УДК 531.36:521.1 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2000, вып. 1 (№ 1)

А. А. Тихонов

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КОЛЕБАНИЯХ ГРАВИТАЦИОННО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
Ч. 4. Многочастотные резонансы

Рассматривается твердое тело, находящееся на круговой кеплеровой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле. Исследуется колебательное движение тела относительно его центра масс в окрестности устойчивого положения равновесия, обусловленного воздействием главного момента гравитационных сил. Предполагается, что гравитационно-ориентированное тело находится под воздействием возмущающего момента общего вида в классе нелинейных квадратичных функций относительно малых величин углов ориентации твердого тела и их производных по времени. Изучается влияние возмущающего момента на нелинейные колебания тела.

В статье [1] была записана в специальной форме система дифференциальных уравнений возмущенного движения гравитационно-ориентированного тела. В статье [2] произведено исследование этой системы в нерезонансном случае, а также найдены 63 резонансные комбинации невозмущенных собственных частот тела k_i $(i = \overline{1,3})$, реализуемые в области гравитационной ориентации. В статье [3] выведены усредненные дифференциальные уравнения возмущенного движения гравитационно-ориентированного тела для каждого из резонансных случаев, а также исследованы колебания тела в условиях одночастотных резонансов второго и третьего порядков.

Данная, 4-я часть работы посвящена исследованию колебаний гравитационно-ориентированного тела в условиях многочастотных резонансов второго и третьего порядков.

Рассмотрим многочастотные резонансы второго порядка, т. е. резонансы вида

$$\pm k_i \pm k_j = m, \quad \text{где} \quad i,j \in \{1,2,3\},\, i \neq j,\, m \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Согласно результатам, полученным в [2], и с сохранением принятой нумерации резонансных комбинаций имеется девять таких резонансов:

$$\begin{array}{lll} 2)\ k_1 - k_3 = 0, & 4)\ -k_1 + k_2 = 1, & 5)\ k_1 + k_3 = 1, \\ 6)\ -k_1 + k_3 = 1, & 7)\ k_2 - k_3 = 1, & 9)\ k_1 + k_2 = 2, \\ 10)\ k_1 + k_3 = 2, & 11)\ k_2 + k_3 = 2, & 13)\ k_2 + k_3 = 3. \end{array}$$

Все они могут быть описаны одной общей формулой вида

$$p_i k_i + p_j k_j = m, \text{ где } |p_i| = |p_j| = 1,\, i,j \in \{1,2,3\},\, i \neq j,\, m \in \{0,1,2,\dots\}. \qquad (1)$$

Соответствующие им резонансные кривые на плоскости инерционных параметров приведены в [2] на рис. 2.

На основании общих результатов, полученных в [3], дифференциальные уравнения возмущенного движения тела, записанные в переменных x_i и v_i $(i = \overline{1,3})$, после усреднения их по явно входящему безразмерному времени $u = \omega_0 t$, в случае резонансов, описываемых формулой (1), будут иметь следующую структуру:

$$\begin{cases} x_i' = b_i^{\text{н}} x_i + \sqrt{x_i x_j}\left({}^i C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} + {}^i S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ v_i' = e_i^{\text{н}} + s_i\dfrac{\sqrt{x_j}}{2k_i\sqrt{x_i}}\left({}^i S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ x_j' = b_j^{\text{н}} x_j + \sqrt{x_i x_j}\left({}^j C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} + {}^j S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ v_j' = e_j^{\text{н}} + s_j\dfrac{\sqrt{x_i}}{2k_j\sqrt{x_j}}\left({}^j S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ x_k' = b_k^{\text{н}} x_k, \\ v_k' = e_k^{\text{н}}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $k \in \{1,2,3\}$, $k \neq i \neq j$, $s_i = \operatorname{sign} p_i$, $s_j = \operatorname{sign} p_j$; $\Phi_{p_1p_2p_3} = p_i k_i v_i + p_j k_j v_j$; $b_i^{\text{н}}$, $b_j^{\text{н}}$, $b_k^{\text{н}}$, $e_i^{\text{н}}$, $e_j^{\text{н}}$, $e_k^{\text{н}}$ – нерезонансные постоянные коэффициенты (см. [2]); ${}^i C^m_{p_1p_2p_3}$, ${}^i S^m_{p_1p_2p_3}$, ${}^j C^m_{p_1p_2p_3}$, ${}^j S^m_{p_1p_2p_3}$ — постоянные коэффициенты, значения которых получены в [3] для каждого из резонансных случаев.

