной задачи. Во Flutter существует три популярные библиотеки, которые позволяют хранить данные на устройстве пользователя, редактировать и извлекать их: hive [3], shared_preferences [4] и sqflite [5]. В данной статье предлагается сравнить их на примере использования в приложении для хранения данных о передвижении человека, т. е. его геоданных.

2. Постановка задачи. Для работы приложения и отображения корректной информации об эпидемиологической обстановке необходимо обновлять данные о геолокации пользователя в реальном времени, однако это не всегда возможно. Бывает, что по каким-то причинам у пользователя нет доступа к сети или же он сам ограничил

Ходосов Александр Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: khodosov2000@gmail.com, тел.: +7(981)956-84-50

Ковгар Алексей Викторович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: aleksei.kovgar@gmail.com, тел.: +7(952)793-01-33

Филатов Илья Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st068845@student.spbu.ru, тел.: +7(911)913-81-50

использование интернета. В таком случае нужно сохранять данные о передвижении пользователя локально, а при появлении возможности синхронизировать данные с сервером – обновить их. Именно для этого геоданные необходимо сохранить на устройстве пользователя. И целью данной работы является анализ существующих методов хранения данных, сравнение их и выбор оптимального. Для этого проведено тестирование каждой библиотеки.

3. Описание библиотек. Рассмотрим используемые библиотеки.

1. Hive – легкая и быстрая база данных ключей и значений, написанная на чистом Dart. Внутри данной библиотеки реализовано сильное шифрование по стандарту AES-256. При этом в список особенностей можно занести кроссплатформенность (совместим с ios, android, web, linux, windows, macos). Для использования этой библиотеки необходимо провести подготовку данных.
2. Shared Preferences обертывает постоянное хранилище для конкретных платформ для простых данных (NSUserDefaults в iOS и macOS, SharedPreferences в Android и т. д.). Данные могут сохраняться на диск асинхронно, и нет гарантии, что записи будут сохраняться на диске после возврата, поэтому этот подключаемый модуль не следует использовать для хранения важных данных.
3. Плагин SQFlite позволяет использовать SQLite внутри мобильного приложения. В отличие от описанных выше библиотек, эта позволяет использовать реляционные базы данных. Так же, как и в других решениях, данные, которые нужно сохранить, необходимо сериализовать.

4. Описание данных. В качестве данных, которые необходимо записать, будет использован набор объектов, которые являются метками времени и координат, с полями date типа String, longitude и latitude с типом double. Система ведет сбор данных в виде json файлов вида:

```
{"time": "1646580739", "latitude": 0.535, "longitude": 0.52}.
```

5. Тестирование. Рассмотрим результаты проделанных тестов.

5.1. Сохранение данных. В качестве данных выступили отметки со случайными значениями. В первом эксперименте была получена одна тысяча отметок, во втором – десять тысяч, в третьем – сто тысяч и в последнем – миллион (см. рис. 1).

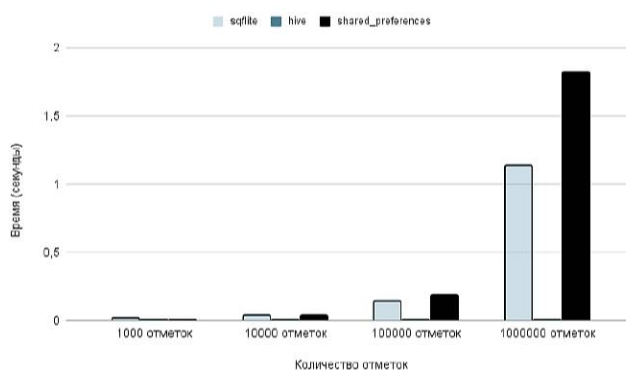


Рис. 1. Время сохранения данных

5.2. Чтение данных. Важно отметить, что при чтении были получены те же данные, что и были записаны, что свидетельствует о том, что все библиотеки корректно сохранили данные.

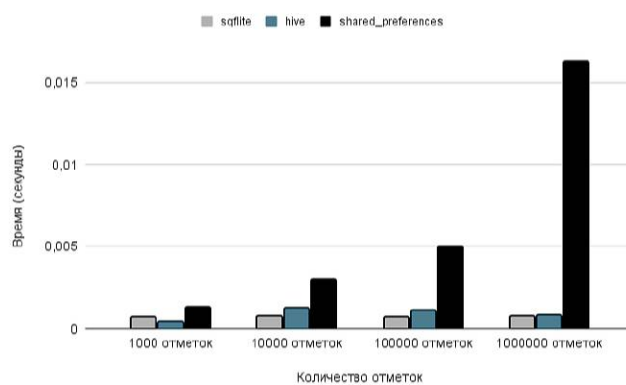


Рис. 2. Время чтения данных

Стоит отметить, что несмотря на то, что при чтении данных `shared_preferences` проигрывает по времени исполнения кода другим библиотекам (см. рис. 2), этот код выполняется синхронно, что упрощает обработку полученных данных для разработчика.

5.3. Обновление данных. При тестировании обновления данных производилось обновление фиксированной записи. Лучшее время показала библиотека `shared_preferences` (см. рис. 3).

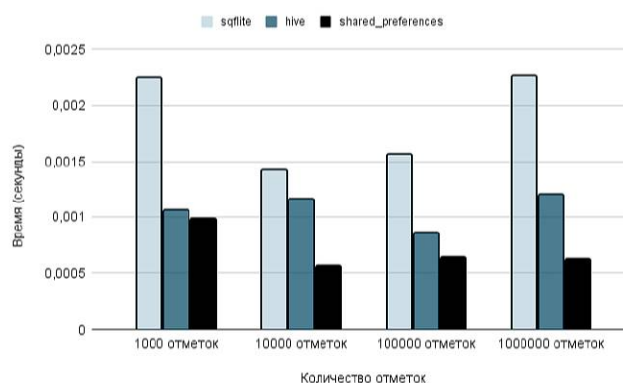


Рис. 3. Время обновления данных

6. Описание тестов. Для проведения сравнения выбранных библиотек были реализованы классы-менеджеры, которые предоставляют необходимые методы, а именно: запись данных на диск, чтение данных с диска и обновление отдельных записей. Метрикой выступило время исполнения, ведь быстродействие приложения напрямую зависит, помимо прочего, от скорости работы с данными. Эта метрика важна, так как пользователю важно, чтобы приложение работало безотказно и быстро.

7. Заключение. При проведении тестов обнаружено, что при разных задачах библиотеки показывают разное время и ни одна не является оптимальной. Исходя из результатов, можно выделить области использования данных библиотек. Для работы с несложными структурами данных и при отсутствии необходимости выполнять сложные запросы к этим данным хорошо подходит `hive`. Эта библиотека обеспечивает высокую скорость чтения и записи. Для работы

со сложными структурами данных, для выполнения нетривиальных запросов отлично подходит sqflite, ведь она базируется на СУБД для реляционных баз данных. В случаях же, когда необходимо сохранить некритичные для работы приложения данные, которые при необходимости будут получены из памяти, например настройки приложения, которые нужно получить при запуске, но при потере данных, о которых приложение продолжит функционировать, лучше использовать shared_preferences. Причем получение данных осуществляется синхронно, что значительно упрощает разработку. Исходя из вышесказанного, для хранения геоданных, ввиду простоты структуры записей и отсутствия сложных запросов к ним, рекомендуется использовать hive.

Литература

1. Мищенко А. Д., Можайская Г. В. Разработка сервиса для статистического анализа медицинских данных // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 276–280.
2. Официальный сайт Flutter [Электронный ресурс]: URL:<https://flutter.dev> (дата обращения: 21.02.2022).
3. Библиотека Hive [Электронный ресурс]: URL:<https://pub.dev/packages/hive> (дата обращения: 21.02.2022).
4. Библиотека Shared Preferences [Электронный ресурс]: URL:https://pub.dev/packages/shared_preferences (дата обращения: 21.02.2022).
5. Библиотека SQLite [Электронный ресурс]: URL:<https://pub.dev/packages/sqlite> (дата обращения: 21.02.2022).

UDC 004.8

Chang G., He D., Wei Y., Chen G.

Research on occlusion detection algorithm based on self-attention mechanism

Recommended for publication by associate professor Blekanov I. S.

1. Abstract. With the outbreak of the new corona epidemic, wearing masks has become a necessary requirement for travel, but the traditional detection algorithm is difficult to complete the recognition of occlusion targets. For the SSD algorithm model, there are some problems such as anchor selection deviation and target box cannot be accurately selected. This paper proposes an improved target detection model based on deep learning SSD algorithm model to improve the recognition effect of occlusion targets. The model extracts the features in the image by introducing the self-attention mechanism, generates the self-attention feature matrix, and inputs the feature matrix into the SSD network for target detection. Through the recognition of images, the model accurately realizes the face recognition of faces wearing masks.

2. Introduction. In the field of image recognition, the accuracy and efficiency of the traditional model can be tested by Wei Liu. SSD network model has the most efficient and accurate characteristics. In this paper, it is proposed that the SSD model of NvidiaTitanX on the VOC2007 test set can reach 75.3% mAP and 59FPS [1] for the network with an image input size of 300×300 . In the process of occlusion target recognition, the SSD network can not obtain partial occlusion information, making the target frame deviation.

This paper uses the Self-Attention mechanism to extract and strengthen the features of input images. In the process of occlusion target recognition, the weight of the whole target in the feature matrix is improved to improve the information acquisition of the occlusion target in

Chang Geng – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:chang_geng@outlook.com, phone:+8618591754195

He Di – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:hdhedi@outlook.com, phone: +8613484498068

Wei Yingchao – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:wycsdsg@outlook.com, phone: +8613369218508

Chen Gongyong – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:ZGChenGongyong@outlook.com, phone: +8617829915658

the SSD network. The image is processed by the self-attention mechanism to output its feature matrix and then enter the SSD network for recognition. Compared with the direct input of the SSD network after image compression, this model can make the input network information more specific and detailed.

3. Basic target detection module.

3.1. Feature extraction network based on self-attention.

The construction of the Self-Attention feature extraction network adopts the SAGAN framework [2]. The network constructed by the framework splits the channel dimension of the input image by Convolution Feature Maps. According to the RGB three-color channel of the image, the network is divided into three levels: query vector, key vector and value vector, as shown in Figure 1.

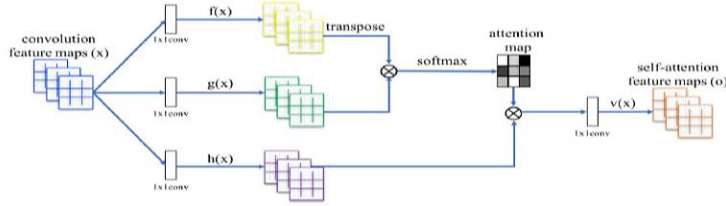


Figure 1. Self-attention framework

The model is realized by training W_q vector, W_k vector and W_v vector in data. In the framework of SAGAN, the hidden layer feature map $x \in R^{C \times N}$ is extracted, and the query vector Q and key vector K are calculated by the convolution layer processing of 1×1 convolutions.

$$f(x) = W_q x, \quad (1)$$

$$g(x) = W_g x. \quad (2)$$

The query vector and key vector are calculated by the above formula, and the correlation vector S is obtained by calculation

$$\text{Similarity (Query, Key)} = S_{ij} = f(x_i)^T g(x_j). \quad (3)$$

Then, the results are normalized. Through the softmax function, the weight of the original calculation results is reduced to the order of magnitude of the attention map, and $\bar{C} = C/8$ is calculated for channel C,

so that the overall gradient is more stable and then the output S' is calculated to obtain the attention map:

$$S' = \text{soft max}(\text{similarity}) \frac{e^{\text{Sim}_i}}{\sum_{j=1}^{Lx} e^{\text{Sim}_j}}. \quad (4)$$

The value vector V will be calculated by $h(x_i) = W_h x_i$ to obtain the value vector of correlation. The model will calculate the value vector and the attention map vector set, and finally obtain the self-attention feature maps result $V(x) \in R^{300 \times 300}$. In this paper, a 300×300 matrix is formed through pooling operation to facilitate the input of SSD network.

$$V(x) = S' h(x_i) \quad (5)$$

3.2. Construction of SSD network model. SSD network model [3] is a convolutional neural network based on deep learning. This network is modified based on the VGG-16 network and obtained as shown in Figure 2. By extracting six layers from different feature layers generated by VGG-16, feature maps of different scales are obtained to identify target features. By outputting a set of fixed size target boundary boxes in different feature layers to the non-maximal suppressor [4], the recognition results are screened and the best target boundary box is finally outputted.

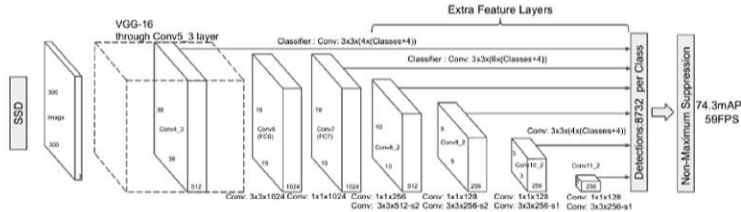


Figure 2. SSD network structure diagram

SSD network determines the reliability of a pre-output value depending on the obtained target location and category information. According to the algorithm [5], to obtain the ground Truth with compact target completion and minimum error coverage, the model mainly uses Smooth L1 Loss strategy and SoftmaxLoss strategy to calculate the loss value. The location regression is obtained by smooth L1 Loss calculation of positive samples, and the discrimination of column identification is obtained

by calculating the difference between positive and negative samples, to obtain the credibility of the overall results through(6).

$$Loss = \frac{1}{N} (L_{smoothL1} + \alpha L_{soft\ max}) \quad (6)$$

In the formula, N represents the number of positive samples, and α represents that the equilibrium coefficient is a constant.

4. Target detection model establishment.

4.1. Construction of target detection model based on self-attention mechanism. The model input 300×300 pixel images by compressing the images. In the self-attention module, the target information in the image is extracted, and the self-attention Feature Map is output by the weight operation module. After entering the SSD network, the feature matrix identifies and locates the target, filters the results through the non-maximum suppressor, and outputs them.

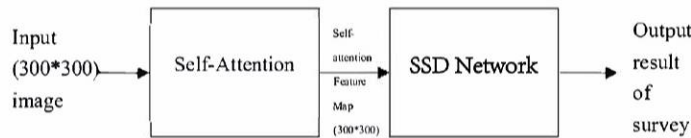


Figure 3. Target detection model framework

4.2. Improved target detection model construction. Self-attention mechanism extracts target features through the correlation of pixels. For the recognition of the target on the image, the location information is a key factor affecting the target characteristics. Positional Encoding is introduced into the model, a position encoding e^i is defined for different pixels on the image, and the position encoding matrix e is generated with the input original image matrix.

Through the calculation of $x' = e + x$, the obtained vector containing location information is input into the self-attention network for processing.

5. Experiment. In this paper, the model is constructed by the open-source library provided by tensorflow2 to test the detection results of occlusion targets. Taking the recognition of facial masks as an example, the test model trained 7493 unoccluded faces and 7507 occluded

images to identify the input random photos. The model can accurately identify the occluded face in the photo as shown in Figure 4.

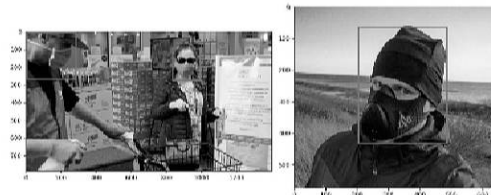


Figure 4. Test model demo output test results

6. Conclusion. This paper proposes a self-attention mechanism to improve the recognition effect of occlusion targets. Can complete the recognition of occlusion targets in photos, meet the needs of mask face detection. At present, this model can be extended to many occlusion target detection, and for different types of target models, a large number of data set training models to need to be established. For real-time detection systems, this becomes a direction of model optimization.

References

1. Liu W. et al. Ssd: Single shot multibox detector // European conference on computer vision. Springer, Cham, 2016. P. 21–37.
2. Zhang H. et al. Self-attention generative adversarial networks // International conference on machine learning. PMLR, 2019. P. 7354–7363.
3. Pan H., Li Y., Zhao D. Recognizing human behaviors from surveillance videos using the SSD algorithm // The Journal of Supercomputing. 2021. Vol. 77. No. 7. P. 6852–6870.
4. Hosang J., Benenson R., Schiele B. A convnet for non-maximum suppression // German Conference on Pattern Recognition. Springer, Cham, 2016. P. 192–204.
5. Rezatofighi H. et al. Generalized intersection over union: A metric and a loss for bounding box regression // Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. 2019. P. 658–666.

UDC 004.93

Ding Z. H., Yang F. W., Petrosian O., Li Y., Liu Y.

Audio-visual speech recognition

1. Introduction. Although speech perception is considered an auditory skill, human perception of speech is inherently multimodal, as producing speech requires the speaker to make movements such as lips, teeth, and tongue, which are often used in face-to-face communication is visible, and information from lips and face contributes to better understanding of speech [1].

In the field of speech recognition, ASR (Automatic speech recognition) systems are quite mature and have achieved high recognition results [2], but these frameworks are completely based on audio. With the requirements of the experimental environment, especially in the noise environment, the recognition rate of the model drops significantly [3]. At present, how to reduce the influence of noise and improve the speech recognition rate is an urgent problem that we need to solve. Experiments show that in the noise environment, the visual information features are completely unaffected, so the visual information can be used to make up for the disadvantage of the poor robustness of the visual features to noise in speech recognition [5], and effectively improve the speech.

The purpose of this paper is to demonstrate that audiovisual fusion models outperform pure audio or pure video models for speech recognition. We use the TM-CTC [6] model based on the Transformer architecture as our test model, and use two of the most famous audiovisual speech datasets in the world today as Our test dataset, where LRS2 [7] consists of thousands of spoken sentences from BBC television; LRS3 [8] consists of thousands of spoken sentences from TED and TEDx videos.

Ding Zhe Hong – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: dinghongzhe1024@gmail.com, phone: +7(812)428-42-86

Yang Feng Wen – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: wenfeng_yang1998@163.com, phone: +7(812)428-42-86

Petrosian Ovanes – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru, phone: +7(911)740-80-19

Li Yin – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: liyinrus@outlook.com, phone: +7(812)428-42-86

Liu Yi – associate professor, Yanan University; e-mail: ly@yau.edu.cn, phone: +7(911)740-80-19

This paper is supported by the China Scholarship Council

Ultimately, we demonstrate that audiovisual fusion models outperform pure speech/audio models.

2. Models. In this section, we introduce the model architecture for audiovisual speech recognition, based on the existing Transformer self-attention architecture for training the CTC loss. The architecture of the model is shown in Fig.1:

2.1. Audio features. For audio, we define the size of the audio features as 321, and use a 0.040s window to calculate the STFT. Since the video is sampled at 25 fps (40 ms per frame), each video input frame corresponds to 4 acoustic feature frames. We concatenate audio features in groups of 4.

2.2. Video features. For video, we sample the image at frame rate of 25fps. For each frame, resize to 224x224 and crop the central 112x112 region. It contains the mouth area, as shown in Fig.2. Then normalise the frames and extract features for each frame using the visual frontend (A visual feature extraction module. Generates a 512-dim feature vector per video frame).

2.3. CTC transformer (TM-CTC). The TM-CTC model concatenates the video and audio encodings and propagates the result through a stack of self-attention/feedforward blocks, same as the one used in the encoders. The outputs of the network are the CTC posterior probabilities for every input frame and the whole stack is trained with CTC loss. The structure of the model is shown in Fig. 1: (a) Common encoder: the visual image sequence is processed by a spatio-temporal ResNet, while the audio features are the spectrograms obtained by applying Short Time Fourier Transform (STFT) to the audio signal. Each modality is then encoded by a separate Transformer encoder; (b) TM-CTC: Transformer CTC, a model composed of stacks of self attention and feed forward layers, producing CTC posterior probabilities for every input frame.

3. Experiments. This section will present in details the datasets we used to train and test our model, as well as the data augmentation techniques we used to generate more training and testing data. It will also show the results we got and discuss them with a comparison with other methods.

3.1. Experiment platform. For calculations we used a Google Cloud VM with CPU: Intel(R) Xeon(R) CPU @ 2.20GHz; RAM: 250GB; OS: Ubuntu 18.04.6 LTS. For implementation of the models Python-Conda was used.

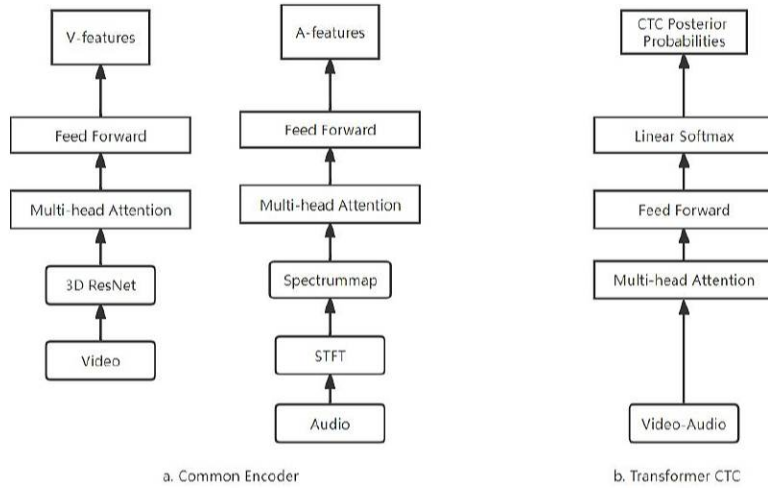


Figure 1. Audio-visual speech recognition models: (a) Common encoder; (b) TM-CTC

3.2. Datasets. In this paper we use two large audiovisual speech datasets: LRS2-BBC [7] and LRS3-TED [8]:

- The LRS2-BBC dataset is divided into development (train/val) and test sets. The dataset also has a “pre-training” set containing excerpts of sentences that may be shorter or longer than the full sentences contained in the dev set, annotated with alignment boundaries for each word. The structure of the dataset is shown in Table 1 [9].
- LRS3-TED consists of thousands of spoken sentences from TED and TEDx videos. The dataset consists of pre-train, trainval and test, and the videos of the three datasets do not overlap. The dataset statistics are given in the table below. The structure of the dataset is shown in Table 2 [10].

Table 1. LRS2

Set	Dates	utterances	word instances	Vocab
Pre-train	11/2010-06/2016	96,318	2,064,118	41,427
Train	11/2010-06/2016	45,839	329,180	17,660
Validation	06/2016-09/2016	1,082	7,866	1,984
Test	09/2016-03/2017	1,243	6,663	1,698

Table 2. LRS3

Set	videos	utterances	word instances	Vocab
Pre-train	5,090	118,516	3.9M	51k
Train	4,004	31,982	358k	17k
Validation	06/2016-09/2016	1,082	7,866	1,984
Test	412	1,321	10k	2k

3.3. Data preprocessing. In this Section, we generate the required files for each sample. Firstly, extract the audio from the video file using the FFmpeg utility and save it to a wav file. Secondly, for each frame, resize to 224×224 and crop the central 112×112 region. Finally, normalise the frames and extract features for each frame using the visual frontend. After this step, for each sample, we can get four files: .mp4, .wav, .png, .npy, .mp4 is the processed video; .wav is the audio extracted from the original video; .png is the image collection of each frame after preprocessing, shown in Fig. 2; .npy is the visual features of the image.



Figure 2. Preprocessed images

3.4. Training model. In this step, we train our model using the existing weights. Firstly, we use the main file dataset from LRS2-BBC as our training and validation datasets. We use an audio-visual speech transcription model based on the Transformer architecture as our training model. Architecture: two stacks of 6 Transformer encoder layers form the Encoder (one for each modality), a single stack of 6 Transformer encoder layers form the joint Decoder. The encoded feature vectors from both the modalities are concatenated and linearly transformed into 512-dim vectors. Use Adam as the model optimizer. Use lr_scheduler.ReduceLROnPlateau as the model scheduler. Finally, we

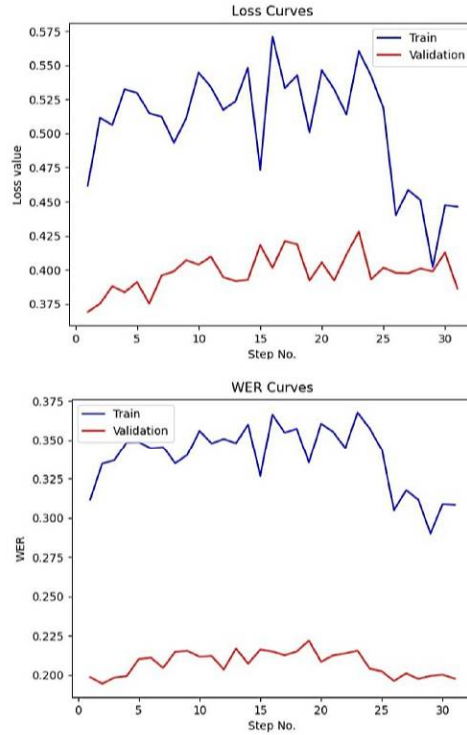


Figure 3. Loss Curves and WER Curves

use the CTCLoss (The Connectionist Temporal Classification loss) function as the loss function.

3.5. Model demo. In this step, we will show the prediction results of the model on several concrete video examples. We select some videos in the Test set of LRS3-TED for model testing. The text of the video is displayed in Fig. 4.

From the above Fig. 4, we can see that our model has successfully performed the text recognition operation on the example video, and it seems that it has achieved good results.

3.6. Model evaluation. We evaluated our model on LRS2-BBD and LRS3-TED with or without a noise file, and the results are presented in Tables 3–6, here:



Figure 4. Video Text

- Loss: The Connectionist Temporal Classification loss (CTCLoss). Calculates loss between a continuous (unsegmented) time series and a target sequence.
- Word Error Rate (WER): WER is computed by dividing the total number of word edits (computed using editdistance package) with the total number of words.
- Character Error Rate (CER): CER is computed by dividing the total number of character edits (computed using editdistance package) with the total number of characters.
- AO: Audio only Model.
- VO: Video only Model.
- AV: Audio-Visual Model.

Table 3. LRS3 – No Noisy

	Loss	CER	WER
AO	0.824979	0.102	0.228
VO	3.834045	0.55	0.881
AV	0.455614	0.102	0.237

Table 4. LRS3 – With Noisy

	Loss	CER	WER
AO	1.695527	0.439	0.744
VO			
AV	1.150616	0.299	0.545

Table 5. LRS2 – No Noisy

	Loss	CER	WER
AO	0.236904	0.061	0.150
VO	1.291037	0.342	0.589
AV	0.171635	0.044	0.118

Table 6. LRS2 – With Noisy

	Loss	CER	WER
AO	1.325958	0.383	0.645
VO			
AV	0.591553	0.157	0.322

As can be seen from 4 tables above that the pure visual model performed the worst, while the audiovisual speech model we tested performed the best, with a WER of 0.118 in the absence of noise. Although the pure speech model performed well in the absence of noise, but in the case of adding noise, its accuracy drops significantly. In the noise case, our model improves WER by 0.199 compared to the traditional pure audio model.

4. Conclusion. In this paper, we use the Transformer architecture, we propose an audio-visual speech fusion model to solve the speech recognition problem on the LRS2 and LRS3 public datasets. It has achieved advanced results, with an improvement of 0.199 in the LRS3 dataset or compared with the traditional pure speech model. After testing on the two datasets, we can obtain the accuracy of the audiovisual fusion model. It is far superior to the traditional pure voice / pure video model. We finally demonstrate that visual information helps improve speech recognition performance even when the clean audio signal is available. Especially in the presence of noise in the audio, combining the two modalities leads to a significant improvement.

References

1. Shi B. et al. Learning audio-visual speech representation by masked multimodal cluster prediction // arXiv preprint arXiv:2201.02184. 2022.
2. Xiong W., Droppo J., Huang X. et al. Achieving human parity in conversational speech recognition // arXiv preprint arXiv:1610.05256. 2016.

3. Afouras T., Chung J. S., Zisserman A. The conversation: Deep audio-visual speech enhancement // arXiv preprint arXiv:1804.04121. 2018.
4. Shi B., Hsu W. N., Mohamed A. Robust self-supervised audio-visual speech recognition // arXiv preprint arXiv:2201.01763. 2022.
5. Kinoshita K., Ochiai T., Delcroix M. et al. Improving noise robust automatic speech recognition with single-channel time-domain enhancement network // ICASSP 2020-2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE. 2020. P. 7009–7013.
6. Afouras T., Chung J. S., Senior A. et al. Deep audio-visual speech recognition // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2018.
7. Chung J. S., Senior A., Vinyals O. et al. Lip reading sentences in the wild // 2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR). IEEE. 2017. P. 3444–3453.
8. Afouras T., Chung J. S., Zisserman A. LRS3-TED: a large-scale dataset for visual speech recognition // arXiv preprint arXiv:1809.00496. 2018.
9. The Oxford-BBC Lip Reading Sentences 2 (LRS2) Dataset [Internet resource]: URL:https://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/data/lip_reading/lrs2.html (date: 06.06.22).
10. The Oxford-BBC Lip Reading Sentences 3 (LRS3) Dataset [Internet resource]: URL:https://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/data/lip_reading/lrs3.html (date: 06.06.22).

UDC 004.81

Fan X., Li P., Gong S., Fu G.

Based on Siamese Network world ancient celebrity portrayals recognition

Recommended for publication by associate professor Blekanov I. S.

1. Abstract. Most people are unfamiliar with portraits of ancient world characters, and proving who a portrait person is with little data is exceedingly difficult when the images are in individual form. In recent years, single-sample image identification algorithms based on deep learning have improved recognition results to a new level. The Siamese Network, on the one hand, is better adapted to our demands when it comes to distinguishing people's portraits. On the other hand learns from picture data using a convolutional architecture, allowing us to achieve near-state-of-the-art classification tasks. In terms of accuracy, the Siamese Network surpasses other deep learning models with a modest number of samples [1].

2. Introduction. Neural network learning is similar to human brain network learning, but the neural network of the human brain has accumulated over time to a very high standard and can learn new things very quickly. The fact is that the network of recognizing this thing is already in the brain similarly. The idea is that we can build such a network using machine learning, and our machines can recognize this image.

Specifically, the most significant step in building an image differentiation model is learning a neural network at first that can be used to differentiate the identity of a picture from other relevant information, allowing us to achieve our goal. After learning we will have a neural network that will allow us to extract a dataset of learned photographs and recognize the related person's portraits.

Fan Xuanping – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: gengen_13@163.com, phone: +8615309130028

Li Pengyi – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: pengyi_29@163.com, phone: +8615319468365

Gong Shiyuan – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: eikegong@163.com, phone: +8613266848710

Fu Guofeng – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: guofeng918@outlook.com, phone: +8615319876673

So we also need to meet such requirements for the recognition of world legends characters, Siamese-Networks-for-One-Shot-Learning [2] is the method we need to use. Such a method must be modeled and trained.

3. Data Set. A network approach is used to collect portraits of ancient Chinese emperors and well-known Russian international figures, which are split into train data and test data. Because people's portraits still need to ensure authenticity, and the features of a person's face are the same for different portraits, we can ensure that there are one to three portraits of each person in the datasets when building the train data set, and at least have one test image when building the test data set.

Table 1. Database tables

Label = FileName	Image
Li Shiming	01.png...
Lenin	01.png...
Peter the Great	01.png 02.png...
.....
Hiowan Yei	01.png...

The dataset is handled by first arranging the various photographs in distinct folders and identifying them by name, then reading the data using transform on the images, and finally saving the tags in an array when it reads data.

In machine learning, the training data is required to train models. To construct models, training data sets are utilized to learn hyperparameters and feature mappings. The test data is used to see if the accuracy rate of the established data model is high and evaluate the model's accuracy. And the test data cannot be utilized as data for the model development process otherwise over-fitting would occur.

4. Based on Siamese-Networks image recognition.

4.1. Model Introduction. Siamese Networks is a similarity measure that can be used for category identification, classification, etc [3]. when the number of categories is large but the number of samples per category is small. For the whole dataset, we have the amount of data, but for each category, there can be only a few samples, so with the classification algorithm, we can't train any good results because there are too few samples for each category, so we have to find a new method to train this kind of dataset, so we propose siamese networks. Siamese networks learn a similarity measure from the data. The siamese network learns a

similarity metric from the data and uses this learned metric to compare and match samples from new unknown categories. This method can be applied to classification problems where the number of categories is large or where the entire training sample cannot be used in the previous method.

4.2. Analysis Model. M images of N classes are randomly selected from the train set, and then $N \times k < M$ images are randomly selected to represent the small sample set of $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N \times k$ for training, where each class has k samples. Then, the remaining images are represented as query images.

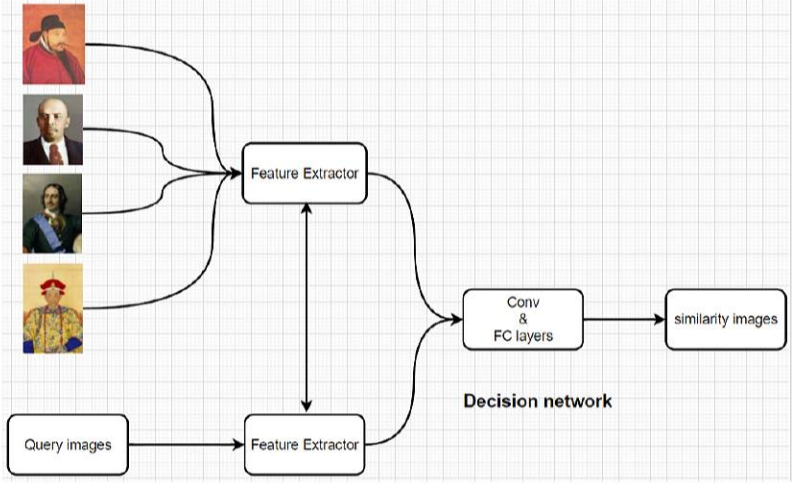


Figure 1. Design model

Figure 1: Data training set after feature extraction, training, to get the model, the photos to be identified will also be feature extraction, into the model, the results will give a high degree of resemblance to the photo.

Finally, N categories of recognition tasks are constructed and the model is trained on the set. In testing, random samples are taken from the test set to generate a support set and a test set, with the support set labeled and the test set unlabelled.

4.3. Set Model. Image features are extracted in the convolution layer, and parameters are set in the Conv2d method to be more accurate

in feature extraction. Feature dimension reduction is used at the pooling layer to compress the number of data and parameters, reduce excessive fitting and improve the fault tolerance of the model.

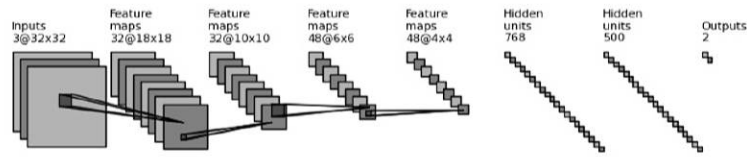


Figure 2. Model image

4.4. Train Model. Firstly, for the loss function, the loss function used in the siamese network is the contrastive loss, with the expression.

$$L(W, (Y, X_1, X_2)) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N Y D_W^2 + (1 - Y) \max(m - D_W, 0)^2.$$

Thereinto

$$D_W(X_1, X_2) = \|X_1 - X_2\|_2 = \left(\sum_{i=1}^p (X_1^i - X_2^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

We will use the Siamese network for training, and then we will get the loss function. After continuous learning of samples, we will use the gradient descent method to reduce the loss function, in this way we will get a more accurate recognition rate. Experimental results show that we have achieved this.

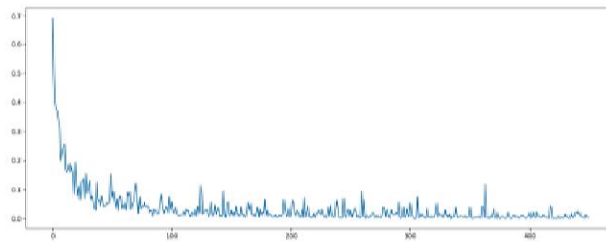


Figure 3. Loss function image

5. Conclusion. Based on a lot of reading and based on our needs for picture identification and the establishment of a dataset, it becomes evident that we have a relatively small number of sample types for recognition.

Traditional picture recognition involves the existence of a large number of examples, which are taught and adjusted to enhance accuracy. Our circumstance does not allow for such a criterion to be met.

A siamese network is a unique sort of neural network design. Unlike a model that learns to classify its inputs, this neural network learns to discriminate between the two inputs. It learns the commonalities between the two inputs. When we're undertaking a single-sample classification task, the network can compare each image in the test set with each image in the train set and find out which one is most likely to be in the same category as him. So we want the neural network design to input two photos at the same time and output the likelihood that they belong to the same category. This suits our demands.

After experimenting with learning from the training dataset, we obtained more supported data, i.e. that is, we obtained in the experiment

Final accuracy 0.8797500000

In this paper, we analyze the feasibility of traditional image recognition and twin network-based image recognition, experimentally validate our model, and can obtain the expected recognition requirements.

References

1. Shao H. et al. Few-shot learning for palmprint recognition via meta-siamese network // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2021. Vol. 70. P. 1–12.
2. Fei-Fei L., Fergus R., Perona P. One-shot learning of object categories // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2006. Vol. 28. No. 4. P. 594–611.
3. Koch G. et al. Siamese neural networks for one-shot image recognition // Proceedings of the 32-nd International Conference on Machine Learning, Lille, France. JMLR. 2015. Vol. 37. P. 1–8.

UDC 004.8

Liu Y., Sun Z., Liu J., Qu C.

Tweet sentiment extraction

Recommended for publication by associate professor Blekanov I. S.

1. Abstract. In recent years, with the development of deep learning technology, more and more scholars have devoted themselves to the study of machine sentiment analysis, and have designed many excellent models to quickly realize machine sentiment analysis of text [1]. Its famous are LSTM, CNN-LSTM, BiLSTM-Attention, etc. In this paper, an optimal analysis model is obtained through the experiments of these models. The experiment was analyzed on the Tweet-sentiment-extraction dataset. In the experiment, BiLSTM-Learning had the highest recognition accuracy of 89.75%. This paper proves the effectiveness of neural network in emotion analysis.

2. Introduction. With the development of the Internet, social platforms such as Weibo, Twitter and Facebook have become popular. More and more users add emotional text in the text. And the emotions behind specific tweets may affect the interests of companies, individuals and the public. Especially tweets with negative emotions, or because of negative tone will destroy the network community environment. However, on the other hand, analyzing some positive emotions and mining valuable information are often helpful for companies and governments to make decisions. Therefore, in this era of rapid development of the network, the rapid analysis of a large number of tweeting emotions on the network, often have a positive role in social decision-making.

3. Experimental samples. Tweet-sentiment-extraction dataset contains tens of thousands of twitter tweets. There are 27481 training data and 3534 test data sets. For each dataset, there are four parameters:

Liu Yuxing – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:lyx1015925541@gmail.com, phone:+8618992086235

Sun Zhaoruikun – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:sunzrk0924@outlook.com, phone:+8618066724597

Liu Jiarui – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:LiuJiarui0412@outlook.com, phone:+8618609227355

Qu Chenyang – undergraduate student, Yanan University;
e-mail:quchenyang11@outlook.com, phone:+8618146838676

textID, text, selected_text, sentiment. Specific information is shown in Figure 1.

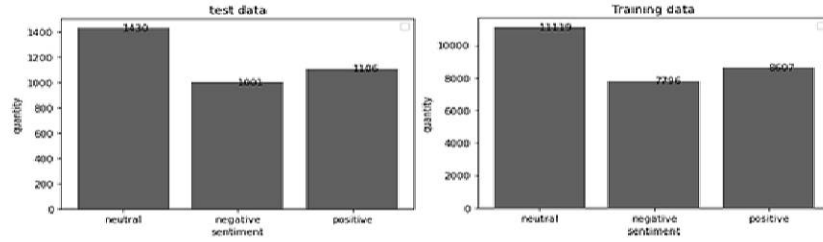


Figure 1. Tweet-sentiment-extraction dataset

4. RNN and LSTM network. Recurrent Neural Network (RNN) output a sequence while output the content of the previous memory sequence. The specific manifestation is that the network will memorize the previous information and apply it to the calculation of the current output, while LSTM network, full name Long short-term memory, is a special type of RNN network . Its core structure is shown in Figure 2.

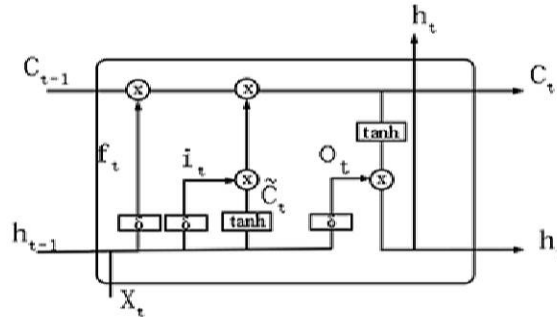


Figure 2. LSTM network structure

Brief description of LSTM core algorithm. The input gate is mainly responsible for the preservation of the previous cell information and the storage of new information. It is calculated by

$$f_t = \sigma(w_f [h_{t-1}, x_t] + b_f).$$

Secondly, the tanh layer will create candidate value vectors \tilde{C} and i_t to add values to the state, and integrate information to update the state:

$$\tilde{C} = \tanh(W_c [h_{t-1}, x_t] + b_c), \quad i_t = \sigma(w_i [h_{t-1}, x_t] + b_i).$$

Finally, update the state in LSTM, C_{t-1} to C_t update the short-term memory of the memory and complete the output of the information:

$$\begin{aligned} C_t &= f_t C_{t-1} + i_t \tilde{C}_t, \\ o_t &= \sigma(w_o [h_{t-1}, x_t] + b_o), \\ h_t &= o_t \tanh(C_t). \end{aligned}$$

5. BiLSTM⁺ attention structure.

5.1. BiLSTM⁺ attention. The model uses Bi-directional long short-term memory network (BiLSTM) and combines attention mechanism to capture the most important semantic information in sentences. Using BiLSTM and attention mechanism, it can automatically focus on words that have a decisive impact on classification. The main idea is to introduce a control mechanism to solve the problem of customer service gradient disappearance, and to remember the characteristics of the data and the data of the previous state.

Through experiments, this paper proves that BiLSTM⁺ attention [2] has certain advantages in the emotional analysis of tweets. On the basis of BiLSTM, the attention mechanism is introduced to extract the upper and lower relationship characteristics of the text, and the weight of the information can be allocated. Finally, the weighted summation is carried out. Therefore, the introduction of Attention method can make the output information have strong explanatory characteristics. The BiLSTM⁺ attention framework is divided into five parts: Input Layer, Embedding Layer, LSTM Layer, Attention Layer, Output Layer, as shown in Figure 3.

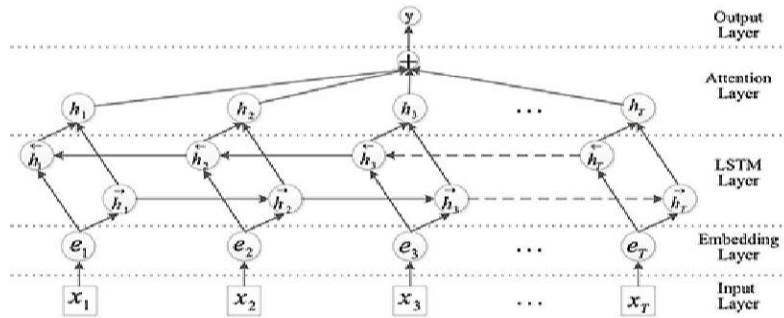


Figure 3. BiLSTM⁺ attention model

5.2. Attention. The introduction of Attention mechanism can help the network get rid of relying solely on text content information for text sentiment analysis, so that the model can learn the relationship between target words and emotions by itself. For the BiLSTM⁺ attention model [3], the Attention layer is mainly responsible for weighting the output information and improving the feature to obtain the Attention score. The calculation process is as follows

$$u_{it} = \tanh(W_w h_{it} + b_w),$$

where h_{it} is the output result of LSTM layer, i is the LSTM number, and t is the memory time. After $\tanh(\cdot)$ activation function, u input Softmax is obtained for weight normalization (1). Its dimension changes to $h \in R^{d \times T}$, $W \in R^{d \times d}$, $u \in R^{d \times T}$.

$$\alpha_{it} = \frac{\exp(u_{it}^T u_w)}{\sum_t \exp(u_{it}^T u_w)}, \quad (1)$$

where $u_{it}^T u_w$ is the core of Attention, $u_w \in R^{d \times 1}$ is the learning parameter, so the dimension of α is $R^{T \times 1}$. At this time, Softmax normalizes the entire sequence. Final Attention score is found as

$$S_i = \sum_t \alpha_{it} h_{it}.$$

The obtained feature vector is $S \in R^{d \times 1}$. Therefore, BiLSTM⁺ attention has more accurate results of sentiment analysis due to the addition of Attention mechanism.

6. Experiment.

6.1. Control-experiment. This paper uses the method of Control experiment to demonstrate the advantages of the model, and conducts comparative experiments on the model RNN, LSTM, CNN+BiLSTM and BiLSTM⁺ attention under the Tweet-feeling-extraction dataset. By identifying accuracy and Loss values, such as Table 1.

Table 1. Accuracy and loss comparison table

Model	Loss	Accuracy
RNN	0.412	69.25%
LSTM	0.4511	79.00%
CNN+BiLSTM	0.2822	86.50%
BiLSTM ⁺ attention	0.1775	89.75%

6.2. Word clouds. Based on the BiLSTM⁺ attention model experiment, the word cloud of words in Tweet-Sense-Extraction dataset is drawn as follows: Figure 4. Two groups of words expressing different emotions are obtained. It can be intuitively observed from the word cloud that the model analyzes those words that are often filled with positive or negative emotions.



Figure 4. Word clouds

7. Conclusion. In this paper, experiments were carried out on the Tweet-sentiment-extraction dataset. The best experimental results were obtained in the BiLSTM⁺ Attention model test, and the accuracy of sentiment analysis reached 89.75%. The model has a profound understanding of the emotion of specific words for the text information in the tweet. The model has high accuracy and high efficiency for classification of negative and positive emotions. But the model also has certain insufficiency, regarding the practical application emotion often more abundant, therefore the model optimization has become the new topic.

References

1. Ahuja R. et al. The impact of features extraction on the sentiment analysis // *Procedia Computer Science*. 2019. Vol. 152. P. 341–348.
2. Liu G., Guo J. Bidirectional LSTM with attention mechanism and convolutional layer for text classification // *Neurocomputing*. 2019. Vol. 337. P. 325–338.
3. Alfattni G., Peek N., Nenadic G. Attention-based bidirectional long short-term memory networks for extracting temporal relationships from clinical discharge summaries // *Journal of Biomedical Informatics*. 2021. Vol. 123. Art. no 103915.

UDC 004.8

Ma R., Zhang Y., Liu J., Petrosian O.

Next running application prediction in OS using time-series forecasting and XAI

1. Introduction. With the development of technology, mobile applications (referred to as Apps) are popularized on smartphones. In order to facilitate life, users have installed a large number of Apps on smartphones, and response speed is one of the most important indicators of user experience, and due to the unstable network environment of Apps, the speed experience is particularly important. For example, after users use WhatsApp, they will use Gmail, if the mobile phone will start Gmail only when the user clicks the Gmail icon, then the user needs to wait for Gmail to load before using its functions, which will greatly reduce efficiency and user experience. Trinh et al. [1] collected the data of smartphone users using Apps and analyzed that the behavior of mobile phone users using Apps has a certain pattern. Predicting in advance which App the user will use next has a profound impact on improving the user experience, which can fundamentally improve the user experience of using digital services [2]. Much research has been done in forecasting which app users will use. Much research work has been conducted on forecasting which app user will use [3]. According to the survey of [4], Liao et al. [5] forecasted the next application based on the temporal profile mined by each application, and Huang et al. [6] pointed out that in the next application forecasting, the most recently used application and time are more than location and other contextual information is more effective. After 2017, neurological methods became more and more popular, some researchers proposed different neural models

Ma Ruimin – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st088963@student.spbu.ru, phone: +7(981)935-57-91

Zhang Yuyi – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: lesliezhang0825@gmail.com, phone: +7(962)344-99-46

Liu Jing – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: st082130@student.spbu.ru, phone: +7(960)278-35-53

Petrosian Ovanes – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru, phone: +7(911)740-80-19

for predicting the next app, including CNN [7] and LSTM [8], etc. The performance of these different forecasting models in different datasets is not stable, which means they are difficult to compare and measure. Therefore, choosing a better forecast model by comparing different forecast models is crucial for solving practical forecasting problems. In this paper, on the one hand, we use popular forecast models to forecast the next application to be used, and conduct a comprehensive comparison of forecast models to identify better forecast models from a practical level, these forecast models include LightGBM [9], Random Forest [10], Bi-RNN [11], Bi-LSTM [12] and Bi-GRU [13]. On the other hand, we explain the forecast model to gain a deeper understanding of the features learned from the forecast model and the explanation method chosen is SHAP [14]. To achieve better define the prediction model, Section 2 details the relevant datasets information, Section 3 presents the forecast model and the XAI algorithms, Section 4 shows the forecast results and comparison results using classical measures, as well as the explanation results using the XAI algorithms, and Section 5 shows the conclusions and an introduction to future work.

