

Международная научная конференция  
по механике

**ТРЕТЬИ  
ПОЛЯХОВСКИЕ  
ЧТЕНИЯ**

*4–6 февраля 2003г.  
Санкт-Петербург, Россия*

**Избранные труды**

Санкт-Петербург

2003

УДК 531+532+533+534+539

*Редакционная коллегия: академик РАН Н.Ф. Морозов (СПбГУ, отв. редактор), доц. И.А. Пасынкова (СПбГУ, отв. секретарь), проф. С.А. Зегжда (СПбГУ), проф. С.К. Матвеев (СПбГУ), доц. Е.Н. Поляхова (СПбГУ), доц. В.С. Сабанеев (СПбГУ), доц. А.Л. Смирнов (СПбГУ), проф. А.А. Тихонов (СПбГУ), проф. П.Е. Товстик (СПбГУ), проф. М.П. Юшков (СПбГУ).*

**Третьи Поляховские чтения:** Избранные труды международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 4 - 6 февраля 2003 г. — СПб.: Издательство НИИХ С.-Петербургского университета, 2003. — 333 с.

ISBN

В сборник включены избранные доклады, представленные на международной научной конференции по механике "Третьи Поляховские чтения", посвященной памяти Николая Николаевича Поляхова (1906–1987). Рассматриваются вопросы теоретической и прикладной механики, динамики космического полета, механики жидкости и газа, механики деформируемого твердого тела и истории механики.

Международная научная конференция по механике "Третьи Поляховские чтения" поддержана Российским фондом фундаментальных исследований согласно проекту (грант РФФИ № 03-01-10011).

ISBN

© Коллектив авторов, 2003  
© Мат.-мех. факультет  
С.-Петербургского университета, 2003

## ПРЕДИСЛОВИЕ

С 4 по 6 февраля 2003 г. на базе математико-механического факультета и НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова Санкт-Петербургского государственного университета состоялась Международная научная конференция по механике "Третьи Поляховские чтения". Организаторами конференции являлись Министерство образования РФ, Российский фонд фундаментальных исследований, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский Дом ученых РАН, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, Санкт-Петербургское отделение Академии нелинейных наук. Председателем конференции был академик РАН Н.Ф. Морозов, сопредседателями — Г.А. Леонов, М.П. Юшков, ученым секретарем — И.А. Пасынкова. В научный комитет конференции вошли академики РАН С.С. Григорян, А.Ю. Ишлинский, Д.М. Климов, В.В. Козлов, В.В. Румянцев, член-корреспондент РАН В.В. Белецкий, профессора А.В. Карапетян, Ю.В. Лапин, А.П. Маркеев, Г.К. Михайлов, А.А. Пярнпуу, П.Е. Товстик, В.Н. Тхай, известные зарубежные ученые В. Вуйичич (Югославия), Б. Энфло (Швеция), Р. Каспер (Германия), Мэй Фунсян (Китай), С. Радев (Болгария), К. Ризито (Италия), Ф. Римротт (Канада), Х. Трогер (Австрия), П. Хагедорн (Германия), Д. Шевалье (Франция), Л. Шперлинг (Германия). Тематика "Чтений" охватывала практически все фундаментальные направления современной механики. Эта особенность конференции связана с широтой интересов профессора Николая Николаевича Поляхова, памяти которого посвящаются "Поляховские чтения".

Всего на конференцию было представлено 178 докладов 233 авторов из России, Армении, Беларуси, Грузии, Украины, Германии, Китая, Румынии, США, Тайваня, Франции. Конференция была весьма полезна для научного общения ее участников. Большинство докладов отличалось высоким научным уровнем и соответствовало актуальным с точки зрения мировой науки направлениям исследований. Среди присутствовавших было большое количество молодых ученых и аспирантов, для которых особенно важно было услышать выступления ведущих ученых-механиков: академика РАН Н.Ф. Морозова,

члена-корреспондента РАН В.В. Белецкого, профессоров Г.Т. Алдошина, Ю.З. Алешкова, И.И. Блехмана, Б.А. Ершова, С.А. Зегжды, А.В. Карапетяна, И.И. Косенко, А.Л. Куницына, Ю.В. Лапина, Г.И. Мельникова, Р.Н. Мирошина, Г.К. Михайлова, В.М. Морозова, Е.А. Нагнибеда, М. Паскаль, А.А. Пярнпуу, М.А. Рыдалевской, В.А. Самсонова, А.П. Сейраняна, С.Я. Степанова, П.Е. Товстика, В.Н. Ускова, В.А. Цибарова, К.Ф. Черныха, Л. Шперлинга и др.

На пленарном заседании, проходившем в Дубовом зале Санкт-Петербургского Дома ученых РАН, были заслушаны заказные доклады: Н.Ф. Морозов, С.А. Зегжда, Б.Н. Семенов "Применение уравнений Лагранжа к задачам механики разрушения", С.А. Зегжда, Ш.Х. Солтаханов, М.П. Юшков "Основные результаты Поляховской школы по аналитической механике", А.В. Карапетян "Устойчивость и бифуркация стационарных движений неавтономных систем", В.В. Белецкий "Егоров, Лидов, Ершов и полеты к Луне", К.Ф. Черных "Нелинейные задачи теории упругости (теория и приложения)", Ю.В. Лапин "Моделирование пристенной турбулентности: достижения, проблемы" (к сожалению, Д. Шевалье не имел возможности приехать в Санкт-Петербург и выступить с докладом "Динамика афинно деформируемых тел и голономные группы"). Дальнейшая работа конференции проходила в стенах математико-механического факультета в Старом Петергофе, где работали секции теоретической и прикладной механики (председатели С.А. Зегжда, А.В. Карапетян), динамики космического полета (председатели В.В. Белецкий, А.А. Тихонов), механики жидкости и газа (председатели С.К. Матвеев, Р.Н. Мирошин), механики деформируемого твердого тела (председатели Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик), истории механики (председатели Г.К. Михайлов, Н.Н. Поляхов(мл.)).

Работа конференции была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, почти 20 процентов докладов имели ссылки на поддержку их инициативными проектами РФФИ, а также Министерства образования и других организаций.

Конференция приняла решение о проведении "Четвертых Поляховских чтений" в феврале 2006 года, приурочив их к столетию со дня рождения Н.Н. Поляхова. Более подробную информацию о Конференции можно найти в статьях, помещенных в журналах "Известия РАН. Прикладная математика и механика" за 2003 г. и "Санкт-Петербургский университет" № 12, 2003.

# Пленарные доклады

## Егоров, Лидов, Ершов и полёты к Луне

*В.В. Белецкий*

(Beletsky@Keldysh.ru)

Институт прикладной математики РАН, Москва, Россия

*Рассказывается о трех моих коллегах по Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН - Всеволоде Александровиче Егорове (1930- 2001), Михаиле Львовиче Лидове (1926-1993) и Валентине Гавриловиче Ершове (1928-1998). С ними меня связывает много десятилетий совместной работы. Им принадлежат выдающиеся достижения в теории и практике космических полетов, особенно - полетов к Луне. И каждый из них был неординарной личностью с трагической судьбой.*

**1. Исчезновение В.А. Егорова.** 12 сентября 2001г. на механико-математическом факультете МГУ должен был состояться семинар по динамике космического полета, которым много лет руководил В.А. Егоров. Он должен был приехать на семинар прямо из-под Сочи, где ежегодно отдыхал в своем домике. Но не приехал. Это было столь не похоже на Егорова - человека фанатично ответственного - что мы, соруководители семинара, переполошились. Выяснилось, что Егоров должен был уехать в Москву 10 сентября. Последний раз его видели 6 сентября, с тех пор его никто не видел. Опуская очень мрачные детали расследования, скажу только, что В.А. Егоров официально числится пропавшим без вести.

**2. В.А. Егоров: путь в науке.** Профессор В.А. Егоров, лауреат Ленинской премии, автор всемирно известных пионерских работ по динамике полетов к Луне, свой путь в науке начал еще в студенческие годы. Его (и мой) руководитель профессор А.А. Космодемьянский позже (1969г.) писал [1]: "Думаю, что для некоторых известных в наши дни ученых интерес к определенным проблемам современной механики зародился в результате работы в научных

кружках и семинарах механико-математического факультета МГУ. Я могу назвать, например, следующих товарищей: Д.Е. Охочимский, Т.М. Энеев, В.А. Егоров, В.В. Белецкий, В.А. Сарычев...". На семинаре А.А. Космодемьянского я и познакомился с Севой Егоровым. Он был на полгода младше меня, но на 2 курса старше по мехмату. От семинара А.А. Космодемьянского в 50-ые годы отпочковался кружок (переросший в семинар) по космонавтике, основанный В.А. Егоровым и Т.М. Энеевым. Этим семинаром полвека руководил В.А. Егоров (с разными соруководителями). И полвека работал в институте, основателем которого был М.В. Келдыш. Есть воспоминания Егорова на эту тему [2]. Еще студентом он работал по совместительству вместе с Д.Е. Охочимским и Т.М. Энеевым в отделе механики МИАН, руководимом М.В. Келдышем. Будучи рекомендован в аспирантуру, Сева, со школьных лет мечтавший о полетах в космос, решил, что диссертационная работа у него будет по космической тематике, связанной с проблемами динамики и управления в космических полетах. Но и А.А. Космодемьянский, и Д.Е. Охочимский, и Т.М. Энеев сочли, что это преждевременно.



Рисунок И.В. Новожилова "Егоров в космосе"

Целеустремленный Сева тогда пошел к М.В. Келдышу с просьбой быть руководителем в аспирантуре по этой тематике. И Мстислав Всеволодович, поговорив с Севой, согласился, сказав, что тема интересна и перспективна. Шел 1952 год. "Так М.В. Келдыш впервые проявил свое доброе отношение к космическим исследованиям", — пишет В.А. Егоров.

Когда я в 1954 году пришел на работу в отдел Д.Е. Охочимского (между прочим, по рекомендации В.А. Егорова), Егоров уже был погружен в исследования траекторий полета по маршруту Земля – Луна. В его полное распоряжение была отдана маломощная СЦМ, имевшая быстродействие 100 (сто!) операций в секунду и оперативную память в 64 числа. И на этой машине Егоров демонстрировал чудеса вычислений серий Лунных траекторий. Эти исследования впервые были опубликованы в знаменитом номере журнала "Успехи физических наук", т. 63, вып. 1-а, 1957г. [3], вышедшем еще до запуска 1-го спутника; они реализованы в конкретных траекториях первых лунников и приобрели мировую известность [4].

**3. В.А. Егоров как личность.** Маленького роста, сухощавый, с мелкими чертами лица, подавляемыми большим лбом, Сева (как мы все его звали) отличался недюжинной силой характера и целеустремленностью. Неизменно оптимистичен и уверен в своей правоте, что в бытовых ситуациях друзьями и коллегами не всегда хорошо переносилось. Но в научных дискуссиях совершенно корректен, открыт для критики и доброжелателен к оппоненту.

Очень спортивен, занимался йогой, в 70-летнем возрасте легко делал "шпагат" и стойку на голове, бегал десятикилометровые кроссы как лось! На себе апробировал методы лечебного голодания — и не в каком-либо лечебном заведении, а просто сам, используя свои феноменальные качества [5,6].

Как-то за дружеским чаем спонтанно (пришлось к слову) прочитал нам лекцию о целебных и съедобных травах, записывая мелом на доске прямо из головы их названия. Этот список — несколько десятков трав! — еще очень долгое время украшал рабочую комнату в нашем институте.

С медициной у Егорова были вполне профессиональные отношения. По инициативе М.В. Келдыша В.А. Егоров с конца 70-х — начала 80-х годов около 20 лет занимался проблемой медицинской диагностики и компьютеризации медицины. Он, преодолевая организационные трудности, создал в 1984 году в Научном Совете АН СССР по комплексной проблеме "Кибернетика" лабораторию биоинформатики (и руководил ее сектором - на общественных началах).

А вот критические исследования В.А. Егоровым работ Римского Клуба по глобальному развитию М.В. Келдыш не поддержал. Разрешил выпустить по проделанной работе книгу (есть такая у Егорова!),

но на этом велел тему закрыть.

Не поддержал М.В. Келдыш и стремления Сева самому лететь в космос. Егоров считал, что настоящий ученый должен не только рассчитывать полеты к Луне, но и апробировать эти траектории лично! С этой идеей Сева пришел ко Мстиславу Всеволодовичу в подходящее время — формировалась первая группа космонавтов. Но тот считал по-другому: "Ученый должен работать за столом!" — и отказался поддержать Севину мечту жизни.

"Но отказ в поддержке — это не запрет", — рассудил Егоров. Сева напрыгал с парашютом зачетное число прыжков, получил права на вождение самолета; и вот Сева уже в группе космонавтов . . . Правда, как лектор. Он читал им курс бортовой навигации. Я уверен, что Егоров своего добился бы, но . . . Возникла необходимость операции на почках, и это закрыло Севе личный путь в космос.

Однако и в этой драматической ситуации Егоров остался Егоровым. Я его навестил в больнице на другой день после операции. Егоров в постели, искусственный мочеточник — в наружную бутылочку. Сева бодр, но сердит. "Ты чего?" — спрашиваю. Он: "Да вот мой хирург — дура-баба." — "Сева, как можно такое говорить?!" А Сева мне (уже тогда в медицине разбирался лучше) "Посуди сам! Вот привезли меня из операционной. Я-то знаю, после операции самое опасное — опущение почек. Предотвращая это, сделал стойку на голове. А тут вошла хирург и в истерику. Ну не дура ли?"

**4. Егоров и экстрасенсы.** В последние годы Егорова сильно занимали паранормальные явления, экстрасенсы, восточные верования, "проблемы" переселения душ . . . Активно дискутировал на эти темы. Дело не ограничивалось дискуссиями. Некому экстрасенсу дал займы несколько тысяч долларов на создание лаборатории. Этот долг ему не вернули.

Лет пять тому назад Егоров потерял связь со своей дочерью — она уехала на Мадагаскар и вскоре перестала давать знать о себе. Экстрасенс из ближнего круга Егорова заключил: "Дочь тяжело больна." Надо сказать, что Егоров выезжал за рубеж единственный раз в 1966 году. У него и загранпаспорта не было. Но не прошло и двух недель с "заключения" экстрасенса, как Егоров уже летит на Мадагаскар, один, не зная языка, находит дочь где-то в Мадагаскарской глубинке, слава Богу, здоровую, но в безвыходном положении: муж-мальгаш ушел; бизнес, на который жили (мелкая торговля) —



лопнул. А тут Егоров — буквально с небес! Вывез ее к себе в Москву. Это всего лишь одна из сонма легендарных историй о Севе Егорове.

**5. М.Л. Лидов [6].** С будущим профессором, лауреатом Ленинской премии, Михаилом Львовичем Лидовым мы были однокурсники, оба окончили мех-мат МГУ в 1954 году. Он был старше меня на три с половиной года и пришел сначала на заочное отделение механико-математического факультета еще во время службы в армии, в которую он попал в 1944 г., уйдя добровольцем на фронт. Последние месяцы войны он провел на военном аэродроме под Торунью, в Польше, там служил мастером-механиком по самолетному вооружению. В ранней юности он хватил горя и лиха после ареста отца. Голодал. Учился в техникуме. Был рабочим сцены МХАТ. Не любил вспоминать эти годы. А вот про службу в армии он говорил с юмором: "В армии жизнь легкая! Думать не надо. Принимать решения не надо. Все это за тебя делает начальство!" Если исходить из такого критерия, вся дальнейшая жизнь М.Л. Лидова была нелегкой, так как думать и принимать решения стало его профессией. На пятом курсе мы выбрали Лидова в комсомольское бюро, а бюро выбрало его секретарем. Тут разразился грандиозный скандал. Как водилось в те времена, "наверху" подняли бумаги про нового комсомольского работника и быстро обнаружили, что отец Миши Лидова осужден по знаменитой 58-ой статье. Миша, естественно, не рекламировал этот факт. Но и не скрывал: в анкете все было записано. Итак, был большой шум. Комсомольское начальство созвало собрание курса, клеймили наш курс, наше бюро и лично Мишу Лидова, вешая на него всякие нехорошие ярлыки. Напомню — на ветерана войны, добровольцем ушедшего на фронт. Дело это кончилось простым выводом Лидова из бюро и, кажется, выговором по комсомольской линии. Может быть потому, что Сталин уже умер и дул ветер перемен. Но путь в аспирантуру Лидову был закрыт, хотя он уже имел публикации в ДАН СССР по представлению его научного руководителя Л.И. Седова. Первое время после окончания МГУ он прозябал в некоей декоративной комиссии Л.И. Седова, имеющей странный статус и странные функции (см. воспоминания В.А. Егорова [7]). А в 1957 году по рекомендации В.А. Егорова был принят в институт, возглавляемый М.В. Келдышем, в отдел Д.Е. Охочимского. Там уже сложился коллектив таких выдающихся исследователей, как сам Д.Е. Охочимский, Т.М. Энеев, Э. Л. Аким, В.А. Егоров,

А.К. Платонов, В.А. Сарычев, я тоже уже работал в этом отделе; и вот пришел М.Л. Лидов.

Эту могучую кучку в смежных организациях тогда называли "мальчики Келдыша" — мы все были молоды в возрасте от 23-х до 33-х лет. М.Л. Лидов, обладая волевым, целеустремленным и независимым характером, огромным трудолюбием и блистательным умом, не только "с ходу" вписался в энергичный и самозабвенный стиль нашей деятельности, но и быстро занял лидирующие позиции.

Уже первая работа М.Л. Лидова у нас принесла уникальные, сенсационные результаты. Это было исследование плотности верхней атмосферы и ее вариаций по наблюдениям за эволюцией орбиты искусственного спутника. Лидов блестяще справился с этой совершенно новой и уникальной проблемой. До его работы о верхней атмосфере Земли не было известно практически ничего. О суточных вариациях плотности верхней атмосферы, открытых Лидовым, геофизики не знали и знать не могли, т.к. о верхней атмосфере не было никаких знаний.

Специалисты оценили эти исследования Лидова как событие в геофизике. В дальнейшем на определении плотности атмосферы по спутниковым наблюдениям ряд ученых сделал карьеры, например, англичанин Кинг Хилли. Но Лидов был первым.

**6. Лидов и небесная механика.** Особо выдающиеся результаты М.Л. Лидов получил при исследовании небесномеханических проблем. Со времен Лапласа классическая небесная механика занималась в основном исследованиями, приспособленными к случаю почти круговых орбит, лежащих почти в одной плоскости. Этот случай моделировал Солнечную систему и, по так называемой "теореме Лапласа", обладал устойчивостью, что, впрочем, не было доказано вплоть до 60-х годов двадцатого века, когда Колмогоровым, Арнольдом и Мозером была разработана КАМ-теория.

Но в эти же 60-ые годы в связи с запуском первых космических аппаратов возникла необходимость в исследованиях, не накладывающих ограничений на форму и взаимное расположение орбит. Цикл работ в этом направлении и был выполнен Лидовым. Характерно, что эти работы были "заказаны" практическими нуждами космонавтики, в частности, по проектированию орбиты "Лунника", фотографировавшего обратную сторону Луны.

Если начальные значения эксцентриситета  $e$  и наклона  $i$  из-

начально малы, то малыми и останутся (теория Лапласа, КАМ-теория). В общем случае, как доказал М.Л. Лидов, это не так: первоначально малый эксцентриситет может стать близким к единице, что чревато падением спутника на центральное тело, т.к. перигейное расстояние становится близким к нулю — заведомо меньше радиуса центрального тела.

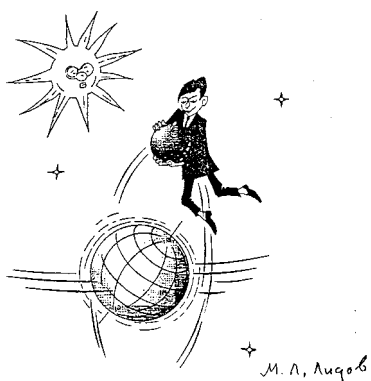


Рисунок И.В. Новожилова

Лидов показал, что такая возможность действительно реализуется. В знаменитом примере (сосчитанном точно) Лидов запустил Луну не в плоскости орбиты Земли вокруг Солнца, а перпендикулярно этой орбите. Такая Луна упала на Землю через четыре с половиной года (55 месяцев)! Рисунок И.В. Новожилова, где М.Л. Лидов роняет Луну на Землю. Траектория "Лунника", фотографировавшего обратную сторону Луны, была сосчитана М.Л. Лидовым и оказалась того же типа.

"Лунник" после фотографирования довольно быстро упал на Землю — строго по Лидову! Насколько все это было необычно и внове, иллюстрирует такой факт: проф. Б.В. Кукаркин, известный астроном, после запуска (но до падения) "Лунника", в публичной лекции утверждал, что Лунник будет летать вечно: дескать, нет причин, по которым он мог бы упасть.

Даже Владимир Игоревич Арнольд, когда я ему сообщил о такой возможности, в первый момент заявил, что это невозможно, т.к. большая полуось орбиты практически не меняется. Но в следующий момент, поняв, что речь идет не о большой полуоси, а об эксцентриситете, сказал: "Да, это может быть."

**7. Всемирное признание.** Имея такие результаты, Лидов приобрел широкую известность — сначала, как говорится, в узких кругах, поскольку все наши работы поначалу носили гриф "совершенно секретно" и были доступны только небольшому числу специалистов. Но мало-помалу работы рассекречивались, публиковались и имя Лидова было на слуху. Вот легендарный случай: приходят к

нам в институт некие деятели и спрашивают профессора Лидова. Мы им: "Лидов — не профессор". Они: "Как, неужели Лидов — и всего лишь кандидат?" Мы: "Он — не кандидат." Немая сцена, как в "Ревизоре".

Лидов так и не стал кандидатом наук. Миновав кандидатскую степень, в конце 1964г. на закрытом заседании Ученого Совета нашего института он защищал совокупность своих работ прямо на степень доктора физико-математических наук и защитил в блеске. М.В. Келдыш, выступая на этой защите, особо отметил многообразие использованных Лидовым средств исследования: аналитические и полуаналитические методы, качественный анализ, детальные числовые расчеты на ЭВМ. Келдыш сказал запоминающиеся слова: "Настоящий ученый не останавливается перед выбором средств исследования."

С.П. Королев тоже ценил М.Л. Лидова (как и В.А. Егорова). Лидов умел убедить Сергея Павловича (человека крутого и не всегда справедливого) в своей правоте, и лучшим доказательством этой правоты были успешные полеты лунников по орбитам, спроектированным Лидовым.

Со временем работы Лидова, по мере рассекречивания и публикации, приобрели всемирную известность. Лидов оставил много научных публикаций не только по небесной механике. В теории гарантированного оценивания параметров движения Лидов — тоже признанный классик, и многочисленные кандидаты и доктора наук этого направления выросли из теоремы Лидова о гарантированном оценивании, опубликованной в 1964 году.

Одним из признаний его заслуг является присвоение малой планеты (каталожный номер 4236) имени Лидов. В.А. Егоров и другие из перечисленных выше "мальчиков Келдыша", а также сам М.В. Келдыш, также удостоены именных малых планет.

**8. М.Л. Лидов как личность.** Характерным для научного облика Лидова было его поведение на научных семинарах, независимо от того, был ли он руководителем или участником. На семинарах у него была тактика, схожая с артиллерийским обстрелом. Прямо по ходу доклада он бомбардировал докладчика вопросами, ничуть не стесняясь того, что его вопросы могут показать непонимание доклада. Вопрос — мимо! Вопрос — недолет! Вопрос — перелет! Вопрос — бац! — не в бровь, а в глаз, после чего докладчик порою замолкал, иногда надолго. Этой тактикой достигались, как правило, три цели:

- 1). Лидов понял работу докладчика;
- 2). докладчик понял свою работу;
- 3). докладчик понял, с кем имеет дело.

Лидов был личностью яркой, харизматической, знатоком поэзии, ценителем живописи, душой общества. Дирижировал застольным хором на праздниках отдела, на которых бывал и М.В. Келдыш, подпевая иногда; на хорошем уровне играл в футбол и в шахматы, ходил на беговых и горных лыжах.

Каждый год ходил в походы, часто высокой категории сложности. Собирается как-то Лидов в байдарочный поход куда-то на север, весьма сложный, и рассказывает о своих планах нашему общему другу и однокурснику И.В. Новожилову. Новожилов — сам бывалый турист — солидно так анализирует, что поход очень трудный и в него лучше не ходить, если в группе нет бывшего надежно человека. "Есть у вас в группе такой человек?" — спрашивает Новожилов. "Есть, — отвечает Лидов, посверкивая своими карими глазами, — это я". В одном из таких походов (в Заполярье) в группе Лидова случилось несчастье: один из участников сломал ногу. Лидов вместе со своим учеником С.Л. Зиглиным совершил многочасовой марш-бросок в населенный пункт, где сумел снарядить вертолет для эвакуации пострадавшего. В другом байдарочном походе едва не потонул, перевернувшись вместе с В.И. Арнольдом. На этом же месте (Боровитский порог на реке Мсте) в тот же день перевернулась другая байдарка, и трое туристов утонули по-настоящему. Об этом пишет в своих воспоминаниях В.И. Арнольд [8].

В июне-июле 1986 г. мы участвовали в работе школы по механике, организованной на борту теплохода, идущего по маршруту Томск — Новосибирск — Нижневартовск — Томск. Была сибирская жара до 30°; ранние утренние заседания секций; стоянки с купанием и футболом; бурные ночные дебаты; а там и танцы на палубе до утра — белые ночи и красивые, интеллектуальные женщины к тому располагали. Лидов царил везде! Утром на заседаниях вел свой знаменитый артобстрел докладчиков; на стоянках в упоении гонял футбол; а после танцев или вместо них собирал аудиторию на палубе и читал стихи наизусть: объем его памяти поражал воображение. Он мог, например, час или два читать Александра Блока. Любил Давида Самойлова. А в общем вагоне, идущем откуда-то с севера, доводил до слез блатных попутчиков чтением "Письма матери" Сергея Есенина.

Он и сам писал стихи, между прочим. Я люблю повторять: таланты — как грибы: уж если есть, то кучей.

М.Л. Лидов умер в канун нового 1994 года в метро, по дороге на работу. В.А. Егоров в своих выше цитированных воспоминаниях [7] пишет: "Около 15 лет мы проработали с М.Л. Лидовым вдвоем в одной комнате, даже ни разу серьезно не повздорив . . . Уже 8 лет нет М.Л. Лидова, я перебрался со своего рабочего места из темной части комнаты к окну, за его удобный стол, и почти каждую неделю о нем вспоминаю, жалея, что его не стало. Уж лучше бы при нем сидеть в темном месте, чем без него у окна!"

**9. В.Г. Ершов.** Валентин Гаврилович Ершов, как и М.Л. Лидов, хватил горя и лиха в свои годы — после трагической гибели отца [9]. Зарабатывал на жизнь фотографированием, вязанием кофт на продажу, работой осветителем на Мосфильме, участием в массовках (в знаменитом в свое время фильме "Далеко от Москвы" есть кадр, где группа рабочих-эков слушает в бараке по радио выступление Сталина; в этой группе резко выделяется В.Г. Ершов своим нестандартным профилем). В таких тяжелых условиях сумел получить высшее техническое образование (специальность — инженер-ракетчик), работал некоторое время по специальности, а в 1956 году он пришел в наш отдел и очень скоро проявил себя талантливым математиком. Существует теорема Эльвинга — Ершова в области статистики независимых измерений. Я сблизился с Валей Ершовым в период совместной с ним и с В.А. Егоровым работы над проблемами динамики космических перелетов с двигателями малой тяги.

Тут началась эйфория с пилотируемыми космическими полетами. Был даже набор в группу космонавтов из учреждений Академии наук. Подал заявление и В.Г. Ершов. Пройдя все испытания, В.Г. Ершов был принят в группу космонавтов-ученых из Академии наук. В этой группе — единственной от Академии наук — были еще три сотрудника ИЗМИРАН. Он провел в Центре подготовки космонавтов семь лет (1967-1974), был включен в группу космонавтов "Л-1" членом экипажа, предназначенного для первого пилотируемого облета Луны — в качестве космонавта-штурмана.

Неудачи с испытаниями советской ракеты Н-1, предназначенной для осуществления пилотируемых полетов к Луне, смерть С.П. Королева и другие объективные и субъективные факторы привели к тому, что гонку к Луне честно выиграли американцы, а советская

программа пилотируемых полетов к Луне была закрыта. В.Г. Ершов некоторое время еще готовился к ставшим рутинными околоземным полетам, но в 1974 году вернулся к научной работе в нашем отделе в ИПМ им. М.В. Келдыша. Последние работы В.Г. Ершова были посвящены актуальным проблемам дискретной математики, где он достиг существенных новых результатов, но не все успел опубликовать. Он скончался в 1998 году после тяжелой продолжительной болезни.

### Список литературы

1. *Космодемьянский А.А.* Теоретическая механика и современная техника. М.: Просвещение, 1969.
2. *Егоров В.А.* М.В. Келдыш - мой учитель // М.В. Келдыш. Творческий портрет по воспоминаниям современников. М.: Наука, 2002.
3. *Егоров В.А.* О некоторых задачах динамики полета к Луне // Успехи физических наук. 1957. Т. 63. Вып. 1-а.
4. *Себелей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
5. *Белецкий В.В.* Из судьбы. М.: Христианское издательство, 1993.
6. *Белецкий В.В.* Фрагменты о М.В. Келдыше // М.В. Келдыш. Творческий портрет по воспоминаниям современников. М.: Наука, 2002.
7. *Белецкий В.В.* М.Л. Лидов - ученый и человек // Вестник Российской Академии наук. 2000. Т. 70, № 6.
8. *Егоров В.А.* Из воспоминаний о Лидове. К 75-летию со дня рождения М.Л. Лидова // Космические исследования. 2001. Т. 39. № 5.
9. *Арнольд В.И.* Истории давние и недавние. М.: Фазис, 2002.
10. Ершов Валентин Гаврилович. Некролог // Новости космонавтики. 1998. № 7(174).

