

КВАДРАТИЧНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ*

В. Н. Малозёмов

Аннотация. Эта статья написана на основе трёх лекций, которые автор прочитал в университете Калабрии (Италия) в мае 1999 г. по приглашению проф. Манлио Гаудиозо. Статья представляет собой нестандартное введение в вариационное исчисление, математически строгое и согласованное в идейном плане с теорией конечномерных экстремальных задач.

1°. Постановка задачи. Критерий оптимальности

1.1. Обозначим через $C[a, b]$ и $C^1[a, b]$ линейные пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций соответственно. Зафиксируем функции p, q, f из $C[a, b]$ и определим на $C^1[a, b]$ *интегральный квадратичный функционал в канонической форме*:

$$Q(x) = \int_a^b \left\{ p(t) [x'(t)]^2 + q(t) [x(t)]^2 - 2f(t)x(t) \right\} dt.$$

Нас интересует квадратичная вариационная задача следующего вида:

$$\begin{aligned} Q(x) &\rightarrow \inf, \\ x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x &\in C^1[a, b]. \end{aligned} \tag{1}$$

Функцию x , удовлетворяющую ограничениям задачи (1), назовём её *планом*. Множество планов обозначим через Ω . Решение x_* задачи (1) характеризуется тем, что $x_* \in \Omega$ и $Q(x) \geq Q(x_*)$ для всех $x \in \Omega$. Решение будем называть также *оптимальным планом*.

1.2. Введём множество допустимых вариаций

$$C_0^1[a, b] = \{h \in C^1[a, b] \mid h(a) = h(b) = 0\}.$$

Очевидно, что из условий $x \in \Omega$, $h \in C_0^1[a, b]$ следует, что $x + \alpha h \in \Omega$ при всех вещественных α .

*Журнал «Вестник молодых учёных. Прикл. мат. и мех.». 2000. № 3. С. 12–22.

Запишем разложение

$$\begin{aligned} Q(x + \alpha h) &= \int_a^b \{p(x' + \alpha h')^2 + q(x + \alpha h)^2 - 2f \cdot (x + \alpha h)\} dt = \\ &= Q(x) + 2\alpha \int_a^b \{px'h' + (qx - f)h\} dt + \alpha^2 \int_a^b \{p(h')^2 + qh^2\} dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} l(x; h) &= \int_a^b \{px'h' + (qx - f)h\} dt, \\ D(h) &= \int_a^b \{p(h')^2 + qh^2\} dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$Q(x + \alpha h) = Q(x) + 2\alpha l(x; h) + \alpha^2 D(h). \quad (2)$$

ЛЕММА 1. Если существует допустимая вариация h_0 , для которой $D(h_0) < 0$, то

$$\inf_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty. \quad (3)$$

Доказательство. Возьмём произвольный план x_0 . Согласно (2) выражение $Q(x_0 + \alpha h_0)$ представляет собой квадратичный трёхчлен относительно α с отрицательным старшим коэффициентом. Понятно, что $Q(x_0 + \alpha h_0) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$, откуда и следует (3). \square

Таким образом, задача (1) содержательна только при условии

$$D(h) \geq 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b], \quad (4)$$

то есть когда интегральная квадратичная форма $D(h)$ неотрицательно определена на $C_0^1[a, b]$. В дальнейшем это условие будем считать выполненным.

1.3. Разложение (2) и условие (4) позволяют легко получить критерий оптимальности.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы план x_* задачи (1) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$l(x_*; h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \quad (5)$$

Доказательство. Необходимость. Возьмём допустимую вариацию h . Поскольку x_* — точка минимума $Q(x)$ на Ω , то

$$0 \leq Q(x_* + \alpha h) - Q(x_*) = 2\alpha l(x_*; h) + \alpha^2 D(h).$$

Поделим это неравенство на $\alpha > 0$ и перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow +0$. Получим $l(x_*; h) \geq 0$. Отметим, что вместе с h допустимой вариацией является и $-h$. По доказанному $l(x_*; -h) \geq 0$, или $-l(x_*; h) \geq 0$. Объединяя два неравенства $l(x_*; h) \geq 0$ и $-l(x_*; h) \geq 0$, приходим к равенству (5).

Достаточность. Возьмём любой план x и положим $h = x - x_*$. Очевидно, что $h \in C_0^1[a, b]$. Согласно (2), (5) и (4) имеем

$$Q(x) = Q(x_* + h) = Q(x_*) + D(h) \geq Q(x_*).$$

Теорема доказана. □

1.4. Теперь в критерии оптимальности (5) нужно избавиться от h (переформулировать его в терминах функций p , q и f). Для этого потребуются некоторая подготовка.

ЛЕММА 2. Пусть $u \in C[a, b]$. Если

$$\int_a^b u(t)h'(t)dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b],$$

то $u(t) \equiv \text{const}$ на $[a, b]$.

