5. Т а р п о ш я н ... колебаний безмоментной задачи в случае осесимметричных колебаний тонкой оболочки. – Функциональный анализ и его приложения, 1977, т.11, вып.1, с.83-84.

6. Т а р п о ш я н Г.Г. Разложение в обобщенный интеграл Фурье по собственным функциям в теории тонких упругих оболочек вращения. – Успехи мат.наук, 1978, т.33, вып.5, с.199, 200.

7. У л и т и н М.И. О возможности существования особых собственных частот в зоне непрерывного спектра задачи об осесимметричных колебаниях тонких оболочек вращения. – Вестн.Ленингр.ун-та, 1980, № 19, с. 65-69.

176-186

А.Л.Смирнов

УДК 539.3:534.1

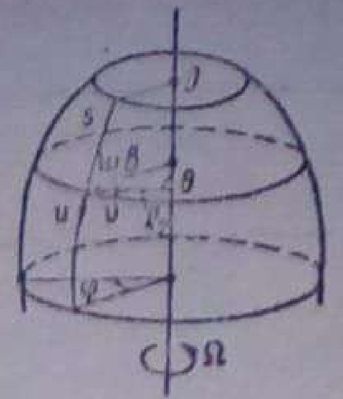
581

КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В работе рассмотрена задача о свободных и вынужденных колебаниях вращающихся оболочек вращения. Получена система уравнений, описывающая колебания оболочки и найдено условие ортогональности собственных форм колебаний.

1. Рассматривается оболочка вращения толщиной h, вращающаяся с угловой скоростью Ω вокруг оси симметрии. Координаты точки на срединной поверхности задаются длиной дуги s и долготным углом φ. Оболочка ограничена двумя параллелями: $s = s_1$ и $s = s_2$.

В работе приняты следующие обозначения: R_1, R_2 - главные радиусы кривизны, B - расстояние от оси вращения до оболочки, E - модуль Юнга, σ - коэффициент Пуассона, γ - плотность оболочки. Проекции перемещения на направления образующей, параллели и внутренней нормали недеформированной оболочки обозначаются через $U^{T} = (u, v, w)$.



Исследуются малые колебания относительно положения большой осесимметричной деформации, вызванной силами инерции.

2. Кинетическая энергия оболочки выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2} \gamma h (V_u^2 + V_v^2 + V_w^2)\, B\, d\varphi\, ds\,, \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{V}^{T} = (V_u, V_v, V_w)$ - скорость точки оболочки;

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}\,, \quad \mathbf{V}_r^{T} = (\dot u, \dot v, \dot w)\,,$$

$$\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \sin\theta, 0, -\Omega\cos\theta)\,,$$

$$\boldsymbol{\rho} = ((B + r)\cos\theta, v, -(B + r)\sin\theta)\,,$$

$r = -w\sin\theta + u\cos\theta$ с точностью до линейных членов. Угол θ показан на рисунке, причем $\sin\theta = B/R_2$ и $\cos\theta = B'$.

Рассмотрим однородную оболочку. Представим перемещение оболочки в виде

$$U(s, \varphi, t) = U^{0}(s) + U^{1}(s, \varphi, t)\,, \qquad (2.2)$$

где U^{0} - начальное перемещение; U^{1} - малое дополнительное перемещение. Будем считать, что начальное кручение отсутствует, т.е. $v^{0} = 0$. Тогда

$$T = \frac{\gamma h}{2}\int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2} \Big[(\dot u^{1} - \Omega B v^{1})^2 + (\dot v^{1} + \Omega(B - (w^{1} + w^{0})\frac{B}{R_2} + B'(u^{1} + u^{0})))^2 + (\dot w^{1} + \Omega \frac{B}{R_2} v^{1})^2\Big] B\, d\varphi\, ds\,. \qquad (2.3)$$

3. Выражение для потенциальной энергии оболочки имеет вид

$$\Pi = \Pi_1 + \frac{h^2}{12}\Pi_2\,,$$

где $\Pi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Eh}{1-\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2}\left[e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2\sigma e_{11}e_{22} + \frac{1-\sigma}{2}e_{12}^2\right]B\,d\varphi\,dS$ – потенциальная энергия растяжения-сдвига, а Π_2 – потенциальная энергия изгиба-кручения оболочки.

