АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С.М.Бауэр, А.Л.Смирнов, П.Е.Товстик, С.Б.Филиппов

Дается обзор работ по механике тонкостенных конструкций, выполненных сотрудниками лаборатории прикладной механики НИИММ им. акад. В.И.Смирнова Санкт-Петербургского университета. Более подробно обсуждаются работы, опубликованные за последние 10 лет.

1. Введение.

Теория оболочек по своей сути является асимптотической теорией, существенно опирающейся на малость относительной толщины h_*. С этим обстоятельством связаны положенные в основу вывода двумерных уравнений гипотезы Кирхгофа–Лява и их модификации. Система двумерных уравнений теории оболочек является сингулярно возмущенной — она содержит малый параметр h_* при старших производных. В результате асимптотического анализа этой системы (главным образом, в линейном приближении) получены решения многих задач статики [1], [2], динамики [3 – 6] и устойчивости оболочек [7].

Ниже будут обсуждаться вопросы построения спектра частот свободных колебаний оболочек и близкие к ним по используемому математическому аппарату вопросы устойчивости оболочек. При этом рассматриваются не только гладкие оболочки, но и оболочки с изломом срединной поверхности, оболочки с ребрами жесткости, конструктивно анизотропные оболочки, подкрепленные системами нитей. Отдельно рассматривается вопрос о выводе соотношений упругости для физически и геометрически нелинейных задач двумерной теории оболочек, находящихся в условиях сильного изгиба. Вопросы прочности и устойчивости оболочек и пластин нашли свое приложение в офтальмологии.

2. Свободные колебания гладких оболочек.

2.1. Уравнения свободных колебаний. Для описания колебаний тонких упругих оболочек используется двумерная модель Кирхгофа–Лява. Система уравнения малых свободных колебаний в перемещениях имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(L_{ij}+h_*^2N_{ij}\right)u_j+\lambda u_i=0,\quad i=1,2,3,\qquad h_*=\frac{h}{R},\quad \lambda=\frac{\rho\omega^2R^2}{E},\tag{1.1}$$

где u_i — проекции перемещения, L_{ij} и N_{ij} — линейные дифференциальные операторы с переменными (в общем случае) коэффициентами, λ — искомый параметр частоты, h_* — малый параметр тонкостенности. Система (2.1) это самосопряженная эллиптическая система в частных производных. Она имеет восьмой порядок, однако при $h_*=0$ (что соответствует безмоментной оболочке) порядок системы (2.1) уменьшается до четырех. Следовательно, система (2.1) — сингулярно возмущенная. Для построения асимптотических разложений ее решений при $h_*\to 0$ в одних случаях можно использовать стандартные ВБК-разложения, а в других — приходится их модифицировать или разрабатывать новые методы.

А.Л.Гольденвейзером в [4] дана полная классификация интегралов системы (2.1) и вытекающий из нее качественный анализ спектра частот и форм колебаний. В основу анализа положено введенное в [1] понятие о показателе изменяемости p функций $F(x,y,h_*)$, который вводится соотношением

$$\max\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right\} \sim h_*^{-p}F. \tag{2.2}$$

В зависимости от показателя изменяемости p и соотношения между порядками искомых функций выделено четыре основных класса интегралов системы (2.1): квазипоперечные интегралы с малой изменяемостью, квазитангенциальные интегралы, интегралы релеевского типа, квазипоперечные интегралы с большой изменяемостью. Каждому из этих классов отвечает своя упрощенная система. Особое место занимают оболочки вращения, ибо для них возможно разделение переменных, после чего приходим к сингулярно возмущенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эффективное асимптотическое интегрирование возможно в случаях, допускающих точное или асимптотическое разделение переменных, а также в некоторых задачах низкочастотных колебаний. Ниже рассмотрен ряд частных случаев асимптотического интегрирования системы (2.1).

2.2. Осесимметричные колебания оболочки вращения. Система уравнений малых свободных осесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения приводится к уравнению шестого порядка с малым параметром при производных

$$-\mu^4\left(\frac{d^6w}{ds^6}+d_5(s)\frac{d^5w}{ds^5}+\dots\right)+b(s)\frac{d^2w}{ds^2}+b_1(s)\frac{dw}{ds}+b_0(s)w=0, \tag{2.3}$$

где $\mu>0$ — малый параметр ($\mu^2\sim h_*$), $b=\lambda-k_2^2(s)$, $k_2(s)$ — кривизна оболочки. При $b(s)\neq 0$ уравнение (2.3) имеет четыре интеграла с большим показателем изменяемости и два безмоментных интеграла, асимптотические разложения которых могут быть построены стандартными методами.

В некоторой переходной области частот $\min\{k_2^2(s)\}\le\lambda\le\max\{k_2^2(s)\}$ уравнение (2.3) имеет точку поворота $s=s_*$, в которой $b(s_*)=0$ и в окрестности которой асимптотическое интегрирование усложняется. При $b'(s_*)\neq 0$ в окрестности точки поворота построены [4,8] асимптотические разложения интегралов уравнения (2.3)

$$\hat{w}_j(s,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^nC_n(s)v_j^{(-n)}(\eta)+\delta_{j5}\varepsilon w^*(s,\mu),\quad j=1,\dots,5,\qquad \varepsilon=\mu^{4/5}, \tag{2.4}$$

где $\eta=\xi(s)/\varepsilon$, $\xi=(b'(s_*))^{1/5}(s-s_*)+O((s-s_*)^2)$, а эталонные функции $v_j^{(-n)}(\eta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^5v_j^{(-n)}}{d\eta^5}-\eta\frac{dv_j^{(-n)}}{d\eta}+(n-1)v_j^{(-n)}=\delta_{j5}\begin{cases}0, & n\le 0,\\ \frac{2\eta^{n-1}}{(n-1)!}, & n>0,\end{cases}\qquad \frac{dv_j^{(-n)}}{d\eta}=v_j^{(1-n)}.$$

Отметим, что функции $v_j^{(-n)}(\eta)$ универсальны в том смысле, что они не зависят от формы оболочки и частоты колебаний. Введенные ранее Н.А.Алумяэ [9] эталонные функции для конической оболочки зависели от трех параметров.

С использованием асимптотики эталонных функций при $\eta \to \pm\infty$ найдены формулы связи безмоментных интегралов и интегралов с большой изменяемостью при переходе через точку поворота. При этом оказалось, что интегралы обоих классов перемешиваются.

Также рассмотрены случай двух близких точек поворота, случай двойной точки поворота, неосесимметричные колебания оболочки вращения с фиксированным числом m волн в окружном направлении [4].

Появление точек поворота сопровождается (при фиксированном m) увеличением плотности частот колебаний, для которой получена явная формула. Для цилиндрической и сферической оболочек переходная область стягивается в точку, которая для безмоментной оболочки является точкой сгущения частот, а для моментной — точкой максимальной плотности частот. Построена также асимптотика интегралов в окрестности вершины купола.

2.3. Неосесимметричные колебания оболочки вращения с большим числом m волн в окружном направлении. Пусть $m \gg 1$, $\lambda \sim 1$, положим $m = \mu^{-1}\rho$. Тогда все восемь интегралов системы (2.1) имеют большой показатель изменяемости $p = 1/2$ и после разделения переменных $w(s,\varphi) = w(s)\cos(m\varphi)$ задача сводится к стандартной сингулярно возмущенной системе восьмого порядка

$$\mu \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x,\mu)\mathbf{y}. \qquad (2.5)$$

Поведение интегралов системы (2.5) зависит от корней $p_k(x)$, $k = 1, \ldots, 8$, характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A}(x,0) - \lambda\mathbf{E}) = 0. \qquad (2.6)$$

Исследованы случаи как различных корней этого уравнения, так и случаи, когда корни p_k меняют свою кратность в отдельных точках x_* (точках поворота). В последнем случае асимптотические разложения интегралов содержат эталонные функции Эйри, а сами точки поворота отделяют интенсивно колеблющиеся части оболочки от практически неподвижных. Получены уравнения для вычисления собственных частот и формулы для плотности частот [4].

2.4. Низкочастотные колебания. Низкочастотными называем колебания, частоты которых стремятся к нулю вместе с толщиной оболочки ($\lambda \sim h_*^a$, $a > 0$). Исследование низкочастотных колебаний, в частности, колебаний с наинизшей частотой имеет особое значение при оценке вибрационных свойств тонкостенных конструкций.

При анализе низкочастотных колебаний удобно опираться на формулу Релея

$$\lambda = \min_{u_1,u_2,w} \frac{\Pi_\varepsilon + h_*^2\Pi_\kappa}{T}, \qquad (2.7)$$

где Π_ε и $h_*^2\Pi_\kappa$ пропорциональны потенциальным энергиям деформаций растяжения — сдвига и изгиба — кручения оболочки, а T — кинетической энергии. Минимум вычисляется по всем перемещениям u_1, u_2, w, удовлетворяющим геометрическим граничным условиям. Низкочастотные колебания возможны лишь в случаях, когда деформации растяжения — сдвига малы или равны нулю, т.е. точно или приближенно выполняются равенства

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega = 0. \qquad (2.8)$$

Соответствующие перемещения называем псевдоизгибаниями.

Рассмотрим сначала случаи, когда низкочастотные колебания не связаны с наличием участка свободного или слабо закрепленного края (такие оболочки называем хорошо закрепленными). Анализ системы (2.8) позволяет сделать следующие выводы. Для хорошо закрепленной оболочки положительной гауссовой кривизны псевдоизгибания отсутствуют. Для оболочки нулевой и отрицательной гауссовой кривизны независимо от способа ее закрепления существуют псевдоизгибания с показателем изменяемости p, для которых

$$\lambda \sim h_*^{2np} + h_*^{2-4p}, \tag{2.9}$$

где $n = 2$ для оболочек нулевой гауссовой кривизны и $n = 1$ — для отрицательной. Из формулы (2.9) сразу следует, что для хорошо закрепленной оболочки нулевой гауссовой кривизны $\lambda_{\min} \sim h_*$ при $p = 1/4$, а для отрицательной — $\lambda_{\min} \sim h_*^{2/3}$ при $p = 1/3$.

Исследованы [4] также случаи, когда низкочастотные колебания обязаны своим появлением слабому закреплению края (краев) оболочки. Если существуют перемещения (истинные изгибания), точно удовлетворяющие уравнениям (2.8) и всем закреплениям оболочки, то в соответствии с формулой Релея (2.7) $\lambda \sim h_*^2$. Если существуют перемещения (тангенциально возможные изгибания), точно удовлетворяющие уравнениям (2.8) и тангенциальным закреплениям оболочки, то низкочастотные колебания также имеют место, причем закрепление угла поворота вокруг касательной к краю дает $\lambda \sim h_*^{3/2}$, а закрепление $w = 0$ дает $\lambda \sim h_*^{1/2}$.