Последние два уравнения в системе (2), соответствующие номеру k той частоты k_k, которая отсутствует в резонансной комбинации (1), отделились и имеют такой же вид, как и в нерезонансном случае (см. уравнения (6) в [2]). Очевидно, что если $b_k^{\text{н}} > 0$, то колебания тела будут нарастающими. Далее будем предполагать, что $b_k^{\text{н}} \leqslant 0$. Тогда переменная x_k ограничена во все время движения, и остается установить характер изменения переменных x_i и x_j на основании первых четырех уравнений системы (2).

Осуществим в этих четырех уравнениях замену переменных:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{x_i}\cos k_i v_i, \quad \xi_j = \sqrt{x_j}\cos k_j v_j, \\ \eta_i &= \sqrt{x_i}\sin k_i v_i, \quad \eta_j = \sqrt{x_j}\sin k_j v_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Принимая во внимание, что

$$x_i = \xi_i^2 + \eta_i^2, \; x_j = \xi_j^2 + \eta_j^2,$$

$$\begin{aligned} \cos\Phi_{p_1p_2p_3} &= \cos(p_i k_i v_i + p_j k_j v_j) = \cos k_i v_i \cos k_j v_j - s_i s_j \sin k_i v_i \sin k_j v_j = \\ &= (\xi_i \xi_j - s_i s_j \eta_i \eta_j)/\sqrt{x_i x_j}, \\ \sin\Phi_{p_1p_2p_3} &= \sin(p_i k_i v_i + p_j k_j v_j) = s_i \sin k_i v_i \cos k_j v_j + s_j \sin k_j v_j \cos k_i v_i = \\ &= (s_i \xi_j \eta_i + s_j \xi_i \eta_j)/\sqrt{x_i x_j}, \end{aligned}$$

и вычисляя $\xi_i', \eta_i', \xi_j', \eta_j'$ в силу системы (2), получаем в новых переменных линейную дифференциальную систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \xi_i' = \dfrac{1}{2} b_i^{\text{н}} \xi_i - k_i e_i^{\text{н}} \eta_i + \dfrac{1}{2}{}^i C^m_{p_1p_2p_3}\xi_j + \dfrac{s_j}{2}{}^i S^m_{p_1p_2p_3}\eta_j, \\ \eta_i' = k_i e_i^{\text{н}} \xi_i + \dfrac{1}{2} b_i^{\text{н}} \eta_i + \dfrac{s_i}{2}{}^i S^m_{p_1p_2p_3}\xi_j - \dfrac{s_i s_j}{2}{}^i C^m_{p_1p_2p_3}\eta_j, \\ \xi_j' = \dfrac{1}{2}{}^j C^m_{p_1p_2p_3}\xi_i + \dfrac{s_i}{2}{}^j S^m_{p_1p_2p_3}\eta_i + \dfrac{1}{2} b_j^{\text{н}} \xi_j - k_j e_j^{\text{н}} \eta_j, \\ \eta_j' = \dfrac{s_j}{2}{}^j S^m_{p_1p_2p_3}\xi_i - \dfrac{s_i s_j}{2}{}^j C^m_{p_1p_2p_3}\eta_i + k_j e_j^{\text{н}} \xi_j + \dfrac{1}{2} b_j^{\text{н}} \eta_j. \end{cases} \tag{4}$$

Далее не представляет принципиальных трудностей выполнить анализ системы (4) на предмет исследования устойчивости ее нулевого решения, что в силу соотношений (3) позволит сделать аналогичные выводы о характере поведения переменных x_i и x_j, определяющих амплитуды колебаний тела.

