5	Ø.385E+ØØ	13	Ø.325E+ØØ	21	Ø.283E+ØØ
6	Ø.482E-Ø1	14	Ø.652E-Ø1	22	Ø.233E+ØØ
7	Ø.38ØE+ØØ	15	Ø.241E+ØØ	23	Ø.773E-Ø1
8	Ø.2Ø6E+ØØ	16	Ø.295E+ØØ	24	Ø.294E+ØØ

Из табл.2 следует, что для рассматриваемых значений a_j ($j = 0, 1, 2$) величина $\mathcal{M} = 0.445$.

Указатель литературы

1. Ковалевский М.А. Асимптотическое поведение голоморфных в нуле решений некоторого линейного дифференциального уравнения // Вестн. Ленингр. ун-та, 1978, № 1.

2. Isaacson D. e.a. Numerical analysis of spectral properties of coipled Schrödinger operators. I. Single and double well anharmonic oscillators // Math.Comp.1981.Vol.37,N156.

3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.

4. Латышева К.Я., Терещенко Н.Н., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. Киев, 1974.

5. Ковалевский М.А. Нахождение связи между двумя фундаментальными семействами решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вестн. Ленингр. ун-та, 1981, № 1.

А.Л.Смирнов, В.В.Чебанов

УДК 539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМ ГРУЗОМ

Рассматривается задача о поперечных колебаниях тонкой упругой пластинки постоянной толщины, к центру которой упругой связью прикреплен груз. Поскольку решение уравнения колебаний пластинки имеет особенность в центре, т.е. в месте возприложения сосредоточенной силы, вызванной наличием груза, прямое решение граничной задачи затруднено.

Воспользуемся при решении данной задачи методом, изложенным в работе [1]. Проанализируем движение груза и пластины, считая, что на них действует сила $P(t)$. Силу $P(t)$ определим из условия равенства перемещения и скорости центра пластинки и точки приложения упругой связи. Перемещения пластины будем искать в виде ряда по собственным формам колебаний пластины без груза и сопротивления.

Движение груза описывается формулами

$$M\ddot{x} = -P - k_1 x + F, \quad P = c(x - w_0),$$

где M – масса груза; x – его перемещение; k_1 – коэффициент сопротивления; F – внешняя сила, действующая на груз; c – жесткость; w_0 – перемещение центра пластины; P – сила взаимодействия пластины и груза.

Здесь и далее будем рассматривать действие на груз внешней гармонической силы $F = \bar{F} e^{i\nu t}$, где ν – ее частота, а $\bar{F}$ – амплитуда.

Представим силу P в виде

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t} + \bar{P} e^{i\nu t}, \tag{1}$$

где C_k, $\bar{P}$ – произвольные постоянные; ω_k – собственные частоты колебаний системы пластинка – груз; t – время.

Перемещение центра пластинки найдем по формуле

$$w_0 = w_{00} + w_{0ч},$$

где

$$w_{00} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_{0k} C_k e^{i\omega_k t}, \quad w_{0k} = -\frac{1}{c} + \frac{1}{M\omega_k^2 - k_1\omega_k i}, \tag{2}$$

$$w_{0ч} = \bar{w}_{0ч} e^{i\nu t}, \quad \bar{w}_{0ч} = -\frac{\bar{F}}{M\nu^2 - k_1\nu i} + \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{M\omega_k^2 - k_1\omega_k i}\right)\bar{P}, \tag{3}$$

а перемещение груза – по формулам

$$x_0 = x_{00} + x_{0ч},$$

$$x_{00} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\omega_k t}\left(\frac{1}{M\omega_k^2 - k_1\omega_k i}\right), \tag{4}$$

$$x_{0ч} = \bar{P}\left(\frac{1}{M\omega_k^2 - k_1\omega_k i}\right) - \frac{\bar{F}}{M\nu^2 - k_1\nu i}.$$

Свободные колебания круглой пластинки без груза и сопротивления описываются уравнением

$$\Delta^2 w + \frac{\rho h a^4}{D}\ddot{w} = 0. \tag{5}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; w, ρ, h, a – прогиб, плотность, толщина, радиус пластинки соответственно. В дальнейшем будем рассматривать только осесимметричные нагрузки, поэтому ограничимся рассмотрением осесимметричных свободных колебаний пластинки. Исследуем граничные условия типа условий жесткой заделки. Решение уравнения (5) с указанными граничными условиями имеет вид

$$w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n R_n e^{i\omega_n t},$$

при этом собственные формы R_n записываем так:

$$R_n(x) = J_0(\lambda_n x) - \frac{J_0(\lambda_n)}{I_0(\lambda_n)} I_0(\lambda_n x), \tag{6}$$