Исследованы также низкочастотные колебания оболочек с изломом срединной поверхности, со свободным краем на части границы и в других случаях.

При рассмотрении низкочастотных колебаний оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны главными являются квазипоперечные интегралы с малой изменяемостью, а дополнительные интегралы имеют характер интегралов краевого эффекта. Решена задача о расщеплении граничных условий на главные и дополнительные и найдена погрешность, возникающая при замене полной краевой задачи на главную [4,10]. Как правило, главными оказываются тангенциальные граничные условия.

В предположении, что $m \sim h_*^{1/3}$, $\lambda \sim h_*^{4/3}$, построены четыре главных интеграла системы уравнений колебаний оболочки вращения отрицательной кривизны

$$w(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(x) \exp\left\{ im\left(y \pm \int q(x)dx\right)\right\}, \quad q = \frac{1}{B}\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}, \; \varepsilon \sim h_*^{1/3}, \tag{2.10}$$

где функции $x_n(x)$ удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. В результате задача об определении частот сводится к классической задаче Штурма–Лиувилля. Рассмотрены [11] также колебания оболочки вращения знакопеременной гауссовой кривизны в случае, когда кривизна образующей $k_1(x)$ меняет знак, обращаясь в нуль в точке $x = x_*$. В этой точке система уравнений имеет точку поворота, и асимптотические разложения интегралов содержат функции Эйри.

2.5. Низкочастотные колебания цилиндрической или конической оболочки. В предположении, что $m \sim h_*^{1/4}$, $\lambda \sim h_*$, построение главных интегралов для цилиндрической оболочки в нулевом приближении сводится к (полубезмоментной) системе уравнений

$$\varepsilon^4\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\lambda' w-k(y)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0,\quad \varepsilon^4\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+k(y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\qquad \varepsilon\sim h_*^{1/4},\ \lambda'=\lambda\varepsilon^{-4},\tag{2.11}$$

где $k(y)$ — кривизна направляющей. В ряде случаев (например, для круговой оболочки с косым краем или для некруговой оболочки) точное разделение переменных оказывается невозможным. Рассматриваемые собственные функции являются быстро меняющимися в окружном направлении и медленно меняющимися — в продольном. Это обстоятельство позволяет провести асимптотическое разделение переменных в случаях, когда точное разделение переменных невозможно [12 – 16]. Предложенный алгоритм может быть применен ко многим задачам свободных колебаний и устойчивости цилиндрических и конических оболочек.

Локализованное в окрестности наиболее слабой образующей $x=x_0$ решение ищем в виде

$$\begin{aligned}
&w(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}w_n(x,\xi)\exp\{i[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}q\xi+\frac{1}{2}a\xi^2]\},\quad \xi=(x-x_0)/\sqrt{\varepsilon},\\
&\lambda'(\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\ldots,\qquad q>0,\quad \operatorname{Im}a>0,
\end{aligned}\tag{2.12}$$

где $w_n(x,\xi)$ — полиномы по ξ с коэффициентами, зависящими от x и последовательно определяемыми из одномерных краевых задач. В частности, $w_0(x,\xi)=H_m(\xi)W_0(x)$, где $H_m(\xi)$ — полином Эрмита, а $W_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$k^2(y)W_0''''+(q^8-\Lambda q^2 t(y))W_0=0,\tag{2.13}$$

с параметрами y и q и граничным условиям при $x=x_k(y)$. Через собственные значения $\Lambda(y,q)$ задачи (14) по явным формулам выражаются первые два слагаемых в разложении (2.12) $\lambda(\varepsilon)$. Собственные значения асимптотически двукратны, а формы колебаний локализуются в окрестности наиболее слабой образующей. Сказанное справедливо и для конических оболочек.

Для иллюстрации асимптотически кратных собственных значений рассмотрена [17] задача о колебаниях оболочки в форме эллиптического цилиндра. Наиболее слабыми являются две образующие, каждая из которых порождает в соответствии с (13) две частоты колебаний. В результате наинизшая частота асимптотически четырехкратна. Из соображений симметрии форма колебаний четна либо нечетна по отношению к каждому из диаметров эллипса. Численное интегрирование по четверти эллипса позволяет найти эти частоты отдельно. Оказалось, что при $\varepsilon=0.025$ частоты совпадают с точностью 10^{-10}, при $\varepsilon=0.05$ различие составляет 10^{-6}, а при $\varepsilon=0.1$ — составляет 10^{-3}.

Уравнение (2.11) можно применить для исследования свободных колебаний круговой цилиндрической панели постоянной длины со слабо закрепленным прямолинейным краем. Обнаружено [18] 6 вариантов граничных условий на этом краю, при которых существует форма колебаний, локализованная в окрестности этого края, а частота колебаний уменьшается по сравнению с наименьшей частотой колебаний замкнутой в окружном направлении оболочки (при тех же граничных условиях на криволинейных краях). В частности, если прямолинейный край свободен, то

$\lambda/\lambda_0 = 0.113$, где λ_0 — параметр частоты для замкнутой в окружном направлении оболочки.

2.7. Сверхвысокочастотные колебания пластины переменной толщины. Методом асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости исследована часть спектра частот свободных высокочастотных колебаний однородной изотропной [19] и анизотропной [20] пластины переменной толщины со свободными лицевыми поверхностями. Рассматриваются формы колебаний, имеющие одну или несколько полуволн деформации в направлении толщины пластины. Предполагается, что одна из лицевых поверхностей пластины плоская, а другая — гладкая с точкой максимума M. Найдены условия существования локализованных в окрестности точки M форм колебаний

$$\mathbf{u}^n_{m_1,m_2} = \mathbf{U}^n_{m_1,m_2}(x_1,x_2,\mu)\cos\frac{n\pi x_3}{h}, \quad n=1,2,\ldots,\ m_1,m_2=0,1,2,\ldots, \tag{2.14}$$

где $\mu = \sqrt{h_0/R}$ — малый параметр, h_0, R — максимальная толщина и характерное значение радиуса кривизны поверхности пластины. Локализованные в окрестности точки M функции $\mathbf{U}^n_{m_1,m_2}(x_1,x_2,\mu)$ построены с учетом результатов В.П.Маслова [11] и близки к описанными в п. 2.5. Найдены трехпараметрические серии соответствующих частот собственных колебаний

$$\omega^n_{m_1,m_2} = a_0\frac{n\pi}{h_0}\left\{1+\frac{\mu}{n\pi}\left[a_1\left(m_1+\frac{1}{2}\right)+a_2\left(m_2+\frac{1}{2}\right)\right]+O(\mu^2)\right\}, \tag{2.15}$$

где величины a_i зависят от свойств материала. Результаты имеют применение при расчете кварцевых резонаторов.

2.8. Колебания вращающихся оболочек вращения. Проведен асимптотический анализ спектра частот вращающихся оболочек вращения с m волнами в окружном направлении [16,21,22]. При этом кроме двух основных параметров задачи m и h_* появляется параметр Ω — безразмерная угловая скорость вращения. Основной особенностью задачи является расщепление частот собственных колебаний: каждой частоте ω_0 невращающейся оболочки соответствуют при $\Omega \ll 1$ две близких по модулю частоты $\omega_{1,2}$ вращающейся оболочки

$$\omega_{1.2} = \pm\alpha(\Omega)+\beta(\Omega), \qquad \alpha(\Omega) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2k}\Omega^{2k}, \quad \beta(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2k-1}\Omega^{2k-1}, \tag{2.16}$$

причем методом возмущений получены явные выражения для первых коэффициентов в рядах (2.16).

3. Линейная теория устойчивости гладких оболочек.

3.1. Качественный анализ форм потери устойчивости безмоментного начального состояния. Рассмотрен класс задач устойчивости тонких гладких упругих оболочек, находящихся под действием консервативной поверхностной и краевой нагрузки. Рассмотрены оболочки с различной формой срединной поверхности, находящиеся в различных условиях нагружения и закрепления. Использование статического критерия устойчивости приводит к линейным задачам на собственные значения, для решения которых эффективно используются асимптотические методы. Применяемые методы исследования во многом аналогичны используемым при анализе свободных колебаний. Основное различие заключается в том, что здесь нас интересуют лишь наименьшие (и, быть может, близкие к ним) собственные значения. Результаты сравниваются с аналогичными результатами для колебаний.

Рассмотрим сначала устойчивость начального безмоментного состояния T_1^0, T_2^0, S^0, вызванного действием консервативной статической нагрузки. Нагружение считаем однопараметрическим и вводим безразмерный параметр нагружения $\lambda > 0$ по формуле

$$\{T_1^0,\, T_2^0,\, S^0\} = -\lambda \frac{Eh^2}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}\{t_1,\, t_2,\, t_3\}. \tag{3.1}$$

Тогда задача потери устойчивости становится линейной задачей на собственные значения. При определенных упрощениях ее вариационная формулировка дается формулой Релея (2.7), в которой величина

$$T = \iint (t_1\gamma_1^2 + 2t_3\gamma_1\gamma_2 + t_2\gamma_2^2)dS, \tag{3.2}$$

пропорциональна работе начальных усилий на углах поворота γ_k нормали к срединной поверхности. Необходимым условием потери устойчивости является наличие (хотя бы на части срединной поверхности) направлений, по которым действуют начальные сжимающие усилия. При этом существуют значения γ_k, для которых подинтегральное выражение T положительно.

Исходя из формулы Релея получены [10,23,24] оценки порядка критической нагрузки и соответствующие показатели изменяемости p прогиба для хорошо закрепленных оболочек положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны $K = k_1k_2$

$$\begin{aligned} &K>0, \qquad \lambda\sim 1, \qquad p=1/2,\\ &K=0, \quad \begin{cases} \lambda\sim h_*^{1/2}, & p=1/4, \quad t_2>0,\\ \lambda\sim h_*^{1/4}, & p=1/4, \quad t_2\le 0,\ t_3\ne 0,\\ \lambda\sim 1, & p=1/2, \quad t_2\le 0,\ t_3=0,\end{cases}\\ &K<0, \qquad \lambda\sim h_*^{1/3}, \quad p=1/3,\end{aligned} \tag{3.3}$$

причем эта оценка при $K < 0$ имеет место лишь при выполнении некоторого дополнительного условия. Различные оценки для оболочек нулевой гауссовой кривизны ($K = 0$) соответствуют ее нагружению внешним давлением, кручением и осевой силой. Оценки (3.3) служат ориентиром при построении асимптотических разложений.