Характеристическое уравнение системы (4) имеет вид $P_4(\lambda) = 0$, где $P_4(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$, $a_1 = -(b_i^{\text{н}} + b_j^{\text{н}})$, $a_2 = \frac{1}{4}(b_i^{\text{н}})^2 + \frac{1}{4}(b_j^{\text{н}})^2 + b_i^{\text{н}}b_j^{\text{н}} + (k_ie_i^{\text{н}})^2 + (k_je_j^{\text{н}})^2 - \frac{1}{2}({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}C^m_{p_1p_2p_3} + {}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3})$, $a_3 = -\frac{1}{4}b_i^{\text{н}}b_j^{\text{н}}(b_i^{\text{н}} + b_j^{\text{н}}) + \frac{1}{4}(b_i^{\text{н}} + b_j^{\text{н}})({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}C^m_{p_1p_2p_3} + {}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3}) - b_j^{\text{н}}(k_ie_i^{\text{н}})^2 - b_i^{\text{н}}(k_je_j^{\text{н}})^2 + \frac{1}{2}(s_ik_ie_i^{\text{н}} - s_jk_je_j^{\text{н}})({}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}C^m_{p_1p_2p_3} - {}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3})$, $a_4 = \frac{1}{16}(b_i^{\text{н}}b_j^{\text{н}})^2 + \frac{1}{4}(k_ie_i^{\text{н}}b_j^{\text{н}})^2 + \frac{1}{4}(k_je_j^{\text{н}}b_i^{\text{н}})^2 + \frac{1}{4}(s_ik_ie_i^{\text{н}}b_j^{\text{н}} - s_jk_je_j^{\text{н}}b_i^{\text{н}})({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3} - {}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}C^m_{p_1p_2p_3}) - \frac{1}{2}(s_is_jk_ie_i^{\text{н}}k_je_j^{\text{н}} + \frac{1}{4}b_i^{\text{н}}b_j^{\text{н}})({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}C^m_{p_1p_2p_3} + {}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3}) + (k_ie_i^{\text{н}}k_je_j^{\text{н}})^2 + \frac{1}{16}(({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}C^m_{p_1p_2p_3})^2 + ({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3})^2 + ({}^{j}C^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{i}S^m_{p_1p_2p_3})^2 + ({}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\,{}^{j}S^m_{p_1p_2p_3})^2)$.

Отсюда получаем необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (4), например в форме Льенара — Шипара:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_3(a_1a_2 - a_3) - a_4a_1^2 > 0.$$

Рассмотрим теперь двухчастотные резонансы третьего порядка, т. е. резонансы вида

$$\pm 2k_i \pm k_j = m, \quad \text{где} \quad i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j,\ m \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Согласно результатам, полученным в [2], и с сохранением принятой нумерации резонансных комбинаций имеется 32 таких резонанса с номерами 15–17, 20–23, 26–29, 32, 33, 37–40, 42–45, 48–53, 55, 57, 58, 61, 62. Все они могут быть описаны одной общей формулой вида

$$p_ik_i + p_jk_j = m, \text{ где } |p_i| = 2, |p_j| = 1,\ i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j,\ m \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{5}$$

Соответствующие им резонансные кривые на плоскости инерционных параметров приведены в [2] на рис. 3 и 4.

На основании общих результатов, полученных в [3], дифференциальные уравнения возмущенного движения, записанные в переменных x_i и v_i $(i = \overline{1,3})$, после усреднения их по явно входящему безразмерному времени $u = \omega_0 t$ в случае резонансов, описываемых формулой (5), будут иметь следующую структуру:

$$\begin{cases}
x_i' = b_i^{\text{н}}x_i + x_i\sqrt{x_j}\left({}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} + {}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right),\\
v_i' = e_i^{\text{н}} + s_i\dfrac{\sqrt{x_j}}{2k_i}\left({}^{i}S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^{i}C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right),\\
x_j' = b_j^{\text{н}}x_j + x_i\sqrt{x_j}\left({}^{j}C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} + {}^{j}S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right),\\
v_j' = e_j^{\text{н}} + s_j\dfrac{x_i}{2k_j\sqrt{x_j}}\left({}^{j}S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^{j}C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right),\\
x_k' = b_k^{\text{н}}x_k,\\
v_k' = e_k^{\text{н}}.
\end{cases} \tag{6}$$

Здесь используются те же обозначения, что и выше в системе (2).

