

## НИЗКОЧАСТОТНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ИОНАХ

Н. Б. Авдонина, Д. А. Тельнов

Рассмотрено тормозное излучение электронов в статическом поле атомного иона. Сечение процесса получено в виде суммы сечения тормозного излучения на кулоновском потенциале  $V_c = -z_i/r$  ( $z_i$  — зарядность иона) и слагаемого, зависящего от короткодействующих фаз рассеяния. Частота излучаемого кванта предполагается малой:  $\omega \ll I \ll \epsilon$ , где  $I$  — потенциал ионизации иона,  $\epsilon$  — энергия налетающего электрона. Установлена связь между сечением низкочастотного тормозного излучения и сечением упругого рассеяния на ионе. Исследована зависимость сечения тормозного излучения от энергии налетающей частицы. Выполнены расчеты спектров для ионов  $Ar^+$ ,  $Fe^+$  и  $Rh^+$ , демонстрирующие существенное отличие их от чисто кулоновских.

1. В работе рассмотрены тормозное излучение низкоэнергетических электронов в статическом поле положительного иона и влияние на этот процесс короткодействующего потенциала многоэлектронной мишени. Предполагается, что электрон излучает в сферически-симметричном поле иона зарядности  $z_i$ ,

$$V(r) = -z_i/r + U_0(r).^1$$

На больших расстояниях от рассеивающего центра  $rU_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ , а вблизи ядра поле  $V(r)$  приближается к кулоновскому:  $V(r) \approx -z_a/r$ , где  $z_a$  — заряд ядра иона. В этом приближении непосредственное излучение связанных электронов не учитывается, однако создаваемое ими поле  $U_0(r)$  приводит к существенному отличию сечения тормозного излучения на реальном многоэлектронном ионе от аналитически точного сечения  $\omega(d\sigma_c/d\omega)$ , полученного Зоммерфельдом для тормозного излучения в поле кулоновского центра [1]. Энергия налетающего электрона  $\epsilon$  рассматривается в диапазоне  $z_a^2 \ll \epsilon \ll z_a^2$ . При меньших энергиях тормозное излучение на ионе близко к хорошо изученному излучению на потенциале  $V_c(r) = -z_i/r$ , а при  $\epsilon \geq z_a^2$  экранирующее поле атомных электронов может быть учтено с помощью атомного форм-фактора [2] (сечение тормозного излучения при этом мало отличается от сечения излучения на кулоновском центре с зарядом  $z_a$ ). Энергия излучаемого кванта  $\omega$  много меньше потенциала ионизации иона, так что поляризацию остова можно не рассматривать.

Ранее тормозное излучение низкоэнергетических электронов на ионах рассматривалось в работах [3–6]. В [4] выражение для сечения этого процесса получено в рамках полуклассического подхода. Конкретные расчеты достаточно громоздки, требуют знания аналитического вида потенциала  $U_0(r)$  и приведены в приближении Томаса—Ферми. В работе [3] радиальные матричные элементы переходов в непрерывном спектре вычислялись непосредственно через волновые функции рассеиваемого электрона также в модели Томаса—Ферми. Такой метод расчета требует определения большого количества парциальных сечений и приводит к трудностям, связанным с контролем точности вычислений из-за дальнедействующего характера кулоновского взаимодей-

<sup>1</sup> В работе использована атомная система единиц:  $\hbar = m = e = 1$ .

ствия. Полуэмпирический метод, аналогичный методу Берджеса и Ситона [7], для вычисления сечений тормозного излучения предложен в работе [6].

В данной работе получено аналитическое выражение низкочастотной части спектра тормозного излучения в статическом поле атомного иона. Сечение этого процесса представлено в виде суммы сечения тормозного излучения в кулоновском поле иона  $V_c = -z_i/r$  и сечения на экранирующем электронном потенциале, которое выражается через короткодействующие фазы рассеяния. В частном случае очень малых частот  $\omega \rightarrow 0$  полученные выражения упрощаются. Формула для сечения тормозного излучения в этом пределе была получена в [5], где, однако, отсутствует какой-либо анализ полученного результата. Исследование этой формулы, проведенное в настоящей работе, выявило область ее применимости, зависимость сечения тормозного излучения от энергии налетающего электрона и позволило установить простое соотношение, связывающее это сечение с сечением упругого рассеяния электронов на ионе. Для ряда ионов произведен численный расчет спектров.

