РОСКОМКИНО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ
КИНО И ТЕЛЕВИДЕНИЯ
Кафедра высшей математики и вычислительной техники

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
И
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
с использованием системы MathCAD

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по высшей математике на персональных ЭВМ
для студентов специальностей
201100 Радиосвязь, радиовещание и телевидение
и
190100 Приборостроение

Санкт-Петербург
1995

Составители: А.Л. Смирнов, В.Г. Быков

Рецензент — доц. [illegible]

Рекомендовано к изданию в качестве методических указаний кафедрой высшей математики и вычислительной техники. Протокол № 2 от 08.11.94 г.

Введение

Система **MathCAD** является одной из наиболее широко используемых систем автоматизации математических и инженерно-технических расчетов. Последние версии этой системы 4.0 и 5.0 достойно соперничают с популярными системами математических расчетов Mathematica, Maple, Derive и MatlLab. Однако даже ранние версии **MathCAD** (а предлагаемые работы рассчитаны на использование пакета **MathCAD** 2.51) позволяют решать достаточно сложные математические задачи.

Предлагаемая серия лабораторных работ призвана проиллюстрировать важные разделы, обычно включаемые в курс высшей математики технических вузов. К таковым относятся определение корней многочленов, нахождение собственных чисел и векторов матриц, решение линейных уравнений и систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера и методом Рунге-Кутта и интерполяция функций.

Предполагается, что пользователь имеет некоторую практику работы с пакетом MathCAD . Для первоначального знакомства с пакетом рекомендуем обратиться к работам [1,2].

Лабораторная работа № 1

Нахождение корней многочлена.

Данная работа является основной для выполнения последующих лабораторных работ. Напомним вначале основные определения. Многочленом степени n от переменной z называется выражение вида

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}, \quad a_i, z \in \mathbb{C}$$

Постоянные числа a_i называются коэффициентами многочлена. Корнем многочлена называется число z_* такое, что $P_n(z_*) = 0$. Справедлива теорема Безу, согласно которой

$$P_n(z) = P_{n-1}(z)(z - z_*),$$

где P_{n-1} — многочлен степени $n-1$. Если многочлен $P_n(z)$ делится на $(z-z_*)^k$, но не делится на $(z-z_*)^{k+1}$, то говорят, что корень z_* имеет кратность k. По теореме Гаусса многочлен степени n $(n \geq 1)$ имеет по крайней мере один комплексный корень. Из вышеприведенных утверждений следует, что многочлен порядка n имеет n корней (с учетом их кратности).

Корни многочлена связаны с его коэффициентами по формулам Виета: если $a_0 = 1$ и z_i — корни многочлена, то [4]

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} z_i\,; \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(z_1 z_2 \cdots z_{n-1} + \cdots + z_2 z_3 \ldots z_n)\,; \\ \cdots &= \cdots \\ a_1 &= -\sum_{i=1}^{n} z_i. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Далее мы будем рассматривать многочлены более частного вида, а именно случай, когда коэффициенты a_i являются вещественными числами. Для данного класса многочленов существует ряд полезных теорем об их корнях. Упомянем некоторые из них.

1. Многочлен с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет по меньшей мере один вещественный корень.

2. Многочлен с вещественными коэффициентами может иметь только сопряженные комплексные корни.

Известно [4], что аналитическое определение корней многочлена в общем случае возможно только для многочленов степени $n \leq 4$. Поэтому в большинстве случаев единственный способ нахождения корней — это использование численных алгоритмов. Процедура численного определения корней состоит из двух этапов: разделения (или приближенного определения) корней и уточнения корней. На первом этапе мы стараемся или определить интервалы значений z, на которых существует только один корень, или определить приближенное значение корня, которое будет уточнено на следующем этапе. Именно второй способ и будет использован в лабораторной работе.

На первом этапе имеет смысл определить границы корней и число действительных корней. В качестве верхней границы модулей всех корней (как действительных, так и комплексных) можно взять число [4]

$$z_{max} = 1 + \max_{i \geq 0} |a_i|/|a_0|. \qquad (1.2)$$

Для вещественных корней многочленов с вещественными коэффициентами справедлива оценка Маклорена [3]

$$z_i < z_{max} = 1 + (\max a^- / a_0)^{1/k}, \qquad (1.3)$$

где $a_0 > 0$, k — номер первого по порядку отрицательного коэффициента, $\max a^-$ — максимум модулей отрицательных коэффициентов. Если многочлен не имеет отрицательных коэффициентов, то верхняя оценка равна нулю.

При помощи оценки (1.3) легко получить и оценку снизу. Для этого рассмотрим многочлен $P(-z)$. Корни этого многочлена равны корням многочлена $P(z)$ с обратным знаком, так что из оценки его сверху, $-z_i < M$, получим оценку снизу для корней исходного многочлена: $z_i > -M$.