Последние два уравнения в дифференциальной системе (6), соответствующие номеру k частоты k_k, отсутствующей в резонансной комбинации (5), отделились и имеют такой же вид, как и в нерезонансном случае (см. уравнения (6) в [2]). Очевидно, что если $b_k^{\text{н}} > 0$, то колебания тела будут нарастающими. Далее будем предполагать, что

$b_k^{\text{н}} \leqslant 0$. Тогда переменная x_k ограничена во все время движения и остается установить характер изменения переменных x_i и x_j на основании первых четырех уравнений системы (6).

В переменных $y_i = \sqrt{x_i}$, $y_j = \sqrt{x_j}$, v_i, v_j эти уравнения имеют вид

$$\begin{cases} y_i' = \dfrac{1}{2} b_i^{\text{н}} y_i + \dfrac{1}{2} y_i y_j {}^i a^m_{p_1p_2p_3} \cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ y_j' = \dfrac{1}{2} b_j^{\text{н}} y_j + \dfrac{1}{2} y_i^2 {}^j a^m_{p_1p_2p_3} \cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ v_i' = e_i^{\text{н}} - \dfrac{s_i y_j}{2k_i} {}^i a^m_{p_1p_2p_3} \sin(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ y_j v_j' = e_j^{\text{н}} y_j - \dfrac{s_j y_i^2}{2k_j} {}^j a^m_{p_1p_2p_3} \sin(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \end{cases} \tag{7}$$

где $\quad {}^i a^m_{p_1p_2p_3} = \sqrt{({}^iC^m_{p_1p_2p_3})^2 + ({}^iS^m_{p_1p_2p_3})^2}, \quad \operatorname{tg} {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3} = {}^iS^m_{p_1p_2p_3} / {}^iC^m_{p_1p_2p_3}$.

Ставится задача об исследовании на устойчивость решения

$$y_i = y_j = 0, \quad v_i = e_i^{\text{н}} u, \quad v_j = e_j^{\text{н}} u$$

системы (7) по переменным y_i, y_j или об исследовании на "y-устойчивость" нулевого решения системы

$$\begin{cases} y_i' = \dfrac{1}{2} b_i^{\text{н}} y_i + \dfrac{1}{2} y_i y_j {}^i a^m_{p_1p_2p_3} \cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ y_j' = \dfrac{1}{2} b_j^{\text{н}} y_j + \dfrac{1}{2} y_i^2 {}^j a^m_{p_1p_2p_3} \cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ w_i' = -\dfrac{s_i y_j}{2k_i} {}^i a^m_{p_1p_2p_3} \sin(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ w_j' = -\dfrac{s_j y_i^2}{2k_j y_j} {}^j a^m_{p_1p_2p_3} \sin(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \end{cases} \tag{8}$$

в которой $w_i = v_i - e_i^{\text{н}} u$, $w_j = v_j - e_j^{\text{н}} u$, $\Phi_{p_1p_2p_3} = p_i k_i v_i + p_j k_j v_j = p_i k_i w_i + p_j k_j w_j + (p_i k_i e_i^{\text{н}} + p_j k_j e_j^{\text{н}}) u$.

Введем дополнительную переменную $\omega = y_i^2 y_j^{-1}$. В силу системы (8) имеем дифференциальное уравнение

$$\omega' = 2 y_i y_j^{-1} y_i' - y_i^2 y_j^{-2} y_j' =$$

$$= (b_i^{\text{н}} - \frac{b_j^{\text{н}}}{2})\omega + y_i^2 {}^i a^m_{p_1p_2p_3} \cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}) - \omega^2 \frac{{}^j a^m_{p_1p_2p_3}}{2} \cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}).$$

Рассматривая его совместно с уравнениями (8), получим дифференциальную систему

$$\begin{cases} y_i' = \frac{1}{2}b_i^{\text{н}}y_i + \frac{1}{2}y_iy_j{}^ia^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ y_j' = \frac{1}{2}b_j^{\text{н}}y_j + \frac{1}{2}y_i^2{}^ja^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ \omega' = (b_i^{\text{н}} - \frac{1}{2}b_j^{\text{н}})\omega + y_i^2{}^ia^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}) - \\ \quad - \omega^2\frac{1}{2}{}^ja^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ w_i' = -\frac{s_iy_j}{2k_i}{}^ia^m_{p_1p_2p_3}\sin(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \\ w_j' = -\frac{s_j\omega}{2k_j}{}^ja^m_{p_1p_2p_3}\sin(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3}), \end{cases} \tag{9}$$

которая, в отличие от системы (8), не имеет сингулярности в последнем уравнении.