2. Сечение тормозного излучения электрона в сферически-симметричном поле иона определяется формулой [1]

$$\omega \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \frac{\omega^4}{6\pi^3 c^3} \frac{k_2}{k_1} \int d\Omega_{k_2} \left| \int \Psi_{k_2}^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \Psi_{k_1}(\mathbf{r}) d^3r \right|^2, \quad (1)$$

где  $\Psi_{k_1}$  и  $\Psi_{k_2}$  — волновые функции налетающей и рассеянной частиц с импульсами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ ;  $d\Omega_{k_2}$  — элемент телесного угла, соответствующий направлению импульса рассеянного электрона. Представим волновые функции  $\Psi_{k_1}$  и  $\Psi_{k_2}$  в виде разложения по сферическим гармоникам

$$\Psi_k = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(\delta_l + \tau_l)} i^l \Phi_l(k, r) P_l(\cos \theta), \quad (2)$$

где

$$\tau_l(k) = \arg \Gamma(l+1 - i \frac{z_i}{k})$$

— кулоновская фаза рассеяния;  $\delta_l(k)$  — фаза, обусловленная короткодействующим потенциалом иона.

Асимптотика радиальной части  $\Phi_l(k, r)$  имеет вид

$$\Phi_l(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\simeq} \sin \left[ kr + \frac{1}{k} \frac{z_i}{r} \ln(2kr) - \frac{l\pi}{2} + \tau_l + \delta_l \right]. \quad (3)$$

Подставив выражение (2) в интеграл (1) и проинтегрировав по углу рассеяния, а также по углам, образованным направлениями начального и конечного импульса электрона с его координатой, получим

$$\omega \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \frac{32\omega^4 k_2}{3c^3 k_1} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) (R_{l, l+1}^2 + R_{l+1, l}^2), \quad (4)$$

где

$$R_{l, l'} = \int_0^{\infty} dr r \Phi_l(k_1, r) \Phi_{l'}(k_2, r). \quad (5)$$

Как показано в [4], низкочастотная часть спектра тормозного излучения для рассматриваемых нами полей может быть хорошо описана в рамках классического подхода. При этом, если рассеяние носит не резонансный характер, вклад в низкочастотную часть спектра вносят в основном большие расстояния. Как будет видно из конечного результата (формула (17)), эти расстояния оказываются порядка  $r \sim \sqrt{\varepsilon/\omega}$ . При  $\omega$ , много меньших потенциала ионизации иона, эти расстояния столь велики, что можно считать, что тормозное излучение происходит в основном вне области действия короткодействующего потенциала. Тогда волновые функции  $\Phi_l(k, r)$  удобно выразить через регу-

лярное  $F_l(k, r)$  и нерегулярное  $G_l(k, r)$  решения уравнения Шредингера для кулоновского потенциала  $V_0(r)$ , а короткодействующий потенциал  $U_0(r)$  учитывать с помощью короткодействующих фаз рассеяния  $\delta_l$

$$\Phi_l(k, r) = F_l(k, r) \cos \delta_l + G_l(k, r) \sin \delta_l.$$

Выражение (6) справедливо для всех  $r$ , если считать  $\delta_l$  фазовыми функциями. На интересующих нас расстояниях ( $r \sim \sqrt{\varepsilon/\omega}$ ) эти функции достигают постоянного значения, равного  $\delta_l(k)$ , а при  $r \rightarrow 0$  убывают как  $r^{2l+2}$  [8]. Таким образом, волновая функция  $\Phi_l(k, r)$ , определенная выражением (6), имеет правильное поведение при  $r \rightarrow 0$ . Вводя функции  $\mathcal{H}_l^{(1, 2)} = G_l \pm iF_l$  и выражая через них  $G_l(k, r)$ , для матричных элементов  $R_{l, l'}$  получим

$$\begin{aligned} R_{l, l'} = & \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^\infty dr r \mathcal{H}_l^{(2)}(k_1, r) e^{-i\delta_l(k_1, r)} (F_{l'}(k_2, r) e^{i\delta_{l'}(k_2, r)} + \right. \\ & + \mathcal{H}_l^{(2)}(k_2, r) \sin \delta_{l'}(k_2, r)) - \int_0^\infty dr r \mathcal{H}_l^{(1)}(k_1, r) e^{i\delta_l(k_1, r)} \times \\ & \left. \times (F_{l'}(k_2, r) e^{-i\delta_{l'}(k_2, r)} + \mathcal{H}_l^{(1)}(k_2, r) \sin \delta_{l'}(k_2, r)) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как  $R_{l, l'}$  — матричные элементы переходов в сплошном спектре, то интегралы (7) требуют регуляризации (формально эти интегралы расходятся). Регуляризация может быть проведена различными способами [9, 10]. В настоящей работе мы используем способ, основанный на смещении контура интегрирования в комплексную плоскость. Так как подынтегральное выражение первого слагаемого в (7) экспоненциально убывает в нижней полуплоскости комплексного  $r$ , то луч, вдоль которого производится интегрирование, может быть повернут в эту плоскость. Соответственно для второго слагаемого контур интегрирования смещается в верхнюю полуплоскость. После этого интегралы (7) становятся сходящимися. Очевидно, что указанный способ регуляризации приводит к тому же результату, что и использующийся в [9].<sup>2</sup> Выбирая углы поворота контуров равными  $-\pi/2$  и  $\pi/2$  для первого и второго интегралов (7) соответственно и учитывая соотношения

$$F_l^*(k, r^*) = F_l(k, r) \delta_l^*(k, r^*) = \delta_l(k, r), \quad \mathcal{H}_l^{(1)*}(k, r^*) = \mathcal{H}_l^2(k, r),$$