Число действительных корней проще всего определяется по правилу знаков Декарта: число положительных корней либо равно числу N перемен знака в последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициентов, причем коэффициенты, равные нулю, не учитываются, либо меньше числа N на четное число. Применяя это правило к многочлену $P(-z)$, найдем число отрицательных корней.

Что же касается уточнения корней, то здесь можно воспользоваться любым из известных методов, например, любым из вариантов градиентного метода и его частным случаем — методом касательных Ньютона. Видимо, этот метод и реализован в пакете **MathCAD** в процедуре **root**.

Вообще говоря, после нахождения какого-либо корня полезно разделить исходный многочлен на $z - z_*$, сведя задачу к нахождению корней многочлена степени на 1 меньше. Кроме того при этом мы легко сможем определить кратные корни. К сожалению, пакет **MathCAD** такой возможности не предоставляет.

Для нахождения комплексных корней многочлена можно построить поверхность $|P(z)|$, где $z = x + iy$, и исследовать области, где мачения $|P(z)|$ близки к нулю, или ещё лучше построить линии уровня поверхности $|P(z)|$. Однако процедура построения линий уровня предусмотрена только в более поздних версиях пакета **MathCAD**, а построение поверхности занимает много времени. Для уравнения невысокого порядка можно предложить иной способ. Разобьем область корней на подобласти и в каждой из них возьмем произвольную точку, которую и будем считать приближенным значением корня. Теперь, используя процедуру **root**, найдем уточненные значения корней. Если оказалось, что общее число найденных нами корней равно n, задачу можно считать решенной. В противном случае можно попытаться разбить область корней на более мелкие подобласти и повторить предыдущую процедуру.

Задание лабораторной работы.

Найти все корни многочлена

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Вектор коэффициентов определен в разделе Варианты.

Ход работы.

1. Задайте коэффициенты многочлена в виде вектора $a = (a_i)$, $i = \overline{0,n}$. Если $a_0 < 0$, то поменяйте все знаки.
2. Используя формулу (1.3), определите число вещественных корней и границы корней $x_{\min}$ и $x_{\max}$.
3. Постройте график $P_n(x)$ на отрезке $x_{\min} < x < x_{\max}$.
   3.1. Имеет смысл строить график на несколько большем промежутке, а именно $\mathbf{floor}(x_{\min}) < x < \mathbf{ceil}(x_{\max})$, где функция $\mathbf{floor}(x)$ означает наибольшее целое число, меньшее x, а функция $\mathbf{ceil}(x)$ означает наименьшее целое число, большее x. Тогда, построив вертикальную сетку с целочисленным шагом, можно точнее определить приближенное значение корня.
   3.2. Вдали от корней многочлен может принимать большие значения, что автоматически приведет к уменьшению масштаба графика и точности определения корней. Решение этой проблемы может быть двояким: [illegible] о ввести логарифмическую

шкалу по оси y, либо "обрезать" большие значения многочлена. Это можно сделать, используя функцию **MathCAD** **if**

$$P(x) = \mathbf{if}(|P(x)| > 1, 2\Phi(P(x)) - 1, P(x)),$$

где Φ — стандартная функция Хевисайда, определяемая по правилу

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Теперь значения многочлена, большие 1 по абсолютной величине заменены на 1 с соответствующими знаками.
   3.3. Не забудьте построить горизонтальную сетку, разделив поле графика пополам. Это даст ось x.
   3.4. Трудно дать общие рекомендации относительно выбора шага по x. Всегда есть шанс пропустить близко расположенные корни (точнее говоря, нечетное число близко расположенных корней, либо кратный корень и близко расположенный к нему другой корень). Начните с шага 0.1.
4. С помощью процедуры **root** найдите уточненные значения вещественных корней.
5. Определите границу модуля комплексных корней по формуле (1.2).
   5.1. Попытайтесь сначала найти чисто мнимые корни многочлена. Несмотря на то, что вообще говоря, вероятность того, что у произвольного многочлена с вещественными коэффициентами существуют чисто мнимые корни невелика, ей не следует пренебрегать. Действуйте по тому же плану, что и в случае определения вещественных корней.
   5.2. Постройте график $|P(iz)|$ на отрезке $0 < z < z_{\max}$, где $z_{\max}$ определяется по формуле (1.2). Рекомендации пунктов 3.1–3.4 справедливы и для этого случая. По графику определите приближенные значения корней, а затем уточните значения корней.
6. Комплексные корни общего вида ищите, следуя вышеизложенным рекомендациям.
   6.1. Разбейте круг радиуса $z_{\max}$ (см. п. 5) на четыре сектора, соответствующие квадрантам. Задайте в каждом из секторов начальное значение корня и [illegible]точните его.