Преобразуем выражение для Π_1. Известно [1, с.92, 93], что

$$e_{11} = e_1 + \frac{1}{2}\left[e_1^2 + \gamma_1^2 + \omega_1^2\right],$$

$$e_{22} = e_2 + \frac{1}{2}\left[e_2^2 + \gamma_2^2 + \omega_2^2\right],$$

$$e_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 + (e_1\gamma_2 + e_2\gamma_1 + \omega_1\omega_2),$$

где

$$e_1 = \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1}; \qquad e_2 = \frac{\partial v}{B\partial\varphi} + \frac{B'}{B}u - \frac{w}{R_1};$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial s}; \qquad \gamma_2 = \frac{\partial u}{B\partial\varphi} - \frac{B'}{B}v;$$

$$\omega_1 = -\frac{u}{R_1} - \frac{\partial u}{\partial s}; \qquad \omega_2 = -\frac{v}{R_1} - \frac{\partial w}{B\partial\varphi};$$

e_i, γ_i, ω_i – компоненты деформации.

Пусть начальное кручение и начальный крутящий момент отсутствуют, т.е. $v^0 = 0$, $e_{12}^0 = 0$, $\gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 0$, $\omega_2^0 = 0$.

Тогда $e_{11} = e_{11}^0 + e_{11}^1$, $e_{22} = e_{22}^0 + e_{22}^1$, $e_{12} = e_{12}^1$, где

$$e_{11}^1 = e_1^1 e_1^0 + \frac{1}{2}\left(e_1^{1^2} + \gamma_1^{1^2} + \omega_1^{1^2}\right) + e_1^1 + \omega_1^0\omega_1, \quad e_{11}^0 = e_1^0 + \frac{1}{2}e_1^{0^2} + \omega_1^{0^2},$$

$$e_{22}^1 = e_2^1 e_2^0 + \frac{1}{2}\left(e_2^{1^2} + \gamma_2^{1^2} + \omega_0^{1^2}\right) + e_2^1; \quad e_{22}^0 = e_2^0 + \frac{1}{2}e_2^{0^2};$$

$$e_{12}^1 = \gamma_1^1 + \gamma_2^1 + e_1^0\gamma_2^1 + e_2^0\gamma_1^1 + (e_1^1\gamma_2^1 + e_2^1\gamma_1^1 + \omega_1^1\omega_2^1) + \omega_1^0\omega_2^1.$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}K\int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2}\Big[\left(e_{11}^{0^2} + e_{22}^{0^2} + 2\sigma e_{11}^0 e_{22}^0\right) + \Big(e_{11}^{1^2} + e_{22}^{1^2} + 2\sigma e_{11}^1 e_{22}^1 + \frac{1-\sigma}{2}e_{21}^{1^2}\Big) + 2\frac{1}{K}\left(T_1^0 e_{11}^1 + T_2^0 e_{22}^1\right)\Big]B\,d\varphi\,ds, \tag{3.1}$$

где $T_1^0 = K(e_{11}^0 + \sigma e_{22}^0)$; $K = Eh/(1-\sigma^2)$; $T_2^0 = K(e_{22}^0 + \sigma e_{11}^0)$.

4. Уравнения, описывающие свободные колебания оболочки, получим, воспользовавшись принципом Остроградского-Гамильтона:

$$\delta(T - \Pi) = 0 . \tag{4.1}$$

Проварьируем выражение для кинетической энергии по U^1. Получим

$$\delta T = \gamma h \int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2} \left(-\ddot{U}^1 + 2\Omega L^c \dot{U}^1 + \Omega^2 L^{\Omega}(U^1) + F^1\right) B\,\delta U^1 d\varphi\, ds , \tag{4.2}$$

где

$$\delta U^{1} = (\delta u, \delta v, \delta w) ; \quad L^c = \begin{pmatrix} 0 & B' & 0 \\ -B' & 0 & B/R_2 \\ 0 & -B/R_2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

L^{Ω} - симметричный оператор; $F^{1T} = \Omega^2(BB', 0, -B^2/R_2)$ при условии $\| U^0 \| \ll B$.