получим

$$\begin{aligned} R_{l, l'} = & -\text{Im} \left\{ \int_0^\infty dr r \mathcal{H}_l^{(1)}(k_1, ir) F_{l'}(k_2, ir) \exp[i\delta_l(k_1, ir) - i\delta_{l'}(k_2, ir)] + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty dr r \mathcal{H}_l^{(1)}(k_1, ir) \mathcal{H}_l^{(1)}(k_2, ir) \sin[\delta_{l'}(k_2, ir)] \exp[i\delta_l(k_1, ir)]. \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

(Функции  $F_l(k, ir)$  и  $\mathcal{H}_l^{(1)}(k, ir)$  выражаются через функции Уиттекера

$$\begin{aligned} F_l(k, ir) &= \frac{1}{2} i^{l+1} \exp\left\{-\frac{\pi}{2} \eta - i\tau_l(k)\right\} \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(2l+2)} M_{-i\eta, l+1/2}(2kr), \\ \mathcal{H}_l^{(1)}(k, ir) &= i^{-l} \exp\left\{\frac{\pi}{2} \eta + i\tau_l(k)\right\} W_{-i\eta, l+1/2}(2kr), \\ \eta &= -z_l/k. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как  $W_{-i\eta, l+1/2}(2kr)$  экспоненциально убывает при  $r \rightarrow \infty$ , то второе слагаемое в (8) ограничено в пределе  $\omega \rightarrow 0$  (это легко увидеть, положив в подын-

<sup>2</sup> После представления данной работы в печать авторам стало известно, что аналогичный способ регуляризации был недавно использован для вычисления матричных элементов свободно-свободных переходов при многофотонной надпороговой ионизации.

тегральном выражении  $k_1 = k_2$ . Что касается первого слагаемого в (8), то оно неограниченно возрастает при  $\omega \rightarrow 0$ , внося основной вклад в сечение тормозного излучения. Так как при малых  $\omega$  этот интеграл определяется областью достаточно больших  $r$ , то можно заменить фазовые функции  $\delta_l(k, r)$  в нем их асимптотическими значениями  $\delta_l(k)$ . В этом приближении получим

$$\omega \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \omega \frac{d\sigma_c}{d\omega} + \frac{32\omega^4}{3c^3 k_2 k_1^2} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) [\tilde{R}_{i, l+1}^2 + \tilde{R}_{i+1, l}^2], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{i, l}^2 = & \sin^2 [\delta_l(k_1) - \delta_{l'}(k_2)] [(\operatorname{Re} T_{l, l'})^2 - (\operatorname{Im} T_{l, l'})^2] + \\ & + \sin 2 [\delta_l(k_1) - \delta_{l'}(k_2)] (\operatorname{Re} T_{l, l'}) (\operatorname{Im} T_{l, l'}), \end{aligned} \quad (11)$$

а матричные элементы  $T_{l, l'}$  выражаются через функции Уиттекера  $M_{-i\eta, l+1/2}(2kr)$  и  $W_{-i\eta, l+1/2}(2kr)$

$$\begin{aligned} T_{l, l'} = & \frac{1}{2} i^{l'-l+1} \exp \left\{ \frac{\pi}{2} (\eta_1 - \eta_2) + i [\tau_l(k_1) - \tau_{l'}(k_2)] \right\} \times \\ & \times \frac{\Gamma(l'+1+i\eta_2)}{\Gamma(2l'+2)} \int_0^{\infty} dr r W_{-i\eta, l+1/2}(2k_1 r) M_{-i\eta, l'+1/2}(2k_2 r), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\eta_{1(2)} = -z_i/k_{1(2)}.$$

Сечение тормозного излучения на кулоновском потенциале  $V_0 = -z_i/r$  равно [1]

$$\omega \frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{64\pi^2 k_2}{3c^3 k_1} \frac{z_i^2}{(k_1 - k_2)^2} \frac{\left( -\frac{d}{d\xi} |F(\xi)|^2 \right)}{[1 - \exp(2\pi\eta_2)] [\exp(-2\pi\eta_1) - 1]}, \quad (13)$$