6.2. Заметим, что если найдены все корни многочлена кроме двух, то из формул (1.1) легко получить выражения для нахождения оставшихся двух корней:

$$x_{n-1} = \frac{-S - a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(S + a_1)^2}{4}(-1)^n \frac{a_n}{P}},$$
$$x_n = -S - a_1 - x_{n-1},$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{n-2} x_i, \qquad P = \prod_{i=1}^{n-2} x_i.$$

Лабораторная работа N 2

Нахождение собственных чисел и собственных векторов матриц.

В этой работе и далее мы будем рассматривать квадратную матрицу A размера $[n \times n]$ с вещественными элементами. Важной характеристикой матрицы являются собственные числа λ_i и собственные вектора U_i, которые определяются формулой

$$AU_i = \lambda_i U_i.$$

Непосредственно из определения следует, что собственные числа находятся из уравнения, называемого характеристическим

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E-единичная матрица. Таким образом, нахождение собственных чисел матрицы сводится к определению корней характеристического полинома, поэтому мы можем воспользоваться результатами лабораторной работы N 1. Отметим лишь, что формулы для оценки корней характеристического уравнения имеют вид [3]

$$\max(\min(PR1), \min(QR1)) < Re(\lambda) < \min(\max(PR2), \max(QR2))$$
$$\max(\min(PI1), \min(QI1)) < Im(\lambda) < \min(\max(PI2), \max(QI2)),$$

где

$$PR1_i = \mathrm{Re}(A_{i,i}) + |A_{i,i}| - P_i,$$
$$QR1_i = \mathrm{Re}(A_{i,i}) + |A_{i,i}| - Q_i,$$
$$PR2_i = \mathrm{Re}(A_{i,i}) - |A_{i,i}| + P_i,$$
$$QR2_i = \mathrm{Re}(A_{i,i}) - |A_{i,i}| + Q_i,$$
$$PI1_i = \mathrm{Im}(A_{i,i}) + |A_{i,i}| - P_i,$$
$$QI1_i = \mathrm{Im}(A_{i,i}) + |A_{i,i}| - Q_i,$$
$$PI2_i = \mathrm{Im}(A_{i,i}) - |A_{i,i}| + P_i,$$
$$QI2_i = \mathrm{Im}(A_{i,i}) - |A_{i,i}| + Q_i,$$
$$P_i = \sum_j |A_{i,j}|, \quad Q_i = \sum_j |A_{j,i}|,$$

а коэффициенты характеристического полинома связаны с элементами матрицы выражениями

$$a_1 = -\mathrm{tr}(A), \quad a_n = (-1)^n |A|,$$

где $\mathrm{tr}(A)$ - след матрицы, а $|A|$ - определитель матрицы.

Отметим, что для особого класса матриц, а именно симметричных, существует ряд полезных теорем об их собственных числах, основная из которых утверждает, что все они будут вещественными.

Для нахождения собственного вектора матрицы A, соответствующего собственному числу λ_i мы должны найти нетривиальное решение линейной однородной системы

$$(A - \lambda_i E)U_i = 0. \tag{2.1}$$

Будем рассматривать лишь случай простых (не кратных) собственных чисел. В этом случае ранг матрицы $(A - \lambda_i E)$, то есть количество линейно независимых строк (или столбцов), равен $n-1$ и решение системы (2.1) может быть найдено с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что **MathCAD** "не умеет" решать системы с нулевым определителем, поэтому необходимо заменить систему (2.1) на равносильную, но невырожденную. Если мы исключим из матрицы одну строку и один столбец и вычислим определитель полученной матрицы, то мы получим дополнительный минор $(n-1)$-го порядка. Так как ранг матрицы равен $n-1$, то существует по крайней мере один минор $(n-1)$-го порядка, отличный от нуля, причем такой минор есть и среди диагональных миноров. Предположим, что мы нашли ненулевой диагональный дополнительный минор, вычеркнув строку и столбец с номером k. Тогда уравнение для определения собственного вектора можно представить в виде

$$B\hat{U} = -F, \tag{2.2}$$

где B — квадратная матрица, соответствующая найденному минору, F — вектор, составленный из элементов k-го столбца матрицы $A - \lambda_i \cdot E$ (без k-ой строки). Решая с помощью MathCAD уравнение (2.2), получим вектор $\hat{U}$, из которого собственный вектор получается добавлением единицы на место k-го элемента.