где $x = r/a$. Частоты колебаний пластинки ω_n связаны с частотным параметром λ_n выражением

$$\lambda_n^4 = \frac{\rho h a^4}{D}\omega_n^2$$

(D – цилиндрическая жесткость). Частотный параметр λ_n определяем из уравнения

$$J_0(\lambda_n) I_1(\lambda_n) + I_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n) = 0. \tag{7}$$

В формулах (6), (7) J_0, J_1, I_0, I_1 – функции Бесселя с вещественным и мнимым аргументами. Согласно данным таблиц для вычисления корней уравнения (7) [2] они вещественны и при больших n частотный параметр $\lambda_n \sim \pi n$.

Колебания пластинки с грузом и сопротивлением описываются уравнением

$$\Delta^2 w + \frac{k_1 a^4}{D}\dot{w} + \frac{\rho h a^4}{D}\ddot{w} = P\frac{a^4}{D}\delta(ax) + \frac{a^4}{D}Q(x,t). \qquad (8)$$

Здесь k_1 – коэффициент сопротивления; Q – внешняя сила, действующая на пластинку; $\delta(x)$ – дельта-функция. Рассмотрим действие на пластинку внешней гармонической силы $Q = \bar{Q}e^{i\nu t}$. Представим силу P в виде (1). Решение уравнения (8) будем искать в виде ряда по полной ортогональной системе функций R_n. Тогда перемещение пластинки находим по формуле

$$w = w_0 + w_\nu , \qquad (9)$$

где

$$w_0 = \frac{a^4}{D}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{nk} C_k e^{i\omega_k t} R_n(x);$$

$$w_{nk} = \frac{R_n(0)}{2\pi a^4 N_n \alpha_n(\lambda_k)}; \qquad (10)$$

$$\alpha_n(p) = \lambda_n^4 - p^4 + k_1^* p^2 i;$$

$$w_\nu = \frac{a^4}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n\nu} e^{i\nu t} R_n(x);$$

$$w_{n\nu} = \frac{1}{\alpha_n(\bar{\nu})}\left(\bar{P}\frac{d_n}{a^2} + \bar{Q}\frac{\Lambda_n}{N_n}\right); \qquad (11)$$

$$N_n = J_0^2(\lambda_n); \quad d_n = \frac{R_n(0)}{2\pi N_n}; \quad \Lambda_n = \frac{2J_1(\lambda_n)}{\lambda_n};$$

$$k_1^* = \frac{k_1 a^2}{\sqrt{\rho h D}}; \quad \bar{\nu}^4 = \frac{\rho h a^4 \nu^2}{D}.$$

Здесь k_1^* – безразмерный коэффициент сопротивления; λ_k – частотный параметр при колебании пластинки с грузом; $\bar{\nu}$ – безразмерная частота внешней силы.

Для получения уравнения частот колебаний системы пластинка – груз приравняем перемещения центра пластинки и точки прикрепления упругой связи при свободных колебаниях (2), (10). Отсюда

$$\Delta(\lambda) = -\frac{1}{c^*} + \frac{\mu}{\beta(\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\alpha_n(\lambda)} = 0, \qquad (12)$$

где

$$k_2^* = \frac{\mu k_2}{\pi\sqrt{\rho h D}}; \quad \frac{1}{c^*} = \frac{\pi D}{a^2 c}; \quad \beta(p) = p^4 - k_2^* p^2 i;$$

$$\mu = \frac{\pi \rho h a^2}{M}; \quad a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_0(\lambda_n)} - \frac{1}{I_0(\lambda_n)}\right)^2.$$

Уравнение (12) при $1/c^* = 0$ получено в работе [1].