где функция  $F(\xi)$  есть гипергеометрический ряд

$$F(\xi) = {}_2F_1(-i\eta_2, -i\eta_1; 1; \xi), \quad \xi = -4k_1 k_2 / (k_1 - k_2)^2.$$

Если воспользоваться асимптотическим разложением функции Уиттекера при больших значениях аргумента, то в пределе низких энергий излучаемого кванта  $\omega$  интегралы (12) можно вычислить в аналитическом виде (см. Приложение)

$$\begin{aligned} T_{l, l+1} = & -\frac{1}{2} \frac{\exp \left\{ i [\tau_l(k_1) - \tau_{l+1}(k_2)] + \frac{\pi}{2} (\eta_1 - \eta_2) \right\}}{(k_1 - k_2)^2} \left( \frac{2k_1}{k_1 - k_2} \right)^{-i\eta_1} \times \\ & \times \left( \frac{2k_2}{k_1 - k_2} \right)^{i\eta_2} \Gamma(2 - i(\eta_1 - \eta_2)) \left[ 1 - \frac{k_1 - k_2}{k_1} (l+1) + \dots \right], \\ T_{l+1, l} = & \frac{1}{2} \frac{\exp \left\{ i [\tau_{l+1}(k_1) - \tau_l(k_2)] + \frac{\pi}{2} (\eta_1 - \eta_2) \right\}}{(k_1 - k_2)^2} \left( \frac{2k_1}{k_1 - k_2} \right)^{-i\eta_1} \times \\ & \times \left( \frac{2k_2}{k_1 - k_2} \right)^{i\eta_2} \Gamma(2 - i(\eta_1 - \eta_2)) \left[ 1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1} (l+1) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Параметром асимптотического разложения служит величина  $\omega/\varepsilon$ . Таким образом, область применимости выражения (14) тем уже, чем больше орбитальное квантовое число  $l$ . Однако при  $\omega/\varepsilon \geq 1$  интегралы (12) можно найти, воспользовавшись равномерным разложением функций Уиттекера по индексу. В этом приближении получим

$$\begin{aligned} T_{l, l'} = & \frac{1}{2} i^{l'-l+1} \frac{(k_1 + k_2)^2}{4\omega^2} A_{l, l'} \exp \left\{ i [\tau_l(k_1) - \tau_{l'}(k_2)] + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2} (\eta_1 - \eta_2) - \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A_{l, l+1} = (l+1)^{-i(\eta_1 - \eta_2)} \left\{ 1 - i(\eta_1 - \eta_2) \left[ \left( 1 - \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) K_0 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) + \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} K_1 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right] \exp \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right\},$$

$$A_{l+1, l} = (l+1)^{-i(\eta_1 - \eta_2)} \left[ 1 + \frac{\omega(l+1)}{\varepsilon} \right] \left\{ 1 - i \frac{\eta_1 - \eta_2}{1 + \omega(l+1)/\varepsilon} \left[ \left( 1 + \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \times K_0 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) + \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} K_1 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right] \exp \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right\}, \quad (16)$$

где  $K_0, K_1$  — функции Макдональда.

Из (15) видно, что с ростом  $l$  матричные элементы  $T_{l, l'}$  экспоненциально убывают и оказываются существенными лишь при очень малых значениях  $\omega$  или малых  $l$ . Заметим при этом, что формулы (15)–(16), полученные при больших значениях орбитального квантового числа  $l$ , оказываются, однако, справедливыми и для  $l$ , удовлетворяющих неравенству  $\omega l/\varepsilon \ll 1$ . Действительно, в пределе  $\omega l/\varepsilon \rightarrow 0$  выражение (15) переходит в (14) с точностью до членов  $(\omega/\varepsilon)^2$ .

Для  $\tilde{R}_{l, l'}$ , при всех возможных значениях  $l$  получим

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{l, l+1}^2 &= \frac{k_1^2 k_2^2}{4\omega^4} \exp \left[ \pi(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\omega(l+1)}{\varepsilon} \right] \sin [\delta_l(k_1) - \delta_{l+1}(k_2)] \times \\ &\quad \times \sin [\delta_l(k_1) - \delta_{l+1}(k_2) + 2\varphi_{l, l+1}], \\ \tilde{R}_{l+1, l}^2 &= \frac{k_1^2 k_2^2}{4\omega^4} \exp \left[ \pi(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\omega(l+1)}{\varepsilon} \right] \left[ 1 + \frac{\omega(l+1)}{\varepsilon} \right]^2 \times \\ &\quad \times \sin [\delta_{l+1}(k_1) - \delta_l(k_2)] \sin [\delta_{l+1}(k_1) - \delta_l(k_2) + 2\varphi_{l+1, l}], \end{aligned} \quad (17)$$