Введем y-определенно-положительную функцию $V = y_i^2 + y_j^2$, допускающую бесконечно-малый высший предел по $y = (y_i, y_j)^{\mathrm{T}}$, и рассмотрим производную этой функции в силу системы (9):

$$V'_{(9)} = b_i^{\text{н}}y_i^2 + b_j^{\text{н}}y_j^2 + y_i^2y_j[{}^ia^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}) + {}^ja^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3})].$$

Если $b_i^{\text{н}} < 0$ и $b_j^{\text{н}} < 0$, то $V'_{(9)} \leqslant -c\|y\|^2$, где $c = \text{const} > 0$, т.е. $V'_{(9)}$ является функцией y-определенно-отрицательной и рассматриваемое нулевое решение системы (9) является асимптотически y-устойчивым [4, с. 35].

Заметим, что если при $b_i^{\text{н}} < 0$ и $b_j^{\text{н}} < 0$ выполняется также и неравенство $2b_i^{\text{н}} < b_j^{\text{н}}$, то нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво по переменным y_i, y_j, ω, что вытекает из рассмотрения функции $y_i^2 + y_j^2 + \omega^2$ и ее производной в силу системы (9). Если $b_i^{\text{н}} > 0$ и $b_j^{\text{н}} > 0$, то $V'_{(9)}$ является функцией y-определенно-положительной и, следовательно, рассматриваемое нулевое решение системы (9) y-неустойчиво [4, с. 40]. Если $b_i^{\text{н}} > 0$, $b_j^{\text{н}} < 0$, то неустойчивость нулевого решения по переменным y_i и y_j нетрудно доказать с использованием функции $U(y_i, y_j) = y_i^2 - y_j^2$. Действительно, так как функция $U(y_i, y_j)$ допускает бесконечно-малый высший предел по y_i, y_j, а

$$U'_{(9)} = b_i^{\text{н}}y_i^2 - b_j^{\text{н}}y_j^2 + y_i^2y_j[{}^ia^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^i\alpha^m_{p_1p_2p_3}) - {}^ja^m_{p_1p_2p_3}\cos(\Phi_{p_1p_2p_3} - {}^j\alpha^m_{p_1p_2p_3})]$$

— определенно-положительна относительно y_i, y_j и в любой сколь угодно малой окрестности начала координат ($y_i = y_j = \omega = w_i = w_j = 0$) существуют точки $\{y : y_i^2 > y_j^2\}$, для которых $U(y_i, y_j) > 0$, то нулевое решение системы (9) y-неустойчиво [4, с. 40].

Аналогичным образом доказывается неустойчивость нулевого решения по переменным y_i, y_j в случае $b_i^{\text{н}} < 0$, $b_j^{\text{н}} > 0$ с использованием функции $y_j^2 - y_i^2$.

Рассмотрим теперь трехчастотные резонансы третьего порядка, т.е. резонансы вида

$$\pm k_1 \pm k_2 \pm k_3 = m, \quad \text{где} \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Согласно результатам, полученным в [2], имеется 9 таких резонансов:

18) $k_1 - k_2 + k_3 = 0$, 24) $k_1 + k_2 - k_3 = 1$, 25) $-k_1 + k_2 + k_3 = 1$,
34) $k_1 + k_2 + k_3 = 2$, 35) $k_1 + k_2 - k_3 = 2$, 36) $-k_1 + k_2 + k_3 = 2$,

46) $k_1+k_2+k_3=3$, 47) $-k_1+k_2+k_3=3$, 54) $k_1+k_2+k_3=4$.