## Основные результаты Поляховской школы по аналитической механике

*С. А. Зегжда<sup>1</sup>, Ш. Х. Солтаханов<sup>2</sup>, М. П. Юшков<sup>1</sup>*

*(<sup>1</sup> mpy@phoenix.math.spbu.ru)*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Чеченский государственный университет, Грозный, Россия

Проблемы аналитической механики постоянно были в поле зрения сотрудников кафедры механики Петербургского университета. Основополагающими здесь являются труды академиков И.И. Сомова, П.Л. Чебышова, А.М. Ляпунова, Д.К. Бобылева, а также профессоров И.В. Мещерского, Г.В. Колосова, Н.В. Розе, Е.Л. Николаи, К.И. Страховича, Ю.А. Круткова. В 1952 г. после кончины Ю.А. Круткова по рекомендации академика В.И. Смирнова заведующим кафедрой теоретической механики стал выдающийся ученый в области гидроаэромеханики, один из наиболее любимых учеников С.А. Чаплыгина, Николай Николаевич Поляхов. С этого времени он начал заниматься также проблемами теоретической механики.

Несколько отвлечемся здесь от заявленной в заглавии темы, чтобы немного вспомнить советский период развития механики в нашей стране и чтобы почувствовать место в механике Николая Николаевича. После окончания Московского университета в 1928 году Николай Николаевич поступает на работу в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ). Кратко об истории этого выдающегося мирового центра науки расскажем по книге [1] из библиотеки Николая Николаевича. ЦАГИ учреждается 1 декабря 1918 г. прежде всего трудами Н.Е. Жуковского, С.А. Чаплыгина, В.П. Ветчинкина, А.Н. Туполева.

17 марта 1921 г. скончался Н.Е. Жуковский, а 5 апреля 1921 г. единогласно избраны председателем Коллегии ЦАГИ – С.А. Чаплыгин, директором ЦАГИ – В.А. Архангельский, товарищами директора – А.Н. Туполев, Б.Н. Юрьев.

Со 2 октября 1930 г. по 16 февраля 1931 г. С.А. Чаплыгин был начальником ЦАГИ. 16 февраля 1931 г. к 40-летию научной деятельности проф. С.А. Чаплыгина Реввоенсовет СССР объявляет ему благодарность: "... за понесенные им труды по созданию ЦАГИ и опытного самолетостроения, ... отмечает его революционные заслуги и с сожалением удовлетворяет его просьбу об освобождении от должно-



сти начальника ЦАГИ с оставлением его в ЦАГИ для продолжения исследовательской научной работы".

11 января 1931 г. в ЦАГИ выделена общетеоретическая группа (ОТГ) в составе: П.А. Вальтер, В.П. Ветчинкин, В.В. Голубев, А.П. Котельников, М.А. Лаврентьев, Н.Н. Лузин, Н.Н. Поляхов. Начались регулярные научные заседания под руководством акад. С.А. Чаплыгина. В книге перечислены все заседания этого семинара и все заслушанные на них доклады. Обратите внимание в каком созвездии имен вращался Николай Николаевич: с докладами выступали (перечисление ведем в порядке выступлений на семинаре) В.В. Голубев, М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев, Я.И. Секерж-Зенькович, Л.С. Лейбензон, Л.И. Седов, Н.В. Зволинский, Д.Ю. Панов, И.А. Кибель, С.А. Чаплыгин, В.П. Ветчинкин, Н.Н. Поляхов, Л.Н. Сретенский, Б.С. Стечкин, А.И. Тихонов, С.А. Тумаркин, С.А. Христианович.

Любопытна здесь и следующая небольшая статистика. Выделим среди перечисленных фамилий докладчиков, сделавших более четырех сообщений: 5 докладов — В.В. Голубев, М.В. Келдыш, 6 докладов — Л.И. Седов, 7 докладов — В.П. Ветчинкин, 8 докладов — Л.Н. Сретенский, 9 докладов — Н.Н. Поляхов, 9 докладов личных и 3 доклада в соавторстве с П.М. Ризом — Н.В. Зволинский.

При этом следует отметить, что с 1932 г. Николай Николаевич работал в ЦАГИ по совместительству, так как после женитьбы он переехал в Ленинград. Каждый четверг утром он выходил на Ленинградском вокзале Москвы из "Красной стрелы", шел на личный доклад к С.А. Чаплыгину о проделанной за неделю работе, получал новое задание на следующую неделю и вечером опять садился в "Красную стрелу". Так продолжалось до июня 1941 г. включительно, после чего научный семинар уже не функционировал. Все доклады Николая Николаевича были посвящены созданию теории расчета гребных винтов, в результате появилась обширная монография В.П. Ветчинкина, Н.Н. Поляхова "Теория и расчет воздушного гребного винта"[2], которой, по отзывам гидромехаников, расчетчики пользуются до настоящего времени.

Таковы только некоторые штрихи работы Николая Николаевича как гидромеханика.

Вернемся теперь к непосредственной деятельности Николая Николаевича в области аналитической механики. Здесь, прежде все-

го, напомним, что Сергей Алексеевич являлся не только гением гидромехаником, но и прославился своими работами в области негोलомной механики: в частности, ПЕРВЫЕ уравнения движения негोलомных систем были получены именно С.А. Чаплыгиным — в 1895 г. он доложил их на заседании Отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, а в 1897 г. опубликовал их [3]. И как и у его великого учителя, наиболее крупные научные результаты Николаем Николаевичем получены не только в гидромеханике, но и в негोलомной механике.

Все началось с его творческого отношения к курсу лекций по теоретической механике, который он читал на математико-механическом факультете, начиная с 1953 года и до конца своей жизни. Стремясь построить его как можно более строго и рационально, он заметил, что общепринятый вывод уравнений движения негोलомных систем нельзя признать строгим, и предложил новый подход к выводу этих уравнений. Этот подход к теории несвободного движения стал, в частности, успешно использоваться его учениками А.Ю. Львовичем, В.Е. Пасынковым, Ф.Ф. Родюковым, В.А. Диевским в теории электромеханических систем. В результате стало развиваться новое научное направление, по которому были выпущены в свет три монографии [4 — 6].

В 1975 году Н.Н. Поляхов предложил своим ученикам С.А. Зегжде и М.П. Юшкову, которые также читали на факультете лекции по теоретической механике, подготовить его курс лекций к изданию. Примечательно, что М.П. Юшков студентом второго курса слушал первую редакцию курса 1953-го года, затем за динамикой совершенствования курса С.А. Зегжда и М.П. Юшков следили, посещая лекции будучи аспирантами, ассистентами и доцентами.

Работа над книгой велась в течение десяти лет. Фундаментальный курс "Теоретическая механика"[7] для студентов механико-математических специальностей университетов вышел в свет в 1985 году. Эта книга получила высокую оценку на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике и в 1987 г. была удостоена Первой премии Ленинградского университета. Второе переработанное и расширенное издание этого учебника опубликовано издательством "Высшая школа" в 2000 году [8]; в настоящее время с "Высшей школой" заключен договор о третьем издании этой книги и готовится перевод ее на английский язык.

Основные результаты, полученные Поляховской школой по аналитической механике, состоят в следующем.

Разработан общий подход к выводу уравнений как голономных, так и неголономных систем со связями любого порядка. Система уравнений Лагранжа второго рода, которой описывается движение механической системы до наложения связей, рассматривается как одно векторное равенство, записанное в касательном пространстве к многообразию всех возможных положений системы в данный момент. Уравнениями связей касательное пространство разбивается на два ортогональных подпространства. В одном из них движение задается уравнениями связей, а в другом при идеальных связях описывается вторым законом Ньютона. Этот же закон Ньютона, записанный во всем пространстве, содержит множители Лагранжа. Показано, что они при голономных и неголономных связях до второго порядка включительно могут быть найдены как функции времени, положения системы и ее скоростей. Этот подход позволил, в частности, дать геометрическую интерпретацию уравнений Пуанкаре – Четаева – Румянцева [9].

Использование множителей Лагранжа для голономных систем дало возможность построить новый метод определения собственных частот и собственных форм колебаний упругих систем [10], а также предложить специальную форму уравнений движения системы твердых тел [11]. При наличии линейных неголономных связей выше второго порядка множители Лагранжа рассматриваются как неизвестные функции времени. Составлена замкнутая система дифференциальных уравнений, позволяющая определить эти множители, а также обобщенные лагранжевы координаты.

Рассмотрение множителей Лагранжа как искомым функций времени позволило поставить и решить новый класс задач управления [12], когда программа движения задается в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Существенно, что эта теория иллюстрируется конкретным механическим примером о движении спутника с постоянным по модулю ускорением. Этот пример, в котором программа движения рассматривается как линейная неголономная связь третьего порядка, введен в научную литературу впервые [13].

Отметим, что впервые разбиение пространства движения на два ортогональных подпространства, в одном из которых составляющая

ускорения системы полностью определяется уравнениями связей, описано в статье Н.Н. Поляхова, С.А. Зегжды, М.П. Юшкова, опубликованной в 1981 г. [14]. Эти же результаты были затем изложены в 1985 г. в учебнике [7]. К сожалению, они оказались незамеченными и позже в разной редакции были повторены в США (J. Storch, S. Gates, 1989 [15]), России (В.В. Величенко, 1991 [16]; Ю.Ф. Голубев, 1999 [17]), Италии (M. Borri, C. Botasso, P. Mantegazza, 1992 [18]), Польше (W.A. Blajer, 1992 [19]), Швеции (H. Essén, 1992 [20]).

Активное использование множителей Лагранжа в научных исследованиях, проводимых С.А. Зегждой, М.П. Юшковым и их учениками В.Н. Вернигором, С.П. Кудаевым, Нгуен Тхи Чунг, Ш.Х. Солтахановым, В.П. Сысыком, Н.Г. Филипповым, Ю.С. Швердиным, а также С.В. Алмазовой, О.В. Алмазовым, А.Н. Антышевым, Е.С. Болгаром, И.Г. Георгиевым, И.Н. Дрозд, Е.С. Дроздом, Т.Н. Дударевой, Е.Ю. Леонтьевой, Ли Янь, Ю.Л. Никифоровой, Т.Н. Погребской, А.В. Смалем, Н.С. Смирновой, Л.Г. Федорченко, Н.А. Хорьковой, Т.В. Шалаевой, А.Е. Шевцовым, А.В. Шкондиным продолжаются и в настоящее время. Эти множители используются при изучении движения различных неголономных систем, при решении ряда задач динамики полета, а также при решении динамических задач теории упругости.

В заключение можно отметить, что Издательство Санкт-Петербургского университета в 2002 г. выпустило монографию С.А. Зегжды, Ш.Х. Солтаханова, М.П. Юшкова "Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики"[21], подытоживающую научные результаты Поляховской школы за 40 лет.

### Список литературы

1. ЦАГИ – основные этапы научной деятельности 1918 - 1968 гг. М.: Машиностроение. 1976. 352 с.
2. *Ветчинкин В.П., Поляхов Н.Н.* Теория и расчет воздушного гребного винта (Аэродинамика и прочность). М.: Оборонгиз. 1940. 520 с.
3. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости // Тр. Отделения физических наук общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. IX. Вып. 1. С. 10-16.
4. *Львович А.Ю.* Основы теории электромеханических систем. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1973. 196 с.

5. *Львович А.Ю.* Электромеханические системы. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1989. 296 с.
6. *Родюков Ф.Ф., Львович А.Ю.* Уравнения электрических машин. СПб.: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та. 1997. 272 с.
7. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985. 536 с.
8. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. Издание второе, переработанное и дополненное (под редакцией проф. П.Е. Товстика) М.: Высшая школа. 2000. 592 с.
9. *Зегжда С.А., Юшков М.П.* Геометрическая интерпретация уравнений Пуанкаре – Четаева – Румянцева // Известия РАН. ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 752-760.
10. *Зегжда С.А., Юшков М.П.* Применение уравнений Лагранжа первого рода при исследовании собственных колебаний вала с дисками // Известия РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 31-35.
11. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 4. С. 805-807.
12. *Зегжда С.А., Юшков М.П.* Смешанная задача динамики // Доклады РАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 628-630.
13. *Зегжда С.А., Филиппов Н.Г., Юшков М.П.* Уравнения динамики неголономных систем со связями высших порядков. III // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2000. Вып. 2 (№ 8). С. 61-72.
14. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Уравнения динамики как необходимые условия минимальности принуждения по Гауссу // Колебания и устойчивость механических систем / Прикладная механика. Вып. 5. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1981. С. 9-16.
15. *Storch J., Gates S.* Motivating Kane's method for obtaining equations of motion for dynamic systems // Journ. of Guidance, Dynamics and Control. 1989. V. 12. № 4. P. 593-595.
16. *Величенко В.В.* Матричные уравнения движения неголономных систем // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 499-504.
17. *Голубев Ю.Ф.* Основные принципы механики для систем с дифференциальными нелинейными связями // Второе Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами теоретической механики. Тезисы докладов. Москва, 11-16 октября 1999 г. С. 14-15.
18. *Borri M., Bottasso C., Mantegazza P.* Acceleration projection method in multi-body dynamics // European Journal of Mechanics. A/Solids. 1992. V. 11. № 3. P. 403-417.
19. *Blajer W.* A projection method approach to constrained dynamic analysis // ASME. Journ. Appl. Mech. 1992. V. 59. № 3. P. 643-649.

20. *Essén H.* Projecting Newton's equations onto non-coordinate tangent vectors of the configuration space; a new look at Lagrange's equations in terms of quasi-coordinates // 18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug. 22-28, 1992. Haifa, 1992. P. 52.
21. *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та. 2002. 276 с.

## **Устойчивость и бифуркация стационарных движений неголономных систем**

*А. В. Карпетян*

( avkarap@mech.math.msu.su )

Московский государственный университет, Россия

*Статья содержит краткий обзор работ, посвященных вопросам существования, устойчивости и ветвления стационарных движений консервативных неголономных систем.*

При исследовании вопросов существования, устойчивости и ветвления стационарных движений консервативных неголономных систем обычно используют два подхода [1–5]. В случае общего положения, когда стационарные движения консервативных неголономных систем соответствуют симметриям, которым не отвечают линейные первые интегралы (в отличие от консервативных голономных систем), используются методы Ляпунова – Малкина и Андронова – Хопфа (см. [1, 4–8]). Эти методы основаны на анализе уравнений возмущенного движения и характеристического уравнения линеаризованных уравнений возмущенного движения. Последнее всегда имеет нулевые корни, число которых не меньше размерности семейства стационарных движений, которому принадлежит невозмущенное стационарное движение. Если число нулевых корней равно указанной размерности, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение устойчиво, причем любое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, с течением времени асимптотически стремится к какому-либо стационарному движению рассматриваемого семейства, но, вообще

говоря, не к невозмущенному (согласно теории Ляпунова – Малкина). На границе области устойчивости (в пространстве параметров задачи) характеристическое уравнение имеет либо нулевой корень, либо пару чисто мнимых корней. В первом случае от невозмущенного стационарного движения ответвляются другие семейства стационарных движений, а во втором – семейства периодических движений (имеет место бифуркация Андронова – Хопфа).

Описанный подход исследования стационарных движений консервативных неголономных систем применим и в случае, если неголономные связи обладают так называемым "диссипативным" эффектом [6, 8, 9].

Второй подход к исследованию вопросов существования, устойчивости и ветвления стационарных движений неголономных систем основан на модифицированной теории Рауса – Сальвадори, Пуанкаре – Четаева и Смейла (см. [1-5, 10-12]) и применим в тех случаях, когда симметриям системы соответствуют не только стационарные движения, но и линейные первые интегралы; остановимся на нем подробнее. Сначала рассмотрим случай, когда линейные интегралы, соответствующие симметриям системы, известны в явном виде.

Пусть

$$H = H(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}) + a(\mathbf{r}) = h \quad - \quad (1)$$

полная механическая энергия системы, а

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{v}; \mathbf{r}) = \mathbf{V}^T(\mathbf{r}) \mathbf{v} + \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} = \text{const} \quad - \quad (2)$$

$k$ -мерный вектор линейных интегралов (значок  $t$  означает транспонирование).

Здесь  $\mathbf{v}$  –  $n$ -мерный вектор квазискоростей (в частности, импульсов или обобщенных скоростей),  $\mathbf{r} \in \mathbf{M}$  –  $m$ -мерный вектор определяющих координат, от которых зависят  $n \times n$ -матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  определительно-положительной квадратичной формы,  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  и скалярная функция  $a(\mathbf{r})$ , входящие в полную механическую энергию, а также  $n \times k$ -матрица  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  и  $k$ -мерный вектор  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  коэффициентов первых интегралов. Через  $\mathbf{M}$  обозначено конфигурационное пространство системы  $\dim \mathbf{M} \leq n$ .

Согласно теории Рауса, критическим точкам функции  $H$  на фиксированных уровнях первых интегралов  $\mathbf{K} = \mathbf{k}$  отвечают стационар-

ные движения, причем точкам минимума – устойчивые стационарные движения. Учитывая структуру функции (1) и первых интегралов (2), задачу отыскания критических точек данной функции на фиксированных уровнях указанных интегралов можно решать в два этапа. Сначала определяется единственный минимум функции  $H$  на фиксированных уровнях  $\mathbf{k}$  первых интегралов  $\mathbf{K} = \text{const}$  по переменным  $\mathbf{v}$  (при этом переменные  $\mathbf{r}$  рассматриваются как параметры):

$$\min_{\mathbf{v}} H \Big|_{\mathbf{K}=\mathbf{k}} = H(\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}); \mathbf{r}),$$

$$H(\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}); \mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} [(\mathbf{C}(\mathbf{r}) \mathbf{c}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{k}}) - (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}))] = W_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} = \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} - \mathbf{b}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = (\mathbf{B}^T(\mathbf{r}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}))^{-1},$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{C}(\mathbf{r}) \mathbf{c}_{\mathbf{k}} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

(здесь и далее предполагается, что  $\text{rank } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = k, \forall \mathbf{r} \in \mathbf{M}$ , т.е. интегралы независимы на всем конфигурационном пространстве). Функция  $W_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  называется эффективным потенциалом, который, очевидно, зависит от переменных  $\mathbf{r} \in \mathbf{M}$  и параметров  $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^k$ . Затем задача исследования стационарных движений системы сводится к задаче анализа эффективного потенциала.

**Теорема 1.** *Если эффективный потенциал принимает невырожденное стационарное значение в точке  $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{M}$ , то*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) -$$

*стационарное движение.*

Точка  $\mathbf{r}_0$ , доставляющая эффективному потенциалу стационарное значение, зависит от постоянных  $\mathbf{k}$  первых интегралов. Это означает, что стационарные в конфигурационном пространстве точки  $\mathbf{r}_0(\mathbf{k})$  образуют в пространстве  $\{\mathbf{k} \in \mathbf{R}^k, \mathbf{r} \in \mathbf{M}\}$   $k$ -параметрические семейства. Такие же семейства образуют в пространстве  $\{\mathbf{k} \in \mathbf{R}^k, \mathbf{r} \in \mathbf{M}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n\}$  стационарные в фазовом пространстве точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{k}), \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0)$ , т.е. стационарные движения.

Даже при фиксированных значениях постоянных  $\mathbf{k}$  эффективный потенциал  $W_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  может принимать стационарные значения не только в точке  $\mathbf{r}_0$ , но и, вообще говоря, в некоторых других точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ . Эти точки также зависят от постоянных  $\mathbf{k}$ . В общем случае семейства  $\mathbf{r}_0(\mathbf{k}), \mathbf{r}_1(\mathbf{k}), \mathbf{r}_2(\mathbf{k}), \dots$  могут иметь, при некоторых



значениях  $\mathbf{k}^*$  общие точки. Такие значения  $\mathbf{k}^*$  называются бифуркационными по Пуанкаре. Очевидно, соответствующие стационарные движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_k(\mathbf{r}_0)$  имеют общие точки, если и только если семейства  $\mathbf{r}_0(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{r}_1(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{r}_2(\mathbf{k})$ , ... имеют общие точки (см. (4)). Кроме того, по построению эффективного потенциала

$$\text{ind } \delta^2 H(\mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0)|_{(2)} = \text{ind } \delta^2 W_k(\mathbf{r}_0).$$

Последние обстоятельства позволяют упростить построение бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и ограничиться построением семейств  $\mathbf{r}_0(\mathbf{k}) \cup \mathbf{r}_1(\mathbf{k}) \cup \mathbf{r}_2(\mathbf{k}) \cup \dots$  в пространстве  $\{\mathbf{k}, \mathbf{r}\}$ .

Рассмотрим множество

$$\Sigma_{h,\mathbf{k}} = \{h \in \mathbf{R}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}^k : h = h_s(\mathbf{k}), s = 0, 1, 2, \dots\} \quad (5)$$

пространства  $\{h, \mathbf{k}\}$ , где  $h = h_s(\mathbf{k}) = H(\mathbf{v}_k(\mathbf{r}); \mathbf{r})$ ;  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s(\mathbf{k})$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

Множество  $\Sigma_{h,\mathbf{k}}$  называется бифуркационным по Смейлу: в нем происходят перестройки топологических типов областей возможности движения в конфигурационном пространстве, определяемых соотношением  $W_k(\mathbf{r}) \leq h$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbf{M}$ .

**Теорема 2.** *Если эффективный потенциал принимает локально строго минимальное стационарное значение при фиксированных значениях  $\mathbf{k}^0$  постоянных  $\mathbf{k}$  в точке  $\mathbf{r}_0(\mathbf{k}^0)$ , то  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{k}^0)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{k}^0)$  – устойчивое стационарное движение.*

**Теорема 3.** *Если индекс второй вариации эффективного потенциала нечетен в точке  $\mathbf{r}_0(\mathbf{k}^0)$ , то  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{k}^0)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{k}^0)$  – неустойчивое стационарное движение.*

Теоремы 1-3 следуют из теории Рауса – Сальвадори [1-3] и отвечают специальному виду первых интегралов (1), (2).

**Замечание.** Если для некоторых  $\mathbf{r}^0 \in \mathbf{M}$  имеем  $\text{rank } \mathbf{B}(\mathbf{r}) < k$ , то построение эффективного потенциала в окрестности точки  $\mathbf{r}^0$  требует отдельного обсуждения [13].

Приведенные результаты применялись к исследованию вопросов существования, устойчивости и ветвления стационарных движений тяжелого неоднородного динамически симметричного шара на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости [11, 14, 15].

Отметим, что описанная методика исследования применима для анализа стационарных движений консервативных неголомомных си-

стем Чаплыгина, допускающих линейные интегралы не только известные, но и неизвестные [10, 12] в явном виде. Дело в том, что уравнения движения таких систем при наличии  $k$ -параметрической группы симметрий и отсутствии "диссипативного" эффекта (иначе линейные интегралы вообще не существуют) можно привести к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{r}} - \frac{DW}{D\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  –  $m$ -мерный вектор определяющих координат,  $\mathbf{p}$  –  $k$ -мерный вектор импульсов псевдоциклических координат,  $2T = (\mathbf{D} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})$ , где  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r})$  – симметричная  $m \times m$ -матрица определенно положительной квадратичной формы,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})$  – кососимметрическая  $m \times m$ -матрица,  $W = W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  – "эффективный" потенциал,  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  –  $k \times m$ -матрица, линейно зависящая от  $\mathbf{p}$ ,

$$\frac{D}{D\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{\Gamma}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}.$$

Очевидно, уравнения (6) допускают обобщенный интеграл энергии

$$H = T + W = \text{const}. \quad (7)$$

Пусть  $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  –  $m$ -мерный вектор, составленный из элементов  $\alpha$ -ой строки матрицы  $\mathbf{\Gamma}$ , где  $\alpha = 1, \dots, k$ . Если

$$\left( \frac{D\gamma_\alpha}{D\mathbf{r}} \right)^T = \frac{D\gamma_\alpha}{D\mathbf{r}}, \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

то система  $km$  уравнений в частных производных  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  вполне интегрируема и допускает семейство решений  $\mathbf{p} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}) \mathbf{k}$ , зависящее от  $k$  произвольных постоянных  $\mathbf{k}$ , причем определитель  $k \times k$ -матрицы  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$  не равен нулю. Последнее означает, что система (6) кроме обобщенного интеграла энергии (7) допускает  $k$  линейных интегралов

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{p} = \mathbf{k} = \text{const}. \quad (8)$$

Несмотря на то, что явный вид этих интегралов неизвестен, общая теория Рауса – Сальвадори позволяет утверждать, что стационарные значения интеграла (7) на фиксированных уровнях интегралов (8) соответствуют стационарным движениям

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \quad (9)$$

системы (6), причем локально строго минимальные значения - устойчивым стационарным движениям. Очевидно, стационарные движения (9) образуют  $k$ -параметрическое семейство, поскольку  $k + m$  постоянных  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{p}_0$  в (9) удовлетворяют системе  $m$  уравнений

$$\frac{DW}{D\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Функция  $H$  имеет минимум на стационарном движении (9) при условиях (8), если при этих условиях функция  $W$  имеет минимум в точке  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ . Последнее заведомо имеет место, если все собственные значения матрицы  $D^2W/D\mathbf{r}^2$  положительны в точке  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ . Если же определитель матрицы (11) отрицателен в точке  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ , то стационарное движение (9) неустойчиво. Очевидно, для составления уравнений (10) и матрицы (11) знать явный вид первых интегралов (8) не обязательно. Существование и структура этих интегралов позволяют использовать теорию Рауса – Сальвадори и обоснованно утверждать об устойчивости стационарного движения (9) при положительности всех собственных значений матрицы (11), заведомо симметричной при выполнении условий симметричности матриц  $D\gamma_\alpha/D\mathbf{r}$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ .

Однако, для построения бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева и Смейла необходимо знать решение системы (8)-(10) в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\mathbf{k})$  и значения  $h = h(\mathbf{k}) = W(\mathbf{r}_0(\mathbf{k}), \mathbf{p}_0(\mathbf{k}))$  соответственно, а для этого необходимо знать первые интегралы (8) в явном виде (пусть даже в специальных функциях, а не в элементарных, как в задаче о движении динамически симметричного шара по абсолютно шероховатой плоскости). В задаче о движении круглого диска по абсолютно шероховатой плоскости эти первые интегралы известны в виде гипергеометрических рядов Гаусса. Это обстоятельство позволило [16, 17] дать полное исследование задачи о стационарных качениях диска по горизонтальной плоскости.

### Список литературы

1. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998.
2. *Karapetyan A. V., Rumyantsev V. V., et al.* Modern Methods of Analytical Mechanics and Applications. Wien-New York: Springer-Verlag. 1998.

3. *Карпетян А.В.* Инвариантные множества механических систем. // Нелинейная механика. М.: Физматлит. 2001. С. 62-88.
4. *Карпетян А.В., Кулешов А.С.* Стационарные движения неголономных систем. // Неголономные механические системы. М.-Ижевск: ИКИ. 2002. С. 247-295.
5. *Karapetyan A.V., Kuleshov A.S.* Steady motions of nonholonomic systems // Regular & Chaotic Dynamics. 2002. V. 7. № 1. P. 81-117.
6. *Карпетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 418-426.
7. *Каленова В.И., Морозов В.М.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 192-199.
8. *Карпетян А.В.* Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 19-24.
9. *Карпетян А.В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 808-814.
10. *Карпетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 45-52.
11. *Карпетян А.В.* О специфике применения теории Рауса к системам с дифференциальными связями // ПММ. Т. 58. Вып. 3. С. 17-22.
12. *Карпетян А.В.* О теореме Рауса для систем с неизвестными первыми интегралами // Сб. научно - метод. статей по теор. мех. 2000. Вып. 23. С. 45-53.
13. *Karapetyan A.V.* On construction of the effective potential in singular cases // Regular & Chaotic Dynamics. 2000. V. 5. № 2. P. 219-224.
14. *Кулешов А.С.* К динамике волчка на шероховатой плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 1999. С. 130-140.
15. *Кулешов А.С.* Об обобщенном интеграле Чаплыгина // Вестник молодых ученых. Сер. Прикл. мат. и мех. 2000. № 4. С. 26-30.
16. *Кулешов А.С.* О стационарных движениях диска на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 797-800.
17. *Кулешов А.С.* О стационарных качениях диска на шероховатой плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 173-175.

## Комплексная нелинейная упругость (теория и приложения)

К. Ф. Черныш

(chernykh@apmath.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*Новый век*, не говоря уже о тысячелетии, *будет нелинейным*. Так что при рассмотрении актуальных проблем механики и физики тела необходимо использовать общий нелинейный подход. Большой вклад в нелинейную механику внес академик Валентин Валентинович Новожилов — мой учитель.

Знакомство с публикациями по нелинейной теории упругости и попытки рассмотрения ряда реальных задач привели к мысли создать *предельно простую* (но без потери общности) *версию нелинейной теории упругости*, дающую возможность получать точные решения нелинейных двумерных задач механики и физики твердого тела, (количественно, да и качественно) отличающиеся от своих линейных аналогов. Для этого на протяжении многих лет прежде всего был рассмотрен *ряд общих вопросов теории*. Так:

– Был развит *комплексный метод*, позволяющий придать основным зависимостям теории простой, обзримый вид, подсказывающий возможные пути преобразований. В некотором смысле он является аналогом векторного метода, но в отличие от последнего позволяет, помимо рассмотрения теоретических вопросов, доводить решение конкретных задач до конца (до числа). Здесь был предложен простой, чисто алгебраический *метод расчленения граничных условий и условий сопряжения*, альтернативный методу интегралов типа Коши, применимый и в случаях отсутствия функций Гурса — Колосова. Введением силовых и деформационных разрешающих функции общая задача нелинейной упругости расчленена на две. Первая (основная) состоит в нахождении разрешающих функций из замкнутой системы уравнений, сформулированной в терминах этих функций (уравнения равновесия, закон упругости, граничные условия, условия сопряжения). Более простая, вторая задача состоит в определении по найденным разрешающим функциям остальных, интересующих нас величин.

– Рассмотрены *новые типы граничных условий и условий сопряжения* (дисторсионные, деформационные, термодинамические,

условия с проскальзыванием), формулируемые в терминах разрешающих функций и функций комплексной переменной и более удобные для практического использования, чем традиционные условия.

– Введены *новые законы упругости* (редуцированный стандартный, для малосжимаемых материалов, гибридный, типа неогукковского), которым, в основном, и было "обязано" появление точных решений двумерных проблем.

– Предложены новые, *предельно простые версии двумерных проблем*: унифицированная плоская задача, обобщенная антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения, кирхгофская и уточненные теории оболочек.

– Рассмотрены *анизотропные и армированные среды*. Полученные здесь сравнительно простые нелинейные зависимости способствовали появлению унифицированных точных решений задач для кристаллических сингоний и текстур.

– Развита *метод нелинейных комплексных инвариантных интегралов* (J-интегралов), примененный, в частности, при рассмотрении разрушения областей с угловыми точками и жесткими включениями, а также при выводе термодинамического граничного условия на межкристаллитных и межфазных границах.