Проведен также [10,24,25] анализ зависимости порядка критической нагрузки от закрепления краев оболочки. Если закрепления краев оболочки не препятствуют изгибаниям срединной поверхности и начальные усилия производят работу на соответствующих перемещениях (т.е. $T > 0$ в (3.2)), то $\lambda \sim h_*$. Если истинных изгибаний нет, но есть изгибания при игнорировании ограничений $\gamma_1 = 0$, наложенных на угол поворота вокруг касательной к краю, то независимо от формы оболочки имеет место оценка сверху $\lambda = O(h_*^{1/2})$. Существование тангенциально возможных изгибаний, при которых игнорируются ограничения $w = 0$ на нормальное перемещение края, не приводит в общем случае к снижению порядка критической нагрузки. Этим задачи устойчивости отличаются от задач свободных колебаний.

Для оболочек положительной гауссовой кривизны наличие участка свободного края (даже при отсутствии изгибаний) может привести к снижению порядка критической нагрузки [10], которое связано с различием между математической жесткостью (неизгибаемостью) поверхностей и физической жесткостью оболочек [25].

Исследован [10] вопрос об улучшении приведенных выше оценок для оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны в зависимости от граничных условий.

3.2. Формы потери устойчивости, локализующиеся в окрестности линии. Рассмотрены [10,16,24] задачи устойчивости начального безмоментного осесимметричного состояния выпуклых оболочек вращения. В случаях, когда вмятины при потере устойчивости локализуются в окрестности наиболее слабой параллели, расположенной вдали от краев оболочки, методом асимптотического интегрирования получено аналитическое выражение формы прогиба с m волнами в окружном направлении

$$w(x, y, \mu) = \exp\{-c(x - x_*)^2/(2\mu)\} \cos m(\varphi - \varphi_0)[1 + O(\mu^{1/2}], \quad \mu \sim h_*^{1/2}, \qquad (3.4)$$

для которого ранее были известны лишь численные результаты. В частности, рассмотрена устойчивость эллипсоида вращения при различных условиях нагружения.

Рассмотрена устойчивость цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями при неоднородном осевом сжатии. Форма прогиба дается асимптотическим выражением

$$w(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} P_k(\xi) \exp\{i[\mu^{-\frac{1}{2}} p_0 \xi + \frac{1}{2} a\xi^2]\}, \quad \xi = (x - x_0)/\sqrt{\mu} \sin \frac{n\pi y}{l}, \qquad (3.5)$$

где условие $\operatorname{Im} a > 0$ обеспечивает затухание, $P_k(\xi)$ — полиномы, причем $P_0(\xi) = 1$. При $p_0 = 0$ собственные значения простые, а при $p_0 \neq 0$ — асимптотически двукратные. В зависимости от длины оболочки возможно волнообразование по форме (3.5) как при $p_0 > 0$, так и при $p_0 = 0$. Напомним, что при $p_0 > 0$ собственные значения асимптотически двукратны, а при $p_0 = 0$ они простые. Исследована область перехода от одного из этих случаев к другому.

3.3. Формы потери устойчивости, локализующиеся в окрестности точки. На примере устойчивости усеченного эллипсоида вращения при комбинированном нагружении построена [10] форма потери устойчивости, локализующаяся в окрестности наиболее слабой точки, удаленной от краев оболочки.

Исследованы локализующиеся в окрестности наиболее слабой точки формы потери устойчивости при осевом сжатии цилиндрической оболочки. В зависимости от параметров неоднородности (переменность толщины, кривизны оболочки, осевой силы в окружном направлении) выявлено разнообразие форм потери устойчивости.

Если же наиболее слабая точка оказывается на краю оболочки, асимптотическое интегрирование существенно усложняется [26].

3.4. Асимптотическое разделение переменных в задачах устойчивости. С помощью метода асимптотического разделения переменных, описанного в п. 2.5, решен [10,27] ряд задач устойчивости цилиндрических и конических оболочек, в которых полубезмоментные формы потери устойчивости локализуются в окрестности наиболее слабой образующей. Рассмотрены задачи для некруговых оболочек, оболочек с косыми краями, оболочек с неоднородными начальными усилиями, при потере устойчивости которых указанная локализация формы является характерной. Исследовано влияние граничных условий. Выделены главные граничные условия и найдена погрешность при замене полной краевой задачи на главную для оболочек как с прямым, так и с косым краем.

Решена задача об устойчивости конической оболочки под действием внешнего давления. В частности, получено аналитическое решение задачи об устойчивости непрямого конуса, в которой вмятины локализуются в окрестности наиболее длинной образующей и которая имеет приложение в судостроении.

Решена задача об устойчивости при кручении и, как следствие, получено асимптотическое решение задачи об устойчивости цилиндрической оболочки при изгибе силой. В этой задаче вмятины локализуются в окрестности двух образующих $y = \pm\pi/2$, на которых начальные усилия сдвига S^0 максимальны.

Построены асимптотические решения задач об устойчивости при внешнем нормальном давлении и кручении оболочек, близких по форме к цилиндрической или конической. В частности, решена задача для цилиндрической оболочки со слабоизогнутой осью.

3.5. Устойчивость оболочек отрицательной гауссовой кривизны. Для форм потери устойчивости осесимметрично нагруженных оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны характерно то, что вмятины охватывают всю срединную поверхность. Главные интегралы ищем в том, же виде (2.10), что и в случае колебаний оболочки. Проведено расщепление граничных условий на главные и дополнительные и найдена погрешность, совершаемая при переходе к главной краевой задаче. Исследованы случаи т. наз. собственных размеров оболочки, когда граничные условия допускают изгибания срединной поверхности. Рассмотрена устойчивость оболочек, кривизна образующей которых меняет знак.

3.6. Влияние слабого закрепления края на потерю устойчивости. Рассмотрены [10] задачи потери устойчивости безмоментного начального состояния, при которых вмятины локализуются в окрестности слабо закрепленного края и экспоненциально убывают при удалении от него (при этом в направлении края форма потери устойчивости осциллирует). Впервые эффект снижения критической нагрузки при сжатии пластины в связи с наличием свободного края был обнаружен А.Ю.Ишлинским [28]. Для оболочек этот эффект проявляется значительно сильнее, чем для пластин. В задаче об осевом сжатии цилиндрической панели со свободным или со слабо закрепленным прямолинейным краем обнаружено 6 вариантов граничных условий, при которых гпроисходит снижение критической нагрузки по сравнению с замкнутой в окружном направлении оболочкой. В случае свободного края нагрузка снижается в 9 раз. Среди вариантов слабого закрепления присутствуют все случаи, когда на краю задано только одно закрепление. При этом закрепление по нормали к краю ($w = 0$ или $v = 0$) сильнее подкрепляет оболочку, чем в направлении края ($u = 0$) или по углу поворота ($\gamma_2 = 0$).

Рассмотрена устойчивость выпуклых пологих оболочек при слабом закреплении одного из краев. Обнаружено 8 вариантов граничных условий, при которых происходит снижение критической нагрузки. В одних случаях снижается порядок нагрузки, а в других — лишь ее величина. В частности, рассмотрена устойчивость выпуклых оболочек вращения при растяжении и при сжатии осевой силой и при кручении.

3.7. Устойчивость моментного начального состояния. Многочисленные исследования (см. [7,10]) показывают, что влияние как моментных начальных напряжений, так и докритических деформаций (главным образом, докритических изменений кривизны срединной поверхности) имеет один и тот же порядок. Поэтому будем говорить о влиянии моментных факторов. Проведено качественное исследование влияния моментных факторов на величину критической нагрузки. В случаях, когда это влияние мало, положим

$$\lambda = \lambda_0(1+\eta), \tag{3.6}$$

где λ_0 — критическая нагрузка без его учета, а η дает относительное влияние этих факторов. Порядок η зависит главным образом от уровня начальных усилий (т.е. от порядка безразмерного параметра нагружения λ_0) и убывает вместе с ним. В частности, при потере устойчивости цилиндрической и конической оболочек средней длины под действием внешнего нормального давления $\eta = O(h_*)$. Эта оценка согласуется с численными результатами, обзор которых приведен в [7]. Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны величина η несколько больше. В зависимости от граничных условий ее порядок колеблется в пределах от $h_*^{2/3}$ до h_*.

В задаче о потере устойчивости выпуклой оболочки вращения при растяжении осевой силой вмятины образуются в окрестности одного из ее краев, а параметр нагружения не является малым ($\lambda \sim 1$). В области потери устойчивости на безмоментное напряженное состояние накладывается интенсивный краевой эффект. Однако и в этой задаче влияние моментных факторов оказывается незначительным и имеет порядок $\eta \sim h_*^{1/2}$. Причина этого в том, что область, занятая вмятинами, имеет ширину порядка $Rh_*^{1/3}$ и существенно больше зоны краевого эффекта $Rh_*^{1/2}$.

В задачах потери устойчивости оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны и выпуклых оболочек вращения при осевом сжатии (и некоторых других видах нагружения) учет влияния моментных факторов оказывается существенным и ведет к снижению критической нагрузки на 10 – 30 %. Имеется [30] много численных решений таких задач. Предложено [10,29] асимптотическое решение задачи, основанное на разложениях в ряды по степеням малого параметра $\mu \sim h_*^{1/2}$. Получающаяся в нулевом приближении система уравнений имеет переменные коэффициенты вида

$$a = a_0 + \sum_{k=1,2} a_k \exp(\alpha_k \xi), \qquad \operatorname{Re}\alpha_k < 0, \tag{3.7}$$

связанные с интегралами краевого эффекта. Затухающие при удалении решения построены в виде сходящихся рядов, аналогичных рядам экспонент, встречающимся в первом методе А.М.Ляпунова об устойчивости движения.

Этим методом решен ряд задач устойчивости. В частности, исследована зависимость критической нагрузки при осевом сжатии цилиндрической и конической оболочек вращения от коэффициента Пуассона для 6 вариантов граничных условий.

Случаи, когда граничные условия не препятствуют радиальным смещениям края, приводят к существенно нелинейным задачам.

4. Колебания и устойчивость сопряженных оболочек.

4.1. Осесимметричные колебания сопряженных оболочек. Асимптотический метод интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных использован для нахождения частот и форм осесимметричных колебаний тонких сопряженных оболочек вращения. Предполагается, что материал и толщина оболочек одинаковы, но на параллели сопряжения скачком изменяются геометрические характеристики срединной поверхности. Поведение решений систем уравнений для каждой из оболочек меняется в зависимости от рассматриваемого интервала частот. Это приводит к появлению большого числа качественно различных форм колебаний и соответствующих им приближенных уравнений частот. В работе [29] изучены типы колебаний двух сопряженных оболочек, при которых промежуток интегрирования для каждой из оболочек содержит не более одной точки поворота. Получены и исследованы приближенные уравнения частот.

