поведение максимумов признака в популяции. Предполагалось, что признаки всех частиц независимы и одинаково распределены.

Рассмотрим марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем. Процесс начинается с одной частицы, каждая частица живет показательно распределенное время с параметром $\lambda$, а затем производит случайное число потомков с производящей функцией $h(s) < s$, $s \in (0,1)$. Пусть признак имеет распределение $F$. Обозначим $M(t)$ максимум признака в популяции в момент $t \geqslant 0$.

**Теорема.** *Невырожденное распределение $\Psi$ удовлетворяет предельному соотношению*

$$\mathrm{P}\,\{M(t) \leqslant a(t)x + b(t)\} \to \Psi(x), \qquad t \to \infty$$

*при некоторых $F$ и функциях $a(t) > 0$, $b(t)$, тогда и только тогда, когда допустимо представление*

$$\Psi(x) = f\,(s_0, \ln(-\ln G(x))),$$

*при всех $x$, для которых правая часть существует, где $s_0 \in (0,1)$, функция $f(s,t)$ определяется уравнением*

$$\int_s^{f(s,t)} \frac{du}{h(u) - u} = \lambda t$$

*и $G(x)$ — распределение экстремальных значений* [4, с. 13].

Напомним, что существует всего три типа таких распределений, а именно (с точностью до линейной нормировки): $G_1(x) = \exp\{-e^{-x}\}$; $G_2(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}$, $x > 0$; $G_3(x) = \exp\{-(-x)^{\gamma}\}$, $x < 0$, $\gamma > 0$. Функция $f(s,t)$ при $t \geqslant 0$ совпадает с производящей функцией числа частиц в момент $t$ [3, с. 163]. Отметим, что в случае непрерывного времени не наблюдается такого разнообразия предельных законов, как при дискретном [1, 2].

Пример 1. Пусть $h(s) = s^2$, тогда возможны предельные законы $\Psi_1(x) = 1/(1+e^{-x})$ (логистическое распределение); $\Psi_2(x) = 1/(1+x^{-\beta})$, $x > 0$, $\beta > 0$; $\Psi_3(x) = 1/(1+(-x)^{\beta})$, $x < 0$, $\beta > 0$.

Пример 2. Пусть $h(s) = 1 - \sqrt{1-s}$, тогда возможны предельные законы $\Psi_1(x) = 1 - (1-e^{x})^2$, $x \leqslant 0$; $\Psi_2(x) = 1 - (1-x^{\beta})^2$, $x \in [0,1]$, $\beta > 0$; $\Psi_3(x) = 1 - (1-(-x)^{-\beta})^2$, $x \leqslant -1$, $\beta > 0$.

Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ 03-01-00724, 04-01-00700 и по гранту НШ 1758.2003.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев А. В.* Предельные законы для максимумов на надкритических ветвящихся процессах. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 4, с. 867–868.
2. *Лебедев А. В.* Максимумы на ветвящихся процессах. — Матем. заметки. (В печати.)
3. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
4. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

А. В. Лебедев, С. И. Микрюков, А. Л. Смирнов (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Численный анализ свободных колебаний и устойчивости цилиндрической оболочки с отверстием.**

В работе, представленной данным сообщением, приводятся результаты численного анализа влияния отверстия на колебания и устойчивость тонкой круговой цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием. Основной задачей исследования является выяснение характера влияния размера, формы, положения и числа отверстий на низшие собственные частоты свободных колебаний и критические величины нагрузок при различных способах нагружения оболочки.

Расчет собственных частот и форм свободных колебаний проводился с использованием метода конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS 8.1. При решении находились восемь низших собственных частот и форм, причем для оболочки без отверстия частоты являются кратными. Для рассматриваемой оболочки низшим частотам соответствовали формы с соответственно волновым числом в окружном направлении равным, $m = 4, 3, 5, 6$, и числом полуволн в меридиональном направлении $n = 1$. Наличие отверстия приводит к расщеплению кратных частот и изменению порядка следования форм.

Исследован эффект формы (симметрично расположенный центральный квадратный вырез и круглое отверстие) и размеров отверстия (длина стороны от $0{,}2R$ до $1{,}2R$ и радиус от $0{,}2R$ до $0{,}5R$). Обнаружено значительное падение первой собственной частоты, сопровождающееся сильным искажением формы колебаний в окрестности отверстия с увеличением его размера. Одновременно наблюдались мало изменяющиеся формы даже при больших размерах выреза, для которых падение частоты было также незначительным. Форма отверстия (квадрат или круг) играет слабую роль. Также рассматривались прямоугольные вырезы, вытянутые вдоль образующей или вдоль параллели. Увеличение размеров отверстия в первом случае сильнее сказывается на значениях собственных частот, чем при увеличение в окружном направлении. Во всех случаях при наличии отверстий наблюдались неидентифицируемые формы колебаний.

С помощью МКЭ исследовалась устойчивость замкнутой шарнирно опертой цилиндрической оболочки под действием гидростатического давления. Расчетные значения критической нагрузки, полученные при моделировании оболочки без отверстия, дали достаточно точное совпадение со значениями, полученными с помощью асимптотических формул [3]. После этого была рассмотрена оболочка с центрально расположенным прямоугольным отверстием, и, далее, исследовалась зависимость величины критической нагрузки от формы и положения отверстия. Полученные численные результаты сравнивались с экспериментальными и численными значениями величины критической нагрузки, полученными в работах других авторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бакулин В. Н., Снесарев С. Л.* Собственные колебания цилиндрических оболочек с прямоугольным вырезом. — Изв. ВУЗов, 1988, № 7.
2. *Гузь А. Н. и др.* Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев: Наукова думка, 1974.
3. *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Физматлит, 1995.


**А. Н. Л я п у н о в** (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Согласованность и равновесие в многокритериальных задачах.**

Обычно в многокритериальных задачах применяются два подхода: свертывание критериев в один и ранжирование критериев [1]. При этом решение должно быть Парето-оптимальным [2]. В представляемой работе применяется иной подход, который при некоторых условиях позволяет выделять из множества Парето-оптимальных точек некоторую точку, которая и называется решением.

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклый компакт, $f\colon X \to \mathbf{R}^m$ — такой набор критериев, что $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Если $x \in \mathbf{R}^n$, то будем писать $x = (x_j, x_{-j})$, где $x_j$ есть $j$-я координата $x$, а $x_{-j}$ есть совокупность остальных координат. Для $x \in X$ положим $a_j(x_{-j}) \stackrel{def}{=} \min\{x_j \mid (x_j, x_{-j}) \in X\}$, $b_j(x_{-j}) \stackrel{def}{=} \max\{x_j \mid (x_j, x_{-j}) \in X\}$. Совокупность