2. Datasets.

2.1. LiveLab – measuring wireless networks and smartphone users in the field. The dataset appusage.sql for LiveLab – Measuring wireless networks and smartphone users in the field includes usage information for various apps: app name, usage time and date, and duration, the app is running in seconds; apps.sql includes A list of all apps the user has installed: app name, type, and price in thousandths of a dollar [15].

2.2. LSApp – large dataset of sequential mobile App usage. The dataset lsapp.tsv includes usage information for various apps: the unique user identifier, the unique session identifier, app name, timestamp, type of the event record [16].

2.3. Tsinghua App usage dataset. Each entry of the Tsinghua App Usage Dataset contains the anonymous user ID, the timestamp of the HTTP request or response, the length of the packet, the visited domain, and the user agent fields. App Usage Trace.txt includes: User ID, Timestamp (Second), Location (base station ID), App ID and Traffic (Byte); App2Category.txt includes: App ID and Category ID; Categories.txt includes: Category ID and English Name; base poi.txt includes: Basestation ID and Number of PoIs (Points of Interests) for each category [17].

3. Solution approach. Both integrated models and neural networks are considered to be the best forecast algorithms relevant for defining the direction of application usage. Among them, integrated models are divided into boosting algorithms and bagging algorithms. In this work, we chose the LightGBM [9] algorithm as a representative of boosting algorithms and Random Forest [10] as a representative of bagging algorithms. Bi-RNN [11], Bi-LSTM [12] and Bi-GRU [13] are used as representation of neural network models. Explainable AI aims to improve the transparency of “black box models”, not by showing the details in the model but by focusing on the presentation of those details in a way that humans can understand. Currently, a popular approach is to calculate the contribution of a feature. On the one hand, a higher contribution value of a feature means that the feature has a greater impact on the predicted outcome. On the other hand, explainable AI can also express the relationships between individual features and thus find the features that influence the feature that has the largest contribution. As a result, trust in the “black box model” is increased by the output of the explainable AI [18–23]. In this paper, the Shapley Additive explanation (Shapley Additive explained), a game theoretically optimal Shapley value-based explanation of individual forecasts, proposed by Lundberg and Lee [14], is chosen to explain the existing forecasting models.

3.1. LightGBM. LightGBM is a gradient boosting framework that uses a tree-based learning algorithm [9]. On the one hand it uses a histogram algorithm [9] that only keeps the discrete values of the features instead of the traditional pre-sorted results, achieving reduced memory consumption and thus increasing the speed of the algorithm. On the other hand, it uses the GOSS algorithm [9] which balances the speed and performance of LightGBM by keeping instances with larger gradients and randomly selecting those with smaller gradients.

3.2. Random forest. The Random Forest algorithm [10] is based on independent decision trees. On the one hand, the random sampling method results in a wide range of diversity, which means that it can significantly control the variance of the prediction results, thus reducing the correlation between multiple independent decision trees. On the other hand, it is possible to select the best result from the results of multiple independent decision trees by means of a “voting” mechanism.

3.3. Bi-RNN, Bi-LSTM and Bi-GRU. The idea of Bidirectional is to split the neurons of the traditional neural network model into two parts, one of which is responsible for the positive time direc-

tion (forward states) and the other is responsible for the negative time direction (backward states) [11]. It should be noted that the output of the forward states is not connected to the input of the backward states. Compared with the traditional RNN, LSTM and GRU, the difference between Bidirectional is the addition of a backward layer.

3.4. SHAP. SHAP (SHapley Additive exPlanation) is an explanation method developed based on Shapley values [23, 24]. It uses cooperative games as the theoretical basis, treats the black box model as a game, and treats each feature as a player. Through the calculation of the Shapley value, we can determine the contribution degree of each player (feature) in the game process (black box model operation), and then know the contribution degree of each feature.

4. Simulation results. For calculations we used a computer with CPU–Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @ 2.20GHz; RAM–16.0GB; OS–Windows 10; For the implementation of the forecast models Python–Jupyter 3.8.3 was used.

4.1. Forecast results. In this section, for reasons of space, only the results of the LiveLab dataset for the loss values (see Figure 1) and the results of the comparison of the predicted values for the true values (see Figure 2) are used as examples. The learning curve for all models shows a decreasing trend. And given the need for a comprehensive comparison, a detailed comparison of quantitative metrics is required.

Table 1. Forecast quality of LiveLab

<i>LiveLab</i>	R^2	<i>MSE</i>	<i>TimeSpent, s</i>
LightGBM	0.9740	1.5030	0.34
Random Forest	0.9753	1.4650	12.34
Bi-RNN	0.9819	1.2552	61.49
Bi-LSTM	0.9600	1.8628	65.56
Bi-GRU	0.9606	1.8499	100.69

Table 2. Forecast quality of LSApp

<i>LSApp</i>	R^2	<i>MSE</i>	<i>TimeSpent, s</i>
LightGBM	0.9606	0.7738	0.15
Random Forest	0.9730	0.6400	1.53
Bi-RNN	0.3804	3.1356	33.74
Bi-LSTM	0.4576	2.9339	59.58
Bi-GRU	0.5267	2.7408	24.91

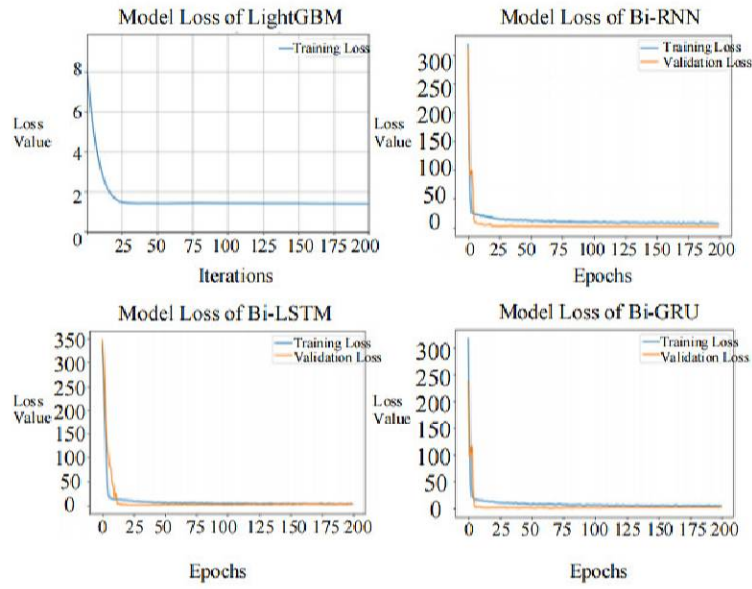


Figure 1: LiveLab: Learning curves of forecast models. Note: The ensemble algorithm learning curve within the LightGBM model is RMSE, and the neural network is MSE.

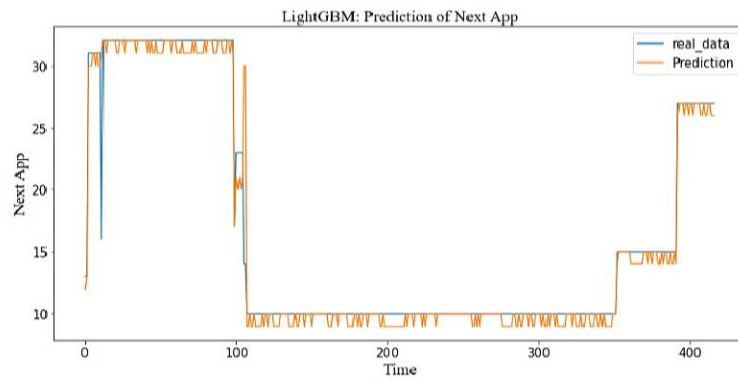


Figure 2: LiveLab: comparison of real and predicted values.

Table 3. Forecast quality of Tsinghua

<i>Tsinghua</i>	R^2	MSE	$TimeSpent, s$
LightGBM	0.8155	56.5592	0.20
Random Forest	0.7519	65.5902	10.35
Bi-RNN	0.6736	75.2260	54.85
Bi-LSTM	0.6291	80.1927	58.20
Bi-GRU	0.6257	80.5618	80.56

Tables 1, 2 and 3 show the results of all forecast models of the LiveLab, LSApp and Tsinghua datasets respectively. In this paper, performance is measured mainly from the perspective of variance, while considering the algorithm runtime (TimeSpent means the training time of the algorithms). Analysing Table 1, it is easy to see that all the forecast models produce good performance on LiveLab, with Bi-RNN producing the best performance and LightGBM the shortest runtime. Analysing Table 2, the LightGBM and Random Forest forecast models produced good performance on LASpp, and we can obtain that the neural network forecast models did not produce good performance relative to the integrated models, with the integrated model of Random Forest producing the best performance and the LightGBM having the shortest runtime. Analysing Table 3, all the forecast models produced good performance on Tsinghua, with LightGBM producing the best performance and the shortest running time.

4.2. Explanation results. Based on a combination of both variance and algorithm running time, we chose to explain the results of the three datasets forecasted by the LightGBM-based algorithm using the SHAP method. In Figures 3 and 4, the transition from blue to red indicates an increase in the value of the feature, and the transition from top to bottom indicates a decrease in the impact of the feature on the model’s forecast results (the features can be ranked according to their Shap values). In the left half of Figure 3 and in Figure 4, we conclude that “genre” and “Category ID” have the greatest impact on App forecast results, and in the right half of Figure 3, we conclude that “lag_App ID1” has the greatest impact on the App forecast results.

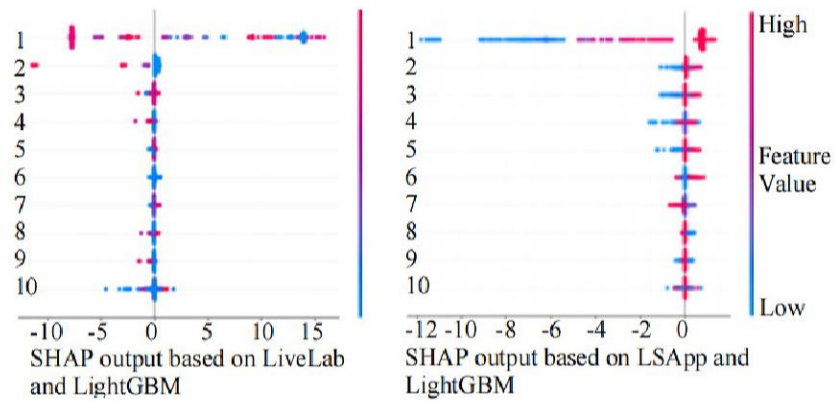


Figure 3: SHAP output based on LiveLab, LSApp and LightGBM

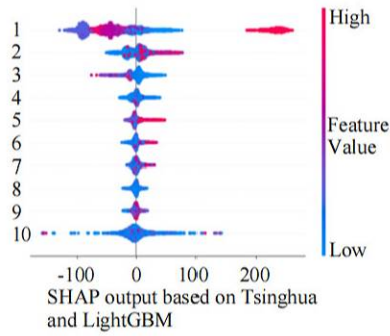


Figure 4: SHAP output based on Tsinghua and LightGBM

5. Conclusion. In this paper, we use integrated models and neural network models to forecast the App Usage datasets for the time series type, targeting the app that the user is going to use at the next point in time, and we compare the performance of the five models on different datasets. All things considered, we believe that LightGBM is a better predictive model in the time series type App Usage dataset. We also pro-

vide an in-depth understanding of the forecast models at an explainable level, thus increasing the transparency of the black-box forecast models and helping users to determine whether the features learned by the models are valid. Taking the explained results of this work as an example, we conclude that the category features and lagging features of the app are important in the forecast of the next app used by the user. In the future, we will add a section on traditional time series forecast methods and compare and explain them in the hope of finding forecast models that are more suitable for the forecast problem of the next app a user will use and improving the user's confidence in the results produced by the forecast models.

References

1. Nayar S. K., Narasimhan S. G. Vision in bad weather // Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision IEEE. 1999. Vol. 2. P. 820–827.
2. Revels J., Tojib D., Tsarenko Y. Understanding consumer intention to use mobile services // Australasian Marketing Journal. 2010. Vol. 18. No 2. P. 74–80.
3. Tian Y., Zhou K., Pelleg D. What and how long: prediction of mobile App engagement // ACM Transactions on Information Systems. 2022. Vol. 40. No 8. P. 1–38.
4. Cao H., Lin M. Mining smartphone data for app usage prediction and recommendations: A survey // Pervasive and Mobile Computing. 2017. Vol. 37. P. 1–22.
5. Liao Z. X., Lei P., Shen T. et al. Mining temporal profiles of mobile applications for usage prediction // IEEE International Conference on Data Mining Workshops IEEE. 2012. P. 890–893.
6. Huang K., Zhang C. H., Ma X. X. et al. Predicting mobile application usage using contextual information // Proceedings of the 2012 ACM Conference on Ubiquitous Computing. 2012. P.1059–1065.
7. Schmidhuber J. Deep learning in neural networks: An overview // Neural Networks. 2015. Vol. 61. P. 85–117.

8. Xu S., Li W. Z., Zhang X. et al. Predicting and recommending the next smartphone Apps based on recurrent neural network // CCF Transactions on Pervasive Computing and Interaction. 2020. Vol. 2. P. 314–328.
9. Ke G. L., Qi M., Thomas F. et al. LightGBM: A highly efficient gradient boosting decision tree // NIPS. 2017. Vol. 30. P. 74–80.
10. Tin K. H. The random subspace method for constructing decision forests // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1998. Vol. 20. No 8. P. 832–844.
11. Schuster M., Paliwal K. K. Bidirectional recurrent neural networks // IEEE Transactions on Signal Processing. 1997. Vol. 45. No 11. P. 2673–2681.
12. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long short-term memory // Neural Computation. 1997. Vol. 9. No 8. P. 1735–1780.
13. Cho K., Merriënboer B. V., Gulcehre C. et al. Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation // Computer Science. 2014. P. 1724–1734.
14. Lundberg S. M., Lee S. I. A unified approach to interpreting model predictions // Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems. 2017. P. 4768–4777.
15. LiveLab Dataset [Internet resource]:
URL:<http://yecl.org/livelab/traces.html> (date: 22.12.21).
16. LSApp Dataset [Internet resource]:
URL:<https://github.com/aliannejadi/LSApp> (date: 21.01.22).
17. Tsinghua Dataset [Internet resource]:
URL:<http://fi.ee.tsinghua.edu.cn/appusage> (date: 17.02.22).
18. Das A., Rad P. Opportunities and challenges in explainable artificial intelligence (XAI): A survey // CoRR. 2020. Vol. 2006.11371. P. 1–24.

19. Zhang Y., Ma R., Liu J. et al. Comparison and explanation of forecasting algorithms for energy time series // *Mathematics*. 2021. Vol. 9. Art. no 2794.
20. Arrieta A. Explainable artificial intelligence (XAI): Concepts, taxonomies, opportunities, and challenges toward responsible AI // *Information Fusion*. 2020. Vol. 58. P. 82–115.
21. Zou J., Xu F., Zhang Y. et al. High-dimensional explainable AI for cancer detection // *International Journal of Artificial Intelligence*. 2021. Vol. 19. No 2.
22. Zhang Y., Xu F., Zou J. et al. XAI evaluation: Evaluating black-box model explanations for prediction // *Proceedings of 2021 2nd International Conference on Neural Networks and Neurotechnologies*. 2021. P. 13–16.
23. Zakharov V., Balykina Y., Petrosian O. et al. CBRR model for predicting the dynamics of the COVID-19 epidemic in real time // *Mathematics*. 2020. Vol. 8. No 10. Art. no 1727.
24. Zou J., Petrosian O. Explainable AI: Using Shapley value to explain complex anomaly detection ML-based systems // *Machine Learning and Artificial Intelligence: Proceedings of MLIS 2020*. 2020. P. 152–164.

UDC 004.891

**Pavlova E., Yakushkin O., Pen E., Sedova O., Frikh-Khar A.,
Terekhina Ya., Lamzin N., Pirozhkov E., Bortov M.,
Karpenko V.**

Unsupervised learning on narrowly focused data aggregated automatically

1. Introduction. Information published by users in the public domain can serve as a good resource for collecting data when forming datasets for training neural networks. Instagram is one of the largest photo and video sharing platforms in existence. The main method for users to interact with each other on this platform is the publication of images. At the same time, functions such as adding a description to images, hashtags, highlighting with a frame on image, etc. are available. This allows researchers to use Instagram to apply machine learning and image analysis methods.

2. Related work. Instagram provides resources that can be used for creating datasets for image neural network models. With hashtags or descriptions, tagged datasets for a given topic can be received. In addition, metadata obtained from an image can be useful for finding related profiles, refining markup, and automatically interacting with users.

Pavlova Ekaterina – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: e.d.pavlova@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Yakushkin Oleg – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Pen Evgeniy – executive director, BiogeoHab; e-mail: evgeniypen@gmail.com, phone: +7(999)224-39-74

Sedova Olga – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: o.s.sedova@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Frikh-Khar Anna – graduate student, Marine research center Lomonosov Moscow State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Teryokhina Yana – graduate student, Lomonosov Moscow State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Lamzin Nikita – undergraduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Pirozhkov Eremej – undergraduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Bortov Maksim – undergraduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Karpenko Viktor – undergraduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: o.yakushkin@spbu.ru, phone: +7(999)224-39-74

Receiving data from the Instagram platform is possible in several well-known ways: a sequence of requests to the official platform API, using tools to automate the work of a web browser and all kinds of web crawlers. The official API has some limitations described in the documentation. Instagram’s changing interface makes it difficult to use web browser automation tools like Selenium. A crawler is effective in collecting publicly available images as well as related metadata using a crawler.

The databases obtained this way, after preprocessing, can be used as training datasets for neural networks. Preprocessing of such a dataset is necessary because the data can be highly fragmented. Classification models can be used to cleanse the dataset from markup errors made by users in the descriptions of published images.

3. Problem definition. Our goal is to create an automated application capable of creating thematic datasets based on hashtags and profiles. The functionality of the application also includes hashtag tracking and automatic publication of a response generated image.

4. System description. Fig. 1 shows the approximate architecture of our proposed solution. The metadata obtained with the image is used to form the support set that is required for segmentation using the FSL [1] segmentation model. In our case, it is advisable to consider the use of models that solve this class of problems, since the data set can be limited by the number of images.

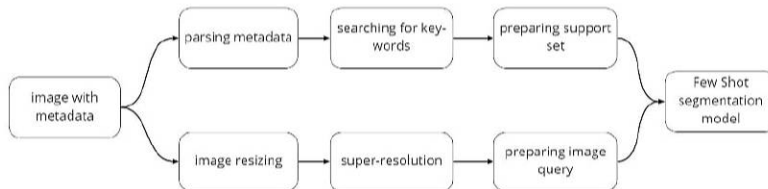


Figure 1. The system architecture

Image generation is carried out by applying a mask obtained by a neural network for object segmentation. However, to improve the segmentation quality, a super-resolution model was used before segmentation.

4.1. Preprocessing. Before solving the segmentation problem [2], it is necessary to create a set of classes of different species of animals and plants [3]. After the object is detected, the data preparation stage begins, without which it is impossible to proceed to the segmentation stage, since the neural network needs small datasets with target objects that need to be segmented in the image.



Figure 2. Example of support set and results of FSL segmentation

However, many open sea life databases [2] contain either multiple species or rectangles as a set of objects, and thus fins and body parts can often be cut off. Automatic formation of a dataset consists in solving the unsupervised segmentation problem, as a result of which you can automatically create classes and masks for each of the segmented objects.

Fig. 2 shows examples of a set of supports and the results of few shot learning segmentation. As a result of our research, a sample of 6 images was created for each of 60 species.

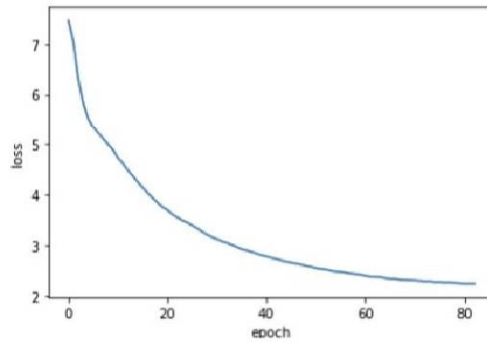


Figure 3. The loss function

4.2. DINO. We also tested the Self-Supervised learning method DINO [4] (a form of self-distillation with no labels). This method allows you to achieve state-of-art results and includes teaching two identical architectures once, but with different parameters: student and teacher. The collected data from the Instagram platform was used as a training dataset.

Fig. 3 shows a fine-tuning process. At the 82nd epoch, the loss function reached a value of 2.24, using the obtained weights, attention maps were created for previously unknown networks of images (Fig. 4)

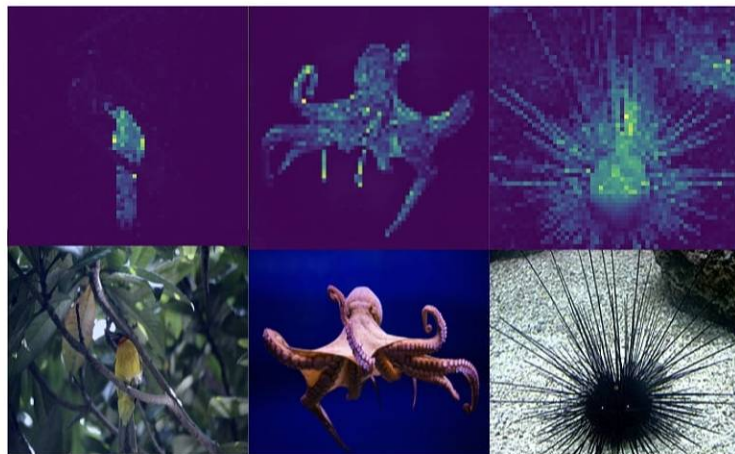


Figure 4. Attention maps

5. Interaction. The program for the automatic aggregation of narrowly focused data of the Instagram platform, through interaction with users, uses the official API of the platform [5]. It also uses tools for downloading images and obtaining metadata to collect data about publications marked with a hashtag. Data on authorship, time and date of publication, author's comments to the publication, attached image are aggregated.

Registered users have access to both the original publication and the resulting result of the neural networks through the official account on the Instagram platform. The basic functionality is shown in the diagram (Fig. 5) and consists in:

1. Tracking the hashtag in a given period;
2. Collecting metadata about authorship, date and time, signature, etc.;
3. Reply in the form of a publication to the request received from the user.

6. Conclusion. We have created a framework, the main goal of which is the formation of thematic datasets by hashtags and profiles. Also, hashtag tracking and automatic posting of the generated response image is included in the functionality.

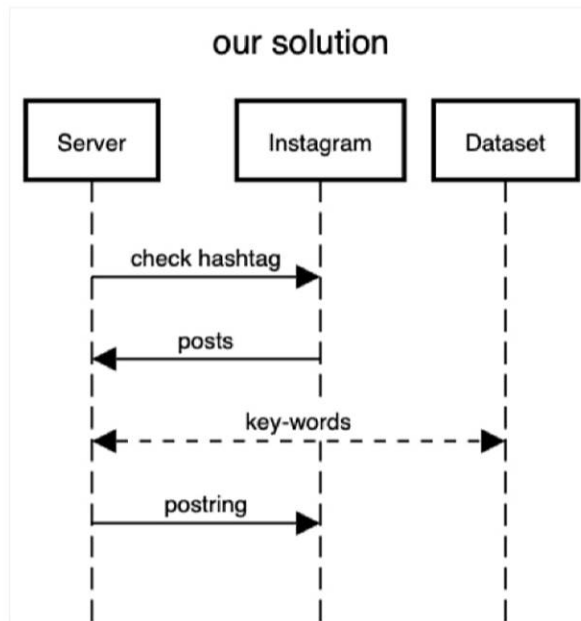


Figure 5. The system architecture

To create an attention map image, we used a neural network model trained using the Self-Supervised learning method – DINO, and also considered the possibility of using the few-shot learning model to solve the segmentation problem.

References

1. Dong N., Xing E. P. Few-shot semantic segmentation with prototype learning // British Machine Vision Conference (BMVC). 2018. P. 1–13.
2. Iakushkin O. et al. Automated marking of underwater animals using a cascade of neural networks // International Conference on Computational Science and Its Applications. Springer, Cham, 2021. P. 460–470.
3. Li X. et al. Fss-1000: A 1000-class dataset for few-shot segmentation // Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2020. P. 2869–2878.
4. Caron M. et al. Emerging properties in self-supervised vision transformers // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2021. P. 9650–9660.
5. Bainotti L., Caliandro A., Gandini A. From archive cultures to ephemeral content, and back: Studying Instagram Stories with digital methods // New media & society. 2021. Vol. 23. No 12. P. 3656–3676.

UDC 004.89

Pu Y., Yuan S., Meng L.

Research on ceramic brick defect detection system based on Siamese Network

Recommended for publication by associate professor Petrosian O. L.

1. Abstract. The defects of ceramic tiles seriously affect the quality of ceramic tiles. The quality inspection of ceramic tiles is an important part of quality management, which requires a large number of workers to observe the surface of ceramic tiles for a long time under high light to find defects. This leads to low-quality inspection efficiency and high cost. Siamese Attention FPN (hereinafter referred to as SAF) based on siamese network combined with feature pyramid and attention mechanism is creatively proposed in this paper to achieve high accuracy and high-efficiency detection of complex ceramic tile surface defects with template graph. The system starts with building the environment, then analyzes and transforms the data set, trains the data set many times, generates the final siamese network model, tests the model, and stores the test results. Finally, the user interface based on PySimpleGUI is developed to make the products better serve the public.

2. System design.

2.1. Program design evaluation index. In this system, ceramic tile defects were detected, and the evaluation index was $0.2ACC + 0.8mAP$. ACC is a defect or flawless classification index to examine the defect detection ability. The mAP value of the defect is calculated according to the PASCAL VOC evaluation criteria, and the formula is as follows. The mAP was calculated at the intersection ratio of the detection box and the real value at the threshold of 0.1, 0.3, and 0.5, respectively, and the average mAP was finally taken. Single photo rea-

Pu Yuxi – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 1635007845@qq.com, phone: +8618091383557

Yuan Sha – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 3280178352@qq.com, phone: +8619891152800

Meng Liping – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: mengliping1999@163.com, phone: +8616609100383

soning time should not exceed 4 seconds,

$$\text{mAP} = \frac{1}{|Q_R|} \sum_{q \in Q_R} \text{AP}(q).$$

2.2. Data set analysis. The data set used in this study is the real data of the production process collected on the spot, covering almost all the common defects in the production line of ceramic tiles, including powder agglomeration, corner crack, drop glaze, broken ink, B hole, edge crack, and corner defect. The feature of this data is that it provides both the detected image and the corresponding template image. Among them, the complex ceramic tiles contain defective images with templates, flawless images, and labeled data, and the total number is about 12,000.

The defect categories of data sets are analyzed, and the difficulty 1: How to guide the model to learn more fine-grained features; difficulty 2: How to use template graph and reasonable use of normal samples without target graph. By analyzing the defect size of target detection, it is found that large targets and small targets coexist and may appear in the same picture at the same time, which is a typical problem. So it is needed to take into account both large targets and small targets. Finally, the edge anomaly for the length-width ratio of a typical bbox (bounding box) is relatively extreme, which needs to be processed accordingly.

2.3. Overall scheme. The overall scheme is a siamese network based on the FPN structure. The basic idea is to input the input image to be detected into a backbone of Resnet, and then get its characteristics through FPN. At the same time, input the template graph to the backbone and FPN. Since the upper and lower is a siamese network, the network structure is completely consistent and the weights are shared. We make up a batch at the time of input, thereby reducing the reasoning time to some extent. After getting their respective characteristics, the difference feature map is obtained by the difference between the two, and the absolute value is calculated. The place with a relatively high value on this feature map is that the original map does not correspond to the template map. After getting the inconsistent feature map, through the activation function of Sigmoid. The probability of serious inconsistency tends to be 1, and the probability of relatively consistent tends to 0. The attention map of defect perception is obtained, and then the attention is multiplied by the feature of the map to be detected to enhance the feature. Enhance the target place, weaken the target place.

Finally, the feature map was obtained by detector Cascade R-CNN detection. Siamese Attention FPN was obtained, and the optimal results were mAP 64.9 and ACC 86.3.

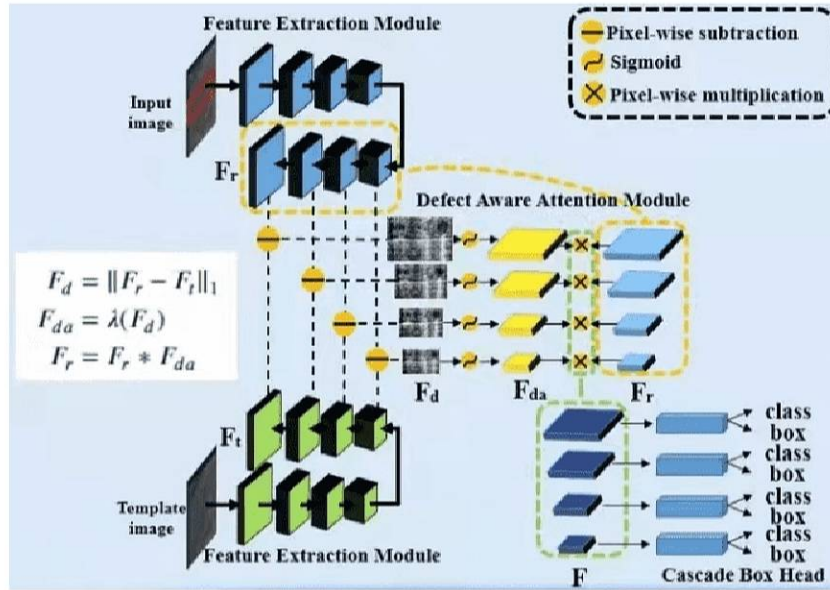


Figure 1. Overall programme design

3. System implementation.

3.1. System construction and data processing. This design system relies on Ubuntu. Actual training needs a 7–8g display. Python version: python3.7; Nvidia dependence: Cuda: 10, cudnn: 7.5.1; Nvidia driver version: 430.14. Deep learning framework: pytorch1.6.

Define eight types of defects: 1: “edge anomaly”, 2: “corner anomaly”, 3: “white spot defect”, 4: “light color block defect”, 5: “dark color block defect”, 6: “aperture defect”, 7: “marker”, 8: “scratch”. Convert the dataset format to COCO format.

3.2. Training process and results. Use the dataset to train a well-written twin network, setting a total of 36 rounds of training, the model is saved every two rounds, and the log is saved every 50 steps. The model is tested using the last trained model. Evaluate the bbox

during the test: Use the official code provided by COCO to get the box AP value and save the test results. The bbox in the graph marks the defect location, and the defect types are marked above the box. Some results are shown in Figure 2.



Figure 2. Test results

4. Key technologies and programmes. Through the reasonable use of SAF template, without additional alignment, reduce the confusion between defects and background color, effectively detect defects, and can be extended to similar tasks based on template detection; To solve the extreme problem of aspect ratio, the RPNHead: anchor box assignment is adopted by ATSS, which can better adapt to the target of different sizes and aspect ratios. The anchor scale decreases with the training scale, and the cascade three head calculates you according to the game map for the corresponding adjustment; Using fp16 acceleration training and increasing input area to alleviate some small target problems. According to the mAP+Acc evaluation method, max score post-processing is used. Non-maximum suppression and maximum score post-processing are used. According to the maximum score of a single image bbox, the image is filtered twice to determine whether the image is a normal sample.

5. System testing. Interface test: Execute program repeatedly, normal display, no delay and unclear display problems. Performance test: response-ability test, single photo reasoning time 1.82 seconds; the position and type of ceramic tile defects can be normally tested; stability test, repeat this operating system can run normally. Function test: click the first line of Browse to replace the config file position, click the second line of Browse to replace the model position, click the third line of Browse to replace the position of the image to be detected, drag left and right to set the threshold slider to set the threshold size. After you choose, click Detect button to detect tile defects.

This system will automatically identify and mark any defects encountered. The test is shown in Figure 3.

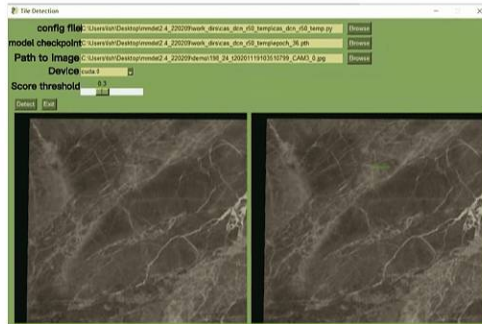


Figure 3. Examples of testing ceramic tile defects

6. Summary. The basic framework of Siamese Attention FPN proposed in this study inherits the advantages of CNN and transformer architectures. Through the reasonable use of SAF template, without additional alignment, reduce the confusion between defects and background color, effectively detect defects, and can be extended to similar tasks based on template detection. Specifically, we use the inherent characteristic pyramid of the lightweight network and use a transformer to strengthen it to construct a robust target-specific appearance model. A centralized architecture with horizontal cross-focus is proposed to construct enhanced high-level feature maps. To avoid the computation and storage strength of pyramid representation and transformer fusion, we further introduce the focus module, which greatly reduces the memory and time complexity and improves the robustness.

References

1. Hanzaei S. H., Afshar A., Barazandeh F. Automatic detection and classification of the ceramic tiles surface defects // Pattern Recognition. 2017. Vol. 66. P. 174–189.
2. Dong G. et al. Application of machine vision-based NDT technology in ceramic surface defect detection a review // Materials Testing. 2022. Vol. 64. No. 2. P. 202–219.
3. Huang C. C., Lin X. P. Study on machine learning based intelligent defect detection system // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2018. Vol. 201. Art. no 01010.

UDC 681.5.013

Smirnov M. N., Smirnova M. A.

Control of an unmanned underwater vehicle

1. Mathematical model of the UUV. As a basic mathematical model of the unmanned underwater vehicle (UUV) a system of ordinary nonlinear differential equations of the 12th order that describes the movement of an object as a controlled solid partially submerged in a liquid is accepted [1–5].

To set the dynamics equations UUV we will use the following coordinate systems [6–10] (see Fig. 1).

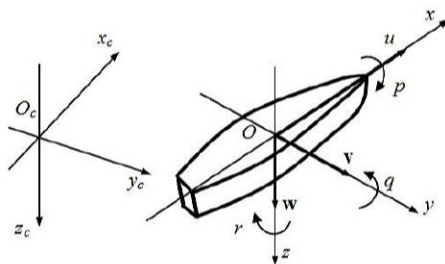


Figure 1. The base and the associated coordinate system

The beginning of the basic earth coordinate system $O_c x_c y_c z_c$ is the point O_c lying on the water surface of the Earth. Through this point the trace of the desired trajectory of the vehicle passes. The $O_c z_c$ axis connects the O_c point to the center of the Earth and is directed downward. In this case, the axes of the $O_c x_c$ and $O_c y_c$ lie in the plane of the local horizon passing through the point O_c , and the $O_c x_c$ axis is directed to some fixed target point of the desired movement, which is considered stationary in space.

Smirnov Mikhail Nikolaevich – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: mikhail.smirnov@spbu.ru, phone: +7(812)428-44-76

Smirnova Maria Aleksandrovna – senior lecturer, Saint Petersburg State University; e-mail: mariya.smirnova@spbu.ru, phone: +7(812)428-44-76

The beginning of the related coordinate system $Oxyz$ system is placed in the center of mass UUV, the axes Ox and Oz lie in the longitudinal plane of symmetry UUV, with the first of them directed to the nose (longitudinal axis), and the second – to the lower part of the UUV (normal axis). The Oy axis (transverse axis) complements the system and together with the Ox axis lies in the plane of the UUV deck, and together with the Oz axis – in the transverse plane, or the plane of the frame.

The orientation of the associated system in relation to the earth system is determined by the following Euler angles: roll φ (turn around the Ox axis), trim θ (turn around the Oy axis), and yaw ψ (turn around the Oz axis). To indicate the angular speeds of turns around the specified axes, use the notation p , q and r respectively. Projections of linear velocities of the center of mass on the axis of the connected system are denoted as u , v and w . We will assume that control in the vertical plane is carried out by a pair of forward horizontal rudders that work synchronously, deviating by an angle δ_n , as well as by the total deviation $\delta_s = \delta_{sp} + \delta_{ss}$ of the left and right feathers of the aft horizontal rudders. The lateral movement of the AUV is controlled by a pair of aft vertical rudders that operate synchronously, deviating by an angle δ_r . In addition, the difference deviation $\delta_x = \delta_{sp} - \delta_{ss}$ of the left and right feathers of the aft horizontal rudders is used to control the roll.

In general form, the dynamics equations have the form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V \\ \omega \end{pmatrix} = M_f^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where vectors $V = (u \ v \ w)^T$ and $\omega = (p \ q \ r)^T$ are columns and represent linear and angular velocities, and vectors $Q = (X \ Y \ Z)^T$ and $N = (K \ M \ N)^T$ are columns and represent forces and moments acting on an object. Here the matrix M_f containing constant coefficients for the first derivative of speeds has the following form:

$$M_f = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{15} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} & 0 & c_{26} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & c_{35} & 0 \\ 0 & c_{42} & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & 0 & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ 0 & c_{62} & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

The forces that make up the vector Q and N the moments that make up the vector that are located in the right part of the system (1) in-

clude terms that belong to one of the following groups: inertial nature, hydrodynamic nature, groups of control components, as well as external influences.

To form a complete system of nonlinear differential equations representing the model of the apparatus, the dynamics equations (1) should be supplemented with kinematic relations that connect the components of the positional vector and their derivatives with projections of the linear velocity vector and with projections of the angular velocity vector. These relations have the following form:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_c &= c_3 c_2 u + (c_3 s_2 s_1 - s_3 c_1) v + (s_3 s_1 + c_3 c_1 s_2) w, \\
\dot{y}_c &= s_3 c_2 u + (c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3) v + (c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1) w, \\
\dot{z}_c &= -s_2 u + c_2 s_1 v + c_1 c_2 w, \\
\dot{\varphi} &= p + s_1 t_2 q + c_1 t_2 r, \\
\dot{\theta} &= c_1 q - s_1 r, \\
\dot{\psi} &= \frac{s_1}{c_2 q} + \frac{c_1}{c_2 r}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Let's present a mathematical model of the controller for horizontal rudders in the mode of moving along a linear coordinate with the filter enabled, which provides a given amount ψ_z of trim during the transition to a given amount η_z of displacement in depth [11], [12], [13], [14], [15], [16]:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 + b_{11} \delta_s + b_{12} \delta_n + g_1 (\psi - z_3), \\
\dot{z}_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 + b_{21} \delta_s + b_{22} \delta_n + g_2 (\psi - z_3), \\
\dot{z}_3 &= z_2 + g_3 (\psi - z_3), \\
\dot{z}_4 &= a_{41} z_1 + a_{43} z_3 + g_4 (\eta - z_4), \\
u_s &= \begin{cases} \mu_{11} \dot{z}_1 + \mu_{12} \dot{z}_2 + \mu_{13} \dot{z}_3 + \nu_{11} (\psi - \psi_z) + \chi_1, & |\eta - \eta_z| \geq 0.05 |\eta_z|, \\ \mu_{11} \dot{z}_1 + \mu_{12} \dot{z}_2 + \mu_{13} \dot{z}_3 + \nu_{11} \psi + \chi_1, & |\eta - \eta_z| < 0.05 |\eta_z|, \end{cases} \\
u_n &= \mu_{21} \dot{z}_1 + \mu_{22} \dot{z}_2 + \mu_{23} \dot{z}_3 + \mu_{24} \dot{z}_4 \nu_{21} \psi + \nu_{22} (\eta - \eta_z) + \chi_2.
\end{aligned}$$

The system of equations that defines the filter has the form:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= \alpha_1 p_1 + \beta_{11}(\psi - z_3) + \beta_{12}(\eta - z_4), \\ \dot{p}_2 &= \alpha_2 p_2 + \beta_{21}(\psi - z_3) + \beta_{22}(\eta - z_4), \\ \chi_1 &= p_{12}, \\ \chi_2 &= p_{22},\end{aligned}$$

where $p_1 = (p_{11} \ p_{12} \ p_{13})^T$, $p_2 = (p_{21} \ p_{22} \ p_{23})^T$, $p = (p_1 \ p_2)^T$.

2. Experiments and results. The coefficients of the filter that provides filtering of the specified frequency $w_0 = 0.5$ take the following values:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.006 & -0.11 & -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2.725 & -11.15 & -11.9 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -54.3 & 6.65e - 16 \\ 38.774 & -2.84e - 16 \\ 0 & 0 \\ -10609 & -118.5 \\ 1.22e + 05 & 1547.2 \end{pmatrix}.$$

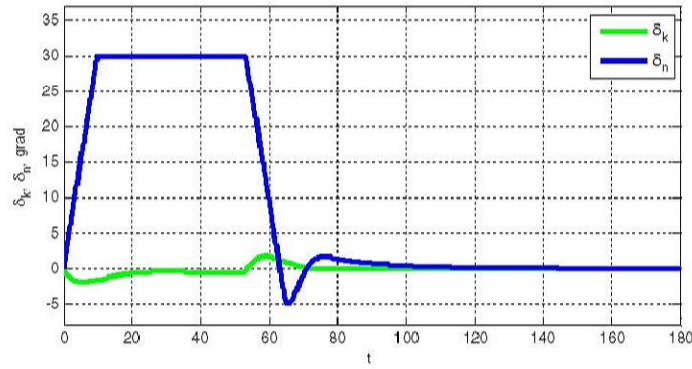


Figure 2. Deviations of the stern and bow horizontal rudders in a nonlinear model

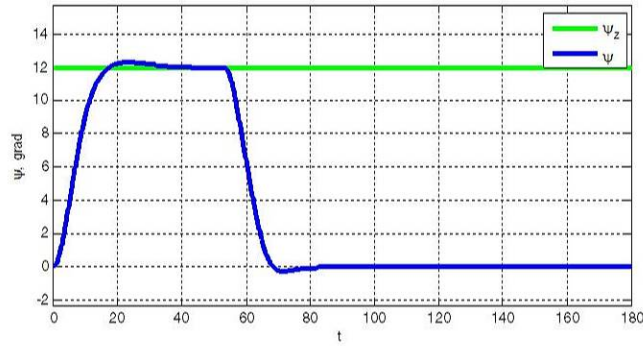


Figure 3. Trim variation in a nonlinear model

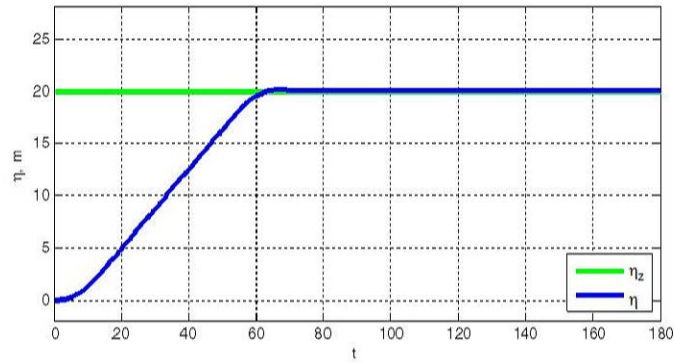


Figure 4. Depth variation in a nonlinear model

Fig. 2-4 shows graphs of functions representing changes in dynamic variables in the process of stabilization of the UUV when it moves in the moving along the linear coordinate mode for the speed $V = 1.2$ m/s.

This process is provided by the above control laws using horizontal rudders. Fig. 2 illustrates the deviations of the stern $\delta_k(t)$ and bow $\delta_n(t)$ horizontal rudders. Fig. 3 shows variation of trim $\psi(t)$ and depth $\eta(t)$ with their output to the specified levels. As we can see on the graph at the 75th second, the angular coordinate reaches the set value $\psi_z = 12^\circ$ and stays in this position until the linear coordinate reaches the value that is equal to 90% of the set value $\eta_z = 20$ m. Next, the control

actions stabilize the angular coordinate with a zero value and the linear coordinate with a value η_z . Similarly, the control action for moving in the horizontal plane is formed.

3. Conclusions. The paper considers the problem of forming multi-purpose automatic control systems for a unmanned underwater vehicle. Controller for horizontal rudders in the mode of moving along a linear coordinate with the filter enabled, which provides a given value ψ_z of trim during the transition to a given value η_z of displacement in depth is formed. To check the quality of the control law, a specialized software has been developed. Graphical results are performed.

References

1. Veremey E. I., Korchanov V. M., Korovkin M. V. Computer modeling of control systems for marine movable objects. St. Petersburg: SPbSU, 2002. 370 p.
2. Lukomskiy U. A., Korchanov V. M. The control of the marine movable objects. St. Petersburg: Elmor, 1996. 320 p.
3. Fossen T. I. Guidance and control of ocean vehicles. New York: John Wiley and Sons, 1999. 494 p.
4. Veremey E. I. The synthesis of the laws of multipurpose control for marine movable objects // Gyroscopy and navigation. 2009. No. 4. P. 3–14.
5. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Questions of digital control laws synthesis for Marine vessels in view of uncertainties // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11. No 23. P. 11566–11570.
6. Arzumanyan N. K., Smirnov M. N., Smirnova M. A. Synthesis and modeling of anti-lock braking system // Proceedings of The 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015. P. 552–554.
7. Fossen T. I., Strand J. P. Passive nonlinear observer design for ships using Lyapunov methods // Experimental Results with a Supply Vessel. Automatica. 1999. Vol. 35. No 1. P. 3–16.

8. Veremey E. I. Dynamical correction of positioning control laws // Proc. of 9th IFAC Conf. on Control Applications in Marine Systems. 2013. Vol. 9. No 1. P. 31–36.
9. Veremey E. I., Smirnova M. A., Smirnov M. N. Synthesis of stabilizing control laws with uncertain disturbances for marine vessels // Proceedings of The 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015. P. 1–3.
10. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Modernization of the approach for bounded external disturbances compensation // Proceedings of The 2015 CACS International Automatic Control Conference. 2015. P. 418–421.
11. Smirnova M. A., Smirnov M. N. Multipurpose control laws in trajectory tracking problem // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11. No 22. P. 11104–11109.
12. Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Astaticism in tracking control systems // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2016. Vol. 1. P. 200–208.
13. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. Multi-purpose control laws in motion control systems // Information. 2017. Vol. 20. No 4. P. 2265–2272.
14. Smirnova M. A., Smirnov M. N., Smirnova T. E., Smirnov N. V. The issues of multipurpose control laws construction // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2227. P. 194–196.
15. Smirnov M. N., Smirnova M. A., Smirnova T. E., Smirnov N. V. The problem of synthesis the control laws with uncertainties in external disturbances // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2017. Vol. 2227. P. 276–279.
16. Smirnova M. A., Smirnov M. N. Dynamic modeling and hybrid control design with image tracking for a quadrotor UAV // International Journal of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12. No 15. P. 5072–5077.

UDC 519.6

Sun Q., Zhao C., Petrosian O., Li Y.

Power allocation in wireless cellular networks: stochastic algorithm based approach

1. Abstract. The issue of optimal power allocation in wireless cellular networks with interfering multiple-access channels (IMAC) attracted a lot of attention in recent decades. Although several model-based algorithms have been investigated in this problem, most of them require analytically tractable mathematical models and have high computational complexity. In this context, we compared different model-free stochastic algorithms and proposed a genetic algorithm based method to minimize signal interference and maximize spectral efficiency. The simulation result shows the superiority of the proposed algorithms against the conventional baseline algorithms.

2. Introduction. Power resource allocation in the communication network has experienced explosive growth in recent decades. With the rapid increment of user density, the network needs more capacity and spectrum effectiveness urgently. Therefore, intracell and inter-cell interference optimization are essential for improving overall capability in the cellular network system. This paper investigates the generalization rate, which is non-convex, NP-hard, cannot be effectively solved.

Various model-based methods have been developed in the present research for power allocation problems with interference as fractional programming (FP) and weighted MMSE (WMMSE). We can observe the excellent performance of these methods through numerical experiments,

Sun Qiushi – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: sunqiushirus@gmail.com, phone: +7(965)772-35-73

Zhao Chi – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: st081292@student.spbu.ru, phone: +7(999)030-66-66

Petrosian Ovanes – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: o.petrosyan@spbu.ru, phone: +7(911)740-80-19

Li Yin – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: liyinrus@outlook.com, phone: +7(965)794-93-68

The article was carried out under the auspices of a grant from the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists – candidates of science, project number MK-4674.2021.1.1

but there are still severe challenges in practical implementation. 1) These methods highly require the mathematical model to be analytical and tractable, but methods are generally imperfect in industrial communication environments because of the specific user distribution and geographical environment. 2) The computational complexities of these methods are pretty high. Therefore, it becomes impractical to implement these methods with interference management.