Варьируя потенциальную энергию по U^1, имеем

$$\delta\Pi = K \int_0^{2\pi}\int_{s_1}^{s_2} \left[L(U^1) + \frac{1}{K}\left(L^{T_1^0} + L^{T_2^0}\right)(U^1) + \frac{h^2}{12} L^h(U^1) + F^2 \right] \delta U^1 d\varphi\, ds , \tag{4.3}$$

где

$$L = \begin{pmatrix} -B\dfrac{\partial^2}{\partial s^2} - B'\dfrac{\partial}{\partial s} + \dfrac{B'^2}{B} - B''\sigma - \dfrac{1-\sigma}{2}\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} & \dfrac{B'}{B}\dfrac{3-\sigma}{2}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} - \dfrac{1+\sigma}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial\varphi} & B\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\sigma}{R_2}\right)\dfrac{\partial}{ds} + B\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)' \\ -\dfrac{3-\sigma}{2}\dfrac{B'}{B}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} - \dfrac{1+\sigma}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial\varphi} & -\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1-\sigma}{2}B'' + \dfrac{1-\sigma}{2}\dfrac{B'^2}{B} - \dfrac{1-\sigma}{2}B'\dfrac{\partial}{\partial s} - \dfrac{1-\sigma}{2}B\dfrac{\partial^2}{\partial s^2} & \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{\sigma}{R_1}\right)\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ -B\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\sigma}{R_2}\right)\dfrac{\partial}{ds} - B'\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{\sigma}{R_1}\right) & -\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{\sigma}{R_1}\right)\dfrac{\partial}{\partial\varphi} & B\left(\dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2} + \dfrac{2\sigma}{R_1 R_2}\right) \end{pmatrix} ;$$

$L^{T_1^0}$, $L^{T_2^0}$ - симметричные операторы, зависящие от начальных напряжений T_1^0 и T_2^0. Симметричный оператор L^h, явный вид которого известен [2], образуется при варьировании Π_2 по U^1. Член, не содержащий дополнительных перемещений,

$$F^{2T} = \left(-\frac{\partial}{\partial s}(T_1^0 B) + T_2^0 B', \frac{\partial}{\partial\varphi}T_2^0, \left(-\frac{T_1^0}{R_1} - \frac{T_2^0}{R_2}\right)B\right)$$

при условии $\| e_i^0 \| \ll 1$.

Подставив выражения (4.2) и (4.3) в условие (4.1), получим две группы уравнений: уравнения колебаний оболочки

$$B\gamma h(-\ddot{U}^1 + 2\Omega L^c U^1 + \Omega^2 L^\Omega(U^1)) - KL(U^1) -$$
$$- L^{T_1^0}(U^1) - L^{T_2^0}(U^1) - L^h(U^1) = 0\,, \tag{4.4}$$

и уравнения для начальных напряжений

$$\gamma h F^1 B - F^2 = 0\,. \tag{4.5}$$

Для установления окончательного вида уравнений колебаний оболочки в перемещениях найдем выражения для начальных напряжений из системы (4.5) и подставим их в систему (4.4).

Уравнения для начальных напряжений имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_1^0 B) - T_2^0 B' + B^2 B' \Omega^2 \gamma h = 0\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial \varphi} T_2^0 = 0\,,$$
$$\frac{T_1^0}{R_1} B + \frac{T_2^0}{R_2} B - \frac{B^3}{R_2} \Omega^2 \gamma h = 0\,.$$

При отсутствии начального кручения и момента второе уравнение превращается в тождество. Решения этой системы таковы:

$$T_1^0 = \frac{CR_2}{B^2}\gamma h \Omega^2\,, \quad T_2^0 = \gamma h B^2 \Omega^2 - \frac{CR_2^2}{R_1 B_2^2}\gamma h \Omega^2\,.$$

Константа C зависит от граничных условий, в частности, она отлична от нуля только в случае жесткой заделки обоих краев.

Оценим величину Ω. Рассмотрим случай, когда $C=0$. Тогда $T_2^0 = \gamma h B^2 \Omega^2$. Вместе с тем $T_2^0 = K(\sigma\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)$. Считая $\|\varepsilon_i^0\| \ll 1$, $B \sim O(1)$ и обозначая $\Omega^{*2} = \frac{(1-\sigma^2)\gamma}{E}\Omega^2$, имеем $\Omega^* \ll 1$.