Как было сказано ранее, собственный вектор определяется с точностью до произвольного множителя. Есть три стандартные возможности: нормализовать собственный вектор, то есть привести его к вектору длины 1, нормализовать максимальный элемент собственного вектора, нормализовать минимальный элемент вектора. Мы предпочтем последний способ, разделив собственный вектор на минимальное по модулю ненулевое значение вещественной или мнимой части его компоненты. При этом есть некий шанс получить целочисленные компоненты вектора, что приятно.

Не забудьте, что указанную процедуру вы должны проделать для каждого из собственных чисел и получить в результате n собственных векторов, которые удобно собрать в матрицу T. Интересно, что если мы составим произведение $T^{-1}AT$, то результатом будет диагональная матрица с элементами, равными собственным числам матрицы A.

Задание лабораторной работы.

Найти все собственные числа и вектора матрицы A. Конкретный вид матрицы A задан в разделе Варианты.

Ход работы.

1. **Введите матрицу A и запишите выражения для P_i, Q_i, $PR1_i$, $QR1_i$, $PR2_i$, $QR2_i$, $PI1_i$, $QI1_i$, $PI2_i$, [illegible]2_i.**

2. Вычислите верхнюю и нижнюю оценки корней характеристического уравнения и постройте график (см. пункты 3.1-3.3 лаб.раб.№ 1).
3. Найдите собственные числа (см. п. 4-6 лаб.раб.№ 1).
4. Зафиксируйте число k и вычислите минор $n-1$ порядка матрицы $A - \lambda_1 \cdot E$.
   4.1. К сожалению, в пакете MathCAD нет для этого специальной процедуры, поэтому рекомендуем поступить следующим образом. Используя процедуру if, постройте матрицу B, которая отличается от матрицы $A - \lambda_i \cdot E$ исключенным k-ым столбцом, например

$$AA := A - \lambda \cdot E;$$

$$j := 1..n-1; \quad B^{<j>} := \mathrm{if}(j < k, AA^{<j>}, AA^{<j+1>})$$

   4.2. Транспонируйте матрицу B, исключите из нее k-ый столбец и вновь транспонируйте.
5. Если $|B| \neq 0$, решите систему (2.2), обращая матрицу B; если $|B| = 0$, то вернитесь к пункту 4 и измените число k.
6. Постройте собственный вектор и нормализуйте его.
7. Проделайте указанную процедуру для каждого из собственных чисел и запишите совокупность собственных векторов в виде матрицы T.
8. Для проверки вычислите произведение $T^{-1}AT$.

Лабораторная работа № 3

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В настоящей лабораторной работе мы будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}(x) = 0, \tag{3.1}$$

где n — порядок уравнения, $y(x)$ — неизвестная функция, $y^{(k)}$ — ее k-ая производная, a_i — вещественные константы.

Здесь и далее мы будем решать задачу Коши для уравнения (3.1). Это означает, что найденное нами решение уравнения (3.1) должно удовлетворять и начальным условиям

$$y^{(k)}(0) = y_k^0 \quad k \in \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

Согласно методу Эйлера [5] общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp \lambda_i x, \tag{3.3}$$

где λ_i — корень характеристического уравнени

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^{n-i} = 0, \tag{3.4}$$

а C_i — произвольные постоянные. Здесь и далее мы не будем рассматривать случаи кратных корней характеристического уравнения (3.4). Заметим только, что в случае кратных корней общее решение отличается от (3.3).

Алгорит нахождения корней характеристического уравнения рассмотрен в лаб. раб.1. После того, как корни характеристического уравнения найдены, задача Коши для однородного уравнения (3.1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных C,

$$B \cdot C = Y^0, \tag{3.5}$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ — вектор произвольных постоянных, $Y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)^T$ — вектор начальных условий, а $b_{i,j}$ (элементы матрицы B) равны λ_j^{i-1}.

Задание лабораторной работы.

Решить задачу Коши для уравнения

$$\sum_{i=0}^{5} a_i y^{(5-i)}(x) = 0,$$

с начальными условиями

$$y_1^0 = y_5^0 = 1, \quad y_3^0 = -1, \quad y_2^0 = y_4^0 = 0.$$

Построить график решения на интервале $[0, 2\pi]$. Вектор a задан в разделе Варианты.

Ход работы.

1. Найдите корни характеристического полинома для данного уравнения (см. лаб.раб.1).
2. Сформируйте матрицу B, вектор правых частей Y^0 и найдите вектор $C = B^{(-1)} \cdot Y^0$.
3. Запишите решение по формуле (3.3) и постройте его график на отрезке $[0, 2\pi]$.