In recent years, stochastic algorithms have been rapidly developed in wireless communications. GA-based methods do not rely on the mathematical model and are compliant with optimization in practical communication scenarios. In this paper, we used the open-source simulation environment as the model-free simulator, which simulates the SINR as a given input and the average SINR as output. Then we compared the performance of a wide range of existing state-of-the-art stochastic algorithms. As a result, we concluded which direction of the algorithm is the best for this PA problem.

3. Mathematical model. We investigate dynamic power allocation in a wireless cellular network with IMAC. The system is composed of N cells, at the center of each cell, a base station (BS) simultaneously serves K users with sharing frequency bands. Let $g_{n,j,k}$ represents the independent channel between the n -th BS and k -th user in cell j at time slot t , which is given by

$$g_{n,j,k} = |h_{n,j,k}^t|^2 \beta_{n,j,k},$$

where $h_{n,j,k}^t$ is the complex small-scale fading component and $\beta_{n,j,k}$ is the large-scale fading element which consider both Shadow effect and geometric effect. Therefore, the SINR of link in time slot t can be expressed as

$$\gamma_{n,k}^t = \frac{g_{n,n,k}^t p_{n,k}^t}{\sum_{k' \neq k} g_{n,n,k'}^t p_{n,k'}^t + \sum_{n' \in D_n} g_{n',n,k}^t \sum_j p_{n',j}^t + \sigma^2},$$

where D_n is set of interference neighboring cells of the n -th cell, $p_{n,k}^t$ denotes the transmit power for the k -th user connected with the n -th BS at time slot t , and σ^2 presents the variance of additive white gaussian noise. $\sum_{k' \neq k} g_{n,n,k'}^t p_{n,k'}^t$ and $\sum_{n' \in D_n} g_{n',n,k}^t \sum_j p_{n',j}^t$ express the intra-cell and inter-cell interference power. Considering normalized bandwidth, the SINR of link $l_{n,k}$ between n -th cell and k -th user at time slot t is ex-

pressed as $C_{n,k}^t = \log_2(1 + \gamma_{n,k}^t)$. The optimization target is to maximize the sum-rate utility of the whole cellular network under the power constraint. The problem is formulated as

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{p}^t} C(\mathbf{g}^t, \mathbf{p}^t) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq p_{n,k}^t \leq P_{\max}, \quad \forall n, k, \end{aligned}$$

where P_{\max} is the maximum transmit power; $\mathbf{p}^t = \{p_{n,k}^t | \forall n, k\}$ is the set of allocated power, $\mathbf{g}^t = \{g_{n',n,k}^t | \forall n', n, k\}$ is the set of channel gain. The sum-rate utility is given as

$$C(\mathbf{g}^t, \mathbf{p}^t) = \sum_{n,k} C_{n,k}^t.$$

For model-based methods, it is generally hard to evaluate the performance gap from the optimal solution, and practical implementation is limited because of the high computational complexity. More importantly, it is hard to adapt model-based method to heterogeneous cellular networks and stochastic evolution environments. Thus model-free genetic algorithm will be discussed and studied in the following part.

4. Genetic algorithm based method. We briefly summarize the GA-based methods such as Artificial Bee Colony (ABC), Self-adaptive Differential Evolution (jDE and iDE), Particle Swarm Optimization Generational (GPSO), Extended Ant Colony Optimization (GACO), Differential Evolution (DE), Particle Swarm Optimization (PSO), Corana's Simulated Annealing (SA). We also implement model-based conventional methods such as FP, WMMSE for comparison and use Random strategy as baseline. The brief description of these algorithms is as follows:

ABC: An optimization technique which based on the intelligent foraging behavior of honey bees when seeking a quality food source. The artificial bees randomly discover a population of initial solution vectors and then iteratively improve them by employing the strategies: moving towards better solutions by means of a neighbour search mechanism while abandoning poor solutions.

DE: A basic variant of the DE algorithm works by having a population of candidate solutions. These agents are moved around in the search-space to combine the positions of existing agents from the population. If the new position of an agent is an improvement then it is

accepted and forms part of the population. The process is repeated and by doing so it is hoped, but not guaranteed, that a satisfactory solution will eventually be discovered.

jDE and iDE: Two different variants of the Differential Evolution algorithm exploiting the idea of self-adaptation. The first one which does not make use of the DE operators to produce new values for F and CR and is thus not self-adaptation, rather parameter control. The second variant uses a variation of the selected DE operator to produce new CR and F parameters for each individual.

PSO: It solves a problem by having a population of candidate solutions which called particles, and moving these particles around in the search-space over the particle's position and velocity. Each particle's movement are guided toward the best known positions in the search-space, which are updated as better positions are found by other particles. This is expected to move the swarm toward the best solutions.

GPSO: As opposed to the main PSO algorithm, this version of Particle Swarm Optimization is generational. In other words, the velocity is first calculated for all particles, then the position is updated. This PSO is suitable for stochastic optimization problems. The random seed is changed at the end of each generation.

GACO: Extended ACO generates future generations of ants by using a multi-kernel gaussian distribution based on three parameters which are computed depending on the quality of each previous solution. The solutions are ranked through an oracle penalty method.

SA: This version of the SA algorithm is, essentially, an iterative random search procedure with adaptive moves along the coordinate directions. It permits uphill moves under the control of metropolis criterion, in the hope to avoid the first local minima encountered.

5. Performance Evaluation. We have carried out a simulation experiment for the cellular network with N cells. Table 1 summarizes the key parameters. In each cell, users distribute randomly and uniformly in range $r \in [R_{\min}, R_{\max}]$. The small-scale fading follows Rayleigh distribution, and the Jakes model is adopted with f_d . The large-scale fading is formula as $\beta = -120.9 - 37.6 \log_{10}(d) + 10 \log_{10}(z)$ dB according to the LTE standard, where z is shadow effect element, and d is the transmitter-to-receiver distance (km). The maximum number of generations is determined as 300 based on the simulation results. The performance of the compared methods is evaluated by averaging 25 trail

runs.

Notation	Simulation Parameter	Value
N	Number of BS	4, 9, 16
M	Average users per cell	2, 4, 8
K	Total Number of user	MN
f_d	The Doppler frequency	10 HZ
P_{\min}	Minimum allocated power	5 dBm
P_{\max}	Maximum allocated power	38 dBm
R_{\min}	Inner space distance	0.01 km
R_{\max}	Half cell-to-cell distance	1 km
T	Time period	20 ms
σ^2	Noise power spectral density	-114 dBm/Hz
z	Shadowing	8 dB standard deviation

Table 1. Simulation parameters of cellular network

We briefly summarize the GA-based methods such as Artificial Bee Colony (ABC), Self-adaptive DE (jDE and iDE), Particle Swarm Optimization Generational (GPSO), Extended Ant Colony Optimization (EACO), Differential Evolution (DE), Particle Swarm Optimization (PSO), Corana's Simulated Annealing (SA).

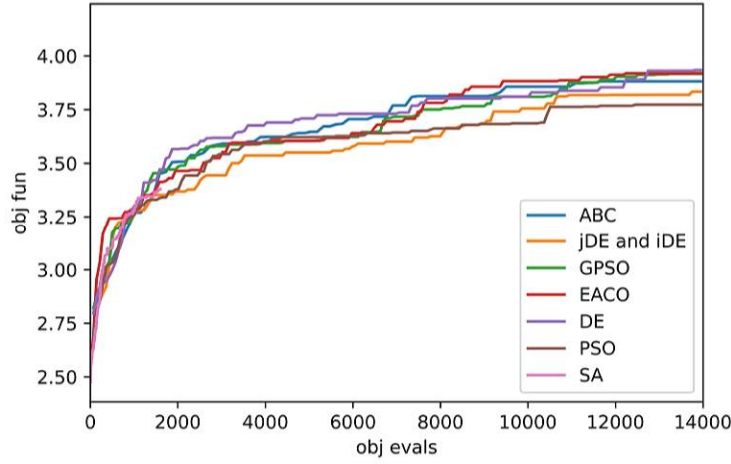


Figure 1. Final best fitness in respect of the number of fitness evaluations

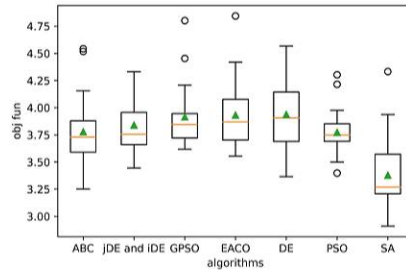


Figure 2. Distribution of best fitness over 25 trails

As GA-based methods are stochastic algorithms, we monitor 25 runs from different initial populations and test how the average best fitness is achieved as the number of fitness evaluations increases. Fig 1 shows that the GA-based methods performances are similar after fixed generations. ABC shows some single repetitions of the most successful algorithms. We can verify from Fig 2 that the distribution of best fitness, GACO is more stable compare with other methods.

6. Conclusion. Simulation result shows that the GA-based methods achieve the highest average sum rate in a series of different scenarios. It can be indicated that the proposed GA-based methods outperform the selected conventional algorithms. However, we also observed that the performance of the genetic algorithm would decrease significantly as the dimension increases. The large-scale network will be studied to accommodate the real scenarios with specific user distributions and geographical environments in our future work.

References

1. Zholobova A., Zholobov Y., Polyakov I., et al. An industry maintenance planning optimization problem using CMA-VNS and its variations // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 2021. P. 429–443.
2. Kuchkarov I., Mitiai G., Petrosian O., et al. Inverse optimal control with continuous updating for a steering behavior model with reference trajectory // International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 2021. P. 387–402.
3. Petrosian O., Inga J., Kuchkarov I., et al. Optimal control and inverse optimal control with continuous updating for human behavior modeling // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53. No 2. P. 6670–6677.

UDC 007.52

Useinov L., Makarov D., Beloshapko A., Korkhov V.

Neural networks transfer learning for KLT Bin pose estimation

1. Abstract. In recent years the object pose estimation problem has been widely studied and used for numerous applications (e.g. autonomous car driving, augmented reality, automatic bin-picking, surveillance systems, etc.). A flexible and accurate object pose estimation algorithm is the key to many of these applications. We investigate the use of DualPoseNet [1] monocular category-level pose estimation algorithm to a task of KLT bin (an industrial stacking container conforming to the VDA 4500 standard) pose estimation problem. This state-of-the-art pose estimation algorithm is built on top of a widely used Mask R-CNN [2] object detector, thus allowing easy extension of existing systems with pose estimation feature. Compare to previous applied methods to the KLT bin pose estimation DualPoseNet is general and completely data-driven.

2. Introduction. Automation process of production plants changes every aspect of the production pipeline, aiming to reduce costs and improve worker conditions. It also involves a deep modernization of internal logistics, giving rise to a massive use of Automated Guided Vehicles (AGVs). To be able to manipulate objects, AGVs rely on visual information obtained with optical cameras. Thus, they require a solution to object manipulation task based on visual data.

A typical production environment is not designed for such use case. Classical object recognition methods fail because of lack of texture on the objects, high amount of parallel straight contours and glare on reflective surfaces. This use case requires either to augment the environment with visual labels, or to develop a data-driven object detection and pose

Useinov Leon – undergraduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st044418@student.spbu.ru, phone:

Makarov Denis – undergraduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: denismakarov123@mail.ru, phone:

Beloshapko Alexey – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: st010263@student.spbu.ru, phone:

Korkhov Vladimir – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: v.korkhov@spbu.ru, phone:

estimation algorithm. This leads to the use of neural networks such as [2–4].

3. Related Work. There has been little interest to the problem of KLT bin pose estimation in the scientific world recently. In most studies (e.g., on KLT bin-picking task [5]) KLT bins are assumed to be fixed in 3D space. Thus, investigation on KLT bin pose estimation was not conducted in those works. Nevertheless, few attempts have been made to tackle related problems.

The problem of KLT bin semantic segmentation for images from fish-eye cameras was investigated in [6]. Close range usage option and fisheye image distortion are the key differences of their research area. In contrast, in this work there are no distance-related strict limitations and RGB(D) images are used without the distortion.

The KLT bin detection task was studied in [7]. The authors focused on the particular top view case. As a result, only edges of the sidewalls of a bin are visible. They proposed an algorithm consisting of bin top edges detection with subsequent RANSAC-based procedure to choose the best hypothesis.

This paper can be considered as a direct continuation of KLT bin pose estimation research by Beloshapko et al. [8] that adopted Mask R-CNN and a plane-fitting algorithm to deal with the task. First, boxes are detected and segmented by fine-tuned Mask R-CNN. Then obtained instances are separated manually for the plane-fitting algorithm in three data buckets, depending on the visible part of the bin: vertical, horizontal and general view scenarios. The main difference of our approach is that we replace plane-fitting by the neural network pipeline, which does not limit the solution to a restricted use case. Thus, the main advantage of our proposed method is that it is general and completely data-driven.

Our work was heavily inspired by the progress that has been made in object pose estimation in the last decade [9]. This large field of study can be separated in two distinct directions: instance-level object pose estimation and category-level pose estimation. In the first case we are trying to recover rotation and translation of the target instance on the image, given an RGB(D) image and precise description of the object model. In the second case, the goal is to recover rotation, translation and size of the target instance, given its RGB(D) image.

Whereas instance-level methods generally are more accurate than category-level ones, instance-level methods require availability of a CAD

model and have reduced generalization ability as well (e.g., model can be extremely good in pose estimation of a particular KLT bin model, but not be able to do anything with other types of bins). We would like to be able to do pose estimation on as many bin types as possible. It is viable because most of the KLT bins are quite similar. That is why in this work we are focusing on category-level methods, since category-level methods can be still good enough at the pose estimation task and at the same time do not require any CAD models, which can be hard to get for every KLT bin type.

Since we have an Intel Realsense D435 camera at our disposal, which is able to provide monocular RGB(D) images, our main focus was on a subset of category-level estimation pose algorithms that accept monocular RGB(D) images as an input. However, there are other advantages of such methods:

1. Single camera systems are generally cheaper than other ones, and monocular algorithms do not require additional cameras.
2. It can be argued that RGB cameras are mostly cheaper than RGB cameras with depth sensors (or standalone depth sensors). Nevertheless, without depth channel object pose estimation becomes an ill-posed problem, because this way we are trying to estimate 3D data from 2D pictures only.

In consequence, we decided to use DualPoseNet pipeline as a monocular category-level object pose estimation algorithm for our problem, since it is a state-of-the-art algorithm and its implementation is available open-source.

4. The Approach. In this work we adopt the DualPoseNet algorithm for KLT bin pose estimation. The inference process involves two stages: object detection and instance segmentation done with Mask R-CNN followed by a pose estimation stage performed for each detected instance separately. Fig. 1 depicts the overall structure of DualPoseNet pose estimation pipeline. First, a color and depth pair of images are processed with the Mask R-CNN. This yields a set of bounding boxes for each object present on the image, and a segmentation mask defined for each bounding box. Thus, for each object instance on the view we have its image bounding box and a segmentation mask. Then the following steps are performed:

1. Patches of color X and depth images are extracted using the segmentation mask.
2. The patches of depth images are converted to point cloud representations P .
3. The color patches and the point cloud representations are converted to spherical representations (S^X and S^P respectively) and fed to the Pose Encoder.
4. Pose Encoder embeds the data into a learned feature space.
5. Explicit Pose Decoder then decodes the feature data into a pose information such as object center R , object rotation matrix t and its dimensions s .

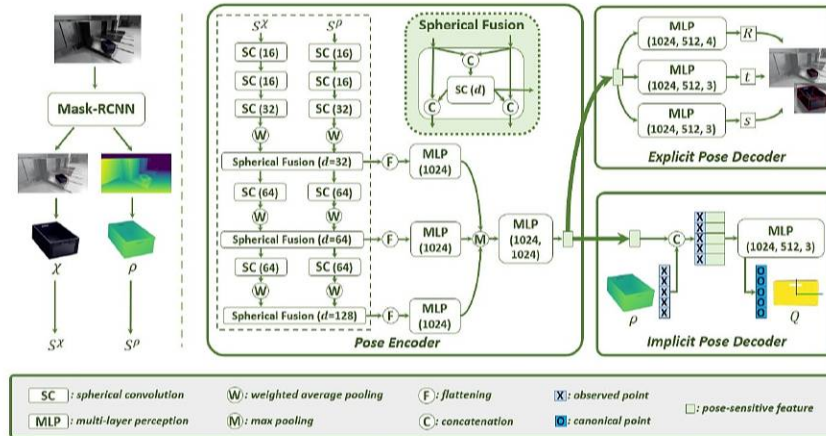


Figure 1. DualPoseNet pipeline

Mask R-CNN and its DualPoseNet extension do not share the weights and are trained separately. We use a set of M images labeled for the KLT bin Instance Segmentation task to train the Mask R-CNN network. The data labeling involved manual and semi-automatic procedures as described in [8]. This semi-automatic procedure could be easily extended to generate the pose labels. Although, we do not present these results yet.

5. Experiments. In this section, we present first results related to the first stage of the algorithm, namely the Mask R-CNN detection algorithm. A common way to evaluate accuracy of instance segmentation is to use the Intersection over Union (IoU) metric. We consider the detection to be successful only if it delivers the IoU value higher than 0.8. We count correct, missing and false detection cases as the performance metrics of our detector.

There are two test datasets. The Industrial test dataset contains images taken at production plants. The Wild dataset contains images of KLT bins in random environments, such as basements, shops and labs. The Wild one is considered to be more challenging because the detector is trained on the data related to the industrial environment.

Table 1. Evaluation of the Mask R-CNN detector on the Wild test dataset

Total object instances	Detected instances	Not detected instances	False detections
1001	503	598	177

Table 2. Evaluation of the Mask R-CNN detector on the Industrial test dataset

Total object instances	Detected instances	Not detected instances	False detections
353	346	7	46

The performance for the Wild data is quite low with detection rate $\sim 50\%$. This happened since we test the algorithm on images from domains different than used for training: the detector was trained on industrial scenes. On the other hand, performance on the industrial data is reasonable and allows a practical application.

6. Conclusion. We investigated the pose estimation task for KLT bins with a combination of Mask R-CNN detector and DualPoseNet extension. First results of Mask R-CNN application are obtained that prove the detector to be applicable to the task. Further development will involve data labeling for pose estimation.

References

1. Lin J. et al. DualposeNet: Category-level 6d object pose and size estimation using dual pose network with refined learning of pose consistency // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2021. P. 3560–3569.
2. He K. et al. Mask r-cnn // Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. 2017. P. 2961–2969.
3. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks // Advances in neural information processing systems. 2012. Vol. 25.
4. Mishchenko A. V. Modeling of conscious attention in processes of image cognition in human brain based on adaptive-resonance neural networks // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. 2010. No 4. P. 49–62.
5. Harada K. et al. Experiments on learning-based industrial bin-picking with iterative visual recognition // Industrial Robot: An International Journal. 2018. Vol. 45. P. 446–457.
6. Beloshapko A. et al. Industrial fisheye image segmentation using neural networks // International Conference on Computational Science and Its Applications. Springer, Cham, 2019. P. 678–690.
7. Holz D., Behnke S. Fast edge-based detection and localization of transport boxes and pallets in rgb-d images for mobile robot bin picking // Proceedings of ISR 2016: 47st International Symposium on Robotics. VDE, 2016. P. 1–8.
8. Beloshapko A. et al. KLT Bin detection and pose estimation in an industrial environment // International Conference on Computational Science and Its Applications. Springer, Cham, 2020. P. 105–118.
9. Fan Z. et al. Deep learning on monocular object pose detection and tracking: A comprehensive overview // arXiv preprint arXiv: 2105.14291. 2021.

UDC 004.89

Yang W., Lan J., Li L., Li Z.

Intelligent OpenCV-based check-in and clock-in system

Recommended for publication by associate professor Petrosian O. L.

1. Abstract. Attendance is an important part of teaching quality assessment, and the research and design of school course sign-in and clock-in system makes classroom attendance more efficient and convenient. This project is mainly designed to facilitate teachers to take attendance of students in the classroom, and an intelligent clock-in and clock-out system based on face recognition mode is designed. After determining each specific functional module of the system, Python is selected as the programming language and OpenCV as the development environment. Through the comparison of various face matching algorithms, LBPH algorithm is selected to process the face image, and connect with MySQL database to store student information. When the camera captures the facial information, it matches the information stored in the database to pinpoint the student's information.

2. Introduction. There are many ways to take attendance in the classroom, mainly teacher roll call, name sign-in and campus card recognition. However, these methods often result in omissions and substitutions, and are also labour-intensive and time-consuming. This paper designs an intelligent check-in system based on face recognition technology to address this problem. There are many algorithms for face recognition, but this paper compares three classical face recognition algorithms based on OpenCV and selects the lbph algorithm for the study.

By acquiring face features and converting them into data and then encoding them, a recognition tag is obtained and aggregated to form an

Yang Wei – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: yangwei1013@outlook.com, phone: +8613872975100

Lan Jie – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: nanyinyinnanyinyin@outlook.com, phone: +8618049154600

Li Linna – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 2423178113@qq.com, phone: +8617789212876

Li Zekun – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: lizekun052@163.com, phone: +8618991754979

overall face information database, after which each time a face is scanned, a recognition tag is obtained through system processing to match with the face information in the database to identify the identity.

3. System framework design. The overall framework of the system includes three parts: application layer, communication layer and acquisition layer.

First of all by the acquisition layer of all kinds of camera face acquisition, and through the communication layer of wired LAN or wireless LAN will be collected information uploaded to the background, background application layer through OpenCV face image management, image acquisition, face recognition, the system has realized the query function and five modules of the management function. The functional structure of the system is as follows (see Figure 1).

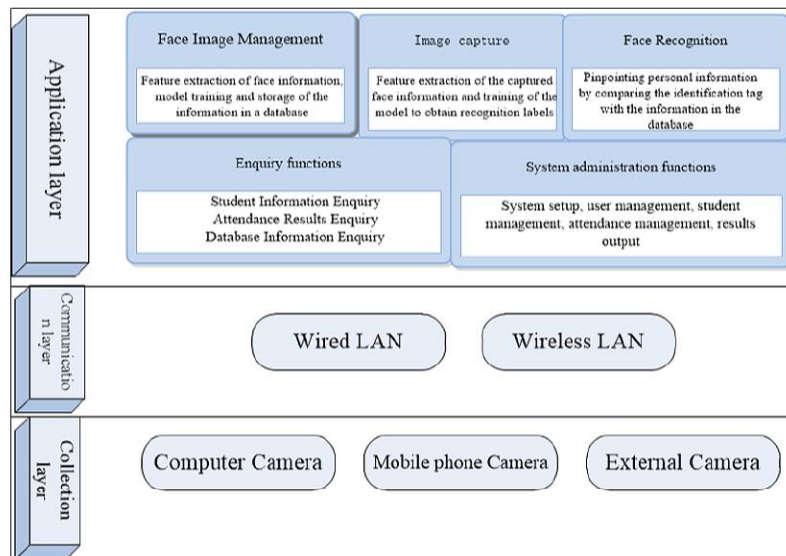


Figure 1. System architecture framework design

4. Algorithm analysis. According to the table we can get as a typical binary feature descriptor, LBP is more integer computation than EigenFace and FisherFace. The advantage of integer computation is that it can be optimized by various logical operations, so it is more efficient.

In addition, the value may change between locally adjacent pixels under the influence of illumination, but the relative size will not change, so LBPH feature has good adaptability to illumination. As a result, this system adopts LBPH method of local feature extraction to develop and design.

Table 1. Algorithm comparison

<p>Feature face algorithm based on the principle of PCA (principal component analysis)</p>	<p>A series of faces are dimensionalised by PCA to obtain a distinctive face vector for each person, and a feature face subspace is established after several training sessions. Thereafter, once a detected face is input, the system projects the data into the feature face subspace for comparison, and identifies the identity if there is a similar feature face vector.</p>
<p>Fisher Face method based on LDA (linear judgment analysis) principle</p>	<p>By finding the maximum inter-class variance and the minimum intra-class variance between objects, a discrete matrix is formed and the eigenvalues and eigenvectors are derived, then LDA is performed to reduce the dimensionality and after repeated training, a subspace of eigenfaces is formed. The measured face is mapped into the subspace for comparison to determine the identity.</p>
<p>LBPH (Local Binary Patterns Histograms) method based on local feature extraction</p>	<p>The LBPH algorithm extracts the features of the grey value image and then compares them with the LBPH features of the face already trained in the database and the classification is recognized so that the subject can be identified.</p>

5. System implementation.

5.1. Applied algorithmics. The face information matching function of the system adopts LBPH algorithm for research and design, and the specific implementation process is shown in the Figure 2 below.

5.2. In-vivo detection. This attendance system human detection method uses blink detection. Firstly, switch_bt is used as the control function to determine whether to start attendance, and when a live blink is detected, attendance is started. Face detection is first performed on each image frame using OpenCV. The part of the region containing the

eyes is intercepted after the face is detected, and then the number of eyes in that region is detected using OpenCV. An array is used to store the number of eyes for each time. When the size of the array is 3, if the first number of eyes in the array is greater than 0, the second number of eyes is equal to 0 and the last number of eyes is greater than 0, it means it is a blink and the attendance is proved successful. The specific flow chart is as follows (see Figure 2, 3).

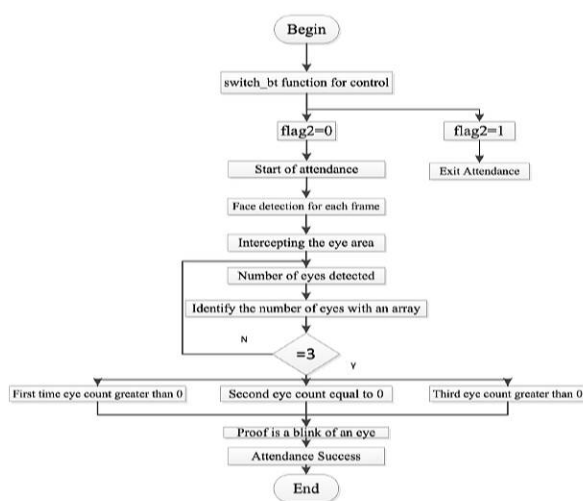


Figure 2. Flowchart of LBPH algorithm implementation

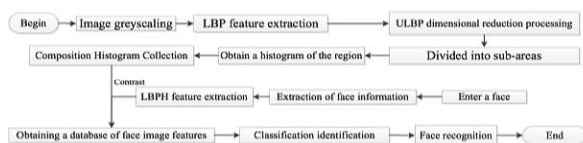


Figure 3. Defines the living detection class

6. Interface. The system interface is shown in Figure 4.



Figure 4. Main interface of the system

7. Conclusion. In this paper, OpenCV and Python language is used to achieve the face recognition university class attendance system based on LBPH algorithm. After testing, the system realizes the completion of class check-in by recognizing students' faces, completing the comprehensive, automated and easy management of student attendance, saving the time of teachers' roll call and facilitating students' check-in. Greatly improve the efficiency of classroom management. In addition, the technology can be applied to other sites where people need to punch the card, and has a more practical use value.

References

1. Sawhney S. et al. Real-time smart attendance system using face recognition techniques // 2019 9th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence). IEEE, 2019. P. 522–525.
2. Zhao X. M., Wei C. B. A real-time face recognition system based on the improved LBPH algorithm // 2017 IEEE 2nd International Conference on Signal and Image Processing (ICSIP). IEEE, 2017. P. 72–76.
3. Xiang J., Zhu G. Joint face detection and facial expression recognition with MTCNN // 2017 4th International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE). IEEE, 2017. P. 424–427.

UDC 005

Zhou X., Qu L., Qu C.

Research on smart city comprehensive security prevention and control system

Recommended for publication by associate professor Petrosian O. L.

1. Abstract. The smart city refers to the use of information technology and the internet plus thinking to promote the development and transformation of the city, so as to meet the needs of improving the level of urban management services. Smart cities are based on the construction of urban intelligent network facilities and take communication technologies such as cloud computing and the Internet of Things as means to maximize the integration of data and information resources and comprehensively promote the scientific development of cities. Starting from the current situation of smart city construction in major cities in China, this paper analyzes the security risks and security requirements of smart cities in many aspects. On this basis, from three aspects of safety technology, safety management, and safety operation, the feasibility suggestions for the implementation and construction of comprehensive safety prevention and control systems in smart cities are put forward [1].

2. Introduction. Under the background of smart city, many information elements, such as infrastructure and data resources, can interact frequently across regions through information and communication technology. The information flow is highly concentrated, the amount of information suddenly increases, the information categories are various, the information security environment is complicated, and the evolution and derivation of information security risks are highly complicated and uncertain, which brings great challenges to the research of comprehensive security prevention and control system in smart city.

3. Research purpose and significance. To ensure the independence, security, and controllability of the information infrastructure and

Zhou Xu – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 13220069621@163.com, phone: +8613220069621

Qu Liangqian – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: qlq754086420@163.com, phone: +8615353584116

Qu Chenyang – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 1334518758@qq.com, phone: +8618146838676

data resources in the construction and operation of smart cities, this topic sorts out the present situation and characteristics of typical smart cities in China through investigation, analyzes the security risks and security prevention and control needs faced by smart cities in China at present, and develops a comprehensive security prevention and control system of smart cities with smart city data security prevention and control as the core, covering security technology, security management, and security operation. It also puts forward the implementation ideas and suggestions for the construction of urban comprehensive network security prevention and control systems and guides the security construction and operation of smart cities.

4. Status and problems of smart city construction and development in China. Since the 18th National Congress of the Communist Party of China, building smart cities has been an important development strategy of China, and smart cities have become the goal of new urbanization. Various ministries and commissions and regions of the country have also taken the initiative to launch various types of pilot projects, such as information consumption, information benefiting the people, and broadband China. In the development process of more than 10 years, there are more than 500 smart cities that have been built and planned to be built (excluding duplication), which are facing new development problems while achieving certain achievements.

The security risks of smart cities and the security risks faced by all levels are macroscopic and concrete. This paper refers to this model and specifically analyzes the main security risks faced by all levels of smart cities from the perspective of security risks faced by all levels.

From a technical point of view:

Safety risk 1: Perception terminals are unsupervised, simple to operate, and mobile to access, making security more difficult.

Safety risk 2: Communication networks are diverse and heterogeneous, making it more difficult for cities to resist network attacks.

Safety risk 3: Computing storage infrastructure platform resources are highly concentrated, which is easy to become the focus of attack.

Safety risk 4: Massive data is highly open, shared, and deeply integrated, making it more difficult to prevent data leakage and loss.

Safety risk 5: Ubiquitous business applications bring complex identity and authority management problems, increasing the difficulty of legal compliance access verification and application security protection.

From the management point of view:

Safety risk 6: The construction and operation of smart cities in China are mainly planned and guided by the government and participated by many parties [1]. It is difficult to organize and coordinate urban safety management. The ideological concept of “emphasizing application and neglecting safety” and “building first and then safety” still exists, which makes it more difficult to formulate strategies, systems, and norms that can effectively regulate and guide urban safety construction.

Safety risk 7: All levels and security management of smart cities under the new model and new concept are facing new security challenges. It is urgent to study a comprehensive security prevention and control system that can integrate the goals of all relevant parties in the city to meet the new security challenges.

5. Security demand analysis of smart city. Because of the current development situation and existing security problems of smart city construction in China, the information network security of smart cities in China should be further improved in technology application and security management to protect the safe and harmonious operation of smart cities [1]. Because of the security risks at all levels of smart city technology and management level, this paper analyzes the security requirements of urban ecological development and stable operation, specifically as follows:

Safety demand 1: China attaches great importance to network security, and has promulgated laws and regulations such as network security law, password law, data security law, and level protection 2.0. The security of smart cities is related to the national economy and people’s livelihood, and compliance construction and operation should become the city standard.

Safety demand 2: The industrial policy of smart city construction promotes the operation of urban security construction, and the industrial policy issued by the national competent department has always placed the network security construction in an important position in the process of guiding the smart city construction.

Safety demand 3: To analyze the safety requirements of urban ecological development and stable operation according to the safety challenges of smart city technology and management.

There are hundreds of information security-related standards published and under research in China, but the related standards for smart

city security are lacking, and there is far from a perfect smart city security standard system. To improve the comprehensive security prevention and control ability of smart cities, it is necessary to further formulate and improve the smart city security-related standard system, and study the smart city data sharing security, smart application security, security management standards, and other related standards systems [2].

6. Comprehensive safety prevention and control system research and implementation suggestions. The framework of smart city network security system is based on system engineering theory and methods, according to relevant laws, regulations, standards, and norms, combined with the status quo and operation mode of smart city construction in China, the overall framework of smart city security prevention and control is put forward.

Smart city data security is the core of prevention and control, covering three parts: security technology, security management, and security operation. The three parts support and promote each other to form a trinity comprehensive prevention and control system, which can meet the compliance requirements and ensure the safe and stable operation of the city. The functional hierarchy model of the smart network security framework is shown in Figure 1.

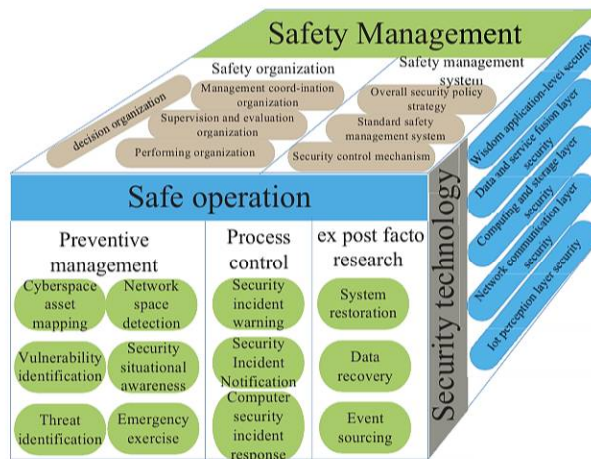


Figure 1. Functional hierarchy model of network security framework in Hui city

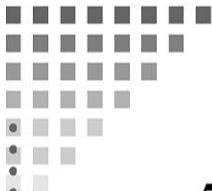
Safety management: strengthen the construction of safety organization and safety management system to ensure the orderly progress of urban network safety management and clarify the responsibilities of relevant parties in urban construction and operation; Improve the coordination, systematicness and overall planning of the safety management mechanism, standardize the safety management, supervision, and evaluation mechanism of various technology applications and business scenarios in cities, and improve the safety awareness and safety ability of relevant parties in cities.

Safety technology: build a strong robust and low vulnerability safety technology system that can effectively guarantee data and operation safety, and define safety technology mechanisms or measures.

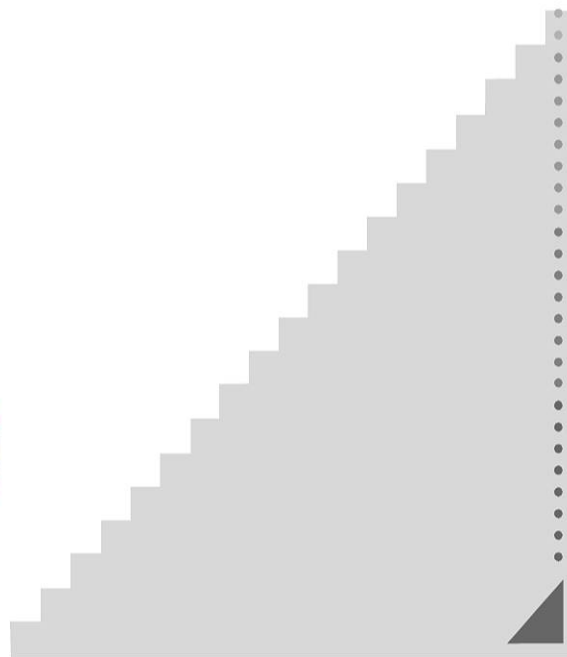
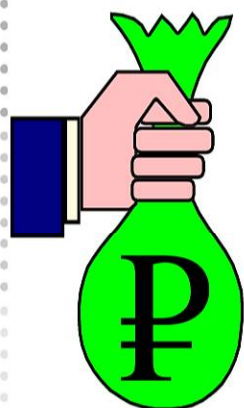
Security operation: take city-level security operation as the design goal, and build a smart city-level network security system. Gather the security big data information of the whole region, and make intelligent threat analysis and decision-making in the field of urban security, to quickly and effectively perceive, warn, schedule, and deal with network security risks of the whole network, improve management efficiency and emergency response capability, and effectively realize risk control and emergency support at the city level.

References

1. Liu W. Wisdom city construction strategy research // Journal of informationization in China. 2014. Vol. 15. P. 52–54.
2. Lu X., Han X., Guo X., et al. Research on collaborative protection framework of new smart city network security // Information Security Research. 2021. Vol. 7. No 11. P. 1017.



*5. Управление
социально-
экономическими
системами*



УДК 519.87

Балас Т. Н.

Одна гибридная задача оптимального управления с несколькими переключениями

Рекомендовано к публикации профессором Громовой Е. В.

1. Введение. В классической постановке теория дифференциальных игр занимается изучением процессов на фиксированном промежутке времени [1]. Естественным расширением данного класса игр являются дифференциальные игры со случайной продолжительностью [2, 3]. Особый интерес представляет случай составной функции распределения момента окончания игры [4, 5]. В данной работе описана дифференциальная игра разработки невозобновляемых ресурсов, момент окончания которой является случайной величиной, отвечающей составной функции распределения [6]. Для приведенной модели найдено решение задачи максимизации суммарного выигрыша в кооперативной постановке.

2. Описание игры. Рассмотрим дифференциальную игру двух лиц $\Gamma^T(x_0, t_0)$, моделирующую процесс разработки невозобновляемых ресурсов. Пусть игра начинается в момент времени t_0 из состояния x_0 .

Пусть динамика игры описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^2 u_i(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Положим, что момент окончания игры является случайной величиной, распределенной на интервале времени $[t_0, \infty)$ согласно составной функции распределения (1) при двух переключениях в фиксированные моменты времени τ_1, τ_2 , где $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 t}, & t \in [t_0, \tau_1), \\ 1 - \frac{e^{-\lambda_1 \tau_1}}{e^{-\lambda_2 \tau_1}} e^{-\lambda_2 t}, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ 1 - \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \tau_1} e^{-\lambda_2 t}}{e^{\lambda_3 (t - \tau_2)}}, & t \in [\tau_2, \infty). \end{cases} \quad (1)$$

Балас Татьяна Николаевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076855@student.spbu.ru, тел.: +7(904)558-86-40

Пример составной функции распределения представлен на рис. 1.

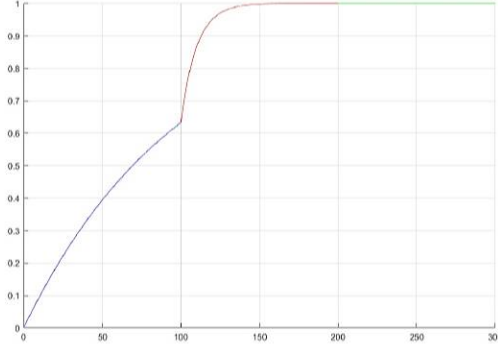


Рис. 1. Составная функция распределения $F(t)$, $(\lambda = 0,01; 0,1; 0,01)$

Пусть $h_i(x(t), u(t))$ – функция мгновенного выигрыша в игре $\Gamma^T(x_0, t_0)$ игрока i в момент времени t , где $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Положим, игроки используют идентичное оборудование для эксплуатации месторождения и вероятность отказа оборудования определяется режимами эксплуатации, а функция полезности $h_i(x(t), u(t)) = \sqrt{u_i(t)}$. Под управлением $u_i(t)$ понимаем темпы разработки ресурса.

Математическое ожидание выигрыша игрока i примет вид

$$\begin{aligned} K_i(x_0, t_0, u) &= \mathbb{E} \left[\int_{\tau_0}^T h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] = \\ &= \int_{\tau_0}^{\infty} \left[\int_{\tau_0}^t h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] dF(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Функционал (2) может быть упрощен [7] к следующему виду:

$$K_i(x_0, t_0, u) = \int_{\tau_0}^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(x(\tau), u_i(\tau)) d\tau.$$

3. Кооперативная постановка игры. Пусть игроки договорились действовать совместно оптимально. Положим также для простоты $t_0 = 0$. Имеем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{cases} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_0}^{\infty} (1 - F(t)) \sqrt{u_i(t)} dt, \\ \dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^2 u_i(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим три интервала времени, на которых развивается процесс, как $I_1 = [0, \tau_1]$, $I_2 = [\tau_1, \tau_2]$ и $I_3 = [\tau_2, \infty)$. Для решения задачи (3) используем метод параметризации [8], где параметрами будут служить состояния системы на концах промежутков $x(\tau_1) = x_1$ и $x(\tau_2) = x_2$. На каждом из интервалов будем использовать принцип максимума Понтрягина [9, 10]. На первом и втором интервалах задача решается с двумя закрепленными концами, на третьем – с незакрепленным правым концом.

3.1. Интервал I_1 . Рассмотрим задачу максимизации:

$$\begin{cases} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} (1 - F(t)) \sqrt{u_i(t)} dt, \\ \dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^2 u_i(t), \\ x(0) = x_0, \quad x(\tau_1) = x_1, \end{cases}$$

где x_1 – параметр.

Используем принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан примет вид

$$H(x, u, \psi) = -\psi \sum_{i=1}^2 u_i(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} (1 - F(t)) \sqrt{u_i(t)} dt.$$

Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (1 - F(t)) \frac{1}{2\sqrt{u_i(t)}} = 0.$$

Тогда оптимальное управление может быть записано как

$$u_i^*(t) = \frac{(1 - F(t))^2}{4\psi^2}.$$

Условие выпуклости также выполнено:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -(1 - F(t)) \frac{1}{4u_i(t)\sqrt{u_i(t)}} < 0.$$

Уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

следовательно $\psi(t) = \psi_0$. Таким образом, оптимальное управление

$$u_i^*(t) = \frac{(1 - F_1(t))^2}{4\psi_0^2}.$$

Уравнение динамики принимает вид

$$\dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^2 u_i(t) = - \frac{(1 - F_1(t))^2}{2\psi_0^2}.$$

Используя краевые условия, найдем оптимальные траекторию и управление для рассматриваемого интервала:

$$x^*(\tau)_{I_1} = \frac{(x_0 - x_1)[e^{2\lambda_1\tau_1} - e^{2\lambda_1\tau}]}{(e^{2\lambda_1\tau_1} - 1)e^{2\lambda_1\tau}} + x_1,$$

$$u_i^*(\tau)_{I_1} = \frac{\lambda_1(x_0 - x_1)e^{2\lambda_1(\tau_1 - \tau)}}{e^{2\lambda_1\tau_1} - 1}.$$

3.2. Интервал I_2 . Аналогично тому, как это было сделано в пункте 3.1, может быть решена задача оптимизации на втором интервале:

$$\begin{cases} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1 - F(t)) \sqrt{u_i(t)} dt, \\ \dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^2 u_i(t), \\ x(\tau_1) = x_1, \quad x(\tau_2) = x_2. \end{cases}$$

Оптимальная траектория и оптимальное управление на интервале в зависимости от параметров x_1 и x_2 имеют вид

$$x^*(\tau)_{I_2} = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)e^{2\lambda_2\tau_2}(1 - e^{2\lambda_2(\tau - \tau_1)})}{(1 - e^{2\lambda_2(\tau_2 - \tau_1)})e^{2\lambda_2\tau}},$$

$$u_i^*(\tau)_{I_2} = \frac{(x_2 - x_1)\lambda_2 e^{2\lambda_2(\tau_2 - \tau)}}{1 - e^{2\lambda_2(\tau_2 - \tau_1)}}.$$

3.3. Интервал I_3 . Аналогично тому, как это было сделано в пунктах 3.1, 3.2, может быть решена задача оптимизации на третьем интервале:

$$\begin{cases} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_2}^{\infty} (1 - F(t)) \sqrt{u_i(t)} dt, \\ \dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^2 u_i(t), \\ x(\tau_2) = x_2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = 0. \end{cases}$$

Оптимальная траектория и оптимальное управление на интервале в зависимости от параметров x_1 и x_2 имеют вид

$$x^*(\tau)_{I_3} = x_2 e^{2(\lambda_2 + \lambda_3)(\tau_2 - \tau)},$$

$$u_i^*(\tau)_{I_3} = x_2(\lambda_2 + \lambda_3) e^{2(\lambda_2 + \lambda_3)(\tau_2 - \tau)}.$$

4. Поиск параметров. Обозначим суммарный выигрыш всех игроков на соответствующем промежутке и его зависимость на интервале от значения численного параметра $I_1(x_1), I_2(x_1, x_2), I_3(x_2)$.

Значения параметров x_1 и x_2 могут быть найдены как значения, максимизирующие суммарный выигрыш всех игроков. Данная задача оптимизации будет решена с использованием метода динамического программирования.

Решим последовательно две вспомогательные задачи оптимизации:

$$I_2(x_1, x_2) + I_3(x_2) \rightarrow \max_{x_2},$$

$$I_1(x_1) + I_2(x_1, x_2) + I_3(x_2) \rightarrow \max_{x_1}.$$

Вычислим значение суммарного выигрыша на каждом интервале в зависимости от параметров x_1 и x_2 , используя соответствующие выражения для оптимальной траектории и оптимального управления. Выигрыш на интервале I_3 :

$$I_3(x_2) = \int_{\tau_2}^{\infty} (1 - F(t)) \left(\sqrt{u_1^*(t)_{I_3}} + \sqrt{u_2^*(t)_{I_3}} \right) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2} e^{\lambda_2 \tau_1} e^{-\lambda_1 \tau_1} e^{-\lambda_2 \tau_2}}{\sqrt{\lambda_2 + \lambda_3}}.$$

Выигрыш на интервале I_2 :

$$I_2(x_1, x_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1 - F(t)) \left(\sqrt{u_1^*(t)_{I_2}} + \sqrt{u_2^*(t)_{I_2}} \right) dt =$$

$$= - \frac{e^{-\lambda_1 \tau_1 - \lambda_2 \tau_2} (e^{2\lambda_2 \tau_1} - e^{2\lambda_2 \tau_2}) \sqrt{-\frac{x_1 - x_2}{e^{2\lambda_2 \tau_1} - e^{2\lambda_2 \tau_2}}}}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Числовое значение параметра x_2 при зависимости от x_1 может быть найдено путем решения дополнительной задачи максимизации

$I_2(x_1, x_2) + I_3(x_2)$ по параметру x_2 с использованием первой производной от суммы:

$$\frac{\partial(I_2(x_1, x_2) + I_3(x_2))}{\partial x_2} = 0.$$

Тогда

$$x_2^* = \frac{\lambda_2 x_1 e^{2\lambda_2 \tau_1}}{\lambda_2 e^{2\lambda_2 \tau_2} - \lambda_3 e^{2\lambda_2 \tau_1} + \lambda_3 e^{2\lambda_2 \tau_2}}.$$

Подставим полученный параметр x_2 в сумму выигрышей $I_2(x_1, x_2) + I_3(x_2)$. Оптимальный выигрыш на интервале $[\tau_1, \infty)$:

$$\begin{aligned} I_{23}(x_1) &= I_2(x_1, x_2^*) + I_3(x_2^*) = \\ &= \frac{\sqrt{x_1} ((\lambda_2 + \lambda_3)e^{\lambda_2 \tau_2 - \lambda_1 \tau_1} - \lambda_3 e^{2\lambda_2 \tau_1 - \lambda_1 \tau_1 - \lambda_2 \tau_2})}{\sqrt{(\lambda_2 + \lambda_3)e^{2\lambda_2 \tau_2} - \lambda_3 e^{2\lambda_2 \tau_1}} \sqrt{\lambda_2(\lambda_2 + \lambda_3)}} \end{aligned}$$

Выигрыш I_{23} зависит только от параметра x_1 , поскольку мы максимизировали его относительно x_2 . Вычислим вторую производную $I_2 + I_3$ относительно x_2 , чтобы убедиться, что полученный экстремум действительно является максимумом.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{(dx_2)^2} (I_2(x_1, x_2) + I_3(x_2)) &= \\ &= -\frac{e^{\lambda_2 \tau_1 - \lambda_1 \tau_1 - \lambda_2 \tau_2}}{4x_2^{3/2} \sqrt{\lambda_2 + \lambda_3}} - \frac{e^{-\lambda_1 \tau_1 - \lambda_2 \tau_2}}{4\sqrt{\lambda_2} \sqrt{-\frac{x_1 - x_2}{e^{2\lambda_2 \tau_1} - e^{2\lambda_2 \tau_2}} (x_1 - x_2)}} < 0. \end{aligned}$$

Это неравенство выполняется, если $x_1 > x_2$ и $\tau_1 < \tau_2$.

