УДК 517.972.9 Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006, вып. 1

В. Н. Малозёмов

О МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Перу Николая Максимовича Гюнтера принадлежит один из лучших учебников по вариационному исчислению [1]. Его книга была подписана к печати 27 мая 1941 г. Как отметил в предисловии В. И. Смирнов, последняя корректура была сдана Н. М. Гюнтером 29 апреля 1941 г. за пять дней до его кончины, последовавшей 4 мая 1941 г. С волнением берем мы в руки это сочинение замечательного математика.

Учебник Н. М. Гюнтера отличают полнота и тщательность анализа изучаемых вопросов. Он и сегодня читается с большим интересом. Вместе с тем за прошедшие 65 лет вариационное исчисление получило дальнейшее развитие как вширь, так и вглубь [2, 3, 4, 5]. Даже некоторые конкретные вопросы, рассмотренные в [1], теперь мы понимаем лучше. В этой связи остановимся на классической задаче о минимальной поверхности вращения и дополним анализ Н. М. Гюнтера случая двух стационарных кривых.

2. Напомним постановку задачи о минимальной поверхности вращения:

$$J(y) := 2\pi \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx \to \min, \qquad y(-a) = y(a) = A. \tag{1}$$

Здесь a, A – положительные константы. Решение будем искать на множестве функций $y(x)$, положительных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-a, a]$.

Как известно [1, с. 36–40], двухпараметрическое семейство лагранжевых кривых (экстремалей) для задачи (1) определяется формулой

$$y(x) = \lambda \mathrm{ch}\frac{x+c}{\lambda}. \tag{2}$$

В силу симметричности краевых условий $c = 0$. Константу $\lambda > 0$ найдем из уравнения

$$\lambda \mathrm{ch}\frac{a}{\lambda} = A. \tag{3}$$

Обозначив $t = a/\lambda$, $\varphi(t) = \mathrm{ch}(t)/t$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\varphi(t) = \frac{A}{a}. \tag{4}$$

Исследуем уравнение (4).

Функция $\varphi(t)$ на полуоси $(0, +\infty)$ имеет производную

$$\varphi'(t) = \frac{t\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t}{t^2} = \frac{\mathrm{sh}t}{t^2}(t - \mathrm{cth}\,t).$$

Отметим, что

$$\mathrm{cth}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = 1 + \frac{2}{e^{2t}-1}.$$

Ясно (рис. 1), что у разности $t - \operatorname{cth} t$ существует единственный положительный корень t_0, причем $t_0 > 1$. Эта разность отрицательна при $0 < t < t_0$ и положительна при $t > t_0$. Значит, t_0 является единственной точкой минимума функции $\varphi(t)$ на $(0, +\infty)$ (рис. 2). При этом

$$\varphi(t_0) = \frac{\operatorname{ch} t_0}{\operatorname{cth} t_0} = \operatorname{sh} t_0 = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 t_0 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{t_0^2 - 1}} =: k_0.$$

Нетрудно сосчитать, что $k_0 = 1{,}50888\ldots$.

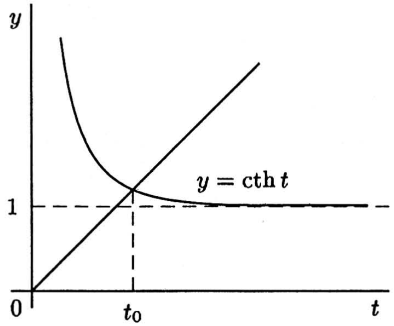

Рис. 1.

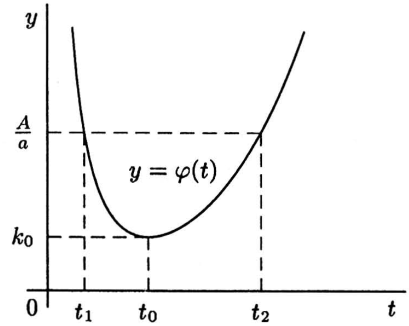

Рис. 2.

Приходим к следующему выводу:

при $A/a > k_0$ уравнение (4) имеет два решения $0 < t_1 < t_2$,

при $A/a = k_0$ уравнение (4) имеет одно решение t_0,

при $A/a < k_0$ уравнение (4) не имеет решений.

Нас интересует первый случай, когда уравнение (4) имеет два решения. Соответственно уравнение (3) также имеет два решения: $\lambda_1 = a/t_1$, $\lambda_2 = a/t_2$, причем $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Это значит, что при $A/a > k_0$ существуют две стационарные кривые $y_k(x) = \lambda_k \operatorname{ch}(x/\lambda_k)$, $k = 1, 2$. На обеих кривых выполняется усиленное условие Лежандра. Какой из них отдать предпочтение с точки зрения поставленной задачи – минимизации поверхности вращения?