Все они могут быть описаны одной общей формулой вида

$$p_1k_1+p_2k_2+p_3k_3=m, \text{ где } |p_1|=|p_2|=|p_3|=1,\ m\in\{0,1,2,\dots\}. \tag{10}$$

Соответствующие им резонансные кривые на плоскости инерционных параметров приведены в [2] на рис. 3 и 4.

На основании [3] усредненные дифференциальные уравнения возмущенного движения тела в условиях резонансов (10) имеют следующую структуру:

$$\begin{cases} x_1' = b_1^{\text{н}}x_1+\sqrt{x_1x_2x_3}\left({}^1C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3}+{}^1S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ v_1' = e_1^{\text{н}}+s_1\dfrac{\sqrt{x_2x_3}}{2k_1\sqrt{x_1}}\left({}^1S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3}-{}^1C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ x_2' = b_2^{\text{н}}x_2+\sqrt{x_1x_2x_3}\left({}^2C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3}+{}^2S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ v_2' = e_2^{\text{н}}+s_2\dfrac{\sqrt{x_1x_3}}{2k_2\sqrt{x_2}}\left({}^2S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3}-{}^2C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ x_3' = b_3^{\text{н}}x_3+\sqrt{x_1x_2x_3}\left({}^3C^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3}+{}^3S^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right), \\ v_3' = e_3^{\text{н}}+s_3\dfrac{\sqrt{x_1x_2}}{2k_3\sqrt{x_3}}\left({}^3S^m_{p_1p_2p_3}\cos\Phi_{p_1p_2p_3}-{}^3C^m_{p_1p_2p_3}\sin\Phi_{p_1p_2p_3}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Осуществим в этих уравнениях замену переменных:

$$\begin{array}{lll} \xi_1=\sqrt{x_1}\cos k_1v_1, & \xi_2=\sqrt{x_2}\cos k_2v_2, & \xi_3=\sqrt{x_3}\cos k_3v_3, \\ \eta_1=\sqrt{x_1}\sin k_1v_1, & \eta_2=\sqrt{x_2}\sin k_2v_2, & \eta_3=\sqrt{x_3}\sin k_3v_3. \end{array} \tag{12}$$

Принимая во внимание, что $x_i=\xi_i^2+\eta_i^2 \quad (i=\overline{1,3})$,

$$\cos\Phi_{p_1p_2p_3}=\cos(p_1k_1v_1+p_2k_2v_2+p_3k_3v_3)=$$
$$=(\xi_1\xi_2\xi_3-s_1s_2\eta_1\eta_2\xi_3-s_1s_3\eta_1\eta_3\xi_2-s_2s_3\eta_2\eta_3\xi_1)/\sqrt{x_1x_2x_3},$$
$$\sin\Phi_{p_1p_2p_3}=\sin(p_1k_1v_1+p_2k_2v_2+p_3k_3v_3)=$$
$$=(s_1\eta_1\xi_2\xi_3+s_2\eta_2\xi_1\xi_3+s_3\eta_3\xi_1\xi_2-s_1s_2s_3\eta_1\eta_2\eta_3)/\sqrt{x_1x_2x_3},$$