Доказательство. Положим $u_1(t) = \int_a^t u(\tau)d\tau$ и введём линейную функцию $p_1(t) = c_0t + c_1$, интерполирующую $u_1(t)$ в точках $t = a$ и $t = b$:

$$p_1(a) = u_1(a), \quad p_1(b) = u_1(b).$$

Разность $h_1(t) = u_1(t) - p_1(t)$ является допустимой вариацией, причём $h_1'(t) = u(t) - c_0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(t) - c_0]^2 dt &= \int_a^b [u(t) - c_0]h_1'(t)dt = \\ &= \int_a^b u(t)h_1'(t)dt - c_0 \int_a^b h_1'(t)dt = \int_a^b u(t)h_1'(t)dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл в силу условия леммы равен нулю, так что

$$\int_a^b [u(t) - c_0]^2 dt = 0.$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

ОСНОВНАЯ ЛЕММА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. Пусть функции u , v принадлежат $C[a, b]$. Для того чтобы выполнялось равенство

$$\int_a^b [u(t)h'(t) + v(t)h(t)] dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b], \quad (6)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$u \in C^1[a, b] \quad \text{и} \quad u'(t) \equiv v(t) \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Доказательство. Необходимость. Положим $v_1(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau$. При $h \in C_0^1[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b v(t)h(t) dt &= \int_a^b v_1'(t)h(t) dt = v_1(t)h(t) \Big|_a^b - \int_a^b v_1(t)h'(t) dt = \\ &= - \int_a^b v_1(t)h'(t) dt. \end{aligned}$$

Условие (6) принимает вид

$$\int_a^b [u(t) - v_1(t)] h'(t) dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b].$$

По лемме 2, $u(t) - v_1(t) \equiv \text{const}$ или

$$u(t) \equiv v_1(t) + \text{const} \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Отсюда следует и непрерывная дифференцируемость функции $u(t)$, и тождество $u'(t) \equiv v(t)$ на $[a, b]$.

Достаточность. При $h \in C_0^1[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(t)h'(t) + v(t)h(t)] dt &= \int_a^b [u(t)h'(t) + u'(t)h(t)] dt = \\ &= \int_a^b [u(t)h(t)]' dt = u(t)h(t) \Big|_a^b = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

1.5. Вернёмся к критерию оптимальности (5) и перепишем его в развёрнутом виде:

$$\int_a^b \{px'_*h' + (qx_* - f)h\} dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы план x_* задачи (1) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы $px'_* \in C^1[a, b]$ и

$$-(px'_*) + qx_* = f \quad \text{на } [a, b]. \quad (8)$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 и основной леммы вариационного исчисления при $u(t) = p(t)x'_*(t)$, $v(t) = q(t)x_*(t) - f(t)$. \square

Установлено, что решение задачи (1) сводится к решению краевой задачи

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(x; t) &:= -\frac{d}{dt} \left(p \frac{dx}{dt} \right) + qx = f, \\ x(a) &= A, \quad x(b) = B. \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференциальный оператор $\mathfrak{L}(x; t)$ называется *оператором Штурма–Лиувилля*.

1.6. Напомним, что теорема 2 справедлива при выполнении условия (4), которое в развёрнутом виде выглядит так:

$$\int_a^b \{p(h')^2 + qh^2\} dt \geq 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \quad (10)$$

Избавиться в этом условии от h (переформулировать его в терминах p и q) — непростая задача, решению которой посвящён следующий раздел. Пока же отметим, что неравенство (10) очевидно выполняется, если функции $p(t)$ и $q(t)$ неотрицательны на $[a, b]$.

Менее тривиальным является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Если $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a, b]$, то необходимо

$$p(t) \geq 0 \quad \text{на } [a, b]. \quad (11)$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдётся точка $t_0 \in (a, b)$, в которой $p(t_0) < 0$. Положим $\varepsilon_0 = -p(t_0)/2$ и выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset (a, b)$ и $|p(t) - p(t_0)| \leq \varepsilon_0$ при $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$. В этом случае $p(t) \leq p(t_0) + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0$, то есть

$$p(t) \leq -\varepsilon_0 \quad \text{на } [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]. \quad (12)$$

При $\delta \in (0, \delta_0]$ введём вариацию

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{\delta}(t - t_0)\right) \right], & \text{если } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ 0 & \text{при остальных } t \in [a, b]. \end{cases}$$

Поскольку $h'_\delta(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - t_0)\right)$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, то $h_\delta \in C_0^1[a, b]$. Кроме того,

$$0 \leq h_\delta(t) \leq 2\sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \quad \text{на } [a, b]. \quad (13)$$

Согласно (12) и (13) имеем

$$\begin{aligned} D(h_\delta) &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \{p(h'_\delta)^2 + qh_\delta^2\} dt \leq -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \sin^2\left(\frac{\pi}{\delta}(t - t_0)\right) dt + \\ &+ \frac{4\delta}{\pi} \int_a^b |q(t)| dt = -\varepsilon_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\tau) d\tau + \frac{4\delta}{\pi} \int_a^b |q(t)| dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что $D(h_\delta) < 0$ при малых $\delta > 0$. Но это противоречит предположению о неотрицательности $D(h)$ на $C_0^1[a, b]$. Теорема доказана. \square

1.7. Условие (11) называется *условием Лежандра*. Оно необходимо для неотрицательной определенности $D(h)$ на $C_0^1[a, b]$, но не достаточно. Более того, даже *усиленное условие Лежандра* $p(t) > 0$ на $[a, b]$ не гарантирует неотрицательной определенности $D(h)$ на $C_0^1[a, b]$.