3. Для ответа на этот вопрос нужно записать уравнение Якоби, соответствующее стационарной кривой $y_k(x)$, и найти его главное решение. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид [1, с. 85]

$$u'' - \frac{2}{\lambda_k} \operatorname{th}\left(\frac{x}{\lambda_k}\right) u' + \frac{1}{\lambda_k^2} u = 0.$$

Главное решение $u_k(x)$ определяется начальными условиями $u(-a) = 0$, $u'(-a) = 1$. Как показано в [1, с. 85],

$$u_k(x) = \frac{\lambda_k \operatorname{ch} t_k - a \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k} \operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \frac{\operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k}\left(x \operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \lambda_k \operatorname{ch}\frac{x}{\lambda_k}\right). \tag{5}$$

Справедливость формулы (5) легко проверить, однако вывести ее совсем непросто.

4. Существует более регулярный способ нахождения $u_k(x)$ [5, с. 124–127]. Для этого в двухпараметрическом семействе экстремалей (2) нужно выделить однопараметрическое семейство $y(x,\alpha)$, исходя из условий $y(-a) = A$, $y'(-a) = \alpha$. Здесь α – параметр. Распишем указанные условия подробно

$$\lambda \mathrm{ch}\frac{-a+c}{\lambda} = A, \quad \mathrm{sh}\frac{-a+c}{\lambda} = \alpha.$$

Отсюда следует, что $(-a+c)/\lambda = \mathrm{arsh}\,\alpha$ и

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad c = a + \lambda\,\mathrm{arsh}\,\alpha.$$

Таким образом,

$$y(x,\alpha) = \lambda(\alpha)\mathrm{ch}\frac{x + c(\alpha)}{\lambda(\alpha)}. \tag{6}$$

В этом семействе стационарная кривая $y_k(x)$ соответствует параметру $\alpha = \alpha_k$ такому, что $\lambda(\alpha_k) = \lambda_k$ и $c(\alpha_k) = 0$. Получаем

$$\mathrm{arsh}\,\alpha_k = -a/\lambda_k = -t_k, \quad \alpha_k = -\mathrm{sh}t_k.$$

Факт теории заключается в том, что

$$u_k(x) = y'_\alpha(x, \alpha_k). \tag{7}$$

Воспользуемся этой формулой. Поскольку

$$\lambda'(\alpha_k) = -\frac{A\alpha_k}{(1+\alpha_k^2)^{3/2}} = \frac{A\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^3 t_k} = \frac{a}{t_k}\,\frac{\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k} = \frac{\lambda_k \mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k},$$

$$c'(\alpha_k) = \lambda'(\alpha_k)\,\mathrm{arsh}\,\alpha_k + \frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\alpha_k^2}} = -\frac{t_k\lambda_k\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k} + \frac{\lambda_k}{\mathrm{ch}t_k} =$$

$$= \frac{\lambda_k \mathrm{ch}t_k - a\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k},$$

то, согласно (6),

$$y'_\alpha(x,\alpha_k) = \lambda'(\alpha_k)\mathrm{ch}\frac{x}{\lambda_k} + \lambda_k \mathrm{sh}\left(\frac{x}{\lambda_k}\right)\left[\frac{c'(\alpha_k)\lambda_k - x\lambda'(\alpha_k)}{\lambda_k^2}\right] =$$

$$= c'(\alpha_k)\mathrm{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \frac{\lambda'(\alpha_k)}{\lambda_k}\left[x\mathrm{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \lambda_k\mathrm{ch}\frac{x}{\lambda_k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda_k\mathrm{ch}t_k - a\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k}\mathrm{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \frac{\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k}\left[x\mathrm{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \lambda_k\mathrm{ch}\frac{x}{\lambda_k}\right].$$

Теперь (5) следует из (7).

Отметим, в частности, что

$$u_k(a) = \frac{2\lambda_k\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}t_k} - \frac{2a\mathrm{sh}^2 t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k} = -\frac{2a\,t_k\mathrm{sh}t_k}{\mathrm{ch}^2 t_k}\,\frac{t_k\mathrm{sh}t_k - \mathrm{ch}t_k}{t_k^2} =$$

$$= -\frac{2a^2}{A}\,\mathrm{th}(t_k)\,\varphi'(t_k). \tag{8}$$

5. Если стационарная кривая $y_k(x)$ является точкой (слабого) локального минимума функционала $J(y)$, то в ней выполняется необходимое условие оптимальности второго порядка: главное решение уравнения Якоби $u_k(x)$ положительно на $(-a, a)$. Поскольку $\varphi'(t_2) > 0$ (см. рис. 2), то, согласно (8), $u_2(a) < 0$. Это значит, что $y_2(x)$ не является точкой локального минимума.