5. Подставим найденные выражения для начальных напряжений в уравнения (4.4) и будем искать его решение в виде

$$u^1 = \sum_k C_{k0}^1 u_{k0}^1(\cos\omega_{k0}t + \sin\omega_{k0}t) + C_{k0}^2 u_{k0}^2(\cos\omega_{k0}t - \sin\omega_{k0}t) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_k u_{km}^1 (C_{km}^1 \cos(\omega_{km}t + m\varphi) + C_{km}^2 \sin(\omega_{km}t + m\varphi))\,,$$

$$v' = \sum_k C^1_{k0} v^1_{k0}(\sin\omega_{k0}t - \cos\omega_{k0}t) + C^2_{k0} v^2_{k0}(-\sin\omega_{k0}t - \cos\omega_{k0}t) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_k v^1_{km}(C^1_{km}\sin(\omega_{km}t + m\varphi) - C^2_{km}\cos(\omega_{km}t + m\varphi)), \qquad (5.1)$$

$$w' = \sum_k C^1_{k0} w^1_{k0}(\cos\omega_{k0}t + \sin\omega_{k0}t) + C^2_{k0} w^2_{k0}(\cos\omega_{k0}t - \sin\omega_{k0}t) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_k w^1_{km}(C^1_{km}\cos(\omega_{km}t + m\varphi) + C^2_{km}\sin(\omega_{km}t + m\varphi)),$$

где C^i_{km} – произвольные постоянные. Тогда переменные по s и φ, t разделяются, и мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для собственных векторов U^i_{km}

$$L_m(U^1_{km}) + \frac{h^2}{12} L^h_m(U^1_{km}) + \omega^{*2}_{km} U^1_{km} + 2\omega^*_{km}\Omega^* L^c_m U^1_{km} + \Omega^{*2}(L^1_m + CL^2_m)(U^1_{km}) = 0, \qquad (5.2)$$

где $\omega^{*2}_{km} = \dfrac{(1-\sigma^2)\gamma}{E}\omega^2_{km}$; $L^c_m = \begin{pmatrix} 0 & B' & 0 \\ B' & 0 & -B/R_2 \\ 0 & -B/R_2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$L_m = \frac{1}{B}\begin{pmatrix} B\dfrac{d^2}{ds^2} + B'\dfrac{d}{ds} - \dfrac{B'^2}{B} + B''\sigma - \dfrac{1-\sigma}{2}\dfrac{1}{B}m^2 & -\dfrac{B'}{B}\dfrac{3-\sigma}{2}m + \dfrac{1+\sigma}{2}m\dfrac{d}{ds} & -B\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\sigma}{R_2}\right)\dfrac{d}{ds} - \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)' \\ -\dfrac{3-\sigma}{2}\dfrac{B'}{B}m - \dfrac{1+\sigma}{2}m\dfrac{d}{ds} & -\dfrac{m^2}{B} - \dfrac{1-\sigma}{2}B'' + \dfrac{1-\sigma}{2}B'\dfrac{d}{ds} + \dfrac{1-\sigma}{2}B\dfrac{d^2}{ds^2} - \dfrac{1-\sigma}{2}\dfrac{B'^2}{B} & \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{\sigma}{R_1}\right)m \\ B\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\sigma}{R_2}\right)\dfrac{d}{ds} - B'\left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{\sigma}{R_1}\right) & \left(\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{\sigma}{R_1}\right)m & -B\left(\dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2} + \dfrac{2\sigma}{R_1R_2}\right) \end{pmatrix}.$$

Операторы L^1_m и L^2_m имеют достаточно сложное строение, но так как $\Omega^* \ll 1$, их влияние считается малым, и поэтому явный вид этих операторов не приводится.

Для оператора L^h_m укажем лишь его главный член:

$$l^h_{m_{33}} = -\frac{1}{B^2}\left(B\frac{d^2}{ds^2} - \frac{m^2}{B}\right)^2 .$$

в осесимметричном случае ω_{k0} положительна, в неосесимметричном ω_{km} может иметь любой знак. Уравнение для U^2_{k0} получим из (5.2) заменой ω_{k0} на $-\omega_{k0}$.