Наибольший интерес для приложений представляет случай регулярного вырождения краевой задачи в безмоментную, соответствующий нижней части спектра частот. В этом случае собственные значения краевой задачи ищутся в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_1 + \cdots \qquad (4.1)$$

где $\varepsilon \sim h_*^{1/4}$ — малый параметр, h_* — безразмерная толщина оболочки. Если угол β между касательными к меридианам оболочек на параллели сопряжения не является малым, т.е. $\beta \sim 1$, то в нулевом приближении краевая задача, описывающая колебания двух сопряженных оболочек, распадается на две независимые задачи, каждая из которых описывает колебания одной из оболочек с граничными условиями шарнирного опирания на параллели сопряжения.

Ввиду этого низшие частоты колебаний двух сопряженных оболочек можно разделить на две серии. Частоты первой и второй серий близки к частотам колебаний соответственно первой и второй оболочек, шарнирно опертых по параллели сопряжения. В том случае, когда частота первой серии не совпадает ни с одной из частот второй серии (нерезонансный случай), соответствующая ей форма колебаний локализована на поверхности первой оболочки. Если частота первой серии совпадает с частотой второй серии (случай внутреннего резонанса), то соответствующая форма колебаний охватывает срединную поверхность обеих оболочек и может быть найдена только при построении первого приближения. В работе [30] получены приближенные формулы для определения низших частот и форм осесимметричных колебаний сопряженных оболочек и проведено сравнение асимптотических и численных результатов. Осесимметричные колебания сопряженных оболочек вращения в случае малого угла β исследованы в работе [31].

4.2. Низкочастотные колебания и устойчивость сопряженных по параллели конических оболочек. Будем рассматривать цилиндрическую оболочку как частный случай конической. Конические оболочки имеют частоты колебаний, которые стремятся к нулю при стремлении к нулю толщины оболочки h_*. Такие частоты называются сверхнизкими. Для достаточно тонкой оболочки сверхнизкие частоты составляют нижнюю часть спектра. Собственные значения, соответствующие сверхнизким частотам колебаний двух тонких сопряженных конических оболочек ищутся в виде рядов по степеням малого параметра

$$\lambda = \varepsilon^4 (\lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_1 + \cdots). \qquad (4.2)$$

Приближенные выражения для форм колебаний представлены в виде суммы основного полубезмоментного состояния и простого краевого эффекта. Если угол сопряжения не является малым ($\beta \sim 1$), то как и в случае осесимметричных колебаний, краевая задача нулевого приближения для определения λ_0 распадается на две независимые краевые задачи для первой и второй оболочек. Уравнение нулевого приближения для цилиндрической оболочки имеет вид

$$\frac{d^4 w_0}{ds^4} - \alpha^4(\lambda_0) w_0 = 0, \tag{4.3}$$

где w_0 — нулевое приближение для нормального перемещения, s — продольная координата. Это уравнение описывает также поперечные колебания балки.

В нулевом приближении частоты разделяются на две серии, каждая из которых соответствует колебаниям одной из оболочек с граничными условиями шарнирного опирания на параллели сопряжения. Нулевое приближение для частоты, соответствующей колебаниям цилиндрической оболочки находится в явном виде. Результаты, полученные по асимптотическим формулам, хорошо согласуются с экспериментальными и численными результатами.

Задача об устойчивости безмоментного напряженного состояния двух сопряженных по параллели конических оболочек, находящихся под действием равномерного всестороннего внешнего давления сводится к краевой задаче на собственные значения, которая мало отличается от краевой задачи, описывающей низкочастотные колебания. Асимптотический метод решения краевой задачи устойчивости для сопряженных оболочек практически совпадает с методом решения краевой задачи в случае низкочастотных колебаний. В нулевом приближении снова получаются две серии собственных чисел, каждая из которых находится после решения краевой задачи нулевого приближения для одной из оболочек. Найдена поправка первого приближения λ_1 в случае отсутствия внутреннего резонанса.

При малых углах сопряжения краевая задача нулевого приближения не распадается на две независимых, однако для случая, когда одна из оболочек является цилиндрической, удается в явном виде выписать трансцендентные уравнения для определения частоты. Основные результаты исследования низкочастотных колебаний и устойчивости сопряженных конических оболочек приведены в монографии [32].

4.3. Локализованные решения в задачах о колебаниях и устойчивости тонких сопряженных оболочек. Переменность геометрических параметров оболочки или неравномерность нагрузки может привести к локализации собственных функций соответствующей краевой задачи вблизи некоторых наиболее слабых линий на срединной поверхности оболочки. В отличие от задач, рассмотренных в двух предыдущих разделах, задачи, имеющие локализованные решения, являются существенно двумерными, т.е. переменные в них не разделяются.

Конструкция, состоящая из двух сопряженных под углом цилиндрических оболочек с одинаковым радиусом, называется коленом и является составной частью трубопроводов. Для определения низших частот колебаний и критического внешнего давления использован алгоритм [10,12] сведения асимптотического решения двумерной краевой задачи к последовательности одномерных краевых задач. Собственные функции краевых задач, описывающих колебания и устойчивость колена, ищутся в виде суммы основного состояния и краевого эффекта. Нулевое приближение удовлетворяет уравнению (4.3). Асимптотические разложения для собственных значений имеют вид

$$\lambda = \varepsilon^k(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \cdots), \tag{4.4}$$

где $k = 4$ в случае колебаний, $k = 6$ для задачи устойчивости. Параметр λ_0 является собственным числом краевой задачи для уравнения (4.3). Если угол сопряжения $\beta \sim 1$, то краевые задачи нулевого и первого приближений решаются независимо для каждой из оболочек. Критическое давление и первая частота колебаний колена мало отличаются от первой частоты и критического давления для более длинной оболочки с условиями шарнирного опирания на линии сопряжения. Взаимное влияние оболочек проявляется только во втором приближении. Как и в задачах колебаний и устойчивости сопряженных по параллели оболочек, возможны нерезонансный и резонансный случаи. В нерезонансном случае сопряженные оболочки имеют разную длину, причем форма потери устойчивости локализуется в окрестности наибольшей образующей более длинной оболочки. Резонансный случай имеет место при сопряжении двух оболочек одинаковой длины. В резонансном случае поправка второго приближения и отношение собственных функций двух независимых краевых задач нулевого приближения найдены из условий разрешимости двух краевых задач второго приближения [31]. Приближенные формулы для определения наименьших собственных значений и собственных функций в краевых задачах, описывающих колебания и устойчивость колена, получены в явном виде.

Простейшей механической моделью корпусов некоторых самолетов и подводных лодок является непрямая круговая коническая оболочка, сопряженная с круговой цилиндрической оболочкой. В работе [32] с помощью асимптотического метода установлено, что формы низкочастотных колебаний и формы потери устойчивости под действием однородного внешнего давления таких сопряженных оболочек могут быть локализованы вблизи наиболее длинной образующей непрямой конической оболочки. Показано, что низшую часть спектра краевой задачи можно разделить на две части. Собственные значения, содержащиеся в каждой из этих частей, близки к собственным значениям краевых задач, описывающих колебания или устойчивость одной из оболочек с граничными условиями шарнирного опирания на параллели сопряжения. Расчеты частот и форм колебаний, а также критического давления и форм потери устойчивости методом конечных элементов подтвердили достоверность результатов асимптотического анализа.

5. Колебания и устойчивость подкрепленных оболочек.

5.1. Построение асимптотического решения. Асимптотический метод разделения напряженно-деформированного состояния оболочки на полубезмоментное и краевой эффект применен в [30] для решения задач теории низкочастотных колебаний и устойчивости под действием внешнего давления подкрепленных круговыми стержнями (шпангоутами) цилиндрических и конических оболочек. Уравнения для определения полубезмоментного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной n шпангоутами, имеют вид

$$\frac{d^4 w_0^{(j)}}{dx^4} - \alpha^4 w_0^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{5.1}$$

Функция $w_0^{(j)}$ является приближенным выражением для нормального перемещения части оболочки, лежащей между шпангоутами или между шпангоутом и краем оболочки.

Основная трудность, возникающая при использовании асимптотического метода для анализа колебаний и устойчивости сопряженных оболочек, состоит в определении главных граничных условий на подкрепленной параллели оболочки, которым удовлетворяют решения краевых задач нулевого приближения. Для различных соотношений между параметрами оболочки и шпангоутов получены и исследованы главные условия сопряжения, определена область применимости распространенных упрощающих предположений (пренебрежение размерами поперечного сечения ребра, его эксцентриситетом, жесткостями шпангоутов на изгиб из плоскости и на кручение, силами инерции и т.п.).

Предположим, что оболочка и шпангоуты изготовлены из одного материала. Пусть шпангоуты установлены без эксцентриситета, т.е. центр тяжести поперечного сечения шпангоута лежит на срединной поверхности оболочки, а безразмерные характерные размеры поперечного сечения шпангоута $a \sim b \sim \varepsilon^3$. Тогда главные условия на параллели сопряжения для уравнений (5.1) имеют вид

$$\begin{aligned} & w_0^{(j+1)} = w_0^{(j)}, && \frac{dw_0^{(j+1)}}{ds} = \frac{dw_0^{(j)}}{ds}, \\ & \frac{d^2 w_0^{(j+1)}}{ds^2} = \frac{d^2 w_0^{(j)}}{ds^2}, && \frac{d^3 w_0^{(j+1)}}{ds^3} = \frac{d^3 w_0^{(j)}}{ds^3} + cw^{(j)}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $c = Jm^8/h$, J — момент инерции поперечного сечения, m — число волн по параллели. Если шпангоут имеет прямоугольное поперечное сечение шириной a и высотой b, то $J = ab^3/12$.

Краевая задача (5.1), (5.2) описывает также колебания балки, подкрепленной n пружинами жесткости c. Проведено сравнение приближенных значений низших частот колебаний и критического давления с результатами их численного расчета методом ортогональной прогонки. Рассмотрены низкочастотные колебания двух конических оболочек, сопряженных по параллели, подкрепленной шпангоутом. Установлено, что для существенного увеличения низших частот колебаний, на параллели сопряжения следует устанавливать массивные (толстые) шпангоуты, для которых $a \sim b \sim \varepsilon^2$, в то время как на гладких участках наиболее эффективны тонкие шпангоуты с характерными размерами поперечного сечения $a \sim b \sim \varepsilon^3$.

Использование метода осреднения упругих характеристик позволило получить приближенное решение краевой задачи нулевого приближения для подкрепленной цилиндрической оболочки в явном виде. Это приближенное решение было найдено для случая большого числа равномерно расположенных шпангоутов, имеющих малую жесткость, однако его сравнение с численным решением показало, что приближенные значения собственных чисел мало отличаются от их точных значений даже при наличии всего одного шпангоута, имеющего сравнительно большую жесткость.