ПРИМЕР. Возьмём

$$D_\lambda(h) = \int_0^\pi \{(h')^2 - \lambda h^2\} dt, \quad h \in C_0^1[0, \pi].$$

Здесь $p(t) \equiv 1$ — усиленное условие Лежандра выполнено. Вместе с тем, на допустимой вариации $h_0(t) = \sin(t)$ имеем

$$D_\lambda(h_0) = \int_0^\pi \{\cos^2(t) - \lambda \sin^2(t)\} dt = \frac{\pi}{2}(1 - \lambda),$$

так что при $\lambda > 1$ интегральная квадратичная форма $D_\lambda(h)$ не является неотрицательно определенной на $C_0^1[0, \pi]$.

2°. Критерий неотрицательной определённости интегральной квадратичной формы

2.1. Будем исследовать интегральную квадратичную форму

$$D(h) = \int_a^b \{p(h')^2 + qh^2\} dt, \quad h \in C_0^1[a, b],$$

при следующих предположениях

$$q \in C[a, b], \quad p \in C^1[a, b], \quad p(t) > 0 \quad \text{на } [a, b]. \quad (14)$$

Рассмотрим на $[a, b]$ дифференциальное уравнение

$$(ph')' = qh. \quad (15)$$

Учитывая (14), перепишем его в виде $ph'' + p'h' - qh = 0$, или, что равносильно,

$$h'' + \frac{p'}{p}h' - \frac{q}{p}h = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) называется *уравнением Якоби*. Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка, разрешённое относительно старшей производной, с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что такое уравнение имеет единственное на $[a, b]$ решение при любых начальных условиях вида $h(c) = A$, $h'(c) = A'$, где $c \in [a, b]$. Назовём *главным решением уравнения Якоби* то решение $h_0(t)$, у которого

$$h_0(a) = 0, \quad h'_0(a) = 1. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА ЯКОБИ. Пусть выполнены условия (14). Для того чтобы квадратичная форма $D(h)$ была неотрицательно определённой на $C_0^1[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ было положительным на (a, b) .

2.2. Доказательство. Достаточность. Допустим, что $h_0(t) > 0$ на (a, b) . Покажем, что

$$D(h) = \int_a^b p \left(h' - \frac{h}{h_0} h'_0 \right)^2 dt \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \quad (18)$$

Отметим прежде всего, что функция h/h_0 непрерывна на $[a, b]$. Действительно, по правилу Лопиталья для $h \in C_0^1[a, b]$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \frac{h(t)}{h_0(t)} = \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{h'(t)}{h'_0(t)} = h'(a).$$

Далее, предел дроби $h(t)/h_0(t)$ при $t \rightarrow b - 0$ равен нулю, если $h_0(b) > 0$. Если же $h_0(b) = 0$, то $h'_0(b) \neq 0$ [иначе $h_0(t) \equiv 0$ в силу единственности решения уравнения Якоби с начальными условиями $h_0(b) = 0$, $h'_0(b) = 0$, что противоречит (17)]. В этом случае

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \frac{h(t)}{h_0(t)} = \lim_{t \rightarrow b-0} \frac{h'(t)}{h'_0(t)} = \frac{h'(b)}{h'_0(b)}.$$

Установлено, что $h/h_0 \in C[a, b]$. Значит, под интегралом в правой части (18) стоит непрерывная функция.

Проверим справедливость равенства (18). При малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(h' - \frac{h}{h_0}h'_0\right)^2 dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p(h')^2 dt - 2 \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph'_0}{h_0} hh' dt + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(\frac{h'_0}{h_0}\right)^2 h^2 dt. \quad (19)$$

Но

$$\begin{aligned} -2 \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph'_0}{h_0} hh' dt &= - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph'_0}{h_0} dh^2 = - \frac{ph'_0}{h_0} h^2 \Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left(\frac{ph'_0}{h_0}\right)' h^2 dt = \\ &= -p \frac{h}{h_0} h'_0 h \Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{(ph'_0)'}{h_0} h^2 dt - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left(\frac{h'_0}{h_0}\right)^2 h^2 dt. \end{aligned}$$

Поскольку h_0 удовлетворяет уравнению (15), то

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{(ph'_0)'}{h_0} h^2 dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} qh^2 dt.$$

Значит,

$$-2 \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph'_0}{h_0} hh' dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} qh^2 dt - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(\frac{h'_0}{h_0}\right)^2 h^2 dt - p \frac{h}{h_0} h'_0 h \Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}.$$

Подставляя это в (19), получаем

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(h' - \frac{h}{h_0}h'_0\right)^2 dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \{p(h')^2 + qh^2\} dt - p \frac{h}{h_0} h'_0 h \Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}.$$

В данном равенстве перейдём к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$. Функция $p(h/h_0)h'_0$ непрерывна на $[a, b]$ и $h \in C_0^1[a, b]$, так что двойная подстановка стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Теперь ясно, что предельный переход приводит к формуле (18), из которой, в частности, следует, что $D(h) \geq 0$ при всех $h \in C_0^1[a, b]$. Достаточность установлена. \square

2.3. Для доказательства необходимости потребуется некоторая подготовка.