Прделанное дало возможность получать *точные* аналитические решения *двумерных нелинейных краевых задач*. При этом основное внимание было уделено рассмотрению сингулярных проблем (хрупкое разрушение, сосредоточенные силы и моменты, дислокации и дисклинации, физическая мезомеханика). Была выяснена *непригодность* для их рассмотрения *истинных напряжений* (напряжений Коши), обладающих многочисленными недостатками. От выявленных недостатков свободны *условные напряжения* (симметричные напряжения Био).

Развитый математический аппарат использован для нелинейного рассмотрения трех *сингулярных проблем*:

1) *Теория трещин (хрупкое разрушение)*. Здесь нелинейный подход позволил выявить *область обоснованного применения линейной теории*. Получены существенно отличные от своих линейных аналогов результаты:

- *совпадение критериев разрушения Ирвина и Эрдогана-Си,*
- *отсутствие излома трещины смешанного типа,*
- *уточнение критерия хрупкого разрушения,*

— качественно иное распределение напряжений в окрестностях сингулярных точек,

— уточнение дискретного критерия разрушения и т. д.

2) *Теория дефектов в кристаллах.* Здесь получены качественно новые результаты в следующих проблемах:

— нелинейное рассмотрение дислокаций и дисклинаций,

— взаимодействие дислокаций с границей области, с трещиной и между собой;

— решение двумерных задач при двойниковых, межкристаллитных и межфазных границах.

3) *Сосредоточенные силы и моменты.* Здесь выявлены:

— нелинейные сингулярности сил и моментов в плоской задаче и при антиплоской деформации.

— Основное внимание уделено рассмотрению обобщенной задаче Фламана, решенной единообразным путем для границ общего вида. Выявлена нелинейная статико-геометрическая аналогия, дающая возможность при известном решении для сосредоточенной силы выписывать решение соответствующей задачи для краевых дислокаций, и наоборот. Так, задаче Фламана отвечает задача о ступеньке дислокации на произвольной границе в кристалле.

Во всех сингулярных проблемах (как правило), в отличие от условных, не применимы истинные напряжения. Использование нелинейного подхода приводит к результатам, количественно и даже качественно отличным от своих линейных аналогов. Наряду с отысканием точных решений большое внимание уделяется (применительно к общему нелинейному подходу) использованию модифицированных методов граничных и конечных элементов. В настоящее время основное внимание автор уделяет рассмотрению нелинейных двумерных проблем физической мезомеханики: двойникового кристаллов и мартенситных превращений (с учетом нелинейной анизотропии). На примере плоской задачи продемонстрируем преимущества и возможности предложенного подхода.

**1. Основные комплексные зависимости плоской задачи.** В нелинейной плоской задаче теории упругости широко используются комплексные координаты, дифференцирование по ним и ком-

плескные компоненты векторов и тензоров:

$$\begin{aligned}\zeta &= x_1^\circ + ix_2^\circ, \bar{\zeta} = x_1^\circ - ix_2^\circ, x_3^\circ, \quad z = x_1 + ix_2, \bar{z} = x_1 - ix_2, x_3, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ &\quad (u_1 + iu_2), \quad (u_1 - iu_2), \quad u_3, \\ T_1 &= t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}), T_3 = t_{33}.\end{aligned}$$

Здесь  $x_i^\circ, x_i$  – координаты материальной точки до и после деформации,  $u_i$  – компоненты вектора, а  $t_{ij}$  – компоненты тензора. Ниже символом  $^\circ$  снабжаются величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела.

Плоская деформация определяется зависимостями

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda x_3^\circ \quad (\lambda = \text{const}). \quad (1)$$

Силые разрешающие функции (комплексные номинальные напряжения)

$$\frac{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1}{2}, \quad \frac{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2}{2}, \quad \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33} \quad (2)$$

связаны с отвечающими (сопряженными) им разрешающими комплексными дисторсионными функциями

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ} = \lambda \quad (3)$$

комплексно-градиентальными зависимостями – нелинейным законом упругости –

$$\begin{aligned}\frac{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1}{2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \zeta)}, \quad \frac{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \bar{\zeta})}, \\ \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}.\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Phi = \Phi\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}, \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}, \lambda\right)$  – плотность энергии деформации. При этом ее аргументы входят в комбинациях, инвариантных для рассматриваемого класса материалов, изотропных [1] и анизотропных [12]. В [1,3] приведены соотношения для несжимаемого материала.



Имеют место и обратные, также комплексно-градиентальные зависимости

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 = \frac{\partial \Psi}{\partial (\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1/2)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial \Psi}{\partial (\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2/2)},$$

$$\lambda = \frac{\partial \Psi}{\partial \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33}}. \quad (5)$$

Здесь

$$\Psi = \Psi\left(\frac{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1}{2}, \frac{\overline{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1}}{2}, \frac{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2}{2}, \frac{\overline{\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2}}{2}, \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33}\right),$$

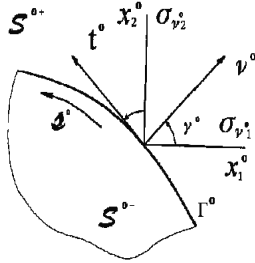


Рис. 1.

– плотность дополнительной энергии. Соотношения (2)-(3) являются одним из проявлений (по терминологии автора) нелинейной комплексной статико-геометрической аналогии. Адекватными к введенным разрешающим функциям являются (рис. 1): уравнение равновесия (единственное !)

$$\frac{\partial \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2}{\partial \zeta} + \rho^0 (f_1 + i f_2) = 0, \quad (6)$$

( $\rho^0$  – плотность недеформированного материала,  $f_1, f_2$  – массовые силы),

силовые граничные условия (рис. 1)

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^0} + \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^0} &= \\ &= 2(\sigma_{\nu^0 1}(s^0, x_3^0) + i\sigma_{\nu^0 2}(s^0, x_3^0)) = \\ &= 2(\sigma_{\nu^0 \nu^0}(s^0, x_3^0) + i\sigma_{\nu^0 t^0}(s^0, x_3^0)) e^{i\gamma^0}, \end{aligned} \quad (7)$$

дисторсионное граничное условие

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^0} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^0} = -i \frac{dz(s^0, x_3^0)}{ds^0}, \quad (8)$$

частным случаем которого является условие жесткого края

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right) e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^\circ} = 0. \quad (9)$$

В случае многосвязной области условие жесткого края отличается от условия заделки возможностью поступательного смещения частичных контуров как жестких целых. В односвязной же области дисторсионные граничные условия (условия жесткого края), существенно не отличаясь от геометрического граничного условия (условия заделки) более удобны для практического использования, будучи сформулированными в терминах разрешающих дисторсионных величин. Использование дисторсионных граничных условий позволяет унифицировать решения задач с геометрическими и силовыми граничными условиями.

На границе  $\Gamma^\circ$ , разделяющей области  $S^-$  и  $S^+$  (рис. 1), имеют место силовое условие сопряжения

$$\left(\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^\circ} + \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^\circ}\right)^+ = (\bullet)^- \quad (10)$$

и дисторсионное условие сопряжения

$$\left(\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right) e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^\circ}\right)^+ = (\bullet)^-. \quad (11)$$

Последнее имеет те же преимущества перед традиционным геометрическим условием ( $z^- = z^+$ ), что и перечисленные выше. Кроме того, дисторсионное условие сопряжения, будучи нечувствительным к смещению вдоль прямолинейной линии сопряжения, более предпочтительно по сравнению с используемым в физике твердого тела условием на границе с проскальзыванием (*slipping interface*) [11, 12].

Далее, выражения

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\bar{\partial} z}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\bar{\partial} z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\bar{\partial} z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i2\gamma^\circ} - \frac{\bar{\partial} z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i2\gamma^\circ}\right)^- = (\bullet)^+, \\ &\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} e^{i2\gamma^\circ} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{\zeta}^2} e^{-i2\gamma^\circ} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^\circ} + \frac{\bar{\partial} z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^\circ}\right) \frac{d\gamma^\circ}{ds^\circ}\right)^- = (\bullet)^+ \end{aligned} \quad (12)$$

являются деформационными условиями сопряжения, обеспечивающими непрерывность удлинения и кривизны общей границы сопрягаемых областей. Они допускают уже перемещение и поворот границы как жесткого целого и, тем самым, позволяют, например, рассматривать взаимные перемещения и развороты кристаллитов, зерен.

Наконец, в физической мезомеханике на границе областей с разными упругими свойствами используется т.н. интегральное термодинамическое условие сопряжения [10-12]. Полученная автором (без использования теории скачков Адамара) версия этого условия (с оригинальным химическим потенциалом) имеет вид

$$\int_{\Gamma^{\circ}} \left[ \Phi e^{i\gamma^{\circ}} - \sigma_{\nu^{\circ}} \frac{\bar{\partial}z}{\partial\zeta} - \bar{\sigma}_{\nu^{\circ}} \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}} \right]^{-} ds^{\circ} = \int_{\Gamma^{\circ}} [\bullet]^{+} ds^{\circ}, \quad (13)$$

где  $\sigma_{\nu^{\circ}} = \sigma_{\nu^{\circ}1} + i\sigma_{\nu^{\circ}2}$ , и  $\sigma_{\nu^{\circ}1}, \sigma_{\nu^{\circ}2}$  – компоненты вектора напряжений, отнесенные к (недеформированной) границе  $\Gamma^{\circ}$  (рис. 1 и (5)).

После нахождения, с помощью приведенных выше статико-геометрических зависимостей и законов упругости (о которых будет сказано ниже), разрешающих функций комплексные компоненты тензора условных напряжений (симметричного тензора Био) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{\circ} &\equiv \sigma_{11}^{\circ} + \sigma_{22}^{\circ} = \operatorname{Re} \left\{ \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\bar{\partial}z}{\partial \zeta} \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1 \right\}, \\ \sigma_{33}^{\circ} &= \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33}, \\ \Sigma_2^{\circ} &\equiv \sigma_{11}^{\circ} - \sigma_{22}^{\circ} + i2\sigma_{12}^{\circ} = \frac{\bar{\partial}z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2. \end{aligned}$$

**2. Два нелинейных закона упругости.** Рассмотрим два закона упругости, допускающие получение точных решений краевых двумерных задач. В работах автора были предложены модели: редуцированный стандартный материал и малосжимаемый материал, опробованные в многочисленных задачах механики и физики твердого тела [1]. Применимому для рассмотрения геометрически нелинейных задач *редуцированному стандартному материалу* отвечает упругий потенциал [11,12]

$$\Phi = \sigma^* \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) \overline{\left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)} + \alpha \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\bar{\partial}z}{\partial \zeta} + \gamma (\lambda - 1)^2 \quad (14)$$

где  $\sigma^*$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  – упругие постоянные. Для сжимаемого материала имеют место следующие основные зависимости:

$$\begin{aligned} z - \zeta &= \int \Phi(\zeta) d\zeta + \int \overline{\Psi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 = \Phi(\zeta), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \bar{\Psi}(\bar{\zeta}) = \overline{\Psi(\zeta)}, \\ \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1 &= 2\sigma^* \Phi(\zeta), \quad \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2 = 2\alpha \overline{\Psi(\zeta)}, \\ \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33} &= 2\gamma(\lambda - 1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1^\circ &\equiv \sigma_{11}^\circ + \sigma_{22}^\circ = 2\sigma^* \left[ |\Phi(\zeta) + 1| - \frac{(\Phi(\zeta) + 1) + \overline{(\Phi(\zeta) + 1)}}{2|\Phi(\zeta) + 1|} \right], \\ \Sigma_2^\circ &\equiv \sigma_{11}^\circ - \sigma_{22}^\circ + i2\sigma_{12}^\circ = 2\alpha \frac{\overline{(\Phi(\zeta) + 1)}}{|\Phi(\zeta) + 1|} \overline{\Psi(\zeta)}, \quad \sigma_{33} = 2\gamma(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Имеют место силовое и дисторсионное граничные условия, а также условие жесткого края:

$$\sigma^* \Phi(\zeta) e^{i\gamma^\circ} + \alpha \overline{\Psi(\zeta) e^{i\gamma^\circ}} = [\sigma_{\nu^\circ 1}(s^\circ) + i\sigma_{\nu^\circ 2}(s^\circ)], \quad (16)$$

$$(\Phi(\zeta) + 1) e^{i\gamma^\circ} - \overline{\Psi(\zeta) e^{i\gamma^\circ}} = -i \frac{dz(s^\circ)}{ds^\circ}, \quad (17)$$

$$\Phi(\zeta) e^{i\gamma^\circ} - \overline{\Psi(\zeta) e^{i\gamma^\circ}} = 0. \quad (18)$$

Существенно, что при нелинейности задачи в целом, однотипные граничные условия (16)–(18) линейны относительно функций Гурса – Колосова. К ним применимы все известные методы решения задач линейной плоской задачи. При достаточно больших значениях  $|\zeta|$  в представлениях

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \Phi_0(\zeta), \quad \Phi_0(\zeta) = \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \frac{a_{-3}}{\zeta^3} + \dots, \\ \Psi(\zeta) &= b_0 + \frac{b_{-1}}{\zeta} + \Psi_0(\zeta), \quad \Psi_0(\zeta) = \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \frac{b_{-3}}{\zeta^3} + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

обеспечивающих конечность деформаций и напряжений в бесконечной области, не содержащей точки  $\zeta = 0$ , имеем при отсутствии поворота на бесконечности;

$$a_0 = \frac{\Sigma_1^{\circ\infty}}{2\sigma^*} = \frac{\sigma_{11}^{\circ\infty} + \sigma_{22}^{\circ\infty}}{2\sigma^*}, \quad b_0 = \frac{\bar{\Sigma}_2^{\circ\infty}}{2\alpha} = \frac{\sigma_{11}^{\circ\infty} - \sigma_{22}^{\circ\infty} - i2\sigma_{12}^{\circ\infty}}{2\alpha}, \quad (20)$$

$$a_{-1} = \frac{\mathcal{F} - i\alpha b e^{i\theta_\wedge}}{2\pi(\sigma^* + \alpha)}, \quad b_{-1} = \frac{\bar{\mathcal{F}} - i\sigma^* b e^{-i\theta_\wedge}}{2\pi(\sigma^* + \alpha)}, \quad \text{Im } b_{-2} = -\frac{\mathcal{M}_3}{2\pi\alpha}. \quad (21)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^\infty$  – значения условных напряжений на бесконечности,  $b_1, b_2$  – параметры Бюргера краевой дислокации,  $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$  – величина вектора Бюргера,  $\theta_\wedge$  – угол, определяющий его направление;  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + i\mathcal{F}_2$ , где  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  – сосредоточенные силы, и  $\mathcal{M}_3$  – момент.

Большинство конструкционных материалов (если не рассматривать пористые и ячеистые) малосжимаемы. Это дает возможность предложить довольно общую модель малосжимаемого материала, учитывающую общую (геометрическую и физическую) нелинейность. Во многих случаях удается получить решения нелинейных краевых задач в конечном виде. Малосжимаемому материалу отвечает упругий потенциал

$$\Phi = \frac{E}{1+\nu} \left[ \alpha(J-1) + \varphi\left(\left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|, \lambda\right) \right], \quad (22)$$

в котором  $\alpha$  – постоянная. В силу предположенной малой сжимаемости материала, определяющая сжимаемость величина  $(J-1) = \lambda(|\partial z/\partial \zeta|^2 - |\partial z/\partial \bar{\zeta}|^2) - 1$  учитывается простейшим (линейным) образом. Второе слагаемое определяет, в основном, деформацию сдвига. В рассматриваемом случае [11,12]:

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1 &= \frac{E}{1+\nu} \left[ 2\alpha\lambda + \frac{\Omega}{|\partial z/\partial \zeta|} \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{E}{1+\nu} \left[ 2\alpha\lambda \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right| + \Omega \right] e^{i\omega} \\ \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_2 &= -\frac{E}{1+\nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \\ \{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \alpha \left( \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right|^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1^c &\equiv \sigma_{11}^c + \sigma_{22}^c = \frac{E}{1+\nu} \left[ 2\alpha\lambda \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right| + \Omega \right], \\ \Sigma_2^c &\equiv \sigma_{11}^c - \sigma_{22}^c + i2\sigma_{12}^c = -\frac{E}{1+\nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\omega}, \\ \sigma_{33}^c &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \alpha \left( \left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|^2 - \left|\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right|^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

В приведенных зависимостях

$$\Omega(|\partial z/\partial \zeta|, \lambda) = \frac{\partial \varphi(|\partial z/\partial \zeta|, \lambda)}{\partial |\partial z/\partial \zeta|}, \quad e^{i\omega} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \quad (25)$$

Эти зависимости справедливы для любого изотропного и анизотропного материала. Необходимо только, чтобы аргументы функции  $\varphi()$  были инвариантами рассматриваемого материала, формулируемыми в терминах величин  $|\partial z/\partial \zeta|, \lambda$ . Отметим, что все перечисленные зависимости формулируются в терминах использованных разрешающих функций и "органически" вписываются в предложенную комплексную версию. Во многих случаях они могут быть записаны через "большие" функции Гурса – Колосова. Читатель, знакомый с нелинейной теорией упругости, не может не отметить компактность и даже "элегантность" выписанных зависимостей. Для иллюстрации возможностей и целесообразности использования описанного подхода ограничимся рассмотрением лишь двух — контрастных задач.

**3. Взаимодействие краевых дислокаций.** В линейной теории дислокаций при рассмотрении взаимодействия параллельных краевых дислокаций используется (рис. 2) (записанное нами в более удобном комплексном виде) выражение Пича – Келлера (см.(21))

$$F_t + iF_n = -i\frac{b}{2} \left[ \overline{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i2\theta_\Lambda} \right].$$

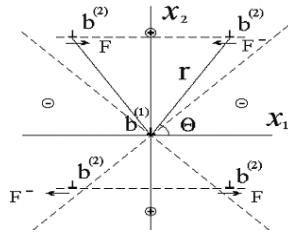


Рис. 2.

Здесь действующая на дислокацию сила скольжения — вдоль линии скольжения, а поперечная сила — сила переползания (на соседние линии скольжения). На рис. 2 рассмотрен случай  $\theta_\Lambda = 0$ , т.е. линии скольжения параллельны оси абсцисс.

Применительно к нелинейной теории автор получил следующий нелинейный аналог закона Пича – Келлера:

$$F_t + iF_n = -i\frac{b}{2} \left[ \overline{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i2\theta_\Lambda} \right].$$

Рассмотрим взаимодействие двух параллельных дислокаций одного знака. Одна дислокация расположена в начале координат, другая в произвольной точке плоскости. Линейная теория приводит к

следующему классическому результату [1]: дислокации притягиваются в случае нахождения второй дислокации в секторе, прилегающем к оси ординат и отталкиваются в случае ее нахождения в прилегающем к оси абсцисс. Нелинейная теория приводит к другому, более "физичному" результату: дислокации одного знака отталкиваются на всей плоскости (за исключением ядра дислокации, где, как известно, теряет силу гипотеза сплошности).

**4. Обобщенная теорема Эшелби.** Рассмотрим плоскость (матрицу), в которой имеется (деформируемое) включение. Пусть матрица (до деформации) конформно отображается на внутренность единичного круга комплексной плоскости функцией  $\zeta = \kappa(\chi) = R[\chi^{-1} + \kappa_0(\chi)]$ ,  $\kappa_0(\chi) = c_1\chi + \dots + c_n\chi^n$ .

Материалы матрицы и включения считаем произвольными (не обязательно упругими). Пусть скорость роста разрешающих функций включения характеризуется при равенствами

$$\{F^{-1} \bullet J\Sigma\}_1^-(\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_1}), \quad \{F^{-1} J\Sigma\}_2^-(\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_2}),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right)^-(\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_3}), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^- = O(|\zeta|^{p_4}), \quad (p_i > 0),$$

и матрица нагружена на бесконечности.

Имеют место отвечающие равенству [10,12]

$$p = n - 1, \quad (p = \max\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) \quad (26)$$

**прямая и обратная теоремы Эшелби:** во включении эллиптической формы ( $n = 1$ ) реализуется однородное напряженно-деформированное состояние ( $p=0$ ) и, обратно, однородное напряженно-деформированное состояние включения определяет его эллиптическую форму.

Из равенства (26) усматривается также, что чем больше показатель роста деформации (постоянная  $p$ ), тем "извилистей" контур включения (больше постоянная  $n$ ), и обратно. Увеличение "извилистости" контура влечет увеличение степени роста разрешающих функций. Отметим также, что проделанные преобразования проведены без потери общности. При введении функциональных связей между разрешающими функциями (уравнения состояния) появляются дополнительные связи между геометрическими и жесткостными величинами матрицы и включения. Подробно о включениях в матрицу, рассматриваемых в механике и физической мезомеханике, сказано в [7,8,10,12].

Отметим в заключение, что предложенный подход может быть использован и при рассмотрении проблем неупругости, в том числе при рассмотрении больших деформаций упруго-пластической среды.

#### Список литературы

1. *Черных К.Ф.* Нелинейная сингулярная упругость. Часть 1. Теория. СПб., 1999. 276 с.; Часть 2. Приложения. 195 с.
2. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 366 с.
3. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
4. *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1988. 190 с.
5. *Черных К.Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996. 288 с.
6. *Chernykh K.F.* An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity. N.Y.: Begell Publishing House, 1998. 282 p.
7. *Черных К.Ф.* Несколько замечаний к задаче Эшелби // МТТ, 1994. № 4. С. 47-49.
8. *Черных К.Ф.* О большеугольных границах (плоская задача) // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела, 2000. Вып. 3. С. 14-34.
9. *Черных К.Ф.* Нелинейная плоская задача и ее применение к физически и геометрически нелинейной механике трещин // Успехи механики, 1989. Т. 12. Вып. 4. С. 51-75.
10. *Черных К.Ф.* На подступах к нелинейной физической мезомеханике // Физическая мезомеханика, 2002. Т. 5, № 2. С. 5-15.
11. *Черных К.Ф.* Нетрадиционные граничные условия (плоская задача нелинейной теории упругости) // МТТ, 2002. № 4, С. 5-15.
12. *Черных К.Ф.* Комплексная нелинейная теория упругости // Успехи механики, 2002. Т. 1. № 4. С. 121-161.



# Секция I.

## Теоретическая и прикладная механика

### О вынужденных колебаниях динамических систем

*В. Г. Веретенников, П. С. Красильников, В. А. Синицын*  
(kras@k804.mainet.msk.su)

Московский авиационный институт, Россия

*Известный в механике несвободных систем принцип освобожденности от связей распространяется на динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями при наличии ограничений на фазовые координаты. Формулируется критерий идеальности реакций связей. Получено общее уравнение движения динамических систем с идеальными связями, частным случаем которых являются системы с производными высших порядков [1] и системы Н.Г. Четаева [2]. В качестве примера рассматривается задача о выборе порождающих уравнений в динамической системе Лоренца (Lorenz E.N.).*

**1. Введение.** В современных проблемах нелинейной динамики, как правило, рассматриваются динамические системы, не содержащие каких-либо условий на положение изображающей точки в фазовом пространстве. Однако в последнее время внимание многих математиков сосредоточено на алгебро-дифференциальных уравнениях (ADE), содержащих ограничения на фазовые координаты [3]. Примером таких систем являются уравнения Лагранжа 1-го рода, записанные в избыточных координатах с ограничениями в виде голономных связей. С их помощью описывают движения механических систем, состоящих из большого числа твердых тел, когда введение обобщенных координат проблематично. Алгебро-дифференциальные уравнения находят применение в некоторых за-

дачах моделирования, когда исходная система большой размерности расчленяется на подсистемы меньшей размерности, а взаимосвязь между подсистемами описывается алгебраическими уравнениями.

**2. Принцип освобожденности от связей. Реакции идеальных связей.** Предположим, что закон движения динамической системы задан обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$  — вектор фазовых координат,  $\mathbf{f}$  — достаточно гладкая вектор-функция своих аргументов.

Систему (1) будем называть *свободной*, если нет дополнительных ограничений на область изменения вектора  $\mathbf{x}$ . Если движение системы вынуждено подчиняться дополнительным ограничениям вида

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — гладкая, регулярная функция, то динамическую систему будем называть *несвободной*.

Очевидно, что фазовая скорость  $\dot{\mathbf{x}}$  свободной системы отличается от фазовой скорости несвободной системы, поэтому связь (2) вызывает появление дополнительного слагаемого  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  в правой части уравнений (1), которое будем трактовать как реакцию связи (2).

Отсюда следует, что закон движения несвободной системы должен иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Если предположить, что реакция  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  найдена, то движение несвободной системы можно рассматривать как движение свободной системы, освобожденной от ограничений (2). Последние описывают интегральное многообразие уравнений (3). В этом состоит принцип освобожденности от связи, хорошо известный в том случае, когда уравнение (1) описывает движение механической системы с конечным числом степеней свободы. Движение системы, описываемой уравнениями (3), будем называть *вынужденным*.

Уточним понятие реакции  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  связи (2), следуя представлениям и методам классической механики. Известно, что реакции  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ , рассматриваемые как объективные воздействия, появляются в уравнениях движения механических систем, содержащих лишь высшие

производные координат. Таковыми являются уравнения Лагранжа относительно обобщенных скоростей, уравнения Гамильтона относительно обобщенных импульсов. Поэтому будем предполагать, что согласно свойствам системы, реакции изменяют составляющие фазовой скорости некоторых отмеченных координат  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$  ( $m < n$ ) — их можно без ограничения общности считать совпадающими с первыми  $m$  фазовыми координатами. Соответствующий вектор реакции имеет вид  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^*(\mathbf{x}), 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{r}^*(\mathbf{x}) = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ . Так, если в системе некоторые фазовые координаты являются производными по времени от других координат, то реакции вводятся только лишь в уравнения с производной наиболее высокого порядка. Если же динамическая система содержит механическую подсистему, то реакциями в этой подсистеме будут обобщенные силы, отвечающие реальным реакциям связи и удовлетворяющие указанным выше условиям.

Система уравнений (3) требует доопределения, относящегося к проблеме вычисления связей. Дело в том, что вектор  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  определяется, вообще говоря, неоднозначно. Чтобы избежать этой неоднозначности, воспользуемся, как в аналитической механике, понятием идеальных связей. Связи будем называть *идеальными*, если виртуальная работа реакций связи на любых виртуальных перемещениях системы из текущего состояния равна нулю. С учетом особенности представления реакции  $\mathbf{r}^*(\mathbf{x})$  условие идеальности примет вид

$$\mathbf{r}^*(\mathbf{x}) \circ \delta \mathbf{x}^* = 0, \quad \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*). \quad (4)$$

Здесь  $\delta \mathbf{x}^*$  есть вектор виртуальных смещений в фазовом пространстве, удовлетворяющий уравнению

$$\varphi'_{\mathbf{x}^*} \circ \delta \mathbf{x}^* = 0. \quad (5)$$

Заметим, что варьирование вектора  $\mathbf{x}^*$  можно рассматривать как обобщение известной в механике процедуры варьирования по Гауссу, в соответствии с которой уравнение для виртуальных перемещений содержит неизменными те фазовые координаты, в уравнения которых реакции не входят.

Реакция связи (2) — в предположении, что связь является идеальной — представляется с помощью неопределенного множителя  $\lambda$

в виде  $\mathbf{r}^* = \lambda \varphi'_{\mathbf{x}^*}$ . Множитель  $\lambda$  находится из уравнения, получаемого путем дифференцирования уравнения связи с последующей подстановкой в него уравнений несвободного движения.

**3. Общее уравнение динамических систем.** С учетом свойства идеальности и уравнений (5) будем иметь уравнение

$$[\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \delta \mathbf{x}^* = 0, \quad (6)$$

которое назовем *общим уравнением динамических систем*.

Уравнение (6) рассматривается вместе с уравнением связей и уравнениями для виртуальных вариаций. Общее уравнение не содержит реакций идеальных связей, из него следует столько уравнений движения, сколько независимых виртуальных вариаций допускается уравнениями связей. Частным случаем изучаемых динамических систем являются механические системы, зависящие от некоторых вынужденно изменяющихся параметров, когда изменение параметров связано с фазовыми координатами системы.

Пусть свободная система описывается совокупностью уравнений

$$\begin{aligned} m_k \mathbf{a}_k &= \mathbf{F}_k(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, p_1, \dots, p_l), \quad k = 1, \dots, n, \\ \mu_i \dot{p}_i &= \Phi_i(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, p_1, \dots, p_l), \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m_k$  — массы материальных точек,  $\mathbf{a}_k$  — ускорения точек,  $\mathbf{v}_k$  — скорости точек,  $\mathbf{F}_k$  — активные силы,  $\mu_i$  — положительные коэффициенты,  $p_i$  — определяющие параметры немеханической части системы,  $\Phi_i$  — принуждения.

Включая в правые части уравнений (7) реакции, получаем уравнения несвободного движения системы в форме Четаева [4]:

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k, \quad (k = 1, \dots, n), \quad \mu_i \dot{p}_i = \Phi_i + P_i, \quad (i = 1, \dots, l). \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение связи  $\varphi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, p_k) = 0$  по времени и затем варьируя результат с учетом гипотезы Гаусса, имеем равенство

$$\sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}_k} \delta \mathbf{a}_k + \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \delta p_i = 0. \quad (9)$$

Из (8) следует уравнение вида (5) для виртуальных вариаций

$$\sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}_k} \delta \mathbf{v}_k + \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \delta p_i = 0. \quad (10)$$

Критерий идеальности связи в данной системе имеет вид

$$\sum_k \mathbf{R}_k \delta \mathbf{v}_k + \sum_i P_i \delta p_i = 0. \quad (11)$$

Подставляя в (11) реакции связей из (8), получим общее уравнение рассматриваемой динамической системы с идеальными связями

$$\sum_k (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k) \delta \mathbf{v}_k + \sum_i (\mu_i \dot{p}_i - \Phi_i) \delta p_i = 0. \quad (12)$$

Из общего уравнения (12) можно получить столько уравнений, сколько независимых виртуальных вариаций допускает система. Достоинство этих уравнений состоит в том, что они, в отличие от уравнений (8), не содержат реакций  $\mathbf{R}_k$  и  $P_i$ .

**4. О периодических движениях в системе Лоренца.** Вид системы (7) имеют, в частности, автоколебательные системы с инерционным самовозбуждением [5]. К такому же виду приводится известная система уравнений Лоренца [6]. Системой Лоренца называют систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2), \quad \dot{x}_2 = ax_1 - x_2 - x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \quad (13)$$

где  $\sigma, a, b$  — постоянные коэффициенты.