Лабораторная работа № 4

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

В этой работе мы будем искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}(x) = f(x), \tag{4.1}$$

в случае, когда правая часть является квазимногочленом

$$f(x) = \sum_{l=1}^{m} Q_l(x) \exp p_l x,$$

где $Q_l(x)$ — многочлены от x степени s_l с комплексными коэффициентами, а p_l — комплексные константы. Заметим, что большинство "хороших" функций раскладываются в ряды Тейлора или Фурье, т.е. могут быть представлены в виде квазимногочленов.

Прежде чем переходить к построению частного решения, отметим одно важное свойство линейных уравнений: в том случае, когда правая часть уравнения (4.1) представляет собой сумму функций т.е. $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$, его решение представляет собой сумму решений уравнений с правыми частями $f_k(x)$. В силу этого дело сводится к отысканию частного решения уравнения (4.1) в случае, когда $f(x) = Q(x) \exp px$, где $Q(x)$ — многочлен степени s

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{s} q_j x^{s-j}.$$

Перейдем к построению частного решения уравнений с указанными правыми частями. Будем рассматривать два случая: нерезонансный и резонансный. В первом случае константа p отлична от всех корней характеристического уравнения. Во втором случае p совпадает с одним из корней. Напомним, что в лабораторных работах мы не рассматриваем случаи кратных корней характеристического уравнения.

В нерезонансном случае будем искать частное решение в виде [5]

$$y(x) = \sum_{j=0}^{s} c_j x^{s-j} \exp px,$$

при этом коэффициенты c_j определяются из линейной системы

$$D(p) \cdot C = Q, \qquad (4.2)$$

где $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_s)^T$, $C = (c_0, c_1, \ldots, c_s)^T$, а $D(\lambda)$ — матрица, составленная из характеристического полинома и его производных. Например, в случае $s = 2$

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 & 0 \\ 2P'(\lambda) & P(\lambda) & 0 \\ P''(\lambda) & P'(\lambda) & P(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $P(p) \neq 0$ и матрица $D(p)$ в этом случае неособенна.

В резонансном случае решение следует искать в виде

$$y(x) = \sum_{j=0}^{s} c_j x^{s-j+1} \exp px.$$

При этом в системе (4.2) матрица $D(\lambda)$ в случае $s = 2$ примет вид

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 3P'(\lambda) & 0 & 0 \\ 3P''(\lambda) & 2P'(\lambda) & 0 \\ P'''(\lambda) & P''(\lambda) & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

Заметим, что $P'(p) \neq 0$ и матрица $D(p)$ неособенна. В остальном решение находится так же, как и в нерезонансном случае.

Задание лабораторной работы.

Построить частное решение уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}(x) = x^2 \sin(px).$$

Вектор a задан в разделе Варианты. Константа p принимает значения 1 и 2.

Ход работы.

1. При $p = 1$ представьте правую часть в виде

$$x^2 \sin(x) = Q_1(x) \exp p_1 x + Q_2(x) \exp p_2 x,$$

где

$$Q_1 = (-i/1, 0, 0), \quad Q_2 = (i/1, 0, 0), \quad p_1 = i, \quad p_2 = -i.$$

2. Постройте характеристический полином $P(\lambda)$ и найдите его корни.
3. Определите резонансному или нерезонансному случаю соответствуют $p_1 = i$, $p_2 = -i$.
4. Вычислите производные от $P(\lambda)$ и составьте матрицу $D(p_1)$.
   4.1. MathCAD предполагает возможность вычисления производных, но эта процедура, особенно для старших производных требует большого времени, и мы рекомендуем записать аналитические выражения для производных.
5. Решите линейную систему и найдите C_1. Аналогично найдите и C_2.
6. Постройте решения y_1 и y_2. Их сумма и даст искомое решение. Интересно, что, в то время как частные решения y_1 и y_2 принимают комплексные значения, их сумма вещественна. Постройте графики решения.
7. Аналогично исследуйте случай $p = 2$.

Лабораторная работа № 5

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Теперь мы можем решить задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}(x) = f(x) \qquad (5.1)$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(0) = y_k^0 \quad k \in \overline{1,n}. \qquad (5.2)$$

Напомним, что общее решение неоднородного уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_i \exp \lambda_j x + \tilde{y}(x). \qquad (5.3)$$

При этом произвольные постоянные C_i определятся при удовлетворении начальным условиям как решения линейной системы

$$B \cdot C = Y^0 - \tilde{Y}(0). \qquad (5.4)$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ — вектор произвольных постоянных, $Y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)^T$ — вектор начальных условий, B — матрица, элементы которой $b_{k,j}$ равны λ_j^{k-1}, а $\tilde{Y}(0) = (\tilde{y}(0), \tilde{y}'(0), \ldots, \tilde{y}^{(n-1)}(0))^T$.

Задание лабораторной работы.