Выигрыш на интервале $[\tau_0; \tau_1]$ с граничными условиями $x(\tau_0) = x_0$ и $x(\tau_1) = x_1$:

$$I_1(x_0, x_1) = \frac{(e^{-2\lambda_1 \tau_0} - e^{-2\lambda_1 \tau_1}) \sqrt{\frac{x_0 - x_1}{e^{-2\lambda_1 \tau_0} - e^{-2\lambda_1 \tau_1}}}}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

Максимизируем сумму $I_1(x_0, x_1) + I_{23}(x_1)$ по параметру x_1 . После некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} x_1^* &= [\lambda_1 \lambda_2 x_0 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_2} - \lambda_1 \lambda_3 x_0 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_1} + \lambda_1 \lambda_3 x_0 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_2}] \times \\ &\times [\lambda_2^2 e^{2\lambda_1 \tau_1} e^{2\lambda_2 \tau_2} - \lambda_2^2 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_2} + \lambda_1 \lambda_2 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_2} - \lambda_1 \lambda_3 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_1} + \\ &+ \lambda_1 \lambda_3 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_2} - \lambda_2 \lambda_3 e^{2\lambda_1 \tau_0} e^{2\lambda_2 \tau_2} + \lambda_2 \lambda_3 e^{2\lambda_1 \tau_1} e^{2\lambda_2 \tau_2}]^{-1}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание полученные значения для числовых параметров x_1^* и x_2^* , можно выписать вид оптимального управления и оптимальной траектории системы на каждом из рассматриваемых интервалов времени.

5. Заключение. В данной работе описана модель дифференциальной игры разработки невозобновляемых ресурсов со случайной продолжительностью и функцией распределения с двумя переключениями. Для указанной игры решена задача максимизации суммарного выигрыша игроков в случае развития кооперативного сценария игры.

Литература

1. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 1979. Вып. 1. С. 46–54.
2. Петросян Л. А., Шевкопляс Е. В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2000. Вып. 4. С. 18–23.
3. Петросян Л. А., Баранова Е. М., Шевкопляс Е. В. Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью // Труды института математики и механики Уро РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 116–130.
4. Gromova E., Magnitskaya N. Solution of the differential game with hybrid structure // Contributions to Game Theory and Management. 2019. Vol. 12. P. 159–176.
5. Zaremba A., Gromova E., Tur A. A differential game with random time horizon and discontinuous distribution // Mathematics. 2020. Vol. 8. No 12. P. 1–21.
6. Gromov D., Gromova E. Differential games with random duration: a hybrid systems formulation // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 104–119.

7. Костюнин С. Ю., Шевкопляс Е. В. Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 4. С. 47–56.
8. Магнитская Н. Г. Одна дифференциальная игра со случайным дискретным моментом окончания // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 445–450.
9. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 3–42.
10. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.

УДК 519.852.3

Белоусова А. В.

Построение оптимального расписания производственного процесса с использованием пакета Gurobi

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. Растущий спрос на своевременное изготовление продукции и желание сократить производственные затраты вынуждают производителей улучшать процесс производства с помощью оптимизации работы оборудования [1, 2]. За основу данной работы был взят конкурсный проект от компании VIA Technologies, в рамках которого требовалось построить расписание производственных заданий таким образом, чтобы оборудование работало максимально эффективно [3].

2. Постановка задачи. Есть предприятие, на котором производится продукция различного ассортимента. На производство поступают заказы на изготовление определенного типа и объема продукции. Предполагается, что портфель заказов и их стоимость известны перед началом планирования.

Каждый заказ имеет свою технологическую карту производства, т. е. последовательность операций от сырья до получения готовой продукции. Операции по обработке материала выполняются на оборудовании, которое предназначено для выполнения определенного типа операций (может быть указано несколько типов операций для одного оборудования).

Промежуточный продукт производственной цепи называется *полуфабрикатом*. Прежде чем приступить к следующей операции на оборудовании необходимо произвести операцию переналадки (переключение оборудования на другую операцию, подготовка к обработке нового полуфабриката и т. д.). Кроме того, нужно учитывать время перемещения полуфабрикатов продукции между цехами.

Необходимо построить расписание производства заказов таким образом, чтобы максимизировать выручку производства на фиксированном промежутке времени.

Белоусова Анастасия Владимировна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: 10bav2000@gmail.com, тел.: +7(931)322-20-94

2.1. Ограничения. На задачу накладываются ограничения:

1. Перед каждой операцией по обработке полуфабриката необходимо произвести переналадку.
2. Операции переналадки и обработки полуфабриката не могут происходить одновременно.
3. Заказ может состоять из нескольких конечных продуктов. Частичное выполнение заказа к отчетной дате добавляет 0 ед. к выручке.
4. Каждый конечный продукт в заказе имеет последовательность технологических операций, которую нельзя нарушать.
5. Перемещение, переналадка и обработка полуфабриката не могут выполняться одновременно для одного полуфабриката.

2.2. Допущения. В задаче присутствует два допущения:

- оборудование работает без перерывов, т. е. технологические перерывы и регламентные процедуры не учитываются при планировании;
- не все заказы должны быть запланированы.

3. Входные данные и программная реализация.

3.1. Описание входных данных. Исходные данные содержатся в семи таблицах Excel.

Таблица 1. Equipment

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>equipment_id</i>	Идентификатор единицы оборудования, на котором выполняется работа	string
<i>equipment_mode</i>	Режим, в котором может работать оборудование: <ul style="list-style-type: none"> • <i>mode_0</i> означает, что на этом оборудовании может выполняться операция только над одним полуфабрикатом (например, окраска корпуса в красильной камере); • <i>mode_1</i> означает, что на этом оборудовании может выполняться операция для неограниченного количества полуфабрикатов (например, в камере сушки может расположиться любое количество полуфабрикатов). 	string

Таблица 2. Subproduct

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>subproduct_id</i>	Идентификатор полуфабриката, необходимого для производства подзаказа	string
<i>equipment_id</i>	Идентификатор оборудования, на котором может изготавливаться полуфабрикат <i>subproduct_id</i>	string
<i>duration, min</i>	Длительность изготовления полуфабриката <i>subproduct_id</i> на оборудовании <i>equipment_id</i>	float

Таблица 3. Switch Time

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>equipment_id</i>	Идентификатор оборудования, на котором может изготавливаться полуфабрикат <i>subproduct_id</i>	string
<i>subproduct_id</i>	Идентификатор полуфабриката	string
<i>duration, min</i>	Время переналадки перед началом изготовления полуфабриката <i>subproduct_id</i> на оборудовании <i>equipment_id</i>	float

Таблица 4. Structure

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>order_id</i>	Идентификатор итогового заказа	string
<i>suborder_id</i>	Идентификатор составляющих заказа, который указывает, из каких элементов выполняется сборка итогового заказа	string
<i>subproduct_id</i>	Идентификатор полуфабриката, который указывает, на каком оборудовании должна проводиться операция, чтобы выполнить составляющую заказа	string

Таблица 5. Order Graph

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>from_suborder_id</i>	Идентификатор подзаказа, который должен быть выполнен перед началом изготовления <i>to_suborder_id</i>	string
<i>to_suborder_id</i>	Идентификатор подзаказа, который может быть выполнен после изготовления <i>from_suborder_id</i>	string

Таблица 6. Movement Time

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>from_equipment_id</i>	Идентификатор оборудования, с которого перемещается полуфабрикат <i>subproduct_id</i>	string
<i>to_equipment_id</i>	Идентификатор оборудования, на которое перемещается полуфабрикат <i>subproduct_id</i>	string
<i>subproduct_id</i>	Идентификатор полуфабриката	string
<i>duration, min</i>	Время перемещения полуфабриката <i>subproduct_id</i> с оборудования <i>from_equipment_id</i> на оборудование <i>to_equipment_id</i>	float

Таблица 7. Orders

№ Название поля	Описание поля	Тип данных
<i>order_id</i>	Идентификатор заказа	string
<i>price</i>	Стоимость заказа	float
<i>final_suborder_id</i>	Идентификатор подзаказа, характеризующий конечную продукцию	string

3.2. Программная реализация. Для решения поставленной задачи был использован модуль Gurobi Optimizer. Чтобы с его помощью получить решение оптимизационной задачи, необходимо построить модель и передать ее Gurobi [4]. В модели происходит инициализация переменных, значения которых нужно найти, ввод ограничений и постановка целевой функции.

В ходе выполнения программы первым шагом происходит считывание исходных данных. Затем, в силу того что изначально подается информация обо всех возможных заказах, а не только о тех, которые поступили на данный момент от клиентов, для уменьшения объема вычислений из каждой таблицы извлекается информация только о тех полуфабрикатах, которые относятся к текущим заказам. После этого происходит построение модели: инициализируются переменные (время начала и окончания обработки полуфабриката; переменные, отвечающие за обработку полуфабриката на том или ином оборудовании, и т. д.), накладываются ограничения и вводится целевая функция (максимизация прибыли). Как только модель оптимизирована, на основе полученных результатов строится диаграмма Ганта, иллюстрирующая последовательность обработки полуфабрикатов для каждой единицы оборудования. С полной программной реализацией можно ознакомиться в репозитории [5].

4. **Численный пример.** Построим расписание для случая с пятью заказами, на выполнение которых отведено 15 дней начиная с 01.01.2022.

Таблица. Список заказов

№ order_id	price	final_suborder_id
order_229	40247	suborder_312
order_230	4524	suborder_313
order_230	4524	suborder_725
order_230	4524	suborder_826
order_231	3033	suborder_314
order_232	4224	suborder_315
order_232	5280	suborder_720
order_233	7579	suborder_953

По результатам вычислений строим диаграмму Ганта и таблицу с расписанием:



Рис. 1. Диаграмма Ганта

Таблица. Отрывок из построенного расписания

№ equip_id	order_id	suborder_id	start	end
141	230	313	15.01.2022 13:20	16.01.2022 0:00
141	230	725	15.01.2022 13:20	16.01.2022 0:00
141	230	826	15.01.2022 13:20	16.01.2022 0:00
96	231	314	15.01.2022 13:20	16.01.2022 0:00
141	232	720	15.01.2022 13:20	16.01.2022 0:00
...

Из поступивших 5-и заказов были запланированы 3. Стоит отметить, что на оборудовании с идентификатором 141 с 15.01.2022 13:20 до 16.01.2022 0:00 происходит обработка нескольких конечных полуфабрикатов, что не отображено на построенной диаграмме, но видно из таблицы. Значение целевой функции: 26 109 ед.

5. Заключение. В ходе работы была описана и формализована задача построения расписания производственного процесса, выполнена программная реализация и реализован численный пример, демонстрирующий выполнение построенного алгоритма. В дальнейшем планируется провести анализ чувствительности оптимального расписания, получаемого предложенным методом.

Литература

1. Chen D., Luh P. B., Thakur L. S., Moreno J. Optimization-based manufacturing scheduling with multiple resources, setup requirements, and transfer lots // IIE Transactions. 2003. Vol. 35. No 10. P. 973–985.
2. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления пропускной способностью маршрутов транспортной сети // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 2. С. 182–192.
3. Math Battle от BIA Technologies [Электронный ресурс]: URL: <https://math.bia-tech.ru/> (дата обращения: 19.03.22).
4. The optimization model [Электронный ресурс]: URL: https://gurobi.com/documentation/9.5/quickstart_mac/the_optimization_model.html (дата обращения: 19.03.22).
5. GitHub Repository [Электронный ресурс]: URL: <https://github.com/nastyawb/manuf-opt> (дата обращения: 19.03.22).

УДК 519.248

Белоусова М. В.

Прогнозирование надежности технических систем на основе модели Хольта – Уинтерса

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

Введение. В процессе эксплуатации технических систем возникает необходимость прогнозирования значений количественных показателей надежности с целью планирования расходов на техническое обслуживание и ремонт, пересмотра состава и объема регламентных работ в эксплуатационной документации [1]. Также характер изменения эксплуатационных показателей надежности используется при проектировании узлов-аналогов.

При использовании традиционного математического аппарата на основе экспоненциального распределения не всегда есть возможность сделать точный краткосрочный прогноз. Более достоверные оценки надежности можно сделать с помощью применения инструментов прогнозирования временных рядов [2]. Адаптивные методы могут применяться для прогнозирования как макроэкономических показателей, так и для описания изменения технико-экономических характеристик изделий, переменных параметров химических процессов, изучения поведения параметра потока отказов оборудования в зависимости от его срока эксплуатации.

В данной работе методы расчета надежности и статистического анализа применяются с целью моделирования параметра потока отказов (ППО) узла двери вагона локомотивной тяги и прогнозирования значения данного показателя надежности на несколько периодов. Актуальность исследования вытекает из необходимости определения значения ППО для дальнейшего использования в разработке изделий-аналогов, прогнозировании надежности узлов компонентов подвижного состава и впоследствии возможной оптимизации регламента технического обслуживания и ремонта.

Белоусова Мария Владимировна – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: 27bmw1993@mail.ru, тел.: +7(999)007-79-93

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90218

Частой причиной неадекватных решений задач надежности является использование однопараметрического экспоненциального распределения. С одной стороны, данный подход упрощает решение многих задач по оценке надежности, а с другой – накладывает на модель ряд ограничений и делает расчет грубо приближенным. Например, прогнозирование надежности на использовании экспоненциального распределения не учитывает процессы, связанные со старением и износом. Также стоит отметить, что данный подход к расчету показателей надежности характеризуется допущением о постоянстве параметра потока отказов при том факте, что реальное значение данного показателя за рассматриваемые промежутки наработки изменяется в несколько десятков раз. Вследствие данных особенностей было принято решение осуществить прогнозирование параметра потока отказов с помощью адаптивных методов, а именно на основе модели Хольта–Уинтерса с использованием аппарата теории выживаемости.

Постановка задачи. Одно из перспективных направлений развития краткосрочного прогнозирования связано с адаптивными методами. Они позволяют строить самокорректирующиеся модели, которые могут оперативно реагировать на изменение условий. Адаптивные методы учитывают разную ценность уровней ряда: новизну и устаревание информации, что является важной особенностью для прогнозирования показателей надежности [3]. Помимо этого, в течение года характер параметра потока отказов меняется от сезона к сезону, а также зависит от интенсивности эксплуатации подвижного состава и реализуемых корректирующих мероприятий, направленных на повышение надежности оборудования. Такие процессы описать и прогнозировать бывает сложно и наилучший результат для процессов с изменяющейся тенденцией дают адаптивные модели.

Целью данного исследования является описание, моделирование и прогнозирование процесса изменения параметра потока отказов блока управления двери по данным эксплуатации с января 2019 года по февраль 2022 года и прогнозирование на 3 шага вперед.

Метод Хольта – Уинтерса. По экспериментальным данным параметр потока отказов обычно определяется по формуле:

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n(t)}{N(t)\Delta t},$$

где $\Delta n(t)$ – число отказов на интервале наработки Δt , $N(t)$ – число объектов (исследуемых показателей), работоспособных к моменту наступления периода Δt .

Метод Хольта–Уинтерса является модификацией экспоненциального сглаживания для рядов с сезонностью. В результате получаются уравнения с тремя постоянными сглаживания:

1. Сглаженный ряд:

$$L_t = k \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1 - k)(L_{t-1} + T_{t-1}).$$

2. Трендовая составляющая:

$$T_t = b(L_t - L_{t-1}) + (1 - b)T_{t-1}.$$

3. Сезонная составляющая:

$$S_t = q \frac{Y_t}{L_t} + (1 - q)S_{t-s}.$$

Здесь Y_t – исходный ряд наблюдений; L_t – сглаженный ряд; T_t – тренд; S_t – сезонная составляющая; k, b, q – параметры адаптации, $k, b, q \in [0, 1]$, s – число фаз в полном сезонном цикле.

Прогноз на p шагов вперед осуществляется следующим образом:

$$\tilde{Y}_{t+p} = (L_t + pT_t)S_{t+p-s}.$$

Оценку надежности технической системы по эксплуатационным данным можно представить в виде задачи анализа выживаемости. Методы анализа данных о выживании продолжают активно развиваться в последние десятилетия [4]. Применение этих методов масштабируется от их использования в исследованиях рака и надежности до бизнеса, криминологии, эпидемиологии, а также социальных и поведенческих наук. Именно применение функции выживаемости в биомедицинских задачах хорошо подходит для анализа данных о выживании потому, что напрямую описывает опыт выживания исследуемой когорты [5]. В случае применения данного подхода в области анализа надежности в качестве когорты выступает выборка наработок между/до отказами/отказа.

Численная реализация. Для оптимизации параметров адаптации была построена оценка функции выживаемости для фактических данных ряда:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{R_i}\right),$$

где d_i – сумма «выбывших» объектов за наработку t_i , R_i – сумма «доживающих» до момента t_i , исключая «выбывших». Аналогичным образом была построена функция выживаемости для смоделированного ряда параметров потоков отказов $\tilde{S}(t)$.

Параметры оптимизации устанавливаются так, чтобы минимизировать среднюю квадратическую ошибку (Mean Squared Error) для функции выживаемости:

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\hat{S}(t) - \tilde{S}(t)\right)^2,$$

где T – общее количество наработок.

В результате получаем графики, изображенные на рис. 1 и рис. 2.

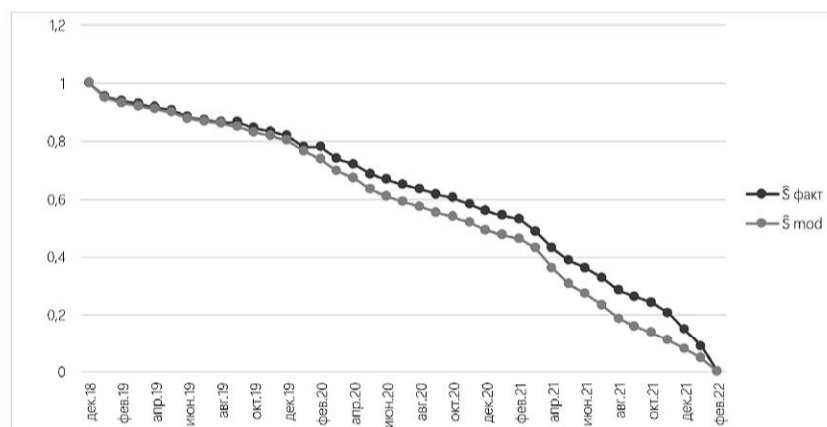


Рис. 1. График функции выживаемости

Среднеквадратичная ошибка прогноза для временного ряда параметров потоков отказов составила $4,2 \cdot 10^{-5}$.

Выводы. Данный метод прогноза включает в себя совокупность нескольких подходов:

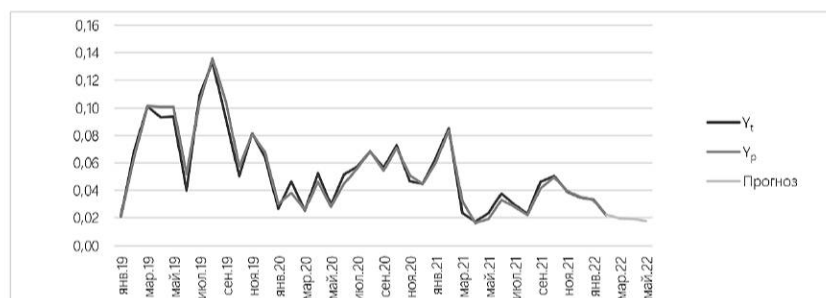


Рис. 2. График интенсивности отказов λ

1. Использование анализа выживаемости, который корректно учитывает тонкости функционирования технических систем;
2. Применение модели Хольта – Уинтерса, которая позволяет строить точные краткосрочные прогнозы.

Разработанная методика анализа и прогнозирования данных о надежности узлов применима для анализа других узлов компонентов подвижного состава с возможной коррекцией параметров временных рядов (сезонных компонент, коэффициентов адаптации и др.).

Литература

1. Гаскаров Д. В., Голинкевич Т. А., Мозгалеvский А. В. Прогнозирование технического состояния и надежности радиоэлектронной аппаратуры. М.: Сов. радио, 1974. 224 с.
2. Кизбенков К. О. Прогнозирование и временные ряды: учебное пособие. Барнаул: АлтГПУ, 2017. 115 с.
3. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2003. 416 с.
4. Lee E. T., Wang J. W. Statistical Methods for Survival Data Analysis. Wiley-Interscience, 2003. 512 p.
5. Гланц С. Медико-биологическая статистика / пер. с англ. М.: Практика, 1998. 459 с.

УДК 519.7

Болатбек А.

Ценность информации о граничных условиях в задаче оптимального расходования запасов ресурсов при терминальных ограничениях

Рекомендовано к публикации профессором Громовой Е. В.

1. Введение. В работе рассматривается теоретическая задача добычи невозобновляемых ресурсов при наличии терминальных ограничений. Знание о входных данных влияет на выбор оптимального управления и на прибыль, получаемую от добычи ресурсов [1–3]. Для исследования данного влияния рассмотрена величина, определяемая как ценность информации. Данная величина демонстрирует возможные потери и необходимость полноты информации о входных данных. В рамках приближения задачи к практической были также использованы данные из открытых ресурсов [4–6] и построена зависимость ценности информации от параметров.

2. Теоретическая задача добычи невозобновляемых ресурсов. Рассмотрим задачу добычи запасов ресурсов.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим теоретическую модель на определенном промежутке времени $[t_0, T]$. Для удобства вычислений определим $t_0 = 0$. Пусть имеется общий уровень запасов ресурсов $x(t)$, который зависит от объема добычи ресурсов u из некоторого допустимого множества U . По условиям задачи потребуем, чтобы были заданы уровни запасов ресурсов в начальный X_0 и конечный X_f моменты времени. Таким образом, динамика общего уровня запасов ресурсов задается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = -u, \\ x(0) = X_0, \\ x(T) = X_f. \end{cases} \quad (1)$$

Болатбек Айсана – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st073528@student.spbu.ru, тел.: +7(900)637-60-40

Цель определяется как получение максимально возможной прибыли за счет добычи ресурсов:

$$J(T, u) = \int_0^T c\sqrt{u}dt \rightarrow \max_{u \in U}, \quad (2)$$

где $c \geq 0$ – коэффициент, связывающий объем добычи и общую прибыль.

Таким образом, задача сводится к задаче Лагранжа поиска оптимального управления $u^*(t)$.

2.2. Применение принципа максимума Понтрягина. В задачах поиска оптимального управления можно применить принцип максимума Понтрягина, который является необходимым условием оптимальности [7]. Построим функцию Гамильтона для задачи (1), (2):

$$H(\psi, u) = \psi(-u) + c\sqrt{u},$$

где ψ – сопряженная переменная.

Применим условия оптимальности $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ и трансверсальности $\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial x}$. Также можно показать, что гессиан является отрицательно определенным при $\psi > 0$, тем самым выполняется достаточное условие оптимальности. Решая каноническую систему, получаем оптимальное управление и соответствующую ему оптимальную траекторию:

$$u^*(t) = \left(\frac{X_0 - X_f}{T} \right), \quad x^*(t) = \left(\frac{X_f - X_0}{T} \right) t + X_0.$$

Допустимое множество управлений в одномерном случае для задачи (1), (2) можно ввести как $u \in [0, u_{max}]$. Величину u_{max} можно объяснить как некоторую величину, ограничивающую объем добычи ресурсов. Для выполнения данного условия потребуем, чтобы выполнялось следующее соотношение: $X_f \geq X_0 - Tu_{max}$. Получаем значение функционала при оптимальном управлении:

$$J(T, u^*) = c\sqrt{(X_0 - X_f)T}.$$

3. Оптимальное управление в условиях неопределенности. Полученные результаты показывают, что входные данные влияют на величину оптимального управления и далее на прибыль, получаемую от добычи ресурсов.

3.1. Ценность информации. Представим ситуацию, когда известное значение уровня запасов ресурсов отличается от истинного. Допустим, имеется известное значение в начальный момент времени \hat{X}_0 . Тогда соответствующие этому значению оптимальные управление, траектория и функционал имеют вид

$$\hat{u}^*(t) = \left(\frac{\hat{X}_0 - X_f}{T} \right), \quad \hat{x}^*(t) = \left(\frac{X_f - \hat{X}_0}{T} \right) t + X_0,$$

$$J(T, \hat{u}^*) = c \sqrt{(\hat{X}_0 - X_f) T}.$$

Для определения влияния полноты информации о начальных данных на управление и прибыль введем понятие «ценность информации» [1–3].

Определение 1. Ценность информации определяется как

$$V = \frac{J(T, u^*) - J(T, \hat{u}^*)}{J(T, u^*)},$$

где $J(T, u^*)$ – прибыль, получаемая при полной информации, в то время как $J(T, \hat{u}^*)$ – прибыль, получаемая при неполной.

Далее, определим $\hat{X}_0 = \alpha X_0$ – известное начальное значение, где $\alpha > 1$ соответствует случаю, когда данные переоценены, а $\alpha < 1$ случаю, когда недооценены.

Для удобства определим значение в конечный момент времени как $X_f = \beta X_0$, где согласно постановке задачи $\beta \in [0, 1]$. Принимая во внимание данные обозначения, получим величину ценности информации

$$V_1 = 1 - \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{1 - \beta}}. \quad (3)$$

Заметим, что величина α соответствует точности оценки запасов ресурсов, которая влияет и на терминальное ограничение, т. е. X_f . Таким образом, можно ввести $\hat{X}_f = \alpha X_f$. Тогда оптимальное управ-

ление и соответствующая ему оптимальная траектория имеют вид

$$\tilde{u}^*(t) = \left(\frac{\hat{X}_0 - \hat{X}_f}{T} \right), \quad \tilde{x}^*(t) = \left(\frac{\hat{X}_f - \hat{X}_0}{T} \right) t + X_0,$$

$$J(T, \tilde{u}^*) = c \sqrt{(\hat{X}_0 - \hat{X}_f) T}.$$

В данных обозначениях ценность информации

$$V_2 = 1 - \sqrt{\alpha}. \quad (4)$$

Назовем ценности, полученные в (3), (4), случаями 1 и 2.

В дальнейшем предполагается решить обратную задачу, а именно, используя формулы (3), (4), исследовать, какими должны быть пределы для α , β , чтобы значения относительных потерь прибыли не превышали заданного заранее порогового уровня.

3.2. Ценность информации на примере добычи охотничьих ресурсов. Представим ситуацию эксплуатации биологических ресурсов, в которой пренебрегаем естественными процессами, такими как рождаемость и смертность по естественным причинам.

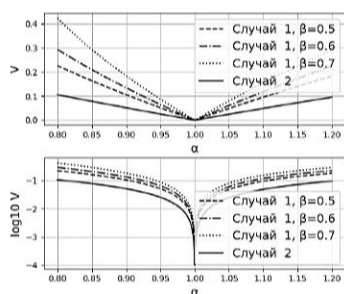


Рис. 1. Ценность информации и логарифм ценности информации

по 30 ноября [6], что составляет в общей сложности 606 дней за три года. Допустим, ведется массовая охота на хищника и только у одного предприятия имеется лицензия на охоту. Построим зависимость ценности информации для случаев 1 и 2 от параметра неопределенности α (см. рис. 1). Можно показать линейное изменение величины, и относительное через логарифмический график.

По данным Росстата, популяция бурых медведей на 2020 год составляет 286100 особей [4]. Имеется закон о сохранении охотничьих ресурсов, который устанавливает ограничения на охоту, если численность непрерывно сокращалась в течение не менее трех лет в общей сложности на более чем 50% [5]. Также, имеются установленные сроки сезона охоты, к примеру, охота на медведей ведется с 21 марта по 10 июня и с 1 августа

4. Заключение. В ходе работы получены оптимальные управления и траектория, а также соответствующая прибыль. Введено понятие ценности информации для задачи с терминальными ограничениями. Теоретические результаты продемонстрированы на примере добычи охотничьих ресурсов с учетом определенных условий.

Литература

1. Павлова Е. Д., Цепелева Р. В., Чеботарева А. А. Линейно-квадратичная дифференциальная игра с объемами вредных выбросов с функционалом в форме Больца // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 484–488.
2. Tur A., Gromova E., Gromov D. On the estimation of the initial stock in the problem of resource extraction // Mathematics. 2021. Vol. 9. Art. no 3099.
3. Chebotareva A., Shimai S., Tretyakova S., Gromova E. On the value of the preexisting knowledge in an optimal control of pollution emissions // Contributions to Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 49–58.
4. Федеральная служба государственной статистики. Окружающая среда. [Электронный ресурс]: URL:<https://rosstat.gov.ru/folder/11194> (дата обращения: 19.03.2022).
5. КонсультантПлюс. Статья 22. Ограничения охоты. [Электронный ресурс]: URL:http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_89923/71153c074112a3077f1633df66331cfb44e19734 (дата обращения: 19.03.2022).
6. Департамент природных ресурсов, экологии и агропромышленного комплекса Ненецкого автономного округа. Сроки охоты. [Электронный ресурс]: URL:<https://dprea.adm-nao.ru/informaciya-dlya-ohotnikov/sroki-ohoty> (дата обращения: 19.03.2022).
7. Никольский М. С., Беляевских Е. А. Принцип максимума Л. С. Понтрягина для некоторых задач оптимального управления пучками траекторий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 1. С. 59–68.

УДК 519.837.3

Кареева Ю. С.

Динамическая модель влияния на мнения участников социальной сети

Рекомендовано к публикации профессором Седаковым А. А.

1. Введение. Многие модели динамики мнений фокусируются в первую очередь на сходимости процесса формирования мнений, когда участники социальной группы обновляют свои мнения по определенному правилу [1,2]. Иными словами, речь идет о достижимости консенсуса внутри коллектива. Вместе с тем зачастую рассматриваются случаи, когда участники стараются изменить мнения других, преследуя индивидуальные цели. Но в действительности также возникают ситуации, когда далеко не каждый член группы имеет подобный интерес. Многие участники отслеживают мнения других и иногда корректируют свои собственные, в то время как лишь несколько участников имеют возможность влиять на мнения остальных, стремясь достичь собственные цели [3–6]. В связи с этим всех участников социальной группы можно поделить на пассивных и активных.

В данной работе исследуется влияние активных социальных агентов на мнения некоторой группы в течение конечного промежутка времени и их взаимодействие друг с другом, анализируются изменяющиеся при этом мнения участников группы.

2. Модель. Рассматривается социальная сеть с конечным числом пассивных агентов. В данном случае предполагается, что активные агенты не состоят в сети, но о существовании каждого из них знают все пассивные агенты. Пусть N и A – множества активных и пассивных агентов соответственно, при этом $|A| = a$, $|N| = n$ и $a \gg n$. Предполагается, что активный агент (в дальнейшем – *игрок*) может влиять на мнения пассивных агентов (просто *агентов*) в сети в течение конечного промежутка времени с периодами $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$. При этом агенты не могут влиять на мнения остальных участников. Пусть $x_{i0} \in X \subset \mathbb{R}$ – начальное мнение агента i , а $x_i(t) \in X \subset \mathbb{R}$ – его мнение в момент $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$. И пусть векторы

Кареева Юлия Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st061419@student.spbu.ru, тел.: +7(991)116-72-37

$x(t)$ с элементами $x_i(t)$, $i \in A$ и x_0, x_{i0} отражают мнения агентов социальной сети в период t и в начальный момент времени.

Игроки оказывают влияние на агентов, стараясь изменить их мнение в предпочтительную для себя сторону. Пусть действие игрока $i \in N$ в момент времени $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ обозначается через $u_i(t) \in U \subset \mathbb{R}$, и $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$. Агент, в свою очередь, не только учитывает свое собственное мнение, но и также ориентируется на мнения других участников сети.

Теоретико-игровая модель динамики мнений Фриджина–Джонсена описывается системой

$$x_i(t+1) = s_i \left[\sum_{j \in A} w_{ij} x_j(t) + \sum_{j \in N} b_{ij} u_j(t) \right] + (1 - s_i) x_{i0}, \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$$

с начальным условием $x_i(0) = x_{i0}$, $i \in A$. Здесь $s_i \in [0, 1]$ представляет собой степень неустойчивости агента $i \in A$ к изменению собственного мнения (чем она ниже, тем «упрямее» агент), $w_{ij} \in [0, 1]$ – степень доверия агента $i \in A$ мнению агента $j \in A$, а $b_{ij} \in [0, 1]$ показывает степень доверия агента $i \in A$ игроку $j \in N$. Равенство $w_{ij} = w_{ji}$ не обязательно должно выполняться, но предполагается, что $\sum_{j \in A} w_{ij} + \sum_{j \in N} b_{ij} = 1$ для любого $i \in A$.

Функция выигрыша игрока i задается следующим образом:

$$J_i(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \left[\frac{\alpha_i}{a} \sum_{j \in N} (x_j(t) - \hat{x}_i)^2 + (1 - \alpha_i) c_i u_i^2(t) \right] + \\ + \rho^T \frac{\beta_i}{a} \sum_{j \in N} (x_j(T) - \hat{x}_i)^2.$$

Здесь $\hat{x}_i \in X \subset \mathbb{R}$ – желаемое мнение игрока $i \in N$, к которому он хочет склонить агентов за отведенное время, выбирая стратегию u_i ; $c_i > 0$ – затраты данного игрока, которые он несет, выбирая u_i . С весом $\alpha_i \in [0, 1)$ игрок i ориентируется на свои затраты, связанные со среднеквадратичным отклонением мнений агентов от желаемого игроком, и с весом $(1 - \alpha_i)$ – на затраты на влияние. Параметр β_i – вес, придаваемый среднеквадратичному отклонению в терминальный момент, $\rho \in (0, 1]$ – параметр дисконтирования.

Естественно предположить, что между игроками возникает конфликт, поскольку каждый из них стремится установить в коллективе мнение, близкое к своему желаемому. В случае такого конфликта определение действий активных участников будет осуществляться согласно концепции равновесия по Нэшу [7].

Игроки учитывают динамику мнений агентов сети и выбирают стратегии u_i таким образом, чтобы минимизировать свои выигрыши.

3. Методология анализа решения посредством численного моделирования. Рассматривается класс позиционных стратегий, поиск равновесных позиционных стратегий основан на принципе динамического программирования.

Численное моделирование проводится на классе безмасштабных сетей (scale-free networks). Безмасштабная сеть – это граф, степени вершин в котором распределены по степенному закону. Считается, что такими сетями хорошо моделируются многие реальные социальные сети.

С помощью модели Барабаши – Альберт [8] генерируется 1000 сетей с 50 узлами. Согласно этой модели, граф из n узлов получается путем предпочтительного присоединения новых вершин с числом ребер m к некоторой начальной сети.

Предполагается, что сеть формируют именно агенты, игроки же находятся за ее пределами, также все агенты осведомлены о существовании каждого игрока.

Агенты оценивают свое доверие игрокам по следующей шкале:

- 0 – «не доверяю»;
- 0,25 – «скорее не доверяю»;
- 0,5 – «частично доверяю»;
- 0,75 – «скорее доверяю»;
- 1 – «доверяю полностью».

В работе предполагается, что доверие агента игроку определяется согласно вероятностному распределению на представленной шкале доверия.

В ситуации, когда степени доверия агентов друг другу не известны, имеет смысл их оценивать по графу на основе различных мер

центральности. Мера центральности показывает, насколько «влиятельным» является тот или иной узел в сети.

В работе рассматриваются две меры центральности: мера центральности по степени (degree centrality) и мера центральности по близости (closeness centrality).

Степени доверия оцениваются для каждой сети, и для каждой реализации находится равновесие.

4. Заключение. В данной работе исследовалась теоретико-игровая модель динамики мнений Фридкина – Джонсена, в рамках которой игроки способны оказывать влияние на агентов в социальной сети. Предполагается, что игроки могут отдавать предпочтение, на что им лучше ориентироваться: на отклонение мнений агентов от желаемого или на затраты, связанные с управлением. Агенты формируют мнения, опираясь на свою начальную точку зрения и на мнения других агентов в сети. Подразумевается также, что каждый из игроков действует в собственных интересах.

На основе результатов, полученных в ходе численного моделирования на 1000 безмасштабных сетей, сделаны следующие выводы:

- выбранная мера центральности, с помощью которой оцениваются степени доверия агентов друг другу, оказывает несущественное влияние на величину выигрыша при равновесном поведении;
- чем менее «упрямы» агенты, тем проще манипулировать их мнениями;
- чем ближе среднее начальное мнение агентов к желаемому игроком, тем меньше будет его выигрыш.

Литература

1. DeGroot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No 345. P. 118–121.
2. Friedkin N. E., Johnsen E. C. Social influence and opinions // Journal of Mathematical Sociology. 1990. Vol. 15. No 3–4. P. 193–206.

3. Rogov M. A., Sedakov A. A. Coordinated influence on the opinions of social network members // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. No 3. P. 528–547.
4. Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Informatics. Control Processes. 2019. Vol. 15. No 1. P. 118–125.
5. Gao J., Parilina E. Average-oriented opinion dynamics with the last moment of observation // Control Processes and Stability. 2021. Vol. 8. No 24. P. 505–509.
6. Zhen M. Stackelberg equilibrium of opinion dynamics game in social network with two influence nodes // Contributions to Game Theory and Management. 2019. Vol. 12. P. 366–386.
7. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory. New York: Cambridge University Press, 2013. 979 p.
8. Albert R., Barabasi A. Statistical mechanics of complex networks // Reviews of Modern Physics. 2002. Vol. 74. No 1. P. 47–97.

УДК 519.83

Мазанов Г. П.

Об устойчивости кооперации при косвенном взаимодействии игроков

Рекомендовано к публикации доцентом Панкратовой Я. Б.

1. Введение. Теория игр – это математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках. Однако, несмотря на личные цели каждого игрока, теория игр прочно связана с математикой и социальными науками [1]. Вследствие этого она может использоваться как действенное средство для достижения договоренностей между различными людьми. В данной статье рассматривается способ достижения кооперации между игроками, которые могут видеть предыдущие решения своих оппонентов, и выбирать, стоит ли с ними кооперироваться или нет.

2. Постановка задачи. В работе рассматривается постановка задачи, предложенная в статье [2]. Данная задача относится к классу эволюционных игр [3–5]. Пусть имеется бесконечная популяция игроков. Непрерывно и случайно выбираются пары игроков для взаимодействия. На каждой итерации в каждой паре выбираются донор и приемник. Донор решает, оказать помощь (скооперироваться С) или нет (отказать D) приемнику (соответственно С и D – возможные стратегии каждого игрока). Помощь уменьшает выигрыш донора на c и увеличивает выигрыш приемника на b , где $b > c > 0$. Для удобства будем считать, что каждый человек в паре одновременно может быть и донором, и приемником (выбор стратегий происходит независимо и одновременно). С небольшой вероятностью $\alpha > 0$ донор,

Мазанов Глеб Петрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069033@student.spbu.ru, тел.: +7(983)138-01-63

который согласился кооперироваться, может не иметь возможности этого сделать. Но отказу от помощи ничего помешать не может.

Перед тем как донор выбирает свое действие, ему сообщается о предыдущих выборах его партнера в случайной выборке из $n \geq 1$. Решение донора зависит от количества отказов (D), которые он может наблюдать.

Замечание. *Правило кооперации:* донор с пороговой i -стратегией (назовем его i -дискриминатором) будет кооперироваться тогда и только тогда, когда количество отказов партнера будет не более i .

Пусть $-1 \leq i \leq n$, чтобы можно было использовать стратегии безусловной кооперации ALLC ($i = n$) и безусловного отказа ALLD ($i = -1$). Решение ищется в классе чистых стратегий.

В данной работе доказывается, что введение шума α в виде непреднамеренных отказов может стабилизировать сотрудничество при условии $n \geq 2$. Исключением из правила является случай $n = 1$.

Также в рамках данной задачи для демонстрации рассуждений предлагаются результаты программной реализации на Python.

3. Математическая модель. Предположим, что i -дискриминатор встречает игрока с относительной частотой предыдущих коопераций p . Тогда вероятность, что i -дискриминатор окажет ему помощь, является функцией только от p . Обозначим эту функцию кооперации через $f_i(p)$. Из постановки задачи следует, что

$$f_{-1}(p) \equiv 0,$$

$$f_i(p) = (1 - \alpha)F(i, n, 1 - p), \quad i \in (1, \dots, n),$$

где $F(i, n, 1 - p)$ является функцией биномиального распределения с параметрами n и $1 - p$, т. е. вероятностью того, что число отказов D в n экспериментах не превышает i (где $1 - p$ – вероятность отказа D в каждом эксперименте).

Начиная с данного момента, ограничимся случаями $0 \leq i \leq n - 1$. График функции кооперации представлен на рис. 1 [2]. Также на нём показаны устойчивые (stable fixed point) и неустойчивые (unstable fixed point) неподвижные точки f_2 .

Если записать функцию кооперации, в которой биномиальная функция распределения представлена в виде β -функции, то можно заметить, что функция кооперации строго возрастает на промежутке $[0, 1]$, и значения функции меняются от $f_i(0) = 0$ до $f_i(1) = 1 - \alpha$.

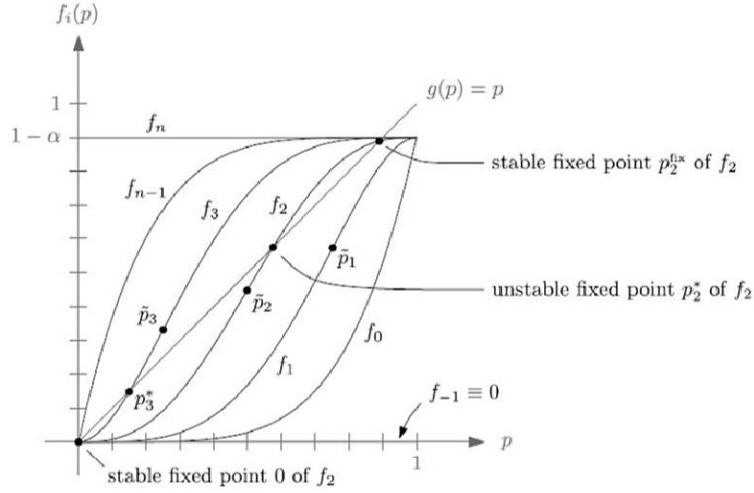


Рис. 1. Функция кооперации

Используя β -функцию, можно посчитать первую и вторую производную функции кооперации:

$$f'_i(p) = (1 - \alpha)(n - i)C_n^i p^{n-i-1}(1 - p)^i,$$

$$f''_i(p) = (1 - \alpha)(n - i)C_n^i p^{n-i-2}(1 - p)^{i-1}(n - i - 1 - (n - 1)p).$$

Первая производная неотрицательна и обращается в ноль при $p = 0$ (кроме $i = n - 1$) и $p = 1$ (кроме $i = 0$). При $n = 1$ выходит, что $f_0(p) = (1 - \alpha)p$, $f'_0(p) = 1 - \alpha$, $f''_0(p) \equiv 0$. При $n \geq 2$ для любого $i \in (0, \dots, n - 1)$ $f'(\cdot)$ строго возрастает от $p = 0$ до точки перегиба

$$\tilde{p}_i = \frac{n - i - 1}{n - 1}$$

и далее строго убывает до $p = 1$. Другими словами, $f_i(\cdot)$ выпукла на $[0, \tilde{p}]$ и вогнута на $[\tilde{p}, 1]$.

4. Однородная популяция. Рассмотрим для $i \in (0, \dots, n - 1)$ однородную популяцию i -дискриминаторов. Предположим, что в момент времени t относительная частота кооперации популяции равна

$p(t)$. Если через небольшой временной интервал Δ для игры будет выбрана часть популяции, пропорциональная Δ , тогда часть $\Delta f_i(p(t))$ из них будет сотрудничать, поэтому $p(t + \Delta) = [tp(t) + \Delta f_i(p(t))]/(t + \Delta)$. Если $\Delta \rightarrow 0$, то коэффициент кооперации $\dot{p} = [f_i(p) - p]/t$.

Следовательно, пока $f_i(p(t)) < p(t)$ коэффициент кооперации будет убывать, а в случае $f_i(p(t)) > p(t)$ – возрастать. Таким образом, с течением времени коэффициент кооперации будет сходиться к неподвижной точке функции кооперации $f_i(p(t)) = p(t)$.

На рис. 1 неподвижными точками функции кооперации являются точки пересечения f с диагональю. Для малых i значение $p = 0$ – единственная неподвижная точка, и популяция заканчивает тотальным отказом от кооперации. Это всегда так для $i = -1$ и $i = 0$, но это может также иметь место для больших значений i , если частота ошибок α велика. Если же α достаточно мало, то начиная с некоторого неопределенного значения i найдется устойчивая неподвижная точка $\tilde{p}_i < p_i^{\text{fix}} \leq 1 - \alpha$, которая появляется на вогнутой части графика функции кооперации i -дискриминатора, и неустойчивая неподвижная точка $0 \leq p_i^* < p_i^{\text{fix}}$. Эти точки можно наблюдать в случае, когда функция кооперации пересекает диагональ сверху.

Определение 1 [2]. *Устойчивой неподвижной точкой* будем называть неподвижную точку p_i^{fix} , до которой коэффициент кооперации убывает ($\dot{p} < 0$), а после – возрастает ($\dot{p} > 0$).

Определение 2 [2]. *Неустойчивой неподвижной точкой* будем называть неподвижную точку p_i^* , до которой коэффициент кооперации возрастает ($\dot{p} > 0$), а после – убывает ($\dot{p} < 0$).

Таким образом, в общем случае для заданных α , $n \geq 2$ и $-1 \leq i \leq n$, можно получить несколько исходов:

- 1) имеем уникальную неустойчивую неподвижную точку в нуле (тотальный отказ);
- 2) имеем биустойчивую ситуацию, где наблюдаем или тотальный отказ, или высокую степень кооперации в долгосрочном периоде;
- 3) имеем для $i = n - 1$, где ноль – неустойчивая неподвижная точка, и для безусловных кооператоров $i = n$ очень кооперирующиеся популяции в долгосрочном периоде.

В последних двух случаях однородная популяция i -дискриминаторов способна поддерживать высокий уровень взаимодействия. Можно сказать, что i -дискриминаторы самокооперированы. Технически i -дискриминаторы являются самокооперированными тогда и

только тогда, когда их функция кооперации пересекает диагональ сверху.

Определение 3 [2]. Будем называть i -дискриминаторов *самокооперированными*, если на нескольких предыдущих итерациях наблюдалась высокая степень кооперации в популяции, т. е. $p(t) \rightarrow 1 - \alpha$ при $t \rightarrow \infty$.

Чтобы однозначно определить окончательную степень сотрудничества популяции, определим начальные условия. Пусть новорожденные, у которых нет записей о прошлых играх, не подвергаются сомнению, т. е. с ними обращаются так, как если бы они имели чистую историю тотального сотрудничества. Отсюда следует, что самокооперирующиеся i -дискриминаторы всегда имеют коэффициент кооперации в фиксированной точке p_i^{fix} с высокой кооперацией.

5. Введение мутантов в популяцию. Теперь исследуем, может ли небольшая часть мутантов (m -дискриминаторов) выжить или даже распространиться в однородной уже существующей популяции самокооперированных i -дискриминаторов. В любом таком исследовании будем предполагать, что до прихода мутанта коэффициент кооперации текущей популяции уже стабилизировался на уровне p_i^{fix} .

Замечание. Обозначим $\hat{\pi}(j|i)$ – ожидаемый выигрыш от взаимодействия одного j -дискриминатора в однородной популяции i -дискриминаторов [2]. Будем работать с нормализованными значениями выигрышей (кратными выгоде b), поэтому пусть $\pi(j|i) = b^{-1}\hat{\pi}(j|i)$.

Когда мутантный m -дискриминатор входит в текущую популяцию i -дискриминаторов, общий коэффициент кооперации остается на уровне p_i^{fix} . Значит, коэффициент кооперации мутанта будет равен $f_m(p_i^{\text{fix}})$. Следовательно, при дальнейшей встрече с мутантом игрок из действующей популяции будет сотрудничать с вероятностью $f_i(f_m(p_i^{\text{fix}}))$.

Выигрыш мутанта $\hat{\pi}(m|i) = bf_i(f_m(p_i^{\text{fix}})) - cf_m(p_i^{\text{fix}})$ или

$$\pi(m|i) = f_i(f_m(p_i^{\text{fix}})) - rf_m(p_i^{\text{fix}}),$$

где $r = c/b$ обозначает соотношение затрат-выгод кооперации.

Для i -дискриминатора вероятность встречи с мутантом незначительна, поэтому средний выигрыш для i -дискриминатора будет $\pi(i|i) = (1 - r)p_i^{\text{fix}}$. Можно доказать, что данная мутантная популя-

ция не сможет распространиться в приведенной выше однородной популяции.

6. Результаты программной реализации. Для демонстрации работы предложенных выше рассуждений рассмотрим программную реализацию на Python для $n = 5$ и $\alpha = 0,1$. Проверим самокооперируемость однородной популяции и отражение атаки мутанта.

Для начала создадим однородную популяцию и будем играть в 1000 игр по 1000 итераций в каждой. Для разных значений порога i проверим, сколько раз из 1000 популяция сможет скооперироваться, а сколько раз откажет в кооперации друг другу.

В ходе программной реализации получены результаты, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Однородная популяция

Порог i	Количество игр с кооперацией	Количество игр с отказом
$i = 5$	1000	0
$i = 4$	1000	0
$i = 3$	973	27
$i = 2$	532	468
$i = 1$	18	982
$i = 0$	0	1000
$i = -1$	0	1000

Данные результаты согласуются с рассуждениями о том, какие исходы можно получить в игре.