Переход к новым переменным ([6])

$$\xi = \frac{\mu x_1}{\sqrt{2\sigma}}, \quad \eta = \mu^2 \left( x_3 - \frac{x_1^2}{2\sigma} \right), \quad \tau = \sqrt{\sigma(a-1)} t, \quad \mu = \frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma(a-1)}}, \quad (14)$$

преобразует уравнения (13) к виду (штрихом обозначены производные по  $\tau$ )

$$\xi'' + \mu\xi' + (\eta - 1)\xi + \xi^3 = 0, \quad \eta' = -\mu \frac{b\eta - (2\sigma - b)\xi^2}{\sigma + 1}. \quad (15)$$

При больших значениях параметра  $a$  в уравнениях (13) величина  $\mu$  может рассматриваться как малый параметр. Однако преобразование независимого аргумента (14) при  $\mu = 0$  справедливо только

для  $t = 0$ . Поэтому в качестве порождающей системы для отыскания периодического движения будем строить несвободную систему с рассмотренными выше свойствами.

Порождающую несвободную систему можно получить путем введения идеальных связей, при наличии которых постоянными являются полная механическая энергия  $E$  "механической части" (первое уравнение в системе (15)) и переменная  $\eta$

$$\xi'^2 + (\eta - 1)\xi^2 + \frac{\xi^4}{2} = 2E = \text{const}, \quad \eta = \text{const}, \quad (16)$$

Уравнениям связей (16) соответствуют уравнения для виртуальных вариаций  $\delta\xi$ ,  $\delta\eta$ :

$$2\xi'\delta\xi + \xi^2\delta\eta = 0, \quad \delta\eta = 0. \quad (17)$$

Представляя реакции с помощью неопределенных множителей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , имеем уравнения несвободного движения

$$\xi'' + (\eta - 1)\xi + \xi^3 = \xi(-\mu + 2\lambda_1), \quad \eta' = -\mu f(\xi, \eta) + \lambda_1\xi^2 + \lambda_2. \quad (18)$$

Рассматривая  $E$  и  $\eta$  как "медленные" переменные, в выражениях  $E'$  и  $\eta'$  выделим слагаемые, являющиеся реакциями (обозначим их  $r_E$  и  $r_\eta$  соответственно)

$$\begin{aligned} \mu r_E &= 2\lambda_1\xi'^2 + \xi^2(\lambda_1\xi^2 + \lambda_2)/2, & \mu r_\eta &= \lambda_1\xi^2 + \lambda_2, \\ \lambda_1 &= \mu/2, & \lambda_2 &= \mu[f(\eta, \xi) - \xi^2/2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что укороченные уравнения, получаемые усреднением на периоде уравнений свободной системы, совпадают с укороченными уравнениями несвободной системы (17), если интегралы по времени на периоде от реакций (19) равны нулю. Эти равенства (они совпадают с полученными в работе [5]) являются уравнениями для определения начальных условий, при которых движение в среднем является периодическим.

### Список литературы

1. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. Л.: Изд-во ЛГУ. 1985. 536 с.

2. Веретенников В.Г., Синицын В.А. Метод переменного действия. М.: Физматлит. 2001.
3. Бояринцев Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука. 2000.
4. Четаев Н.Г. О вынужденных движениях // Устойчивость движения. Работы по теоретической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. С. 329-334.
5. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука. 1987. 424 с.
6. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // J. Amer. Sci. 1963. V. 20. № 2. P. 130-141 (рус. пер.: Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир. 1981. С. 88-116.)

## Регулярные прецессии в осесимметричных силовых полях

*И. А. Галиуллин*

(gal@k804.mainet.msk.su)

Московский авиационный институт, Россия

1. Согласно распространенному представлению, регулярная прецессия является следующим по сложности движением твердого тела после вращательного. Она может осуществляться в различных силовых полях и допускает классификацию, основанную на вариантах зависимости силовой функции от различных комбинаций углов Эйлера, входящих в список ее аргументов [1]. Обнаруженная впервые Л. Эйлером [2] в 1757 г. регулярная прецессия симметричного тела, закрепленного в центре масс, была указана для твердого тела в поле сил тяжести лишь спустя почти сто лет, хотя случай интегрируемости уравнений движения симметричного тяжелого волчка был установлен Ж. Л. Лагранжем [3] и С. Д. Пуассоном [4] гораздо раньше, и даже в более поздних работах Е. Лоттнера [5] и О. Сомова [6], содержащих решение уравнений в эллиптических функциях, этот случай не был рассмотрен.

Регулярная прецессия симметричного тяжелого тела, когда потенциал имеет вид  $U = mgz_C \cos\theta$ , где  $mg$  — сила тяжести,  $z_C$  — координата центра масс вдоль оси симметрии, а  $\theta$  — угол меж-

ду осью симметрии тела и вертикалью, — была открыта как решение уравнений движения тела с закрепленной точкой одновременно в двух работах, относящихся к 1860 г. Э. Дж. Раус [7] обнаружил ее, исследуя стационарные движения, при этом он получил ставшую классической формулу, связывающую параметры прецессии; в обобщенном виде для произвольной функции  $U(\theta)$  — что характеризует потенциал осесимметричного поля — она имеет вид  $U'(\theta_0) = \omega_e \sin \theta_0 [(C - A)\omega_e \cos \theta_0 + \omega_r]$ , где  $C$  и  $A$  — осевой и экваториальный моменты инерции соответственно.

Другой ученый, Турнэр [8], исключая переменные из имеющихся интегралов, вывел полиномиальное уравнение третьей степени относительно косинуса угла нутации и для двух совпадающих его корней получил решение с постоянным углом  $\theta$ . Это решение он связывал с именем Л. Пуансо, который в 1853 г. рассматривал такое движение для катящихся конусов [9] и обнаружил его глубокую аналогию с прецессией Земли. Именно в работе Пуансо [10] аналогичное движение симметричного тела было впервые названо прецессией.

Для исследования предвращения равноденствий (прецессии) Земли в 1885 г. Ф. Тиссеран [11] использовал формулу, которую можно считать одним из начальных приближений потенциала лунно-солнечного притяжения; эта функция также зависит от угла нутации — угла наклона земной оси к плоскости эклиптики:

$$U = \frac{3}{4}n^2 (A - C) H \sin^2 \theta \quad (H = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \varepsilon(1 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}i^2)).$$

Здесь  $n$  — среднее движение,  $i$  — наклон орбиты Луны к плоскости эклиптики,  $e$  и  $e'$  — эксцентриситеты орбит Земли и Луны соответственно,  $\varepsilon = 2,1758\dots$ . При этом формула позволяет вычислить весьма близкое значение периода прецессии Земли, так что в [12] даются рекомендации по ее использованию для других прецессирующих планет солнечной системы.

В определенном смысле закрывающим вопрос о возможности регулярных прецессий симметричных тел явилось доказательство их существования в любых осесимметричных полях — тогда потенциал зависит только от угла нутации; это было сделано Х. Гюльденом [13] в 1893 г., а также Г. К. Суловым [14] в 1902 г. — для более общего случая, когда тело обладает динамической симметрией ( $A = B$ ).

Таким, в частности, является находящееся в центральном ньюто-



новском поле динамически симметричное тело, изученное В. В. Беллечким [15]: потенциал в этом случае имеет вид

$$U = mgz_C \cos \theta + \frac{3g}{4R} (C - A) \cos^2 \theta$$

(где  $R$  — расстояние от гравитирующего центра до закрепленной точки) и также допускает регулярную прецессию.

**2.** Вопрос об устойчивости прецессионного движения симметричного тяжелого тела возник одновременно с его открытием в качестве аналитического решения. Именно, Раус [16] начал исследование устойчивости такого стационарного решения — по отношению к углу нутации.

К исследованию орбитальной устойчивости следует отнести и раздел трактата Пуассона [4], в котором рассматривается движение алекса волчка, происходящее вблизи параллели, соответствующей постоянному значению угла нутации в случае регулярной прецессии. Такое движение Ф. Клейн и А. Зоммерфельд [17] позже назвали "псевдoreгулярной прецессией", видимо, в отличие от того, для которого название "регулярная прецессия" стало к концу XIX века устоявшимся термином.

Устойчивость по Ляпунову регулярной прецессии симметричного тяжелого тела (по отношению к углу нутации и угловым скоростям, соответствующим эйлеровым углам) доказал впервые В. Н. Скимель [18] в 1955 г. с помощью связки интегралов, рассматривая при этом не сами производные углов, а обобщенные импульсы:

$$V = H(p_\psi, p_\varphi, p_\theta, \theta) + H_0 + \sigma_0(p_\psi - p_\psi^0) + \tau_0(p_\varphi - p_\varphi^0) + \sigma[p_\psi^2 - (p_\psi^0)^2] + \tau[p_\varphi^2 - (p_\varphi^0)^2],$$

где  $H$  — гамильтониан системы.

Непосредственным продолжением исследования Рауса стала работа В. В. Румянцева [19], который, используя дополнение Ляпунова к теореме Рауса, доказал устойчивость регулярной прецессии как следствие положительной определенности измененной потенциальной энергии  $W(\theta) = -U(\theta) + (2A)^{-1}(n - Cr_0 \cos \theta)^2 \sin^{-2} \theta$ ,  $U = mgz_C \cos \theta$ , где  $n$  и  $Cr_0$  — константы циклических интегралов ( $r_0 = \omega_e \cos \theta_0 + \omega_r$ ;  $\omega_e, \omega_r$  — угловые скорости прецессии и собственного

вращения соответственно). Устойчивость регулярной прецессии симметричного спутника в работе [21] 1964 г. доказал Ф. Л. Черноушко, используя формулу для потенциала, указанную В. В. Белецким [20].

Изучение характеристик регулярной прецессии тела в произвольном осесимметричном поле (с потенциалом в виде произвольной функции от угла нутации) стало предметом исследования Р. Граммеля [22], который в 1916 г. создал своего рода атлас разнообразных траекторий апекса, что также надо отнести к работам по орбитальной устойчивости прецессионного движения.

Решение задачи об устойчивости по Ляпунову в этом общем случае принадлежит Скимелю [23], в его работе 1962 г. получено достаточное условие для этого:

$$S \equiv A^{-1}(Cr_0)^2 + A(\omega_e \sin \theta_0)^2 - U''(\theta_0) - 3U'(\theta_0) \operatorname{ctg}(\theta_0) > 0.$$

В нестрогом варианте оно является необходимым.

Этот же результат можно получить, рассматривая уравнения возмущенного движения первого приближения и вводя возмущения по формулам  $\omega_\psi = \omega_e + x_1$ ,  $\omega_\varphi = \omega_r + x_2$ ,  $\omega_\theta = x_3$ ,  $\theta = \theta_0 + x_4$ , что дает в итоге характеристическое уравнение  $\lambda^2(\lambda^2 + S) = 0$ .

При этом преобразование матрицы системы  $\|a_{ij}\|$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ) в случае  $S > 0$  приводит к матрице с нулевыми элементами, кроме  $a_{34} = \lambda_0$  и  $a_{43} = -\lambda_0$  такими, что  $\lambda_0^2 = S$ , — тогда линейная система является устойчивой; если же выполняется  $S = 0$ , то другим преобразованием матрица приводится к такой, где ненулевые элементы  $a_{23} = a_{34} = 1$  и линейная система неустойчива. В этом втором случае вопрос решается дифференцированием функции  $W(\theta)$  [23], причем величина  $S$  совпадает с  $W''(\theta_0)$ .

В работе [24] получено достаточное условие для выполнимости неравенства  $S > 0$ . Оно имеет компактный вид  $U'(\theta_0) \cos \theta_0 \geq U''(\theta_0) \sin \theta_0$  и немедленно доказывает устойчивость регулярных прецессий в случаях Эйлера и Лагранжа, а также прецессионных движений некоторых планет при условии, что допустима формула Тиссерана [11]. К этим планетам относятся такие, для которых  $180^\circ \leq \theta_0 \leq \arccos(-1/\sqrt{5})$ , т.е. наклон планетной оси относительно перпендикуляра к плоскости орбиты не превышает  $63^\circ 25'$ : Венера, Марс, Земля и Юпитер.

В случае, когда симметричное тело закреплено на оси симметрии и находится в ньютоновском поле [15], исследование устойчивости

регулярной прецессии начал Скимель [23], записав  $S > 0$  в виде

$$[A\omega_e^2 + \mu_0(C - A)] \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{A} (Cr_0 - 2A\omega_e \cos \theta_0)^2 > 0 \quad (\mu_0 = \frac{3g}{R}).$$

Он указал и достаточное условие его выполнимости:  $C > A$ .

В. Д. Иртегов обнаружил другое достаточное условие в случае  $A > C$ , а именно:  $\mu_0(A - C) = A\omega_e^2$  и при этом  $Cr_0 \neq 2A\omega_e \cos \theta_0$ .

Задача получила решение в [25], когда в пространстве параметров была исследована граница  $S = 0$  области  $S > 0$ . Выражение  $W'''(\theta_0)$  имеет вид

$$\frac{6}{A \sin \theta_0} [A\omega_e \sin^2 \theta_0 - (Cr_0 - 2A\omega_e \cos \theta_0) \cos \theta_0] (Cr_0 - 2A\omega_e \cos \theta_0),$$

и, будучи отличным от нуля, дополняет область неустойчивости. Как оказалось, его равенство нулю обеспечивает положительность четвертой производной  $W''''(\theta_0)$ , что завершает определение области устойчивости регулярной прецессии симметричного тела.

### Список литературы

1. Галуллини И.А. Регулярные прецессии твердого тела с одной закрепленной точкой // Известия АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 6-18.
2. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // Mém. Acad. sci. Berlin. 1758. P. 157-193.
3. Lagrange J.L. Mécanique analytique. Т. 2. P.:Desaint. 1788.
4. Poisson S.D. Traité de mécanique. Т. 2. P.:Bachelier, Imprimeur-Libraire. 1833.
5. Lottner C. Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten // J. reine und angewan. Math. 1855. Bd.50. S. 111-125.
6. Somoff J. Solution rigoureuse du problème de la rotation d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux et que le point fixe est situé sur l'axe, auquel répond le troisième moment // Bull. Acad. impér. St.-Pétersbourg. Cl. phys.-math. 1856. Т. 14. P. 113-135.
7. Routh E.J. An Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. Cambridge: Macmillan. 1860.
8. Tournaire Mémoire sur la rotation des corps pesant // C. r. Acad. sci. Paris. 1860. Т. 50. P. 476-481.
9. Poinso L. Théorie des cônes circulaires roulants // J. math. pure et appl. (I). 1853. Т. 18. P. 41-70.

10. *Poinsot L.* Précession des équinoxes. Paris: Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire. 1857.
11. *Tisserand F.* Sur le mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité // С. r. Acad. sci. Paris. 1885. Т. 101. P. 195-199.
12. *Голдрайх П.* Наклонение спутниковых орбит относительно прецессирующей сжатой планеты / Приливы и резонансы в солнечной системе. М.: Мир. 1975. С. 207-216.
13. *Gylden H.* Undersökning af fall, der rotations-problemets lösning kan uttryckas medelst reelt periodiska funktioner af tiden // Öfversigt af Kongl. Vetensk.-Akad. förhandlingar. 1893. Org.50. № 2. P. 63-75.
14. *Суслов Г.К.* Основы аналитической механики. Т. 2. Киев. 1902.
15. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.:Наука. 1965. 416 с.
16. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. М.:Наука. 1983.
17. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. Heft 1-4. Leipzig:V.G. Teubner. 1910.
18. *Скимель В.Н.* К задачам устойчивости тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 130-132.
19. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников // Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. 4. М.: Вычислит. центр АН СССР. 1967.
20. *Белецкий В.В.* О либрации спутника // Искусственные спутники Земли. Вып. 3. 1959.
21. *Черноузько Ф.Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155-157.
22. *Grammel R.* Zusätze zur Kreiseltheorie mit einer Anwendung auf die Ballistik // Z. Math. und Phys. 1916. Bd.64. H.2. S. 129-168.
23. *Скимель В.Н.* Об устойчивости некоторых движений гиростата // Труды КАИ. 1962. Вып. 71. С. 36-41.
24. *Галиуллин И.А.* К исследованию структурной устойчивости прецессионного движения планет // Астрон. вестник. 1999. Т. 33. № 1. С. 72-78.
25. *Галиуллин И.А.* Устойчивость регулярных прецессий симметричного тела в ньютоновском поле сил // КИ. 1995. Т. 33. № 1. С. 107-108.

## Преобразование уравнений электрической машины двойного питания

*В. А. Диевский*

(mry@phoenix.math.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Вопросы математического описания происходящих в электрической машине двойного питания (МДП) процессов на основе методов неголономной электромеханики рассмотрены в работах [1,2]. Однако приведенные в этих работах выводы требуют уточнения.

Пусть рассматривается МДП с трехфазными обмотками на статоре и роторе, на которые подаются напряжения:

$$U_A = U_s \sin \varphi_s, U_B = U_s \sin \left( \varphi_s - \frac{2\pi}{3} \right), U_C = U_s \sin \left( \varphi_s + \frac{2\pi}{3} \right),$$
$$U_r = U_s \sin \varphi_r, U_b = U_s \sin \left( \varphi_r - \frac{2\pi}{3} \right), U_c = U_s \sin \left( \varphi_r + \frac{2\pi}{3} \right).$$

где  $\varphi_s = \omega_s t + \varphi_{s0}$ ,  $\varphi_r = \omega_r t + \varphi_{r0}$ ;  $U_s$  и  $U_r$  — амплитуды напряжений, а  $\omega_s$  и  $\omega_r$  — угловые частоты токов статора и ротора.

При соединении обмоток статора и ротора звездой на токи статора и ротора накладываются связи  $i_A + i_B + i_C = 0$  и  $i_a + i_b + i_c = 0$ . Тогда уравнения Лагранжа-Максвелла для такой МДП примут вид [1] для токов статора:

$$L_A = \dot{\psi}_A + R_s (2i_A + i_B) - U_s \sqrt{3} \cos \left( \varphi_s - \frac{2\pi}{3} \right) = 0, \quad (1)$$
$$L_B = \dot{\psi}_B + R_s (i_A + 2i_B) - U_s \sqrt{3} \cos \psi = 0.$$

Входящие в эти выражения потокосцепления равны:

$$\psi_A = \frac{3}{2} L_s (2i_A + i_B) + 3M \left( i_a \cos \varphi_e - i_b \cos \left( \varphi_e - \frac{2\pi}{3} \right) \right),$$
$$\psi_B = \frac{3}{2} L_s (i_A + 2i_B) - 3M \left( i_a \cos \left( \varphi_e + \frac{2\pi}{3} \right) - i_b \cos \varphi_e \right),$$

где  $L_s$  и  $R_s$  — индуктивность и активное сопротивление фазовой обмотки статора,  $M$  — максимальное значение взаимоиндуктивности

статорной и роторной фазовой обмоток,  $\varphi_e = p\varphi$  электрический угол поворота,  $\varphi$  - механический угол поворота,  $p$  - число пар полюсов. Уравнения для токов ротора записываются аналогично уравнениям (1) при взаимной замене индексов  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $s$  и  $r$ , а также замене знака у слагаемых фазы  $2\pi/3$ . К системе электрических уравнений добавляется механическое уравнение вращательного движения, в которое войдет электромагнитный вращающий момент

$$M_{em} = 3pM \left( (i_A i_a + i_B i_b) \sin \varphi_e - i_A i_b \sin\left(\varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right) - i_B i_a \sin\left(\varphi_e + \frac{2\pi}{3}\right) \right).$$

Для упрощения уравнений вида (1) производится переход к новым переменным, отвечающим взаимно перпендикулярному расположению новых магнитных осей ротора и статора. Матрицы преобразований, применяемые для этого, имеют различный вид, некоторые из них встречаются в работах [1,2]. Однако внимательное изучение этого вопроса показывает, что если целью этих преобразований является получение уравнений наиболее простого вида, а именно, без числовых коэффициентов и со свободными членами вида  $U_s \cos \varphi_s$ ,  $U_s \sin \varphi_s$ ,  $U_r \cos \varphi_r$ ,  $U_r \sin \varphi_r$ , то необходимое преобразование должно быть произведено по формулам:

$$i_{s1} = -\frac{1}{2}i_A - i_B, i_{s2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i_A, i_{r1} = -\frac{1}{2}i_a - i_b, i_{r2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i_a. \quad (2)$$

Одновременно должно производиться масштабное изменение параметров — от исходных параметров трехфазной модели к новым параметрам двухфазной модели с помощью замен

$$L^{(2)} = 3L^{(3)}, M^{(2)} = 3M^{(3)}, R^{(2)} = 2R^{(3)}, U^{(2)} = \sqrt{3}U^{(3)}. \quad (3)$$

Преобразования (2) не являются окончательными, поскольку полученные новые уравнения имеют существенный недостаток — они содержат периодически изменяющиеся коэффициенты. Чтобы избавиться от этого, следует произвести еще одно преобразование, а именно, переход к вращающимся осям по формулам:

$$\begin{aligned} i_{sx} &= i_{s1} \cos \gamma + i_{s2} \sin \gamma, & i_{sy} &= -i_{s1} \sin \gamma + i_{s2} \cos \gamma, \\ i_{rx} &= i_{r1} \cos \beta + i_{r2} \sin \beta, & i_{ry} &= -i_{r1} \sin \beta + i_{r2} \cos \beta, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\gamma$  - произвольно меняющийся угол,  $\beta = \gamma - \varphi_e$ . Тогда в результате суперпозиции преобразований (2) и (4) уравнения преобразования исходной модели принимают вид

$$\begin{aligned} i_{sx} &= -i_A \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) - i_B \cos \gamma, & i_{rx} &= -i_a \cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) - i_b \cos \beta, \\ i_{sy} &= i_A \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + i_B \sin \gamma, & i_{ry} &= i_a \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) + i_b \sin \gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразования, обратные к (5), имеют вид

$$\begin{aligned} i_A &= \frac{2}{\sqrt{3}} (i_{sx} \sin \gamma + i_{sy} \cos \gamma), & i_B &= -\frac{2}{\sqrt{3}} (i_{sx} \sin \gamma_1 + i_{sy} \cos \gamma_1), \\ i_a &= \frac{2}{\sqrt{3}} (i_{rx} \sin \beta + i_{ry} \cos \beta), & i_b &= -\frac{2}{\sqrt{3}} (i_{rx} \sin \beta_1 + i_{ry} \cos \beta_1), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\gamma_1 = \gamma + \pi/\sqrt{3}$ ,  $\beta_1 = \beta + \pi/\sqrt{3}$ .

Наложенные связи, определяемые уравнениями (5) и (6), являются неинтегрируемыми из-за входящего в эти уравнения произвольно меняющегося угла  $\gamma$ , т.е. являются неголономными. Для описания системы могут быть применены уравнения в форме Маджи[1,2]:

$$M_j = \sum_k \left( \frac{di_k}{di_j} \right) L_K = 0,$$

где индекс  $j$  может принимать значения  $sx, sy, rx, ry$ , а индекс  $k$  —  $A, B, a, b$ . Их использование позволяет привести уравнения МДП (1) с учетом замены (3) к следующему виду:

$$\begin{aligned} L_s(\dot{i}_{sx} - \dot{\gamma}i_{sy}) + M(\dot{i}_{rx} - \dot{\gamma}i_{ry}) + R_s i_{sx} &= U_s \cos(\varphi_s - \gamma) \\ L_s(\dot{i}_{sy} + \dot{\gamma}i_{sx}) + M(\dot{i}_{ry} + \dot{\gamma}i_{rx}) + R_s i_{sy} &= U_s \sin(\varphi_s - \gamma) \\ L_r(\dot{i}_{rx} - \dot{\beta}i_{ry}) + M(\dot{i}_{sx} - \dot{\beta}i_{sy}) + R_r i_{rx} &= U_r \cos(\varphi_r - \beta) \\ L_r(\dot{i}_{ry} + \dot{\beta}i_{rx}) + M(\dot{i}_{sy} + \dot{\beta}i_{sx}) + R_r i_{ry} &= U_r \sin(\varphi_r - \beta) \\ M_{em} &= -pM(i_{sx}i_{ry} - i_{ry}i_{sx}) \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения такого типа приводятся в работах [1,2], однако там они имеют менее общий вид, чем уравнения (7). Полученные уравнения МДП позволяют проанализировать, в частности, установившийся режим работы машины, т.е. случай, когда  $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$

и значения квазитокков  $i_{sx}, i_{sy}, i_{rx}, i_{ry}$  также постоянны. Это возможно, если постоянны правые части уравнений (7), т.е. выполняются равенства:  $\varphi_s - \gamma = \theta_s = const, \varphi_r - \beta = \theta_r = const$ . Тогда  $\dot{\gamma} = \dot{\varphi}_s = \omega_s, \dot{\beta} = \dot{\gamma} - p\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_r = \omega_r$  и, следовательно,  $\omega = (\omega_s - \omega_r)/p$ .

Таким образом, установившийся режим работы МДП возможен лишь при строго определенной угловой скорости ротора, т.е. МДП обладает свойствами синхронной электрической машины. Выражения для установившихся значений квазитокков и электромагнитного вращающего момента получаются из уравнений (7), в частности:

$$M_{em} = -pM \left( (R_s R_r - \omega_s \omega_r \delta)^2 + (\omega_s L_s R_r + \omega_r L_r L_s)^2 \right)^{-1} \times \\ \times \left( M(\omega_r R_r U_s^2 - \omega_s R_s U_r^2) + U_s U_r \times \right. \\ \left. \times ((R_s R_r + \omega_s \omega_r \delta) \sin \theta - (\omega_s L_s R_r - \omega_r L_r L_s) \cos \theta) \right), \quad (8)$$

где  $\delta = L_s L_r - M^2, \theta = \theta_s - \theta_r$ .

Выражения, аналогичные (8), получены в работах [1,2], однако приведенные там рассуждения о величине угла  $\theta$  требуют уточнения. Следует учитывать, что выход на установившийся режим происходит спустя определенное время, т.е. соотношение типа  $\varphi = \omega t + C$  является справедливым, начиная с какого-то значения времени. Поэтому входящую в это соотношение постоянную  $C$  нельзя рассматривать как начальное значение угла поворота ротора  $\varphi$  и установившийся режим работы МДП никак не зависит от начальных углов  $\varphi_0, \varphi_{s0}, \varphi_{r0}$ . На самом деле, входящий в выражение (8) угол  $\varphi$  является произвольным углом и его величина определяется приложенной к машине нагрузкой. В теории синхронных электрических машин соответствующий угол и называется углом нагрузки. Если учесть упомянутое в [2] утверждение о том, что в реальных электрических машинах такого типа падение напряжения на активных сопротивлениях много меньше, чем на индуктивностях, то в выражении (8) можно положить  $R_s = R_r = 0$ , и оно упростится

$$M_{em} = -pM \frac{U_s U_r}{\omega_s \omega_r \delta} \sin \theta.$$

В зависимости от знака угла  $\varphi$  машина работает в генераторном или двигательном режимах. Последняя формула электромагнитного вращающего момента аналогична той, которая получена в работе



[2] для синхронных электрических машин. В обозначениях данной работы она имеет вид

$$M_{em} = -pM \frac{U_s U_R}{\omega_s L_s R_r} \sin \theta,$$

с учетом того, что у синхронной электрической машины, в отличие от МДП, роторная обмотка питается постоянным током.

### Список литературы

1. Диевский В.А., Львович А.Ю. Об уравнениях электрической машины двойного питания // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1991. Вып. 2 (№ 8). С. 75-78..
2. Родюков Ф.Ф., Львович А.Ю. Уравнения электрических машин. Изд-во СПбГУ. 1997. 270 с.

## Исследование устойчивости движения динамических систем полиномиальной структуры с периодическими параметрами

*С. Е. Иванов, Г. И. Мельников*  
(melnikov@mail.ifmo.ru)

Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет), Россия

Рассматривается динамическая система, представленная нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими параметрами:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \sum_{|\nu|=1}^4 h_\nu \cos^{\nu_1}(\omega t) \sin^{\nu_2}(\omega t) \dot{x}^{\nu_3} x^{\nu_4}, \quad (1)$$

где  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$  — векторный индекс, и его компоненты, принимающие целые неотрицательные значения, удовлетворяют ограничению  $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \leq 4$ . Предполагается, что нелинейная правая часть уравнения аппроксимирована многочленом 4-ой степени от фазовых координат с периодическими полиномиальными коэффициентами, которые в дальнейшем предполагаются малыми.

Дифференциальное уравнение рассматривается в конечной окрестности нуля фазовой плоскости  $D = \{x, \dot{x} : x^2 + \dot{x}^2 \leq 1\}$ . Предполагаем, что корни характеристического уравнения  $\lambda_{3,4} = \alpha \pm j\beta$  являются комплексно-сопряженными с немалыми мнимыми частями, а вещественные части неположительные и могут быть малыми. Будем рассматривать уравнение (1) в условии отсутствия резонансов и субрезонансов, т.е.  $\omega \neq k\beta, \omega \neq \beta/k, k = 1, \dots, 4$ . Введем две дополнительные переменные  $y_{1,2} = \exp(\lambda_{1,2} t)$  при  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$  и перейдем от уравнения (1) к системе:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + b\dot{x} + cx &= \sum_{|\nu|=1}^4 P_\nu y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dot{x}^{\nu_3} \dot{x}^{\nu_4}, \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем к новым переменным:  $y_3 = \dot{x} - \lambda_4 x$ ,  $y_4 = \dot{x} - \lambda_3 x$ . В результате система (2) приводится к системе четырех дифференциальных уравнений с комплексными переменными

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, & \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2, \\ \dot{y}_3 &= \lambda_3 y_3 + \sum_{|\nu|=2}^4 \tilde{P}_\nu Y^\nu, & \dot{y}_4 &= \lambda_4 y_4 + \sum_{|\nu|=2}^4 \tilde{P}_\nu Y^\nu, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Y^\nu \equiv y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} y_3^{\nu_3} y_4^{\nu_4}$ .

Методом многочленных преобразований [1,2] преобразуем систему (3) к автономному виду. Выполним многочленную замену переменных с постоянными комплексными коэффициентами:

$$y_s = z_s \quad \text{при} \quad s = 1, 2; \quad y_s = z_s + \sum_{|\nu|=2}^4 a_\nu^s Z^\nu \quad \text{при} \quad s = 3, 4. \quad (4)$$

Здесь  $Z^\nu \equiv z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} z_3^{\nu_3} z_4^{\nu_4}$  — одночлены степени  $|\nu| = 2, 3, 4$ ;  $a_\nu^s$  — комплексные постоянные, подлежащие определению.

Результатом многочленного преобразования (5), выполненного с точностью до членов четвертого порядка включительно, является система дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s \quad \text{при} \quad s = 1, 2; \quad \dot{z}_s = \lambda_s z_s + \sum_{|\nu|=2}^4 q_\nu^s Z^\nu \quad \text{при} \quad s = 3, 4, \quad (5)$$

где  $q_\nu^s$  – неизвестные коэффициенты преобразованной системы.