Для цилиндрической оболочки уравнение (5.2) было получено в работе [3].

6. Запишем уравнение (5.2), обозначив $L_m + \frac{h^2}{12}L^h_m + L'_m + cL^2_m = N_m$. Тогда

$$N_m(U'_{km}) + \omega^{*2}_{km}U'_{km} + 2\omega^*_{km}\Omega^*_{km}L^c_m U'_{km} = 0 . \qquad (6.1)$$

Определим скалярное произведение векторов f и g по формуле

$$(f,g) = \int_{s_1}^{s_2} f^T g B\, ds .$$

В работе [4] показано, что при самосопряженных граничных условиях, к которым относятся, например, условия шарнирного опирания, жесткой заделки, свободного края, операторы L_m и L^h_m являются самосопряженными, т.е. например, $(L_m U_{km}, U_{lm}) = (L_m U_{lm}, U_{km})$. Аналогичным свойством обладают и операторы L'_m, L^2_m, L^c_m, и, следовательно, N_m.

Зададимся целью получить условие ортогональности для собственных векторов U'_{km}. Для этого запишем уравнение (6.1) для векторов U'_{km} и U'_{lm}, умножим скалярно полученные уравнения на U'_{lm} и U'_{km} соответственно и вычтем одно из другого. Используя свойство самосопряженности операторов и коммутативности скалярного произведения, получаем

$$\omega^{*2}_{km}(U'_{km}, U'_{lm}) - \omega^{*2}_{lm}(U'_{km}, U'_{lm}) + 2\Omega^*\omega^*_{km}(U'_{km}, L^c_m U'_{lm}) -$$
$$- 2\Omega^*\omega^*_{lm}(U'_{km}, L^c_m U'_{lm}) = 0 ,$$

или

$$(\omega^*_{km} + \omega^*_{lm})(U'_{km}, U'_{lm}) + 2\Omega^*(U'_{km}, L^c_m U'_{lm}) = 0 \qquad (6.2)$$

при $\omega^*_{km} \neq \omega^*_{lm}$.

случае $m = 0$ также имеем условия ортогональности для ...торов U^2_{k0}:

$$(\omega^{*}_{k0}-\omega^{*}_{l0})(U^1_{k0},U^2_{k0})+2\Omega^{*}(U^1_{k0},L^c_0 U^2_{l0})=0 \quad \forall_k, l, \tag{6.3}$$

$$(\omega^{*}_{k0}+\omega^{*}_{l0})(U^2_{k0},U^2_{l0})-2\Omega^{*}(U^2_{k0},L^c_0 U^2_{l0})=0 \tag{6.4}$$

...ли $\omega^{*}_{k0}\neq\omega^{*}_{l0}$.

...спользуя условия ортогональности (6.2)-(6.4), можем удо...етворять начальным условиям, не решая бесконечной системы ...авнений для C^1_{km}.

...ействительно, пусть начальные условия заданы в виде

$$U(s,\varphi,0)=F(s,\varphi), \quad F^{T}=(f_1,f_2,f_3), \tag{6.5}$$

$$U_t(s,\varphi,0)=G(s,\varphi), \quad G^{T}=(g_1,g_2,g_3).$$

...зложим функции F и G в ряд Фурье. Тогда

$$F(s,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}F^{s}(s)\sin m\varphi+F^{c}(s)\cos m\varphi,$$

$$G(s,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}G^{s}(s)\sin m\varphi+G^{c}(s)\cos m\varphi.$$

...редставим решение в виде (5.1) и подставим его в условия ...). Имеем

$$\sum_k U^1_{km}C^1_{km}=F_{1m}=(f^c_{1m},f^s_{2m},f^c_{3m})^{T},$$

$$\sum_k U^1_{km}C^2_{km}=F_{2m}=(f^s_{1m},-f^c_{2m},f^s_{3m})^{T},$$

$$\sum\omega^{*}_{km}U^1_{km}C^1_{km}=G_{1m}=\sqrt{\frac{(1-\sigma^2)\gamma}{E}}(-g^s_{1m},g^c_{2m},-g^s_{3m})^{T}, \tag{6.6}$$

$$\sum_k\omega^{*}_{km}U^1_{km}C^2_{km}=G_{2m}=\sqrt{\frac{(1-\sigma^2)\gamma}{E}}(g^c_{1m},-g^s_{2m},g^c_{3m})^{T}$$