Методы приближенного определения собственных чисел и собственных функций, использованные при решении одномерных краевых задач для подкрепленных цилиндрических оболочек с прямыми краями, удалось применить для решения двумерных краевых задач, описывающих колебания и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек с косым краем [30]. Поведение собственных функций в окружном направлении φ для цилиндрических оболочек с прямыми и косыми краями существенно различается: первые меняются по закону $w = w_0(s)\sin m\varphi$, вторые локализованы в окрестности наиболее слабой образующей. Однако поведение этих функций в продольном направлении s в нулевом приближении одинаково, поэтому краевая задача нулевого приближения для оболочек с косыми краями совпадает с краевой задачей для оболочки с прямыми краями и имеет вид (5.1), (5.2).

В работе [33] впервые исследована локализация форм колебаний и форм потери устойчивости, вызванная переменностью поперечного сечения шпангоута, подкрепляющего круговую цилиндрическую оболочку. С помощью асимптотического метода установлено, что собственные функции краевых задач могут быть локализованы вблизи наиболее слабой образующей цилиндра, соответствующей наименьшему значению площади поперечного сечения шпангоута. Показано, что наряду с локализованными собственными функциями существуют собственные функции, изменяющиеся в окружном направлении по синусоидальному закону. Для цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом с переменным поперечным сечением, построено два первых члена асимптотических разложений решений краевых задач, описывающих колебания и потерю устойчивости. Проведены расчеты низших частот колебаний и критического внешнего давления при различных значениях параметров оболочки и шпангоута.

5.2. Оптимизация параметров подкрепленных оболочек. Приближенные формулы, полученные методом осреднения упругих характеристик, использованы в [30] для определения параметров подкрепленной цилиндрической оболочки с фиксированной массой, имеющей максимальную первую частоту или критическое давление.

Обозначим ω_0 наименьшую частоту колебаний тонкой цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми прямыми краями, имеющей толщину h_0. Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлено n равномерно расположенных шпангоутов прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой $b = ka$, причем массы гладкой и подкрепленной оболочек равны. Пусть ω — первая частота колебаний подкрепленной оболочки. Значения параметров a и h, для которых отношение $r_v = \omega/\omega_0$ имеет наибольшее значение r_v^*, называются оптимальными. Система двух алгебраических уравнений для определения оптимальных значений a и h сводится к кубическому уравнению. Отношение r_v^* увеличивается при увеличении числа шпангоутов n. При $n = 10$ и $h_0 = 0.01$ для шпангоутов с квадратным поперечным сечением ($k = 1$) отношение $r_v^* = 3.93$. Это означает, что замена гладкой оболочки оптимальной оболочкой с той же массой, подкрепленной десятью шпангоутами приводит к увеличению первой частоты примерно в 4 раза. Аналогичные результаты получены для задачи об устойчивости оболочки под действием внешнего давления.

Отношение r_v^* растет и при увеличении параметра k, однако при больших значениях k в качестве модели шпангоута следует использовать не круговой стержень, а кольцевую пластину. В этом случае для определения частот колебаний необходимо решить краевую задачу на собственные значения для систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания цилиндрической оболочки и кольцевых пластин, с граничными условиями на краях оболочки и пластин и на линиях сопряжения пластин и оболочки. Асимптотический анализ этой краевой задачи показывает, что низшие частоты колебаний в нулевом приближении могут быть найдены путем решения уравнения изгибных осесимметричных колебаний кольцевой пластины

$$\Delta^2 w_p = \lambda_p w_p, \quad \Delta w_p = \frac{1}{s_p}\frac{d}{ds_p}\left(s_p \frac{dw_p}{ds_p}\right), \tag{5.3}$$

где w_p — нормальное перемещение пластины, s_p — радиальная координата. Общее решение уравнения (5.3) является линейной комбинацией функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя. Разработан алгоритм приближенного определения оптимального значения параметра k, основанный на использовании для малых k (узкие шпангоуты) модели стержня, а для больших k (широкие шпангоуты) модели пластины.

В большинстве работ, посвященных колебаниям и устойчивости подкрепленных оболочек, предполагается, что шпангоуты расположены на равных расстояниях друг от друга. В статьях [34] и [35] показано, что с точки зрения увеличения первой частоты колебаний и критического внешнего давления равномерное расположение шпангоутов является оптимальным только в случае шарнирного опирания краев подкрепленной оболочки. В случае жесткой заделки краев оболочки первую частоту и критическое давление можно увеличить без изменения массы оболочки путем замены традиционного равномерного расположения оптимальным. Соответствующие случаю жесткой заделки оптимальные координаты шпангоутов найдены в [34] и [35] путем перебора различных вариантов их расположения.

В работе [36] с помощью теоремы Релея-Куранта доказано, что оптимальные координаты шпангоутов близки к узлам формы колебаний неподкрепленной оболочки. Это обстоятельство позволило использовать для определения оптимальных параметров подкрепленной оболочки с произвольными граничными условиями алгоритм, разработанный для случая шарнирного опирания краев оболочки и равномерного расположения шпангоутов. Для решения краевой задачи нулевого приближения вместо метода осреднения упругих характеристик применялся метод Релея, так как метод осреднения не годится при неравномерном расположении шпангоутов.

Асимптотические методы, разработанные для вычисления приближенных значений оптимальных параметров подкрепленных оболочек с прямыми краями, использованы в [30] для определения оптимальных параметров подкрепленных оболочек с косым краем. Алгоритмы определения оптимальных параметров в том и в другом случае мало отличаются друг от друга. Получены приближенные аналитические выражения и для определения оптимальных параметров подкрепленного шпангоутами колена, состоящего из двух подкрепленных цилиндрических оболочек с косым краем. При определении низших частот колебаний и критического внешнего давления для подкрепленного колена использовано разделение собственных значений соответствующей краевой задачи на две серии.

6. Устойчивость анизотропных оболочек.

6.1. Введение. Интерес к задачам устойчивости композитных оболочек обусловлен широким использованием таких оболочек в практике, в частности, в автомобилестроении. Стремление снизить металлоемкость конструкций при сохранении или улучшении их прочностных, динамических, коррозионных и прочих свойств приводит к необходимости замены таких традиционных для автомобильной индустрии материалов, как алюминий, на композитные. Именно по такому пути идут основные фирмы производители автомобилей, как компании Форд, Дженерал Моторс, Крайслер и другие. Упомянутые компании проводят совместный исследовательский проект в рамках АСС (Автомобильный консорциум по композитам). В этом проекте участвовали и сотрудники кафедры теоретической и прикладной механики А.Л. Смирнов и С.Б. Филиппов, проходившие стажировку в компании Форд. Одна из задач этого проекта породила новое направление, которое сейчас активно разрабатывается на кафедре.

Элементы автомобиля, сделанные из композитов, представляют собой пустотелые или заполненные тонкостенные конструкции. Многие из этих конструкций имеют форму тонкостенных труб (оболочек), выполненных из композитных материалов, обычно из стекло- или углепластиков. Примером такой конструкции служит обтекатель для автомобиля Формулы-1, который представляет собой тонкостенную оболочку в форме усеченного конуса. Одной из важнейших задач, является анализ поведения элементов конструкций автомобиля при столкновении. Явление столкновения включает в себя множество процессов разрушения, однако, анализ форм разрушений обтекателя по результатам экспериментов позволяет предположить, что форма разрушений, в основном, соответствует форме потере устойчивости при осевом сжатии конуса.

Указанная задача стимулировала исследования устойчивости заполненных и пустотелых тонкостенных анизотропных конструкций различной геометрии при различных условиях нагружения. При решении этой задачи асимптотические методы [10,24] были распространены на случай анизотропных оболочек.

Конструктивно анизотропные оболочки весьма часто встречаются в инженерных приложениях. Часто анизотропия появляется в осредненных двумерных уравнениях оболочек, подкрепленных системой часто расположенных ребер. В настоящем обзоре рассмотрены оболочки, армированные упругими нитями. С использованием гипотез Кирхгофа-Лява для всего пакета матрица-нити получены двумерные нелинейные уравнения равновесия предварительно напряженной оболочки. При исследовании устойчивости ограничиваемся рассмотрением случая, когда вмятины при потере устойчивости покрывают всю срединную поверхность или локализуются в некоторой ее части, удаленной от краев оболочки. Сделанное предположение позволяет произвести упрощение системы уравнений, отбросив асимптотически малые слагаемые. В ряде случаев граничные условия мало влияют на критическую нагрузку и форму потери устойчивости. Для тонкой однородной изотропной оболочки подобный анализ содержится в [10,24].

Получены приближенные аналитические формулы для критической нагрузки и формы потери устойчивости, позволяющие легко проводить анализ влияния параметров задачи на критическую нагрузку. Результаты могут служить для контроля результатов, полученных численными методами, например при использовании метода конечных элементов. Аналогичные результата для изотропных оболочек приводятся в [10,24], где содержится обширная библиография. При сравнении устойчивости изотропных и анизотропных оболочек можно отметить как сходство, так и различие результатов. Общим является локализация форм колебаний, слабая зависимость от граничных условий, существенное влияние наличия изгибаний и псевдоизгибаний (это формы с асимптотически малыми тангенциальными деформациями) срединной поверхности. Различие заключается в существенном усложнении анализа, ибо наличие анизотропии общего вида качественно меняет как докритическое напряженное состояние, так и форму потери устойчивости. Предполагается продолжить исследование, а именно провести сравнение данных асимптотических результатов с численными, более детально исследовать форму потери устойчивости в различных ситуациях, в частности для оболочек отрицательной гауссовой кривизны.

6.2. Соотношения упругости. Рассматривается тонкая композитная оболочка вращения, состоящая из матрицы, подкрепленной N системами нитей, расположенных в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки. На срединной поверхности оболочки вводится координатная система x, y, совпадающая с линиями кривизны оболочки. Системы нитей наклонены под углами $\theta^{(k)}$ к координатной оси x. Напряжения в оболочке представляются в виде сумм напряжений в матрице и осредненных напряжений, вызванных растяжением нитей.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ij}^{(k)}. \tag{6.1}$$

В соответствии с гипотезами Кирхгофа деформации ε_{ij} являются линейными функциями координаты z

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \kappa_1 z, \quad \varepsilon_{12} = \omega + \tau z, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \kappa_2 z, \tag{6.2}$$

где деформации растяжения-сдвига приняты нелинейно зависящими от перемещений

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^l + \frac{1}{2}\gamma_1^2, \quad \omega = \omega^l + \gamma_1\gamma_2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^l + \frac{1}{2}\gamma_2^2. \tag{6.3}$$

Здесь γ_1, γ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности. Деформации растяжения-сдвига ε_1^l, ω^l, ε_2^l, а также деформации изгиба-кручения κ_1, τ, κ_2, и углы γ_1, γ_2 выражающиеся через ее перемещения по известным линейным соотношениям [1,10].