ЛЕММА О СКРУГЛЕНИИ УГЛОВ. Пусть $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a, b]$. Если функция \hat{h} удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \hat{h} &\in C[a, b], \quad \hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0; \\ \hat{h} &\in C^1[a, \xi], \quad \hat{h} \in C^1[\xi, b] \quad \text{при некотором } \xi \in (a, b), \end{aligned}$$

то $D(\hat{h}) \geq 0$.

Характерный вид функции \hat{h} изображён на рис. 1.

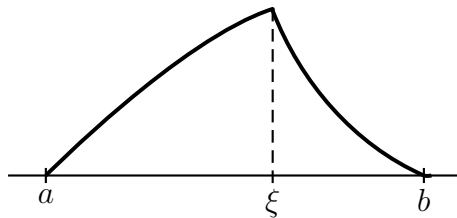


Рис. 1. Вид вариации \hat{h}

Доказательство. Введём вспомогательную функцию (см. рис. 2)

$$g(t) = \begin{cases} \left(\frac{1-|t|}{2}\right)^2 & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{при остальных } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

На интервале $(0, 1)$ имеем

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}(1-t).$$

Учитывая чётность g , запишем

$$g'(+0) = -\frac{1}{2}, \quad g'(-0) = \frac{1}{2}, \quad |g'(t)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } t \neq 0. \quad (20)$$

К этому нужно добавить, что $0 \leq g(t) \leq 1/4$ на \mathbb{R} .

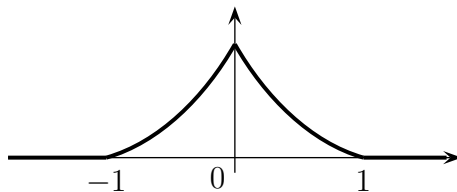


Рис. 2. Вид функции $g(t)$

Положим при $\delta > 0$

$$g_\delta(t) = \delta g\left(\frac{t}{\delta}\right).$$

Очевидно, что $g_\delta(t) = 0$ вне $[-\delta, \delta]$. Кроме того,

$$0 \leq g_\delta(t) \leq \delta/4 \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (21)$$

Поскольку $g'_\delta(t) = g'(t/\delta)$, то согласно (20) при всех $\delta > 0$

$$g'_\delta(+0) = -\frac{1}{2}, \quad g'_\delta(-0) = \frac{1}{2}, \quad |g'_\delta(t)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } t \neq 0. \quad (22)$$

Введём обозначение $\alpha_1 = \hat{h}'(\xi+0) - \hat{h}'(\xi-0)$ и при малых $\delta > 0$ рассмотрим функцию

$$h_\delta(t) = \hat{h}(t) + \alpha_1 g_\delta(t - \xi).$$

Покажем, что $h_\delta \in C_0^1[a, b]$. Сомнение вызывает только дифференцируемость $h_\delta(t)$ при $t = \xi$. Имеем согласно (22)

$$h'_\delta(\xi + 0) = \hat{h}'(\xi + 0) - \frac{1}{2}\alpha_1, \quad h'_\delta(\xi - 0) = \hat{h}'(\xi - 0) + \frac{1}{2}\alpha_1.$$

Учитывая определение α_1 , получаем $h'_\delta(\xi+0) - h'_\delta(\xi-0) = 0$, то есть $h'_\delta(\xi+0) = h'_\delta(\xi-0)$. Установлено, что $h_\delta \in C_0^1[a, b]$ при малых $\delta > 0$.

Согласно условию леммы $D(h_\delta) \geq 0$. Распишем это неравенство подробно:

$$\begin{aligned} 0 &\leq D(\hat{h} + \alpha_1 g_\delta(\cdot - \xi)) = \\ &= \int_a^b \left\{ p(\hat{h}' + \alpha_1 g'_\delta(\cdot - \xi))^2 + q(\hat{h} + \alpha_1 g_\delta(\cdot - \xi))^2 \right\} dt = \\ &= D(\hat{h}) + \alpha_1 \int_a^b q[2\hat{h}g_\delta(\cdot - \xi) + \alpha_1 g_\delta^2(\cdot - \xi)] dt + \\ &\quad + \alpha_1 \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} p[2\hat{h}'g'_\delta(\cdot - \xi) + \alpha_1 (g'_\delta(\cdot - \xi))^2] dt =: \\ &=: D(\hat{h}) + \alpha_1 I_\delta^{(0)} + \alpha_1 I_\delta^{(1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Оценим интегралы $I_\delta^{(0)}$ и $I_\delta^{(1)}$. На основании (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} |I_\delta^{(0)}| &\leq \frac{\delta}{2} \int_a^b |q| (|\hat{h}| + |\alpha_1| \delta/8) dt, \\ |I_\delta^{(1)}| &\leq \left(\int_{\xi-\delta}^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi+\delta} \right) p (|\hat{h}'| + |\alpha_1|/4) dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что $I_\delta^{(0)} \rightarrow 0$ и $I_\delta^{(1)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Переходя в (23) к пределу при $\delta \rightarrow +0$, получаем $D(\hat{h}) \geq 0$. Лемма доказана. \square

2.4. Нам понадобится ещё одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть в некоторой точке $\xi \in (a, b]$ главное решение уравнения Якоби обращается в ноль, $h_0(\xi) = 0$. Тогда

$$\int_a^\xi [p(h_0')^2 + qh_0^2] dt = 0. \quad (24)$$

Доказательство. Согласно (15) и определению h_0 имеем

$$\int_a^\xi p(h_0')^2 dt = \int_a^\xi ph_0' dh_0 = - \int_a^\xi (ph_0')' h_0 dt = - \int_a^\xi qh_0^2 dt,$$

откуда и следует (24). □

Замечание. Если $h_0(b) = 0$, то $h_0 \in C_0^1[a, b]$ и $D(h_0) = 0$.