где фазы  $\varphi_{l, l'}$  равны

$$\begin{aligned} \varphi_{l, l+1} &= \tau_l(k_1) - \tau_{l+1}(k_2) - (\eta_1 - \eta_2) \left\{ \ln(l+1) + \left[ \left( 1 - \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times K_0 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) + \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} K_1 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right] \exp \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right\}, \\ \varphi_{l+1, l} &= \tau_{l+1}(k_1) - \tau_l(k_2) - \frac{\eta_1 - \eta_2}{1 + \omega(l+1)/\varepsilon} \left\{ \left( 1 + \frac{\omega(l+1)}{\varepsilon} \right) \ln(l+1) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) K_0 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) + \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} K_1 \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right] \exp \left( \frac{\omega(l+1)}{2\varepsilon} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношения (17), (18) верны с точностью до членов порядка  $(\omega/\varepsilon)^2$  при  $\omega l/\varepsilon \ll 1$  и порядка  $1/l$  при  $\omega l/\varepsilon \gg 1$ .

3. В предельном случае  $\omega \rightarrow 0$ , когда  $k_1 \approx k_2$ , выражения (17)–(18) можно упростить

$$\tilde{R}_{l, l'} = \frac{k^4}{4\omega^4} \sin [\delta_l(k) - \delta_{l'}(k)] \sin \{\delta_l(k) - \delta_{l'}(k) + 2[\tau_l(k) - \tau_{l'}(k)]\}.$$

При выборе  $k = (k_1 + k_2)/2$  относительная погрешность выражения для  $\tilde{R}_{l, l'}$ , будет иметь порядок  $(\omega/\varepsilon)^2$ . С той же погрешностью определяется сечение тормозного излучения

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\sigma}{d\omega} &= \omega \frac{d\sigma_0}{d\omega} + \frac{16}{3c^3} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \sin [\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k)] \sin \{\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k) + \\ &\quad + 2[\tau_l(k) - \tau_{l+1}(k)]\} = \omega \frac{d\sigma_0}{d\omega} + \frac{16}{3c^3} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \{ \sin^2 [\sigma_l(k) - \sigma_{l+1}(k)] - \\ &\quad - \sin^2 [\tau_l(k) - \tau_{l+1}(k)] \}. \end{aligned} \quad (10')$$

Выражение (10') было приведено ранее в работе [5], где, однако, не были исследованы условия его применимости. Как видно из (14), поправки к (10')

могут быть значительны ( $\sim \omega l/\varepsilon$ ), если в сечение вносят вклад достаточно большие значения орбитального момента. Поэтому область применимости формулы (10') сравнительно узкая:  $\omega l_m/\varepsilon \ll 1$ , где  $l_m$  — наибольшее значение орбитального момента дающего вклад в сумму. За пределами этой области  $1/l_m \ll \omega/\varepsilon \ll 1$  для определения сечения тормозного излучения следует пользоваться формулами (17)–(18).

Перепишем (10') в виде

$$\omega \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \omega \frac{d\sigma_e}{d\omega} - \frac{32}{3c^3} z_i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)}{\sqrt{k^2(l+1)^2 + z_i^2}} \sin[\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k)] \times \\ \times \sin\left[\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k) - \arctg \frac{k(l+1)}{z_i}\right] + \frac{16}{3c^3} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \sin^2[\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k)], \quad (19)$$

здесь использованы известные соотношения для разности кулоновских фаз рассеяния  $\tau_l$

$$\tau_{l+1}(k) - \tau_l(k) = -\arctg \frac{z_i}{k(l+1)}. \quad (20)$$

Сечение тормозного излучения в этом случае складывается из трех частей, каждая из которых имеет ясный физический смысл. Если в (19) перейти к предельному случаю нейтрального атома, т. е.  $z_i \rightarrow 0$ , то первые два слагаемых исчезают, а последнее становится равным хорошо известному сечению низко-частотного тормозного излучения электронов на атоме  $\omega(d\sigma_e/d\omega)$ , выражающемуся через транспортное сечение упругого рассеяния [5]

$$\omega \frac{d\sigma_a}{d\omega} = \frac{16}{3c^3} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \sin^2[\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k)] = \frac{8k^2}{3c^3} \int_0^{\pi} \frac{d\sigma_a^i}{d\Omega} (1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta. \quad (21)$$

Таким образом, третье слагаемое в (19) следует интерпретировать как собственно короткодействующее сечение тормозного излучения на ионе. Второе слагаемое получено в результате интерференции кулоновского и короткодействующего потенциалов. С увеличением энергии налетающего электрона кулоновское слагаемое убывает быстрее, чем два других. Поэтому с увеличением  $\varepsilon$  роль короткодействующего и интерференционного слагаемых в (19) будет возрастать.