Также подведем итог, который касается мутантной ситуации.

Рассмотрим популяцию из игроков с 3-пороговым уровнем и заменим одного из игроков на мутанта с произвольным, отличным от 3-порогового уровня. Изменение способности популяции к кооперации представлены в таблице 2.

Таблица 2. Популяция с мутантом

Порог i для мутанта	Количество игр с кооперацией	Количество игр с отказом
$i = 5$	1000	0
$i = 4$	1000	0
$i = 2$	991	9
$i = 1$	989	11
$i = 0$	982	18
$i = -1$	774	236

По полученным результатам можно судить о сохранении тенденции к кооперации почти во всех играх. Результат при $i = -1$ для мутанта отличается большим числом игр с полным отказом, потому что сама по себе стратегия 3-порогового уровня не всегда приводит к полной кооперации, а данный мутант сильно подрывает доверие не только к себе, но и остальных игроков друг к другу. Тем не менее, подавляющее большинство игр с ним играются с итоговой полной кооперацией.

7. Заключение. В ходе работы изучена теоретическая база, построена математическая модель, проведены исследования для однородной популяции, исследован результат после введения мутантов, приведена программная реализация. В дальнейшем планируется рассмотреть случаи смешанных стратегий и разработать соответствующую программную реализацию.

Литература

1. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
2. Berger U., Grune A. On the stability of cooperation under indirect reciprocity with first-order information // *Games and Economic Behavior*. 2016. Vol. 98. P. 19–33.
3. Курносых З. А., Губар Е. А. Моделирование эволюционной игры с учетом сетевой структуры // *Процессы управления и устойчивость*. 2017. Т. 4. № 1. С. 631–635.
4. Карпов М. И., Петросян Л. А. Кооперативные решения в коммуникационных сетях // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2012. № 4. С. 37–45.
5. Корман И. Н. Устойчивые множества в кооперативных играх с ограниченной структурой коммуникации // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2010. № 4. С. 36–44.

УДК 519.83

Маковеева П. Е.

Модель Фридкина – Джонсена при однократном воздействии на мнения социальной группы

Рекомендовано к публикации профессором Седаковым А. А.

1. Введение. Существует множество математических моделей динамики мнений участников социальной группы. В данной работе рассматривается модель Фридкина – Джонсена [1] с одним и несколькими центрами влияния. В ней учитывается тот факт, что мнения агентов могут на каждом шаге зависеть от каких-либо фундаментальных убеждений, предубеждений, которые были заложены в ходе воспитания, взросления и пр.

Предположим, что центры влияния способны влиять только на начальные мнения участников социальной группы. Целью данной работы является нахождение оптимального поведения центров влияния, в том числе равновесия по Нэшу [2], а также исследование соответствующей динамики мнений [3] пассивных агентов.

2. Модель. За основу взята модель из [4]. Рассмотрим динамику мнений агентов социальной группы в течение конечного периода времени. Множество A будем называть множеством агентов (пассивных участников социальной группы), а N – множеством игроков (центров влияния), где $A \cap N = \emptyset$. Обозначим $|A| = a$, $|N| = n$. Каждый агент $i \in A$ сети обладает собственным мнением, представляемым вещественным числом. Его мнение может изменяться во времени. Временной промежуток $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$, x_{i0} обозначает начальное мнение агента i , а $x_i(t)$ – его мнение в период $t \in \mathcal{T} \setminus 0$, $x_0 = (x_{i0}, i \in A)'$ и $x(t) = (x_i(t), i \in A)'$ это набор мнений агентов сети в начальный момент и в момент времени t .

В начальный момент времени $t = 0$ игроки могут повлиять на мнения агентов. Обозначим через $u_i \in [0, 1]$ стратегию игрока $i \in N$, или его управляющее воздействие. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n)$.

В модели Фридкина – Джонсена предполагается, что мнения агентов на каждом шаге зависят от их собственных убеждений. Матрица

Маковеева Полина Евгеньевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076937@student.spbu.ru, тел.: +7(912)241-52-32

$S = \text{diag}\{s_1, \dots, s_a\}$ отражает склонность агентов менять свое мнение.

3. Модель Фридкина – Джонсена с одним центром влияния. Рассмотрим случай единственного игрока (центра влияния, или лидера), который оказывает влияние на мнения агентов. Тогда динамика мнений в этой группе выражается следующим образом:

$$x(t+1) = \begin{cases} S(Wx_0 + b_1u_1) + (I - S)x_0, & t = 0, \\ SWx(t) + (I - S)x_0, & t \neq 0, \end{cases}$$

где $W = \{w_{ij}\}$, $w_{ij} \in [0, 1]$ – степень доверия агента $i \in A$ мнению агента $j \in A$, а $b_i = (b_{ji}, j \in A)'$, $i \in N$, где $b_{ij} \in [0, 1]$ есть степень доверия агента $j \in A$ мнению игрока.

Цель игрока выражается функционалом

$$J_1(u_1) = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \frac{\alpha_1}{a} \sum_{j \in A} (x_j(t) - \tilde{x}_1)^2 + \rho^T \frac{\beta_1}{a} \sum_{j \in A} (x_j(T) - \tilde{x}_1)^2 + (1 - \alpha_1)c_1u_1^2,$$

где $\tilde{x}_1 \in [0, 1]$ – мнение игрока, $c_1 > 0$ характеризует собой затраты этого игрока, связанные с выбором u_1 . Параметры α_1, β_1 – весовые коэффициенты, $\rho \in (0, 1)$ – дисконтирующий множитель.

Игрок выбирает оптимальное управление u_1 так, чтобы минимизировать функционал $J_1(u_1)$.

Обозначим

$$M_T = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t [(SW)^t]'(SW)^t, \quad N_T = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \sum_{\tau=0}^t [(SW)^\tau]'(SW)^\tau, \\ L_T = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t (SW)^t, \quad m_T = [(SW)^T]'(SW)^{T-1}, \\ n_T = \sum_{\tau=0}^{T-1} [(SW)^\tau]'(SW)^{T-1}, \quad l_T = (SW)^{T-1}.$$

$$u_1 = - \frac{1}{\frac{2\alpha_1}{a} \rho b_1' S M_T S b_1 + 2(1 - \alpha_1)c_1 + \frac{2(\beta_1 - \alpha_1)}{a} \rho^T b_1 S m_T S b_1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{2\alpha_1}{a} \rho x'_0 W' S M_T S b_1 + \frac{2\alpha_1}{a} \rho x'_0 \times (I - S) N_T S b_1 - \frac{2\alpha_1}{a} \rho \tilde{x}_1 \mathbf{1}' L_T S b_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2(\beta_1 - \alpha_1)}{a} \rho^T \left[x'_0 m_T S b_1 + x'_0 (I - S) n_T S b_1 - \tilde{x}_1 \mathbf{1}' l_T S b_1 \right] \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}'$ – транспонированный вектор из единиц размерности a .

Таким образом, поиск оптимального управления игрока в задаче с одним центром влияния сводится к решению задачи квадратичной оптимизации.

4. Модель Фридкина – Джонсена с несколькими центрами влияния. Рассмотрим ситуацию, когда на социальную группу может воздействовать несколько игроков. В этом случае нельзя искать управляющие воздействия игроков в виде решения задачи оптимального управления, поскольку в этом случае между игроками может возникать конфликт. Эту ситуацию необходимо разрешить, используя элементы теории игр.

Определение 1. Система $\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{J_i\}_{i \in N})$, где U_i – множество стратегий игрока i , J_i – функция выигрыша игрока $i \in N$, называется бескоалиционной игрой в нормальной форме.

В случае нескольких игроков уравнение динамики мнений агентов зададим сходным образом:

$$x(t+1) = \begin{cases} S(Wx_0 + \sum_{i \in N} b_i u_i) + (I - S)x_0, & t = 0, \\ SWx(t) + (I - S)x_0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Цель игрока $i \in N$ состоит в минимизации его функции выигрыша квадратичного вида:

$$\begin{aligned} J_i(u) = & \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t \frac{\alpha_i}{a} \sum_{j \in A} (x_j(t) - \tilde{x}_i)^2 + \\ & + \rho^T \frac{\beta_i}{a} \sum_{j \in A} (x_j(T) - \tilde{x}_i)^2 + (1 - \alpha_i) c_i u_i^2. \end{aligned}$$

Определение 2. Ситуация $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ называется ситуацией равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях), если для всех $u_i \in U_i$, $i \in N$, справедливо $J_i(u^*) \geq J_i(u^* || u_i)$, где $(u^* || u_i) =$

$= (u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_n^*)$ – ситуация, отличная от u тем, что стратегия u_i^* игрока i заменена на стратегию u_i .

Тогда наилучший ответ игрока $i \in N$ на стратегии u_j игроков $j \neq i$ принимает вид

$$u_i = -\frac{1}{\frac{2\alpha_i}{a}\rho b'_i S M_T S b_i + 2(1-\alpha_i)c_i + \frac{2(\beta_i - \alpha_i)}{a}\rho^T b_i S m_T S b_i} \times$$

$$\times \left[\frac{2\alpha_i}{a}\rho x'_0 W' S M_T S b_i + \frac{2\alpha_i}{a}\rho \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} b'_j u_j \right) S M_T S b_i + \frac{2\alpha_i}{a}\rho x'_0 \times \right.$$

$$\times (I - S) n_T S b_i - \frac{2\alpha_i}{a}\rho \tilde{x}_i \mathbf{1}' L_T S b_i + \frac{2(\beta_i - \alpha_i)}{a}\rho^T \left[x'_0 m_T S b_i + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} b'_j u_j \right) S m_T S b_i + x'_0 (I - S) n_T S b_i - \tilde{x}_i \mathbf{1}' l_T S b_i \right] \right].$$

Используя выражения наилучших ответов игроков, найдем равновесие по Нэшу $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$.

5. Заключение. В работе предложена игровая модель Фридкина–Джонсена при однократном воздействии центров влияния на мнения участников социальной группы. В ситуации с одним игроком находится его оптимальное управление. В случае нескольких игроков определяются управления, образующие равновесие по Нэшу.

Литература

1. Friedkin N., Johnsen E. Social Influence and opinions // Journal of Mathematical Sociology. 1990. Vol. 15. No 3–4. P. 193–205.
2. Maschler M., Zamir S., Solan E. Game Theory. New York: Cambridge University Press, 2013. 980 p.
3. Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 1. С. 118–125.
4. Рогов М. А., Седаков А. А. Согласованное влияние на мнения участников социальной сети // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10. № 4. С. 30–58.

УДК 519.834

Немцев Д. Ю., Тур А. В.

Позиционное значение как мера центральности вершин графа

1. Введение. В сетевом анализе и в теории графов одним из актуальных вопросов является определение количественной оценки важности вершин и ребер. В связи с этим концепция сетевой центральности широко изучается в литературе. В последнее время популярным стало применение методов кооперативной теории игр для определения центральности вершин в графе [1–5]. В работе [1] дан подробный обзор существующих теоретико-игровых мер центральности. В [2] описан метод вычисления меры центральности как значения вектора Майерсона в кооперативной игре и предложен алгоритм вычисления этой меры, использующий производящие функции. В [3, 4] приведены различные модификации этого алгоритма. Целью настоящего исследования является получение метода вычисления центральности вершин в графе на основе позиционного решения кооперативной игры, предложенного Мессеном [6]. На основе [2], также рассмотрен алгоритм, использующий производящие функции, для вычисления центральности вершин согласно введенной мере.

2. Мера центральности для графов как решение кооперативной игры. Для определения центральности вершин графа успешно используются методы кооперативной теории игр. В таких задачах обычно рассматривается игра с ограниченной кооперацией, представленная неориентированным коммуникационным графом. При этом вершины графа представляют игроков, а ребра представляют связи между игроками. Игроки могут взаимодействовать напрямую, только если они связаны. Также вводится характеристическая функция и в качестве меры центральности выбирается некоторое известное кооперативное решение этой игры.

Для построения характеристической функции в кооперативной игре на графе будем рассматривать метод, предложенный в [2].

Немцев Даниил Юрьевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069254@student.spbu.ru, тел.: +7(981)757-06-13

Тур Анна Викторовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.tur@spbu.ru, тел.: +7(812)481-71-59

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 21-011-44058

Пусть задан неориентированный граф $g = (N, E)$, который состоит из множества вершин N и множества ребер E . Для графа g необходимо дать количественную оценку важности (центральности) вершин. Введем кооперативную игру $\langle N; v \rangle$, в которой вершины графа ассоциируются с игроками, а ребро графа ij означает, что игроки i и j могут взаимодействовать напрямую, если и только если $ij \in E$.

Граф g на множестве игроков N связный, если для любых двух вершин существует путь в g от одной вершины к другой. Коалиция S связна, если любая пара игроков в S связана путем, состоящим только из игроков данной коалиции. Связная компонента – максимальное связное подмножество. Множество всех связных компонент в g обозначим через $N|E$, а множество всех связных компонент коалиции S – через $S|E$.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков. Через 2^N обозначим множество всех его подмножеств. Кооперативной игрой n лиц будем называть пару $\langle N; v \rangle$, где $v : 2^N \rightarrow R$ – отображение, предписывающее каждой коалиции $S \in 2^N$ некоторое численное значение. При этом $v(\emptyset) = 0$. Функция v называется характеристической функцией кооперативной игры. Следуя [7], будем полагать, что кооперация возможна только между связанными игроками.

Рассмотрим игру, в которой граф g является деревом, состоящим из n вершин, а характеристическая функция задается как в [2]:

$$v(S) = \sum_{k=1}^L a_k r^k, \quad (1)$$

где $S \subset N|E$, L – максимальное расстояние между двумя вершинами в данной коалиции, a_k – число путей длины k в данной коалиции. Считаем, что $v(i) = 0, \forall i \in N$.

Введенную таким образом характеристическую функцию можно интерпретировать следующим образом. Каждая прямая связь – путь длиной 1 – приносит игрокам доход r , где $0 \leq r \leq 1$. За каждый путь длиной 2 коалиция получает r^2 , за путь длиной 3 – r^3 и т. д.

Дележом в игре $\langle N; v \rangle$ называется вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, удовлетворяющий условиям: $\sum_{i=1}^n \xi_i = v(N), \xi_i \geq v(i), \forall i \in N$.

Теоретико-игровой подход в определении меры центральности вершин графа предполагает, что в качестве количественной оценки важности вершины можно выбрать выигрыш, который получает

игрок, соответствующий этой вершине, в описанной кооперативной игре. Таким образом, некоторый дележ в игре задает оценки для вершин графа.

В работах [2–4] в качестве дележа, определяющего центральность вершин графа g , используется вектор Майерсона [7].

2.1. Вектор Майерсона. В кооперативной игре $\langle N; v \rangle$ на графе g вектор Майерсона $Y(v, g) = (Y_1(v, g), \dots, Y_n(v, g))$ определяется следующими аксиомами:

1. Если S – связная компонента ($S \in N|E$), то

$$\sum_{i \in S} Y_i(v, g) = v(S).$$

2. Для $\forall g, ij \in E$, оба игрока одинаково получают выгоду или теряют от создания связи

$$Y_i(v, g) - Y_i(v, g - ij) = Y_j(v, g) - Y_j(v, g - ij).$$

Если для любой коалиции S определить характеристическую функцию как

$$v^E(S) = \sum_{K \in S|E} v(K),$$

то вектор Майерсона может быть вычислен по формуле

$$Y_i(v, g) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v^E(S \cup i) - v^E(S)),$$

где $s = |S|$, $n = |N|$.

В работе [2] показано, что в игре с характеристической функцией (1) вектор Майерсона имеет вид

$$Y_i(v, g) = \sum_{k=\{1, \dots, L\}} A_{k,i} \frac{r^k}{k+1},$$

где $A_{k,i}$ – число путей длины k , содержащих игрока i .

3. Позиционные решения. Позиционное значение для игр с кооперативной структурой, задаваемой произвольным неориентированным графом, предложенное Мессеном [6] и получившее дальнейшее развитие в работе [8], приписывает каждому игроку в игре $\langle N; v \rangle$

сумму $v(i)$ и половину платежа каждому ребру, связывающему этого игрока, определяемого посредством вектора Шепли в ассоциированной игре на ребрах. Приведем определение позиционного значения, сформулированное в [9].

Определение. Позиционным значением в игре $\langle N; v \rangle$ на графе g называется дележ вида

$$\pi_i(v, g) = v(i) + \frac{1}{2} \sum_{e \in E_i} Sh_e(E, v_E^0), \quad \forall i \in N, \quad (2)$$

где $E_i = \{e \in E : i \in e\}$, v^0 обозначает нулевую нормализацию игры v , т.е. для всех $S \subset N$, $v^0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$, и для любой нормализованной на нуль игры и любого графа g , ассоциированная игра $\langle E; v_E \rangle$ на ребрах из E , определяется равенствами

$$v_E(E') = v^{E'}(N), \quad \forall E' \in 2^E.$$

Здесь $Sh(E, v_E^0)$ – вектор Шепли в игре $\langle E; v_E^0 \rangle$.

3.1. Позиционное решение как мера центральности. Позиционное решение можно применять в качестве дележа, определяющего центральность вершин в графе.

Утверждение. В игре $\langle N; v \rangle$ с характеристической функцией, заданной правилом (1), позиционное значение имеет следующий вид

$$\pi_i(v, g) = \sum_{k=1}^{d_i} \frac{r^k}{2k} (B_k^i + 2C_k^i), \quad \forall i \in N, \quad (3)$$

где B_k^i – число путей длины k в графе g , граничной точкой которых является вершина i , C_k^i – число путей длины k , внутренней точкой которых является вершина i , d_i – длина максимального пути, проходящего через вершину i .

Доказательство. Заметим, что в данной игре $v(i) = 0 \forall i \in N$. Вектор Шепли $Sh(E, v_E^0)$ в ассоциированной игре на ребрах будет иметь вид

$$Sh_e(N, v_E^0) = \sum_{k=1}^{d_e} \frac{A_k^e}{k} r^k,$$

где d_e – это длина максимального пути, проходящего через ребро e , A_k^e – это число путей длины k , проходящих через ребро e .

Рассмотрим путь h длины k , проходящий через вершину i . Возможны два случая:

1. Если i – граничная точка h , а h_i – ребро на пути h , инцидентное i , то для игрока i путь h в (2) будет учитываться только в слагаемом $Sh_{h_i}(N, v)$, так как этот путь проходит только через одно ребро h_i , инцидентное i . Поэтому вклад этого пути в (2) равен $\frac{r^k}{2^k}$.
2. Если i – внутренняя точка h , то существует два ребра на пути h , инцидентных i . Значит, этот путь для игрока i будет учитываться в равенстве (2) два раза. Поэтому вклад этого пути в (2) равен двум вкладам из предыдущего случая, а именно $\frac{r^k}{k}$.

Суммируя по всем возможным путям, проходящим через вершину i , получаем формулу (3).

Утверждение доказано.

3.2. Алгоритм вычисления позиционного значения. В работе [2] показано, что для вычисления числа путей заданной длины, проходящих через вершину, можно использовать производящие функции. Продемонстрируем применение этого метода для вычисления B_k^i и C_k^i .

Рассмотрим дерево g_p с корнем в вершине p . Введем в рассмотрение производящую функцию

$$\varphi_p(x) = \varphi_p^{(1)}(x) + \varphi_p^{(2)}(x),$$

где $\varphi_p^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{d_1} \alpha^k x^k$, α^k – число путей, состоящих из k игроков, в

которых игрок p является крайним, $\varphi_p^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{d_2} \beta^k x^k$, β^k – число путей, состоящих из k игроков, в которых игрок p является промежуточным. Здесь d_1 и d_2 это длины максимальных путей, которые содержат i как граничную и как внутреннюю точку соответственно.

Будем вычислять $\varphi_p(x)$ рекуррентно. Вначале определим в листах дерева g_p :

$$\varphi_q(x) = x.$$

Обозначим через M число игроков на максимальном пути $\{p, \dots, q\}$. Рассмотрим вершины дерева q , для которых число игроков на пути $\{p, \dots, q\}$ равно $M - 1$:

$$\varphi_q(x) = x \left(1 + \sum_{i=1, \dots, d} \varphi_{q_i}(x) \right),$$

где сумма берется по всем потомкам q_i вершины q . Далее строим также до $M = 2$.

Для вершины p строим функции

$$\varphi_p^{(1)}(x) = x \sum_{i=1, \dots, d} \varphi_{p_i}(x), \quad \varphi_p^{(2)}(x) = x \left(\sum_{i \neq j} \varphi_{p_i}(x) \varphi_{p_j}(x) \right),$$

где сумма берется по всем потомкам p_i вершины p .

Тогда значение B_k^i можно найти как коэффициент при x^{k+1} в $\varphi_p^{(1)}(x)$, а C_k^i – как коэффициент при x^{k+1} в $\varphi_p^{(2)}(x)$.

3.3. Пример. Для графа, изображенного на рис. 1, вычислим показатели центральности вершин, используя вектор Майерсона и позиционное значение, и сравним результаты.

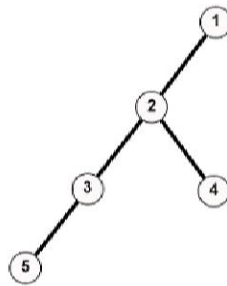


Рис. 1. Граф g

Продemonстрируем работу алгоритма при вычислении позиционного значения для вершины 2.

$$\varphi_1(x) = \varphi_4(x) = \varphi_5(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x(1+x),$$

$$\varphi_2^{(1)}(x) = x(\varphi_1(x) + \varphi_3(x) + \varphi_4(x)) = 3x^2 + x^3,$$

$$\varphi_2^{(2)}(x) = x(\varphi_1(x)\varphi_3(x) + \varphi_1(x)\varphi_4(x) + \varphi_3(x)\varphi_4(x)) = 3x^3 + 2x^4.$$

Значит, $B_1^2 = 3$, $B_2^2 = 1$, $C_2^2 = 3$, $C_3^2 = 2$. Для вершины 2 имеем

$$\pi_2(v, g) = \frac{3}{2}r + \frac{7}{4}r^2 + \frac{2}{3}r^3.$$

Аналогично для всех остальных вершин позиционное решение имеет вид

$$\pi_1(v, g) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r^3, \quad \pi_3(v, g) = r + r^2 + \frac{2}{3}r^3,$$

$$\pi_4(v, g) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r^3, \quad \pi_5(v, g) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}r^3.$$

Вектор Майерсона в этой игре

$$Y_1(v, g) = \frac{1}{2}r + \frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{4}r^3, \quad Y_2(v, g) = \frac{3}{2}r + \frac{4}{3}r^2 + \frac{1}{2}r^3,$$

$$Y_3(v, g) = r + r^2 + \frac{1}{2}r^3, \quad Y_4(v, g) = \frac{1}{2}r + \frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{4}r^3,$$

$$Y_5(v, g) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{3}r^2 + \frac{1}{2}r^3.$$

При $r = 1$ получаем

$$\pi(v, g) = (1,17; 3,92; 2,66; 1,17; 1,08),$$

$$Y(v, g) = (1,42; 3,33; 2,5; 1,42; 1,33).$$

Заметим, что позиционное решение приписывает крайним вершинам 1, 4 и 5 меньшие значения, чем вектор Майерсона. При этом для вершин 3 и 2 значения увеличиваются.

Можно дать следующую интерпретацию полученному результату. При построении вектора Майерсона выигрыш, соответствующий некоторому пути, делится поровну между всеми вершинами пути. В позиционном решении выигрыш, соответствующий пути, делится между вершинами с учетом того, сколько ребер этого пути имеют рассматриваемую вершину концевой.

4. Заключение. В качестве меры центральности вершин графа предложено рассматривать позиционное значение кооперативной игры на графе. Алгоритм, использующий аппарат производящих функций, адаптирован для нахождения позиционного значения. Полученный результат проиллюстрирован на примере.

Литература

1. Skibski O., Michalak T. P., Rahwan T. Axiomatic characterization of game-theoretic centrality // *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2018. Vol. 62. P. 33–68.
2. Mazalov V. V., Trukhina L. I. Generating functions and the Myerson vector in communication networks // *Disc. Math. and Appl.* 2014. Vol. 24. No 5. P. 295–303.
3. Mazalov V., Avrachenkov K. , Trukhina L., Tsynguev B. Game-theoretic centrality measures for weighted graphs // *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145. No 3. P. 341–358.
4. Мазалов В. В., Хитрая В. А. Модифицированное значение Майерсона для определения центральности вершин графа // *Математическая теория игр и ее приложения*. 2019. Т. 11. № 2. 2019. С. 19–39.
5. Li Y., Liu J., Petrosian O. Game theoretical approach for centrality measures in social network study // *Процессы управления и устойчивость*. 2020. Т. 7. № 1. С. 438–442.
6. Meessen R. Communication games. Master's thesis. Department of Mathematics. University of Nijmegen, The Netherlands (in Dutch). 1988.
7. Myerson R. B. Graphs and cooperation in games // *Mathematics of Operations Research*. 1977. Vol. 2. P. 225–229.
8. Borm P. E. M., Owen G., Tijs S. H. On the position value for communication situations // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 1992. Vol. 5. No 3. P. 305–320.
9. Khmelnitskaya A. B. Graph-restricted games with coalition structures // *Contributions to Game Theory and Management*. 2010. Vol. 3. P. 220–246.

УДК 517.977.5

Нечипорук А. А.

Эквивалентность моделей динамики мнений в социальных сетях с повторяющейся структурой

Рекомендовано к публикации профессором Парцлиной Е. М.

1. Введение. Процесс принятия коллективных решений обычно не является моментальным, поскольку мнения людей часто расходятся. Со временем может происходить обмен мнениями, который в итоге часто приводит к консенсусу. Моделирование таких ситуаций позволяет предсказывать исход, а также проверять рентабельность воздействия на мнение некоторых участников (например, посредством увеличения затрат на рекламу).

Исследования моделей, описывающих обмен мнениями, начинались с вопросов о достижимости консенсуса. Основопологающей в этом вопросе является модель Де Гроота [1], которая основывается на взвешивании каждым агентом собственного мнения и мнения связанных с ним участников. Эта модель рассматривалась и с добавлением управления. Например, в [2] рассмотрена задача контроля мнений агентов через влияние на некоторых агентов социальной сети. Цель контроля – максимально приблизить среднее мнение агентов к желаемому. При увеличении количества агентов в сети увеличивается и размерность задачи управления, например в [3] рассматривается метод выделения сообществ в сетях. Идея модернизации модели для возможности преобразования сетевой структуры без влияния на оптимальное управление с примером ее применения для графа-звезды рассматривалась в [4].

Цель данной работы – развитие и обобщение примера, представленного в [4].

2. Модель. Рассмотрим динамику мнений в обществе с бесконечным временем. Общество представлено графом $g = (N, E)$, где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество агентов, E – множество ребер. Помимо

Нечипорук Александра Алексеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st044395@student.spbu.ru, тел.: +7(962)694-65-24

агентов существует независимый член общества, которого будем называть игроком. Он контролирует мнение агентов. Динамика мнений в модели определяется следующими уравнениями:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right) + u_i(t), \quad i \in N,$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – мнение агента i в момент времени t , $S_i = \{j : (i, j) \in E\}$ – множество смежных участников, для агента i в графе g , $a_i \in \mathbb{R}_+$ – заданный коэффициент для любого агента общества, $u_i \in U \subset [0, \infty)$ – управление игрока на агента i .

Целью игрока является поддержание мнения агентов общества ближе к определенному уровню \bar{x} с минимизацией его затрат на управление. Причем в рассматриваемой модернизации модели агенты не равноценны для игрока. Следующий функционал представляет расходы игрока:

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^n [q_i(x_i(t) - \bar{x})^2 + \gamma u_i^2(t)],$$

где $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования, $\gamma > 0$ – стоимость единицы контроля, $q_i \in \mathbb{R}_+$ – ценность агента i .

3. Структура графа. Будем рассматривать общий вид графа, в котором управление производится только на одного агента. Динамика мнений определяется уравнениями:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + \sum_{j \in S_1} x_j(t)}{|S_1| + 1} - x_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right), & i \neq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Определим новый граф. Назовем j -копией граф той же структуры, где вершины перенумерованы: вершина под номером 1 сохраняется и имеет тот же номер, а вершины под номерами $i = 2, \dots, n$ нумеруются как вершины i_j , при этом дуги между вершинами сохраняются, т. е. если в графе была дуга (k, l) , то в j -копии будет дуга (k_j, l_j) . Определим новый граф, объединив j -копии $j = 1, \dots, m$. При таком объединении у каждой вершины графа, кроме вершины с индексом $i = 1$, будет m копий. Обозначим множество копий для вершины с индексом i как $C_i = \{i_1, \dots, i_m\}$. Для вершины i_j из полученного графа связи будут определяться следующим образом:

$$\tilde{S}_{i_j} = \begin{cases} \bigcup_{k \in S_1} C_k & i = 1, \\ \bigcup_{k \in S_{i_j}} k_j & i \neq 1. \end{cases}$$

Эти связи показывают, что копии всех вершин, которые были связаны с управляемым агентом в изначальном графе, будут связаны с управляемым агентом в новом графе, и связи копий будут повторять связи оригинала с соответствующими копиями. Тогда динамика мнений для этого будет определяться как

$$\tilde{x}_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\tilde{x}_1(t) + \sum_{j \in \tilde{S}_1} \tilde{x}_j(t)}{|\tilde{S}_1| + 1} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t), & i = 1, \\ \tilde{x}_i(t) + \tilde{a}_i \left(\frac{\tilde{x}_i(t) + \sum_{j \in \tilde{S}_i} \tilde{x}_j(t)}{|\tilde{S}_i| + 1} - \tilde{x}_i(t) \right), & i \neq 1. \end{cases} \quad (2)$$

4. Эквивалентность моделей. В работе доказываются два утверждения, которые показывают эквивалентность моделей динамики и эквивалентность соответствующих задач управления.

Утверждение 1. Для модели динамики, определяемой уравнениями (2), при $\tilde{a}_{i_1} = \dots = \tilde{a}_{i_m}$ и $\tilde{x}_{i_1}(0) = \dots = \tilde{x}_{i_m}(0) \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$ и модели, задаваемой уравнениями (1), при одинаковом управлении и при соотношении констант $a_1 = \frac{m(|S_1|+1)}{m|S_1|+1} \tilde{a}_1$, $a_i = \tilde{a}_{i_1} = \dots = \tilde{a}_{i_m} \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$, и $x_1(0) = \tilde{x}_1(0)$, $x_i(0) = \tilde{x}_{i_1}(0) = \dots = \tilde{x}_{i_m}(0) \quad \forall i$ будут выполняться равенства:

$$x_1(t) = \tilde{x}_1(t), \quad x_i(t) = \tilde{x}_{i_1}(t) = \dots = \tilde{x}_{i_m}(t) \quad \forall i \quad \forall t. \quad (3)$$

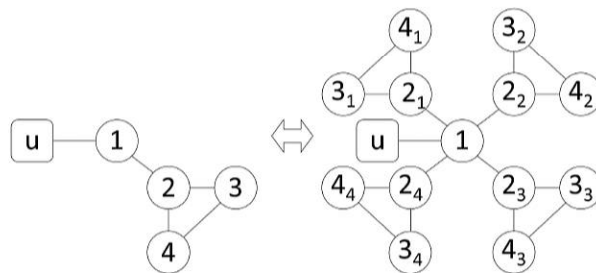


Рис. 1. Иллюстрация утверждения 1

На рис. 1 изображен пример применения утверждения 1. При указанном соотношении параметров a агенты 1 будут иметь одинаковые мнения, и агент i слева будет иметь то же мнение, что и агенты i_j справа $i = 2, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$.

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $t = 0$ равенство (3) выполняются. Предположим, что они выполняются для некоторого t . Докажем, что равенства (3) выполнены для $t + 1$. Для $i = 1$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t+1) &= \tilde{x}_1(t) + \tilde{a}_1 \left(\frac{\tilde{x}_1(t) + \sum_{j \in \tilde{S}_1} \tilde{x}_j(t)}{|\tilde{S}_1| + 1} - \tilde{x}_1(t) \right) + u(t) = \\ &= x_1(t) + a_1 \frac{m|S_1| + 1}{m(|S_1| + 1)} \left(\frac{x_1(t) + m \sum_{j \in S_1} x_j(t)}{m|S_1| + 1} - x_1(t) \right) + u(t) = \\ &= x_1(t) + a_1 \frac{m|S_1| + 1}{m(|S_1| + 1)} \left(\frac{m \sum_{j \in S_1} x_j(t) - m|S_1|x_1(t)}{m|S_1| + 1} \right) + u(t) = \\ &= x_1(t) + a_1 \left(\frac{\sum_{j \in S_1} x_j(t) - |S_1|x_1}{|S_1| + 1} \right) + u(t) = x_1(t+1).\end{aligned}$$

Для $i \neq 1$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{i_j}(t+1) &= \tilde{x}_{i_j}(t) + \tilde{a}_{i_j} \left(\frac{\tilde{x}_{i_j}(t) + \sum_{k \in \tilde{S}_{i_j}} \tilde{x}_k(t)}{|\tilde{S}_{i_j}| + 1} - \tilde{x}_{i_j}(t) \right) + u(t) = \\ &= x_i(t) + a_i \left(\frac{x_i(t) + \sum_{j \in S_i} x_j(t)}{|S_i| + 1} - x_i(t) \right) + u(t) = x_i(t+1).\end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. При условиях, описанных в утверждении 1, задачи, определяемые функционалами

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[q_1(x_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n q_i(x_i(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (4)$$

$$\tilde{J}(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1(\tilde{x}_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^m \tilde{q}_{i_j}(\tilde{x}_{i_j}(t) - \bar{x})^2 \right], \quad (5)$$

для моделей, определяемых общим графом с управлением на одного агента, и графом, построенным от него копированием соответственно, являются эквивалентными при $q_1 = \tilde{q}_1$, $q_i = \tilde{q}_{i_1} + \dots + \tilde{q}_{i_m}$, $\forall i$.

Доказательство. При подстановке равенств (3) в (5) получаем

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left[\tilde{q}_1 (x_1(t) - \bar{x})^2 + \gamma u^2(t) + \sum_{i=2}^n \left((x_i(t) - \bar{x})^2 \sum_{j=1}^m \tilde{q}_{i_j} \right) \right], \quad (6)$$

При q_i , заданными в условии, равенство (6) будет совпадать с функционалом (4).

Утверждение 2 доказано.

5. Заключение. Рассмотрена модернизированная модель динамики мнений в обществе с бесконечным временем. Определен вид графа, сопоставимый с графом общего вида с управлением на одного агента и показано соотношение параметров, при котором определяется взаимно однозначное соответствие между моделями, определяемыми этими графами. Получено соотношение параметров в соответствующих функционалах, при которых задачи управления эквивалентны.

Литература

1. De Groot M. H. Reaching a consensus // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No 345. P. 118–121.
2. Mazalov V. V., Dorofeeva Y. A., Parilina E. M. Opinion control in a team with complete and incomplete communication // Contributions to Game Theory and Management. 2020. Vol. 13. P. 324–334.
3. Мазалов В. В., Никитина Н. Н. Метод максимального правдоподобия для выделения сообществ в коммуникационных сетях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 3. С. 200–214.
4. Нечипорук А. А. Эквивалентность моделей динамики мнений в социальных сетях // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т. 8. № 1. С. 435–439.

УДК 51-77

Петров М. М., Колбин В. В.

**Многоцелевые стохастические одноэтапные
задачи принятия решений.
Доминантный принцип выбора**

1. Введение. В данной работе рассмотрена одна из проблем математической оптимизации и теории принятия решений – многоцелевая одноэтапная стохастическая задача принятия решений. Такого рода задачи встречаются во многих отраслях науки и техники, как, например, оптимальное распределение ресурсов с учётом логистических неопределённостей, планирование разработки месторождений и прочее. На примере моделей равномерного развития и минимума расстояния изложена первоначальная постановка задачи, введены ключевые определения. Далее исходная система сведена к задаче выпуклого программирования, а с использованием доминантного принципа выбора проведена скаляризация исходной задачи, в результате чего была получена одноцелевая задача.

2. Постановка задачи. Рассмотрим двухцелевую задачу распределения ресурсов с вероятностными ограничениями. В качестве критериев оптимальности выбраны модель равномерного развития объектов F_1 и модель минимума расстояния F_2 [1]:

$$\begin{cases} F1 : \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{\bar{y}_i - y_i(t+1)}{\bar{y}_i - y_i(t)} - \frac{\bar{y}_j - y_j(t+1)}{\bar{y}_j - y_j(t)} \right) \rightarrow \min; \\ F2 : \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{y}_i - y_i(t+1)}{\bar{y}_i} \right)^2 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1)$$

Петров Максим Михайлович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: maxpt1@yandex.ru, тел.: +7(911)776-72-88

Колбин Вячеслав Викторович – профессор; e-mail: vivakolbin@gmail.com, тел.: +7(812)428-41-54

Введём так же следующие дополнительные функции ограничений:

$$\begin{cases} P_1 \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \leq c_j(t, w) \right\} \geq \alpha_1; \\ P_2 \{ y_i(t+1) = y_i(t) + s_i(t, w) u_i(t) + d_i(t, w) \} \geq \alpha_2; \\ w \in \Omega; \quad t \in [0, T-1], \quad i, j = \overline{1, n}; \\ \alpha \in (0, 1), \quad a_i > 0,5, \end{cases} \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения: $P_1\{\cdot\}, P_2\{\cdot\}$ – вероятности соответствующих событий; $i = \overline{1, n}$ – возможные направления вложения ресурсов; $y_i(t) \geq 0$ – показатель развития i -го направления в момент времени t ; $y_i(t+1) \geq 0$ – показатель развития i -го направления в момент времени $t+1$; $u_i(t)$ – объём ресурсов, выделенный на i -е направление (искомая переменная); w – показатель волатильности (степень неопределённости экономической среды); T – горизонт планирования; a_{ij} – элементы матрицы распределения i -го ресурса по j -у направлению; α – скалярный параметр, характеризующий доминирование одной целевой функции над другой в скаляризованной модели; $s_i(t, w)$ – прирост i -го направления на единицу вложенных ресурсов; $d_i(t, w)$ – влияние внешних факторов (случайная величина); $c_i(t, w)$ – суммарное количество имеющихся ресурсов в период t (случайная величина); \bar{y}_i – эталонное состояние для i -ого объекта, $\bar{y}_i \geq y_i(t+1), \forall i, t$.

В модели равномерного развития объектов распределение затрат осуществляется пропорционально требуемым средствам для достижения эталонного состояния. Такой функционал позволяет постепенно сглаживать диспропорции в развитии направлений. Модель минимума расстояния позволяет распределить ресурсы таким образом, чтобы «расстояние» до эталона для всех работ было минимальным. Такое распределение показывает как наиболее эффективным способом достигнуть для всех n направлений эталонного состояния [2].

С помощью такого подхода при допущении, что невязки в ограничениях не превышают некоторых заданных чисел a_i с вероятностью $\alpha_i > 0$, стремимся получить такое распределение ресурсов, которое стимулировало бы уничтожение диспропорций и достижение общего эффекта, причём перевод всех объектов из начального состояния в эталонное происходило бы равномерно [3, 4].

3. Существование детерминированного эквивалента. Данную задачу с вероятными условиями с помощью замены переменных можно привести к общему виду [5]:

$$\begin{cases} b_i = y_i(t+1) + y_i(t), \\ c'_i = s_i(t, w) u_i(t), \\ c''_i = d_i(t, w). \end{cases} \quad (3)$$

В таком случае модель (1) останется без изменений, а система дополнительных функций ограничений (2) примет следующий вид [6]:

$$\begin{cases} P_1 \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \leq c_j(t, w) \right\} \geq \alpha_1, & \alpha \geq 0,5, \\ P_2 \{ b_i \leq c'_i \} \geq \alpha'_2, & \alpha'_2 > 0,5, \\ P_3 \{ b_i \leq c''_i \} \geq \alpha''_2, & \alpha''_2 > 0,5, w \in \Omega, \alpha \in (0, 1). \end{cases} \quad (4)$$

Далее, примем, что $a_{ij}, b_i, c_i, c'_i, c''_i$ – нормально распределённые случайные величины с математическими ожиданиями $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i, \bar{c}_i, \bar{c}'_i, \bar{c}''_i$ и дисперсиями $\sigma_{ij}^2, \nu_i^2, \eta_i^2, \eta_i'^2, \eta_i''^2$ соответственно. Далее будем считать $\alpha_i > 0,5$.

Теорема 1. *Задача с вероятностными ограничениями (4) сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными условиями-неравенствами:*

$$\begin{cases} \Phi^{-1}(\alpha_i) \left(\sum_{j,k} \nu_{ijk} u_j u_k + 2 \sum_j \nu_{ij} u_j + \eta_i^2 \right)^{1/2} \leq \bar{c}_i - \sum_j \bar{a}_{ij} u_j, \\ \Phi'^{-1}(\alpha'_i) \left(2\nu'_i + \eta_i'^2 \right)^{1/2} \leq \bar{c}'_i - \bar{b}_i, \\ \Phi''^{-1}(\alpha''_i) \left(2\nu''_i + \eta_i''^2 \right)^{1/2} \leq \bar{c}''_i - \bar{b}_i. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы выходит за рамки данной работы. Полное его описание можно найти в [2]. Приведём здесь только основные шаги. При доказательстве используется замена переменных (3). Показывается эквивалентность новых вероятностных ограничений исходным квадратичным условиям-неравенствам. После чего достаточно просто доказываем, что новая целевая функция при

замене переменных так же остаётся линейной. В конце доказательства, уже имея линейную целевую функцию и квадратичные условия показывается, что исходная задача сведена к задаче выпуклого программирования.

Стоит отметить, что линеаризация функционала «расстояния» позволяет работать с данной системой уравнений методами линейного программирования.

4. Доминантный принцип выбора. Следует отметить, что приведённая выше постановка задачи многоцелевой оптимизации нуждается в дополнениях. Для того, чтобы решить задачу и привести её к более простому виду мы определим понятие свёрток и сформулируем правило, которое указывает в каком смысле понимается оптимум. Это правило называется *принцип выбора многоцелевой оптимизации*, задание которого позволяет установить (а) в каком смысле понимается оптимальное решение и (б) определить множество оптимальных элементов. Наиболее часто используемым принципом в задачах многоцелевой оптимизации является *Парето – оптимальный принцип выбора*.

Здесь и далее примем $f(x)$ – вектор оценочных критериев состоящий из решений исходной задачи $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Определение 1. Элемент $x^0 \in X$ называется Парето – оптимальным по многоцелевому показателю, если не существует такого $x \in X$ что выполнены неравенства $f_k(x) \geq f_k(x^0)$ для всех $k = \overline{1, N}$, причём хотя бы одно из этих неравенств строгое [7].

Мы рассмотрим решения, оптимальные по доминантному принципу выбора.

Определение 2. Элемент $x^0 \in X$ называется оптимальным по доминантному принципу выбора, если $f_k(x) \leq f_k(x^0)$ для любых $x \in X, k = \overline{1, N}$.

Далее введём определение понятия «свёртка».

Определение 3. Свёрткой компонентов многоцелевого показателя $f \in Q$ называется отображение $(Q \rightarrow R^1)$, которое преобразует совокупность компонент целевого функционала в скалярный целевой показатель.

Далее приведём леммы, которые устанавливают связь оптимальности по Парето с оптимизацией линейной свёртки в многокритериальных задачах. Следует отметить, что обе леммы основаны на неравенстве Йенсена.

Лемма 1. Если множество X выпукло, функции $f_k, k = \overline{1, N}$, вогнуты, $x^0 \in X$ оптимально по Парето, то справедливо следующее:

$$\exists \alpha \in (0, 1) : \max_{x \in X} (\alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x)) = \alpha f_1(x^0) + (1 - \alpha) f_2(x^0).$$

Лемма 2. Если для некоторого числа $\alpha \in (0, 1)$ выполнено следующее условие:

$$\alpha f_1(x^0) + (1 - \alpha) f_2(x^0) = \max_{x \in X} (\alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x)),$$

то вектор x^0 оптимален по Парето.

На основании этих лемм поиск решений, оптимальных по Парето, эквивалентен нахождению

$$\alpha f_1(x^0) + (1 - \alpha) f_2(x^0) \rightarrow \max, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Не трудно видеть, что если множество решений, оптимальных по доминантному принципу выбора не пусто, то тогда оно совпадает с Парето – оптимальным множеством решений. Отсюда следует, что в данном случае в задаче многоцелевой оптимизации может быть использована линейная свёртка. Учитывая сказанное выше, задачу в общем виде детерминированной модели приведём к скалярной задаче выпуклого программирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\alpha(x) = \alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x) \rightarrow \max, \\ \Phi^{-1}(\alpha_i) \left(\sum_{j,k}^n \nu_{ijk} u_j u_k + 2 \sum_j^n \nu_{ij} u_j + \eta_i^2 \right)^{(1/2)} \leq \bar{c}_i - \sum_j^n \bar{a}_{ij} u_j, \\ \Phi'^{-1}(\alpha'_i) \left(2\nu'_i + \eta_i'^2 \right)^{(1/2)} \leq \bar{c}'_i - \bar{b}_i, \\ \Phi''^{-1}(\alpha''_i) \left(2\nu''_i + \eta_i''^2 \right)^{(1/2)} \leq \bar{c}''_i - \bar{b}_i, \\ \alpha \in (0, 1). \end{array} \right.$$

Здесь видно, что исходная многоцелевая задача теперь сведена к одноцелевой задаче (см. первое уравнение в системе), зависящей от скалярного параметра α . Далее будем считать, что функции f_α и $\Psi^{-1}(\alpha_i)$ непрерывно дифференцируемы. Также принимаем, что f_α – вогнутая, а область, высекаемая неравенствами, выпуклая.

5. Заключение. В представленной работе на примере моделей равномерного развития и минимума расстояния продемонстрирован пример использования доминантного принципа выбора: исходная одноэтапная многоцелевая стохастическая задача принятия решений сведена к одноцелевой задаче с помощью скаляризации целевых функций. Кроме этого продемонстрирован детерминированный эквивалент исходной задачи.

Литература

1. Kolbin V. V. Stochastic Programming. Springer Netherlands, 1977. 196 p.
2. Kolbin V. V. Decision Making and Programming. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2003. 745 p.
3. Kolbin V. V. Systems Optimization Methodology. Part 1. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2000. 485 p.
4. Kolbin V. V. Systems Optimization Methodology. Part 2. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2001. 380 p.
5. Petrov M. M., Kolbin V. V. One approach to the problem of multi-objective optimization solutions improvement // Proc. Int. Conf. "Process Management and Scientific Developments", Birmingham, UK. 2020. P. 45–48.
6. Petrov M. M., Kolbin V. V. One approach to researching the priority problem in the tasks of multi-object optimization // Proc. Int. Conf. "Process Management and Scientific Developments", Birmingham, UK. 2020. P. 49–53.
7. Петров М. М., Колбин В. В. Применение отношений предпочтения к проблеме улучшаемости решений в задачах многоцелевой оптимизации // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 408–412.

УДК 519.6

Сорокина П. Э.

Исследование и прогнозирование продолжительности жизни

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Кумачевой С. Ш.*

1. Введение. Уровень продолжительности жизни населения является одним из основных показателей качества жизни любой страны. Анализ данных о продолжительности жизни населения необходим для оценки эффективности работы сферы здравоохранения и последующей корректировки ее действий в связи с показателями. Также данные о продолжительности жизни населения активно используются в задачах страхования и различных социальных расчетах.

Более того, важно не только анализировать имеющиеся данные, но и делать прогнозы о будущих показателях с целью выбора наилучшей стратегии действий в различных сферах.

2. Постановка задачи. Целью данной работы является определение моделей, наилучшим образом прогнозирующих продолжительность жизни для России.

Для достижения поставленной цели необходимо собрать данные для исследования, представить их в подходящем виде, аппроксимировать при помощи аналитических законов смертности и выбрать модели, дающие лучшую аппроксимацию, спрогнозировать коэффициенты для выбранных моделей и при помощи них посчитать будущие данные, оценить результаты прогнозирования.

2.1. Аналитические законы смертности. Во время исследования использовались классические аналитические законы смертности [1]:

1. *Модель де Муавра.* В данной модели считается, что время жизни распределено равномерно на интервале $(0, \omega)$, где параметр ω , полностью определяющий закон равномерного распределения, называется предельным возрастом. При $0 < x < \omega$ выполняется

Сорокина Полина Эдуардовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st069564@student.spbu.ru, тел.: +7(987)632-00-85

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad F(x) = \frac{x}{\omega}, \quad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad \mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{\omega - x},$$

где $s(x)$ – функция выживания, вероятность того, что человек доживет до возраста x лет; $f(x)$ – кривая смертей, плотность распределения случайной величины X ; $F(x)$ – функция распределения; μ_x – функция интенсивности смертности.