Решить задачу Коши для уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = x^2 \sin(px)$$

с начальными условиями $Y(0) = (0,0,0,0,0)^T$ и построить график решения на отрезке $[0; 2\pi]$. Вектор a задан в разделе Варианты.

Ход работы.

1. Введите λ_j — вектор собственных чисел характеристического полинома и сформируйте матрицу B.
2. Введите векторы Y^0, $\tilde{Y}(0)$ и найдите вектор правых частей системы (5.4).
3. Вычислите вектор произвольных постоянных, запишите решение в виде (5.3) и постройте график.

Лабораторная работа № 6

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В этой работе мы будем рассматривать систему n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{Y}(x) - AY(x) = F(x), \qquad (6.1)$$

где $Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$ — вектор искомых функций, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$ — заданная вектор-функция, A — постоянная матрица размера $[n \times n]$.

Напомним, что любое линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами может быть сведено к системе вида (6.1). Здесь и далее мы ограничимся рассмотрением случаев, когда матрица A вещественна и имеет различные собственные числа, а вектор-функция $F(x)$ составлена из квазиполиномов и ее компоненты имеют вид

$$f_i(x) = \sum_{i=0}^{s} q_{ki} x^{s-i} \exp px.$$

Введем также в рассмотрение вектор $q_i = (q_{i,0}, q_{i,1}, \ldots, q_{i,s})$ и матрицу $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_s)^T$, составленную из столбцов q_i.

Также как и в случае линейного уравнения n-го порядка общее решение системы линейных уравнений является суммой общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Общее решение однородной системы имеет вид [5]

$$Y(x) = W(x) \cdot C,$$

где C — столбец произвольных постоянных, а $W(x)$ — так называемая фундаментальная матрица, столбцы которой образуют набор линейно независимых решений однородной системы. Таким образом

$$W(x) = (y^1(x), y^2(x), \ldots, y^n(x)), \quad y^k(x) = U^k \exp \lambda_k x.$$

Здесь U^k — собственные вектора матрицы A, λ_k — собственные числа этой матрицы.

Для нахождения частного решения неоднородной системы представим его в виде $\hat{Y}(x) = UZ(x)$, где U — матрица, составленная из собственных векторов U^k матрицы A. Подставив это выражение в формулу (6.1) и умножив обе части слева на U^{-1}, получим

$$\dot{Z}(x) - \Lambda Z(x) = \hat{F}(x), \tag{6.2}$$

где $\hat{F}(x) = U^{-1}F(x)$, а Λ— диагональная матрица с элементами, равными собственным числам матрицы A (см. лаб.раб.2). При рассмотрении системы с правыми частями указанного вида различаются два случая: нерезонансный и резонансный.

В нерезонансном случае частное решение ищется в виде

$$z_i(x) = \sum_{l=0}^{s} h_{il} x^{s-l} \exp px, \tag{6.3}$$

а константы h_{il} определяются из решения n линейных систем уравнений, которые, например, в случае $s = 2$ при фиксированном i таковы

$$D^i \cdot H^i = R^i, \quad H^i = (h_{i0}, h_{i1} \ldots, h_{is})^T,$$

$$D^i = \begin{pmatrix} p-\lambda_i & 0 & 0 \\ 2 & p-\lambda_i & 0 \\ 0 & 1 & p-\lambda_i \end{pmatrix},$$

а R^i есть столбец матрицы $(U^{-1} \cdot Q)^T$ с номером i.

В резонансном случае решение ищется в виде

$$z_i(x) = \sum_{l=0}^{s} h_{il} x^{s-l+1} \exp px, \tag{6.4}$$

а константы h_{il} определяются из решения n линейных систем уравнений, которые, например, в случае $s = 2$ при фиксированном i таковы

$$DD \cdot H^i = R^i, \quad H^i = (h_{i0}, h_{i1}, \ldots, h_{is})^T,$$

$$DD = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

а R^i есть столбец матрицы $(U^{-1} \cdot Q)^T$ с номером i.

Теперь мы можем решить задачу Коши для неоднородной системы уравнений. Общее решение представляется в виде

$$Y(x) = W(x) \cdot C + \hat{Y}(x) \tag{6.6}$$

и при удовлетворении начальным условиям $Y(0) = Y^0$ получим систему уравнений для C:

$$U \cdot C = Y^0 - \hat{Y}(0). \tag{6.7}$$

Задание лабораторной работы.

Решить задачу Коши для уравнения

$$\dot{Y} - AY = F(x) \qquad F(x) = (0, x^2 \sin(px), 0, 0, 0)^T$$

при начальных условиях $Y^0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$. Константа p принимает значения 1 и 2.

Матрица A задана в разделе Варианты.

Ход работы.

1. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A. (см. лаб. раб. N 2).
2. Задайте матрицу собственных векторов U.
3. При $p = 1$ представьте вектор правых частей в виде

$$F(x) = (q0_0 x^2 + q0_1 x + q0_2) \cdot e^{ix} + (q1_0 x^2 + q1_1 x + q1_2) \cdot e^{-ix}$$

$$q0_0 = (0, -i/2, 0, 0, 0)^T \quad q1_0 = (0, i/2, 0, 0, 0)^T$$

$$q0_1 = q0_2 = q1_1 = q1_2 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$$

4. Найдите последовательно U^{-1}, $(U^{-1}Q0)^T$ и $(U^{-1}Q1)^T$.

5. Пользуясь оператором if определите матрицу DDD, которая совпадает с матрицей D в нерезонансном случае, и DD в резонансном случае.

6. Найдите вектора $H0$ и $H1$.

7. С помощью оператора if задайте вспомогательные вектора a и b, компоненты которых принимают значение 1, если случай резонансный, и 0 в нерезонансном случае. Теперь вы можете описать оба случая одной формулой и найти $Z(x)$.

8. Умножая $Z(x)$ слева на U, найдите частное решение $\tilde{Y}(x)$.

9. Вычислите фундаментальную матрицу W.

10. Решите систему (6.7) и найдите C.

11. Запишите общее решение и постройте графики для каждой компоненты.

12. Аналогично решите задачу для $p = 2$.

Лабораторная работа № 7

Численное решение систем дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта.

В предыдущих работах мы строили точные аналитические решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. К сожалению, это возможно только для узкого класса дифференциальных урагнений. В большинстве случаев приходится ограничиваться построением приближенного решения.

В этой работе мы будем строить приближенное решение системы дифференциальных уравнений с помощью численного метода Рунге-Кутта 4-го порядка [3]. Итак, мы рассматриваем систему вида

$$\dot{Y} = F(Y, x), \quad x \in [0, x^*] \tag{7.1}$$

с начальными условиями

$$Y(0) = Y^0,$$

где $F(Y, x)$ — заданная вектор-функция, а $Y(x)$ — искомая вектор-функция.

Разобьем интервал интегрирования на n частей, определив шаг интегрирования h. Теперь на каждом шаге мы будем строить вектор решения по следующему правилу

$$Y^{j+1} = Y^j + \delta(Y^j, x_j, h), \quad x_{j+1} = x_j + h, \quad x_0 = 0, \tag{7.2}$$

где

$$\delta(Y, x, h) = \frac{h}{2}\Big(F(Y, x) + 2K_2(Y, x, h) + 2K_3(Y, x, h) + K_4(Y, x, h)\Big), \tag{7.3}$$

$$K_2(Y, x, h) = F\left(Y + \frac{h}{2}F(Y, x), x + \frac{h}{2}\right),$$
$$K_3(Y, x, h) = F\left(Y + \frac{h}{2}K_2(Y, x), x + \frac{h}{2}\right), \tag{7.4}$$
$$K_4(Y, x, h) = F\left(Y + hK_3(Y, x), x + \frac{h}{2}\right).$$

Оставив без обсуждения вопрос о том, какие условия следует наложить на функцию F, чтобы предложенный алгоритм давал решение уравнения (7.1), заметим, что по крайней мере для линейных систем алгоритм дает решение, точность которого возрастает с уменьшением шага h, стремясь в пределе к точному решению.

Задание лабораторной работы.

Построить решение задачи Коши для системы

$$\dot{Y} - AY = F(x)$$

на отрезке $[0, 2\pi]$ с шагом 0.25 и 0.5 при $F(x) = (0, x^2\sin(x), 0, 0, 0)^T$ и начальных условиях $Y^0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T$. Матрица A задана в разделе Варианты.

Ход работы.

1. Задайте

$$h_1 = .25, \quad n_1 = \mathrm{ceil}(2\pi/h_1), \quad x_0 = 0, \quad Y^0 = (0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

2. Задайте функции, определяемые формулами (7.3)-(7.4), а также функцию $F(Y, x) = AY + F(x)$.

3. Нанесите на график значения каждой из компонент вектор функции решений $Y_i(x_i)$.

4. Проделайте аналогичные вычисления для шага $h_2 = .5$, $n_2 =$ **ceil**$(2\pi/h_2)$.

5. С помощью оператора WRITE запишите значения $Y_0(x_i)$ в файл RES (этот вектор понадобится в следующей работе)

Лабораторная работа N 8

Интерполяция сплайнами.

Эта работа принадлежит к несколько иному жанру, чем предыдущие. Сейчас мы займемся интерполяцией и экстраполяцией функций.