Интересно сравнить сечение тормозного излучения (19) с сечением упругого рассеяния электрона на ионе  $d\delta_i^i/d\omega$ . Для этого представим  $d\sigma_i^i/d\Omega$  в виде [2]

$$\frac{d\sigma_i^i}{d\Omega} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega} + \frac{1}{2k^2} \operatorname{Re} \sum_{l, l'}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \times \\ \times e^{2i\tau_l(k)} (e^{2i\delta_l(k)} - 1) (e^{-2i\tau_{l'}(k)} - 1) + \frac{1}{4k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) \times \\ \times P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) e^{2i[\tau_l(k) - \tau_{l'}(k)]} (e^{2i\delta_l(k)} - 1) (e^{-2i\delta_{l'}(k)} - 1), \quad (22)$$

где  $d\sigma_R/d\Omega$  — сечение упругого рассеяния Резерфорда на кулоновском потенциале

$$\frac{d\sigma_R^i}{d\Omega} = [z_i/2k^2 \sin^2(\theta/2)]^2.$$

Если от последних двух слагаемых равенства (22) взять интеграл вида (21), используя при этом соотношения (20) и хорошо известные свойства полиномов Лежандра  $P_l(\cos\theta)$  [12], то получим

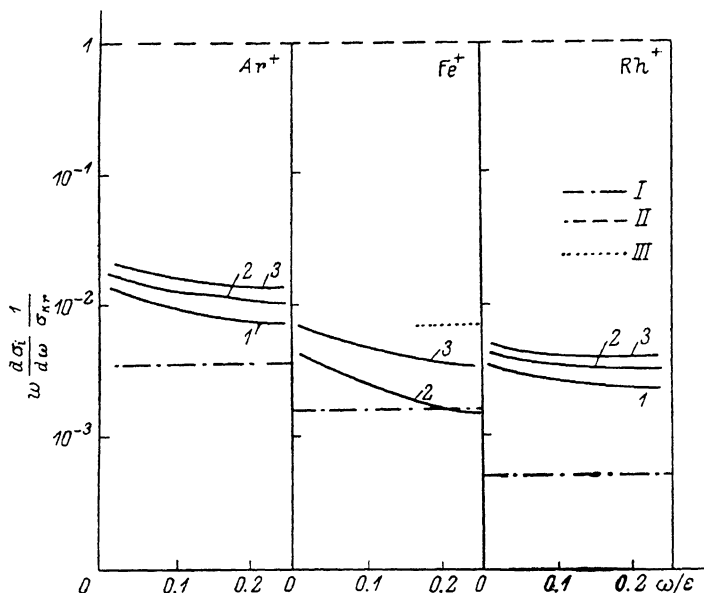
$$\frac{k^2}{2} \int_0^\pi \left\{ \frac{d\sigma_i^l}{d\Omega} - \frac{d\sigma_R}{d\Omega} \right\} (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta = z_i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k(l+1)^2}{k^2(l+1)^2 + z_i^2} \sin 2[\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k)] +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{k^2(l+1)^2 - z_i^2}{k^2(l+1)^2 + z_i^2} \sin^2[\delta_l(k) - \delta_{l+1}(k)]. \quad (23)$$

Выражение (23) легко приводится к виду двух последних слагаемых в (19). Тогда сечение  $\omega(d\sigma_i/d\omega)$  можно записать в виде

$$\omega \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \omega \frac{d\sigma_c}{d\omega} + \frac{8k^2}{3c^3} \int_0^\pi \left[ \frac{d\sigma_i^l}{d\Omega} - \frac{d\sigma_R}{d\Omega} \right] \sin \theta (1 - \cos \theta) d\theta. \quad (24)$$

Выражение (24) является обобщением формулы для сечения низкоэнергетического тормозного излучения (21) на случай ионов.



Отношение сечения тормозного излучения электронов на ионах  $\text{Ar}^+$ ,  $\text{Fe}^+$ ,  $\text{Rh}^+$  к классическому сечению Крамерса.

*I* — сечение Крамерса для иона  $z_i=1$ , *II* — сечение Крамерса на ядре, *III* — сечение тормозного излучения для  $\epsilon=2$   $\text{Ru}$  из [5].

Из (19), (24) видно, что даже при очень малых значениях  $\omega$  излучаемого кванта спектр тормозного излучения на многоэлектронном ионе существенно отличается от спектра излучения на чисто кулоновском потенциале. С ростом  $\omega$  это различие еще более увеличивается.