В предположении, что оболочка симметрична по отношению к срединной поверхности и относительная толщина оболочки $h_* \ll 1$ мала, получим соотношения упругости в виде [37]

$$T_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij}\varepsilon_j, \qquad M_i = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\kappa_j, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{6.4}$$

причем для упругих констант K_{ij}, D_{ij} справедливы формулы вида

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ D_{11} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(F_0 + \sum_{k=1}^{N} F_k \cos\theta_k^4 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz, \tag{6.5}$$

где $F_k = E_k\delta_k$, $k = 0\,1, \ldots, N$, и δ_k — доля объема оболочки, заполненной нитями k-ой системы. При этом предполагается, что нити работают только на растяжение–сжатие. Эффектом Пуассона при растяжении нитей пренебрегаем. Параметры с индексом 0 относятся к матрице.

Особо выделим случай симметричного расположения системы нитей, когда каждой системе нитей с углом θ_k соответствует система нитей с углом $-\theta_k$. Тогда получается ортотропная оболочка.

6.3. Локальные формы потери устойчивости. Пусть в результате нагружения в оболочке возникает безмоментное напряженное состояние, определяемое начальными усилиями T_1^0, T_2^0, S_0. Будем исследовать устойчивость этого состояния. Будем считать, что нагружение является однопараметрическим и введем параметр нагружения λ по формулам, аналогичным (3.1). Проведем упрощение уравнений при тех же предположениях, которые делаются при выводе уравнений пологих оболочек Доннелла. Метрику срединной поверхности отождествим с метрикой плоскости и будем считать приближенно, что радиусы кривизны R_1, R_2 постоянны. Нормальное перемещение при бифуркации будем искать в виде $w = w^0 \cos(k_1 x + k_2 y)$, где волновые числа k_1, k_2 подлежат определению. Тогда формула Релея (2.7) может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{\Pi_\varepsilon + \Pi_\kappa}{T} \equiv f(k_1, k_2), \quad \Pi_\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{k_1^2}{R_2} + \frac{k_2^2}{R_1}\right)^2, \quad T = t_1 k_1^2 + 2t_3 k_1 k_2 + t_2 k_2^2, \tag{6.6}$$

где Δ и Π_κ — однородные полиномы четвертой степени относительно k_1, k_2 с коэффициентами, выражающимися через упругие константы K_{ij} и D_{ij} соответственно. Формула (6.6) обладает достаточной общностью. Она может быть использована для оценки величины критической нагрузки и ожидаемой формы потери устойчивости во многих задачах. Критическое значение λ_0 параметра λ получим, минимизируя функцию $f(k_1, k_2)$ по всем вещественным k_1, k_2, таким, что $T > 0$.

6.4. Анизотропный эллипсоид под действием давления. В качестве примера рассмотрим эллипсоид вращения с полуосями a, b, причем $d = b/a$ — коэффициент сжатия эллипсоида. Эллипсоид состоит из матрицы, выполненной из однородного материала толщины h с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν, подкрепленной двумя одинаковыми системами нитей, наклоненных соответственно под углами $\pm\theta$ по отношению к меридианальному направлению. Нити занимают долю ∂ от общего объема, их модуль упругости в e раз больше модуля упругости матрицы.

Как для внешнего, так и для внутреннего давления с использованием соотношения (6.6) найдено критическое давление и ожидаемая форма потери устойчивости. В ряде частных случаев получены явные асимптотические формулы. Исследована зависимость как критического давления, так и формы потери устойчивости (расположение наиболее слабой параллели, угол φ_0 наклона вмятин) от параметров задачи (коэффициета сжатия d, угла наклона нитей θ). Проводится сравнение результатов для анизотропной и изотропной оболочек. В частности, для слегка вытянутых эллипсоидов оптимальным (в смысле увеличения критической нагрузки) является армирование с углом около $\theta \sim \pi/8$. При увеличении d вмятины вытягиваются в меридиональном направлении, угол φ_0 стремится к $\pi/2$ и для сильно вытянутых ортотропных эллипсоидов форма потери устойчивости совпадает с изотропным случаем. Увеличение жесткости нитей приводит к повороту вмятин на больший угол.

6.5. Устойчивость цилиндрической оболочки. Рассмотрена устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями под действием осевого сжатия. Исходя из формулы (6.6) найдено критическое сжимающее усилие. В отличие от изотропной оболочки для ортотропной оболочки форма вмятины при потере устойчивости (в общем случае) определяется однозначно. Интересно, что угол наклона вмятин не зависит от коэффициентов Пуассона и от модуля сдвига матрицы. Заметим также, что угол наклона вмятин для цилиндра сжимаемого осевой силой совпадает с углом наклона вмятин для сильно вытянутой эллиптической оболочки под действием внешнего гидростатического давления.

Решена задача об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки под действием гидростатического давления. Рассмотрены случаи шарнирного и жесткого закрепления краев оболочки. Полученные формулы обобщают известные результаты Саутуэлла–Папковича на случай ортотропной оболочки.

В этой же задаче рассмотрено влияние анизотропии общего вида на форму потери устойчивости. При этом в отличие от ортотропной оболочки вмятины слабо наклонены к образующим. Последнее обстоятельство осложняет применение метода разделения переменных и для решения используется разложение в ряды по степеням малого параметра.

7. Применение моделей оболочек и пластин в офтальмологии.

7.1. Введение. В течение ряда лет в лаборатории прикладной механики НИИ математики и механики им. В.И.Смирнова Санкт-Петербургского университета в сотрудничестве с врачами-офтальмологами ведутся работы по моделированию некоторых процессов в офтальмологии [38]. Рассмотренные задачи поставлены и результаты обсуждались со специалистами кафедры и клиники офтальмологии Российской военно-медицинской Академии, МАПО и Городской глазной больницы N 7, работающей под руководством д.м.н., проф. Волкова В.В. Результаты работы докладывались на многочисленных российских и международных конференциях как по механике, так и по офтальмологии.

Глаз человека (в первом приближении шаровидной формы) имеет три основных оболочки: наружную плотную капсулу, включающую в себя склеру и роговицу, сосудистую оболочку и внутреннюю оболочку — сетчатку. Проблемы возникновения и лечения отслойки сетчатки, развития отслойки сосудистой оболочки, глаукоматозной атрофии зрительного нерва, изменение механических свойств роговицы после рефракционных операций и другие вопросы, связанные с деформированием составных элементов глаза остаются важными проблемами хирургии.

7.2. Модели лечения отслойки сетчатки. Отслойкой сетчатки называется патологическое состояние, при котором сетчатка теряет контакт с сосудистой оболочкой и отходит от нее внутрь полости глаза. В большинстве случаев отслойка сетчатки подлежит хирургическому лечению с эвакуацией жидкости из образовавшейся полости (или без пункции) и вдавлением наружных слоев оболочки глаза до совмещения их с отслоившейся сетчаткой. Для вдавливания склеральной оболочки применяют различные приемы: круговое вдавливание нитью или лентой по параллели, или так называемый циркляж, локальное пломбирование, используют также комбинирование циркляжа и пломбы. Чрезмерное затягивание циркляжной ленты или швов над пломбой является одним из важнейших факторов, вызывающих иногда операционные и послеоперационные осложнения: повышение внутриглазного давления, продавливание циркляжной ленты или пломбы сквозь склеру в полость глаза, отслойку сосудистой оболочки, возникновение дополнительных складок. В целях совершенствования техники проведения операций на сетчатке постоянно ведется поиск новых приемов использования известных материалов и инструментов. Понятно поэтому, что математическое моделирование играет важную роль при разработке и планировании противоотслоечных операций. В связи с этим рассматривался ряд моделей расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения некоторых противоотслоечных операций [38].

Простейшая модель наружной оболочки глаза представляет собой упругую изотропную тонкостенную сферическую оболочку постоянной толщины h и радиуса R. Простейший вариант циркляжа — перетягивание глаза нитью (или лентой) в плоскости экватора $\theta = 0$. При этом оболочка находится под действием внутриглазного давления p и поверхностного давления q со стороны циркляжной нити (ленты). В силу симметрии, действующих на глаз нагрузок, рассматривались осесимметричные деформации оболочки. Учитывалось изменение внутриглазного давления глаза p после циркляжа по сравнению с начальным значением p_0:

$$p = p_0 + K\frac{\Delta V_2 - \Delta V_1}{V - \Delta V_1}, \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{7.1}$$

Здесь V — начальный объем стекловидного тела, ΔV_2 — уменьшение его за счет циркляжа, ΔV_1 — уменьшение вследствие удаления субретинальной жидкости (объем отслойки), K — модуль объемного сжатия стекловидного тела (в предположении о его несжимаемости $K = \infty$.) При удалении от ленты напряженное состояние безмоментно, а в ее окрестности оно предполагалось быстроменяющимся. Дополнительное перемещение w^κ, имеющее характер краевого эффекта и затухающее при удалении от ленты, определялось из уравнения краевого эффекта

$$\mu^4\frac{d^4w^\kappa}{d\theta^4} - 2\mu^2\gamma\frac{d^2w^\kappa}{d\theta^2} + w^\kappa = q_*(\theta), \tag{7.2}$$

где

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad \gamma = \frac{pR}{4Eh\mu^2}, \quad q_* = \frac{qR^2}{Eh},$$

μ — малый параметр тонкостенности оболочки.

Учитывая соотношения, связывающие натяжение ленты N, ее удлинение δl, среднее по ширине ленты ее давление q_{cp} на глаз и средний прогиб w_{cp} оболочки глаза под лентой, для функции нагрузки можно получить выражение

$$q_*(\theta) = b\xi(\theta)\left(\frac{\Delta l}{2\pi} - w^\kappa_{cp} + \frac{a(1-\nu)}{2(1+a)}I^\kappa - \frac{a\Delta V_1}{4\pi R^2(1+a)}\right), \tag{7.3}$$

где

$$I_1^\kappa = \int_{\theta_0}^\infty w^\kappa(\theta)\,d\theta, \qquad \Delta_* l = \frac{\Delta l}{2\pi} - \frac{a\Delta V_1}{4\pi R^2(1+a)},$$

причем θ_0 характеризует ширину циркляжной ленты $H = 2R\sin\theta_0$, параметр a учитывает жесткость стекловидного тела (для несжимаемого стекловидного тела $a/(1+a) = 1$), параметр b учитывает жесткость ленты на растяжение. Таким образом, получается интегродифференциальное уравнение (7.2) относительно функции $w^\kappa(\theta)$.