Желательно, чтобы все коэффициенты  $q_\nu^s$  оказались равными нулю, но достичь этого, как правило, невозможно, поскольку при таком требовании появляются малые делители и некоторые коэффициенты преобразования (4) могут получиться очень большими или равными бесконечности. В связи с этим согласно методу [1,2] определяем особые значения индексов  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$  при каждом фиксированном значении индекса  $s$  и фиксированном порядке  $|\nu|$  как целочисленные неотрицательные решения системы алгебраических уравнений:  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 - \lambda_s \approx 0$ ,  $|\nu| = 2, 3, 4$ ,  $s = 3, 4$ .

В результате получаем множество особых значений индексов. Приравниваем нулю в преобразовании (4) все коэффициенты  $a_\nu^s$ , соответствующие особым значениям индексов, а в преобразованной системе (5) приравниваем нулю все коэффициенты  $q_\nu^s$ , соответствующие неособым значениям индексов. Для определения искомым коэффициентов предложены алгоритмические формулы и созданы программы в математическом пакете символьных вычислений. В нерезонансном случае находим следующие особые индексы: при  $s = 3$   $\nu = (1, 1, 1, 0)$  и  $\nu = (0, 0, 2, 1)$ ; при  $s = 4$   $\nu = (1, 1, 0, 1)$  и  $\nu = (0, 0, 1, 2)$ .

Других таких особых индексов нет. Поэтому в уравнении (5) при особых индексах взаимно сокращаются переменные  $z_1, z_2$ , и система записывается в виде двух автономных комплексно-сопряженных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{z}_3 = (\lambda_3 + q_{1110}^3)z_3 + q_{0021}^3 z_3^2 z_4, \quad z_4 = \bar{z}_3. \quad (6)$$

Экспоненциальная замена  $z_{3,4} = \rho \exp(\pm j(t \operatorname{Im} \lambda_3 + \theta))$  приводит систему (6) к рекуррентной системе, состоящей из уравнения Бернулли для амплитуды  $\rho$  и для фазы  $\theta$ :

$$\dot{\rho} = k_1 \rho + k_3 \rho^3, \quad \dot{\theta} = k_0 + k_2 \rho^2, \quad (7)$$

где  $k_0 = \operatorname{Im}(q_{1110}^3)$ ,  $k_1 = \operatorname{Re}(\lambda_3 + q_{1110}^3)$ ,  $k_2 = \operatorname{Im}(q_{0021}^3)$ ,  $k_3 = \operatorname{Re}(q_{0021}^3)$ .

Решение дифференциальной системы имеет вид:

$$\rho^2 = \frac{k_1 \rho_0^2}{(k_3 \rho_0^2 + k_1) \exp(-2k_1 t) - k_3 \rho_0^2} \quad (8)$$

$\left[ \theta = \theta_0 + \left( k_0 - k_1 \frac{k_2}{k_3} \right) t + \frac{k_2}{k_3} \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right]$ , где  $\rho_0, \theta_0$  – начальные значения переменных.

Уравнения (5), а также (6) и (7) являются приближенными, в них отброшены малые члены пятого порядка и выше. Будем относить эти остаточные члены к малым постоянно действующим возмущениям.

Рассмотрим уравнение (7) с малым возмущением

$$\dot{\rho} = k_1 \rho + k_3 \rho^3 + \varepsilon(\rho, \theta, t), \quad (9)$$

где  $\varepsilon(\rho, \theta, t)$  – малая по величине функция.

В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную функцию  $V = \rho^2$ , производная от которой имеет вид:

$$\dot{V} = 2\rho\dot{\rho} = 2k_1\rho^2 + 2k_3\rho^4 + 2\rho\varepsilon(\rho, \theta, t), \quad (10)$$

или

$$\dot{V} = -\xi V + \eta V^2 + 2\sqrt{V}\varepsilon \quad (11)$$

при  $\xi = -2k_1$ ,  $\eta = 2k_3$ ,  $V < H$ . Здесь константа  $H$  может быть назначена из условия  $\{V < H\} \subset D$ .

Последнее слагаемое в уравнении (11) можно оценить сверху в области  $\{V < H\}$  малой положительной константой  $\delta > 0$ :

$$2\sqrt{V}|\varepsilon(V)| \leq \delta \quad \text{при } V < H. \quad (12)$$

В результате получим дифференциальное неравенство вида:

$$\dot{V} \leq -\xi V + \eta V^2 + \delta \quad \text{при } V < H. \quad (13)$$

Неравенство (13) относится к типу дифференциальных неравенств вида  $\dot{V} \leq \Psi(V)$  [1, 2].

Запишем дифференциальное уравнение сравнения:

$$\dot{C} = -\xi C + \eta C^2 + \delta \quad \text{при } C(0, C_0) = C_0. \quad (14)$$

Назначим начальное значение из условия  $\eta C^2 - \xi C + \delta < 0$ .

Рассмотрим правую часть дифференциального уравнения (14). Приравняв ее нулю и найдем корни полученного уравнения  $\mu_{1,2} = (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4\delta\eta})/2\eta$ . На интервале  $C \in (\mu_1, \mu_2)$  левая часть уравнения отрицательна. Назначим  $C_0 < \mu_2$ , причем  $C_0 \approx \mu_2$ .

Решение уравнения сравнения можно представить в виде:

$$C(t, C_0) = \frac{\xi}{2\eta} + \frac{\gamma}{2\eta} \operatorname{tg} \left( \frac{\gamma t}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{2C_0\eta - \xi}{\gamma} \right) \right), \quad (15)$$

где  $\gamma = \sqrt{4\delta\eta - \xi^2}$ . По теореме [2] об устойчивости движения системы все решения с начальными значениями из области  $\{V \leq C_0\}$  при  $\{0 \leq C_0 < h < H\}$  удовлетворяют оценке

$$V \leq C(t, C_0), \quad (16)$$

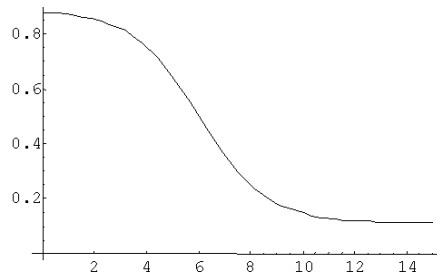
где  $C(t, C_0)$  – решение дифференциального уравнения сравнения.

Подставим решение (15) в неравенство (16), получим оценку

$$V(t, C_0) \leq \frac{\xi}{2\eta} + \frac{\gamma}{2\eta} \operatorname{tg} \left( \frac{\gamma t}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{2C_0\eta - \xi}{\gamma} \right) \right). \quad (17)$$

Таким образом, получена оценка окрестности периодического решения, в которую входит любое решение  $V$  при начальном значении из области  $\{V \leq C_0\}$ . Неасимптотическое затухание движения определяется неравенством (17).

Пусть в неравенстве (13) коэффициенты имеют числовые значения:  $\eta = 1, \xi = 1, \delta = 0.1$ . Определим  $C_0$  из условия  $C_0^2 - C_0 + 0.1 < 0$ . Отсюда  $C_0 = 0.88$ . При данных числовых значениях построен график  $C(t, 0.88)$ , который показывает характер затухания движения в окрестности нуля фазового пространства.



### Список литературы

1. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электро-механических систем. Л., 1975. 198 с.

2. Мельников Г.И. Некоторые вопросы прямого метода Ляпунова // Доклады АН, 1956. Т. 110. № 3. С. 326-329.
3. Мельников Г.И. К теории нелинейных колебаний // Вестник ЛГУ, 1964. № 1. Вып. 1. С. 88-98.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
5. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 394 с.
6. Фролов К.В. Нелинейные задачи динамики машин. М. 1992. 376 с.
7. Вибрации в технике. Справочник. Т. 6 // Под ред. К.В. Фролова. М., 1995. 456 с.
8. Фурман Ф. А., Фролов К. В. Прикладная теория виброзащитных систем. М., 1980. 317 с.

### Устойчивость и бифуркация стационарных движений волчка, заполненного жидкостью, на плоскости с трением

*А. В. Карпетян*

(avkarap@mech.math.msu.su )

Московский государственный университет, Россия

1. Рассмотрим волчок, ограниченный сферической поверхностью, с осесимметричной эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Предположим, что центр  $S$  полости совпадает с геометрическим центром сферической оболочки, которая опирается о горизонтальную плоскость, причем в точке опоры на волчок действует не только нормальная реакция, но и сила трения скольжения.

Пусть масса оболочки пренебрежимо мала по сравнению с массой жидкости, тогда главные оси полости  $Sx_1x_2x_3$  являются главными центральными осями инерции волчка. Примем следующие обозначения:  $m$  — масса жидкости,  $r$  — радиус сферической оболочки,  $a_1$ ,  $a_2 = a_1$  и  $a_3$  — полуоси полости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  — скорость центра масс системы, угловая скорость волчка, половина вектора вихря жидкости и единичный вектор восходящей вертикали соответственно.

Уравнения движения системы, отнесенные к системе координат

$Sx_1x_2x_3$ , имеют вид [1-3]

$$m\dot{\mathbf{v}} + m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] = (N - mg)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + B\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega}, (A\boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\Omega})] = -r[\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{F}], \quad (2)$$

$$B\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}), C\boldsymbol{\Omega}] = 0, \quad (3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (4)$$

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (5)$$

где  $N$  — величина (4) нормальной реакции,  $\mathbf{F}$  — сила трения  
 $((\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, (\mathbf{F}, \mathbf{v}) \leq 0)$ ,

$$A = \text{diag}(A_1, A_1, 0), \quad B = \text{diag}(B_1, B_1, B_3), \quad C = \text{diag}(B_1, B_1, C_3),$$

$$A_1 = \frac{m(a_1^2 - a_3^2)^2}{5(a_1^2 + a_3^2)}, \quad B_1 = \frac{4ma_1^2a_3^2}{5(a_1^2 + a_3^2)}, \quad B_3 = \frac{2ma_1^2}{5}, \quad C_3 = \frac{8ma_1^4a_3^2}{5(a_1^2 + a_3^2)^2}.$$

Уравнения (1) и (2) выражают теоремы об изменении, соответственно, импульса и кинетического момента системы, уравнение (3) — теорему Гельмгольца, уравнение (4) — условие постоянства единичного вектора вертикали в абсолютной системе координат, а уравнение (5) — условие безотрывного движения волчка по плоскости.

Независимо от гипотезы о характере трения скольжения (независимо от вида вектора  $\mathbf{F}$ ) система (1)-(5) допускает невозрастающую вдоль движений системы функцию  $H$  (полная механическая энергия) и первые интегралы  $K$  (обобщенный интеграл Желле),  $W$  (интеграл постоянства интенсивности вихря) и  $\Gamma$  (геометрический интеграл):

$$H = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(A\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}),$$

$$K = ((A\boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\gamma}), \quad W = (B\boldsymbol{\Omega}, C\boldsymbol{\Omega}), \quad \Gamma = \boldsymbol{\gamma}^2.$$

2. Полагая  $p = a_1/a_3$  и переходя от переменных  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  к их безразмерным аналогам  $\mathbf{v}/\sqrt{a_3g}$ ,  $\boldsymbol{\omega}/\sqrt{a_3/g}$  и  $\boldsymbol{\Omega}/\sqrt{a_3/g}$ , выищем (с точностью до постоянного положительного множителя) невозрастающую функцию  $H$  и первые интегралы:  $K, W$  и  $\Gamma$ , сохраняя для них прежние обозначения:

$$H = \frac{5}{2}\mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{(p^2 - 1)^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4p^2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{p^2 + 1} + 2p^2\Omega_3^2 \right],$$

$$K = \frac{(p^2 - 1)^2(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + 4p^2(\Omega_1\gamma_1 + \Omega_2\gamma_2)}{p^2 + 1} + 2p^2\Omega_3\gamma_3,$$

$$W = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + p^2\Omega_3^2, \quad \Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2.$$

Здесь  $u$  — горизонтальная составляющая безразмерной скорости центра масс (вертикальная составляющая, согласно уравнению (5), равна нулю), а  $\omega_i, \Omega_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — проекции безразмерной угловой скорости волчка, половины безразмерного вектора вихря жидкости и единичного вектора восходящей вертикали на оси  $Sx_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) соответственно.

Согласно модифицированной теории Рауса [4], критическим точкам функции  $H$  на фиксированных уровнях первых интегралов  $K$ ,  $W$  и  $\Gamma$  соответствуют стационарные движения системы, причем точкам минимума — устойчивые движения. Таким образом, для описания стационарных движений системы и анализа их устойчивости достаточно найти и исследовать критические точки функции

$$V = H - \lambda K - \frac{2p^2}{p^2 + 1}\mu W + \frac{1}{2}\nu\Gamma$$

( $\lambda, \mu$  и  $\nu$  — неопределенные множители Лагранжа).

Эти точки определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = 5\mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_j} = \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2 + 1}(\omega_j - \lambda\gamma_j) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Omega_j} = \frac{4p^2}{p^2 + 1}[\Omega_j(1 - \mu) - \lambda\gamma_j] = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_j} = -\lambda \left[ \frac{(p^2 - 1)^2\omega_j + 4p^2\Omega_j}{p^2 + 1} \right] + \nu\gamma_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Omega_3} = 2p^2 \left[ \Omega_3 \left( 1 - \frac{2p^2}{p^2 + 1}\mu \right) - \lambda\gamma_3 \right] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_3} = -2p^2\lambda\Omega_3 + \nu\gamma_3 = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (6) (с учетом уравнения (5)) следует, что на всех стационарных движениях центр масс системы неподвижен.

Из уравнений (7) и (8) имеем, соответственно,  $\omega_j = \lambda\gamma_j$ ,  $\Omega_j = \lambda\gamma_j/(1 - \mu)$  ( $j = 1, 2$ ;  $\mu \neq 1$ ). Подставляя эти соотношения в



уравнение (9), получим

$$\left[ \nu - \frac{(p^2 - 1)^2 + 4p^2/(1 - \mu)}{p^2 + 1} \lambda^2 \right] \gamma_j = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (12)$$

Если  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , то  $\gamma_3 = \pm 1$  и уравнения (7)-(11) допускают семейство решений ( $\Omega$  — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \Omega_3 = \Omega, \quad \gamma_3 = \pm 1 \\ \left( \lambda = \pm \Omega \sigma, \quad \mu = \frac{p^2 + 1}{2p^2} (1 - \sigma), \quad \nu = 2p^2 \Omega^2 \sigma, \quad \sigma \in R \right). \end{aligned} \quad (13)$$

При этом  $\omega_3 = \text{const}$ , что следует из уравнений Пуассона (4), и решения (13) соответствуют равномерным вращениям волчка вокруг вертикально расположенной оси симметрии полости.

Если  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ , то (см. (12))

$$\nu = \frac{(p^2 - 1)^2 + 4p^2/(1 - \mu)}{p^2 + 1} \lambda^2, \quad (14)$$

и из уравнений (10) и (11) имеем, что

$$\left[ \mu^2 - \frac{p^2 + 1}{2p^2} \mu + \frac{(p^2 + 1)^2}{2p^2(p^2 - 1)} \right] \gamma_3 = 0. \quad (15)$$

Если  $\gamma_3 = 0$ , то уравнения (7)-(11) допускают семейства решений ( $\omega$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные)

$$\begin{aligned} \omega_j = \omega \gamma_j, \quad \Omega_j = \omega \gamma_j / (1 - \mu), \quad (j = 1, 2) \quad \Omega_3 = 0, \\ \gamma_1 = \sin \alpha, \quad \gamma_2 = \cos \alpha, \quad \gamma_3 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

( $\lambda = \omega$ ,  $\mu \in R$ ,  $\nu$  определяется соотношением (14)). При этом  $\omega_3 = 0$  (см. (4)) и (16) соответствует равномерным вращениям волчка вокруг вертикального диаметра экваториального сечения полости.

Если же  $\gamma_3 \neq 0$ , то (см. (15))

$$\mu^2 - \frac{p^2 + 1}{2p^2} \mu + \frac{(p^2 + 1)^2}{2p^2(p^2 - 1)} = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) не имеет корней при  $p \in (1/3, 1)$ , имеет один корень  $\mu = 5/2$  при  $p = 1/3$  и два корня

$$\mu_{\pm} = \frac{p^2 + 1}{4p^2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{9p^2 - 1}{p^2 - 1}} \right) \quad (18)$$

при  $p \in (0, 1/3) \cup (1, +\infty)$  (случай  $p = 1$  соответствует шаровой полости и поэтому не рассматривается). Заметим, что  $\mu_+ > 1$  при всех допустимых значениях  $p$ , а  $\mu_- < 0$  при  $p > 1$  и  $\mu_- > 1$  при  $p < 1/3$ .

Таким образом, при  $p \in (0, 1/3) \cup (1, +\infty)$  уравнения (7)-(11) допускают два семейства решений ( $\omega$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные постоянные)

$$\begin{aligned} \omega_j = \omega \gamma_j, \quad \Omega_j^{\pm} = \frac{\omega \gamma_j}{1 - \mu_{\pm}} \quad (j = 1, 2), \quad \Omega_3^{\pm} = \frac{\omega \gamma_3 (p^2 + 1)}{(p^2 + 1) - 2p^2 \mu_{\pm}}, \quad (19) \\ \gamma_1 = \sin \beta \sin \alpha, \quad \gamma_2 = \sin \beta \cos \alpha, \quad \gamma_3 = \cos \beta \end{aligned}$$

( $\lambda = \omega$ ,  $\mu_{\pm}$  определяется соотношением (18), а  $\nu_{\pm}$  — соотношением (14)). Эти решения соответствуют равномерным вращениям волчка вокруг вертикали ( $\omega_3 = \omega \gamma_3$ , что следует из уравнений Пуассона), при этом жидкость совершает "прецессионные" движения, так как  $\Omega_3/\gamma_3 \neq \Omega_i/\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) (см. (19)). При  $p = 1/3$  эти семейства решений сливаются в одно семейство

$$\begin{aligned} \omega_i = \omega \gamma_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \Omega_j = -\frac{2}{3} \omega \gamma_j \quad (j = 1, 2), \quad \Omega_3 = 2\omega \gamma_3, \\ \gamma_1 = \sin \beta \sin \alpha, \quad \gamma_2 = \sin \beta \cos \alpha, \quad \gamma_3 = \cos \beta. \end{aligned}$$

**3.** Рассмотрим стационарные движения (13) и вычислим на них вторую вариацию функции  $V$  на линейном многообразии  $\delta K = 0$ ,  $\delta W = 0$ ,  $\delta \Gamma = 0$ , которое для этих движений имеет вид  $\delta \Omega_3 = 0$ ,  $\delta \gamma_3 = 0$ :

$$\begin{aligned} \delta^2 V_{(13)} = V_0 + V_1 + V_2; \quad V_0 = \frac{5}{4} (\delta u)^2, \\ 2(p^2 + 1)V_j = (p^2 - 1)^2 (\delta \omega_j)^2 + 2[(p^2 + 1)\sigma + (p^2 - 1)] (\delta \Omega_j)^2 + \\ + 2p^2 (p^2 + 1) \Omega^2 \sigma (\delta \gamma_j)^2 - 2(p^2 - 1)^2 \Omega \sigma (\delta \omega_j) (\delta \gamma_j) - \\ - 4p^2 \Omega \sigma (\delta \Omega_j) (\delta \gamma_j) \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Очевидно, квадратичная форма  $\delta^2 V_{(13)}$  Определенно положительна по отношению к переменным  $\delta u$ ,  $\delta \omega_j$ ,  $\delta \Omega_j$  и  $\delta \gamma_j$  при условиях

$$\sigma + \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} > 0, \quad \sigma \left( \sigma^2 - \sigma - \frac{2p^2}{p^2 - 1} \right) < 0. \quad (20)$$

Учитывая произвольность параметра  $\sigma$ , заключаем, что стационарные движения (13) асимптотически устойчивы по отношению к переменным  $u$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  при  $p > 1$  (полость сжата вдоль оси симметрии), так как при этом неравенства (20) выполняются для  $\sigma = +0$ , и неустойчиво при  $p < 1$  (полость вытянута вдоль оси симметрии), так как при этом неравенства (20) не выполняются ни для какого  $\sigma \in R$  (ср. с [3]).

Аналогично исследуется устойчивость стационарных движений (16) и (19). Для (16) вторая вариация функции  $V$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta^2 V_{(16)} &= V_0 + W_1 + W_2 + W_3, \\ 2(p^2 + 1)W_j &= (p^2 - 1)^2 (\delta \xi_j)^2 + 4p^2(1 - \mu)(\delta \eta_j)^2 \quad (j = 1, 2), \\ 2(p^2 + 1)W_3 &= 2p^2[(p^2 + 1) - 2p^2\mu](\delta \Omega_3)^2 - 4p^2(p^2 + 1)\omega(\delta \Omega_3)(\delta \gamma_3) + \\ &\quad + [(p^2 - 1)^2 + 4p^2/(1 - \mu)]\omega^2(\delta \gamma_3)^2. \\ (\xi_j &= \omega_j - \omega \gamma_j, \quad \eta_j = \Omega_j - \omega \gamma_j / (1 - \mu); \quad j = 1, 2). \end{aligned}$$

Очевидно, квадратичная форма  $\delta^2 V_{(16)}$  Определенно положительна по отношению к  $\delta u$ ,  $\delta \xi_j$ ,  $\delta \eta_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\delta \Omega_3$  и  $\delta \gamma_3$  при условиях

$$\mu < 1, \quad \mu^2 - \frac{p^2 + 1}{2p^2} \mu + \frac{(p^2 + 1)^2}{2p^2(p^2 - 1)} > 0. \quad (21)$$

Если  $p < 1$ , то условия (21) выполняются при любом  $\mu < 1$ , т.е. для всех стационарных движений (16), на которых жидкость и оболочка вращаются в одну сторону, в частности, при  $\mu = 0$ , т.е. для всех стационарных движений (16), на которых жидкость и оболочка вращаются как единое целое. Если же  $p > 1$ , то условия (21) выполняются только при  $\mu < \mu_- < 0$ . Последнее условие означает, что жидкость вращается в ту же сторону, что и оболочка, но медленнее последней по крайней мере в полтора раза:

$$\omega_j / \Omega_j = 1 - \mu > 1 - \mu_- > 3/2 \quad (j = 1, 2), \quad (p \in (1, +\infty)).$$

Наконец, для решений (19), которые существуют только при  $p \in (0, 1/3] \cup (1, +\infty)$ , вторая вариация функции  $V$  имеет вид

$$\delta^2 V_{(19)} = V_0 + W_1 + W_2 + p^2 \left(1 - \frac{2p^2}{p^2 + 1} \mu_{\pm}\right) (\delta\zeta)^2 + \frac{1}{2} \nu_{\pm} (\delta\gamma_3)^2$$

$$\left( \zeta = \Omega_3 - \left[ \frac{(p^2 - 1)^2}{2p^2(p^2 + 1)} - \frac{2}{(p^2 + 1)(1 - \mu_{\pm})} \right] \omega\gamma_3 \right).$$

Квадратичная форма  $\delta^2 V_{(19)}$  определено положительно по отношению к  $\delta u, \delta\xi_j, \delta\eta_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\delta\Omega_3$  и  $\delta\gamma_3$  при условиях

$$\mu_{\pm} < 1, \quad 1 - \frac{2p^2}{p^2 + 1} \mu_{\pm} > 0. \quad (22)$$

Очевидно, неравенства (22) выполняются только для одного семейства решений (19), отвечающего корню  $\mu_-$ , так как  $\mu_+ > 1$ , и только при  $p > 1$ , так как  $\mu_- > 1$  при  $p \leq 1/3$ .

Таким образом, стационарные движения (16) асимптотически устойчивы по переменным  $u, \xi_j, \eta_j$  ( $j = 1, 2$ ),  $\Omega_3$  и  $\gamma_3$ , если  $p < 1$ ,  $\mu < 1$  или  $p > 1$ ,  $\mu < \mu_-$ , а стационарные движения (19) ( $\mu = \mu_-$ ) устойчивы по тем же переменным, если  $p > 1$ . В противных случаях стационарные движения (16) и (19) ( $\mu = \mu_{\pm}$ ) — неустойчивы.

В частности, твердотельные стационарные движения волчка (жидкость и оболочка движутся как одно целое) представляют собой только равномерные вращения вокруг вертикально расположенной оси симметрии полости (решения (13) при  $\omega_3 = \Omega$ ) или диаметра экваториального сечения полости (решения (16) при  $\mu = 0$ ). Первые устойчивы в случае сжатой вдоль оси симметрии полости, а вторые — в случае вытянутой полости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (01-01-00141).

### Список литературы

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 439 с.
2. Маркеев А.П. Об устойчивости вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 19-26.
3. Карапетян А.В., Прокошина О.В. Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 85-91.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 165 с.

## Геометрическая интерпретация принципа Гаусса

С. П. Кудаев

(imbmgu@moris.ru)

Мордовский государственный университет, Саранск, Россия

*В статье на основе материала, приведенного в работах [1-2], показывается, что геометрическая интерпретация принципа Гаусса может быть изложена без введения понятия касательного пространства. Это существенно облегчает методику изложения данной темы в общем курсе теоретической механики.*

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из  $N$  материальных точек, имеющих массы  $m_\nu^*$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N$ . Положение точек в трехмерном пространстве в декартовой системе координат  $O x_1 x_2 x_3$  можно определить радиусами-векторами  $\mathbf{r}_\nu = x_{3\nu-2}\mathbf{i}_1 + x_{3\nu-1}\mathbf{i}_2 + x_{3\nu}\mathbf{i}_3$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N$ .

Пусть на движение рассматриваемой механической системы наложены голономные связи

$$f^\zeta(t, x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = 0, \quad \zeta = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

Векторные уравнения, описывающие движение точек системы, в этом случае примут вид:

$$m_\nu^* \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{F}_\nu = X_{3\nu-2}\mathbf{i}_1 + X_{3\nu-1}\mathbf{i}_2 + X_{3\nu}\mathbf{i}_3$  — равнодействующая сил, действующих на  $\nu$ -ю точку,  $\mathbf{R}_\nu = R_{3\nu-2}\mathbf{i}_1 + R_{3\nu-1}\mathbf{i}_2 + R_{3\nu}\mathbf{i}_3$  — равнодействующая реакций связей, приложенных к  $\nu$ -ой точке. Векторным уравнениям (2) соответствуют следующие скалярные дифференциальные уравнения:

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + R_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, 3N, \quad (3)$$

где  $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu} = m_\nu^*$ . Полагая

$$M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu^*, \quad \tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{M}, \quad y_\mu = \sqrt{\tilde{m}_\mu} x_\mu, \quad (4)$$

придем к уравнениям

$$M\ddot{y}_\mu = Y_\mu + \tilde{R}_\mu, \quad \mu = 1, 2, \dots, 3N, \quad (5)$$

$$\text{где } Y_\mu = X_\mu/\sqrt{\tilde{m}_\mu}, \quad \tilde{R}_\mu = R_\mu/\sqrt{\tilde{m}_\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, 3N. \quad (6)$$

Сравнивая уравнения (5) с уравнениями для одной материальной точки, видим, что целесообразно ввести в рассмотрение  $3N$ -мерное евклидово пространство и в нем декартовую систему координат с осями  $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_{3N}$ . Тогда скалярным уравнениям (5) будет соответствовать векторное уравнение

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}, \quad (7)$$

где использованы  $3N$ -мерные векторы

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} = \sum_{\mu=1}^{3N} y_\mu \mathbf{j}_\mu, \quad \mathbf{Y} = \sum_{\mu=1}^{3N} Y_\mu \mathbf{j}_\mu, \quad \mathbf{R} = \sum_{\mu=1}^{3N} \tilde{R}_\mu \mathbf{j}_\mu. \quad (8)$$

Кинетическая энергия системы и возможная элементарная работа при этом запишутся в виде:

$$T = \frac{M\mathbf{V}^2}{2} = \sum_{\nu=1}^{3N} \frac{m_\nu^* \mathbf{v}_\nu^2}{2}, \quad \delta A = \mathbf{Y} \cdot \delta \mathbf{y} = \sum_{\mu=1}^{3N} X_\mu \delta x_\mu.$$

Точка массы  $M$ , принадлежащая  $3N$ -мерному евклидову пространству, для которой закон движения (7), а также выражения для кинетической энергии и возможной работы имеют ту же форму, что и для одной материальной точки, называется изображающей точкой. Она была введена в рассмотрение Герцем. Уравнения связей (1) для изображающей точки запишутся следующим образом:

$$f^\zeta(t, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{3N}), \quad \zeta = 1, 2, \dots, k. \quad (9)$$

В дальнейших рассуждениях несущественным будет то, какими являются связи, голономными или неголономными. Поэтому для общности положим, что связи могут задаваться и уравнениями

$$\varphi^\zeta(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = 0, \quad \zeta = 1, 2, \dots, k. \quad (10)$$

Дифференцируя уравнения (9) дважды по времени, а уравнения (10) — один раз, в результате приходим к уравнениям

$$\sum_{\mu=1}^{3N} \alpha_{\mu}^{\zeta}(t, y, \dot{y}) \ddot{y}_{\mu} = \chi^{\zeta}(t, y, \dot{y}), \quad \zeta = 1, 2, \dots, k, \quad (11)$$

где при связях (10)  $\alpha_{\mu}^{\zeta} = \frac{\partial \varphi^{\zeta}}{\partial \dot{y}_{\mu}}$ ;  $\chi^{\zeta} = -\frac{\partial \varphi^{\zeta}}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial \varphi^{\zeta}}{\partial y_{\mu}} \dot{y}_{\mu}$ .

Введем векторы  $\mathbf{a}^{l+\zeta} = \sum_{\mu=1}^{3N} \alpha_{\mu}^{\zeta} \mathbf{j}_{\mu}$ ,  $l = 3N - k$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, k$ .

Уравнения (11) запишутся при этом в векторной форме:

$$\mathbf{a}^{l+\zeta} \cdot \mathbf{W} = \chi^{\zeta}(t, y, \dot{y}), \quad \zeta = 1, 2, \dots, k. \quad (12)$$

Пусть связи независимы, тогда и векторы  $\mathbf{a}^{l+\zeta}$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, k$  будут независимы. Это предположение позволяет ввести в рассмотрение подпространство, базисом которого являются векторы  $\mathbf{a}^{l+\zeta}$  ( $K$ -пространство). Тогда все пространство можно представить в виде прямой суммы этого подпространства и его ортогонального дополнения, с базисом  $\mathbf{a}_{\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, l$  ( $L$ -пространство). При этом  $\mathbf{a}^{l+\zeta} \cdot \mathbf{a}_{\lambda} = 0$ ,  $\zeta = 1, 2, \dots, k$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, l$ .