4. Сечения тормозного излучения рассчитаны для ионов  $\text{Ar}^+$ ,  $\text{Fe}^+$  и  $\text{Rh}^+$ . Короткодействующие фазы рассеяния, вычисленные в приближении Германа—Скиллмана, взяты из работы [13]. При расчете по формулам (17) и (19) учитывалось, что в короткодействующую часть сечения дают вклад лишь несколько первых значений момента  $l=0 \div 3$ , так как фазы рассеяния  $\delta_l(k)$  быстро убывают с ростом  $l$ . Если при этом  $l_m$  — значение максимального сохраненного момента в суммах (17) и (19) по  $l$ , то в области  $\omega/\epsilon \ll 1/l_m$  существенный вклад в сечение излучения вносят все слагаемые. По мере роста величины  $\omega/\epsilon$  вклад высших моментов исчезает, так что при больших  $\omega$  (однако  $\omega/\epsilon \ll 1$ ) при расчетах оказывается необходимым учитывать лишь значение  $l=0$ .

На рисунке приведены величины  $1/\sigma_{KR} \omega(d\sigma_i/d\omega)$  при  $\epsilon=1.2$   $\text{Ru}$  (1), 1.6  $\text{Ru}$  (2) и 2  $\text{Ru}$  (3) в зависимости от величины  $\omega/\epsilon$ , где  $\sigma_{KR} = (16\pi/3\sqrt{3})(z_i^2/c^3k^2)$  — сечение Крамерса. Видно, что результаты, полученные по формуле (17), хо-

рошо согласуются с результатами работы [3], в которой вычисление матричных элементов (1) проводилось численно в приближении Томаса—Ферми для  $\omega/\varepsilon \geq 0.1$ . Как следует из рисунка, наличие короткодействующего потенциала существенно увеличивает сечение тормозного излучения электронов по сравнению с излучением на кулоновском потенциале  $V_c = -z_i/r$ . С ростом энергии налетающего электрона роль короткодействующей части сечения относительно увеличивается. Так как сечение  $\omega(d\delta_i/d\omega)$  по мере увеличения  $\omega/\varepsilon$  становится практически постоянным, то можно рассматривать излучение в экранированном потенциале иона как излучение налетающего электрона с энергией  $\varepsilon$  в кулоновском поле с эффективным зарядом  $z_{эфф}(\varepsilon, z_i)$ . Для ионов  $Ag^+$ ,  $Fe^+$  и  $Rh^+$  при  $\varepsilon = 2Ry$   $z_{эфф}(Ag^+) = 2.2$ ,  $z_{эфф}(Fe^+) = 1.9$ ,  $z_{эфф}(Rh^+) = 2.8$ .

Сечение тормозного излучения (17) получено нами в предположении, что рассеяние налетающей частицы носит нерезонансный характер. Однако рассмотрение оказывается справедливым и в том случае, если энергия налетающей частицы близка к энергии резонанса. При этом только резонанс должен быть достаточно широким, чтобы выполнялось условие  $\omega^2/\varepsilon_{res}^2 \ll \sqrt{\Gamma/\varepsilon_{res}}$ , где  $\Gamma$  — ширина резонанса,  $\varepsilon_{res}$  — его энергия.

Авторы благодарны М. Я. Амусья и М. Ю. Кучиеву за ценные советы и замечания. Авторы выражают также признательность А. С. Балтенкову за обсуждение статьи и предоставление ссылки [5].

## П р и л о ж е н и е

Для получения формул (14) достаточно воспользоваться известными асимптотическими разложениями функций Уиттекера при больших значениях аргумента [12]

$$M_{-i\eta, l+1/2}(2kr) \simeq \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} e^{kr} (2kr)^{i\eta} \left[ 1 + \frac{(l/2 - i\eta)^2 - (l+1/2)^2}{2kr} + \dots \right] \times \\ \times W_{-i\eta, l+1/2}(2kr) \simeq e^{-kr} (2kr)^{-i\eta} \left[ 1 - \frac{(l/2 + i\eta)^2 - (l+1/2)^2}{2kr} + \dots \right]. \quad (\text{П. 1})$$

Подставляя (П. 1) в (12), немедленно получаем для матричных элементов  $T_{l, l}$  формулы (14), справедливые в области  $\omega l/\varepsilon \ll 1$ . Для больших значений квантового числа  $l$ , когда  $\omega l/\varepsilon \geq 1$ , при вычислении интегралов (12) воспользуемся равномерными относительно аргумента асимптотическими разложениями функций Уиттекера по второму индексу (первый индекс при этом должен удовлетворять неравенству  $|\eta| \leq 1$ , которое выполняется в рассматриваемой области энергий налетающего электрона)

$$M_{-i\eta, l+1/2}(2kr) \simeq \sqrt{2\pi} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\eta)} (kr)^{l/2} I_{l+1/2}(kr) \times \\ \times \left[ kr + \sqrt{(kr)^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} \right]^{i\eta} [1 + O(1/l)], \\ W_{-i\eta, l+1/2}(2kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (kr)^{l/2} K_{l+1/2}(kr) \times \\ \times \left[ kr + \sqrt{(kr)^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} \right]^{-i\eta} [1 + O(1/l)], \quad (\text{П. 2})$$