... $m\neq 0$,

$$\sum_k C^1_{k0}U^2_{k0}+C^2_{k0}U^1_{k0}=F_{10}=(f^s_{1m},-f^c_{2m},f^s_{3m})^{T}, \quad (6.7)$$

$$\sum_k \omega^*_{k0}(C^1_{k0}U^1_{k0}-C^2_{k0}U^2_{k0})=G_0=\sqrt{\frac{(1-\sigma^2)\gamma}{E}}(g^c_{10},g^c_{20},g^c_{30})^T,$$

f^c, f^s, g^c, g^s - коэффициенты Фурье. Например,

$$f^s_{1m}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1\sin m\varphi\, d\varphi .$$

Найдем вначале C^1_{km} и C^1_{km}. Умножим первое равенство системы (6.6) на $(\omega^*_{lm}+2\Omega^*L^c)U^1_{lm}$, а третье - на U^1_{lm} и сложим. Отсюда

$$\sum_k C^1_{km}((U^1_{km},U^1_{lm})\omega^*_{lm}+2\Omega^*(L^cU^1_{lm},U^1_{km})+\omega^*_{km}(U^1_{km},U^1_{lm}))=$$

$$=(F_{1m},(\omega^*_{lm}+2\Omega^*L^c_m)U^1_{lm})+(G_{1m},U^1_{lm})=A^1_{lm}.$$

В силу условия ортогональности выражение в левой части равно нулю при $\omega^*_{km}\neq\omega^*_{lm}$. Таким образом,

$$C^1_{lm}=A^1_{lm}/D_{lm},$$

где $D_{lm}=2(\omega^*_{lm}U'^2_{lm}+\Omega^*(L^c_mU^1_{lm},U^1_{lm}))$.

Действуя аналогично, получаем выражение для C^2_{lm}:

$$C_{lm}=A^2_{lm}/D_{lm},$$

где $A^2_{lm}=(F_{2m},(\omega^*_{lm}+2\Omega^*L^c_m)U^1_{lm})+(G_{2m},U^1_{lm})$.

Рассмотрим теперь случай $m=0$. Умножим первое равенство системы (6.7) на $\omega^*_{l0}U^1_{l0}+2\Omega^*L^c_mU^1_{l0}$, а второе - на $-U^2_{l0}$ и сложим. Тогда имеем

$$\sum_k C^1_{k0}(\omega^*_{l0}(U^2_{k0},U^1_{l0})+2\Omega^*(L^c_mU^1_{l0},U^2_{k0})-\omega^*_{k0}(U^1_{k0},U^2_{l0}))+$$

$$+C^2_{k0}(\omega^*_{l0}(U^1_{k0},U^1_{l0})+2\Omega^*(L^c_mU^1_{l0},U^1_{k0})+\omega^*_{k0}(U^2_{k0},U^2_{l0}))=$$

$$=(F_{10},\omega^*_{l0}U^1_{l0}+2\Omega^*L^c_mU^1_{l0})+(G_0,-U^2_{l0})=A^1_{l0}.$$

Согласно условиям ортогональности выражение в первых скобках равно нулю при любых k и l а выражение во вторых отлично от нуля только в случае $\omega_{l0} \neq \omega_{k0}$. Отсюда $C^1_{l0} = A^1_{l0} / D_{l0}$.

Действуя аналогично, получаем выражение для C^2_{l0}:

$$C^2_{l0} = A^2_{l0} / D_{l0} ,$$

где $A^2_{l0} = (F_{l0}, U^2_{l0}\omega^*_{l0} - 2\Omega^* L^c_m U^2_{l0}) + (G, U^1_{l0})$.

7. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях оболочки. В этом случае в правую часть уравнения (5.1) войдет функция $F = -\frac{1-\sigma^2}{Eh}\gamma Q$, где Q - внешняя сила.