Ускорение изображающей точки представим в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K, \quad \mathbf{W}_L = W^{\lambda} \mathbf{a}_{\lambda}, \\ \mathbf{W}^K &= W_{l+\zeta} \mathbf{a}^{l+\zeta}, \quad \mathbf{W}_L \cdot \mathbf{W}^K = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что данное представление  $\mathbf{W}$  соответствует фиксированным значениям переменных  $t, y_{\mu}, \dot{y}_{\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, 3N$ . Выражения (13) позволяют уравнение (7) заменить двумя уравнениями

$$M \mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L + \mathbf{R}_L, \quad M \mathbf{W}^K = \mathbf{Y}^K + \mathbf{R}^K. \quad (14)$$

Зафиксируем момент времени  $t$ , положение изображающей точки  $y$  и ее скорость  $\dot{y}$  и рассмотрим, каким будет при этом множество ускорений  $\mathbf{W}$ , допускаемых связями. Из уравнений (11) следует, что это будет  $l$ -мерная плоскость ( $l = 3N - k$ ). В векторной форме уравнение этой  $l$ -мерной плоскости запишется в виде (12). Из всех векторов  $\mathbf{W}$ , допускаемых связями, выделим тот вектор  $\mathbf{W}^K$ , который

будет минимальным по модулю. Чтобы построить этот вектор, опустим из начала координат  $k$ -мерный перпендикуляр на рассматриваемую плоскость. Точка пересечения этого перпендикуляра с данной плоскостью и будет соответствовать концу вектора  $\mathbf{W}^K$ , начинающегося из начала координат. Добавляя к вектору  $\mathbf{W}^K$  произвольный вектор  $\mathbf{W}_L$ , лежащий в данной плоскости, получим вектор  $\mathbf{W}$ , удовлетворяющий уравнениям связей.

При отсутствии связей ускорение изображающей точки было бы равно  $\mathbf{Y}/M$ . Составим разность

$$\mathbf{W} - \mathbf{Y}/M = \mathbf{R}/M = (\mathbf{R}^K + \mathbf{R}_L)/M, \quad \mathbf{R}_L \cdot \mathbf{R}^K = 0.$$

Из второго уравнения (14) следует, что вектор  $\mathbf{R}^K$  однозначно определяется уравнениями связей и действующими активными силами. По виду уравнений связей о векторе  $\mathbf{R}_L$  ничего сказать нельзя. В первом уравнении (14), не нарушая выполнения уравнений связей, можно положить  $\mathbf{R}_L = 0$ . Как голономные, так и неголономные связи, при наличии которых  $\mathbf{R}_L = 0$ , называются идеальными связями. Следовательно, при идеальных связях вектор  $\mathbf{W} - \mathbf{Y}/M$  будет минимальным по модулю, то есть кратчайшим будет расстояние от точки  $\mathbf{Y}/M$  до  $l$ -мерной плоскости, задаваемой уравнениями (12). Другими словами, минимальной будет величина

$$Z = (\mathbf{W} - \mathbf{Y}/M)^2, \quad (15)$$

рассматриваемая как функция ускорений  $\mathbf{W}$ , допускаемых связями.

За достаточно малый промежуток времени  $\tau$  свободная точка механической системы с массой  $m_\nu^*$  при движении по инерции совершит перемещение  $\mathbf{v}_\nu \tau$ , где  $\mathbf{v}_\nu$  — скорость, которую она имеет в момент времени  $t$ . Если на эту свободную точку будет действовать активная сила  $\mathbf{F}_\nu$ , то под действием этой силы она за тот же промежуток времени  $\tau$  совершит перемещение  $\tilde{\mathbf{g}}_\nu$ , которое может быть представлено в виде:  $\tilde{\mathbf{g}}_\nu = \mathbf{v}_\nu \tau + (\mathbf{F}_\nu/m_\nu^*)(\tau^2/2)$ . Из-за наличия связей ускорение данной точки будет равно  $\mathbf{W}_\nu$ , и поэтому ее действительное перемещение  $\mathbf{g}_\nu$  выразится формулой:  $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{v}_\nu \tau + \mathbf{W}_\nu \tau^2/2$ .

За меру отклонения рассматриваемой системы от свободного движения Гаусс принимает величину

$$Z_g = \sum_{\nu=1}^N m_\nu^* \Delta \mathbf{g}_\nu^2, \quad \Delta \mathbf{g}_\nu = \mathbf{g}_\nu - \tilde{\mathbf{g}}_\nu = (\mathbf{W}_\nu - \frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu^*}) \frac{\tau^2}{2},$$

названную им принуждением.



Функция  $Z$ , задаваемая выражением (15), только множителем отличается от меры  $Z_g$ , введенной Гауссом. Действительно, используя соотношения (3), (4), (6), (8), получаем

$$\begin{aligned} Z_g &= \frac{\tau^4}{4} \sum_{\mu=1}^{3N} M \tilde{m}_\mu \left( \ddot{x}_\mu - \frac{X_\mu}{M \tilde{m}_\mu} \right)^2 = \frac{\tau^4}{4} \sum_{\mu=1}^{3N} M \left( \sqrt{\tilde{m}_\mu} \ddot{x}_\mu - \frac{X_\mu}{M \sqrt{\tilde{m}_\mu}} \right)^2 = \\ &= \frac{\tau^4}{4} \sum_{\mu=1}^{3N} M \left( \ddot{y}_\mu - \frac{Y_\mu}{M} \right)^2 = \frac{\tau^4}{4} M \left( \mathbf{W} - \frac{\mathbf{Y}}{M} \right)^2 = \frac{\tau^4 M}{4} Z. \end{aligned}$$

Выше было показано, что задача об отыскании минимума функции  $Z$  непосредственно связана с классической задачей об отыскании минимального расстояния от точки до плоскости. Эту геометрическую интерпретацию минимальности функции  $Z$  можно рассматривать и как геометрическую интерпретацию принципа Гаусса, так как величина  $Z_g$  только множителем отличается от величины  $Z$ .

### Список литературы

1. Зегжда С.А., Филиппов Н.Г., Юшков М.П. Уравнения динамики неголономных систем со связями высших порядков. I, II // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№ 15). С. 89-94.; Там же. 1998. Вып. 4 (№ 22). С. 89-94.
2. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика Л.: 1985. 536 с. Издание второе М.: Высшая школа. 2000. 592с.

## К динамике полета противораковых ракет

Б. Я. Локшин, Ю. Д. Сельоцкий  
(lokshin@imec.msu.ru,ysel@mailru.com)

Московского государственного университета, Россия

1. Во многих регионах мира градобития ежегодно уничтожают от 3 до 20 процентов сельскохозяйственной продукции. Для защиты от этого стихийного бедствия осуществляется более 50 проектов в 25 странах мира, в которых применяется засев градовых облаков кристаллизующим реагентом (AgI) с помощью ракетных, артиллерийских или авиационных генераторов. Задача защиты ценных сельскохозяйственных культур от градобитий остается актуальной не

только для Грузии, Молдавии, Украины, Италии, Франции, Югославии, Китая, ряда латиноамериканских государств, но и для России. В докладе "Российские противорадовые ракетные комплексы. (Критерии проектирования, технические данные, результаты эксплуатации, прогноз развития)" ведущих специалистов по этому вопросу Абшаева М.Т., Корнеева В.П., Несмеянова П.А. и др., представленному в Росгидромете, а также в докладе Абшаева М.Т. "Противорадовая защита в Российской Федерации и в странах СНГ" на конференции отмечается, что российская ракетная технология защиты от града имеет наиболее высокую эффективность. Ее применение на территории бывшего СССР (в период 1981-2000 г.г.) обеспечило статистически значимое сокращение потерь от града в 7-10 раз. Сейчас в России существуют три отряда на Северном Кавказе (Северо-Кавказский, Краснодарский и Ставропольский), ведущие постоянную службу по обнаружению зон градообразования и предотвращению градобитий.

В настоящее время идет разработка нескольких новых (в некотором смысле "конкурирующих" между собой) вариантов ПГР. По крайней мере, два из них ("Алан" и "Дарг") находятся на этапе доводки и внедрения. В нынешних условиях все более актуальной становится задача сравнения различных противорадовых комплексов по целому ряду параметров. Для проведения такого сравнительного анализа желательно было бы иметь в распоряжении разработчика удобный и надежный "инструмент", позволяющий сравнительно быстро и беспристрастно рассмотреть множества различных траекторий, оценить влияние того или иного параметра, выбрать наиболее подходящее значение, оценить влияние приземного и баллистического ветра, независимо от конкурента провести такой анализ и для конкурирующей ПГР.

**2.** Такой анализ может быть осуществлен с помощью персональных компьютеров на базе современных вычислительных пакетов. Авторами была разработана программа "АНТИГРАД", обеспечивающая решение различных исследовательских задач в области динамики полета противорадовых ракет. Эта программа реализована на базе пакета Visual Basic 6.0. Разработанный интерфейс предоставляет достаточно комфортные условия для пользователя при анализе траекторий полета ПГР и динамики ракеты как объекта теоретической механики и прикладной аэромеханики. Для работы с программой от пользователя требуются лишь обычные пользова-

тельские навыки. В программе предусмотрена возможность введения всех (конструктивных, аэродинамических и льдообразующих) параметров исследуемой ПГР, а также параметров обстановки (характеристики приземного и баллистического ветра, эшелон засева, категория зоны засева, высота расположения пункта воздействия), в которой происходит запуск ПГР. Аэродинамические характеристики ракеты считаются зависящими от угла атаки и числа Маха  $M$  и представляются в виде кубических полиномов по углу атаки с коэффициентами, зависящими от  $M$ . Пользователь может вводить данные как в виде таблицы (коэффициенты полиномов при этом рассчитываются по методу наименьших квадратов), так и непосредственно в виде зависимостей коэффициентов полиномов от числа Маха.

В качестве примеров использования разработанной программы для ПГР типа "Дарг-Р" рассмотрим две задачи: задачу введения угловых поправок для компенсации вредного влияния приземного ветра (составлены таблицы поправок) и задачу выбора оптимального значения важного конструктивного параметра (времени задержки включения второго импульса тяги двигателя).

**3.** С теоретико-механической точки зрения, влияние ветра (встречного, попутного, поперечного) на полет неуправляемой оперенной ракеты достаточно хорошо изучено в качественном отношении как на активном участке ее полета, так и на пассивном. Известно, что на активном участке центр масс статически устойчивой ракеты сносится навстречу ветру, а на пассивном участке ветер увлекает ракету своим потоком, и ее центр масс перемещается в направлении ветра. Поскольку рассматриваемая ПГР имеет два активных участка длительностью по одной секунде и два пассивных участка (один — между активными участками, другой — после отработки двигательной установки, тягой от выгорания реагента ввиду ее малости можно пренебречь на этом этапе рассуждений) общей длительностью около 40-50 секунд, то заранее не ясно, какой фактор будет оказывать большее влияние на отклонение траектории от номинальной, и возникает необходимость в получении количественной оценки влияния ветра на траекторию полета.

Предварительно проведенные расчеты нескольких траекторий для ПГР "Дарг" показали, что преобладающим фактором является активный участок, то есть отклонение ракеты, "накопленное" при движении с работающим двигателем, не компенсируется за счет пас-

сивных участков. Для иллюстрации этого факта на рис. 1 приведены проекции номинальной траектории полета на плоскость стрельбы ( $W_x = 0$ ) и траекторий полета при попутном ( $W_x = 20$  м/с) и встречном ( $W_x = -20$  м/с) ветре. Хорошо видно, как попутный ветер "поднимает" траекторию полета рассматриваемой ПГР, а встречный "опускает". Пунктиром отмечен заданный эшелон высот. Жирными точками отмечены начало и окончание внесения реагента. Начальный угол возвышения на всех траекториях один и тот же.

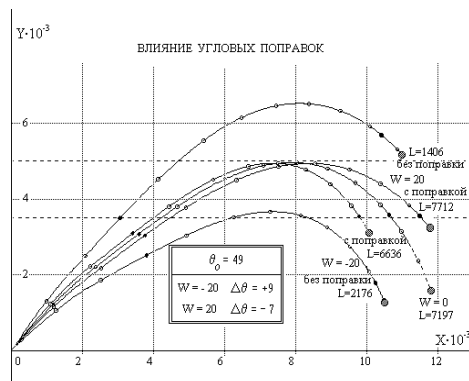


Рис. 1

На этом рисунке видно, что получающиеся отклонения приводят к существенному уменьшению длины эффективного участка траектории, находящегося в требуемом эшелоне. Подъем траектории при попутном ветре приводит к тому, что траектория выходит из заданного эшелона через его верхнюю границу, и эффективная дальность резко уменьшается. Опускание траектории также приводит к уменьшению эффективной дальности, но уже за счет того, что внесение реагента происходит в более низких слоях атмосферы, чем требуется. Аналогичная картина имеет место и при поперечном ветре. На рис. 2 изображены проекции номинальной траектории полета на плоскость стрельбы и горизонтальную плоскость при поперечном ( $W_z = 20$  м/с) ветре (при  $W_z = -20$  м/с получается практически симметричная картина). Из этих примеров видно, что при наличии ветра отклонения могут достигать километровых диапазонов, что недопустимо.

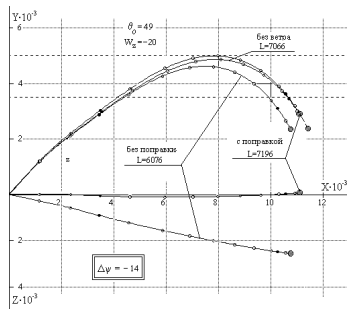


Рис. 2

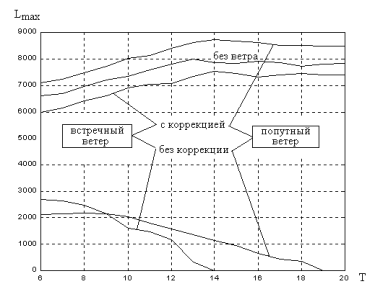


Рис. 3

К счастью, такое сильное влияние именно активного участка позволяет в значительной степени компенсировать нежелательные отклонения изменением углов ориентации пусковой установки, то есть введением так называемых поправок на ветер.

В качестве примера на тех же рисунках 1 и 2 указаны соответствующие проекции траекторий полета при скорректированных начальных углах ориентации ПГР (найденные значения угловых поправок указаны в табличках на рисунках). На рисунках хорошо видна целесообразность введения указанных поправок. Эта процедура позволяет существенно улучшить траекторию полета, приближая ее к номинальной и увеличивая эффективность применения ПГР, а в некоторых случаях (при попутном ветре) даже превышая эффективную дальность номинальной траектории. Аналогично приведенным примерам были найдены поправки на угол возвышения в плоскости запуска ПГР и на угол ориентации плоскости запуска (азимут плоскости стрельбы) в зависимости от значений начального угла возвышения, скорости и направления (азимута) ветра. Угловые поправки на начальную ориентацию ПГР подбирались из расчета минимизации уменьшения длины засева трассы по сравнению с полетом ПГР в невозмущенной атмосфере или ее максимального увеличения. Максимальная скорость приземного ветра принималась равной 20 м/с.

Результаты расчетов показали следующее. В указанных пределах влияние скорости ветра, учитывая точность введения поправки, носит линейный характер. Поправки на составляющие скорости ветра в плоскости запуска ПГР и в перпендикулярном направлениях могут вводиться отдельно независимо друг от друга. Таким образом, использование программы "АНТИГРАД" позволило достаточ-

но эффективно определить как количественные, так и качественные оценки влияния ветра и предложить способ, который в значительной степени компенсирует вредное влияние ветра, а в некоторых случаях за счет энергии ветра даже приводит к улучшению внешне баллистические характеристики рассматриваемой ракеты.

4. Предлагаемая программа позволяет достаточно легко изменять параметры и тем самым проводить параметрический анализ траекторий полета. Понятно, что многие параметры ракеты связаны между собой (геометрические и аэродинамические характеристики, например). Поэтому при изучении влияния тех или иных параметров требуется определенная аккуратность в постановке задачи и интерпретации результатов ее решения.

В этом разделе рассмотрим влияние одного временного параметра, а именно: момента  $T_2$  включения второго импульса. Этот параметр достаточно независим от остальных и определяется длиной линии задержки фронта горения в пороховой шашке. В расчетах предыдущего пункта было принято значение  $T_2 = 9$  с. На практике без особых осложнений можно выбрать значение этого параметра в диапазоне от 0 (что невыгодно, так как импульс "истратится" на преодоление слишком большого сопротивления) до 20 с.

Возникает задача наиболее рационального, в некотором смысле, выбора значения этого параметра.

Зафиксируем для определенности эшелон применения ПГР: от 3500 до 5000 м. Тогда для каждого фиксированного значения  $T_2$  с помощью предлагаемой программы можно найти оптимальный угол возвышения, при котором достигается наибольшая эффективная дальность засева в этом эшелоне. Найденные значения угла и дальности будут зависеть от наличия ветра и величины его скорости. Учитывая, что имеет место приближенная линейная зависимость поправок от скорости ветра (см. предыдущий пункт), в дальнейших расчетах ограничимся рассмотрением ветра 20 м/с, действующего в плоскости стрельбы. Таким образом, для каждого фиксированного значения  $T_2$  с помощью программы определяются три пары значений максимальной эффективной дальности  $L_{max}$  и соответствующего угла возвышения (в условиях отсутствия ветра, с попутным ветром и со встречным ветром). Например, для  $T_2 = 9$  с соответствующие значения были найдены в предыдущем пункте (рис. 1).

Аналогичным образом решается такая же задача и для дру-

гих значений  $T_2$  из указанного диапазона. Полученные зависимости представлены в виде графика на рисунке 3. Из этого рисунка, в частности, хорошо видно, что для достижения большей эффективности (по сравнению с ситуацией, когда  $T_2 = 9$  с) значение  $T_2$  требуется увеличить примерно до 12-14 с. При этом эффективная длина трассы увеличивается на 800 - 1000 м. Если такое качество сохранится и для других значений эшелонов, то найденное значение можно принять как рекомендацию разработчикам ПГР.

**5.** В дальнейшем предполагается использовать эту программу для проведения сравнительного анализа различных противорадовых комплексов, в частности, для определения количества ракет, необходимого для засева облака заданного размера, находящегося в заданном эшелоне (такая характеристика может использоваться для оценки эффективности противорадовых комплексов). Такая задача в настоящее время является одной из самых актуальных для обеспечения защиты от градобитий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (00-01-00405) и Программы "Университеты России".

## Общее уравнение механики Ньютона-Фарадея в расширенном неголономном базисе

*В. К. Пойда*

(mpu@phoenix.math.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*Колесные системы представляют собой объединение несущих и носимых тел. Несущими телами являются оси колесника, носимыми — сами колеса. Особенностью колёсных систем является превышение числа реакций плоскости качения над числом уравнений связей. В статье предложен метод получения реакций плоскости качения на каждое колесо системы и уравнения движения ес. Все тела предполагаются абсолютно жесткими.*

**1. Естественный неголономный базис свободной колесной системы.** Очевидно, что проекции скоростей наинизших точек колесника на оси неподвижной системы координат имеют вид

$$A_{\alpha 1}\dot{q}_1 + A_{\alpha 2}\dot{q}_2 + \dots + A_{\alpha n}\dot{q}_n = v_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, 3k}, \quad (1)$$

где  $3k > n$ ,  $k$  — число колес системы.

В матричном виде систему равенств (1) можно представить следующим образом  $A\dot{q} = v$ , где  $A$  —  $(3k \times n)$ -матрица,  $\dot{q}$  и  $v$  — векторы размерности  $n$  и  $3k$  соответственно.

С помощью линейных преобразований определяем число линейно независимых уравнений среди равенств (1). Предположим, что это число равно  $r$ , причем  $r < n$ . Запишем эти формы следующим образом:

$$a_{\nu 1}\dot{q}_1 + a_{\nu 2}\dot{q}_2 + \dots + a_{\nu n}\dot{q}_n = \dot{\pi}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{3k} b_{\nu\alpha}v_\alpha, \quad \nu = 1, 2, \dots, r \quad (2)$$

или в матричном виде  $A^{(1)}\dot{q} = \dot{\pi}^{(1)} = Bv$ , где  $A^{(1)}$  —  $(r \times n)$ -матрица,  $B$  —  $(r \times 3k)$ -матрица,  $\dot{\pi}^{(1)}$  — вектор размерности  $r$ , компоненты которого  $\dot{\pi}_\nu$  — линейные формы, с одной стороны, из обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , с другой стороны, из проекций  $v_\alpha$  скоростей наинизших точек колес, а компоненты матриц  $A^{(1)}$  и  $B$  соответственно  $a_{\nu i}$ , и  $b_{\nu\alpha}$  — линейные комбинации из коэффициентов при величинах  $\dot{q}_i$ ,  $v_\alpha$  в системе равенств (1).

Перейдем от голономного базиса  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$  к неголономному  $(\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_n)$  следующим образом. В качестве первых  $r$  квазискоростей возьмем  $r$  линейно независимых равенств (2) и добавим к ним  $s = n - r$  линейно независимых форм относительно обобщенных скоростей. В результате получим систему

$$\tilde{A}\dot{q} = \dot{\pi}, \quad (3)$$

где  $\tilde{A}$  —  $(n \times n)$ -матрица,  $\dot{\pi}$  — вектор размерности  $n$ .

Квазискорости  $\dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_r$  и  $\dot{\pi}_{r+1}, \dots, \dot{\pi}_n$  будем называть соответственно закрепленными и свободными.

Решая систему уравнений (3) относительно величин  $\dot{q}_i$ , получим

$$\dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^n c_{i\nu}\dot{\pi}_\nu, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $c_{i\nu}$  — элементы обратной матрицы системы (3).



Соотношения (4) позволяют преобразовать общее уравнение механики к виду

$$\delta A' = \sum_{i=1}^n E_i(L) \delta q_i = \sum_{\nu=1}^n \mu_\nu(L) \delta \pi_\nu, \quad (5)$$

где

$$\mu_\nu(L) = \sum_{i=1}^n E_i(L) c_{i\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Выражение (6) называют оператором Маджи.

При свободном движении все виртуальные перемещения независимы между собой. В силу этого из выражений (6) получим  $n$  уравнений движения свободной системы в неголономном базисе (3)

$$\mu_\nu(L) = \sum_{i=1}^n E_i(L) c_{i\nu} = 0, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Эти уравнения содержат обобщенные координаты, скорости, ускорения системы.

**2. Стеснённая неголономная система.** Рассмотрим теперь движение системы по неподвижной плоскости при условии, что скорости наинизших точек колёс равны нулю. Аналитически это условие выражается следующим образом:  $\dot{\pi}_\nu = 0$ ,  $\nu = \overline{1, r}$ . (8)

На основании аксиомы связей и выражений (7), (8) получаем

$$\begin{aligned} a) \quad \mu_\nu|_0 = R_\nu &= \sum_{i=1}^n E_i(L) c_{i\nu}, \quad \nu = \overline{1, r}; \\ b) \quad \mu_\nu|_0 = 0 &= \sum_{i=1}^n E_i(L) c_{i\nu}, \quad \nu = \overline{r+1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Величины (9a) суть множители Лагранжа, отвечающие уравнениям связей (8); величины (9b) представляют уравнения движения системы в неголономном базисе (3).

Здесь и далее значок  $|_0$  при выражении указывает на то, что рассматриваемая величина вычислена при учете связей (8).

**3. Естественный расширенный неголономный базис свободной колёсной системы.** Получим теперь выражения для реакций плоскости качения на каждое колесо системы, отвечающие проекциям  $v_\alpha$  скоростей наинизших точек колёс системы.

Выражения (4) позволяют переписать общее уравнение механики следующим образом

$$\delta A' = \sum_{i=1}^n E_i(L) \delta q_i = \sum_{i=1}^n E_i \left( \sum_{\nu=1}^n c_{i\nu} \delta \pi_\nu \right), \quad (10)$$

или, поменяв порядок суммирования, с учетом (7) получим

$$\delta A' = \sum_{\nu=1}^n \left( \sum_{i=1}^n E_i c_{i\nu} \right) \delta \pi_\nu = \sum_{\nu=1}^n \mu_\nu \delta \pi_\nu = \sum_{\nu=1}^r \mu_\nu \delta \pi_\nu + \sum_{\nu=r+1}^n \mu_\nu \delta \pi_\nu. \quad (11)$$

Используя (2), можем написать

$$\delta A' = \sum_{\nu=1}^r \sum_{\alpha=1}^{3k} \mu_\nu b_{\nu\alpha} \delta s_\alpha + \sum_{\nu=r+1}^n \mu_\nu \delta \pi_\nu = \sum_{\alpha=1}^{3k} R'_\alpha \delta s_\alpha + \sum_{\nu=r+1}^n \mu_\nu \delta \pi_\nu, \quad (12)$$

где  $R'_\alpha = \sum_{\nu=1}^r \mu_\nu b_{\nu\alpha}$ .

Перепишем общее уравнение механики следующим образом

$$\delta A' = \sum_{\alpha=1}^{3k} R'_\alpha \delta s_\alpha + \sum_{\nu=r+1}^n R'_\nu \delta \pi_\nu = 0, \quad (13)$$

где  $R'_\alpha = \sum_{\nu=1}^r \mu_\nu(L) b_{\nu\alpha}$ ,  $\alpha = \overline{1, 3k}$ ,  $R'_\nu = \mu_\nu(L)$ ,  $\nu = \overline{r+1, n}$ .

Движение системы по неподвижной плоскости без скольжения характеризуется условиями

$$\delta s_\alpha = 0 \quad (v_\alpha = 0), \quad \alpha = \overline{1, 3k}. \quad (14)$$

Учитывая аксиому связей и требования (14), из динамического принципа виртуальных перемещений (13) получим

$$\begin{aligned} a) \quad R'_\alpha|_0 &= R_\alpha = \sum_{\nu=1}^r \mu_\nu(L) b_{\nu\alpha}|_0, \quad \alpha = \overline{1, 3k}, \\ b) \quad R'_\nu|_0 &= 0 = \mu_\nu(L)|_0, \quad \nu = \overline{r+1, n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (15a) определяют реакцию плоскости качения на каждое колесо системы в направлении скорости  $v_\alpha$  наименьшей точки колеса и позволяют написать динамические условия сохранения касательных, боковых и вертикальных связей (15) колёсника.

Соотношения (15b) определяют уравнения движения системы в направлении свободных квазискоростей  $\dot{\pi}_{r+1}, \dots, \dot{\pi}_n$ . Эти Выражения суть уравнения движения системы в неголономном базисе (3). Система уравнений (3) охватывает и частные случаи Чаплыгина и Воронца.

По изложенной схеме исследовано движение вертикально-параллельного двух-, четырёхколёсника, двухскатной тележки.

### Список литературы

1. *Пойда В.К.* Общее уравнение механики Ньютона - Фарадея // Процессы управления и устойчивости / Труды XXXII научной конференции студентов и аспирантов. СПб. ООП НИИ Химии СПбГУ. 2001.
2. *Пойда В.К.* Движение в целом двухскатной тележки. Ч.1 // Механика. Реферат. журн. - 1989. № 10, с.4.

## О неустойчивости траекторий бильярда при неупругом отражении от границы

*С.А.Поликарпов*  
(polikarpov\_sa@ Rambler.ru)

Московский государственный университет, Россия

Рассмотрим движение материальной точки  $M$  по инерции в плоской области, ограниченной выпуклой кривой  $L$ . Предположим, что точка отражается от кривой не упруго, то есть при ударе сохраняется только компонента скорости, касательная к границе, а нормальная компонента меняет знак и уменьшается в  $1/e$  раз, где  $0 < e < 1$  – коэффициент восстановления (случай упругого отражения исследован, например, в [1]).

Следуя [2], положение точки  $M$  на кривой  $L$  охарактеризуем двумя величинами:  $s$  – натуральным параметром вдоль кривой  $L$  и  $\gamma$  – синусом угла между внутренней нормалью к  $L$  и вектором скорости материальной точки сразу после отражения.

Движению материальной точки между двумя отражениями от границы сопоставим отображение  $T : (s_a, \gamma_a) \rightarrow (s_b, \gamma_b)$ , где индекс  $a$  соответствует начальному положению точки  $M$  на кривой  $L$ , индекс  $b$  – конечному.

Заметим, что  $T = K \circ G$ , где  $G$  – отображение, сохраняющее площадь, которое соответствует случаю упругого отражения, а  $K$  – отображение, действующее следующим образом:

$$\begin{pmatrix} s \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{K} \begin{pmatrix} s \\ \gamma / (e^2 + (1 - e^2)\gamma^2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку форма траектории движения между двумя последовательными отражениями (отрезок прямой) не зависит от скорости материальной точки, а закон отражения определяется отображением  $K$ , то отображение  $T$  определено корректно.

Предположим, что существует  $n$ -угольник, вписанный в кривую  $L$ , являющийся замкнутой траекторией задачи (то есть если запустить точку  $M$  вдоль стороны многоугольника, она всегда будет оставаться на его периметре). Этой траектории соответствует последовательность точек  $(s_0, \gamma_0), (s_1, \gamma_1) = T(s_0, \gamma_0), \dots, (s_n, \gamma_n) = T(s_{n-1}, \gamma_{n-1}) = (s_0, \gamma_0)$ , описывающих состояния отражения точки  $M$  от границы  $L$ .

Изучение орбитальной устойчивости этой замкнутой траектории сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки  $(s_0, \gamma_0)$  отображения  $T^n$  –  $n$ -кратно примененного отображения  $T$ .

Линеаризуем  $T^n$  в окрестности неподвижной точки  $(s_0, \gamma_0)$ . Пусть

$$\begin{pmatrix} s_{i-1} \\ \gamma_{i-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} s_i \\ \gamma'_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_i \\ \gamma'_i \end{pmatrix} \xrightarrow{K} \begin{pmatrix} s_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} s \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{T^n} \begin{pmatrix} s_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + dT^n(s_0, \gamma_0) \begin{pmatrix} s - s_0 \\ \gamma - \gamma_0 \end{pmatrix} + O_2(s - s_0, \gamma - \gamma_0).$$

Здесь  $dT^n(s_0, \gamma_0) =$

$$= dK(\gamma'_n) \circ dG(s_{n-1}, \gamma_{n-1}) \circ \dots \circ dG(s_1, \gamma_1) \circ dK(\gamma'_1) \circ dG(s_0, \gamma_0),$$

где

$$dK(\gamma'_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 / (e^2 + (1 - e^2)\gamma_i'^2)^{3/2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$dK, dG$  – матрицы линеаризации (дифференциалов) отображений  $K$  и  $G$  соответственно.