где для модифицированных функций Бесселя  $I_{l+1/2}$  и  $K_{l+1/2}$  также следует воспользоваться равномерным асимптотическим разложением по индексу

$$I_{l+1/2}(kr) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi(l+1/2)}} \frac{\exp \left\{ \sqrt{(kr)^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \text{Arsh} \left( \frac{l+1/2}{kr} \right) \right\}}{\left[ 1 + \left( \frac{kr}{l+1/2} \right)^2 \right]^{1/4}} \times \\ \times [1 + O(1/l)], \\ K_{l+1/2}(kr) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2(l+1/2)}} \frac{\exp \left\{ -\sqrt{(kr)^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} + \left(l + \frac{1}{2}\right) \text{Arsh} \left( \frac{l+1/2}{kr} \right) \right\}}{\left[ 1 + \left( \frac{kr}{l+1/2} \right)^2 \right]^{1/4}} \times \\ \times [1 + O(1/l)]. \quad (\text{П. 3})$$



Интегралы (12) при этом преобразуются к виду

$$T_{l, l+1} = -\frac{1}{2} \exp \left\{ i [\tau_l(k_1) - \tau_{l+1}(k_2)] + \frac{\pi}{2} (\eta_1 - \eta_2) \right\} (l+1)^{-i(\eta_1 - \eta_2)} k \times \\ \times \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\exp \left\{ -\frac{\omega}{2\varepsilon} \sqrt{(kr)^2 + (l+1)^2} - \text{Arsh} \left( \frac{l+1}{kr} \right) - i(\eta_1 - \eta_2) \text{Arsh} \left( \frac{kr}{l+1} \right) \right\}}{\sqrt{(kr)^2 + (l+1)^2}}, \\ T_{l+1, l} = \frac{1}{2} \exp \left\{ i [\tau_{l+1}(k_1) - \tau_l(k_2)] + \frac{\pi}{2} (\eta_1 - \eta_2) \right\} (l+1)^{-i(\eta_1 - \eta_2)} k \times \\ \times \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\exp \left\{ -\frac{\omega}{2\varepsilon} \sqrt{(kr)^2 + (l+1)^2} + \text{Arsh} \left( \frac{l+1}{kr} \right) - i(\eta_1 - \eta_2) \text{Arsh} \left( \frac{kr}{l+1} \right) \right\}}{\sqrt{(kr)^2 + (l+1)^2}} \quad (11.4)$$

При переходе от (12) к (П. 4) сохранена точность, соответствующая относительной погрешности  $O(1/l)$  равномерно по  $\omega l/\varepsilon$  и  $O(\omega^2/\varepsilon^2)$  при  $\omega l/\varepsilon \rightarrow 0$ .

Интегрируя (П. 4) по частям с требуемой точностью, получаем формулы (15). При  $\omega l/\varepsilon \rightarrow 0$  (15) переходят в (14) с точностью до  $\omega^2/\varepsilon^2$ . Это означает, что формулы (15) для матричных элементов  $T_{l, l'}$  могут использоваться при любых значениях  $l$ , так как для малых  $l$  мы не выходим за пределы области  $\omega l/\varepsilon \ll 1$ .

#### Литература

- [1] Берестецкий В. В., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. 704 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.
- [3] Жданов В. П., Чибисов М. И. ЖЭТФ, 1977, т. 47, № 9, с. 1804—1808.
- [4] Герейдс В. И., Коган В. И. Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, № 6, с. 329—333.
- [5] Johnston R. J. Quant. Spectr. Rad. Transfer, 1967, v. 7, N 6, p. 815—835.
- [6] Peach G. Month. Not. Roy. Astron. Soc., 1965, v. 130, N 5, p. 361—377.
- [7] Burgess A., Seaton M. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1960, v. 120, N 2, p. 121—151.
- [8] Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М.: Мир, 1972. 292 с.
- [9] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Перелимов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 544 с.
- [10] Фирсов О. Б., Чибисов М. И. ЖЭТФ, 1960, т. 39, № 6, с. 1770—1776.
- [11] Edwards M., Tanq X., Shakeshaft R., Lambropoulos P. Phys. Rev. A, 1986, v. 33, N 6, p. 4444—4445.
- [12] Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [13] Manson S. T. Phys. Rev., 1969, v. 182, N 1, p. 97—103.

Ленинградский технологический  
институт холодильной промышленности

Поступило в Редакцию  
3 июня 1986 г.