Исследуем полученное уравнение (12). В случае колебаний пластинки с жестко присоединенным грузом без сопротивления $c^* = \infty$, $k_1^* = k_2^* = 0$, $\mu \neq 0$, и оно приобретает вид

$$\frac{\mu}{\lambda^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^4 - \lambda^4}. \qquad (13)$$

Представляет интерес исследование уравнения (13) при малых и больших μ. Если масса пластинки намного больше массы груза, то μ велико. Обозначим $\varepsilon = 1/\mu$, $\varepsilon \ll 1$. Используя метод возмущений, из уравнения (13) получаем следующее выражение частотного параметра

$$\lambda_j^4 = \lambda_j^{0\,4}(1 - a_j\varepsilon + O(\varepsilon^2)), \qquad (14)$$

где λ_j^0 – частота колебаний пластинки без груза. Это выражение справедливо при $\varepsilon \ll 1/a_j$. Например, при нахождении первой частоты по формулам (14) должно выполняться неравенство $\mu \gg 5$. Влияние груза на частоты увеличивается с их возрастанием.

Если масса груза значительно больше массы пластинки, то μ мало. Положим $\varepsilon = \mu$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда одно решение уравнения (13) имеет вид

$$\lambda_j^4 = \varepsilon c_1 + O(\varepsilon^2),$$

где $c_1 = 1 \Big/ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\lambda_n^4}$, а остальные частоты находят из уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4 - \lambda^4} = 0 . \qquad (15)$$

Таким образом, имеется одна сверхнизкая (по ε) частота и серия частот, определяемые уравнением (15). При $\varepsilon \to 0$ первое решение стремится к нулю, а характеризуемые уравнением (15) частоты – к некоторым ненулевым значениям.

В случае колебаний пластинки с упруго закрепленным грузом без сопротивления $k_1^* = k_2^* = 0$, $1/c^* \neq 0$, и уравнение (12) имеет вид

$$-\frac{1}{c^*} + \frac{\mu}{\lambda^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4 - \lambda^4} .$$

Рассмотрим влияние упругой связи на частоту колебаний.

Если связь почти жесткая, $1/c^* \ll 1$. Обозначим $\varepsilon = 1/c^*$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда

$$\lambda_j^4 = \lambda_j^{0^4} (1 + \varepsilon c_1 + O(\varepsilon^2)), \qquad (16)$$

где $c_1 = -1 \Bigg/ \left(\dfrac{\mu}{\lambda_j^{0^4}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n \lambda_j^{0^4}}{(\lambda_n^4 - \lambda_j^{0^4})^2} \right)$ (λ_j^0 – частотный параметр при колебаниях пластинки с жестко закрепленным грузом). Как следует из формулы (15), при уменьшении жесткости частота снижается, а при $\varepsilon = 0$ частотный параметр $\lambda_j = \lambda_j^0$.

Если жесткость упругой связи мала, то $\varepsilon = c^*$, $\varepsilon \ll 1$. Первая частота определяется формулой

$$\lambda_1^4 = \varepsilon \mu + O(\varepsilon^2),$$

а остальные – выражением

$$\lambda_j^4 = \lambda_n^4 - \varepsilon a_j + O(\varepsilon^2).$$

В этом случае имеется одна сверхнизкая частота, для которой $\lambda_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и серия пластиночных частот, которые при $\varepsilon = 0$ переходят в частоты колебаний пластинки без груза.

Случай колебаний пластинки с грузом и сопротивлением отличается от вышеизложенных тем, что при $k_1^* \neq 0$, $k_2^* \neq 0$ уравнение (12) имеет не вещественные, а комплексные корни. Рассмотрим пластинку с малым сопротивлением. Будем считать $k_1^* = k_2^* = k$. Положим $\varepsilon = k$, $\varepsilon \ll 1$. При этом частотный параметр определяется формулой

$$\lambda_j^2 = \lambda_j^{0^2} (1 + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon c_1 i ,$$

где $c_1 = 1/2$. Таким образом, введение сопротивления приводит к появлению мнимого слагаемого порядка ε, влияющего на затухание колебаний, и изменению частоты на величину ε^2. Величины k_1^* и k_2^* в реальных системах редко бывают известны. Однако на практике сопротивление, как правило, мало, поэтому в дальнейшем влиянием сопротивления на движение системы во всех случаях, кроме резонансных, когда только введение сопротивления обеспечивает конечность амплитуды колебаний, будем пренебрегать.