2. *Модель Гомпертца.* Справедливо

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \mathcal{B}e^{\alpha x}, \quad s(x) = \exp[-\mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$

$$f(x) = \mathcal{B} \exp[\alpha x - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$

где $\mathcal{B}e^{\alpha x}$ – учитывает влияние возраста на смертность и в этом смысле соответствует смертности от «природных» причин.

3. *Модель Мэйкхама.* В модели Мэйкхама интенсивность смертности приближается более общей функцией вида $\mu_x = \mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\alpha x}$, где параметр \mathcal{A} учитывает риски, связанные с несчастными случаями, а $\mathcal{B}e^{\alpha x}$ – учитывает влияние возраста на смертность.

$$s(x) = \exp[-\mathcal{A}x - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha],$$

$$f(x) = [\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\alpha x}] \exp[-\mathcal{A}x - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha].$$

4. *Модель Вейбулла.* Имеет место

$$\mu_x = kx^n, \quad f(x) = kx^n \exp\left[-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right].$$

2.2. Модели для прогнозирования. Прогнозирование проводилось при помощи моделей [2]:

1. *Наивный прогноз*

$$\hat{y}_t = y_{t-1}.$$

2. *Модель скользящей средней (оценка скользящего окна)*

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} y_{t-n}.$$

В данной модели предполагается, что будущее значение переменной зависит от среднего n ее предыдущих значений.

3. Простое экспоненциальное сглаживание

$$\hat{y}_t = \gamma y_{t-1} + (1 - \gamma)\hat{y}_{t-1}.$$

Здесь вместо взвешивания последних n значений ряда взвешиваются все доступные наблюдения, при этом экспоненциально уменьшая веса по мере углубления в исторические данные. Вес γ – сглаживающий фактор. Он определяет, как быстро «забывается» последнее доступное истинное наблюдение.

4. Двойное экспоненциальное сглаживание

$$l_x = \delta y_x + (1 - \delta)(l_{x-1} + b_{x-1}),$$

$$b_x = \beta(l_x - l_{x-1}) + (1 - \beta)b_{x-1},$$

$$\hat{y}_{x+1} = l_x + b_x.$$

Данный метод позволяет строить прогноз сразу на две точки вперед.

Оценка спрогнозированных данных проводилась при помощи перекрестной проверки временных рядов.

3. Построение модели. Данные о смертности по возрастам были найдены на сайте [3]. На данном ресурсе есть данные по России только за 1959–2014 года. Данные для 2015–2020 годов были взяты на сайте [4]. Недостатком этих данных является то, что они разбиты по возрастным группам не по году, а по пять лет. Для разбиения данных по возрастным группам по году использовалась методика, основанная на интерполяции кубическими сплайнами функции распределения [3]. Выявлено, что полученные при интерполяции данные плохо аппроксимируются аналитическими законами. Поэтому было решено использовать данные только до 2015 года.

Далее были построены модели по аналитическим законам смертности, с помощью которых данные были аппроксимированы. Так как предельный возраст по данным таблицы смертности составляет 110 лет, то оценка параметра для модели де Муавра $\omega = 110$. Для нахождения оценок параметров моделей Гомпертца и Вейбулла использовался метод наименьших квадратов. Для нелинейной модели Мейкхама была составлена система из трех уравнений с тремя неизвестными α , \mathcal{B} и \mathcal{A} , решение которой и дало оценки неизвестных

параметров. Рассмотрим функцию распределения

$$F(x) = 1 - \exp[-Ax - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha].$$

Найдем медиану, верхний и нижний квартили распределения по таблице смертности. Тогда система нелинейных уравнений имеет вид

$$1 - \exp[-Ax - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha] = 0,25,$$

$$1 - \exp[-Ax - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha] = 0,5,$$

$$1 - \exp[-Ax - \mathcal{B}(e^{\alpha x} - 1)/\alpha] = 0,75,$$

где x принимает соответствующие значения нижнего квартиля, медианы и верхнего квартиля распределения.

После построения модели были апробированы на имеющихся данных и выбраны наиболее точные из них, т. е. с наименьшей среднеквадратичной ошибкой: модель Гомпертца и модель Мейкхама. Для выбранных моделей были посчитаны параметры для каждого года с целью их дальнейшего прогнозирования.

Далее проводилось прогнозирование при помощи описанных ранее моделей. Сначала строился прогноз параметров на 2010 год на основе обучающей выборки, состоящей из параметров за 1959–2009 гг. Считалась ошибка между исходными данными и данными, полученными при подстановке спрогнозированных параметров. Далее в обучающую выборку включались исходные параметры по 2010 году и теперь прогноз строился на 2011, считалась ошибка. Так продолжалось до 2014 года. В итоге было посчитано 5 ошибок и их среднее являлось ошибкой для рассматриваемой модели прогнозирования.

Все процедуры и функции были прописаны самостоятельно с использованием языка программирования Python.

4. Результаты моделирования. По результатам прогнозирования выявлено, что наиболее точный прогноз строится на основе данных, аппроксимированных при помощи модели Гомпертца. Наилучшей прогнозирующей моделью оказалась модель двойного экспоненциального сглаживания с коэффициентами $\delta = 0,87$, $\beta = 0,09$ (рис. 1). Оценка моделей производилась при помощи среднеквадратичной и абсолютной ошибок.

К перспективам дальнейшего исследования относится моделирование продолжительности жизни с учетом влияния на построенные

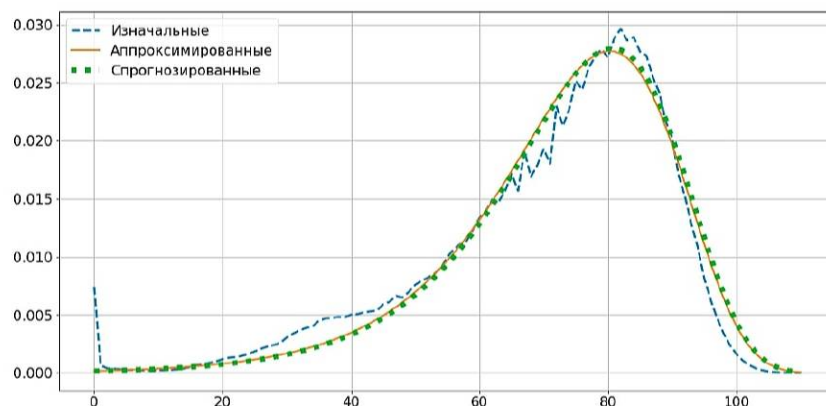


Рис. 1. Доля умерших в 2014 году

модели показателей в эпоху пандемии COVID-19.

Литература

1. Кошкин Г. М. Основы страховой (актуарной) математики: учебное пособие. Томск: Томский государственный университет, 2002. 116 с.
2. Якушев В. П., Буре В. М., Митрофанова О. А., Митрофанов Е. П. Теоретические основы вероятностно-статистического прогнозирования неблагоприятных агрометеоусловий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 2. С. 174–182.
3. The Human Mortality Database. Russia, Life tables (period 1x1), Total [Электронный ресурс]: URL:https://www.mortality.org/hmd/RUS/STATS/bltper_1x1.txt (дата обращения: 25.01.22).
4. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]: URL:<https://rosstat.gov.ru> (дата обращения: 18.02.22).

УДК 51-77

Фиряго У. А., Кочеров И. П.

Моделирование динамики спроса на скоропортящуюся продукцию

Рекомендовано к публикации доцентом Панкратовой Я. Б.

1. Введение. Для владельцев торговых сетей остро стоит вопрос прогнозирования: для успешного ведения бизнеса необходимо планировать большое количество величин, от объёмов продаж одной конкретной единицы товара до выручек всей компании на будущие периоды. Таким образом возникает потребность в построении математической модели, которая наиболее точно описывала бы тот или иной процесс, происходящий внутри компании. После проверки этой модели на исторических данных могут быть построены прогнозы, которые при достаточно высоком качестве модели смогут увеличить продажи или снизить издержки для компании.

В процессе построения модели должны быть учтены некоторые факторы, которые, по предположению руководства компании, являются значимыми при прогнозировании, а именно: учёт в модели нескольких видов сезонностей – годовой, месячной, недельной, при том недельная сезонность в разные периоды года может отличаться; праздничных и предпраздничных дней, в которые происходит всплеск продаж отдельных категорий продуктов, а также иных факторов, влияющих на принятие решений у покупателей.

В данной работе построена математическая модель прогнозирования объёмов продаж для скоропортящихся продуктов с использованием метода максимального правдоподобия [1]. Кроме того, для построения модели используются реальные данные.

2. Описание данных. Рассмотрим сеть продуктовых магазинов «К». В Санкт-Петербурге располагается около 20 точек продаж этой сети, в каждом магазине несколько отделов, в каждом отделе – сотни товаров. На протяжении многих лет компания ежедневно собирала

Фиряго Ульяна Алексеевна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st062251@student.spbu.ru, тел.: +7(999)537-39-78

Кочеров Иван Павлович – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st061387@student.spbu.ru, тел.: +7(905)814-41-42

данные, на основе которых руководители делали простейшие прогнозы, необходимые для планирования выручки, определения размера заказа каждого товара и т. д. В итоге имеется база данных, в таблицах которой несколько миллионов строк. В работе описан процесс обработки данных и использования одной модели прогнозирования на языке программирования R. Исходные данные хранятся в таблице, которая создавалась при помощи системы управления базами данных (СУБД) MS SQL. Таблица содержит следующие столбцы:

- дата;
- номер магазина;
- код отдела;
- код товара;
- количество проданного товара;
- цена единицы товара;
- общая выручка по товару в день;
- количество остатка товара на складе в конце дня.

Так как таблица имеет большой объём, выгрузка всех данных занимает много времени, поэтому создаем dataframe (табличный тип хранения данных в R), в котором будут только необходимые колонки, а именно:

1. Дата.
2. Номер магазина.
3. Номер отдела.
4. Выручка.

После преобразования таблица содержит два столбца: дата и выручка. Построим график ряда (рис. 1). По этому временному ряду построим модель для прогнозирования.

Характер временных рядов может сильно различаться в зависимости от глубины агрегирования данных. Соответственно для каждого исходного временного ряда существует проблема выбора модели прогнозирования [2].

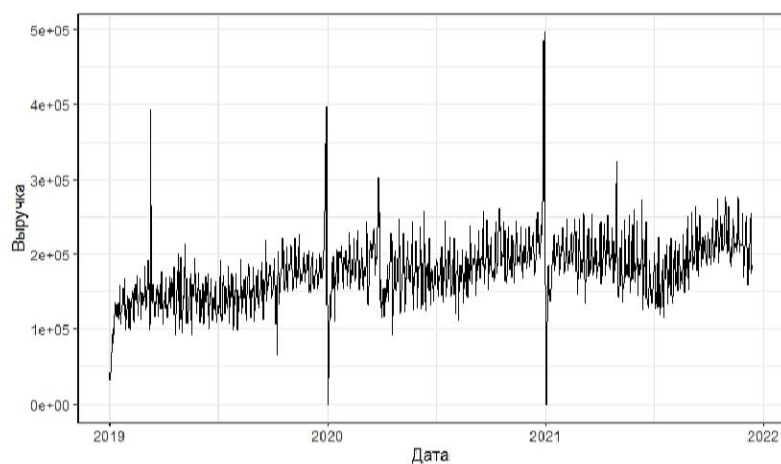


Рис. 1. Исходные данные – объём продаж

3. Описание математической модели. Изучив визуально данные, принято решение включить следующие компоненты: тренд, праздники, а также годовая, месячная и недельная сезонности. Кроме того, выявлено, что в моделировании необходимо учесть погодные условия, которые можно представить в индикаторном виде и график работы персонала, так как персонал для нашего типа магазинов играет важную роль в принятии решений у покупателей, а также некоторые другие факторы. Таким образом, строим модель в следующем виде:

$$y(t) = trend(t) + h(t) + ys(t) + ms(t) + ws(t) + \varepsilon(t),$$

где $trend(t)$ – тренд, $h(t)$ – праздники, $ys(t)$, $ms(t)$, $ws(t)$ – годовая, месячная и недельная сезонности соответственно. Итак, для нахождения максимума функции правдоподобия и, как следствие, вычисления искомых параметров, требуется взять производные логарифмической функции правдоподобия по всем искомым параметрам в отдельности и приравнять их к нулю [3].

Начнём с тренда, который предполагается искать в виде $\beta_1 x_i + \beta_2$.

Тогда логарифмическая функция правдоподобия (ЛФП) имеет вид

$$\log L(\beta, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)}{\sigma^2}.$$

Приравняем к нулю частные производные ЛФП:

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)}{\sigma^2} x_i = 0, \\ \frac{\partial \log L}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)}{\sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Решив систему, находим оценки β_1 и β_2 и удаляем тренд из данных, таким образом получаем новый ряд $y'_i = y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)$, и далее извлекаем из него остальные компоненты, а именно сезонные компоненты. Все отличия между разными типами сезонностей состоят в различном периоде колебаний, а также в различном количестве членов ряда Фурье, взятых в сумме для описания колебаний. Сезонная компонента в общем виде выглядит следующим образом [4]:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right),$$

где T – период колебаний, a_n, b_n – неизвестные параметры, N – количество членов ряда Фурье. Обычно принято брать $N = 10$ для годовой сезонности, $N = 5$ – для месячной и $N = 3$ – для недельной. Чем меньше N , тем менее осциллирующая функция получится. Найдем неизвестные параметры аналогично тренду методом максимального правдоподобия. ЛФП имеет вид

$$\log L(\beta, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\left(y_i - a_1 \sin\left(\frac{2\pi i \cdot 1}{T}\right) - \dots - a_{2k} \cos\left(\frac{2\pi i \cdot k}{T}\right) \right)}{\sigma^2},$$

где k – количество пар членов ряда Фурье, требуемое для определения конкретного вида сезонности. В итоге, имеем $2k$ искомым параметров. Взяв производные ЛФП по всем переменным и приравняв их к нулю, получаем систему, решение которой дает оценки неизвестных параметров a_1, \dots, a_{2k} .

Согласно [4], для моделирования годовой сезонности принято брать количество пар членов ряда Фурье $k = 10$, а период $T = 365,25$; для месячной сезонности – $k = 5$ и $T = 30,4375$; для недельной сезонности – $k = 3$ и $T = 7$. И наконец, праздничная компонента была взята как вектор длины N , в котором на местах праздничных дней стоят средние значения величины за несколько лет в данный день, а в остальные дни – нули.

Таким образом, оценены все компоненты аддитивного временного ряда. Результаты моделирования представлены на рис. 2. Для наглядности наложим модельные данные поверх исходных данных.

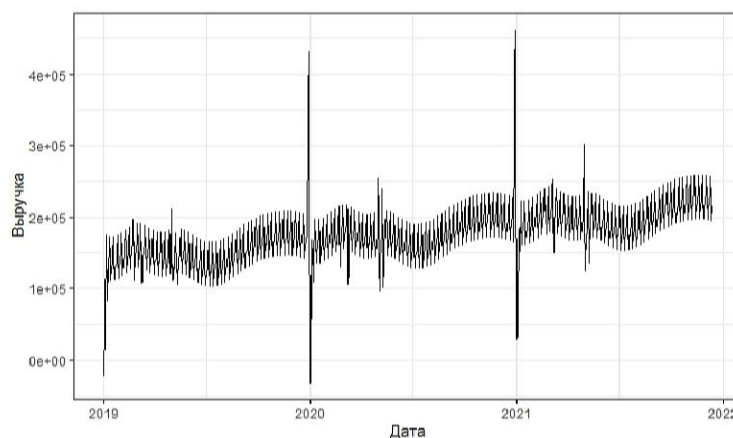


Рис. 2. Модельные данные

Рассчитаем предсказание модели, для этого найдем значения каждой компоненты на горизонте прогнозирования (2021.12.13 – 2022.01.30). Результаты изображены на рис. 3.

4. Заключение. Полученная модель пока недостаточно хорошо описывает данные, это подтверждают ненормально распределенные остатки. Однако можно добиться улучшения точности, если добавлять каждую компоненту не аддитивно, а мультипликативно, т. е. умножая на тренд, а сам тренд сделать не линейным, а кусочно-линейным. Также недельную сезонность следует разбить на «летнюю» и «не летнюю», так как при сотрудничестве с заведующими магазинами удалось выяснить, что летом люди закупают продукты

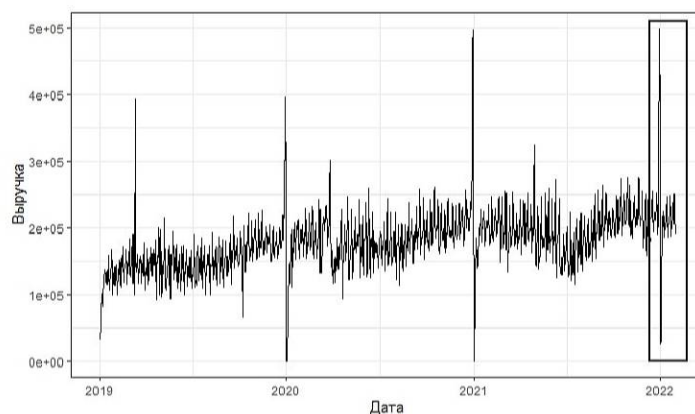


Рис. 3. Прогноз – объем продаж

перед выходными, а в другое время года – на выходных.

Литература

1. Буре В. М., Евсеев Е. А. Основы эконометрики. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2004. 72 с.
2. Якушев В. П., Буре В. М., Митрофанова О. А., Митрофанов Е. П. Теоретические основы вероятностно-статистического прогнозирования неблагоприятных агрометеоусловий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 2. С. 174–182.
3. Verbeek M. A guide to modern econometrics. 2nd ed. NJ: John Wiley and Sons. 2004. 472 p.
4. Forecasting at Scale. PeerJ Preprints 5:e3190v2 [Электронный ресурс]: URL:<https://peerj.com/preprints/3190.pdf> (дата обращения: 30.09.2021).

УДК 51-77

Шконда А. Ю.

Задача об оптимальной политике фирмы

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. Задачи поиска оптимального управления актуальны в различных приложениях [1, 2]. Существуют разные способы решения этих задач, но особенно важны методы, позволяющие строить оптимальное управление в режиме реального времени. Авторы работы [3] предложили один из таких методов, основывающийся на сведении задачи оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций к интервальной задаче линейного программирования (ИЗЛП). В данной работе рассматривается применение данного метода к задаче экономической динамики.

2. Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель оптимального управления фирмой, предложенную в [4]. Запишем её в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax(t) + Bv(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2(1-f)r & (1-f)(p\alpha - a - r) & (p\beta - w) \\ -a & 0 & 0 \\ -l_2a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_2 & l_1 - l_2 \end{pmatrix},$$

$$x(t) = (X(t), K(t), L(t))^T, \quad v(t) = (D(t), I(t), u(t))^T,$$

$$x_0 = (X_0, K_0, l_2K_0 - (l_2 - l_1)K_{10})^T.$$

Поясним используемые обозначения: $X(t)$ – собственный капитал фирмы; $K(t)$ – общий капитал фирмы, складывающийся из собственного капитала и кредита; $L(t)$ – затраты трудовых ресурсов; $D(t)$ –

Шконда Анастасия Юрьевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st076942@student.spbu.ru, тел.: +7(908)973-32-21

дивиденды акционеров; $I(t)$ – инвестиции; $u(t)$ – скорость наращивания капитала; X_0 – начальный собственный капитал; K_0 – начальный общий капитал фирмы; q_j – производительность j -го технологического производства (ТП), $j = 1, 2$; l_j – трудовые затраты в j -м ТП, $j = 1, 2$; K_{10} – часть стартового капитала первого ТП; f – ставка корпоративного налога на прибыль; r – процентная ставка; p – цена единицы продукции; a – норма амортизации; w – ставка зарплаты;

$$\alpha = \frac{q_1 l_2 - q_2 l_1}{l_2 - l_1}; \beta = \frac{q_2 - q_1}{l_2 - l_1}.$$

Требуется построить допустимое управление так, чтобы к концу периода планирования $[0, z]$ получить наибольшую сумму собственного капитала $X(z)$ и дивидендов $D(t)$. С учетом дисконтирующего множителя, имеем функционал

$$c^T x(z) + \int_0^z d^T(t)v(t)dt \rightarrow \max, \quad (2)$$

где $c = (e^{-iz}, 0, 0)^T$, $d(t) = (e^{-it}, 0, 0)^T$.

При этом на капитал фирмы в каждый момент времени t наложены ограничения вида

$$Hx(t) \leq g, \quad (3)$$

$$H = \begin{pmatrix} -1 - k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где k – максимальная доля собственного капитала к кредиту.

Кроме того, выплаты акционерам и скорость наращивания капитала ограничены, поэтому

$$v_{\min} \leq v(t) \leq v_{\max}, \quad t \in [0, z]. \quad (4)$$

Здесь $v_{\min} = (0, I_*, u_*)$ и $v_{\max} = (D_{\max}, I^*, u^*)$, где D_{\max} – максимальная скорость наращивания ресурсов за счет дивидендов, I_{\min} , I_{\max} – пределы изменения инвестиций, u_{\min} , u_{\max} – пределы скорости наращивания капитала.

Будем считать, что управление $v(t)$ является кусочно-постоянным на $[0, z]$, т. е. имеет вид

$$v(t) = v(kh) = v_{kh}, \quad t \in [kh, (k+1)h[, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (5)$$

где $h = \frac{z}{N}$ – шаг дискретности, N – число дискретизации.

3. Переход к ИЗЛП. Применим метод, описанный в работе [3], к задаче оптимального управления (1)–(5).

3.1. Сведение целевой функции. В результате использования формулы Коши функционал (2) принимает вид

$$C^T V \rightarrow \max, \quad (6)$$

где V – вектор, составленный из значений $v(t)$ в моменты переключения управления:

$$V = (v(0), v(h), \dots, v(z-h))^T, \quad (7)$$

а вектор C – вектор коэффициентов целевой функции

$$C = (c_h(0), c_h(h), \dots, c_h(z-h))^T,$$

$$c_h(t) = \int_t^{t+h} (c^T Y(z) Y^{-1}(\tau) B(\tau) + d^T(t)) d\tau.$$

3.2. Сведение основных ограничений. Основные ограничения принимают вид

$$DV \leq g_0. \quad (8)$$

Строки матрицы D и элементы вектора g_0 задают ограничения на систему в моменты времени $t = ph$, $p = \overline{1, N}$:

$$D = \begin{pmatrix} d_h(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{2h}(0) & d_{2h}(1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_z(0) & d_z(1) & d_z(2) & \dots & d_z(N-1) \end{pmatrix},$$

$$g_0 = (g_0(h), g_0(2h), \dots, g_0(z))^T,$$

где

$$d_{ph}(k) = \int_{kh}^{(k+1)h} HY(ph)Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau, \quad p = \overline{1, N}, k = \overline{0, N-1},$$

$$g_0(ph) = g - Hx_0(ph), \quad p = \overline{1, N}.$$

3.3. Прямые ограничения. Учитывая (7), получаем вид ограничений

$$V_{min} \leq V \leq V_{max}, \quad (9)$$

где

$$V_{min} = (v_{min}, \dots, v_{min})^T, \\ V_{max} = (v_{max}, \dots, v_{max})^T.$$

3.4. Окончательный вид задачи. Объединяя (6), (8) и (9), получаем задачу линейного программирования

$$\begin{cases} C^T V \rightarrow \max, \\ DV \leq g_0, \\ V_{min} \leq V \leq V_{max}, \end{cases} \quad (10)$$

которую можем решить известными методами.

4. Численный эксперимент. На языке Python 3.7.12 была написана программа, формирующая коэффициенты задачи (10) и реализующая ее. Проиллюстрируем результаты работы программы численным экспериментом. Вычисление производилось на промежутке $[0, 3]$ с шагом $h = 0,5$ для следующих модельных параметров задачи: $f = 0,2$, $r = 0,1$, $i = 0,08$, $p = 5$, $a = 0,2$, $w = 1$, $q_1 = 0,8$, $q_2 = 1$, $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, $X_0 = 100$, $K_0 = 130$, $K_{10} = 70$, $k = 0,5$, $D_{max} = 100$, $I_{min} = 10$, $I_{max} = 100$, $u_{min} = 1$, $u_{max} = 50$. В результате было получено оптимальное управление (см. рис. 1).

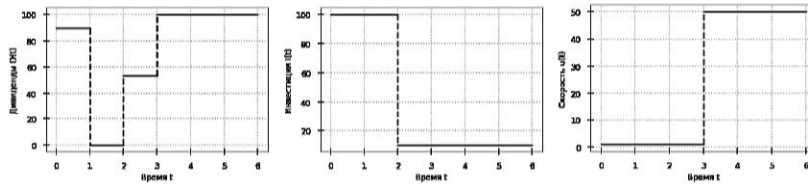


Рис. 1. Оптимальное управление $v(t) = (D(t), I(t), u(t))$

Значение целевой функции $F = 298,197647907612$, график изменения значения функционала изображен на рис. 2.

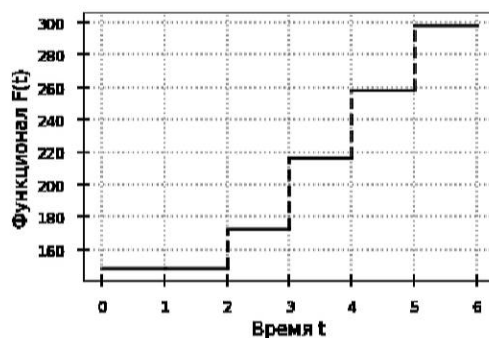


Рис. 2. Функционал F

5. Заключение. В рамках данной работы программно реализован метод решения задачи оптимального управления, предложенный Р. Габасовым. Проведен численный эксперимент, в результате которого было вычислено оптимальное управление, моделирующее инвестиционную политику фирмы, а также значение целевой функции на нем.

Литература

1. Буре В. М., Карелин В. В., Елфимов А. Н. Об одной задаче управления детерминированной системой обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Т. 10. № 4. С. 100–112.
2. Баранов О. В. Моделирование процесса управления беспилотным летательным аппаратом – квадрокоптером // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 23–28.
3. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации для линейных систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. №6. С. 839–859.
4. Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С. Оптимизация линейных экономических моделей: Статистические задачи: Учебное пособие. Минск: БГУ, 2000. 210 с.

UDC 510.67

Chen G., Zhang B., Kou Z.

Prediction of PM2.5 concentration based on multiple linear regression model

Recommended for publication by professor Krylatov A. Yu.

1. Abstract. In recent years, people's production and lifestyle have seriously damaged the quality of air pollution, resulting in an increase in the content of PM2.5 in the air, which has a great impact on air quality and human health. Therefore, this paper establishes Lasso regression, ridge regression and multiple linear regression models to analyze the effects of AQI, CO, NO₂, O₃, SO₂, PM10 and other substances on PM2.5 concentration and predict PM2.5 concentration. By comparing the residual square sum scores of each model and the predicted values of various models, it is found that the prediction results of multiple linear regression models are more accurate. Therefore, the multiple linear regression model can be used to predict the prediction results of PM2.5 content in the air in the next 12 hours, so as to provide some help for public travel and help government departments to target air quality.

2. Overall design scheme. The main steps of establishing the model are data acquisition, data processing, model training, model testing, and result analysis. The data of this paper is selected from the national urban air quality real-time release platform of China Environmental Inspection Station. The data source is authoritative and effective, which ensures the accuracy of the research and implementation. After getting the experimental data, the data is processed. Then Lasso regression, ridge regression, and multiple linear regression models are established, and the parameters solved by the normal equation are used to optimize the loss function until it reaches the optimal value. Then, the optimal training model is used to predict the concentration of PM2.5 in the air. After comparison, the prediction rate of the multiple linear

Chen Gongyong – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: ZGChenGongyong@outlook.com, phone: +8617829915658
Zhang Boxin – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: zbx20000807@outlook.com, phone: +8619991902009
Kou Zhihao – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: kzh19981209@outlook.com, phone: +8617829912512

regression model is the most accurate. Finally, the multivariate linear regression model is used to predict the PM2.5 content in the air in the next 12 hours, and the prediction results are obtained and analyzed.

3. Data analysis. First, back up the data, then divide the data into two parts: a training set and test set, and extract the AQI (representing air quality index, the lower the value, the better the air quality) data of each station.

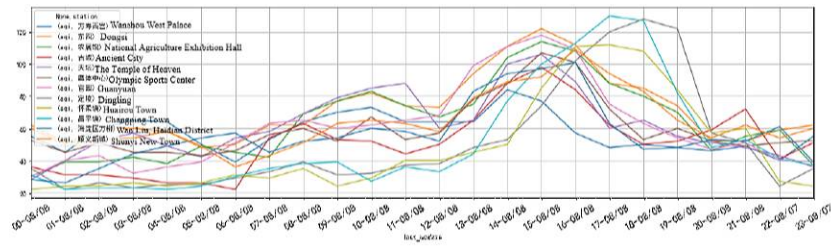


Figure 1. 24-hour change trend of AQI index in each urban area

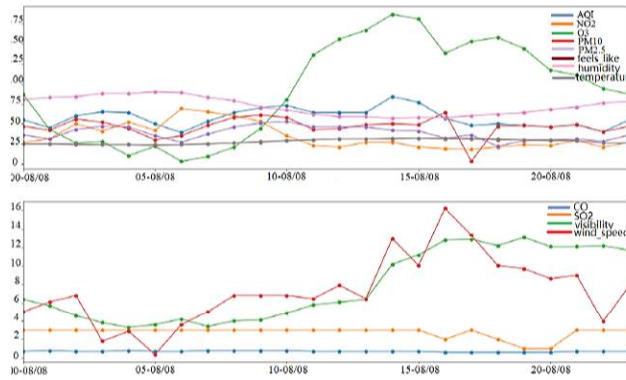


Figure 2. Trend curves of various pollutants changing with time in each urban area 24 hours a day

As can be seen from the Figure 1, the 24-hour AQI index changes in various urban areas throughout the day. The overall maximum value appears from 15:00 to 18:00 and then drops rapidly after 18:00.

According to different urban areas, the trend curves of pollutants over time in each urban area for 24-hour a day were plotted. As can be seen from the Figure 2, among the various pollutants in the urban areas.

(1) The fluctuation of ozone is the largest. It can be seen from the figure that the ozone concentration in each urban area generally reaches the lowest value after sunrise at 7:00 am and reaches the highest value afternoon at 15:00 pm.

(2) The change of PM10 fluctuated greatly, and there are two peaks from 8:00 am to 10:00 am and from 18:00 pm to 22:00 pm in urban areas.

(3) The changes in nitrogen oxides and carbon monoxide are small.

(4) The trend of PM2.5 does not change with any other pollutants and meteorological indicators, and the correlation is not obvious.

4. Data modeling. The composition and influencing factors of PM2.5 are complex. This paper discusses the correlation between each index and PM2.5 by modeling. Multiple linear regression uses a multidimensional linear function to fit all data points as much as possible. The simplest idea is to minimize the square error between the function value and the real value. There are the following objective functions:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(h_{\theta} - (x^i) - y^{(i)} \right)^2, \quad \min_{\theta} J(\theta)$$

where the linear function is as follows:

$$h(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} + \dots + \theta_n x_n^{(i)} = \sum_{j=1}^n \theta_j x_j^{(i)} = \theta^T x^{(i)}.$$

The objective function of ridge regression adds a regular term to the general linear regression, which makes the parameters as “simple” as possible while ensuring the best fit error and making the model generalizable. The regular term generally adopts one or two norm, making the model more generalizable, while allowing for the resolution of the irrev-

ersible cases in linear regression, such as the two-paradigm counterpart of ridge regression:

$$\min_{\theta} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(h_{\theta} - (x^i) - y^{(i)} \right)^2 + \lambda \|\theta\|^2.$$

Its iterative optimization function is as follows:

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \sum_{i=1}^m \left(h_{\theta} - (x^i) - y^{(i)} \right) x_j^{(i)} - 2\lambda\theta_j.$$

Lasso regression is constrained by a norm, which is suitable for the case of a few parameters and generates a sparse matrix.

The residual sum of squares is used to see the predicted effect, and the formula is shown below:

$$\text{score} = \frac{1}{n} \sum_1^n (y_i - y^*)^2.$$

Table 1. Residual sum-of-squares scores for each model

	MSE	score
normal	179.246590	-2.051366
normal_poly	35.945997	0.388081
ridge_poly	35.945955	0.388082
ridgeCV_poly	42.061735	0.283971
lasso	45.371600	0.388111

5. Experimental results. The results obtained from Table 1 and Figure 3 show that the maximum error is the result of ordinary linear regression with the original data. The training set of the other four methods is added with polynomial, and the accuracy is greatly improved and the results are similar. The predicted value has a certain deviation, but basically reflects the trend of change. After comparison, the ordinary linear regression model has the best effect.

6. Conclusion. Through training, a multiple linear regression model is established, which mainly realizes the prediction of PM2.5 concentration in each urban area. This paper analyzes the performance and accuracy of different prediction models, discusses the specific implemen-

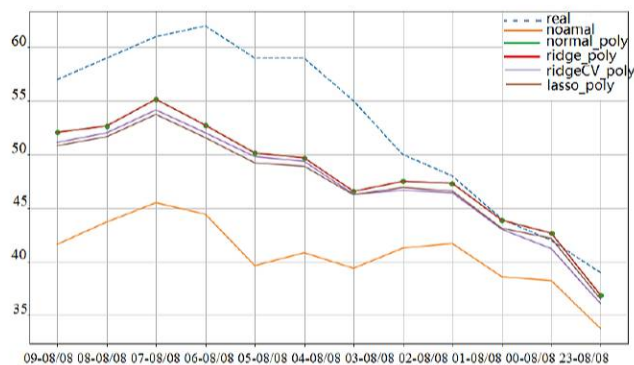


Figure 3. Predicted values of different models

tation process and core technology, and finally expounds on the results of PM2.5 prediction. After a lot of data training, the model can give better analysis results and high accuracy, which provides data support for environmental governance.

References

1. Choo G. H., Lee K. T., Jeong M. J. Analysis of empirical multiple linear regression models for the production of PM 2.5 concentrations // Journal of the Korean earth science society. 2017. Vol. 38. No 4. P. 283–292.
2. Zhao R. et al. Short period PM2. 5 prediction based on multivariate linear regression model // PLoS One. 2018. Vol. 13. No 7. Art. no e0201011.
3. Pak U. et al. Deep learning-based PM2. 5 prediction considering the spatiotemporal correlations: A case study of Beijing, China // Science of The Total Environment. 2020. Vol. 699. PMID: 31689669.
4. Olive D. J. Multiple linear regression // in Linear regression. Springer, Cham, 2017. P. 17–83.

UDC 510.67

Feng A., Wang Z., Dang Y., Ren H.

Prediction of local multi-factor housing price model based on Sklearn linear model

Recommended for publication by professor Krylatov A. Yu.

1. Abstract. In recent years, with the gradual maturity of big data technology, many methods have emerged for predicting housing price models and stock market models through machine learning. This paper by using Python [1] to feed the collected several areas of housing-related information as the data set, put forward a kind of housing forecast model based on multivariate regression analysis, a set of sample characteristics including local per capita income, the local house average fixed number of year, local number, the local population, the single building area, and the actual price. The Sklearn library is trained and tested to predict predicted house prices given any set of samples that do not include actual prices. The correlation coefficient R-squared value of this model reaches 0.918, proving that the model is highly correlated and can be used.

2. Data selection. The data in this experiment are all used in the online real estate price statistics.

Time and housing price index extraction: housing price prime, namely housing sales price index, is a relative number that reflects the change degree and trend of the housing sales price in a certain period. It reflects the rise and fall of housing prices in different periods in the form of a percentage. Including commodity housing, public housing, and private housing sales price changes.

Population factor: the base population is directly proportional to the housing price.

The total number of local houses: The total number of vacant houses is directly proportional to housing prices.

Feng Angzehua – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 943409425@qq.com, phone: +8615596867293

Wang Zhan – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: wzmailbox0606@163.com, phone: +8618691433562

Dang Yuan – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 1473724677@qq.com, phone: +8615760990950

Ren Hongbing – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 2268838258@qq.com, phone: +8618629093415

Per capita income: residents' income is directly proportional to housing prices.

Housing area: housing price is directly proportional to the area of housing.

House fixed a number of years: house fixed number of years is inversely proportional to house price.

3. Model selection. In economics, compared with a single independent variable, it is more effective to predict or estimate the dependent variables together. Multiple linear regression equations are used to predict the impact of regional per capita income (x_1), average house years (x_2), average house numbers (x_3), local population (x_4), and house area (x_5) on house prices [2].

4. Model establishment and data analysis.

4.1. Framework. Basic framework diagram is shown in Figure 1 [3].

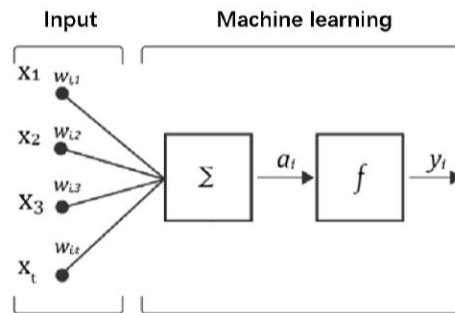


Figure 1. Basic framework diagram of the experiment

4.2. Establish a housing price prediction model based on multiple linear regression analysis. A multiple linear regression model is a linear regression model with multiple explanatory variables used to account for the linear relationship between the explained variables and multiple other explanatory variables.

i. Create an algorithmic model of house price data, and house prices and various factors are described in linear relationships

$$h_{\theta}(x) = \theta_0 + \theta_1x_1 + \theta_2x_2 + \theta_3x_3 + \theta_4x_4 + \theta_5x_5.$$

The parameters of the algorithm model are unknown at this time. Individual values were fitted by the data.

ii. Define models error

The cost function is used to measure the fit of the model on the training set. The cost function is a function that maps the value of a random event or its relevant random variable to a non-negative real number to represent the risk or loss of that random event. In applications, the loss function is often linked to optimization problems as a learning criterion, where models are solved and evaluated by minimizing the loss function. This experiment calculates the error (cost function) caused by the algorithm model through the square error to measure the gap between the predicted house price and the real house price

$$J(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left(h_0(x^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2,$$

where m is the number of samples used in this paper.

5. Optimize the algorithm model.

5.1. Optimize the algorithm. The gradient descent algorithm to find the appropriate value to minimize the loss function is used to optimize the algorithm model. The gradient descent algorithm is to calculate the gradient of the function by constantly iterating, and finally obtaining the minimum loss function and target parameters. The gradient descent method is used to find the local minimum of a function, and iteratively search for the specified step distance point in the opposite direction of the corresponding gradient of the current point (or the approximate gradient) on the function

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [h_{\theta}(x^i) - y^i] x^i.$$

The algorithm is used repeatedly to obtain the minimum error.

5.2. The goodness of fit test. The goodness of fit refers to the degree that which the regression line fits the observed value, and the statistic measuring the fit is the determinable coefficient.

In this experiment, R-squared was used to measure the similarity between the regression equation and the real sample output, and to determine the fit. According to the value of R-squared, the model is judged: if the result is 0, the model fitting effect is infinite underfitting;

if the result is 1, the model is infinite fitting. In general, the closer the R-squared is to 1, the better the model fit is. R-squared reflects roughly how accurate it is, because, as the number of samples increases, R-square will inevitably increase, and it can not quantify the degree of accuracy, but only roughly quantitative.

The determination index formula is as follows:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2}{m}}{\frac{\sum_{i=1}^m (y^{(i)} - \bar{y})^2}{m}} = 1 - \frac{MSE(\hat{y}, y)}{Var(y)},$$

where MSE represents the mean squared error, and SSE is known as the sum of residual squares. SSR is called the regression sum, reflecting the linear function of the observed values of the independent variables; SST is called the square sum of the total deviation.

6. Optimized algorithm was used for training. We used part of the data for training and part of the data for testing and adopted the gradient descent method to reduce the loss function and make the data obtained by the prediction model more accurate. Finally, the accuracy rate is 0.9180229195220739 [4].

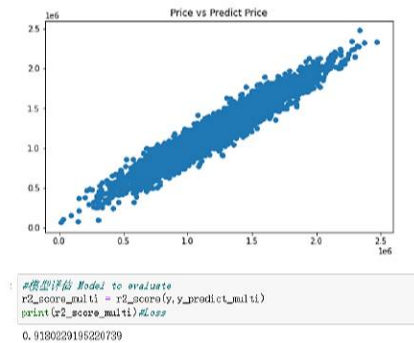


Figure 2. Loss function R-squared = 0.9180229195

7. Results analysis. In this paper, the relationship between variables and the data and the optimal fitting curve is obtained. R-squared=0.91802, which is close to 1, there is a strong positive correlation between dependent variables and independent variables, which

shows that the multiple linear models have a good fit, and further proves that this model can predict the housing price well, with strong operability and accuracy. The level of the housing price represents the consumption power of consumers in a certain sense. When consumer incomes rise, housing areas increase, and population increases, the curve will rise. Therefore, house prices should be positively correlated with housing area, population, and income. Housing prices should be negatively correlated with the number of years of housing. From the combination of these data and practice, this experiment is relatively successful, the proposed multivariable regression model is worthy of recommendation and widely used, and can achieve a good prediction effect. Through this model, the predicted house price is given when [65000, 5, 5, 30000, 200] is 817052.19516.

References

1. Graff M. et al. EvoDAG: A semantic genetic programming python library // 2016 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC). 2016. P. 1–6.
2. Keskin S., Daskiran I., Kor A. Factor analysis scores in a multiple linear regression model for the prediction of carcass weight in Akkeci kids // Journal of Applied Animal Research. 2007. Vol. 31. No 2. P. 201–204.
3. Jordan M. I., Mitchell T. M. Machine learning: Trends, perspectives, and prospects // Science. 2015. Vol. 349. P. 255–260.
4. Liakos K. G. et al. Machine learning in agriculture: A review // Sensors. 2018. Vol. 18. No 8. P. 1–29.

UDC 519.83

Gao J.

Two-player opinion control game with limited observation moments

Recommended for publication by professor Parilina E. M.

1. Introduction. Complex social networks can better present the modern society. Building mathematical models can be a good way to help us observe the changes of the network. Paper [1] considers an average-oriented opinion dynamics model, in which players observe agents' opinions only at the last moment. The authors find the optimal strategy for the optimization problem and the optimal trajectory of each agent. In paper [2], the authors propose an opinion dynamics model, in which the players observe changes in agents' opinions by choosing a fixed number of observation moments. Only one player participates in the social network. In the real world situations, there may be multiple players. In this paper, we also consider an opinion dynamics model by choosing a fixed number of observation moments. We assume that there are two players observing the opinions of the two agents. The players choose a fixed number k of moments and add controls at each moment so that the initial opinions of the agents become close to the different target opinions, respectively. We find the Nash equilibrium and equilibrium state trajectories using the Euler-equation approach [3], and provide numerical simulations to demonstrate the theoretical results.

2. The model of opinion dynamics with limited observation moments. There are two agents with corresponding opinions $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}^1$. We consider the model with two players involved in the game. We assume that they directly influence agent 1 and agent 2 by the controls $u_1(t), u_2(t) \in U \subset \mathbb{R}^1$, respectively. The players have the same discount factors but they are different in their costs per unit of influence intense (c_1 and c_2) and target opinion levels (s_1 and s_2). The state equations for the opinions of agents 1 and 2 are

Gao Jingjing – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: GJJ127@outlook.com, phone: +7(965)794-39-06

$$x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_1(t) \right) + u_1(t), \quad (1)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} - x_2(t) \right) + u_2(t) \quad (2)$$

with initial condition

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0. \quad (3)$$

Players 1 and 2 are willing to minimize the functions

$$\begin{aligned} J_1(u_1, u_2) &= \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (c_1 u_1^2(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_1)^2 + (x_2(t_j) - s_1)^2 \right) \\ &+ \delta^T \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} J_2(u_1, u_2) &= \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t (c_2 u_2^2(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_2)^2 + (x_2(t_j) - s_2)^2 \right) \\ &+ \delta^T \left((x_1(T) - s_2)^2 + (x_2(T) - s_2)^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

correspondingly, where $c_i > 0$ is player i 's costs per unit of influence intensity, $s_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

We can define a two-player game with the set of players' strategies U_1, U_2 , where $U_j = (u_j(t) \in \mathbb{R} : t = 0, \dots, T-1)$, $j = 1, 2$, players' cost functions J_1, J_2 , defined by formulas (4) and (5) s.t. state equations (1) and (2) with initial state (3). The game belongs to the class of linear-quadratic games.

3. Main result. The following theorem gives the necessary conditions of the Nash equilibrium for the game described above.

Theorem. Let $\{(u_1, u_2), u_i = (u_i(t) : t = 0, \dots, T-1), i = 1, 2\}$ be the Nash equilibrium in the game and $\{(x_1(t), x_2(t)) : t = 0, \dots, T\}$ be

the state trajectory corresponding to this equilibrium with initial condition $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$, then they satisfy the system:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_i c_i \left(x_i(t+1) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t) \right) \\ = \left(1 - \frac{a_j}{2}\right) \widehat{k}_t^i - \frac{\widehat{k}_{t-1}^i}{\delta}, \quad t = \overline{2, T-1}, \quad t \neq t_j, \\ -a_i c_i \left(x_i(t+1) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t) - \frac{a_i}{2} x_j(t) \right) - 2(x_j(t) - s_i) \\ = \left(1 - \frac{a_j}{2}\right) \widehat{k}_t^i - \frac{\widehat{k}_{t-1}^i}{\delta}, \quad t = t_j, j = \overline{2, k}, \\ c_i \left(x_i(t) - \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t-1) - \frac{a_i}{2} x_j(t-1) \right) \\ + \delta(x_i(t) - s_i) = 0, \quad t = T, \\ x_j(t) = s_i - \frac{1}{2\delta} \widehat{k}_{t-1}^i, \quad t = T, \end{array} \right. \quad (6)$$

where $i, j = 1, 2, i \neq j$ and

$$\begin{aligned} \widehat{k}_t^i &= \frac{4}{a_j \delta} \left[\left(c_i + \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2}\right)^2 \right) x_i(t) - c_i \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t-1) \right. \\ &\quad \left. - \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t+1) - \frac{c_i a_i}{2} x_j(t-1) + \frac{\delta c_i a_i}{2} \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_j(t) \right], \\ &\quad t = \overline{1, T-1}, \quad t \neq t_j, \\ \widehat{k}_t^i &= \frac{4}{a_j \delta} \left[\left(c_i + \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2}\right)^2 \right) x_i(t) - c_i \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t-1) \right. \\ &\quad \left. - \delta c_i \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_i(t+1) - \frac{c_i a_i}{2} x_j(t-1) + \frac{\delta c_i a_i}{2} \left(1 - \frac{a_i}{2}\right) x_j(t) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x_i(t) - s_i) \right], \quad t = t_j, j = \overline{1, k} \end{aligned}$$

taking into account the state equations (1) and (2) and initial state $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0)$.

Proof. Let us fix $u_2(t), t = 0, \dots, T-1$ and find the best response of Player 1. We use the Euler-equation approach to find the Nash equilibrium in the game. The goal of the player 1 is to minimize

$$\begin{aligned}
J_1(x_1, x_2, u_2) &= \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \left(c_1 \left(x_1(t+1) - \left(1 - \frac{a_1}{2}\right) x_1(t) - \frac{a_1}{2} x_2(t) \right)^2 \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \delta^{t_j} \left((x_1(t_j) - s_1)^2 + (x_2(t_j) - s_1)^2 \right) \\
&\quad + \delta^T \left((x_1(T) - s_1)^2 + (x_2(T) - s_1)^2 \right),
\end{aligned}$$

subject to condition (2). We form the Lagrange function

$$\begin{aligned}
L_1(x_1, x_2, k^1) &= J_1(x_1, x_2, u_2) + \sum_{t=0}^{T-1} k_t^1 \left(x_2(t+1) - \left(1 - \frac{a_2}{2}\right) x_2(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_2}{2} x_1(t) - u_2(t) \right),
\end{aligned}$$

where $k^1 = \{k_t^1, t = 0, \dots, T-1\}$. Finding the derivatives $\frac{\partial L_1(x_1, x_2, k^1)}{\partial x_1(t)} = 0$ and $\frac{\partial L_1(x_1, x_2, k^1)}{\partial x_2(t)} = 0, t = 1, \dots, T$, we obtain the system of equations to define the best response strategy of Player 1. We determine the best response strategy of Player 2 in the same way and obtain the system (6). The theorem is proved.

4. Numerical simulation. We consider the following example. Let the parameters of the game be considered as follows: $a_1 = 0.8, a_2 = 0.7, \delta = 1, c_1 = 0.7, c_2 = 0.9$, and initial opinions be $x_1(0) = 0.7, x_2(0) = 0.9$. The time horizon is $T = 10$ and target opinions are $s_1 = 0.3, s_2 = 0.2$. The equilibrium costs of Players 1 and 2 are 1.3684 and 1.1657, respectively. The equilibrium state and strategy trajectories are presented in Fig. 1 and Fig. 2.