После определения функции $w^\kappa(\theta)$ предложенная приближенная модель позволяет найти следующие величины, важные при планировании операции: повышение внутриглазного давления, изменение ПЗО (передне-задней оси) — оптической длины глаза, оценить напряженное состояние оболочки глаза в окрестности циркляжной ленты и определить влияние параметров циркляжной ленты (ее ширины, жесткости, начального укорочения), а также влияние сжимаемости стекловидного тела на эти величины.

Если циркляж наложен узкой лентой или нитью и пренебречь распределением давления по ширине ленты, то удается получить приближенное аналитическое решение задачи.

При больших отслойках иногда циркляж выполняется широкой лентой. Тогда предположение, что решение быстро затухает при удалении от циркляжной ленты, не является оправданным, и задача о напряженно-деформированном состоянии оболочки глаза решалась на основе системы уравнений осесимметричной деформации сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p и давления со стороны ленты $q(\theta)$. Решение строилось в виде рядов по полиномам Лежандра $P_m(x)$.

Проведены расчеты для значений параметров, соответствующих реальным операциям. Сравнение с результатами расчета по формулам для узкой ленты показывает хорошее совпадение результатов для ленты шириной 2.5 мм. Для ленты шириной 9 мм деформации (прогиб под лентой и удлинение ПЗО) на 15–18 % отличаются от результатов, полученных по соотношениям для узкой ленты. Изменения внутриглазного давления отличаются на 1–2 %.

Теория оболочек, построенная на гипотезах Кирхгофа — Лява, может приводить к заметным погрешностям при расчете не очень тонких оболочек, находящихся под действием неплавных нагрузок, причем наибольшая погрешность при этом возникает за счет того, что полагают равными нулю поперечные сдвиги. В связи с этим полученные результаты сравнивались с расчетами по геометрически нелинейной теории типа Тимошенко. При этом нелинейная система уравнений решалась методом итераций. Результаты расчетов сравнивались со значениями, вычисленными по линейным уравнениям. Для узкой ленты (шириной 2.5 мм) величины максимального прогиба и изменения ПЗО почти не различаются, однако несколько больше изменяется форма деформации и объем деформированной оболочки. В итоге значение внутриглазного давления на 8–10 % больше, чем величина, полученная при решении линейных уравнений. Для широкой ленты (шириной 9 мм) изменение ПЗО, вычисленное по нелинейным уравнениям, оказывается на 6–10 % меньше, чем значение, определяемое по линейным уравнениям, но так же, как и в случае узкой ленты, изменения формы деформации и объема деформированной оболочки приводят к более высокому (на 7–12 %) значению внутриглазного давления.

В связи с большой относительной толщиной склеральной оболочки (~ 0.1) был проведен расчет напряженно - деформированного состояния глаза на основе уравнений трехмерной теории упругости. Уравнения взяты в форме, предложенной П.Ф. Папковичем. Определены перемещения сферической оболочки и максимальные значения напряжений.

Проведено исследование изменения коэффициента ригидности глаза (в офтальмологической литературе коэффициентом ригидности глаза называют соотношение между изменением ВГД и соответствующим ему изменением объема глазного яблока) после циркляжа [39].

Как уже отмечалось, одной из форм послеоперационного осложнения может быть сморщивание участков склеры, нарушающее кровообращение, приводящее к отекам. В связи с этим рассматривается задача о локальной устойчивости глаза при наложении циркляжного шва [38,40]. В окрестности линии, по которой проходит циркляжная лента, оболочка глаза моделируется тонкой сферической оболочкой, а циркляж — наложением на безмоментное состояние оболочки краевой нагрузки по экватору. Осесимметричный прогиб оболочки глаза, вызванный давлением ленты, определяется, из уравнения краевого эффекта (7.2). И далее для построения смежной неосесимметричной формы равновесия используется система уравнений пологих оболочек Доннелла. Для решения задачи используется метод асимптотического интегрирования. Определяется критическое укорочение нити или ленты, приводящее к неосесимметричным прогибам.

Исследование на устойчивость показывает, что, по-видимому, для циркляжа опасно использовать нерастяжимые нити. Более целесообразно применять силиконовые ленты или жгуты.

Рассматривалась также задача о пломбировании глаза, как задача контактного взаимодействия однородной упругой оболочки с жестким кольцом. Найдена функция Грина. Краевая задача, соответствующая интегральному уравнению контакта, сведена к системе алгебраических уравнений, при численном решении которой используются асимптотические приближения собственных функций уравнений сферической оболочки — функций Лежандра. Получено распределение контактных напряжений, рассчитаны напряжения и деформации оболочки глаза.

7.3. Модели решетчатой пластины, связанные с глаукомой.

Известно, что при повышении ВГД такие явления, как отечность зрительно-нервных аксонов, их дезорганизация, остановка аксоплазматического тока и др., ведущие за собой атрофию (разрушение) зрительного нерва и приводящие к дефектам поля зрения, происходят в области решетчатой пластинки. Решетчатой пластинкой (РП) называется участок склеры (недалеко от заднего полюса глаза). Сплошного дефекта склеры в этом месте нет, имеются ее истончения и множество мелких отверстий (через которые и проходят пучки зрительного нерва).

Как отмечают офтальмологи, первые признаки глаукоматозной экскавации (прогиба) диска зрительного нерва, как правило, появляются раньше дефектов в поле зрения. Прогрессирование экскавации — ее размеров, глубины, изменение конфигурации — также нередко предшествует увеличению выявленных ранее дефектов поля зрения. Таким образом, начальные изменения диска зрительного нерва имеют существенное значение для диагностики глаукомы, а их динамика важна для оценки эффективности проводимой терапии. Все это делает важным изучение напряженно-деформированного состояния решетчатой пластинки глаза при изменении ВГД, изучение индивидуальных особенностей строения решетчатых пластин, которые могут увеличить предрасположенность к глаукоматозным повреждениям. В ряде работ деформация решетчатой пластинки глаза изучалась на основе экспериментальных данных и клинических наблюдений. Представляет также интерес построение математических моделей, описывающих адекватно поведение решетчатой пластинки при изменении ВГД.

Решетчатая пластинка в 5–6 раз тоньше склеры, и ослаблена множеством отверстий. В связи с этим удобно рассматривать решетчатую пластину как круглую или близкую к круглой пластину с жестко заделанным краем. Кроме того, для изотропной пластинки проведено сравнение решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и решетчатой пластинки) и отдельно задачи о деформации пластинки под действием нормального давления [41].

Расчеты показали, что как и отмечается в экспериментах офтальмологов, диаметр склерального кольца меняется мало и прогибы пластинки, полученные при рассмотрении составной оболочки и жестко защемленной пластинки отличаются меньше, чем на 1 %. Таким образом, деформацию решетчатой пластинки можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки, что облегчает учет особенностей строения РП — ее анизотропию и неоднородность.

При расчетах напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин обычно последние заменяют некоторыми сплошными пластинами с приведенными параметрами. Имеющиеся в литературе данные о средней глубине экскавации диска зрительного нерва при фиксированных значениях ВГД, позволяют оценить приведенный модуль упругости решетчатой пластины.

РП рассматривается как трансверсально изотропная в общем случае неоднородная круглая пластинка [38,42]. Как отмечается офтальмологами, у подавляющего большинства людей РП имеют неравномерную по радиусу и по углу механическую структуру, особенности которой может передать модуль упругости вида

$$E(r,\theta) = E_1(r) + E_2(r)\cos 2\theta, \tag{7.4}$$

где E_1, E_2 — убывающие функции радиальной координаты.

Задача о прогибе трансверсально-изотропных неоднородных (по радиусу и по углу) круглых пластин решалась в рамках линейной и геометрически нелинейной общей уточненной теории С.А. Амбарцумяна, а также по новой уточненной теории, предложенной В.А.Родионовой, Б.Ф.Титаевым и К.Ф.Черныхом. Проведено сравнение решений, полученных по разным теориям. Ввиду отсутствия точных данных о механических характеристиках решетчатой пластины (имеются экспериментальные данные о форме и величине прогибов решетчатых пластин при различных ВГД), изучалось влияние различных механических параметров (соотношение модулей упругости в тангенциальном и нормальном направлении, модулей упругости в тангенциальном направлении и модуля сдвига) на форму деформирования круглых пластин. Изучалось также влияние степени неоднородности (по углу и по радиусу) на величину прогиба и деформацию сдвига.

Если увеличение плотности пор (отверстий) незначительно, то можно принять

$$E_1(r) = E(1 - \varepsilon_1 r + \varepsilon_2 \cos 2\theta)), \tag{7.5}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — малые параметры. В этом случае методом возмущений в рамках линейной общей уточненной теории С.А.Амбарцумяна получены асимптотические соотношения для прогиба и деформаций сдвига РП.

По данным офтальмологов в РП вертикальный диаметр часто слегка больше горизонтального. В связи с этим изучалось также влияние отклонений формы пластинки от круговой на прогиб и деформации сдвига. Граница такой РП описывалась соотношением $r_g = 1 - \varepsilon_3 \cos 2\theta$, где ε_3 — малый параметр, который по имеющимся данным не превосходит 0.2.

Расчеты деформации РП, проведенные на основе простейших моделей однослойных пластин, не позволяют объяснить тот факт, что атрофия зрительного нерва при повышении давления возникает по данным офтальмологов именно на "наружном слое", при выходе из оболочки глаза. По описаниям некоторых офтальмологов РП состоит из нескольких параллельно расположенных слоев соединительной ткани, количество которых индивидуально варьирует. Листы имеют отверстия круглой формы и отверстия в различных листах совпадают, образуя каналы, по которым проходят нервные волокна. При этом известно, что последний "задний" лист является более плотным и массивным, чем остальные.

В связи с этим рассматривались большие осесимметричные деформации многослойной безмоментной оболочки вращения в форме купола. Расстоянием между слоями пренебрегали. Предполагалось, что слои могут проскальзывать друг по другу. Напряжения касательного взаимодействия слоев оболочки принимались в виде

$$q_1^k = \alpha_k (s_0^{k+1} - s_0^k)(r - r_*). \tag{7.6}$$

На краю пластины принимались условия упругой заделки слоев

$$T_1^k = c_k (s - s_0^k) \quad npu \quad r = r_*, \tag{7.7}$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от вершины купола, функции $s_0^k(s)$, $k = 1, \ldots, n$, — дуговые координаты точки s k-го слоя до деформации, n — число слоев, T_1^k — меридиональное усилие в k-м слое оболочки, отнесенное к единице длины после деформации. Таким образом, задача сводится к системе $2n + 2$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных $T_1^k(s)$, $s_0^k(s)$, $\varphi(s)$, $r(s)$, где r, φ — расстояние до оси вращения и угол между нормалью к оболочке и осью вращения соответственно. Расчеты проводились для трех- и четырехслойных пластин при различных параметрах c_k и α_k. В широком диапазоне изменения этих параметров при учете особенностей строения решетчатой пластинки (последний "наружный" слой является "более плотным и массивным", а также более жестким) получается, что наиболее сильные относительные смещения происходят на уровне последнего слоя, причем эти смещения увеличиваются к краю пластины.