**Теорема.** Пусть

$$\frac{e^2}{(e^2 + (1 - e^2)\gamma_i'^2)^{3/2}} > 1 \quad \text{при } i = 1, \dots, n.$$

Тогда неподвижная точка  $(s_0, \gamma_0)$  отображения  $T^n$  неустойчива.

**Доказательство.** Вычислим произведение мультипликаторов  $T^n$ . Поскольку координаты  $(s, \gamma)$  являются каноническими, то

$$\det(dG(s_{n-1}, \gamma_{n-1})) = \dots = \det(dG(s_0, \gamma_0)) = 1.$$

Это означает, что произведение мультипликаторов

$$\det(dK(\gamma_n')) \cdot \dots \cdot \det(dK(\gamma_1')) > 1,$$

откуда и следует неустойчивость неподвижной точки  $(s_0, \gamma_0)$ .

**Замечание.** Требуемое в условии теоремы свойство периодической траектории заведомо выполняется для любой двузвенной траектории бильярда и траектории в форме треугольника, близкого к равностороннему.

Автор благодарит В.В. Козлова и Д.В. Трещева за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (НШ-136.2003.1) и ФЦП “Интеграция” (№ Б0053).

### Список литературы

1. Козлов В.В., Трещев Д.В. Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
2. Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999. 407 с.

## Асинхронно-синхронная машина, эквивалентная большой электроэнергетической системе

*Ф. Ф. Родюков*

(fr@fr11189.spb.edu)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Настоящая статья является прямым продолжением статьи [1], в которой на основе полученных ранее симметричных корректных уравнений для синхронных генераторов и корректных уравнений для асинхронных и синхронных двигателей впервые построены полные математические модели асинхронного и синхронного двигателей, учитывающие баланс мощностей в большой электроэнергетической системе (ЭЭС), состоящей только из такого типа электрических машин. При этом вместо существующего принципа сети неограниченной мощности введен принцип единого абсолютно жесткого вала или принцип единой статической механической характеристики. Суммированием дифференциальных уравнений движения роторов асинхронных двигателей относительно моментов их нагрузки получено дифференциальное уравнение колебаний около положения равновесия электроэнергетической системы, состоящей из достаточно большого числа только синхронных генераторов и асинхронных двигателей. Эта операция проведена в скалярном виде, так как в отличие от классических полных уравнений рассматриваемых машин в аналогичных полных корректных уравнениях электромагнитные моменты направлены вдоль оси вращения роторов этих машин (что полностью соответствует их реальным аналогам). Аналогичным образом получено уравнение для ЭЭС, состоящей только из достаточно большого числа синхронных генераторов и синхронных двигателей. Тем самым доказано, что исходные уравнения отдельных электрических машин являются сопряженными, т.е. они не меняют своего вида при учете влияния таких машин друг на друга, когда их число достаточно велико. Появляются только параметры, отражающие соотношение мощностей между генераторами и двигателями.

Добавим, что кроме названного принципа, позволяющего от уравнений электрических машин (ЭМ), обладающих свойством сопряженности, получать уравнения ЭМ, эквивалентные соответствующим большим ЭЭС и имеющие тот же вид, что и исходные уравнения отдельных ЭМ, в этой статье введен еще один принцип — принцип

эквивалентирования электрических машин. Он состоит в том, что идентичные электрические параметры всех ЭМ, представленные в безразмерном виде, полагаются равными. В этом случае при использовании первого закона Кирхгофа в уравнениях ЭМ, эквивалентных большому ЭЭС, появляются коэффициенты, отражающие соотношение мощностей генераторов и двигателей в таких системах. То есть остается главное, что характеризует динамику ЭЭС. Таким образом, этот принцип является как бы аналогом принципа усреднения в механике, только в этом случае он сглаживает пульсации переменных отдельных ЭМ около их общей статической механической характеристики.

Окончательно для первого типа ЭЭС было получено следующее уравнение движения ротора отдельного  $j$ -го АД:

$$\dot{s} = -\delta_j \left[ \left( \frac{k_0 u_0}{k_0 + k_m} \right)^2 \frac{b \alpha_r s}{\alpha_r^2 + K^2 s^2} - M_{nj} \right], \quad (1)$$

где

$$k_0 = \sum_{l=1}^m k_l, \quad k_m = \sum_{j=1}^n k_j, \quad K = 1 + b \frac{k_m}{k_0 + k_m}. \quad (2)$$

В свою очередь, в (2)  $k_l$  — относительная мощность отдельного генератора,  $k_j$  — относительная мощность отдельного двигателя,  $u_0$  — безразмерное напряжение возбуждения,  $b = (1 - \mu)/\mu$  ( $\mu$  — коэффициент электромагнитного рассеяния),  $\delta$  — электромеханическая постоянная,  $\alpha_r$  — безразмерное сопротивление роторных контуров двигателей,  $M_n$  — момент внешней нагрузки на вал АД (полагаем, что  $M_n = \text{const}$ ).

В этой же статье для второго типа ЭЭС была получена система двух уравнений для исследования глобальной (динамической) устойчивости СД как ее элемента. При рассмотрении же системы в целом надо исходить из ее статической устойчивости, а не динамической. Поэтому и для отдельных ее элементов надо исходить из их статической устойчивости. Тогда для  $n$ -го СД будем иметь

$$\dot{\theta} = s, \quad \dot{s} = -\left[ \alpha_r - \delta_n \varepsilon_s u_f \frac{(b + u_f)^2}{b} \right] s + \delta \left[ \frac{k_0 u_0}{k_0 + k_m} u_f \sin \theta + M_{nn} \right]. \quad (3)$$

Здесь обозначения те же, что и в (1) — (2). По сравнению с [1] здесь уточнено выражение для дестабилизирующего момента со стороны

сопротивлений статорных обмоток (член с  $\varepsilon_s$ ), что соответствует плоской картине магнитного поля в поперечном сечении СД.

Поскольку в большой ЭЭС, как показывает практика, отдельные ЭМ не оказывают влияния друг на друга, то принцип единой статической механической характеристики можно распространить и на систему, состоящую из достаточно большого числа синхронных генераторов, асинхронных и синхронных двигателей. Это значит, что характеристики для  $\theta$  и  $s$  у них одни и те же. То есть они расположены на одних и тех же кривых, но в разных точках. Моменты их имеют одно и то же направление вдоль общей оси вращения. Это — следствие корректности исходных уравнений отдельных ЭМ ЭЭС.

Так как моменты  $M_n$  имеют одно и то же направление, то мы можем суммировать их как скалярные величины. Таким образом, надо разрешить уравнения (1) и (3) относительно моментов нагрузки и сложить их все. Но предварительно упростим выражение для электромагнитного момента АД. Это можно сделать, так как в номинальном режиме его работы имеют место соотношения ( $K \sim 1$ ,  $s_n^2 \ll \alpha_r$ ). Значит можно написать  $\alpha_r s / (\alpha_r^2 + K^2 s^2) \approx s / \alpha_r$ . Теперь моменты нагрузки примут вид

$$M_{nj} = \frac{\dot{s}}{\delta_j} + \left( \frac{k_0 u_0}{k_0 + k_m} \right)^2 \frac{b s}{\alpha_r},$$

$$M_{nn} = \frac{\dot{s} + [\alpha_r - \delta_n \varepsilon_s u_f (b + u_f)^2 / b] s}{\delta_n} - \frac{k_0 u_0}{k_0 + k_c} \sin \theta.$$

Как это делалось в [1], при сложении моментов в безразмерной форме их надо умножать на соответствующие коэффициенты мощностей. Учитывая это, найдем

$$\sum_{j=1}^m k_j M_{nj} + \sum_{n=1}^n k_n M_{nn} = \left\{ \sum_{j=1}^m \left( \frac{k_j}{\delta_j} \right) + k_c \right\} \dot{s} +$$

$$+ \left\{ \left[ \left( \frac{k_0 u_0}{k_0 + k_m} \right)^2 \frac{k_m b}{\alpha_r} + \alpha_r k_c \right] - \varepsilon_s u_f \frac{(b + u_f)^2}{b} k_c \right\} s - \frac{k_c k_0 u_0}{k_0 + k_c} \sin \theta,$$

где в последних выражениях  $k_c = \sum_{n=1}^l (k_n / \delta_n)$ .

Для сокращения записи введем обозначения:



$$M_{н\Sigma} = \sum_{j=1}^m k_j M_{нj} + \sum_{n=1}^n k_n M_{нn},$$

$$\delta_\Sigma = \frac{1}{\sum_{j=1}^m (\frac{k_j}{\delta_j}) + \sum_{n=1}^l (\frac{k_n}{\delta_n})}, \quad \varepsilon_{s\Sigma} = \varepsilon_s u_f \frac{(b + u_f)^2}{b} k_c,$$

$$\alpha_{r\Sigma} = \left(\frac{k_0 u_0}{k_0 + k_m}\right)^2 \frac{k_m b}{\alpha_r} + \alpha_r \sum_{n=1}^l \left(\frac{k_n}{\delta_n}\right), \quad u_{f\Sigma} = \frac{k_c k_0 u_0}{k_0 + k_c}.$$

Тогда получим систему уравнений, описывающую статическую устойчивость асинхронно-синхронной машины, по этому свойству эквивалентную рассматриваемой системе:

$$\dot{\theta} = s, \quad \dot{s} = \delta_\Sigma [-(\alpha_{r\Sigma} - \varepsilon_{s\Sigma})s + u_{f\Sigma} \sin \theta + M_{н\Sigma}].$$

Очевидно, что если в системе окажется  $\varepsilon_{s\Sigma} > \alpha_{r\Sigma}$ , то она потеряет устойчивость (пойдет "в разнос", т.к.  $s \rightarrow \infty$ ).

### Список литературы

1. Родоков Ф.Ф. Электрическая машина, эквивалентная электро-энергетической системе. I, II. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 1 (№ 1). С. 107-113.; Там же. 1999. Вып. 2 (№ 8). С. 97-102.

## О движениях тел с группой симметрии правильных многогранников при наличии роторов

*Р. Суликашвили*

Математический институт АН Грузии, Грузия

Исследованы стационарные движения симметричного гиростата с неподвижной точкой в ньютоновском поле сил и проанализировано влияние вращения ротора на движение гиростата и его устойчивость. В общем случае эта задача достаточно сложна. Поэтому рассматриваются сравнительно простые формы гиростатов, при которых удается показать, что в одних случаях это влияние незначительно, а в других - играет решающую роль.

Остановимся на некоторых ранее установленных автором [1] результатах, связанных с этой задачей. Из первоначальных работ в

этом направлении стало ясно, что динамика однородных твердых тел формы куба, цилиндра, либо конуса, со специально подобранными размерами, характеризуется рядом интересных свойств [2]. В частности, выяснилось, что в случае однородного конуса с шаровым эллипсоидом инерции существуют как прямые, так и косые относительные равновесия. Этот факт был неожиданным, поскольку в случае нешарового трехосного эллипсоида инерции таких косых равновесий не бывает.

Следует отметить, что в случае трехосного эллипсоида инерции поворот тела на угол не влияет на устойчивость относительного равновесия. В нашем же случае такой поворот превращает устойчивое относительное равновесие в неустойчивое, и наоборот. Такие факты наиболее наглядны на примере тел с равными моментами инерции. К ним, в частности, относятся тела с группой симметрии правильных многогранников.

1. Пусть  $G$  есть группа вращений, переводящих тело  $Q$  в себя. Каждое преобразование этой группы с матрицей  $S$  характеризуется следующими двумя свойствами: 1).  $S(\vec{OA}) = O\vec{A}'$ ,  $A, A' \in Q$ , 2).  $\rho(\vec{OA}) = \rho(O\vec{A}')$ . В этом случае говорят, что тело допускает симметрию группы  $G$ .

Рассматриваются три тела формы правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр, для которых группа преобразований обозначены соответственно через  $A_4$ ,  $S_4$ ,  $A_5$ .

Потенциал  $U(\vec{\gamma})$  сил ньютоновского тяготения таких тел с притягивающим центром  $N$  инвариантен относительно преобразований группы  $G$ , т.е.  $U(\vec{\gamma}) = U(S^T \vec{\gamma})$ . По определению он имеет вид

$$U(\vec{\gamma}) = -\frac{fM_0}{R} \int \int \int \frac{l^3 dm}{[1 + 2\varepsilon(\vec{\gamma}, \vec{r}) + \varepsilon^2 \tau^2]^{1/2}} \quad (1)$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \vec{\gamma} = \frac{\vec{R}}{R}, \quad \varepsilon = \frac{l}{R}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}}{l} \vec{R} = N\vec{O}, \quad \vec{r} = O\vec{A}.$$

Здесь через  $A, l$  обозначены соответственно произвольная точка и характерный размер,  $Ox_1x_2x_3$  - жестко связанная с телом система безразмерных координат.

Потенциал  $U(\vec{\gamma})$  рассматриваемых тел может быть выражен через полиномиальные инварианты  $j_1, j_2, j_3$  группы симметрии:  $U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \Pi(j_1, j_2, j_3)$ . При этом, для всех рассматриваемых тел

$j_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$  Инварианты  $j_2, j_3$  для тетраэдра, октаэдра и икосаэдра соответственно выражаются формулами:

$$\begin{aligned} j_2 &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, & j_3 &= \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2. \\ j_2 &= \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2, & j_3 &= \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2. \\ j_2 &= 4(\gamma_1^6 + \gamma_2^6 + \gamma_3^6) + 3(5 - \sqrt{5})(\gamma_1^4 \gamma_2^2 + \gamma_2^4 \gamma_3^2 + \gamma_3^4 \gamma_1^2) + \\ &\quad + 3(5 + \sqrt{5})(\gamma_1^2 \gamma_2^4 + \gamma_2^2 \gamma_3^4 + \gamma_3^2 \gamma_1^4) \\ j_3 &= 5(\gamma_1^{10} + \gamma_2^{10} + \gamma_3^{10}) + 9(5 - 2\sqrt{5})(\gamma_1^8 \gamma_2^2 + \gamma_2^8 \gamma_3^2 + \gamma_3^8 \gamma_1^2) + \\ &+ 9(5 + 2\sqrt{5})(\gamma_1^2 \gamma_2^8 + \gamma_2^2 \gamma_3^8 + \gamma_3^2 \gamma_1^8) + 21(5 - \sqrt{5})(\gamma_1^6 \gamma_2^4 + \gamma_2^6 \gamma_3^4 + \gamma_3^6 \gamma_1^4) + \\ &\quad + 21(5 + \sqrt{5})(\gamma_1^4 \gamma_2^6 + \gamma_2^4 \gamma_3^6 + \gamma_3^4 \gamma_1^6). \end{aligned}$$

Для всех рассматриваемых тел тензор инерции является шаровым  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ,  $I_1 = I_2 = I_3$ .

**2.** Построенные стационарные движения во многом зависят от поведения якобиана  $\partial(\Pi)/\partial(\gamma)$  в каждом отдельном случае. Якобиевы матрицы в пространстве  $R^3(\vec{\gamma})$  с координатами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  обращаются в нуль в вполне определенных плоскостях. Эти плоскости пересекаются между собой и с единичной сферической поверхностью  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ . При этом из нее высекаются так называемые фундаментальные треугольники. Их вершины называются полюсами соответствующих групп и играют важную роль в дальнейших рассуждениях.

Показано, что для любой группы симметрии  $\{A_4, S_4, A_4\} \in G$  уравнения движения допускают перманентные вращения вокруг осей, проходящих через полюса этих групп. Для построенных стационарных движений найдены достаточные условия устойчивости и установлены условия, когда они неустойчивы [3]. В частности, если тело состоит из равных масс  $m$ , сосредоточенных в вершинах правильного многогранника и жестко связанных между собой, то существуют перманентные вращения трех типов: 1) ось вращения проходит через вершины, 2) ось вращения проходит через середину ребра, 3) ось вращения проходит через центр грани правильного многогранника.

При этом вращение первого типа устойчиво и степень неустойчивости  $\chi = 0$ . Вращение второго типа неустойчиво, степень неустойчивости  $\chi = 1$ . Вращение третьего типа может оказаться как устой-

чивым, так и неустойчивым, и если оно устойчиво, то степень устойчивости  $\chi = 2$ .

**3.** Обратимся теперь к задаче о стационарном движении гири в ньютоновском поле сил. Пусть гири — твердое тело с неподвижной точкой  $O$  и шаровой полостью, внутри которой помещен шаровой ротор, который вращается относительно корпуса с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Центры полости и ротора расположены в точке  $O$ . Пусть  $G$  — некоторый правильный многогранник, в вершинах которого расположены одинаковые массы  $m$ , и центр масс тела совпадает с точкой  $O$ . Эти массы между собой соединены жестко невесомыми нерастяжимыми стержнями.

Движение гири происходит вокруг неподвижной точки  $O$ , в которой помещено начало системы координат  $Ox_1x_2x_3$ . Эта система с гири связана неизменно. Гири притягивается неподвижным центром  $N$  массы  $M_0$ . Тогда

$$U(\vec{\gamma}) = -fmM_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{[R^2 + 2Rr(\vec{\gamma}, \vec{e}_i) + r^2]^{1/2}}, \quad (2)$$

где  $\vec{e}_i = O\vec{A}_i/|OA_i| = O\vec{A}_i/r$ ,  $\vec{e}_i = (e_{1i}, e_{2i}, e_{3i})$ .

Уравнения движения гири имеют вид

$$\frac{d(I\vec{\omega} + \vec{K})}{dt} = (I\vec{\omega} + \vec{K}) \times \vec{\omega} + \vec{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \vec{\gamma}}, \quad \frac{d\vec{\gamma}}{dt} = \vec{\gamma} \times \vec{\omega}, \quad I = I_S + I_P,$$

где  $\vec{K} = \vec{K}(k_1, k_2, k_3)$  — вектор гири статического момента,  $I_S$  — момент инерции шара,  $I_P$  — центральный момент инерции системы точечных масс  $m$ .

Эти уравнения имеют три первых интеграла:  $V_1 = \frac{1}{2}(I\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) + U(\vec{\gamma}) = h$ ,  $V_2 = (I\vec{\omega} + \vec{K})\vec{\gamma} = P$ ,  $V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Рассмотрим множество стационарных движений гири. Оно определяется, как совокупность критических точек интеграла энергии  $V_1$  на совместном уровне интегралов  $V_2$  и  $V_3$ . Введем функцию  $W_{\lambda, \mu} = V_1 - \lambda(V_2 - P) + \frac{\mu}{2}(\gamma^2 - 1)$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  — неопределенные множители Лагранжа. Тогда множество стационарных движений находится из системы уравнений

$$\frac{\partial W_{\lambda, \mu}}{\partial \vec{\omega}} = I\vec{\omega} - \lambda I\vec{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial W_{\lambda, \mu}}{\partial \vec{\gamma}} = \lambda(I\vec{\omega} + \vec{K}) + U_{\vec{\gamma}} + \mu\vec{\gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial W_{\lambda, \mu}}{\partial \lambda} = (I\vec{\omega} + \vec{K})\vec{\gamma} - P = 0, \quad \frac{\partial W_{\lambda, \mu}}{\partial \mu} = \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1) = 0, \quad (3)$$

откуда следует, что  $\vec{\omega} = \lambda\vec{\gamma}$ , т.е. стационарное движение гиростата — это вращение с постоянной угловой скоростью. Кроме того, из условия (3) получаем уравнение для определения стационарных ориентаций

$$-\frac{[P - (\vec{K} \cdot \vec{\gamma})^2]}{I^2(\vec{\gamma})} I\vec{\gamma} - \frac{P - (\vec{K} \cdot \vec{\gamma})}{I(\vec{\gamma})} \vec{K} + \frac{\partial U}{\partial \vec{\gamma}} + \mu\vec{\gamma} = 0, \quad (4)$$

где  $I(\vec{\gamma}) = I_1\gamma_1^2 + I_2\gamma_2^2 + I_3\gamma_3^2$ ,  $I\vec{\gamma} = I_1\gamma_1 + I_2\gamma_2 + I_3\gamma_3$ .

Из (4) следует, что стационарные движения определяются как критические точки эффективного потенциала:

$$W_\mu = \frac{[P - (\vec{K} \cdot \vec{\gamma})^2]}{2I(\vec{\gamma})} + U(\vec{\gamma}) + \frac{\mu}{2}(\gamma^2 - 1),$$

и при этом уравнение стационарных движений имеет вид:  $\delta W_\mu = 0$ .

Построение решений системы (4) для потенциала (2) в общем случае сопряжено с принципиальными трудностями. Однако, если

$$\vec{K} = k\vec{\gamma}, \quad (5)$$

то стационарные движения определяются из уравнения

$$-(\vec{\gamma}, \frac{\partial U}{\partial \vec{\gamma}})\vec{\gamma} + \frac{\partial U}{\partial \vec{\gamma}} = 0.$$

Суммируя все вышесказанное приходим к утверждению

**Теорема.** *При выполнении условия (5) на стационарных движениях гиростата оси вращения совпадают с осями вращения твердого тела с нулевым гиростатическим моментом. Таким образом, существуют лишь такие вращения, для которых ось вращения проходит либо через вершину, либо через середину ребра, либо через центр грани правильного многогранника.*

Устойчивость найденных стационарных движений изучается при помощи второй вариации функции  $W_\mu$  на линейном многообразии  $\delta V_2 = (\vec{\gamma} \cdot \delta\vec{\gamma}) = 0$ .

Не выписывая выражения второй вариации, приведем достаточные условия устойчивости в частном случае, когда одна из вершин

тела обращена к притягивающему центру. Одна из них соответствует ориентации  $\vec{\gamma} = (0, 0, 1)$ .

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_3^2} + \frac{Pk - k^2}{I} - \frac{\partial U(0, 0, 1)}{\partial \gamma_3} = -\frac{6fmM_0R^2r^2}{(R^2 + r^2)^{5/2}} - fmM_0Rr \left[ \frac{1}{|R+r|^3} - \frac{1}{|R-r|^3} \right] + \frac{Pk - k^2}{I} > 0$$

При  $\vec{K} = 0$ ,  $R > r$  движение устойчиво в вековом смысле. Однако, если величина  $|\vec{K}|$  достаточно велика, то движение неустойчиво. В этом случае коэффициенты Пуанкаре отрицательны и степень неустойчивости равна нулю. Примечательно, что из предыдущих рассуждений следует, что степень неустойчивости движения равна размерности того элемента многогранника, которым он обращен к притягивающему центру.

### Список литературы

1. Суликашвили Р.С. О движении симметричного гиростата в ньютоновском поле сил // ПММ, 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 512-514.
2. Суликашвили Р.С. Влияние моментов инерции высших порядков на динамику твердого тела с неподвижной точкой // Задача исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С. 90-104.
3. Суликашвили Р.С. О стационарных движениях тел, допускающих группы симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ, 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582-586.

### Неголономная неидеальная неудерживающая связь в задаче управления нелинейной системой

*К. К. Тверев*

(kkk@phoenix.math.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Эта задача одновременно простая (всего одна механическая степень свободы), принципиально нелинейная, включает в себя мощное процессорное управление, актуальна для промышленности и отражает некоторые особенности техники XXI века.

Механическое вращение ротора асинхронного двигателя описывается уравнением

$$J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = M_{\text{эм}} - M_{\text{нагр}}, \quad (1)$$

в котором  $J$  — момент инерции,  $M_{\text{эм}}$  — момент, создаваемый электромагнитными силами,  $M_{\text{нагр}}$  — момент нагрузки ротора. Добавляя к уравнению (1) закон формирования момента  $M_{\text{эм}}$  и переходя к безразмерным переменным, в результате приходим к следующей замкнутой системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \omega, & \dot{\omega} &= a(b(\Psi_y X_x - \Psi_x X_y) - M_{\text{нагр}}/J), \\ \dot{\Psi}_x &= \nu \Psi_y - \alpha_s \Psi_x - U_x, & \dot{\Psi}_y &= -\nu \Psi_x - \alpha_s \Psi_y - U_y, \\ \dot{X}_x &= \Psi_x - \alpha_r X_x + s X_y, & \dot{X}_y &= \Psi_y - \alpha_r X_y - s X_x, \end{aligned} \quad (2)$$

В этой системе  $\Psi_x, \Psi_y$  — потокосцепления,  $X_x, X_y$  — гибридные переменные [1], причем токи статора (доступные для измерения) суть линейные комбинации  $i_x = (\Psi_x - \alpha_r(1 - \mu)X_x)/\mu$ ,  $i_y = (\Psi_y - \alpha_r(1 - \mu)X_y)/\mu$ . Здесь  $\mu$  — коэффициент рассеяния.

Для управления двигателем используется широтно-импульсный преобразователь на биполярных транзисторах с изолированным затвором (IGBT PWM). Он обеспечивает напряжения  $U_x, U_y$  при частоте  $\nu$ . Система (2) содержит также скольжение  $s = \nu - \omega$  и параметры двигателя  $a, b, \alpha_r, \alpha_s$ .

Пожелания к характеристикам привода формулируются в виде программных связей. При этом возникает иерархическая система связей. На высшей ступени — связи, обеспечиваемые интеллектуальными IGBT модулями. Все остальные, строго говоря, и не связи, а уравнения характерных гиперповерхностей для управляющих силовых полей.

Итак, 1-й уровень — связи на фазные токи  $i_A, i_B, i_C$ :  
 $\|i_A\| \leq i_0, \quad \|i_B\| \leq i_0, \quad \|i_C\| \leq i_0, \quad \|i_A + i_B + i_C\| \leq i_0.$

Выполнение этих связей во всех неаварийных случаях осуществляется за счет связи 2-го уровня. Эта связь, давшая название статье, служит для ухода от неконтролируемых связей 1-го уровня и защищает двигатель от перегрузок. Она имеет вид

$$i_x^2 + i_y^2 \leq i_0 - \varepsilon, \quad (0 < \varepsilon < i_0). \quad (3)$$

Эта связь неголономна как дифференциальная ( $i = \dot{q}$ ) неудерживающая. Выполнение этой неголономной неудерживающей связи

осуществляется только за счет реакции  $u = U_y$ . В этом смысле она является неидеальной.

Следующий, 3-й уровень по иерархии связей — это условие работы асинхронного двигателя с приемлемым КПД (и в зоне гарантированной устойчивости). Эта связь задается в виде  $\|s\| \leq \alpha_r$ . Выполнение этой связи обеспечивается за счет возможности управлять частотой  $\nu$ .

Закон вращения является связью 4-го уровня. Он выражается уравнением:  $\dot{\gamma} = \omega_{\text{прог}}$ . Эта связь обеспечивается моментом  $M_{\text{эм}}$ , величина которого зависит от  $u, \nu$ . Подбирая закон изменения переменных  $u, \nu$ , удовлетворяем уравнению программной связи 4-го уровня.

Оптимальный режим работы двигателя (max КПД, max  $\cos(\varphi)$ ) — это последний, 5-й уровень в иерархии связей. Он выражается уравнением  $\|s\| = s_{\text{ном}}$ , ( $0 < s_{\text{ном}} < \alpha_r = s_{\text{критическое}}$ ).

Эта связь является двойственной, так как выполняется как при  $s = s_{\text{ном}}$ , так и при  $s = -s_{\text{ном}}$ . При некоторых программных движениях (4) необходим переход от режима, когда  $s > 0$ , к режиму  $s < 0$ , и обратно. Это чревато самовозбуждением системы.

Выполнение перечисленных ограничений при доступности для управления только  $u, \nu$  оказывается, однако, возможным, так как ограничения, задаваемые в виде неравенств, выполняются при работе в номинальном режиме.

В силу специфики системы и  $\dot{\gamma}$ , и  $s$  недоступны для измерения. Поэтому система управления содержит математическую модель, обеспечивающую их вычисление. Исследована зависимость погрешности этой модели от точности определения параметров  $\alpha_s, \alpha_r$  при различных программах движения и различных моментах нагрузки  $M_{\text{нагр}}(t, \omega)$ . Исследовано также влияние погрешности измерений (разрядности ADC/DAC) на качество управления.

Данная работа показывает, таким образом, что задачу оптимального управления асинхронным двигателем можно решить с помощью уравнений, предложенных Ф. Ф. Родюковым [1].

### Список литературы

1. Родюков Ф. Ф., Львович А. Ю. Уравнения электрических машин. Изд-во СПбГУ. 1997. 270 с.



**Задача о движении тяжелого твердого тела  
вокруг неподвижной точки, когда центр  
тяжести расположен на главной плоскости  
эллипсоида инерции для неподвижной точки**

*В. Н. Тхай, А. Л. Швыгин*  
(tkhai@ccas.ru, shvyghin@mtu-net.ru)

Московская государственная академия приборостроения  
и информатики, Россия

1. Движение гиростата вокруг неподвижной точки  $\mathbf{O}$  описывается известными уравнениями Н. Г. Жуковского [1]

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr + \lambda_3q - \lambda_2r &= P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2r - \gamma_3q, \\ B\dot{q} - (C - A)pr + \lambda_1r - \lambda_3p &= P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3p - \gamma_1r, \\ C\dot{r} - (A - B)qp + \lambda_2p - \lambda_1q &= P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1q - \gamma_2p \end{aligned} \quad (1)$$

( $A, B, C$  – главные моменты инерции относительно неподвижной точки,  $p, q, r$  – проекции мгновенной угловой скорости тела на оси подвижной системы координат  $\mathbf{O}xyz$  с осями, направленными по главным осям инерции тела для неподвижной точки,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – направляющие косинусы восходящей вертикали  $\bar{\gamma}$  в точке  $\mathbf{O}$  в системе координат  $\mathbf{O}xyz$ ,  $P = mg$  – вес тела,  $x_0, y_0, z_0$  – координаты центра тяжести  $\mathbf{G}$  в подвижной системе координат,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – компоненты гиросtatического момента в системе координат  $\mathbf{O}xyz$ ).