Table 1. Nash equilibrium state trajectories and controls

t	0	1	2	3	4	5
$x_1(t)$	0.7000	0.9906	0.805	0.6936	0.6266	0.5862
$x_2(t)$	0.9000	1.0733	0.9409	0.8547	0.7979	0.7581
$u_1(t)$	-0.7800	-0.4293	-0.3764	-0.3419	-0.3192	-0.3033
$u_2(t)$	0.2533	0.2969	0.2901	0.2851	0.2794	0.2658
t	6	7	8	9	10	
$x_1(t)$	0.5608	0.5409	0.5151	0.4662	0.2917	
$x_2(t)$	0.7207	0.6501	0.5520	0.4222	0.2353	
$u_1(t)$	-0.2883	-0.2600	-0.2208	-0.1689		
$u_2(t)$	0.2177	0.1619	0.0910	-0.0181		

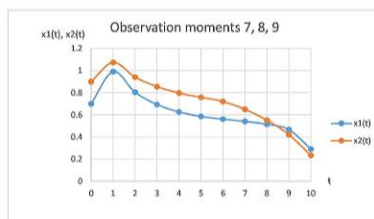


Figure 1. Equilibrium state trajectories (blue – $x_1(t)$, red – $x_2(t)$)

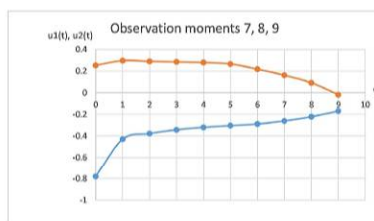


Figure 2. Equilibrium strategy trajectories (blue – $u_1(t)$, red – $u_2(t)$)

5. Conclusion. An average-oriented opinion dynamics model with two players and two agents is proposed. The goal of the players is to minimize their costs of influence by making the society’s opinion closer to the target one with the limited observation moments. We find the Nash equilibrium, when there are two players in the society. The Euler-equation approach is used to define the necessary conditions of the equilibrium. Numerical simulations demonstrate the theoretical results.

References

1. Gao J., Parilina E. M. Average-oriented opinion dynamics with the last moment of observation // Control Processes and Stability. 2021. Vol. 8. No 1. P. 505–509.
2. Gao J., Parilina E. M. Opinion control problem with average-oriented opinion dynamics and limited observation moments // Contributions to Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 103–112.
3. González-Sánchez D., Hernández-Lerma O. Discrete-time stochastic control and dynamic potential games: the Euler-Equation approach. SpringerBriefs in Mathematics. Springer Cham. 2013. 83 p.

UDC 519.233.5

Qi D.

Spatial autocorrelation model of development differences based on ESDA

Recommended for publication by professor Bure V. M.

1. Abstract. Based on the spatial autocorrelation analysis of ESDA, taking Shanxi as an example, the global Moran index and the local Moran index were calculated for the per capita GDP from 2011 to 2020. The global spatial autocorrelation analysis shows that the economy as a whole has significant spatial autocorrelation, and the spatial aggregation characteristics are gradually enhanced; the local autocorrelation analysis shows that Shanxi's economy has gradually formed two spatial aggregation areas, namely Taiyuan as the center and Datong as the center. Finally, we analyze the reasons for the formation of economic differences and make suggestions for the rapid development of the regional economy.

2. Spatial autocorrelation. Spatial autocorrelation analysis is an important method of spatial statistics. It studies the degree of correlation of properties or phenomena of spatially adjacent area units. At present, spatial autocorrelation analysis has become an important means of quantitative research involving spatial relationships [1].

2.1. Global spatial autocorrelation analysis. In this paper, Moran's I is used to measure the degree of global spatial autocorrelation [2]. Moran's I reflects the similarity of attribute values of adjacent units in space, and can quantitatively describe the spatial aggregation of a certain attribute value of a unit. The value of Moran's I ranges from -1 to 1 . When Moran's I tends to 1 , it means that the research units tend to be clustered in geographic space, that is, the closer the spatial distance is, the more similar the values are; when Moran's I tends to -1 , the study units tend to diverge, that is, the closer the spatial distance is, the more different the values are [3]. The calculation formula of Global Moran's I (Global Moran's I, GMI) is:

Qi Dongfang – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: st073409@student.spbu.ru, phone: +7(981)810-21-63

$$\text{GMI} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}} \times \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1)$$

where x_i and x_j are the values of units i and j respectively; \bar{x} is the average value of all units, n is the number of units, and w_{ij} represents the spatial relationship between unit i and unit j . For different research purposes w_{ij} can be calculated according to the spatial adjacency relationship or the spatial distance relationship. In this study, the adjacency relationship is used to calculate w_{ij} : if unit i is adjacent to unit j , then $w_{ij} = 1$, otherwise $w_{ij} = 0$.

In the global Moran' I calculation, all regional units are used as sample data. When $\text{GMI} = -1/(n-1)$, it means that the variables are randomly distributed. When the difference between GMI and $-1/(n-1)$, whether the difference is significant or caused by random sampling needs to be tested for significance. The test statistic uses the Z statistic: $Z(I_i) = [\text{GMI}_i - E(\text{GMI}_i)] / S(\text{GMI}_i)$, where $E(\text{GMI}_i)$ is the expected value of GMI , and $S(\text{GMI}_i)$ is the standard deviation of GMI . Then according to the size of the Z value, the judgment of accepting or rejecting the null hypothesis is made under the set significance level.

2.2. Local spatial autocorrelation analysis. The global spatial autocorrelation reflects the degree of vergence of the studied variable in the whole region [4]. But in fact, for a larger area, the degree of spatial autocorrelation of different parts within it is often different, and it is necessary to analyze the spatial autocorrelation of the local area. Local Moran's I (LMI) is to decompose Moran's I into various regional units, and its calculation formula is:

$$\text{LMI}_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S} \sum_{j=1}^n W_{ij} (x_j - \bar{x}), \quad (2)$$

$$S = \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n x_j^2 \right) / (n-1) - \bar{x}^2. \quad (3)$$

In the formula: n , \bar{x} , W_{ij} have the same meaning as formula (1); x_i is the target unit, and x_j is the unit other than x_i . Z-test for LMI_i , where $E(\text{LMI}_i)$ and $S(\text{LMI}_i)$ represent the mathematical expectation

and standard deviation of local Moran's I, respectively. According to the Z value, the significance level is calculated [5].

3. An empirical analysis of the spatial correlation of economic development. The data source is the Gross Domestic Product(GDP) in the China Statistical Yearbook, and the time period is 2011–2020.

3.1. Global spatial autocorrelation. This paper uses ArcGIS to calculate the global Moran index of per capita GDP in each region of Shanxi Province from 2011 to 2020. The results are shown in Table 1. Table 1 shows that the Moran index values in all years are greater than 0 and increase year by year. The Moran index value in 2011 and 2012 years is small, and the P value is greater than 0.05, so it can be considered that the regional agglomeration characteristics in the two years are not obvious, and the spatial correlation is weak. 2013–2020 passed the test every year, and the value of Moran index is getting larger and larger, indicating that the level of economic development has obvious clustering characteristics, and the correlation is getting stronger and stronger.

Table 1. 2011–2020 Per capita GDP global Moran index and test

Year	Moran index	Z-value	P-value
2011	0.0635	1.6509	0.1307
2012	0.1013	1.7634	0.0598
2013	0.1398	2.1978	0.0282
2014	0.1712	2.6748	0.0071
2015	0.1993	2.9732	0.0029
2016	0.2184	3.1473	0.0015
2017	0.2369	3.4548	0.0005
2018	0.2398	3.4997	0.0005
2019	0.2414	2.5986	0.0003
2020	0.4186	5.8793	0.0000

3.2. Local spatial autocorrelation. Due to the paper format the Moran scatter plots over the years we don't display. Most of the areas are distributed in one or three quadrants, and the areas in the third quadrant are more than the first quadrant, and the distribution of the first quadrant is scattered, and the third quadrant is densely distributed [6]. It can be seen that there are more economically developed areas than economically developed areas, indicating that the economy of Shanxi Province is polarized, forming two types of convergence, namely high-level convergence and low-level convergence, and this distribution pattern does not follow the overall economy. Fundamental changes have

been made with the improvement of the level of development. With the passage of time, the number of regional points in the first quadrant has increased significantly, and the regional points in the third quadrant have become more scattered, indicating that in recent years, the economic development speed of some regions has increased, the regional economic driving effect has been strengthened, and the spatial spillover effect has been obvious [7].

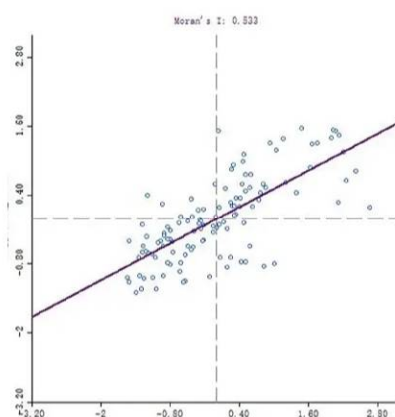


Figure 1. Moran's I

4. Conclusion. There are obvious differences in economic development. The research on the spatial correlation of economic development shows that the level of economic development generally presents obvious clustering characteristics, and the correlation is getting stronger and stronger [8]. The main factors for differences in development include differences in natural conditions, differences in economic bases, and differences in human capital. Different regions have different available natural resources, different degrees of transportation convenience, different levels of industrialization, and different levels of talent aggregation, which have resulted in uneven economic development [9]. The government should give full play to the role of resource allocation, formulate regional development policies according to local conditions, vigorously support the development of technologically innovative industries, speed up infrastructure construction in backward areas, and coordinate the assistance and driving effect of developed areas on backward areas.

References

1. Bure V. M., Parilina E. M. Probability Theory and Mathematical Statistics. St. Petersburg: Lan, 2013. 416 p.
2. National Bureau of Statistics [Internet resource]: URL:<http://www.stats.gov.cn/tjsj/ndsj> (date: 10.03.22).
3. Qi D. Study of the investment attractiveness of China's regions // Control processes and stability. 2020. Vol. 7. No 1. P. 423–428.
4. Qi D. Research on factors affecting differences in investment attractiveness based on HLM model // Control processes and stability. 2021. Vol. 8. No 1. P. 515–519.
5. Hubert L., Arabie P. The assessment of spatial autocorrelation through constrained multiple regressions // Geographical Analysis. 1991. Vol. 23. No 2. P. 95–111.
6. Robinson D. P., Kelejian H. H. Spatial autocorrelation: a new computationally simple test with an application to per capita county police expenditures // Regional Science and Urban Economics. 1992. Vol. 22. No 3. P. 317–331.
7. Nash C. H., Richardson J. S., Hinch S. G. Spatial autocorrelation and fish production in freshwaters: a comment on Randall // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences. 1999. Vol. 56. P. 1696–1699.
8. Lichstein J. W., Simons T. R., Shriner S. A. Spatial autocorrelation and autoregressive models in ecology // Ecological Monographs. 2002. Vol. 72. No 3. P. 445–463.
9. Nijkamp P., Longhi S. Forecasting regional labor market developments under spatial autocorrelation // International Regional Science Review. 2007. Vol. 30. No 2. P. 100–119.

UDC 519.866

Ran Y., Qian J., Gao Z., Wang Q.

Research on loan strategy of commercial housing purchase based on threat and risk assessment

Recommended for publication by professor Smirnov N. V.

1. Abstract. In this article, we build a mathematical model based on bank home purchase loans and our daily common sense to derive a formula for the total average monthly repayment, total repayment and total interest burden. The two repayment methods, equal interest repayment method and equal principal repayment method, are compared once to give a better loan solution.

2. Introduction. For a long time after the founding of the country, China implemented the welfare housing allocation system, which played a great role in solving the housing problems of the majority of residents [1]. After more than 10 years of operation, the real estate industry is getting better and better. The credit business closely related to real estate also began to develop rapidly. Since then, with the rise in housing prices and the increase in the number of commercial houses, the total amount of personal housing loans in China has also surged.

During the years of operation, it should not be overlooked that as the scale of housing loans has expanded, the issue of risk has become increasingly important. Commercial banks in China have been paying close attention to the risk initiation of real estate credit business. Out of their own interests, commercial banks have established relevant risk prevention and control mechanisms for personal housing loans. However, the emergence of personal credit crisis involves many aspects, and the lack of corresponding crisis prevention theories and a lot of practice by banks has led to the frequent occurrence of mortgage risks. Therefore,

Ran Yunlong – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 1979848198@qq.com, phone: +8615191002868

Qian Jiahui – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: qianjiahui13@126.com, phone: +8618936210082

Gao Zihan – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 306458128@qq.com, phone: +8619891131432

Wang Qi – undergraduate student, Yanan University;
e-mail: 940592434@qq.com, phone: +8618700958154

the risk assessment of personal housing loans is extremely important.

3. Problem analysis.

3.1. Assumption. A person has $\text{¥}x$ in funds and wishes to purchase a home worth $\text{¥}y$. We use mathematical modeling [2] to analyze and compare various repayment methods by building a relevant loan model and taking into account the actual situation to arrive at a better solution. It is assumed that the influence of external factors does not change the repayment period, that the value of Chinese currency is not affected by external factors during the loan term, i.e. no appreciation or depreciation occurs, that the bank loan interest rate is fixed for a period of time, and that it is not affected by economic crisis, inflation and national policies.

3.2. Analysis. The equal principal and interest repayment method [3] is to repay the principal and interest of the loan in equal monthly installments until the end of the period. The equal principal repayment method [3] means that the bank is paid back an equal amount of principal each period, but the customer's monthly interest burden decreases each month.

The issues that need to be addressed are as follows: First, assuming that the customer can pay two different repayment methods, by helping him to build a mathematical model of repayment methods to meet the customer's needs. Second, calculate the amount of repayment needed each month based on the customer's willingness and actual situation, including monthly salary and age, in order to derive his required loan term (in months).

4. Model building and solving. The parameters of the problem are as follows. A : Principal amount of the customer's loan from the bank. B : The average principal amount that the customer should repay each period. C : Total amount of repayment due from the customer to the bank. D : the total interest burden of the customer. α : monthly interest rate of the customer's loan from the bank. n : the total number of repayment periods of the customer. We can derive that $y - x = A$.

4.1. Solve the equal principal and interest repayment model. First, assume that the bank lends the customer the principal amount on the first day of a month. Repayment begins on the first of the month following the principal payment and the monthly interest rate remains the same during the repayment period.

Let the average total monthly repayment be x yuan.

The amount that the customer owes the bank before the first repayment of the i -th period is a_i , $i = 1, \dots, n$.

The amount that the customer owes to the bank after the first repayment in the i -th period is b_i , $i = 1, \dots, n$.

Based on the above analysis, there are:

The amount owed to the bank before the repayment in period 1:

$$a_1 = A(1 + \alpha);$$

the owed amount after the repayment in period 1:

$$b_1 = a_1 - x = A(1 + \alpha) - x;$$

the owed amount before the repayment in period 2:

$$a_2 = b_1(1 + \alpha);$$

the owed amount after the repayment in period 2:

$$b_2 = a_2 - x;$$

...

the owed amount before the last repayment (in period n):

$$a_n = b_{n-1} = A(1 + \alpha)^{n-1} - x(1 + \alpha)^{n-2} - \dots - x;$$

the owed amount after the last repayment:

$$b_n = a_n(1 + \alpha) - x = A(1 + \alpha)^n - x(1 + \alpha)^{n-1} - \dots - x.$$

Since the amount owed by the customer to the bank is totally paid off after the n -th repayment, $b_n = 0$.

This results in the total average monthly repayment amount, the total repayment amount and the total interest burden

$$D = \frac{A\alpha \times (1 + \alpha)^n}{(1 + \alpha)^{n-1}}. \quad (1)$$

4.2. Solve the equal principal repayment model. In the equal principal repayment method, each installment pays the bank an equal amount of principal, but the customer's monthly interest burden will be different, and the interest burden should be decreasing with the principal. Let the amount payable by the customer in the i -th period be x_i , $i = 1, \dots, n$. Therefore, the amount to pay by the customer in the first period is

$$x_1 = B + (A - B)\alpha;$$

the amount to pay in the second period is

$$x_2 = B + (A - 2B)\alpha;$$

finally, the amount to pay in the last (n -th) period is:

$$x_n = B + (A - nB)\alpha.$$

This results in the total amount of repayment and interest burden

$$D = (n + 1) \times \frac{A\alpha}{2} + A. \quad (2)$$

4.3. Analysis and testing of results. We take the city of Xi'an, Shaanxi Province, China as an example.

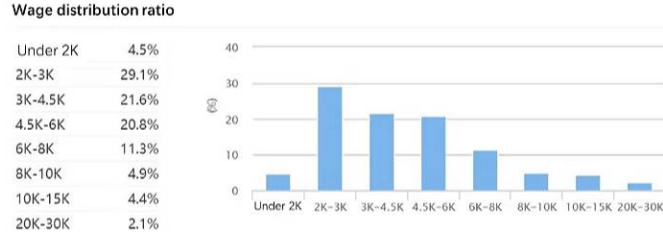


Figure 1. Salaries in Xi'an in 2022

The graph shows that the average wage in Xi'an is $W = \yen4,203$ per month. The monthly interest rate is 0.35% per month. It is generally recommended to use 35% of the salary to repay the loan. Suppose a person intends to take out a loan of 400,000 yuan to buy a house in Xi'an:

$$n = \frac{A}{W \times 0.35 \times 12}. \quad (3)$$

Equal principal and interest. Using the formula obtained by solving the model above, we find that monthly payment amount is $\yen2,262.61$, the total amount of the customer's repayment equals to $\yen624,500$ and the total interest burden is $\yen224,500$.

Equal principal. Monthly payment amount (the amount payable by the customer in the first installment) is $\yen2856.34$, the customer's total repayment amount equals to $\yen593,900$ and the total interest burden is $\yen193,900$.

Although the equal principal repayment method results into lower total repayment, the burden of the first few installments or dozens of installments will be relatively heavy.

So since the equal interest repayment method is to pay the bank the same amount every month, the customer's regular burden is not so big, so banks generally recommend the equal interest repayment method.

5. Advantages and disadvantages of the model. The *advantages* are as follows. First, the mathematical model used has a mature theoretical basis and high credibility. Second, the model established away in this paper has corresponding software support, and it is easy to push light. Third, this paper uses mathematical tools and rigorously solves the model, which is scientific in nature. The *disadvantages* are the following. First, there are more complex factors that cannot be considered in a comprehensive manner. Second, different interest rate accuracy, which causes certain errors. Third, more random factors in the economy and society make the model less accurate.

6. Conclusion. After experiments, it is concluded that the equal principal and interest repayment method has a fixed monthly repayment amount, the borrowers monthly repayment pressure is balanced, the family income expenditure can be controlled in a planned manner, and it is also convenient for each family to decide the repayment period according to their income and repayment ability when deciding to take out a loan, but they need to pay more interest, so it is suitable for those whose income is not very high but who are in a stable state, young and engaged in teaching, doctors, sales, etc. with fixed salary. As for the equal principal repayment method, the total repayment amount is less because the principal is returned quickly and the interest is decreasing month by month, but the initial repayment amount is large, so it is suitable for those with high current income, middle-aged and in the management class, business and other jobs.

References

1. Jiang Q. Mathematical modeling // Beijing Higher Education Press. 2010. Vol. 6. No 3.
2. Han Z. Practical operations research // Tsinghua University Press. 2007. Vol. 12. No 1. P. 310–317.
3. Zhang L. Comparative analysis of equal interest and equal principal // East China Economic Management. 2003. Vol. 3. P. 110–112.

UDC 510

Tian M.

Statistical models and machine learning model in air quality index prediction in Peking

Recommended for publication by professor Pankratova Ya. B.

1. Introduction. Air pollution is caused by harmful particles and gases emitted into the air, and there is a growing concern about air quality because it can cause heart disease, cancer, etc., and cause premature death. According to the World Health Organization, air pollution kills about 7 million people worldwide every year [1]. In order to predict the air quality in Beijing and provide guidance for people's life and travel, we established six different prediction models for comparative analysis, hoping to find the optimal model to better predict the future air quality in Peking.

2. Dataset introduction.

2.1. Data sources. The main pollutant data (AQI, CO, etc.) used in this article comes from the Peking air quality website <http://zx.bjmemc.com.cn>. We use Python crawler technology to crawl the daily average data of 2018.1.1–2021.6.30, and then sort it with MS Excel. There are 25 observation points in Peking, one observation every hour. The meteorological data is taken from <http://tianqi.2345.com/>.

2.2. Data introduction. This dataset has a total of 13 features, including a dependent variable AQI (air quality index), and twelve independent variables for six major pollutant datasets and six meteorological datasets. Each feature contains 1277 data, the daily average data from 2018.1.1-2021.6.30 (the specific data set is introduced in the appendix)

2.3. Air quality index(AQI) introduction. The air quality index is an index that quantitatively describes the air quality. The larger its value, the more serious the air pollution, and the greater the harm to human health. The reference standard for AQI classification calculation is "Ambient Air Quality Index (AQI) Technical Regulations (Trial)" HJ633 – 2012, and the AQI indicator has been implemented in China

Tian Mengfa – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: 1803840854@qq.com, phone: +7(981)935-57-95

since 2012. The standard value of AQI is 0 ~ 500, the division criteria are shown in the following table:

Table 1. Air quality index levels

AQI	0-50	51-100	101-150	151-200	201-300	≥ 300
Level	Level1	Level2	Level3	Level4	Level5	Level6
Describe	Excellent	Good	Light pollution	Moderate pollution	Heavy pollution	Severe pollution

3. Model building. In order to predict the future air quality of Beijing well, six prediction models are considered.

3.1. Discrete Markov prediction model. The first model we built was the Markov prediction model. We only extracted part of the dependent variable information in the dataset to predict the future air quality in Beijing. A stochastic process is a Markov process if a future state depends only on the immediately preceding state [2].

The level of each day is a random variable, and the level of 1277 days constitutes a random process $\{X_t\}$, $t = 1, \dots, 1277$, and its state set $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. The χ^2 statistic,

$$\chi^2 = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \left| \log \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \right|,$$

equals to 212.18. Since its value $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(25)$, it shows that the random process has the Markov property.

From the stability of the frequency, when N is sufficiently large, the transition frequency can be used to estimate the transition probability. For the sake of simplicity, here we use the symbol p_{ij} of transition probability to represent the transition frequency, and call it “transition probability”

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sum_{j=1}^N f_{ij}}.$$

According to the discrete Markov prediction model established in the previous section, we know that today’s air quality level is greatly affected by yesterday’s air quality level.

In order to have more information in advance, better predict the air quality index and find more changes and development laws of AQI data over time, in the next sections we will build a simple exponential smoothing model and Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) time

series model through time series analysis to predict its air quality in the short term in future.

3.2. Exponential smoothing method. Exponential smoothing method is to use time series forecasting model to predict future phenomena by calculating exponential smoothing coefficients, The simplest of the exponentially smoothing methods is naturally called simple exponential smoothing. This method is suitable for forecasting data with no clear trend or seasonal pattern. Exponential smoothing method calculates the predicted value through a weighted average, where the weight decreases exponentially as the observation value changes from early to late, and the smallest weight is related to the earliest observation [3]:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1 + \alpha)y_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{T-2} + \dots$$

where $0 \leq \alpha \leq 1$ is the smoothing parameter.

The predicted value for the time point $T + 1$ is the weighted average of all observations in the time series y_1, \dots, y_T . The rate of weight drop is controlled by the parameter α . Therefore, it can be written as:

$$\hat{y}_{t+1|t} = \alpha y_t + (1 + \alpha)y_{t|t-1}.$$

3.3. Autoregressive integrated moving average. The modelling process mainly includes stationarity testing, model identification, parameter estimation, model testing and comparison. Based on the autocorrelation analysis of time series, ARIMA model estimates the data set taking into account the trend and the seasonal components.

Analyzing the autocorrelation and partial autocorrelation coefficients of the time series itself and different lag periods, namely the *autocorrelation function* (ACF) and *partial autocorrelation function* (PACF) the parameters of ARIMA model are estimated. The ARIMA(p, d, q) model has the following structure [4]:

$$\begin{cases} (1 - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) \nabla^d x_t = (1 + \Theta_1 B + \dots + \Theta_q B^q) \varepsilon_t, \\ E(\varepsilon_t) = 0, \quad \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \ (s \neq t), \quad \text{cov}(X_s, \varepsilon_t) = 0 \ (\forall s < t), \end{cases}$$

where B is delay operator, ϕ_i is autoregressive coefficient, Θ_i is moving average coefficient.

The determination of parameters in the model is closely related to the autocorrelation function and partial autocorrelation function. ACF

and PACF are important reference indicators for judging which model the sequence is suitable for. In ARIMA(p, d, q), AR is “autoregressive”, p is the number of autoregressive terms; MA is “moving average”, q is the number of moving average terms, and d is the number of differences made to make it a stationary series.

3.4. Decision tree regression model. In order to extract all the information in the dataset and better predict the air quality index of Peking in the future, I built three machine learning models. We combined the main pollutant data and meteorological data from 2018.1.1 to 2021.6.30 as the independent variable, and the AQI data as the dependent variable. 80% of the data is extracted as the training set, and the remaining 20% of the data is used as the test set [5].

In the decision tree model, we use regression decision trees to predict air quality index. A regression tree corresponds to a partition of the input space (ie, the feature space) and the output value on the partition unit. In the classification tree, we use the method in information theory to select the best dividing point by calculation. In the regression tree, if we have n features, and each feature has values, then we traverse all the features, try all the values of the feature, and divide the space until the value s of the feature j is obtained, so that the square loss function is the smallest, so a dividing point is obtained.

$$\min_{j,s} \left[\min_{c_1} \sum_{x_i \in R_1(j,s)} (y_i - c_1)^2 + \min_{c_2} \sum_{x_i \in R_2(j,s)} (y_i - c_2)^2 \right],$$

where R_i is divided areas, c_i is average value of the actual value of the divided area, j is feature, s is corresponding to the available division points for each feature.

3.5. K-nearest neighborhood. K-nearest neighborhood, referred to as KNN, is a theoretically mature machine learning algorithm. KNN can be used for classification and regression. In the classification task, the voting method can be used to select the category label that appears the most among the K samples as the prediction result; in the regression task, the average method can be used, and the average value of the real-valued output labels of the K samples can be used as the prediction result. For a given test sample, find the K closest training samples in the training set based on the distance metric (Euclidean distance), and then make predictions based on the information of these K “neighbors”.

3.6. Random forest model.

1. Using the idea of bagging, randomly generate a subset of training samples.
2. Using the idea of random subspace, randomly extract f features, and select the optimal feature from them to split nodes and build a single decision subtree. When the node is splitted, for the regression model, a regression tree is built based on the mean square error; for a classification model, a classification tree is built based on the Gini index [6].
3. Repeat steps (1) and (2) to establish T decision subtrees, each tree grows freely without pruning, thus forming a forest.
4. Combine the predictions of T decision subtrees to get the final result. For the regression model, the averaging method is adopted; for the classification model, the voting method is adopted.

4. Result comparison. We use the P , $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ of the Markov model to only predict the air quality level of P in the last three days. The predicted results are exactly the same as the actual values, and the air quality levels are all two, but by calculating the steady-state probability, we can macroscopically explain the development of air quality in Beijing in the future trend, By comparing with the current percentage of AQI levels. The prediction results show that the air pollution status of Beijing will slightly improve in the future, But the probability of AQI levels 5 and 6, which are the most harmful to humans, has increased.

Table 2. The percentage of each level of AQI

	1	2	3	4	5	6
The percentage of each level of AQI (%)	24.28	44.24	21.53	6.97	2.70	0.23
the steady-state probability (%)	24.29	44.20	21.55	6.97	2.74	0.24

In the two established time series models, we forecast the AQI data for the next ten days respectively. We found that the prediction results of the ARIMA model are more accurate, as shown in the following Table 3.

Table 3. Time series model comparison

	Day1	Day2	Day3	Day4	Day5	Day6	Day7	Day8
Actual value	82	100	81	68	80	95	110	86
modell	89	89	89	89	89	89	89	89
ARIMA	92	91	86	81	90	88	89	81

The ARIMA model is used to predict the air quality index in the next eight days. By calculating the MSE of the prediction results of the two models separately, we find that the ARIMA model MSE equal to 96.8 is much better than the simple exponential smoothing model's 124.5 in the first eight days of prediction, so the ARIMA model can be used to predict the short-term air quality index.

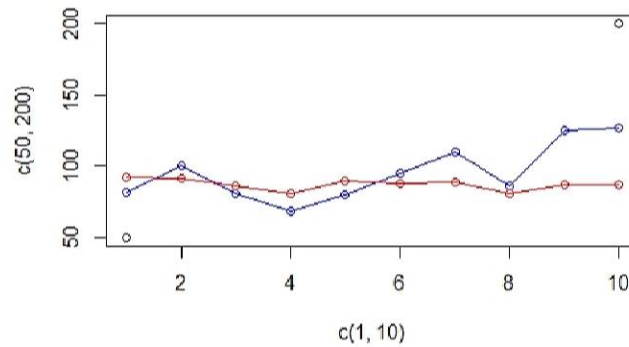


Figure 1. Comparison of actual and predicted values of ARIMA model

Then we compare the three machine learning models, we evaluate the quality of the model by calculating Mean Absolute Error, Mean Squared Error, Root Mean Squared Error and Mean Absolute Percent Error. We found that the predictive power of the random forest model was significantly better than of the other models:

Table 4. Machine learning model

Model	MAE	MSE	RMSE	MAPE
Decision Tree Regression	2.09	58.18	7.63	2.47
KNN	8.14	161.78	12.72	10.62
Random Forest	1.42	25.44	5.04	1.79

Visualize the prediction results of the three models, the red line is the predicted value, and the green line is the actual value as shown in Figure 2–4 below.

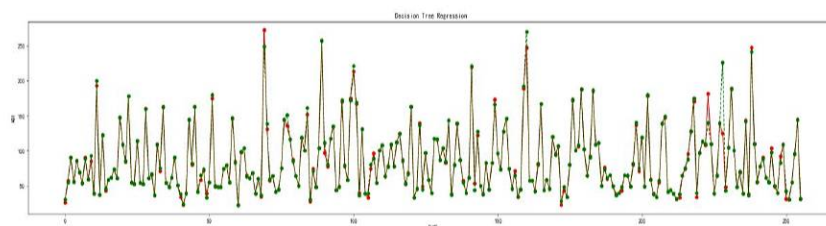


Figure 2. Comparison of actual value and predicted of decision tree regression

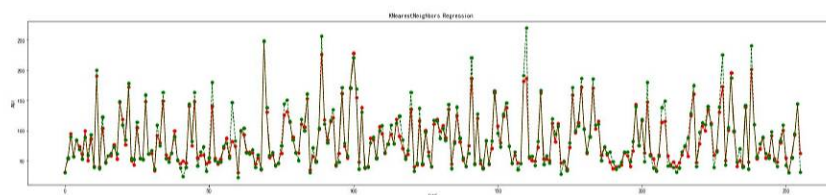


Figure 3. Comparison of actual value and predicted value of KNN model

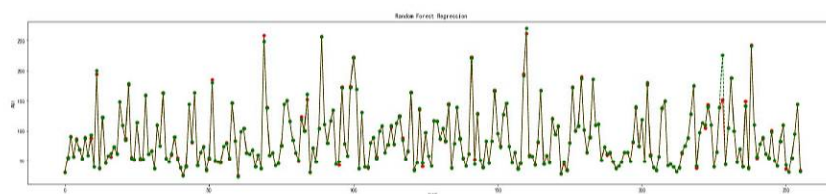


Figure 4. Comparison of actual and predicted values of random prediction forest

Finally, By comparing all models, we found that the machine learning model is better than the traditional prediction model, and the random forest model is the best among all the models we established to predict the air quality index in Peking.

References

1. Walsh K., Sherwell J. Estimation of ambient PM2.5 concentrations in Maryland and verification by measured values // *Journal of the Air & Waste Management Association*. 2002. Vol. 52. No 10. P. 239–248.
2. Taha H. A. *Operations research: an introduction*. 10th ed. Edinburgh Gate: Pearson Education Limited, 2017. 843 p.
3. Mishra D., Goyal P., Upadhyay A. Artificial intelligence based approach to forecast PM2.5 during haze episodes: A case study of Delhi, India // *Atmospheric Environment*. 2015. Vol. 102. P. 239–248.
4. Wei W. W. S. Time series analysis // *The Oxford Handbook of Quantitative Methods in Psychology: Vol. 2: Statistical Analysis* / Edited by Todd D. Little. NY: Oxford University Press, 2013.
5. Seko A. et al. Representation of compounds for machine-learning prediction of physical properties // *Physical Review B*. 2017. Vol. 95. Art. no 144110.
6. Ben Chaabene W., Flah M., Nehdi M. L. Machine learning prediction of mechanical properties of concrete: Critical review // *Construction and Building Materials*. 2020. Vol. 260. Art. no 119889.

UDC 330.5.057.7

Wang D., Guo Z.

Calculation of the main macroeconomic parameters of the China's economy based on the Leontief table

Recommended for publication by professor Smirnov N. V.

1. Introduction. Data onto the input-output table (IOT) [1] enables us to assess the economic efficiency by industry and the economy as a whole, assessing large-scale economic projects of social significance, and predicting trends in the economic development processed to improve development policy [2]. This paper mainly revises the data onto China's IOT, reduces the model, and analyzes the impact on the wage rate of the economy. The conclusion is that employee compensation is low and the relative cost of China's government officials is lower. We need to raise the wage rate, especially about government workers, and it is not affecting the economic benefits.

2. Preparation of data based on China's official data. For the China's IOT [3], We make the following corrections to fit the model. This gives the modified table [4].

The first quadrant of the IOT is (42×42) -matrix of production sphere Ap with elements p_{ij} (*Yuan*). The elements of this matrix are given by expression $p_{ij} = P_i a_{ij} I_{n_j}$. They are a product of the price of the consumed product P_i (*Yuan/i-unit*), technological coefficient a_{ij} (amount i -product/ j -unit) and the annual production I_{n_j} (amount j -product) of j -sector. a_{ij} determines the amount of i -sector product needed for j -sector per year and characterizes the perfection of technologies. All diagonal elements p_{jj} are the costs of each industry's own needs. The elements sum of each column of matrix Ap is equal to the value of internal consumption P_{p_j} in j -sector. p_{ij} determines the production cost. The total output X_i of the i sector is equal to the difference between the original total output T_i and the government consumption V_b [4]. Then final consumption $Y = X_i - P_{p_j}$. The second quadrant of the IOT are 43-column of costs of the final consumption $Y = (Y_1, \dots, Y_{42})^T$.

Wang Dan – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st102920@student.spbu.ru, phone: +7(981)806-33-95

Guo Zhao – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st097122@student.spbu.ru, phone: +7(981)683-74-98

The third quadrant of the IOT is V . Its elements V_j is indicators of added values. V_j created in every economy sector is determined by the difference between the expected value of the annual output $I_j = P_j I_{n_j}$ in the j -sector and the value of internal consumption P_{p_j} , i.e. $V_j = I_j - P_{p_j}$. It includes four components. The first are employee compensation W_j . The second is valuing of taxes T_{x_j} . The third is fixed asset depreciation W_{dv_j} . The fourth is the net operating surplus P_{rh_j} . Finally, the sum of the cost of internal consumption and the compensation of employees is the operating costs $P_{c_j} = P_{p_j} + W_j$. Then $P_{r_j} = T_{x_j} + W_{dv_j} + P_{rh_j} - V_b$. The fourth quadrant of the IOT is the national budget V_b [4].

3. Model reduction. The scalar form of Leontief's IO model is the following [2]:

$$\begin{cases} (1 - r_{11})I_1 - r_{12}I_2 - \dots - r_{1m}I_m = Y_1, \\ -r_{21}I_1 + (1 - r_{22})I_2 - \dots - r_{2m}I_m = Y_2, \\ \dots\dots\dots \\ -r_{m1}I_1 - r_{m2}I_2 - \dots - (1 - r_{mm})I_m = Y_m. \end{cases}$$

Consider auxiliary vectors $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$. These vectors are divided into two groups, remaining types of products and cancelled products [2]:

$$\begin{cases} (E_1 - R_{11})\mathbf{I}_1 - R_{12}\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_1, \\ -R_{21}\mathbf{I}_1 - (E_2 - R_{22})\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_2, \end{cases}$$

where, E_1, E_2 are identity matrices of size $n \times n, (m - n) \times (m - n)$, and

$$\mathbf{I}_2 = (E_2 - R_{22})^{-1}\mathbf{Y}_2 + (E_2 - R_{22})^{-1}R_{21}\mathbf{I}_1.$$

Simplified matrix is $R_V = R_{11} + R_{12}(E_2 - R_{22})^{-1}R_{21}$, and the reduction model:

$$(E_1 - R_V)\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_V.$$

According to the revised 2015 China's IOT [3] and six ($n = 6$) important industries we calculate:

$$R_V = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.01 & 0.02 & 0.02 & 0.01 & 0.02 \\ 0.14 & 0.41 & 0.03 & 0.03 & 0.01 & 0.01 \\ 0.08 & 0.02 & 0.05 & 0.04 & 0.02 & 0.02 \\ 0.09 & 0.03 & 0.07 & 0.19 & 0.04 & 0.03 \\ 0.07 & 0.06 & 0.08 & 0.10 & 0.09 & 0.02 \\ 0.08 & 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.01 & 0.19 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_V = \begin{pmatrix} 488428995 \\ 489440225 \\ 811608282 \\ 653740242 \\ 630664131 \\ 994975904 \end{pmatrix}.$$

Table 1 presents the data of the most aggregated model to the sphere of production and sphere of consumption.

Table 1. Combined matrices \widetilde{AP} and \widetilde{R} of the economy aggregation

Consumers → Producer ↓	Sphere of production	Sphere of consumption	Annual Output
Sphere of production Relates cost	$P_p = 14011923983$ $R_p = 0.7261063$	$Y = 5832006995$ $Y_r = 0.8573277$	$I_s = 19843930978$
Added value Relative added value	$V = 5832006995$ $V_r = 0.3428021$	$V_b = 970534166$ $rg = 0.1426723$	$I_A = 6802541161$
Annual Output	$I_s = 19843930978$	$I_A = 6802541161$	$I_{ss} = 26646472139$
Employee compensation Relative compensation	$W = 3541099852$ $W_r = 0.1784475$	$W_b = 37120000$ $W_{rb} = 0.0054567$	$rw = 0.6071837$ $K_b = W_b/W$ $= 0.01048262$
Profit before taxes Relative profit	$P_{rp} = 2290907143$ $P_{rr} = 0.1154462$	$P_{rb} = 933414166$ $P_{rrb} = 0.1372155$	$P_r = 3224321309$
Operating cost Relative operating cost	$P_{cp} = 17553023835$ $R_{sp} = 0.8845538$	$P_{cb} = 5869126995$ $R_{sb} = 0.8627845$	$P_c = 23422150831$ $R_s = 0.8789963$
Profitability	$R_{nt} = 0.1305135$	$R_{ntb} = 0.159038$	$R_{nt0} = 0.1376612$

4. Calculation and analysis of the main parameters.

4.1. The dependence on the relative cost R_{sp} on the wage rates rw . Value rw , as a share of added value, is determined by the ratio

$$rw = \frac{W}{V} = \frac{W}{I_s(1 - R_p)} = 0.6071837, \quad rw \in [0, 1],$$

where R_p is the relative intermediate consumption.

$$W_r = \frac{W}{I_s} = rw(1 - R_p) = 0.1784475,$$

$$R_{sp} = R_p + W_r = R_p + rw(1 - R_p) = 0.88. \quad (1)$$

- When $rw = 0$ in (1), this means there is no compensation for employees, $R_{sp} = R_p = 0.7061063$. The profit rate R_{nt} is the largest.
- When $rw = 1$, it means all V is paid wages, $R_{sp} = 1$, $R_{nt} = 0$.

Conclusion 1: when $rw < 1$, the production sector of the economy is profitable; when $w \rightarrow 0$, the profitability increases and reaches its maximum value $R_{nt_{max}} = \frac{1}{R_p} - 1 = 0.4162174$ for $rw = 0$.

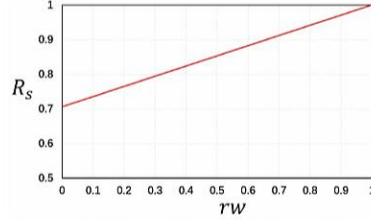


Figure 1. Dependence of R_{sp} with rw

4.2. The dependence on the relative cost of the consumption R_{s_b} on the wage rates rw .

The indicator of R_{s_b} also depends linearly on the rw , it is also determined by the generalized tax rate rg and the budget burden factor K_b . Taking into account formulas $Y_r = \frac{Y}{I_4} = 1 - rg = 0.857$,

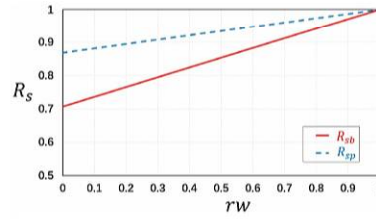


Figure 2. Dependence of R_{sp}, R_{s_b} with rw

$$W_{r_b} = \frac{W_b}{GDP} = \frac{rwV_{k_b}}{GDP} = \frac{(1-rg)GDPPrwK_b}{GDP} = (1-rg)rwK_b,$$

$$R_{s_b} = Y_r + W_{r_b} = (1-rg)(1+rwK_b) = 0.8627845. \quad (2)$$

• At $rw = 0$, the R_{s_b} is minimal, $R_{s_b} = 1 - rg = 0.8573277$, and the profitability of the consumption sector reaches its maximum.

$$R_{nt_{b,max}} = \frac{1}{1-rg} - 1 = \frac{1}{1-0.1426723} - 1 = 0.1664.$$

• At $rw = 1$, $R_{s_b} = 0.8680909$. If $R_{s_b} = 1$, therefore $R_{nt_b} = 0$.

$$\begin{cases} (1-rg)(1+rwK_b) = 1, \\ rw = \frac{1}{K_b} \left(\frac{1}{1-rg} - 1 \right). \end{cases} \quad (3)$$

Value $rg = 0.1426723$ (see Table 1), therefore, straight line (2) cuts off the segment $1 - rg = 0.8573277$ on the R_s axis.

Conclusion 2: The consumption sector of the economy is profitable when fulfillment of the condition.

$$rw < \frac{1}{K_b} \left(\frac{1}{1 - rg} - 1 \right).$$

Example. As follows from (1), (2) (Fig. 2) at $rw = 0.6071837$, $R_p = 0.7061063$ and $R_{sp} = 0.8845538$. Therefore, the profitability is $R_{nt} = 0.1305135$. With $rg = 0.1426723$, $R_{sb} = 0.8627845$, the profitability is $R_{ntb} = 0.159038$. With $rg = 0.1426723$ and $K_b = 0.01048262$, formula (3) can

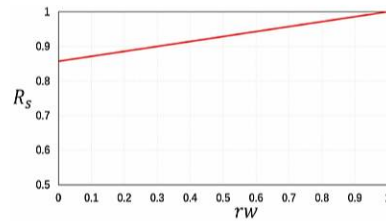


Figure 3. Maximum allowed value of wage rate rw

be used to find the maximum $rw = 16.8753373$. It means that profitability does not turn negative at higher wage rates.

5. Conclusion and future research. We need to raise the wage rate, especially for government workers, and it will not affect economic efficiency. In the future, we will base on the revised China's IOT, differential equations and research analysis under cybernetics.

References

1. Leontief W. W. Interindustry Economics / Per. s angl. A. G. Granberg. Moscow: Economics, 1997. 479 p.
2. Interindustry balance: analysis of dynamics and control of macroeconomic trends / Smirnov N. V., Peresada V. P., Smirnova T. E. et al. Under edit. N. V. Smirnov. St. Petersburg: Lan, 2021. 180 p.
3. National Bureau of statistics of the People's Republic of China [Internet resource]: URL:<https://data.stats.gov.cn/ifnormal.htm?u=/files/html/quickSearch/trcc/trcc01.html&h=740> (date: 01.03.16).
4. Revised input-output table of China in 2015 [Internet resource]: URL:<https://github.com/GuoZhao1998/CPS/blob/main/table.csv> (date: 18.03.22).

UDC 519.7

Wu Y., Ye P.

Investigation of optimal pollution control problem with regime shifts

Recommended for publication by professor Sotnikova M. V.

1. Introduction. Among many mathematical models describing the complex character of processes arising in ecological systems, the pollutant-emission control model plays an important role. We note that a class of hybrid dynamic systems with (potentially) infinite regime switches has been studied [1]. However, no explicit solutions were found. After the research in [2], in which a hybrid limit cycle (HLC) has been explicitly found as a solution of a hybrid optimal control problem. We consider a discounted hybrid optimal pollution control problem, with time-driven switching (a system that undergoes regime changes at fixed time instants), such that the regenerative ability of the environment changes with time. Furthermore, we consider the realistic meaning and set the control variables within the admissible set. In this setting, this consideration, based on sustainability, of taking into account environmental protection and production profits is called *environmentally sustainable*. At the same time, we constrain the instantaneous payoff to be positive by modifying the production strategy, we formed a new “myopic” solution, the short-run profit increases at the cost of environmental degradation, but in the long run this leads both to a critically polluted environment and a negative profit stream. By comparing with sustainable optimal solution, we claim that a control bounded to lie within the interior of the admissible set is the only one which is both profit-maximizing and environmentally sustainable.

2. Problem statement and optimal control. We consider the pollutant-emission control model [3], the dynamics of the stock of pollution are governed by the linear differential equation

$$\dot{z} = \xi v - \delta z, \quad z(0) = z_0, \quad (1a)$$

Wu Yilun – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: wuyilun310@gmail.com, phone: +7(921)580-95-63

Ye Peichen – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: 1452756778@qq.com, phone: +8617829111519

where z is the amount of pollutants in the lake, v is the emission rate of the company, for simplicity, we assume that there is a single source of pollution, so the polluting agent is responsible for the whole amount of pollution. $\xi \in (0, 1)$ is the fraction of the emitted harmful substance that gets accumulated in the lake, and $\delta > 0$ is the self-cleaning rate of the lake. From (1a) the amount of pollutants $z(t)$ in the lake increases with the company's pollutants emission $v(t)$, whereas a fraction ξ of those pollutants is translated into an increase of the pollution stock, and latter decays over time at the self-cleaning rate δ .

The profit function $P(v) = av(b-v/2)$, and then the payoff functional is defined as the discounted net profit $L(v, z) = P(v) - qz$ obtained by the agent in the problem with infinite time horizon:

$$\bar{J}(z_0) := \max_{v(\cdot)} \int_0^\infty e^{-rt} \left[av(t) \left(b - \frac{1}{2}v(t) \right) - qz(t) \right] dt, \quad (1b)$$

where b is the maximal admissible emission rate, the expression $v(b-v/2)$ describes the rate of production, the coefficient a is used to transform the flow of production to the flow of profit, q is a positive constant, corresponding to the fines the agent has to bear (e.g., an ecotax), $r > 0$ is the discount rate, and the control input satisfies $v(t) \in [0, b]$ for all $t \geq 0$. Furthermore, we have that for all $z_0 \geq 0$ the state $z(t)$ is non-negative. The problem (1) is normalized by introducing new state and control variables: $u(t) = \frac{1}{b}v(t)$, $x(t) = \frac{q}{ab^2}z(t)$.

After the normalization, both the control $u(t)$ and the state $x(t)$ are now dimensionless. The optimal control problem (1) can be written as follows:

$$J(x_0) := \max_{u(\cdot)} \int_0^\infty e^{-rt} \left[u(t) \left(1 - \frac{1}{2}u(t) \right) - x(t) \right] dt, \quad (2a)$$

$$\dot{x} = \beta u - \delta x, \quad x(0) = x_0. \quad (2b)$$

Here $\beta = \frac{\xi q}{ab} > 0$, the state $x(t)$ is non-negative, and control input $u(t) \in [0, 1]$ for all $t \geq 0$. Because in environmental systems, the regeneration rate varies periodically over time (e.g., over the summer and winter seasons). So the key assumption in this paper we made is that the self-clean rate δ in (2b) changes as a function of time, and the whole time interval $H = [0, \infty)$ is divided into an infinite number of equal intervals of length T , and in which interval is subdivided into two parts: $[k, k+\alpha)T$

and $[k + \alpha, k + 1)T$, where $\alpha \in (0, 1)$ and $k \in \mathbb{N}_0$. When system located in the first time subinterval, the system is in the first mode, $\delta = \delta_1 \geq 0$, while system located in the second time interval, the system is in the second mode, $\delta = \delta_2 \geq 0$. And $\delta_1 \neq \delta_2$, otherwise the assumption becomes meaningless.

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta_1 \geq 0, & t \in [kT, kT + \alpha T), \\ \delta_2 \geq 0, & t \in [kT + \alpha T, (k + 1)T). \end{cases} \quad (3)$$

As it is widely accepted that the nature's regenerative capacity undergoes seasonal variations, the self-cleaning rate of the lake δ changes with periodic regime shifts, and the company aims at achieving the best trade-off between maximizing the profit and bearing the fines (ecotax) of environmental deterioration at the same time. So it is important to determine the optimal control strategy, so that the control is environmentally sustainable.