2.5. Переходим к доказательству необходимости в теореме Якоби. Пусть $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a, b]$. Покажем, что главное решение $h_0(t)$ уравнения Якоби положительно на (a, b) .

В противном случае найдётся точка $\xi \in (a, b)$, в которой $h_0(\xi) = 0$. При этом $h_0'(\xi) \neq 0$ (в силу единственности решения уравнения Якоби — см. пункт 2.2).

Введём функцию

$$\hat{h}_0(t) = \begin{cases} h_0(t) & \text{при } t \in [a, \xi], \\ 0 & \text{при } t \in [\xi, b]. \end{cases}$$

По лемме 3

$$D(\hat{h}_0) = \int_a^\xi \{p(h_0')^2 + qh_0^2\} dt = 0. \quad (25)$$

Возьмём произвольную вариацию $h \in C_0^1[a, b]$ и запишем разложение

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = D(\hat{h}_0) + \alpha D(h) + 2\alpha \int_a^\xi [ph_0'h' + qh_0h] dt.$$

Имеем

$$\int_a^\xi ph_0'h' dt = \int_a^\xi (ph_0') dh = ph_0'h \Big|_a^\xi - \int_a^\xi qh_0h dt.$$

Учитывая (25), получаем

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = \alpha^2 D(h) + 2\alpha p(\xi)h_0'(\xi)h(\xi).$$

Выберем допустимую вариацию h так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda := 2p(\xi)h'_0(\xi)h(\xi) < 0.$$

Тогда

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = \alpha[\lambda + \alpha D(h)]. \quad (26)$$

При малых $\alpha > 0$ правая часть (26) отрицательна. Вместе с тем, $D(\hat{h}_0 + \alpha h) \geq 0$, поскольку функция $\hat{h}_0 + \alpha h$ удовлетворяет условиям леммы о скруглении углов. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Якоби. \square

2.6. Условие $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b)$ называется *условием Якоби*. При доказательстве достаточности в теореме Якоби было установлено, что выполнение условия Якоби гарантирует для интергального квадратичного функционала $D(h)$ представление (18). Этот факт имеет дополнительное следствие.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие Якоби. Если допустимая вариация h_* такова, что $D(h_*) = 0$, то $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ при некотором вещественном λ , где h_0 — главное решение уравнения Якоби.

Доказательство. Согласно (18)

$$D(h_*) = \int_a^b p\left(h'_* - \frac{h_*}{h_0}h'_0\right)^2 dt.$$

По условию леммы $D(h_*) = 0$. Принимая во внимание, что $p(t) > 0$ на $[a, b]$, получаем

$$h'_* - \frac{h_*}{h_0}h'_0 = 0 \quad \text{на } (a, b).$$

Перепишем это равенство в эквивалентном виде

$$\frac{h'_*h_0 - h_*h'_0}{h_0^2} = 0 \quad \text{на } (a, b).$$

Это значит, что $\left(\frac{h_*}{h_0}\right)' = 0$ на (a, b) . Теперь очевидно, что $\frac{h_*}{h_0} \equiv \text{const}$ или $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ при $t \in (a, b)$. По непрерывности последнее равенство выполняется на всём отрезке $[a, b]$.

Лемма доказана. \square

3°. Критерий положительной определённости интегральной квадратичной формы

3.1. Квадратичная форма $D(h)$ называется *положительно определённой* на $C_0^1[a, b]$, если $D(h) > 0$ при всех $h \in C_0^1[a, b]$, не равных тождественно нулю на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (14). Для того чтобы квадратичная форма $D(h)$ была положительно определённой на $C_0^1[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы главное решение $h_0(t)$ уравнения Якоби было положительным на $(a, b]$ (включая точку $t = b$).

Доказательство. Необходимость. Очевидно, что положительно определённая форма $D(h)$ является и неотрицательно определённой. По теореме Якоби $h_0(t) > 0$ на (a, b) . Остаётся проверить, что $h_0(b) > 0$. Допустим противное: $h_0(b) = 0$. Тогда $h_0 \in C_0^1[a, b]$. Более того, $D(h_0) = 0$. Это следует из леммы 3 при $\xi = b$. Получили противоречие с положительной определённой $D(h)$, поскольку главное решение $h_0(t)$ уравнения Якоби не равно тождественно нулю на $[a, b]$ ($h_0'(a) = 1$).