В силу той же формулы (8) $u_1(a) > 0$. Покажем, что $u_1(x) > 0$ на $(-a, a]$, т. е. на $y_1(x)$ выполняется усиленное условие Якоби. В этом случае теория гарантирует, что $y_1(x)$ – точка строгого локального минимума.

Имеем

$$u_1'(x) = \frac{1}{\lambda_1^2}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)\Big[c'(\alpha_1)\lambda_1 - x\lambda'(\alpha_1)\Big].$$

В квадратных скобках стоит линейная по x функция, поэтому $u_1'(x)$ обращается в нуль на $(-a, a)$ не более чем в одной точке. Так как $u_1(-a) = 0$, $u_1'(-a) = 1$ и $u_1(a) > 0$, то необходимо $u_1(x) > 0$ на $(-a, a]$. Действительно, если допустить, что существует точка $\xi \in (-a, a)$, в которой $u_1(\xi) = 0$, то в точке максимума η функции $u_1(x)$ на $[-a, \xi]$ будет $u_1(\eta) > 0$ и $u_1'(\eta) = 0$. Более того, в точке минимума $u_1(x)$ на $[\eta, a]$ производная $u_1'(x)$ еще раз обратится в нуль, что, как отмечалось, невозможно.

6. Предпочтительность стационарной кривой $y_1(x)$ по сравнению с $y_2(x)$ можно установить более непосредственным путем, если показать, что $J(y_1) < J(y_2)$. Именно этим мы теперь и займемся.

Теорема. *Справедливо неравенство* $J(y_1) < J(y_2)$.

Доказательство. Воспользуемся формулами

$$2\mathrm{ch}^2 x = \mathrm{ch}2x + 1, \quad \mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x.$$

Получим

$$J(y_k) = 2\pi\lambda_k \int_{-a}^{a} \mathrm{ch}^2\frac{x}{\lambda_k}\,dx = 2\pi\lambda_k \int_{0}^{a}\left(\mathrm{ch}\frac{2x}{\lambda_k} + 1\right)dx =$$

$$= 2\pi\lambda_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\mathrm{sh}\frac{2a}{\lambda_k} + a\right) = 2\pi\left(\lambda_k^2\mathrm{sh}t_k\mathrm{ch}t_k + a\lambda_k\right). \qquad (9)$$

Поскольку $\mathrm{ch}(t_k)/t_k = A/a$, то

$$(2\pi a^2)^{-1}J(y_k) = \frac{\mathrm{sh}t_k\mathrm{ch}t_k}{t_k^2} + \frac{1}{t_k} = \left(\frac{A}{a}\right)^2\mathrm{th}\,t_k + \frac{1}{t_k}. \qquad (10)$$

Введем функцию

$$\psi(t) = \left(\frac{A}{a}\right)^2\mathrm{th}\,t + \frac{1}{t}, \quad t \in (0, +\infty),$$

и вычислим ее производную:

$$\psi'(t) = \left(\frac{A}{a}\right)^2\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - \varphi^2(t)\right].$$

Согласно определению функции $\varphi(t)$ и выбору точек t_1, t_2, имеем $\psi'(t_1) = 0$, $\psi'(t_2) = 0$, $\psi'(t) > 0$ при $t \in (t_1, t_2)$. В частности, $\psi(t_1) < \psi(t_2)$. Переписав формулу (10) в виде

$$(2\pi a^2)^{-1} J(y_k) = \psi(t_k),$$

придем к заключению теоремы.

Замечание. Из (9) следует, что

$$J(y_k) = 2\pi \left(A\sqrt{A^2 - \lambda_k^2} + a\lambda_k \right), \quad k = 1, 2.$$

Действительно, нужно учесть, что $\mathrm{ch} t_k = A/\lambda_k$ и

$$\lambda_k^2 \mathrm{sh} t_k \mathrm{ch} t_k = A\lambda_k \mathrm{sh} t_k = A\lambda_k \sqrt{\mathrm{ch}^2 t_k - 1} = A\sqrt{A^2 - \lambda_k^2}\,.$$

7. Более общие результаты, связанные с минимальными поверхностями, представлены в [6].

Summary

Malozemov V. N. On the minimal rotation surface.

N. M. Guenter's analysis of the case of two stationary curves in the classic problem of the minimal rotation surface is supplemented.

Литература

1. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. Л.; М.: Гостехиздат, 1941. 308 с.

2. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Пер. с англ. М. Г. Элуашвили; Под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1974. 488 с.

3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

4. *Буслаев В. С.* Вариационное исчисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 287 с.

5. *Коша А.* Вариационное исчисление / Пер. с венг. Д. Валовича; Под ред. Ш. А. Алимова. М.: Высшая школа, 1983. 280 с.

6. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991. 176 с.

Статья поступила в редакцию 24 ноября 2005 г.