Функция F имеет вид $F(s, \varphi - \Omega_1 t, t)$, причем $\Omega_1 = 0$ когда нагрузка связана с оболочкой, и $\Omega_1 = \Omega$, когда она неподвижна в пространстве.

Разложим функцию F в ряд Фурье по второму и третьему аргументам. Тогда для компоненты f^i имеем

$$f^i(s, \varphi - \Omega_1 t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A^i_{nm} \cos((\Omega_1 m + n)t - m\varphi) +$$

$$+ B^i_{nm} \cos((n - \Omega_1 m)t + m\varphi) + C^i_{nm} \sin((\Omega_1 m + n)t - m\varphi) +$$

$$+ D^i_{nm} \sin((n - \Omega_1 m)t + m\varphi),$$

где $A^i_{nm} = \frac{1}{2}(f^{iss}_{nm} + f^{icc}_{nm})$; $B^i_{nm} = -A^i_{nm}$; $C^i_{nm} = \frac{1}{2}(f^{ics}_{nm} + f^{isc}_{nm})$; $D^i_{nm} = \frac{1}{2} \times (f^{ics}_{nm} - f^{isc}_{nm})$; $f^{iss}_{nm}, f^{icc}_{nm}, f^{ics}_{nm}, f^{isc}_{nm}$ - коэффициенты Фурье разложения f^i по второму и третьему аргументам. Например,

$$f^{iss}_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^i(s, x, t) \sin mx \sin nt \, dx dt .$$

Обозначим $\Omega_1 m + n = \omega_{2mn}$ и $n - \Omega_1 m = \omega_{1mn}$ и будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u^1_{mn} \cos(\omega_1 t + m\varphi) + u^2_{mn} \sin(\omega_1 t + m\varphi) + u^3_{mn} \cos(\omega_2 t - m\varphi) +$$

$$+ u^4_{mn} \sin(\omega_2 t - m\varphi),$$

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} v_{mn}^{1}\sin(\omega_1 t+m\varphi)-v_{mn}^{2}\cos(\omega_1 t+m\varphi)+v_{mn}^{3}\sin(\omega_2 t-m\varphi)-$$
$$-v_{mn}^{4}\cos(\omega_2 t-m\varphi),$$

$$w=\sum_{n=0}\sum_{m=0} w_{mn}^{1}\cos(\omega_1 t+m\varphi)+w_{mn}^{2}\sin(\omega_1 t+m\varphi)+w_{mn}^{3}\cos(\omega_2 t-m\varphi)+$$
$$+w_{mn}^{4}\sin(\omega_2 t-m\varphi).$$

Тогда для U_{mn}^{i} имеем следующие уравнения:

$$N_m(U_{mn}^1)+\omega_{1mn}^{*2}U_{mn}^1+2\Omega^*\omega_{1mn}^{*}L_m^c U_{mn}^1=(B_{mn}^1, D_{mn}^2, B_{mn}^3)^T,$$

$$N_m(U_{mn}^2)+\omega_{1mn}^{*2}U_{mn}^2-2\Omega^*\omega_{1mn}^{*}L_m^c U_{mn}^2=(D_{mn}^1, B_{mn}^2, D_{mn}^3)^T,$$

$$N_m(U_{mn}^3)+\omega_{2mn}^{*2}U_{mn}^3-2\Omega^*\omega_{2mn}^{*}L_m^c U_{mn}^3=(C_{mn}^1, -A_{mn}^2, C_{mn}^3)^T,$$

$$N_m(U_{mn}^4)+\omega_{2mn}^{*2}U_{mn}^4+2\Omega^*\omega_{2mn}^{*}L_m U_{mn}^4=(A_{mn}^1, -C_{mn}^2, A_{mn}^3)^T.$$

Когда ω_{1mn}^{*}, ω_{2mn}^{*} совпадают по абсолютной величине с собственной частотой, возникает резонанс.

Указатель литературы

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1976. 512 с.

2. Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., 1974. 156 с.

3. Wang Shih-sen, Chou Yu. Effects of rotation on vibrations of circular cylindrical shells. - J. Acoust. Soc. Amer., 1974, vol.55, N 6, p.1340-1342.

4. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.