Для нахождения величины $\bar\beta$ приравняем смещения центра пластинки и точки прикрепления упругой связи для вынужденных колебаний, вычисленные по формулам (3), (11). При этом

$$\bar\beta = \frac{1}{\Delta(\vartheta)} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}\, a^2 \frac{K_n R_n(0) \kappa}{K_n \varkappa_n(\vartheta)} + \frac{\bar F \mu}{\beta(\vartheta)} .$$

Подставим выражение для $\bar\beta$ в формулы (4), (11) и определим $x_ч$ и $w_{пч}$. В результате получим

$$w_{пч} = \frac{a^4}{D} \tilde{w}_{пч} , \qquad (17)$$

$$\text{где} \quad \bar{w}_{nч} = \frac{1}{\alpha_n(\vartheta)}\left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{Q}\frac{K_n R_n(0)}{N_n \alpha_n(\vartheta)} + \frac{\bar{F}\psi}{\beta(\vartheta)a^2\varkappa}}{\Delta(\vartheta)}\varkappa d_n + \bar{Q}\frac{K_n}{N_n}\right); \quad (18)$$

$$x_ч = \frac{a^4}{D}\bar{x}_ч; \quad (19)$$

$$\bar{x}_ч = -\frac{\bar{F}\psi}{\beta(\vartheta)a^2\varkappa} + \frac{\psi}{\beta(\vartheta)\Delta(\vartheta)}\left(\frac{\bar{F}\psi}{\beta(\vartheta)\varkappa a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n R_n(0)\bar{Q}}{N_n \alpha_n(\vartheta)}\right). \quad (20)$$

В частности, при ударе, когда на систему действуют лишь силы инерции, для $\bar{F}$ и $\bar{Q}$ справедливы выражения

$$\bar{Q} = \rho h W, \quad \bar{F} = MW, \quad \bar{F} = a^2\varkappa\bar{Q}/\psi,$$

где W – ускорение системы.

Таким образом, общее решение уравнения (8) представляется формулой (9), где w_{nk}, x_k, $w_{nч}$, $x_ч$ вычисляются по формулам (10), (11), (17) - (20). При отсутствии сопротивления внешнюю силу в решении удобнее представить в виде

$$Q = Q^s \sin \nu t - Q^c \cos \nu t,$$

$$w = \frac{a^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(Q^s C_k^s \sin\omega_{kn} t + Q^c C_k^c \cos\omega_{kn} t + w_{nч}\right)R_n(x). \quad (21)$$

Здесь C_k^s, C_k^c – произвольные постоянные. Частоты и коэффициенты в формулах (21) и (9) связаны соотношениями

$$C_k^s = (C_k - C_{-k})i, \quad C_k^c = C_k + C_{-k}, \quad \omega_k = \omega_{-k}, \quad w_{kn} = w_{-kn}.$$

Произвольные постоянные определяют по начальным условиям. Пусть, например, начальные условия имеют вид $w(0)=0$, $\dot{w}(0)=0$, $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$. Тогда коэффициенты C_k^s и C_k^c определяем по системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^s w_{kn}\omega_k = -\nu w_{nч}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^s x_k \omega_k = -\nu x_ч, \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^c w_{kn} = -w_{nч}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^c x_k = -x_ч.$$

Так как главными в бесконечной системе уравнений (22) являются быстро убывающие диагональные элементы, решения этой системы C_k^s, C_k^c быстро убывают с возрастанием k. Поэтому при построении решения можно ограничиться нахождением нескольких первых коэффициентов C_k^s, C_k^c, решив для этого систему уравнений конечного порядка.

Представляет интерес исследование колебаний системы под действием внешних сил, частоты которых близки к резонансным. В этом случае максимальный вклад вносят вынужденные колебания. Величина $\Delta(\vartheta)$ оказывается малой, что приводит к значительному увеличению амплитуды.