Достаточность. Так как, в частности, $h_0(t) > 0$ на (a, b) , то по теореме Якоби $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a, b]$. Допустим, что $D(h_*) = 0$ на некоторой допустимой вариации h_* . В силу леммы 4 имеем $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $[a, b]$. В частности, $h_*(b) = \lambda h_0(b)$. В этом равенстве $h_*(b) = 0$ по определению допустимой вариации и $h_0(b) > 0$ по условию теоремы. Значит, $\lambda = 0$, так что $h_*(t) \equiv 0$ на $[a, b]$. Установлено, что $D(h) > 0$ на всех допустимых вариациях, не равных тождественно нулю на $[a, b]$.

Теорема доказана. □

3.2. Условие $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b]$ называется *усиленным условием Якоби*.

ТЕОРЕМА 5. При выполнении усиленного условия Якоби существует константа $\mu > 0$, такая, что

$$D(h) \geq \mu \int_a^b (h')^2 dt \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \quad (27)$$

Доказательство. Теория Якоби развивается в предположениях (14). В частности, считается, что выполнено усиленное условие Лежандра $p(t) > 0$ при $t \in [a, b]$.

Обозначим

$$\mu_0 = \min_{t \in [a, b]} p(t).$$

Ясно, что $\mu_0 > 0$. При $\mu \in (0, \mu_0)$ рассмотрим семейство интегральных квадратичных функционалов

$$D_\mu(h) = \int_a^b [(p - \mu)(h')^2 + qh^2] dt.$$

Покажем, что при некотором $\mu \in (0, \mu_0)$ функционал $D_\mu(h)$ положительно определён на $C_0^1[a, b]$. Отсюда очевидным образом будет следовать неравенство (27).

Запишем уравнение Якоби для $D_\mu(h)$:

$$h'' + \frac{p'}{p - \mu} h' - \frac{q}{p - \mu} h = 0. \quad (28)$$

Обозначим через $h(t, \mu)$ главное решение уравнения Якоби. Оно удовлетворяет начальным условиям

$$h(a, \mu) = 0, \quad h'(a, \mu) = 1.$$

Коэффициенты уравнения (28) зависят от параметра μ . Они непрерывны на множестве $[a, b] \times (-\mu_0, \mu_0)$, причём $h(t, 0) = h_0(t)$. По теореме о непрерывной зависимости решения линейного однородного дифференциального уравнения от параметра найдётся $\mu_1 \in (0, \mu_0)$, такое, что функции $h(t, \mu)$ и $h'(t, \mu)$ будут непрерывными по совокупности переменных на множестве $[a, b] \times [-\mu_1, \mu_1]$.

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$. По нему найдётся $\delta > 0$ со свойством

$$|h'(t, \mu) - h'(a, 0)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leq t - a \leq \delta \quad \text{и} \quad 0 \leq \mu \leq \delta.$$

В частности, при тех же t и μ

$$h'(t, \mu) \geq h'(a, 0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

и

$$h(t, \mu) = h(t, \mu) - h(a, \mu) = h'(\xi, \mu)(t - a) \geq \frac{1}{2}(t - a). \quad (29)$$

Пусть при $t \in [a + \delta, b]$ будет $h(t, 0) \geq \varepsilon_1 > 0$. Тогда найдётся $\delta_1 \in (0, \delta]$ со свойством

$$|h(t, \mu) - h(t, 0)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1 \quad \text{при} \quad t \in [a + \delta, b] \quad \text{и} \quad 0 \leq \mu \leq \delta_1.$$

В частности, при тех же t и μ

$$h(t, \mu) \geq h(t, 0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \geq \frac{1}{2}\varepsilon_1. \quad (30)$$

На основании (29) и (30) заключаем, что при $\mu = \delta_1$ главное решение $h(t, \mu)$ уравнения (28) положительно на $(a, b]$. Это гарантирует положительную определённость функционала $D_\mu(h)$ на $C_0^1[a, b]$.

Теорема доказана. \square

4°. **Описание всего множества решений.** Вернёмся к квадратичной вариационной задаче (1). Пусть x_* — некоторое её решение. Согласно (2) и (5) имеем

$$Q(x_* + h) = Q(x_*) + D(h) \quad \forall h \in C_0^1[a, b].$$

Отсюда следует, что в случае положительной определённости интегральной квадратичной формы $D(h)$ решение x_* единственно. Если к тому же выполнены условия (14), то в силу теоремы 5 при некотором $\mu > 0$ справедливо неравенство

$$Q(x_* + h) \geq Q(x_*) + \mu \int_0^1 (h')^2 dt \quad \forall h \in C_0^1[a, b].$$

А что можно сказать, когда $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b)$, но $h_0(b) = 0$, то есть когда форма $D(h)$ только неотрицательно определена?

ТЕОРЕМА 6. Пусть x_* — некоторое решение задачи (1). Если выполнено сформулированное выше условие, то всё множество решений задачи (1) допускает представление

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Доказательство. В данном случае $h_0 \in C_0^1[a, b]$ и $D(h_0) = 0$ в силу леммы 3 при $\xi = b$.

Возьмём план x вида (31). Пользуясь разложением (2) и формулой (5), получаем

$$Q(x) = Q(x_* + \lambda h_0) = Q(x_*) + \lambda^2 D(h_0) = Q(x_*),$$

так что на плане x , как и на плане x_* , функционал $Q(x)$ достигает наименьшего значения.