Пусть на плоскости задано множество точек (x_i, y_i), причем для простоты $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Эти точки могут трактоваться как узловые точки графика некоторой неизвестной функции $y = y(x)$. Очевидно, что сама эта функция определяется неоднозначно. Однако если мы поставим ряд дополнительных условий, эта неоднозначность может быть устранена. Например, мы можем считать, что интерполирующая функция принадлежит определенному классу функций, заданных на всем промежутке определения $[x_0, x_n]$, например, является многочленом степени n. Для таких функций имеют место интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.

Мы также можем предположить, что искомая функция задается на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ локально. Например, искомая функция может быть кусочно линейной, состоять из кусков многочленов k-ой степени или многочленов разных степеней. При этом естественно потребовать соблюдения некоторых условий гладкости функций в узловых точках. Такого рода интерполяция называется сплайн-интерполяцией. В пакете MathCAD предусмотрена возможность линейной интерполяции и кубической сплайн-интерполяции, обеспечивающей гладкость искомой функции до вторых производных включительно.

Задача об определении поведения функции вне отрезка $[x_0, x_n]$ называется задачей об экстраполяции функции. Для этой цели мы можем использовать процедуры **lspline**(X, Y) — линейной, **pspline**(X, Y) — параболической и **cspline**(X, Y), кубической экстраполяции cite2.

Задание лабораторной работы.

Построить график интерполяционной функции заданной узловыми точками $(x_i, Y_0(x_i))$ на промежутке $(0, 2\pi)$ при $h = 0.5$(см. лаб.раб.7).

Ход работы.

1. Задайте координаты узловых точек: $X_i = h * i$ и $Y_i = Y_0(x_i)$ (последний вектор считайте из файла RES).

2. Используя стандартную функцию **linterp**(X, Y, x), постройте функцию линейной интерполяции $fl(x)$.

3. С помощью стандартной процедуры

$$VS := \mathbf{cspline}(X, Y) \qquad fs(x) = \mathbf{interp}(VS, X, Y, x)$$

найдите вектор вторых производных VS и определите функцию кубической сплайн-интерполяции $fs(x)$.

4. Постройте графики функций $fl(x)$ и $fs(x)$. Нанесите на график точки (X_i, Y_i).

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.И. Бычкова, М.С. Семченков, Н.М. Семченков, *Пакет MathCAD*: Справочник, СПИКиТ, Санкт-Петербург, 1994, 18с.
2. В.П. Дьяконов, *Система MathCAD*: Справочник, Радио и связь, Москва, 1993, 128с.
3. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва, 1974, 831с.
4. Д.К. Фаддеев, *Лекции по алгебре*, Наука, Москва, 1984, 416с.
5. М.В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления*, Наука, Москва, 1985, 448с.

Варианты

Вектор a

1. $a = 1, 3, 5, 5, 4, 2$
2. $a = 1, 3, 8, 8, 7, 5$
3. $a = 1, 5, 10, 10, 9, 5$
4. $a = 1, 5, 13, 13, 12, 8$
5. $a = 1, 3, 8, 14, 16, 8$
6. $a = 1, 3, 11, 17, 28, 20$
7. $a = 1, 5, 13, 25, 36, 20$
8. $a = 1, 5, 16, 28, 48, 32$
9. $a = 1, 4, 7, 8, 6, 4$
10. $a = 1, 4, 10, 14, 9, 10$
11. $a = 1, 6, 14, 16, 13, 10$
12. $a = 1, 6, 17, 22, 16, 16$
13. $a = 1, 4, 10, 20, 24, 16$
14. $a = 1, 4, 13, 26, 36, 40$
15. $a = 1, 6, 17, 34, 52, 40$
16. $a = 1, 6, 20, 40, 64, 64$
17. $a = 1, 5, 9, 11, 8, 6$
18. $a = 1, 5, 12, 20, 11, 15$
19. $a = 1, 7, 18, 22, 17, 15$
20. $a = 1, 7, 21, 31, 20, 24$
21. $a = 1, 5, 12, 26, 32, 24$
22. $a = 1, 5, 15, 35, 44, 60$
23. $a = 1, 7, 21, 43, 68, 60$

Матрица A

1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & -6 & 4 \\ -4 & -5 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

7. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

8. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

9. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

11. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

12. $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

13. $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & -6 & 4 \\ -4 & -5 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

14. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

15. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

16. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

17. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

18. $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

19. $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & -6 & 4 \\ -4 & -5 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

20. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

21. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

22. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

23. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Компьютерный набор выполнен
в издательском пакете TEX.
Подписано к печати 20.01 1995 г.
Объем 1.25 уч.-изд. л. Тираж 500 экз.
Заказ 22 Цена договорная

Ротапринт СПИКиТ
С.-Петербург, Бухарестская ул., 22