By using Pontryagin's Maximum Principle, over each interval, where the coefficient δ takes a constant value, the current Hamiltonian function takes form

$$H(x, \lambda, t) = u(t)(1 - \frac{1}{2}u(t)) - x(t) + \lambda(t)(\beta u(t) - \delta x(t)), \quad (4)$$

where $\lambda(t)$ is the current value of the adjoint variable. The canonical system is

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \beta u - \delta x, \quad (5a)$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{\partial H}{\partial x} = r\lambda + 1 + \delta\lambda, \quad (5b)$$

with δ given by (3). The optimal control is determined as

$$u^*(t) := \begin{cases} 0, & \lambda(t) < -1/\beta, \\ 1 + \beta\lambda, & \lambda(t) \in [-1/\beta, 0], \\ 1, & \lambda(t) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Definition 1. The optimal strategy $u^*(t)$ is said to be environmentally sustainable if it does not take on boundary values except at isolated instants of time, i.e., $\lambda(t) \in [-1/\beta, 0] \forall t \geq 0$.

The motivation behind such a notion is as follows. The two boundary values are interpreted in this way: When the loss of the company due to ecotax exceeds the profit from production, company had to halt the production ($u = 0$) in order to naturally reduce the level of pollution to be below the level determined by the current production in the lake to reduce the ecotax so as to allow normal production. When the level of pollution is low enough, company can produce at maximum rate without bearing a high ecotax. To implement the environmentally sustainable strategy, this two situation only can happen in isolated instants of time.

Lemma 1. *If the initial value $\lambda(0)$ is equal to $\lambda(T)$, which obtains the equilibrium value λ_{eq} , The solution of $\lambda(t)$ asymptotically approaches the hybrid limit cycle, This limit cycle is located within the interval $[\min(-\frac{1}{\delta_1+r}, -\frac{1}{\delta_2+r}), \max(-\frac{1}{\delta_1+r}, -\frac{1}{\delta_2+r})]$.*

Figure 1 shows the optimal control, the evolution of the state, and the instantaneous profit for two types of solutions.

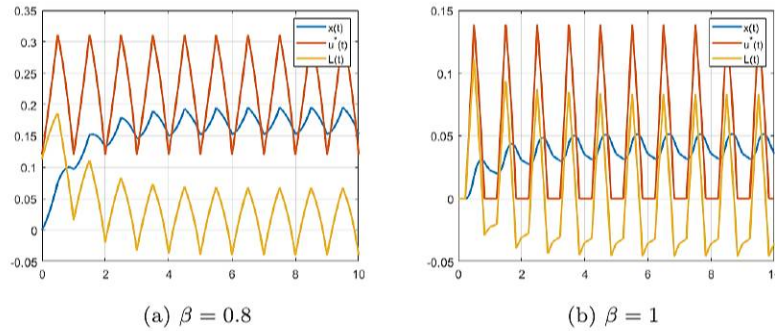


Figure 1: Level of pollution $x(t)$, optimal control $u^*(t)$, and the instantaneous profit $L(t)$ for different values of β . Other values of the parameters are set to $x(0) = 0$, $\delta_1 = 0.5$, $\delta_2 = 1.5$, $r = 0.03$, and $t_s = 0.5$.

In Figure 1a, the case of $\beta = 0.8$, it can be seen that the control never turns to zero, so production is ongoing. The instantaneous profit still can be negative for some periods, but the overall profit remains positive. The level of pollution, after an initial increase, converges to a stable cycle. Figure 1b illustrates the case of $\beta = 1$, where we observe periods of production halt ($u(t) = 0$), because β is higher, which results in a

more stringent environmental regulation (ecotax), and generates more negative instantaneous profit areas.

3. Myopic solution and comparison. To show the long-term advantage of the environmentally sustainable solution, we formed a myopic strategy. If the company only focuses on instantaneous profit, and aversion to negative instantaneous profit, which means the company keeps the instantaneous profit nonnegative ($L(t) \geq 0$):

$$u(t) \in [1 - \sqrt{1 - 2x}, 1]. \quad (7)$$

Note that if $x > 1/2$, the company takes its maximum production rate to compensate for negative instantaneous profit as much as possible, where in this situation it inevitably becomes negative for some period. From the constraint (7), we formulate the myopic control strategy.

$$\tilde{u}^*(t) := \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2x}, & -\beta\lambda(t) \geq \sqrt{1 - 2x} \text{ and } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \lambda(t) > 0 \text{ or } x > \frac{1}{2}, \\ 1 + \beta\lambda(t), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

The resulting optimal control problem is well defined, as the dynamics of $\lambda(t)$ is decoupled from both the state $x(t)$ and the control $u(t)$. The resulting plots are presented in Figure 2a.

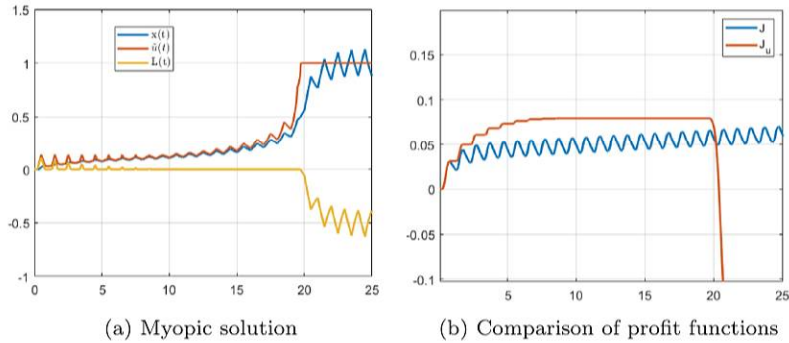


Figure 2: The myopic solution (left) and compare the two payoff functions for the optimal control and the myopic control (right)

From 2a, we observe that when $x > 1/2$, the production profit ($u(1 - \frac{u}{2})$) can not compensate the ecotax($-x$). The decision maker (company) have to apply maximum production rate ($u = 1$) to keep losses, due to the environmental deterioration, as low as possible. As we can see that in 2b, at the initial stage, the “myopic” solution dominates the optimal one, but at some time point it leads to a critical level of pollution, at which production must be stopped and instantaneous profits become negative due to the ecotax, and the cumulative profit decreases drastically.

4. Conclusion. In this paper, we consider a hybrid optimal pollution control problem. Based on the assumption under seasonal fluctuations δ (the regenerative capacity of the environment), we obtained a unique optimal solution in form of hybrid limit cycle. And determined the condition to ensure the environmentally sustainable optimal control strategy. To show the superiority of this strategy, we considered a “myopic” control strategy.

After comparison various types of optimal and myopic solutions, in the short term the myopic solution provides a better payoff, but at the cost of environmental deterioration. However, in the long term, the sustainable solution provides higher payoff due to the more conservative use of environmental resources. we conclude that environmentally sustainable solution is the only solution that maximizes profits and is environmentally acceptable over a long planning interval.

References

1. Caines P., Egerstedt M., Malhame R. et al. A hybrid Bellman equation for bimodal systems // Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2007). Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 4416. P. 656–659.
2. Gromov D., Bondarev A., Gromova E. On periodic solution to control problem with time-driven switching // Optimization Letters. 2021. P. 1–13.
3. Dockner E. J., Jorgensen S., Long N. et al. Differential Games in Economics and Management Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 388 p.

UDC 519.876.5

Zhao C.

A simple variant of concealed voter model

Recommended for publication by professor Parilina E.

1. Introduction. Modeling of the opinion dynamics is a research area mainly focused on studying the evolution of opinions in the social network caused by the interaction between individuals. Opinion dynamics models are usually composed of a few essential elements [3]: opinion expression formats – how to represent opinion mathematically, fusion rule – how individuals interact with each other, opinion dynamics environments – the structure of such a social network.

In a social network, individuals will neither fully accept nor completely ignore the opinion of other individuals. To a certain extent, they will consider these opinions in forming their new opinion in a process defined by a fusion rule. Through group interaction, individuals continuously update and integrate their opinions on the same issue. Eventually, there are three varieties of stabilized fusion results – consensus, polarization, fragmentation, and one unstable fusion result – oscillation. [4]

We will call the model proposed by Holley and Liggett in 1975 as BVM (Basic voter model) [5], the model proposed by Gastner et al. in 2018 as BCVM (Basic concealed voter model) [1]. The concise introduction of these two models is provided in Section 2. This article assumes individuals can interact in the internal layer, which is a more general assumption than BCVM. We assume this because individuals always share their real opinion with their close friends. Therefore, we call BCVM with internal layer interaction as GCVM. The description of BVM, BCVM, and GCVM can be found in Section 2 and 3, respectively. We applied the Monte Carlo method to simulate these three opinion dynamic models under a complete network with 400 nodes in Section 4. Finally, we briefly summarize the current work and outlook for the future research.

2. The basic/concealed voter model. This article assumes each individual may have one of two opinions – red or blue. Before introducing the GCVM, we briefly introduce the concept and the fusion rule of BVM and CVM.

Zhao Chi – PhD student, Saint Petersburg State University; e-mail: st081292@student.spbu.ru, phone: +7(999)030-66-66

2.1. Basic voter model. As shown in Figure 1, there is only one layer in the BVM because BVM assumes everyone will express their opinion publicly.

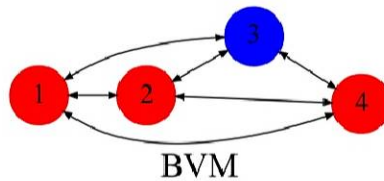


Figure 1. A representation of a BVM with 4 individuals

In the BVM, we represent the state of each individual as r – red opinion or b – blue opinion. At each time step t , an individual k is selected with one of its neighbors, say v . Then individual k will copy individual v 's opinion with probability c . The state of the BVM system can be represented as the rate of red opinion $\rho = \frac{r}{N} \in \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, where N is the number of individuals, and r is the number of individuals with the red opinion. It is not hard to represent changing between each state by a $(N + 1) \times (N + 1)$ stochastic or transition matrix.

2.2. Basic concealed voter model. Different from BVM, BCVM considers an additional internal layer in the network. In the BCVM, each individual is represented by a pair of nodes rather than a node in BVM. An example of BCVM is shown in Figure 2. The con-

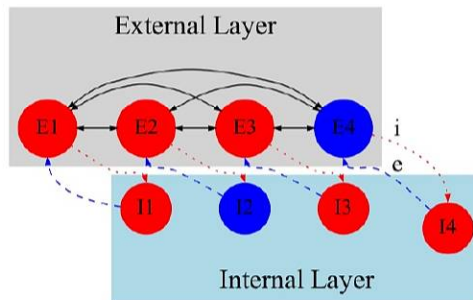


Figure 2. A representation of a BCVM with 4 individuals

cept of hypocrisy was introduced in the CVM. Hypocrite is an individual with different internal and external opinions. In addition to the copying mechanism in BVM, BCVM assumes a special mechanism for hypocrites. Hypocrites can reduce their cognitive dissonance [6] by externalization – express their internal opinion, or internalization – accept their external opinion. We define the externalization rate e – the probability of hypocrites choosing to express their internal opinion publicly, and the internalization rate i is also given.

The state of the BCVM is represented by a triple $(\rho_{re}, \rho_{ri}, \rho_r)$. Where $\rho_{re} = \frac{re}{N}$, $\rho_{ri} = \frac{ri}{N}$, $\rho_r = \frac{r}{N}$ represent the rate of external, internal and both layer red opinion, respectively. Correspondingly, re, ri, r represents the number of individuals with external, internal, and both layer red opinion. The state of each individual is represented as the combination of R, B and r, b , that is, Rr, Rb, Bb, Br , where capital letters denote the external layer. Therefore, the shape of the stochastic matrix and transition matrix of the BCVM is $(N + 1)^3 \times (N + 1)^3$. The BCVM uses the strength of red opinion $m(\rho_{re}, \rho_{ri}) \in [0, 1]$ instead of the proportion of red opinion to represent the overall strength of the red opinion, that is:

$$m(\rho_{re}, \rho_{ri}) = \frac{i\rho_{re} + e\rho_{ri}}{e + i}. \quad (1)$$

3. General concealed voter model. The idea of GCVM is straightforward. We assume there exist connections in the internal layer. It is reasonable that everyone has their close friends and would like to share his or hers real opinion with the close friends. Therefore, a people and his or hers friends can form a group – specifically, a clique – in the network. Cliques are in the internal layer, and individuals never share information with others outside the clique except they have connections.

In this paper, we consider the simplest case of GCVM, when both external and internal layers are complete networks, as Figure 3 shows.

The GCVM and the BCVM share the same notation. The GCVM has an internal interaction, which influences the internal opinion's transition process. In the CVM, the changing of internal opinion can only be performed by internalization. In the GCVM, internal opinion is changed by internalization and the interaction between internal nodes. For example, non-hypocritical (individuals with state Bb, Rr) can not change their state to Br, Rb in BCVM, but it is possible in GCVM.

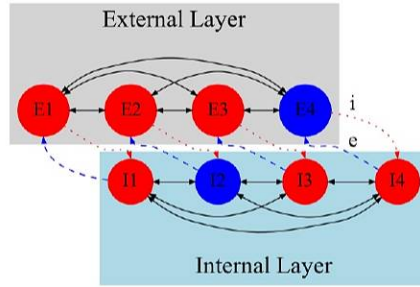


Figure 3. A representation of a GCVM with 4 individuals – the symmetric case

4. Experiments. We run 500 times with parameters $\rho = \frac{300}{400} = 0.75$ in the BVM and $m = \frac{0.50 \times \frac{300}{400} + 0.01 \times \frac{100}{400}}{0.01 + 0.50} \approx 0.740196$ in the BCVM and GCVM to get the results shown in Figure 4.

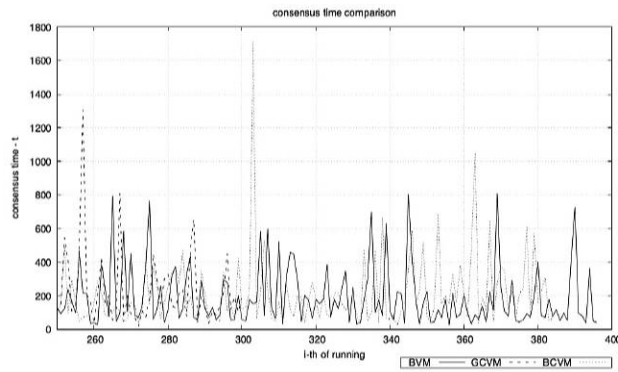


Figure 4. Consensus time in BVM, BCVM and GCVM

From Figure 4, we found the solid trajectory ends near 400, the dotted one is a bit shorter than the solid one, and the dashed one ends at around 300. The end of these three trajectories represents the number of victories of the red opinion in 500 simulations.

According to our simulation results, the observed winning rate of the BVM, BCVM, and GCVM are 0.794, 0.770, and 0.602, respectively. Papers [1, 2] already shown the corresponding expected winning rates of

the BVM and BCVM are equal to the strength(ratio) of the initial red opinion. However, for GCVM, this relationship does not any longer hold. We also found that the average consensus time of these three models has a relationship $T_{\text{BVM}} < T_{\text{BCVM}} < T_{\text{GCVM}}$.

5. Conclusion and future work. We have changed the interaction logic of BCVM and made some experiments for it. The next step of our research is to find the mathematical expression of consensus time and the winning rate of the red opinion in the GCVM. After that, we will split the internal layer into several cliques and add one link between each pair of cliques. Then, the internal layer and external layer will have different structures. We will focus on the opinion dynamics in such networks.

References

1. Gastner M. T., Oborny B., Gulyás M. Consensus time in a voter model with concealed and publicly expressed opinions // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2018. No 6. Art. no 063401.
2. Gastner M. T., Takács K., Gulyás M., Szvetelszky Z., Oborny, B. The impact of hypocrisy on opinion formation: A dynamic model // PloS one. 2019. Vol. 14. No 6. P. 1–21.
3. Dong Y., Zhan M., Kou G., Ding Z., Liang H. A survey on the fusion process in opinion dynamics // Information Fusion. 2018. Vol. 43. No 11. P. 57–65.
4. Hegselmann R, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation // Journal of artificial societies and social simulation. 2002. Vol. 5. No 3. P. 3–35.
5. Holley R. A., Liggett T. M. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model // The annals of probability. 1975. Vol. 3. No 4. P. 643–663.
6. Festinger L. A theory of cognitive dissonance. Stanford university press. 1962. 291 p.

UDC 519.83

Zhou J., Petrosian O., Tur A., Gao H.

Pollution control problem with dynamic uncertainty updating

Abstract

This paper is devoted to examining a dynamic pollution control game model with both uncertainty and dynamic updating, where each country's emitted pollution depends on pollution accumulation and its belief concerning the unknown parameter. The dynamic updating approach is applied to the game model with uncertainty to construct a model, where information about the process updates dynamically. In order to deal with the uncertainty, learning introduces the sources of risk, and renders control and learning non-separable. Therefore, we introduce the Nash equilibrium strategy with dynamic uncertainty updating of the game model with both uncertainty and dynamic updating.

1. Introduction. In an earlier work, the use of Bayesian inference rules in the context of binary expression of choices was explored. There, a continuous underlying probability was associated with each choice, resulting in the continuous opinions and discrete actions (CODA) model [1, 2]. Each agent had a continuous opinion, but only observed the discrete choices of its neighbors. In the paper [3], each agent i having a continuous opinion about the value of the unknown parameter. It considered the opinion of player assigns a likelihood to that value that is a mixture of a Gaussian and a uniform distribution. This represents the idea that the other agent might have no idea about what is being

Zhou Jiangjing – graduate student, Saint Petersburg State University; e-mail: st092028@student.spbu.ru, phone: +7(966)820-85-74

Petrosian Ovanes – associate professor, Saint Petersburg State University; e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru, phone: +7(911)740-80-19

Tur Anna – senior lecturer, Saint Petersburg State University; e-mail: a.tur@spbu.ru, phone: +7(911)428-42-86

Gao Hongwei – professor, Qingdao University; e-mail: gaohongwei@qdu.edu.cn, phone: +86053285953532

The work was performed with financial support of National Natural Science Foundation of China (No. 72171126)

talked about. They proved that depending on the probability of error and initial uncertainty, those opinions might be clustered around a central value. In our example, we considered a simple form, which we assume that the likelihood follow normal distribution, which means the other agent is sure about what is being talked about.

In the game models with dynamic uncertainty updating it is assumed that

1. the posterior belief of unknown parameter at the t stage is consistent with the prior distribution at the $t + 1$ stage.
2. the belief of each player doesn't change in the truncated subgame.
3. at each stage t , players have full information about the motion equations and payoff functions within \bar{T} stages, where \bar{T} is a fixed value, namely information horizon.
4. information about the game is updated dynamically. At the instant stage $t + 1$, players have full information about the game structure on the stages from $t + 1$ to $t + 1 + \bar{T}$.

In Fig. 1, each blue oval shows the information available to players at instant stage t , namely $\{t, t + 1, \dots, t + \bar{T}\}$, where \bar{T} is the information horizon.

The concept of the dynamic updating is new in game theory, especially in differential games, and it gives the foundation for further study of differential games with dynamic updating. The first time the dynamic updating was presented in the paper [4], it was applied to the cooperative differential game with finite-horizon. The paper [5] on the subject is focused on studying dynamic updating with stochastic forecast and dynamic adaptation in the case when information about the conflicting process can change during the game. In the paper [6] the dynamic updating was applied to a cooperative differential game of pollution control. In the paper [7] the dynamic updating was applied to the cooperative differential game with infinite-horizon. Papers [8] and [9] are devoted to study of cooperative differential games and non-cooperative dynamic games with infinite horizon where information about the process updates dynamically. However, in this paper, we consider applying dynamic updating to dynamic games defined in discrete time.

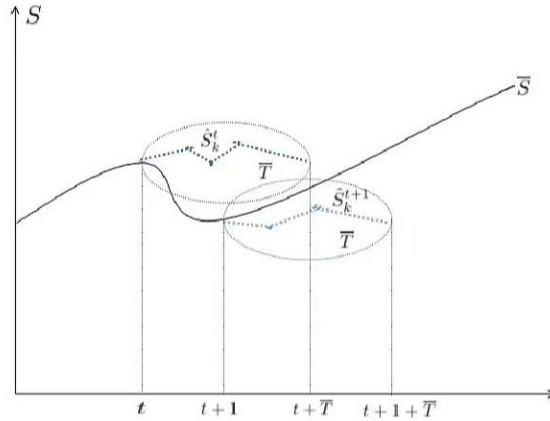


Figure 1. The solid line represents the real trajectory \bar{S}_t , where $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$. Dashed lines in the information horizon represent parts of the expected trajectory \hat{S}_k^t at each instant time t that are not used in the real, which $k \in \{t, t+1, \dots, t+\bar{T}\}$

There are two main innovations in this paper. First, the estimator of the unknown parameter is set as the conditional mathematical expectation of the unknown parameter condition on the distribution parameter which we estimated at each stage. Second, we creatively apply the idea of dynamic updating to infinite-horizon discrete dynamic games dealing with unknown parameters, similar to continuous-time differential games. In general, we can conclude that we are considering a new game model with uncertainty and dynamic updating at the same time.

2. The model. In this section, we embed learning in a dynamic game in which agents make pollution emitted decisions and at the same time learn about the stochastic process governing the evolution of the pollution. We first present the model and then we introduce the method how to handle this specific model.

We consider N countries or players, indexed by $i = 1, \dots, N$, each producing quantity $q_{i,t}$ of a representative good at time $t = 0, 1, \dots, \infty$. Production generates revenues and, as a byproduct, emissions, e.g., CO_2 . Denote by $u_{i,t}$ the emissions of country i at time t . We make the sim-

plifying assumption that the ratio of production to emissions is equal to one, that is, one unit of production emits one unit of pollution.

Emissions accumulate over time and damage the environment. Denote by S_t the pollution stock whose evolution is described by the following difference equation:

$$S_{t+1} = E(\tilde{\eta}|E(\theta)) \left(\sum_{i \in N} u_{i,t} + (1 - \delta)S_t \right), \quad S_{t_0} = S_0, \quad (1)$$

where $0 \leq \delta \leq 1$ is the natural decay rate of pollution, $\tilde{\eta}$ is a shock variable, in our case, it can be ecological uncertainty, which can be due to, among other things, lack of information about Mother Nature's capacity to absorb emissions [10]. $E(\tilde{\eta}|E(\theta))$ is the estimator of $\tilde{\eta}$ and $E(\theta)$ is the estimator of θ . Here η is a realization of the random production shock $\tilde{\eta}$. The p.d.f. of $\tilde{\eta}$ is $\phi(\eta|\theta^*)$ for $\eta \in H \subset R$, which depends on a parameter $\theta^* \in \Theta \subset R^N$.

The learning planner makes pollution decisions, while learning about θ . That is, endowed with initial pollution storage and beliefs, pollution emissions chosen. The shock η is then realized and the pollution stock, in the subsequent period, is determined from (1). Information is gleaned from observing η , which affects beliefs about θ .

Assuming a welfare maximization behavior over an infinite horizon, the optimization problem of player $i \in N$ is then stated as follows:

$$\max_{u_{i,t}} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left(u_{i,t} \left(a_i - u_{i,t} - \gamma \sum_{j \neq i}^N u_{j,t} \right) - b_i S_t \right) \quad (2)$$

subject to the pollution dynamics (1), where $\rho(0 < \rho < 1)$ is the common discount factor, $a_i, i \in N$ and γ are constants, $b_i, i \in N$, is the (positive) marginal cost of the pollution stock.

3. Truncated subgame with dynamic uncertainty updating.

For each given $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, $k \in \{t, t+1, \dots, t+\bar{T}\}$, the motion equation of subgame $\Gamma(S, t, t+\bar{T})$ is given as following:

$$S_{k+1}^t = E(\tilde{\eta}|E(\theta)) \left(\sum_{i \in N} u_{i,k}^t + (1 - \delta)S_k^t \right), \quad S_t^t = S_t = S, \quad (3)$$

where S_{k+1}^t is the state variable at the instant stage $k+1$, S is the

trajectory at the instant time t , $u_{i,k}^t$ is the pollution emissions of player i at the time k .

For each fixed $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, the optimization problem of player i in the subgame $\Gamma(S, t, t + \bar{T})$ with uncertainty updating is then stated as follows:

$$\max_{u_{i,k}^t} \sum_{k=t}^{t+\bar{T}} \rho^k \left(u_{i,k}^t \left(a_i - u_{i,k}^t - \gamma \sum_{j \neq i}^N u_{j,k}^t \right) - b_i S_k^t \right). \quad (4)$$

In the framework of uncertainty updating, it is important to model players behavior. We shall give it the following form: for any fixed $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, $u_t^*(S, \xi_t(\theta)) = (u_{1,t}^*(S, \xi_t(\theta)), \dots, u_{n,t}^*(S, \xi_t(\theta)))$ coincides with strategies in the game (3), (4) defined on the stages from t to $t + \bar{T}$ at the instant t .

Firstly, we can easily get the generalized Bayesian feedback Nash equilibrium strategies for each player $i \in N$ in the subgame $\Gamma(S_t, t, t + \bar{T})$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,k}^{t,*}(S, \xi_t(\theta)) = & \\ \frac{a_i}{2 - \gamma} + \frac{\sum_{j=0}^{t+\bar{T}-(k+1)} b_i \rho^{k+1+j} (\delta - 1)^j (-E(\tilde{\eta}|E(\theta)))^{j+1}}{(2 - \gamma)\rho^k} - & \\ - c \frac{a + \sum_{i \in N} \sum_{j=0}^{t+\bar{T}-(k+1)} b_i \rho^{k+1+j} (\delta - 1)^j (-E(\tilde{\eta}|E(\theta)))^{j+1}}{\rho^k}, & \end{aligned} \quad (5)$$

where $a = \sum_{i=1}^N a_i$, $c = \frac{\gamma}{(2-\gamma)(2-\gamma+\gamma N)}$.

In order to obtain the Nash Equilibrium strategy with dynamic uncertainty updating, we propose the following definition.

Definition 1. The definition for the Nash Equilibrium strategy with dynamic uncertainty updating is as following:

$$u_{i,t}^*(S, \xi_t(\theta)) = \tilde{u}_{i,k}^{t,*}(S, \xi_t(\theta))|_{k=t}, \quad t \in \{t_0, t_1, \dots, +\infty\}, i \in N. \quad (6)$$

According to the Definition 1, we can easily check the NE with dynamic

uncertainty updating for the game $\Gamma(S_0, t_0, \infty)$:

$$u_{i,t}^*(S, \xi_t(\theta)) = \frac{a_i}{2-\gamma} + \frac{\sum_{j=0}^{\bar{T}-1} b_i \rho^{t+1+j} (\delta-1)^j (-E(\tilde{\eta}|E(\theta)))^{j+1}}{(2-\gamma)\rho^t} -$$

$$- c \frac{a + \sum_{i \in N} \sum_{j=0}^{\bar{T}-1} b_i \rho^{t+1+j} (\delta-1)^j (-E(\tilde{\eta}|E(\theta)))^{j+1}}{\rho^t},$$

$$t = 0, 1, \dots, \infty, \quad (7)$$

where $a = \sum_{i=1}^N a_i$, $c = \frac{\gamma}{(2-\gamma)(2-\gamma+\gamma N)}$.

After substituting (7) into (1) and consider the observations x_t as the realization of unknown parameter at each time, then we shall get the real trajectory

$$\bar{S}_{t+1} = x_t \left(\sum_{i \in N} u_{i,t}^* + (1-\delta)\bar{S}_t \right), \quad \bar{S}_0 = S_0. \quad (8)$$

In order to get the expected trajectory \hat{S} for each fixed time $t \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ and consider the truncated subgame $\Gamma(S_t, t, t + \bar{T})$, then we will get

$$\hat{S}_{k+1}^t = E(\tilde{\eta}|E(\theta)) \left(\sum_{i \in N} \tilde{u}_{i,k}^{t,*} + (1-\delta)\hat{S}_k^t \right), \quad \hat{S}_t = \bar{S}_t. \quad (9)$$

where $k \in \{t, t+1, \dots, t + \bar{T}\}$, \bar{S}_t is the real trajectory at time t . We will see it from the following figure:

In order to compare the difference between the Nash equilibrium strategy with only dynamic updating, but no uncertainty, we calculate the following form of NE:

$$u_{Du}^*(i, t, S) = \frac{a_i}{2-\gamma} + \frac{\sum_{j=0}^{\bar{T}-1} b_i \rho^{t+1+j} (\delta-1)^j (-\theta^*)^{j+1}}{(2-\gamma)\rho^t} -$$

$$- c \frac{a + \sum_{i \in N} \sum_{j=0}^{\bar{T}-1} b_i \rho^{t+1+j} (\delta-1)^j (-\theta^*)^{j+1}}{\rho^t},$$

$$t = 0, 1, \dots, \infty.$$

As for the Nash equilibrium in the initial game model, we should notice that it's defined on a infinite time interval.

$$u_{in}^*(i, t, S) = \frac{(1 + \rho\theta^*(\delta - 1))(2 - \gamma + \gamma N)a_i - \gamma(1 + \rho\theta^*(\delta - 1))a}{(2 - \gamma + \gamma N)(2 - \gamma)(1 + \rho\theta^*(\delta - 1))} + \frac{\gamma\rho b\theta^* - b_i\theta^*\rho(2 - \gamma + \gamma N)}{(2 - \gamma + \gamma N)(2 - \gamma)(1 + \rho\theta^*(\delta - 1))},$$

$$t = 0, 1, \dots, \infty,$$

where $a = \sum_{i=1}^n a_i$, $b = \sum_{i=1}^n b_i$.

4. Numerical simulation. There are five players in this pollution control problem with uncertainty. At the beginning of the game, the belief parameter of each player for the unknown distribution parameter is $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 2$, $\mu_0 = 0.5$, $k_0 = 0$. As for the game with dynamic updating, we set the information horizon as $\bar{T} = 2$, and the whole time interval is $T = 10$.

The comparison of Nash Equilibrium strategy with dynamic uncertainty updating, dynamic updating, and without any updating is represented in Fig. 2.

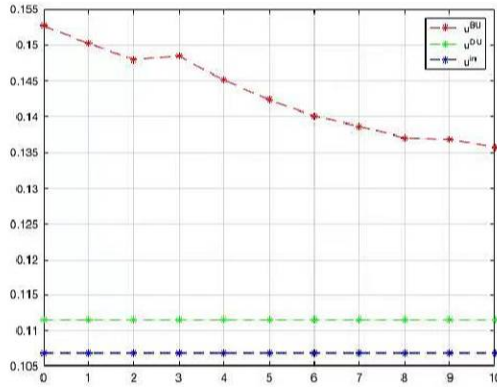


Figure 2. The comparison of Nash Equilibrium strategy with dynamic uncertainty updating, dynamic updating, and in the initial case

From Fig. 2, we can see that the Nash equilibrium strategy with dynamic uncertainty updating and with dynamic updating are more stable than in the initial game model. It should be mentioned that the difference between a game with dynamic uncertainty updating and dynamic updating is whether the uncertainty exists; there is uncertainty in the game model with dynamic uncertainty updating.

About the simulation for the real trajectory, expected trajectory, trajectory for the initial model, and trajectory with only dynamic updating:

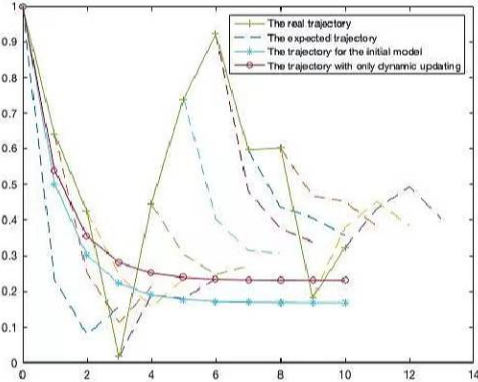


Figure 3. The comparison of trajectories under different models

We can see from Fig. 3, the difference between the expected and real trajectories is due to the realization of unknown parameters. For instance, at instant time $t = 3$, the gap between $\bar{S}(3)$ and $\hat{S}(3)$ is because player observed x_3 . As for the trajectory for the initial model, the players are full-information, there is no uncertainty. However the trajectory only under the dynamic updating, the players have the information of the evolution of the stock of the pollution is on the fixed time horizon, they are brave enough to emit more pollution than the initial model.

About the converge of the estimator as time evolves: Fig. 4 is represented the dynamics process of the player's belief about the unknown parameter. As expected, we can easily derive that the dynamic of the variance will tend to 0 as time goes on. This means the process will lead

to the real value of unknown parameter.

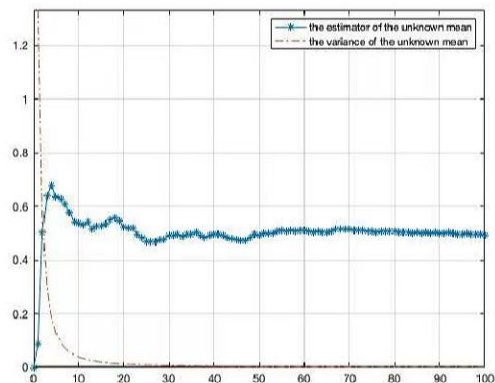


Figure 4. The dynamic of the estimator under uncertainty updating

Note that the players with homogeneous beliefs are considered here, that is to say, at each stage, all players will commonly observe the realization of the unknown parameter, and then jointly update the belief according to the observed value, meanwhile the players will make decisions at each stage.

5. Conclusion. We have considered the pollution control game with uncertainty by using dynamic uncertainty updating; the critical point is that the prior distribution for unknown distribution parameter at stage t is consistent with the posterior distribution at stage $t - 1$. Moreover, we have got the optimal control with dynamic uncertainty updating and the corresponding trajectory. At last, we got the numerical simulation and compared the NE and the trajectories under different mechanisms.

References

1. Martins A. R. Continuous opinions and discrete actions in opinion dynamics problems // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2009. Vol. 2. P. 02017–02023.
2. Martins A. R. Mobility and social network effects on extremist opinions // *Physical Review E*. 2008. Vol. 78. No 3. Art. no 36104.

3. Martins A. R. Bayesian updating rules in continuous opinion dynamics models // Journal of Statistical Mechanics Theory & Experiment. 2009. Vol. 2. P. 57–75.
4. Petrosian O. L. Looking forward approach in cooperative differential games // International Game Theory Review. 2016. Vol. 18. No 2. P. 1–20.
5. Petrosian O. L., Barabanov A. Looking forward approach in cooperative differential games with uncertain stochastic dynamics // Journal of Optimization Theory & Applications. 2017. Vol. 18. No 1. P. 1–20.
6. Gromova E., Petrosian O. L. Control of information horizon for cooperative differential game of pollution control // 2016 International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference). 2016. P. 1–4.
7. Petrosian O. L. Looking forward approach in cooperative differential games with infinite-horizon // Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes. 2016. Vol. 12. No 4. P. 18–30.
8. Yeung D. W. K., Petrosian O. L. Cooperative stochastic differential games with information adaptation // Proceedings of the International Conference on Communication and Electronic Information Engineering (CEIE 2016). 2017. P. 375–381.
9. Petrosian O. L. Infinite horizon dynamic games: a new approach via information updating // International Game Theory Review. 2017. Vol. 20. No 1. P. 1–23.
10. Masoudi N., Santugini M., Zaccour G. A dynamic game of emissions pollution with uncertainty and learning // Environmental and Resource Economics. 2016. Vol. 64. No 3. P. 349–371.

Contents

Plenary Session	9
Invited speakers	9
<i>Eremin A. S.</i> Continuous Runge–Kutta methods for delay differential equations	13
1. Mathematical theory of control processes	39
<i>Belov A. I.</i> Sufficient stability conditions for a linear system with delay	39
<i>Evtina D. S.</i> Lyapunov–Krasovskii functionals for homogeneous equations with distributed delay	44
<i>Zhigalov V. S.</i> The filtering problem in the problem of state observation in differential-difference systems	49
<i>Klimenko I. S.</i> Implementation of the matrix mapping method for solving a system of differential equations	53
<i>Kudryakov D. A.</i> A new stability criterion for linear systems of neutral type	58
<i>Litvishko I. R.</i> Dynamic positioning of an autonomous underwater vehicle in shallow water	63
<i>Pak N. V.</i> Stabilization of the Furuta pendulum using feedback with a multi-purpose structure. Transition to digital control	72
2. Mathematical methods in mechanics and physics	77
<i>Almazova L. A., Sedova O. S.</i> Numerical investigation of aluminum alloy’s fatigue response with defects under cyclic loads	77
<i>Vyalceva V. V., Sedova O. S.</i> Application of the generalized finite element method with local and global solution for the Kirsch problem	82
<i>Kazankov V. K., Kholodova S. E.</i> Mathematical modeling of magnetohydrodynamic processes in the oceans	87
<i>Onegov N. A.</i> Assessment and analysis of internal wave loading on offshore oil and gas production facilities	92

<i>Peglivanova M. M.</i> Corrosion wear of a plate made of a material with plastic anisotropy in pure bending.....	97
<i>Semina K. I., Sedova O. S.</i> Analysis of the composition of AMg5 alloy blocks created using wire-arc additive technologies.....	102
<i>Tran D.</i> Software package for solving the transport equation of a continuous medium with distributed parameters in a network-like domain.....	108
<i>Hoang V. N.</i> Differential-difference system in the Sobolev function space with carriers on a network-like domain.....	113
3. Mathematical models of medical and biological systems.....	119
<i>Lorits E. M.</i> Design of the algorithm for packaging of water molecules in a fixed volume.....	119
<i>Senatorova N. M., Guk K. P.</i> Development of systems for clarifying oncological diagnosis based on image processing technologies.....	124
<i>Kholodova S. E., Cherkai K. M.</i> Mathematical modeling of blood flow while vessel deformation effects.....	132
<i>Andrienko V. A., Molin A. E.</i> Semantic breast ultrasound image segmentation with neural networks based on U-net architecture..	141
<i>Kamguia F. H., Goncharova A. B.</i> Determination of malignancy of neoplasm from mammograms.....	151
<i>Kurniawati A. C. D.</i> Telemedicine during COVID-19 pandemic: a review of the literature.....	156
4. Information and computer technologies.....	165
<i>Andreichenko A. G., Blekanov I. S.</i> Neural network methods for opinion mining in social network discussions.....	165
<i>Balykin A. F.</i> Modeling the dynamic characteristics of analog audio compressors using recurrent neural networks.....	175
<i>Bevz R. Yu.</i> Mathematical modeling of demand formation in the container freight rail transportation market.....	184
<i>Vasiliev V. A., Kuznetsova D. S.</i> Particle swarm optimization algorithm and analysis of its efficiency for solving unconstrained single-criterion problems.....	190

<i>Ganaeva D. D., Golovkina A. G.</i> A method of nonlinear dynamical systems reconstruction from time series data.....	197
<i>Devrishev N. E., He Y., Petrosian O. L.</i> Anomaly detection in time series using forecasting methods.....	202
<i>Dzyuba V. I.</i> Application of federated learning for text classification.....	210
<i>Dolzhenkov S. D.</i> Comparative analysis of agglomerative clustering methods on the example of a model set of points in the Euclidean plane.....	215
<i>Ezhov F. V.</i> Study of hybrid neural network models using SSA preprocessing with real data examples.....	223
<i>Ivkin K. A.</i> Development of software for controlling a robotic arm on the example of FANUC M-20iA.....	232
<i>Kovgar A. V., Khodosov A. S., Chugunova N. S.</i> Development of a system for collecting and processing data on the spread of viral diseases.....	238
<i>Kravcov V. M.</i> Research of forecasting methods in the problem of oil refining.....	243
<i>Kuznetsov M. M.</i> Development of a legal advice service based on machine learning methods.....	248
<i>Kupriyanov I. V., Davidenko A. A.</i> Colorization of black and white images using neural networks.....	254
<i>Lavrova A. K., Yakushkin O. O.</i> On problems and risks for users of the existing NFT architecture.....	261
<i>Larin E. S.</i> Applicability of corrected statistical tests in the example of the problem of signal detection in noisy time series ..	267
<i>Ogloblina A. D., Pleshkanov N. V.</i> Classifying Pikabu articles by custom tags.....	272
<i>Razumilov E. S., Blekanov I. S.</i> Aspect-based sentiment analysis of user messages in social networks.....	280
<i>Smirnov N. V., Sachkov A. V., Smirnova T. E.</i> Numerical modeling and analysis of economic systems.....	289
<i>Khlopin I. V.</i> Predicting the presence of human heart disease using machine learning.....	295

<i>Khodosov A. S., Kovgar A. V., Filatov I. S.</i> Comparative analysis of data storage systems in mobile applications running iOS and Android.....	301
<i>Chang G., He D., Wei Y., Chen G.</i> Research on occlusion detection algorithm based on self-attention mechanism	306
<i>Ding Z. H., Yang F. W., Petrosian O., Li Y., Liu Y.</i> Audio-visual speech recognition	311
<i>Fan X., Li P., Gong S., Fu G.</i> Based on Siamese Network world ancient celebrity portrayals recognition	319
<i>Liu Y., Sun Z., Liu J., Qu C.</i> Tweet sentiment extraction	324
<i>Ma R., Zhang Y., Liu J., Petrosian O.</i> Next running application prediction in OS using time-series forecasting and XAI	329
<i>Pavlova E., Yakushkin O., Pen E., Sedova O., Frikh-Khar A., Terekhina Ya., Lamzin N., Pirozhkov E., Bortov M., Karpenko V.</i> Unsupervised learning on narrowly focused data aggregated automatically	339
<i>Pu Y., Yuan S., Meng L.</i> Research on ceramic brick defect detection system based on Siamese Network.....	345
<i>Smirnov M. N., Smirnova M. A.</i> Control of an unmanned underwater vehicle.....	350
<i>Sun Q., Zhao C., Petrosian O., Li Y.</i> Power allocation in wireless cellular networks: stochastic algorithm based approach	357
<i>Useinov L., Makarov D., Beloshapko A., Korkhov V.</i> Neural networks transfer learning for KLT Bin pose estimation	363
<i>Yang W., Lan J., Li L., Li Z.</i> Intelligent OpenCV-based check-in and clock-in system	369
<i>Zhou X., Qu L., Qu C.</i> Research on smart city comprehensive security prevention and control system	374
5. Control problems in social and economical systems ...	379
<i>Balas T. N.</i> One hybrid optimal control problem with multiple switches	379
<i>Belousova A. V.</i> Schedule optimization for the manufacturing process with Gurobi optimizer	387
<i>Belousova M. V.</i> Forecasting the reliability of technical systems based on the Holt–Winters model	393

<i>Bolatbek A.</i> The value of information about boundary conditions in the problem of optimal resource extraction with terminal constraints	398
<i>Kareeva Yu. S.</i> Dynamic model of influence on the opinions of social network members	403
<i>Mazanov G. P.</i> On the cooperation stability under indirect reciprocity	408
<i>Makoveeva P. E.</i> Friedkin – Johnsen model with one-time impact on social group opinions	415
<i>Nemtsev D. Yu., Tur A. V.</i> The position value as a centrality measure of vertices of a graph	419
<i>Nechiporuk A. A.</i> Equivalence of models of opinions dynamics in social networks with repetitive structure	427
<i>Petrov M. M., Kolbin V. V.</i> Multi-objective stochastic one-stage decision-making tasks. Dominant principle of choice	432
<i>Sorokina P. E.</i> Analysis and forecasting of life expectancy	438
<i>Firyago U. A., Kocherov I. P.</i> Modeling the dynamics of demand for perishable products	443
<i>Shkonda A. Yu.</i> A problem of optimal firm’s policy	449
<i>Chen G., Zhang B., Kou Z.</i> Prediction of PM2.5 concentration based on multiple linear regression model	454
<i>Feng A., Wang Z., Dang Y., Ren H.</i> Prediction of local multi-factor housing price model based on Sklearn linear model	459
<i>Gao J.</i> Two-player opinion control game with limited observation moments	464
<i>Qi D.</i> Spatial autocorrelation model of development differences based on ESDA	469
<i>Ran Y., Qian J., Gao Z., Wang Q.</i> Research on loan strategy of commercial housing purchase based on threat and risk assessment	474
<i>Tian M.</i> Statistical models and machine learning model in air quality index prediction in Peking	479
<i>Wang D., Guo Z.</i> Calculation of the main macroeconomic parameters of the China’s economy based on the Leontief table	487

<i>Wu Y., Ye P.</i> Investigation of optimal pollution control problem with regime shifts	492
<i>Zhao C.</i> A simple variant of concealed voter model	498
<i>Zhou J., Petrosian O., Tur A., Gao H.</i> Pollution control problem with dynamic uncertainty updating	503
Contents	513
Author index	519

Именной указатель

Алмазова Л. А.	77	Казанков В. К.	87
Андрейченко А. Г.	165	Кареева Ю. С.	403
Балас Т. Н.	379	Клименко И. С.	53
Балыкин А. Ф.	175	Ковгар А. В.	238, 301
Бевз Р. Ю.	184	Колбин В. В.	432
Белов А. И.	39	Кочеров И. П.	443
Белоусова А. В.	387	Кравцов В. М.	243
Белоусова М. В.	393	Кудряков Д. А.	58
Блеканов И. С.	165, 280	Кузнецов М. М.	248
Болатбек А.	398	Кузнецова Д. С.	190
Васильев В. А.	190	Куприянов И. В.	254
Вяльцева В. В.	82	Лаврова А. К.	261
Ганаева Д. Д.	197	Ларин Е. С.	267
Головкина А. Г.	197	Литвишко И. Р.	63
Гук К. П.	124	Лориц Е. М.	119
Давыденко А. А.	254	Мазанов Г. П.	408
Девришев Н. Э.	202	Маковеева П. Е.	415
Дзюба В. И.	210	Немцев Д. Ю.	419
Долженков С. Д.	215	Нечипорук А. А.	427
Евтина Д. С.	44	Оглоблина А. Д.	272
Ежов Ф. В.	223	Онегов Н. А.	92
Еремин А. С.	13	Пак Н. В.	72
Жигалов В. С.	49	Пегливанова М. М.	97
Ивкин К. А.	232	Петров М. М.	432

Петросян О. Л.	202	Bortov M.	339
Плешканов Н. В.	272	Chang G.	306
Разумилов Е. С.	280	Chen G.	306, 454
Сачков А. В.	289	Dang Y.	459
Седова О. С.	77, 82, 102	Ding Z. H.	311
Семина К. И.	102	Fan X.	319
Сенаторова Н. М.	124	Feng A.	459
Смирнов Н. В.	289	Frikh-Khar A.	339
Смирнова Т. Е.	289	Fu G.	319
Сорокина П. Э.	438	Gao H.	503
Тран З.	108	Gao J.	464
Тур А. В.	419	Gao Z.	474
Филатов И. С.	301	Goncharova A. B.	151
Фиряго У. А.	443	Gong S.	319
Хлопин И. В.	295	Guo Z.	487
Хоанг В. Н.	113	He D.	306
Ходосов А. С.	238, 301	Kamguia F. H.	151
Холодова С. Е.	87, 132	Karpenko V.	339
Хэ Ю.	202	Korkhov V.	363
Черкай К. М.	132	Kou Z.	454
Чугунова Н. С.	238	Kurniawati A. C. D.	156
Шконда А. Ю.	449	Lamzin N.	339
Якушкин О. О.	261	Lan J.	369
Andrienko V. A.	141	Li L.	369
Beloshapko A.	363	Li P.	319

Li Y.	311, 357	Smirnova M. A.	350
Li Z.	369	Sun Q.	357
Liu Jiarui	324	Sun Z.	324
Liu Jing	329	Terekhina Ya.	339
Liu Yi	311	Tian M.	479
Liu Yuxing	324	Tur A.	503
Ma R.	329	Useinov L.	363
Makarov D.	363	Wang D.	487
Meng L.	345	Wang Q.	474
Molin A. E.	141	Wang Z.	459
Pavlova E.	339	Wei Y.	306
Pen E.	339	Wu Y.	492
Petrosian O.	311, 329, 357, 503	Yakushkin O.	339
Pirozhkov E.	339	Yang F. W.	311
Pu Y.	345	Yang W.	369
Qi D.	469	Ye P.	492
Qian J.	474	Yuan S.	345
Qu C.	324, 374	Zhang B.	454
Qu L.	374	Zhang Y.	329
Ran Y.	474	Zhao C.	357, 498
Ren H.	459	Zhou J.	503
Sedova O.	339	Zhou X.	374
Smirnov M. N.	350		

Ежегодное научное издание

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Том 9(25)

Труды 53-й международной научной конференции
аспирантов и студентов

Редакторы текста на русском языке: *А. С. Ерёмин, Т. Е. Смирнова*

Редакторы текста на английском языке: *А. С. Ерёмин, М. А. Смирнова*

Компьютерная верстка: *М. Н. Смирнов, М. А. Смирнова*

Подписано в печать 24.06.2022

Усл. печ. л. 30,3. Тираж 150 экз.

198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35