Наоборот, пусть x — оптимальный план. Обозначим $h_* = x - x_*$. Ясно, что $h_* \in C_0^1[a, b]$. Имеем

$$Q(x) = Q(x_* + h_*) = Q(x_*) + D(h_*).$$

Так как $Q(x) = Q(x_*)$, то $D(h_*) = 0$. По лемме 4, $h_* = \lambda h_0$ при некотором вещественном λ . Значит, $x = x_* + h_* = x_* + \lambda h_0$.

Теорема доказана. \square

5°. **Неограниченность снизу функционала $Q(x)$.** Если $h_0(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in (a, b)$, то по теореме Якоби квадратичная форма $D(h)$ не будет неотрицательно определённой на множестве $C_0^1[a, b]$. В этом случае согласно лемме 1 справедливо соотношение (3), то есть функционал $Q(x)$ не ограничен снизу на множестве планов Ω . Следующее утверждение дополняет этот результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $h_0(t) > 0$ на (a, b) , но $h_0(b) = 0$. При выполнении условия

$$\int_a^b f h_0 dt \neq p(b)Bh'_0(b) - p(a)A \quad (32)$$

справедливо соотношение (3).

Доказательство. В данном случае $h_0 \in C_0^1[a, b]$ и $D(h_0) = 0$. Возьмём произвольный план x_0 и запишем разложение

$$Q(x_0 + \alpha h_0) = Q(x_0) + 2\alpha l(x_0; h_0), \quad (33)$$

где

$$l(x_0; h_0) = \int_a^b [px'_0 h'_0 + (qx_0 - f)h_0] dt.$$

Так как $(ph'_0)' = qh_0$, то

$$\int_a^b px'_0 h'_0 dt = \int_a^b ph'_0 dx_0 = ph'_0 x_0 \Big|_a^b - \int_a^b qh_0 x_0 dt.$$

Значит,

$$l(x_0; h_0) = px_0 h'_0 \Big|_a^b - \int_a^b f h_0 dt.$$

При выполнении условия (32) коэффициент $2l(x_0; h_0)$ в разложении (33) отличен от нуля, откуда и следует заключение теоремы. \square

При $f(t) \equiv 0$ на $[a, b]$ условие (32) принимает простой вид

$$p(b)Bh'_0(b) \neq p(a)A.$$

6°. Схема решения квадратичной вариационной задачи

6.1. Рассмотрим квадратичную вариационную задачу

$$Q(x) := \int_a^b \{p(x')^2 + qx^2 - 2fx\} dt \rightarrow \inf, \quad (32)$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a, b].$$

Предположим, что

$$q \in C[a, b], \quad p \in C^1[a, b], \quad p(t) > 0 \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Проведённый в предыдущих разделах анализ позволяет предложить следующую схему решения задачи (32).

1) Находим главное решение уравнения Якоби

$$\begin{aligned} -(ph')' + qh &= 0, \\ h(a) &= 0, \quad h'(a) = 1. \end{aligned}$$

Обозначим его $h_0(t)$.

2) Если $h_0(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in (a, b)$, то

$$\inf_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty.$$

3) Пусть $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b)$. Решаем краевую задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} -(px')' + qx &= f, \\ x(a) &= A, \quad x(b) = B. \end{aligned}$$

Пусть x_* — некоторое её решение. (Отметим, что существование решения не гарантируется, равно как не исключается наличие бесконечного множества решений — см. примеры ниже.)

4) Если $h_0(b) > 0$, то x_* — единственное решение задачи (32).

Если $h_0(b) = 0$, то всё множество решений задачи (32) допускает представление

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

З а м е ч а н и е 1. Дифференциальные операторы в уравнениях Якоби и Штурма–Лиувилля одинаковые. Только уравнение Якоби однородное, а уравнение Штурма–Лиувилля неоднородное, и для уравнения Якоби решается задача Коши, а для уравнения Штурма–Лиувилля — краевая задача.

З а м е ч а н и е 2. Выполнение усиленного условия Лежандра $p(t) > 0$ при $t \in [a, b]$ существенно для теории Якоби. Если $p(t) \geq 0$ и $q(t) \geq 0$ при $t \in [a, b]$, то квадратичная форма $D(h)$ неотрицательно определена на $C_0^1[a, b]$. В этом случае следует сразу переходить к решению краевой задачи для уравнения Штурма–Лиувилля.

6.2. Обратимся к примерам.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим квадратичную вариационную задачу

$$\begin{aligned} Q(x) &:= \int_0^{\pi/2} \{(x')^2 - x^2\} dt \rightarrow \inf, \\ x(0) &= 0, \quad x(\pi/2) = 1, \quad x \in C^1[0, \pi/2]. \end{aligned} \tag{33}$$

В данном случае $p(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv -1$, $f(t) \equiv 0$. Все необходимые условия выполнены. Найдём главное решение уравнения Якоби

$$-h'' - h = 0, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 1.$$

Общее решение уравнения Якоби имеет вид

$$h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Выделим главное решение: $h(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $h'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. Таким образом, $h_0(t) = \sin(t)$. Имеем $h_0(t) > 0$ на $(0, \pi/2]$.

Решим краевую задачу Штурма–Лиувилля

$$-x'' - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1.$$

Из общего решения $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ выделим то, которое удовлетворяет краевым условиям: $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $x(\pi/2) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. Получаем $x_*(t) = \sin(t)$. Поскольку $h_0(\pi/2) > 0$, то x_* — единственное решение задачи (33).