Рассмотрим пластинку с малыми сопротивлениями: $k_1^* = k_1\varepsilon$, $k_2^* = k_2\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда

$$|\Delta(\vartheta)| = \varepsilon\left(\frac{k_2}{\vartheta^6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_1\vartheta^2}{(\lambda_n^4 - \vartheta^4)^2}\right) + O(\varepsilon^2).$$

При этом прогиб в центре пластинки определяется формулой

$$|w_0| = \frac{a^4}{D}A_\nu|\bar{Q}|\left(\frac{1}{\varepsilon} + Q(1)\right), \quad (23)$$

$$\text{где} \quad A_\nu = \left(\frac{\psi}{\vartheta^4} - \frac{1}{c^*}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n R_n(0)}{N_n(\lambda_n^4 - \vartheta^4)} + \frac{1}{\vartheta^4}\right)\Big/\left(\frac{k_2}{\vartheta^6} + \sum_{n=1}\frac{k_1\vartheta^2}{(\lambda_n^4 - \vartheta^4)^2}\right).$$

Таким образом, амплитуда уменьшается с возрастанием ε. Оценим влияние частоты на амплитуду. Оставим в формуле (23) при больших ϑ только главные члены $w_{nч} \sim 1/(\lambda_n^4 - \vartheta^4)$. Тогда $A_\nu \sim 1/\vartheta^2 \sim 1/\nu$. Следовательно, амплитуда обратно пропорциональна частоте внешней силы.

В качестве примера была рассмотрена система со следующими параметрами: $a = 7{,}5\cdot10^{-2}$ м, $h = 10^{-3}$ м, $\rho = 2{,}24\cdot10^3$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}22$, $E = 3{,}34\cdot10^{10}$ Н/м^2, $M = 2{,}86\cdot10^{-3}$ кг, $c = 0{,}24\cdot10^3$ Н/м. При этом $\psi = 13{,}5$, $c^* = 0{,}16\cdot10^6$. Первые три корня уравнения (12) имеют значения $\lambda_1 = 2{,}92$, $\lambda_2 = 5{,}59$, $\lambda_3 = 8{,}36$. Им соответствуют частоты $\nu_1 = 276$, $\nu_2 = 1010$, $\nu_3 = 2260$ Гц.

Экспериментальные значения низших частот свободных колеба[ний] данной системы таковы: $\nu_1^{эксп} = 350$, $\nu_2^{эксп} = 1146$, $\nu_3^{эксп} = 2014$ Гц. Им соответствуют частотные параметры $\lambda_1^{эксп} = 3,29$, $\lambda_2^{эксп} = 5,9$, $\lambda_3^{эксп} = 7,89$. Наименьшее значение частотного параметра на[хо]дим по приближенной формуле (14), откуда $\lambda_1^{пр} = 2,81$, $\nu_1^{пр} = 254$ Гц.

Указатель литературы

1. Бабич Д.В., Борисенко В.И., Шпакова С.Г. Свободные колебания пластинки с сосредоточенными массами // Прикл. мех. Киев, 1969, № 5.
2. Гонткевич В.С. Собственные колебания пласти[нок] и оболочек. Киев, 1969.

УДК 539.3 С.М.Бауэр, С.В.Кот…

К РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИИ ОБЪЕКТИВА СТЕРЖНЕВОГО ТИПА

Расчет конструкций телескопов приводится во многих ра[бо]тах (например, в работах [1, 2]). В большинстве из них … ся каркасные трубы по схеме Серрюрье. Конструкция в э… чае состоит из трех основных деталей, соединенных че… рами определено р… ных стержней так, … спечить минимальны… тельные смещения гл… вторичного зеркал … положениях трубы в пр… стве.

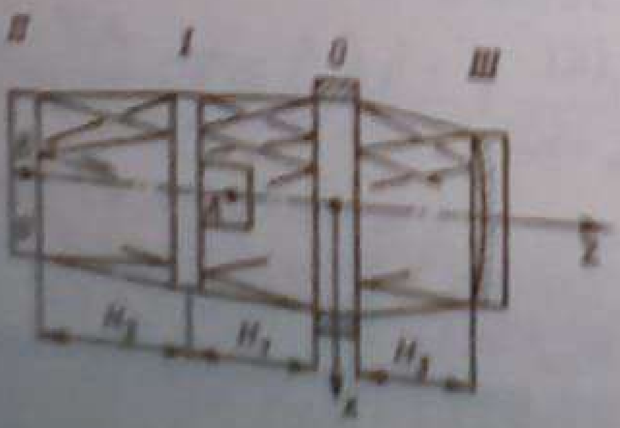

Рис.1.

В данной работе рас… ривается конструкция, … щая из четырех основных … лей, соединенных подкреп… … элементами (рис.1). Тело 0 … неподвижно. На теле II …