и вычисляя $\xi_i',\eta_i' \quad (i=\overline{1,3})$ в силу системы (11), получаем в новых переменных автономную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \xi_1' = \dfrac{b_1^{\text{н}}}{2}\xi_1-k_1e_1^{\text{н}}\eta_1+\dfrac{1}{2}{}^1C^m_{p_1p_2p_3}(\xi_2\xi_3-s_2s_3\eta_2\eta_3)+\dfrac{1}{2}{}^1S^m_{p_1p_2p_3}(s_2\eta_2\xi_3+s_3\eta_3\xi_2), \\ \eta_1' = \dfrac{b_1^{\text{н}}}{2}\eta_1+k_1e_1^{\text{н}}\xi_1+\dfrac{s_1}{2}{}^1S^m_{p_1p_2p_3}(\xi_2\xi_3-s_2s_3\eta_2\eta_3)-\dfrac{s_1}{2}{}^1C^m_{p_1p_2p_3}(s_2\eta_2\xi_3+s_3\eta_3\xi_2), \\ \xi_2' = \dfrac{b_2^{\text{н}}}{2}\xi_2-k_2e_2^{\text{н}}\eta_2+\dfrac{1}{2}{}^2C^m_{p_1p_2p_3}(\xi_1\xi_3-s_1s_3\eta_1\eta_3)+\dfrac{1}{2}{}^2S^m_{p_1p_2p_3}(s_3\eta_3\xi_1+s_1\eta_1\xi_3), \\ \eta_2' = \dfrac{b_2^{\text{н}}}{2}\eta_2+k_2e_2^{\text{н}}\xi_2+\dfrac{s_2}{2}{}^2S^m_{p_1p_2p_3}(\xi_1\xi_3-s_1s_3\eta_1\eta_3)-\dfrac{s_2}{2}{}^2C^m_{p_1p_2p_3}(s_3\eta_3\xi_1+s_1\eta_1\xi_3), \\ \xi_3' = \dfrac{b_3^{\text{н}}}{2}\xi_3-k_3e_3^{\text{н}}\eta_3+\dfrac{1}{2}{}^3C^m_{p_1p_2p_3}(\xi_1\xi_2-s_1s_2\eta_1\eta_2)+\dfrac{1}{2}{}^3S^m_{p_1p_2p_3}(s_1\eta_1\xi_2+s_2\eta_2\xi_1), \\ \eta_3' = \dfrac{b_3^{\text{н}}}{2}\eta_3+k_3e_3^{\text{н}}\xi_3+\dfrac{s_3}{2}{}^3S^m_{p_1p_2p_3}(\xi_1\xi_2-s_1s_2\eta_1\eta_2)-\dfrac{s_3}{2}{}^3C^m_{p_1p_2p_3}(s_1\eta_1\xi_2+s_2\eta_2\xi_1), \end{cases} \tag{13}$$

не имеющую сингулярного вырождения правых частей и содержащую нелинейные члены лишь во второй степени. Корни характеристического уравнения линейной части системы (13) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_1^{\text{н}}}{2} \pm ik_1e_1^{\text{н}}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{b_2^{\text{н}}}{2} \pm ik_2e_2^{\text{н}}, \quad \lambda_{5,6} = \frac{b_3^{\text{н}}}{2} \pm ik_3e_3^{\text{н}}.$$

В некритическом случае $b_i^{\text{н}} \neq 0 \quad (i = \overline{1,3})$ по линейному приближению системы (13) можно судить об устойчивости ее нулевого решения, что в силу соотношений (12) позволит сделать аналогичные выводы о характере поведения переменных $x_i \quad (i = \overline{1,3})$, определяющих амплитуды колебаний тела.

Таким образом, в результате исследований, проведенных на базе усредненных дифференциальных уравнений возмущенного движения, установлено, что в условиях многочастотных резонансов 3-го порядка колебания тела будут затухающими при одновременном выполнении неравенств $b_i^{\text{н}} < 0 \quad (i = \overline{1,3})$, ограниченными — если хотя бы один из коэффициентов $b_i^{\text{н}}$ отрицателен, а остальные — неположительны, и нарастающими — если хотя бы один из коэффициентов $b_i^{\text{н}}$ положителен.

Summary

Tikhonov A. A. Resonance phenomena in oscillations of a gravity-oriented rigid body. Part 4: Multifrequency resonances.

A rigid body moves on a circular Keplerian orbit in a central Newtonian gravitational field. The attitude libration of a body in vicinity of the stable equilibrium position, influenced by the principal moment of gravitational forces is considered. It is supposed that the body is affected by nonlinear quadratic perturbation moment of general form. The influence of perturbation moment on nonlinear oscillations of a body under the conditions of multifrequency resonanses is stydied.

Литература

1. *Тихонов А. А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч.1: Спектральная структура возмущающего момента // Вестн. С.- Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 2 (№ 8). С. 82–91.

2. *Тихонов А. А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч.2: Реализуемые резонансы // Там же. Вып. 3 (№ 15). С. 85–94.

3. *Тихонов А. А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч.3: Усредненные уравнения; одночастотные резонансы // Там же. 1998. Вып. 3 (№ 15). С. 116–126.

4. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., 1987. 256 с.

Статья поступила в редакцию 6 июня 1999 г.