ПРИМЕР 2. В задаче (33) заменим $\pi/2$ на π . Придём к такой задаче:

$$Q(x) := \int_0^\pi \{(x')^2 - x^2\} dt \rightarrow \inf, \quad (34)$$

$$x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1, \quad x \in C^1[0, \pi].$$

Главное решение уравнения Якоби не изменится, $h_0(t) = \sin(t)$, причём $h_0(t)$ остаётся положительным на $(0, \pi)$.

Обратимся к краевой задаче Штурма–Лиувилля:

$$-x'' - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1. \quad (35)$$

Из общего решения $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ выделим то, которое удовлетворяет первому краевому условию: $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Второе краевое условие $x(\pi) = 1$ принимает вид $c_2 \sin(\pi) = 1$. Оно не выполняется ни при каком c_2 . Значит, задача (35) не имеет решения.

В данном случае $\inf_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty$. Это следует из теоремы 7.

ПРИМЕР 3. В задаче (34) заменим второе краевое условие $x(\pi) = 1$ на $x(\pi) = 0$. У новой задачи

$$Q(x) := \int_0^\pi \{(x')^2 - x^2\} dt \rightarrow \inf, \quad (36)$$

$$x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0, \quad x \in C^1[0, \pi]$$

главное решение уравнения Якоби остаётся тем же, $h_0(t) = \sin(t)$. Сохраняется и его положительность на $(0, \pi)$. Что касается краевой задачи Штурма–Лиувилля

$$-x'' - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0,$$

то её очевидным решением является функция $x_*(t) \equiv 0$. Учитывая равенство $h_0(\pi) = 0$, приходим к выводу о том, что всё множество решений задачи (36) допускает представление

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t) = \lambda \sin(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6.3. В заключение отметим, что использованный в данной статье элементарный подход позволяет решать и более сложные вариационные задачи (см., например, [1]). Дальнейшие сведения о вариационном исчислении можно найти в книгах [2, 3, 4, 5].

ДОБАВЛЕНИЕ

ВЫПУКЛОСТЬ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

На выпуклом множестве Ω ,

$$\Omega = \{x \in C^1[a, b] \mid x(a) = A, x(b) = B\},$$

рассмотрим квадратичный функционал

$$Q(x) = \int_a^b [p(x')^2 + qx^2 - 2fx] dt,$$

где p , q и f — непрерывные функции.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы функционал $Q(x)$ был выпуклым на Ω , необходимо и достаточно, чтобы интегральная квадратичная форма*

$$D(h) = \int_a^b [p(h')^2 + qh^2] dt$$

была неотрицательно определённой на $C_0^1[a, b]$.

Доказательство. *Достаточность.* Нужно проверить, что при всех x_0 , x_1 из Ω и всех $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$Q(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda Q(x_1) + (1 - \lambda)Q(x_0). \quad (37)$$

Зафиксируем x_0, x_1 из Ω и положим $h = x_1 - x_0$. Ясно, что $h \in C_0^1[a, b]$. При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ согласно (2) имеем

$$Q(x_0 + \lambda h) = Q(x_0) + 2\lambda l(x_0; h) + \lambda^2 D(h). \quad (38)$$

В частности, при $\lambda = 1$

$$Q(x_1) = Q(x_0) + 2l(x_0; h) + D(h).$$

Отсюда следует, что

$$2l(x_0; h) = Q(x_1) - Q(x_0) - D(h).$$

Подставив это в (38), получим

$$\begin{aligned} Q(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_0) &= Q(x_0) + \lambda[Q(x_1) - Q(x_0) - D(h)] + \lambda^2 D(h) = \\ &= \lambda Q(x_1) + (1 - \lambda)Q(x_0) - \lambda(1 - \lambda)D(h). \end{aligned} \quad (39)$$

По условию теоремы $D(h) \geq 0$, что гарантирует справедливость неравенства (37) при $\lambda \in [0, 1]$.

Необходимость. Зафиксируем $h \in C_0^1[a, b]$, возьмём произвольную функцию x_0 из Ω и положим $x_1 = x_0 + h$. Ясно, что $x_1 \in \Omega$. Воспользуемся равенством (39) при $\lambda = \frac{1}{2}$. Запишем

$$Q\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_0)\right) - \frac{1}{2}[Q(x_1) + Q(x_0)] = -\frac{1}{4}D(h).$$

Левая часть этого равенства неположительна в силу выпуклости $Q(x)$ на Ω . Значит, $D(h) \geq 0$.

Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е. Конкретный вид функционалов $l(x; h)$ и $D(h)$ не играл роли. Использовалось только разложение (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирушев В. А., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Хвост дракона* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1997. Т. 37. № 11. С. 1362–1369.
2. Буслаев В. С. *Вариационное исчисление*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 287 с.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление*. М.: Наука, 1979. 429 с.
4. Смирнов В. И. *Курс высшей математики*. Т. IV. Часть I. Изд. 6-е. М.: Наука, 1974. 336 с.
5. Михлин С. Г. *Курс математической физики*. М.: Физматгиз, 1968. 575 с.