7.4. Модели отслоения сосудистой оболочки. После операций, сопровождающихся вскрытием глазного яблока, иногда возникают осложнения, связанные с отслоением средней (сосудистой) оболочки глаза. В связи с этим рассматривалась механическая модель развития отслойки сосудистой оболочки, которую можно представить как одну из форм разрушения — в виде макротрещины, распространяющейся по поверхности раздела, т. е. трещины расслоения [38,43] В частности, в зонах сжатия может произойти отслоение, причиной которого является местная потеря устойчивости. Используя энергетический критерий Гриффитса, полагаем, что нижняя граница опасного напряжения отслаивания определяется из соотношения

$$U_1 = U_2 + W, \tag{7.8}$$

где U_1 —упругая энергия сжатия, накопленная в слое толщиной h_0 перед выщелкиванием, U_2 — энергия этого слоя после после выщелкивания, энергия изгиба, $W = 2\gamma S$ — работа разрушения (S — площадь поверхности отрыва, а γ — удельная работа разрушения). Предполагалось, что оболочка находится под действием внешнего давления и что при локальной потере устойчивости сферической оболочки под действием равномерного внешнего давления образуется одна вмятина, и на первой стадии развития вмятины, вплоть до расслоения, поведение упругой сферы может быть описано теорией пологих оболочек. По энергетическому критерию (7.8) оценивалось сжимающие напряжения в оболочке глаза, соответствующие отслоению слоя толщиной h_0. Оказалось, что минимальное значение $\sigma_{кр}$ достигается при толщине, соответствующей средней толщине сосудистой оболочки и, таким образом, этот слой является наиболее склонным к отщеплению. Критическое значение напряжения, соответствующее этому слою следует, по-видимому, рассматривать как нижнюю границу опасного напряжения, вызывающего расслоение. Эта величина оказалась значительно меньше предельных разрушающих напряжений для склеры. Следовательно, при ударе в область глаза, по-видимому, более вероятен не разрыв склеры, а отслойка сосудистой оболочки с последующим разрывом сетчатки или сосудистой оболочки.

Рассматривалась также упрощенная модель роста имеющейся трещины — упругая статическая задача отслоения от полупространства тонкой балки или тонкой пластинки под действием внутреннего давления (толстой склеры) [38].

В клинических исследованиях наблюдаются различные (не только симметричные) формы отслоения, что может быть обусловлено различными факторами. В связи с этим рассмотрена задача о потере устойчивости сферической оболочки под действием сосредоточенной силы и внутреннего давления [44].

Для этого сначала с помощью асимптотических и численных методов определялись большие деформации в окрестности приложения сосредоточенной силы и далее определялась точка бифуркация осесимметричного равновесия сферической оболочки. Определялось влияние внутреннего давления на величину и форму потери устойчивости.

В случае, когда внутреннее давление равно нулю, наименьшему параметру сосредоточенной силы соответствует три волны. Естественно, критическое значение сосредоточенной силы увеличивается с ростом внутреннего давления. Но при малых значениях внутреннего давления форма потери устойчивости не меняется. При значении p внутреннего давления $p > 3.56Eh^2/(R^2\sqrt{12(1-\nu^2)})$ происходит потеря устойчивости с четырьмя волнами в окружном направлении. Интересно отметить, что при разных значениях внутреннего давления размеры зоны больших деформаций оказываются равными.

7.5. Об операциях на роговице глаза. С начала 90-х годов XX столетия распространенными рефракционными операциями по поводу миопии и миопического астигматизма стали операции ЛАЗИК и ФРК, заключающиеся в срезании определенного слоя роговицы глаза. При этом одним из важнейших вопросов остается изучение изменения биомеханических свойств роговой оболочки после вышеуказанных рефракционных операций. В свяэи с этим на основе линейной теории изотропных сферических оболочек сделана оценка изменения коэффициента запаса прочности роговицы после изменения толщины роговицы [45].

— o — O — o —

Результаты исследований по механике тонкостенных конструкций были отмечены I премией Ленинградского университета (1971), Государственной премией РФ

в области науки и техники (1998). Они были поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований, фонда Сороса и Правительства РФ. Настоящая статья написана при поддержке РФФИ (гранты 01.01.00327 и 01.01.00234).

Список литературы.

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука. 1976. 512 с.

2. Образцов А.Л., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1991. 416 с.

3. Асланян А.Г., Лидский В.Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1974. 156 с.

4. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. 384 с.

5. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. – Саратов.: Изд. Саратовского унив., 1986. 176 с.

6. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. – London: Academic Press, 1998. 226 p.

7. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука. 1978. 359 с.

8. П.Е.Товстик. Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения // Инж. ж. Мех. тверд. тела, 1967. N 4. С. 124–132.

9. Н.А.Алумяэ. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметричных установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения // Изв. АН Эст.ССР. Сер. техн. и физ.-мат. н., 1960. Т. 10. N 1. С. 3–15.

10. П.Е.Товстик. Устойчивость оболочек. Асимптотические методы. – М.: Наука. 1995. 320 с.

11. М.Б.Петров, П.Е.Товстик. Низкочастотные колебания оболочек вращения знакопеременной кривизны // Тр. 12 Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 3. Ереван, 1980.

12. В.П.Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. 384 с.

13. П.Е.Товстик. Метод ВКБ в двумерных задачах устойчивости и колебаний тонких оболочек // Тр. 13 Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Таллинн, 1983. Т. 4. С. 154–159.

14. В.Б.Лидский, П.Е.Товстик. Спектры в теории оболочек // Успехи механики, 1984. Т. 7. N 2. С. 25–54.

15. П.Е.Товстик. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // Прикл. матем. и механ., 1983. Т. 47. N 5. С. 815-822.

16. Товстик П.Е., Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. – СПб.: Изд. С.Петерб. ун-та, 1995. 220 с.

17. A.V.Krotov, P.E.Tovstik. Asymptotically double natural frequencies of thin elliptical shell vibrations // Day on Diffraction'97. Int. Seminar. St.Petersburg, 1997. Proc., 128-134.

18. З.Г.Ершова, П.Е.Товстик. Колебания и устойчивость цилиндрических панелей со слабо закрепленным прямолинейным краем // Прикл. мех. Изд. СПбГУ. N 9, 1995. С. 210–215.

19. П.Е.Товстик. Свободные высокочастотные колебания пластин переменной толщины // Изв. РАН. Мех. тверд. тела, 1994. N 4. С. 162–170.

20. П.Е.Товстик. Свободные высокочастотные колебания анизотропных пластин переменной толщины // Прикл. матем. и механ., 1992. Т. 56. N 3. С. 473–479.

21. А.Л.Смирнов. Интегралы уравнений колебаний вращающихся оболочек вращения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1981. Вып. 3. С. 114–117.

22. А.Л.Смирнов, П.Е.Товстик. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. М., 1982. С. 280–290.

23. А.Л.Гольденвейзер. О геометрической теории устойчивости оболочек // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1983. N 6. С. 143–154.

24. P.E.Tovstik, A.L.Smirnov. Asymptotic methods in the buckling theory of thin shells. – World scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001. 347 p.

25. А.Л.Гольденвейзер. Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1979. N 6. С. 65–77.

26. А.Л.Майборода. Построение основного интеграла в задаче о потере устойчивости выпуклых оболочек вблизи края // Вестн. Ленингр. ун-та, 1986. N 1. С 123–126.

27. Г.И.Михасев, П.Е.Товстик. Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, 1990. N 4. С. 99–104.

28. А.Ю.Ишлинский. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР, 1954. Т. 95. N 3. С. 477–479.

29. С.Б.Филиппов. Частоты осесимметричных колебаний сопряженных оболочек вращения // Прикладная механика, Вып. 2, ЛГУ, 1975. с. 158-171.

30. С.Б.Филиппов. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. – СПбГУ, 1999. 196 с.

31. Н.В.Наумова, С.Б.Филиппов. Axisymmetric vibrations of thin shells of revolution joint at a small angle // Technishe Mechanik, Band 18, Heft 4, 1998, 285-290.

32. Н.В.Наумова. Колебания и устойчивость сопряженных оболочек // Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 4, 2001, с. 51-62.

33. Т.И.Балашова. Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом переменного сечения // Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 2, 2001. с. 78-83.

34. Д.В.Шарыпов. Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1997, вып. 3, с. 102-108.

35. Д.В.Шарыпов. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1998, вып. 4, с. 132-136.

36. А.Л.Лопатухин, С.Б.Филиппов. Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки,подкрепленной конечным числом шпангоутов // Вестн. СПбГУ, 2001, вып.2, с. 84-90.

37. E.M. Haseganu, A.L. Smirnov, P.E. Tovstik. Buckling of Thin Anisotropic Shells // Trans. CSME. Vol. 24. N 1B. 2000. 169–178.

38. С.М.Бауэр, Б.А.Зимин, П.Е.Товстик. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. – СПбГУ, 2000. 92 с.

39. С.М.Бауэр, А.Н.Миронов. Об изменении ригидности глаза после циркляжа // В сб.: Биомеханика глаза. МНИИ глазных болезней им. Гельмгольца, 41–46.

40. S.M.Bauer, P.E.Tovstik, F.B.Katchanov. On the stability of the eye shell under encircling band // Technische Mechanik. 1995. H. 3, B. 15. 183–190.

41. S.M.Bauer, A.A.Romanova, A.L.Smirnov. On formulation of the problem on deformation of the Lamina Cribrosa // Russian J. Biomechanics, 2001, Vol. 5, N 3. 18–22.

42. S.M. Bauer, E.B.Voronkova. On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure // Russian J. Biomechanics, 2001, Vol. 5, N 1, 73–82.

43. С.М.Бауэр, В.В.Волков, А.Б.Качанов, Б.А.Зимин. К построению биомеханической модели отслойки сосудистой оболочки глаза // Прикл. мех. СПб., 1995. Вып. 9. 149-155.

44. S.M.Bauer, P.E.Tovstik. Buckling of Spherical Shell under Concentrated Load and Internal Presure // Technische Mechanik. 1998, H. 2, B. 18. 135–139.

45. С.М.Бауэр, Б.А.Зимин, А.Б.Качанов. Об изменении прочности роговицы после эксимерных лазерных операций — фоторефрактивной кератэктомии (ФРК) и лазерного кератомилеза in situ (ЛАЗИК) по поводу миопии // В сб.: Биомеханика глаза. МНИИ глазных болезней им. Гельмгольца, 47–52.