Система (1) допускает три классических интеграла – энергии, кинетического момента и геометрический

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2\mu(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) &= 2h = const, \\ (Ap + \lambda_1)\gamma_1 + (Bq + \lambda_2)\gamma_2 + (Cr + \lambda_3)\gamma_3 &= \sigma = const, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

В случае, когда центр тяжести находится на одной из главных плоскостей инерции, а гиросtatический момент лежит на перпендикуляре к этой плоскости из неподвижной точки (т. е.  $z_0 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ), система (1) допускает семейство решений, описываемое системой

$$C\dot{r} = P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2r, \quad \dot{\gamma}_2 = -\gamma_1r, \quad p = q = \gamma_3 = 0. \quad (2)$$

В этом случае положим  $\gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi$ . Тогда последние два уравнения в (2) дадут  $\dot{\varphi} = -r$ . Подставляя это  $r$  в первое

уравнение системы (2), получим

$$C\ddot{\varphi} = P(y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi). \quad (3)$$

Уравнение (3) совпадает с уравнением физического маятника. Значит, при  $z_0 = 0$  гири стат с неподвижной точкой допускает движения "маятникового типа". Эти движения представляют собой колебания и вращения вокруг проходящей через неподвижную точку горизонтальной оси. Решение не зависит от гири статического момента и поэтому имеет вид решения, полученного Б. К. Млодзеевским [2].

Выпишем интеграл энергии для уравнения (3)

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2h^*}{C} \left( 1 - \frac{Pl}{h^*} \left( \frac{x_0}{l} \cos \varphi + \frac{y_0}{l} \sin \varphi \right) \right)$$

( $h^*$  – постоянная энергии на "маятниковых" движениях,  $l$  – расстояние от неподвижной точки  $\mathbf{O}$  до центра тяжести  $\mathbf{G}$ ). Скорость  $\dot{\varphi}$  не обращается в нуль при  $Pl/h^* < 1$ , и здесь мы имеем дело с вращениями. В случае, когда  $Pl/h^* > 1$ , скорость  $\dot{\varphi} = 0$  при  $\varphi \neq 0$  и уравнение (3) в этом случае описывает колебания.

Задача об устойчивости маятникообразных движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (случай  $\lambda = 0$ ) исследовалась в ряде работ [3, 5, 4, 6]. Получены необходимые условия устойчивости колебаний [3] и вращений [5], проведено исследование устойчивости вращений при  $\mu = Pl/h^* \ll 1$  (случай быстрых вращений и вращений, близких к постоянным вращениям) [4], результаты для произвольных вращений изложены в [6]. Отметим, что на вращениях всегда  $|\mu| < 1$ . Ниже задача рассматривается при любом  $\lambda$  ( $|\mu| < 1$ ).

**2.** Положим  $\gamma_1 = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\gamma_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\gamma_3 = \cos \theta$  ( $\varphi, \theta$  – углы Эйлера). Тогда система (1) приводится к системе 5-го порядка. На вращениях так же, как и на близких к вращениям движениях, имеем  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Поэтому при исследовании окрестности вращений в качестве нового времени можно взять монотонно меняющийся угол  $\varphi$ . Тем самым порядок полученной системы понижается до 4-го.

Теперь введем новые безразмерные переменные и параметры

$$p_1 = \frac{p}{n}, \quad q_1 = \frac{q}{n}, \quad r_1 = \frac{r}{n}, \quad n = \sqrt{\frac{2h^*}{C}},$$

$$\alpha = \frac{A}{C}, \quad \beta = \frac{B}{C}, \quad \mu = \frac{2Pl}{Cn^2} = \frac{Pl}{h^*}, \quad x_1 = \frac{x_0}{l}, \quad y_1 = \frac{y_0}{l}, \quad \lambda = \frac{\lambda_3}{Cn}.$$

Получим безразмерную систему, в которой вращение задается формулами

$$p_1^* = q_1^* = 0, \quad r_1^{*2} = 1 - \mu(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi), \quad \theta^* = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Исследуем устойчивость решения (4) для  $|\mu| < 1$  при  $y_0 = 0$ . Отметим, что при  $y_0 = 0$  (центр тяжести тела  $\mathbf{G}$  находится на одной из главных осей инерции) система 4-го порядка инвариантна относительно преобразования  $(-\varphi, p_1, -q_1, r_1, \theta) \mapsto (\varphi, p_1, q_1, r_1, \theta)$ . Используя интегралы, понизим порядок системы до 2-го. Полученная периодическая система 2-го порядка останется инвариантной относительно преобразования  $(-\varphi, p_1, -q_1) \mapsto (\varphi, p_1, q_1)$ ; т. е. является обратимой системой. Для такой обратимой системы при отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно, из чисто мнимых характеристических показателей почти всегда (неравенство нулю одного коэффициента в нормальной форме) следует устойчивость по Ляпунову [7].

Выпишем для полученной системы 2-го порядка уравнения в вариациях, отвечающие вращениям,

$$\begin{aligned} \delta p_1' &= \left( \frac{\beta - 1}{\alpha} - \lambda \right) \delta q_1, \\ \delta q_1' &= \left( \frac{1 - \alpha}{\beta} + \lambda - \frac{\alpha}{2\beta} \frac{\mu \cos \varphi}{r_1^*(r_1^* + \lambda)} \right) \delta p_1 - \frac{1}{2} \frac{\mu \sin \varphi}{r_1^*(r_1^* + \lambda)} \delta q_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Из динамических свойств главных моментов инерции имеем

$$A + B < C, \quad A + C < B, \quad B + C < A.$$

Следовательно, первые два параметра подчинены условиям

$$\alpha + \beta < 1, \quad 1 + \alpha < \beta, \quad 1 + \beta < \alpha,$$

которые ограничивают динамически возможную область в пространстве параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Кроме того, система (5) не меняется при изменении знака параметра  $\mu$  и сдвиге времени  $\varphi$  на  $\pi$ . Следовательно, можно ограничиться исследованием устойчивости при  $0 \leq \mu < 1$ .

**3.** Вычисление характеристических показателей системы (5) проведем численно. При этом свойство обратимости системы (5) позволяет ограничиться [8] построением только одного частного решения задачи Коши. Резонансные кривые определяются по формулам  $\lambda = (2\pi i)^{-1} \arccos \delta p_1^+(2\pi)$ ,  $k\lambda = s$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ;  $s \in Z$ ), где  $\delta p_1^+(2\pi)$  – значение  $\delta p_1$  в момент времени  $\varphi = 2\pi$  при начальном значении вектора  $(\delta p_1(0), \delta q_1(0))^T = (1, 0)^T$ ; (т – транспонирование).

Результаты расчетов приведены на рис. 1 – 8. На них заштрихованы области устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (03-01-00052), программы "Университеты России" (УР.04.01.055).

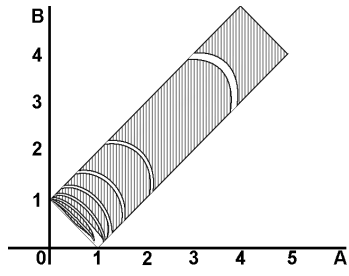


Рис. 1:  $\mu = 0.5, \lambda = -1,5$

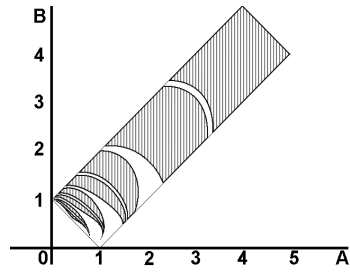


Рис. 2:  $\mu = 0.95, \lambda = -1,5$

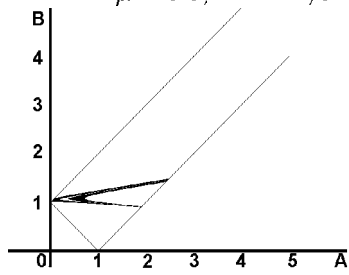


Рис. 3:  $\mu = 0.5, \lambda = -1$

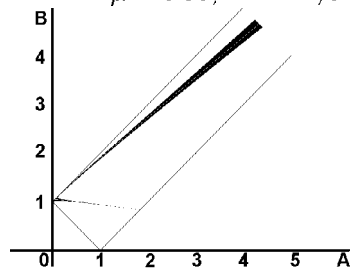


Рис. 4:  $\mu = 0.95, \lambda = -1$

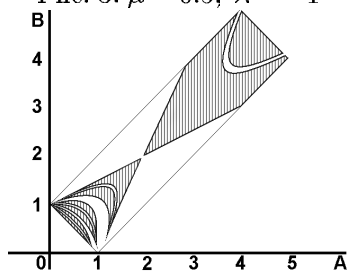


Рис. 5:  $\mu = 0.5, \lambda = 0.5$

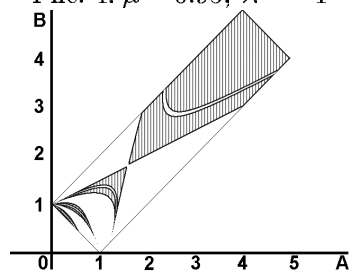


Рис. 6:  $\mu = 0.95, \lambda = 0.5$

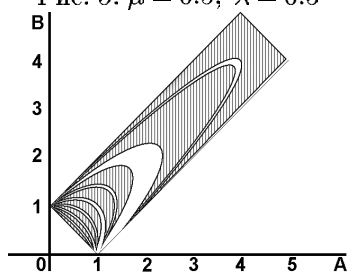


Рис. 7:  $\mu = 0.5, \lambda = 1$

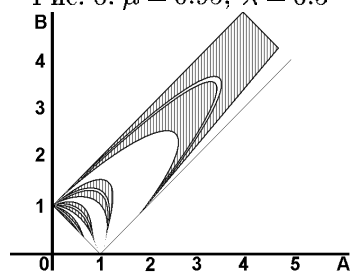


Рис. 8:  $\mu = 0.95, \lambda = 1$

## Список литературы

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 1. С. 31-152. (Изд. 1-е. Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ., отд. 1, 1885. 17. Вып. 6 С. 81-113; Вып. 7. С. 145-149; Вып. 8. С. 231-280).
2. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этногр. М.: 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46-48.
3. *Аргангельский Ю.А.* Об устойчивости движения тяжелого твердого тела, вокруг неподвижной точки в одном частном случае // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 294 – 302.
4. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. ММТ. 1988. № 4. С. 29 – 36.
5. *Докшевич А.И.* Об уравнениях в вариациях, соответствующих вращению тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, вокруг горизонтальной оси // Математическая физика.-Киев: Наук. думка, 1968. Вып. 5. С. 68-73.
6. *Тхай В.Н., Швыгин А.Л.* Об устойчивости вращений вокруг горизонтальной оси тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2000. Ч. 2. С. 149–157.
7. *Бибиков Ю.Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 144 с.
8. *Зимовицков А.С., Тхай В.Н.* Об устойчивости треугольных решений неограниченной задачи трех тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1998. С. 117 – 130.

## Задача Стокера для дискретных систем синхронизации

*Н. В. Утина, А. И. Шепелявый*  
(as@as1020.spb.edu)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается аналог задачи Стокера о числе проскальзываний циклов для многомерных дискретных систем автоматического управления с одной периодической нелинейностью. Впервые зада-

ча о числе проскальзываний циклов была поставлена и решалась Дж. Стокером (1950) [1] на примере уравнения, описывающего свободное движение маятника в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату угловой скорости. Задача заключалась в поиске интервала начальных скоростей, при которых движение маятника осуществляется с предварительно заданным числом оборотов (циклов) прежде, чем он перейдет в режим затухающих колебаний около состояния равновесия. Для многомерных непрерывных систем в работах [2, 3, 4] рассматривались задачи, связанные не только с оценками числа проскальзываний циклов, но и с оценками некоторых других характеристик переходных процессов в непрерывных системах произвольного порядка.

Рассмотрим многомерную дискретную систему

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + b\xi(n), \\ \sigma(n+1) &= \sigma(n) + c^*x(n) - \rho\xi(n), \\ \xi(n) &= \psi(\sigma(n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная вещественная  $(\nu \times \nu)$ -матрица,  $b, c$  — постоянные вещественные  $\nu$ -векторы,  $\rho$  — число,  $x, \sigma$  — соответственно  $\nu$ -мерная и скалярная компоненты вектора состояния системы,  $\psi(\sigma)$  — скалярная непрерывно дифференцируемая  $\Delta$ -периодическая функция, имеющая на периоде  $[0, \Delta)$  два однократных нуля  $\sigma_1, \sigma_2$ , число  $\mu$  таково, что  $|\psi'(\sigma)| \leq \mu$ . Линейная часть системы характеризуется передаточной функцией  $\chi(p) = c^*(A - pE_\nu)^{-1}b + \rho$ , от входа  $\xi$  к приращению выхода  $-(\sigma(n+1) - \sigma(n))$ , где  $E_\nu$  — единичная  $(\nu \times \nu)$ -матрица,  $p$  — комплексная переменная. Предполагаем, что передаточная функция невырождена. Будем говорить, что решение  $(x(n), \sigma(n))$  системы (1) с начальными данными  $(x(0), \sigma(0))$  проскальзывает  $t$  циклов, если для всех натуральных  $n$  выполняется  $|\sigma(n) - \sigma(0)| < \Delta(t+1)$ , и хотя бы для одного натурального числа  $n_0$  справедливо равенство  $|\sigma(n_0) - \sigma(0)| \geq \Delta t$ .

Ниже сформулированы утверждения, в которых при заданных оценках числа проскальзываний циклов для уравнений сравнения второго порядка маятникового типа даны оценки множества начальных состояний рассматриваемой многомерной дискретной системы, для которых соответствующие решения имеют те же заданные оценки числа проскальзываний циклов.

Для доказательства используется метод функций А. М. Ляпунова, расширенный на дискретные системы метод нелокального сведения Г. А. Леонова [5], частотная теорема В. А. Якубовича [6].

Для формулировки оценки снизу введем следующие квадратичные формы от векторной и скалярной переменных  $x, \xi$ :

$$W(x, \xi) = \lambda^{-2}(Ax + b\xi)^* H(Ax + b\xi) - x^* Hx + G(x, \xi), \quad (2)$$

$$G(x, \xi) = -\lambda^{-2}\xi c^* x + \varkappa \lambda^{-2}(c^* x)^2 + \beta \lambda^{-2}(c^* Ax)^2. \quad (3)$$

**Теорема 1.** *Предположим, что существуют числа  $k \in \mathbf{N}, \lambda \in (0, 1), \beta > 0, \alpha > (1 - \lambda^2)(2|\lambda c^* b| \sqrt{2\beta})^{-1}$ , такие, что для них выполнены следующие условия:*

- 1) матрица  $\lambda^{-1}A$  имеет только одно собственное число вне замкнутого единичного круга;
- 2) все собственные числа матрицы  $D = \lambda^{-1}(E - bc^*/c^*b)A$  расположены в открытом единичном круге;
- 3) уравнение  $\Theta'' + \alpha\Theta' + \psi(\Theta) = 0$  имеет решение  $\Theta(t)$  с начальными данными  $\Theta(0), \Theta'(0)$  такое, что существует  $t_1 > 0$  для которого  $\Theta(t_1) - \Theta(0) > \Delta k$  и для любого  $t \in (0, t_1)$  выполнено  $\Theta'(t) > 0$
- 4) для любого  $p \in \mathbf{C}, |p| = 1$ , выполнено частотное условие

$$\Re\{\chi(\lambda p)\} + \varkappa|\chi(\lambda p)|^2 + \beta|\lambda p \chi(\lambda p) + c^* b|^2 < 0,$$

$$\text{где } \varkappa = \max\{0, \max_{\Theta \in [\Theta(0), \Theta(t_1)]} [-\frac{1}{2}(\alpha F'(\Theta) + \psi'(\Theta))]\},$$

а функция  $F(\Theta) > 0, \Theta \in [\Theta(0), \Theta(t_1)]$  является решением уравнения  $F'F + \alpha F + \psi = 0$  с начальными данными  $F(\Theta(0)) = \Theta'(0)$ ;

5) для  $\gamma = 2\alpha\sqrt{2\beta}|\lambda c^* b| + \lambda^2 - 1$  выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\mu}[\sqrt{\alpha^2 + 4\mu} - \alpha] > \frac{\alpha\rho}{\gamma} + \sqrt{\frac{\alpha^2\rho^2}{\gamma^2} + \frac{2\rho}{\gamma}}.$$

Тогда для любого решения  $(x(n), \sigma(n))$  системы (1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\sigma(0) = \Theta(0), \quad c^* x(0) > 0, \quad x(0)^* Hx(0) < -1/2 \Theta'(0)^2,$$

где матрица  $H = H^*$  обеспечивает  $W(x, \sigma) < 0$ , существует  $N > 0$  такое, что  $\sigma(N) - \sigma(0) > \Delta k$ .

**Доказательство.** Рассматривается функция Ляпунова

$$V(x, \sigma) = x^* H x + 1/2 F^2(\sigma)$$

и ее приращение на решениях системы (1)

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda V(x(n), \sigma(n)) &= \lambda^{-2} V(x(n+1), \sigma(n+1)) - V(x(n), \sigma(n)) = \\ &= W(x(n), \xi(n)) + L(x(n), \sigma(n), \xi(n)), \end{aligned}$$

где

$$L(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = \frac{1}{2} [\lambda^{-2} F^2(\sigma(n+1)) - F^2(\sigma(n))] - G(x(n), \xi(n)),$$

$W(x, \xi)$  и  $G(x(n), \xi(n))$  определены по формулам (2), (3), а функция  $F(\sigma)$  соответствует решению уравнения маятникового типа, имеющему заданную оценку числа проскальзывания циклов.

Оценку  $W(x, \xi) < 0$  обеспечивает частотная теорема [6]. Для оценки  $L(x, \sigma, \xi)$  используются свойства решения  $F(\sigma)$  и расположение спектра матриц  $\lambda^{-1}A$  и  $D$ . Утверждение теоремы 1 следует из положительной инвариантности множества

$$\Omega = \{x \mid c^* x > 0\} \cap \{(x, \sigma) \mid V(x, \sigma) < 0\}.$$

Для оценки сверху рассмотрим квадратичную форму  $W(x, \xi)$ , определенную по формуле (2), но теперь

$$G(x, \xi) = (\varepsilon + \frac{1}{2}\beta)(c^* x - \rho\xi)^2 + \xi(c^* x - \rho\xi). \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Предположим, что существуют числа  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha^2 \leq 2(1 - \lambda^2)$  такие, что выполнены условия:*

- 1) *все собственные числа матрицы  $\lambda^{-1}A$  расположены в открытом единичном круге;*
- 2) *все решения уравнения  $\Theta'' + \alpha\Theta' + \psi(\Theta) = 0$  ограничены на интервале  $[0, +\infty)$ ;*
- 3) *пусть  $\Theta_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) – решения уравнения п. 2) с начальными данными  $(\Theta(0), \pm\Theta'(0))$ , обладающие свойством  $|\Theta_i(t) - \Theta_i(0)| < \Delta k$  для любого  $t \geq 0$ ;*
- 4) *для любого  $p \in \mathbf{C}$ ,  $|p| = 1$ , выполнено частотное условие*

$$\Re\{\chi(\lambda p)\} - (\varepsilon + 1/2 \beta)|\chi(\lambda p)|^2 > 0,$$



где

$$\beta = \max_{\Theta \in [\Theta(0) - k\Delta, \Theta(0) + k\Delta]} \{-(F'_i(\Theta)F_i(\Theta))'\},$$

а функции  $F_i(\Theta)$ , ( $i = 1, 2$ ) с начальными данными  $F_i^2(\Theta(0)) > \Theta'(0)^2$  являются решениями уравнения  $F'F + \alpha F + \psi = 0$ , и обладают свойствами  $F_1(\sigma(0) + k\Delta) = 0$ ,  $F_2(\sigma(0) - k\Delta) = 0$ ;

Тогда для любого решения  $(x(n), \sigma(n))$  системы (1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\sigma(0) = \Theta(0), \quad x(0)^* H x(0) < 1/2 \Theta'(0)^2,$$

где матрица  $H = H^*$  обеспечивает  $W(x, \sigma) < 0$  для любых  $n \geq 0$ , имеет место оценка  $|\sigma(n) - \sigma(0)| < \Delta k$ .

**Доказательство** Рассмотрим функции Ляпунова

$$V_i(x, \sigma) = x^* H x - 1/2 \lambda^2 F_i^2(\sigma)$$

и их приращения на решениях системы (1)

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) &= \lambda^{-2} V_i(x(n+1), \sigma(n+1)) - V_i(x(n), \sigma(n)) = \\ &= W(x(n), \xi(n)) + L(x(n), \sigma(n), \xi(n)), \end{aligned}$$

где

$$L(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = -\frac{1}{2} [F_i^2(\sigma(n+1)) - \lambda^2 F_i^2(\sigma(n))] - G(x(n), \xi(n)),$$

$W(x, \xi)$ ,  $G(x(n), \xi(n))$  определены по формулам (2), (4), а функции  $F_i(\sigma)$  описаны в условии 4).

Для оценки  $W(x, \xi) < 0$  используется частотная теорема [6]. Оценку  $L(x, \sigma, \xi) \leq 0$  обеспечивает выбор параметров  $\beta$ ,  $\varepsilon$  и выполнение условия  $\alpha^2 \leq 2(1 - \lambda^2)$ . Тогда имеем

$$\Delta_\lambda V_i(x(n), \sigma(n), \xi(n)) < 0 \quad \forall x(n), \sigma(n), \xi(n). \quad (5)$$

Для начальных данных  $F_i^2(\sigma(0)) > \Theta'(0)^2$  и  $x(0)^* H x(0) < 1/2 \Theta'(0)^2$  будет выполнено  $V_i(x(0), \sigma(0)) < 0$ . Учитывая (5), получаем неравенство  $V_i(x(n), \sigma(n)) < 0$ , справедливое для всех  $x(n), \sigma(n)$ . Если предположить, что утверждение теоремы не выполняется, то, пользуясь свойствами  $F_1(\sigma(0) + k\Delta) = 0$ ,  $F_2(\sigma(0) - k\Delta) = 0$  функций  $F_i(\sigma)$  и

положительной определенностью матрицы  $H$ , приходим к противоречию с доказанным фактом  $V_i(x, \sigma) < 0$  для любых  $x, \sigma$ .

**Замечание.** Матрицы  $H$ , обеспечивающие отрицательную определенность соответствующих квадратичных форм, по частотной теореме [6] существуют и могут быть найдены по алгоритмам, описанным, например, в [7].

#### Список литературы

1. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностранной лит-ры. 1952. 256 с.  
*J.J. Stoker* Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York, 1950.
2. *Ершова О.Б., Леонов Г.А.* Частотные оценки числа проскальзываний циклов в фазовых системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1983. № 5. С. 65-72.
3. *Киселева О.Б.* Частотные оценки характеристик переходных процессов в нелинейных фазовых системах. Диссертация на соискание уч. степ. к.ф.-м.н. СПб, 1987.
4. *Али-Хабиб* Частотные оценки числа проскальзываний циклов в системах синхронизации. Диссертация на соискание уч. степени к.ф.-м.н., СПб, 1997.
5. *Леонов Г.А., Шепелявый А.И.* Частотный критерий неустойчивости дискретных фазовых систем. ВИНТИ // Депонирована от 02.07.84.г. № 4502-84. 14 с.
6. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. матем. ж., 1973. Т. 14. № 2. С. 384-419.
7. *Андреев В.А., Шепелявый А.И.* Синтез оптимальных управлений для дискретных систем в задаче минимизации квадратичного функционала // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 8 (1971) 8/9. С. 549-568.

## Stabilization of the synphase postcritical regime of rotation of vibroexciters by means of internal degree of freedom.

*I. I. Blekhman*<sup>1</sup> (*blekhman@vibro.ipme.ru*)

*L. Sperling*<sup>2</sup> (*Lutz.Sperling@Masch-Bau.Uni-Magdeburg.DE*)

<sup>1</sup>Mekhanobr-Tekhnika Corp. and Institute of the Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Otto-von-Güricke-Universitaet, Magdeburg, Germany

The problem of synchronization of dynamic objects with the internal degrees of freedom, set out by the authors in a general form, is of interest for the vibrational technology, for celestial mechanics and for theoretic physics. However, at present this problem is at the initial stage of its solution. The presentation considers the simplest version of this problem - i.e. the problem of self-synchronization of two similar unbalanced vibro-exciters whose rotors are installed coaxially and centrally on a softly vibro-isolated solid body and are supplied with additional masses connected with the rotors by means of springs. This system is remarkable by the fact that on the one hand it allows an exact investigation of the synchronous regime, on the other hand - makes it possible to determine the peculiarity of the problems of this class and the technical potentialities, connected with the use of such systems. In particular, the question has been considered about the possibility of stabilization of the synphase regime of the synchronous rotation of exciters.

**1. Description of the system.** The scheme of the system under consideration is shown in Fig. 1, a. Two identical co-axial vibro-exciters are installed on a solid body with mass  $M^0$ . The axes pass through the center of gravity of the body. Inside the rotor of each exciter there is an additional mass  $m$ , connected with the rotor by springs with the stiffness  $c_\rho$  and  $c_\psi$  and the damping elements  $h_\rho$  and  $h_\psi$  in radial and circumferential directions. A version can be realized when the additional masses have not two, but only one degree of freedom, i.e. they can be displaced inside the rotor along a certain symmetrical curve  $\rho_s = \rho_s(\psi_s)$  where  $\rho_s$  and  $\psi_s$  ( $s = 1, 2$ ) are the polar coordinates of the mass  $m$ , (Fig. 1, b and c). The mass  $M^0$  may be connected with the other mass  $M_1^0$  by elastic elements with the total stiffness  $c_1$  and with the damping elements with the reduced factor of viscous resistance  $h_1$ .

The  $M_1^0$  is assumed to be either free or connected with the base

by elastic elements with negligibly small rigidities. The rotors have “intrinsic” eccentricities  $\varepsilon$ , their masses (without taking into consideration the additional masses  $m$ ) are denoted by  $m_0$ . The system is assumed to perform plane motions (in the plane, perpendicular to the axes of rotation of the rotors). Partial frequencies of the exciters are considered to be equal. The position of the rotors is preassigned by the angles of rotation  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$ , of the masses  $m$  by the polar coordinates  $\rho_s$  and  $\psi_s$ , and of the masses  $M^0$  and  $M_1^0$  by the coordinates  $x, y$  and  $x_1, y_1$  respectively (Fig. 1, b, c).

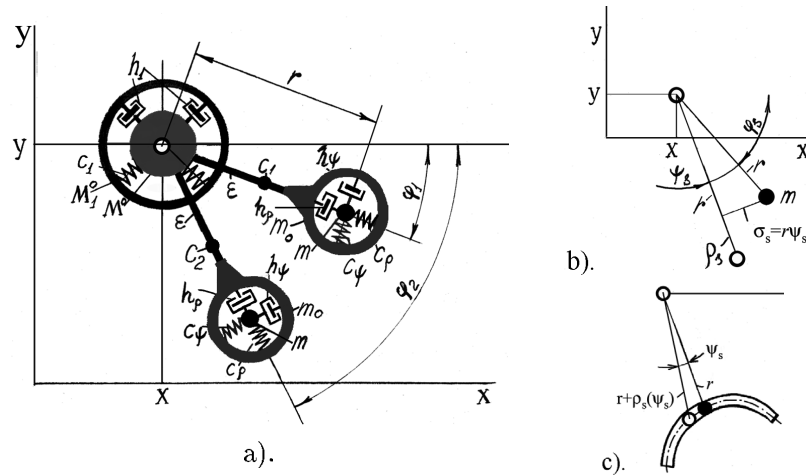


Fig. 1. The simplest system with two identical co-axial vibro-exciters: a). the general scheme, b). the coordinates of the additional mass  $m$  in the general case, c). the coordinates of the mass  $m$  in the case  $\rho_s = \rho_s(\psi_s)$ .

**2. Synchronization in case of the exciters without an internal degree of freedom.** In the absence of the internal degrees of freedom of the exciters, i.e. for  $m = 0$  (or for  $c_\rho = c_\psi = 0$ ) it is easy to obtain from the previous investigations (see [1, 2, 3]) the following result (believing that the rotors rotate in the same direction, i.e.  $\sigma_1 = \sigma_2$ ):

1) in the *pre-resonance region*, i.e. for  $\omega < \sqrt{c_1/M_*}$  where  $M_* = M^0 M_1^0 / (M^0 + M_1^0)$  the synphase synchronous rotation of the rotors is stable, with the bodies  $M_1^0$  and  $M_2^0$  performing circular oscillations.

2) In the *post-resonance region*, when  $\omega > \sqrt{c_1/M_*}$  the antiphase synchronous rotation of  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$  is stable, with the bodies  $M$  and  $M_1$  remaining fixed. The results are given in the upper part of the table.

**3. Results for the exciters with internal degree of freedom.** Without giving the equations of the system motion and the investigation process here, we will just state the result. The equations admit stationary solutions (we consider the case with the mass  $M_1$  absent and the additional masses with two internal degrees of freedom):

a. *the synphase solution*

$$\begin{aligned} \varphi_s = \varphi_s^0 = \omega t, \quad \rho_s = \rho^0, \quad \sigma_s = \sigma^0 = 0, \\ x = x^0 = -2A^0 \cos \omega t, \quad y = y^0 = 2A^0 \sin \omega t \quad (s = 1, 2). \end{aligned}$$

b. *the antiphase solution*

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_1^\pi = \omega t + \pi, \quad \varphi_2 = \varphi_2^\pi = \omega t, \\ \rho_s = \rho^\pi, \quad \sigma_s = \sigma^\pi = 0 \quad (s = 1, 2), \\ x = x^0 = 0, \quad y = y^0 = 0. \end{aligned}$$

Here we use the following notation:

$$\begin{aligned} \beta_\rho = \frac{h_\rho}{m}, \quad \beta_\sigma = \frac{h_\sigma}{m}, \quad \omega_\rho^2 = \frac{c_\rho}{m}, \quad \omega_\sigma^2 = \frac{c_\psi}{m}, \quad M = M^0 + 2m_0 + 2m, \\ \rho^0 = \frac{\kappa(-2A^0)}{1 - (1 - 2q)\kappa}, \quad \rho^\pi = r \frac{\kappa}{1 - \kappa}, \quad e^* = 1 - 2q, \quad q = \frac{m}{M}, \quad \kappa = \frac{\omega^2}{\omega_\rho^2}, \\ R^0 = r + \rho^0, \quad R^\pi = r + \rho^\pi, \quad R^{*0} = R^0 - 2A^0, \quad R^{*\pi} = R^\pi - 2A^\pi, \\ A^0 = \frac{S^0}{M}, \quad A^\pi = \frac{S^\pi}{M}, \quad I^0 = J + m_0\varepsilon^2 + mR^{0^2}, \quad I^\pi = J + m_0\varepsilon^2 + mR^{\pi^2}, \\ S^0 = m_0\varepsilon + mR^0, \quad S^\pi = m_0\varepsilon + mR^\pi, \\ I^{*0} = I^0 - 2MA^{0^2}, \quad I^{*\pi} = I^\pi - 2MA^{\pi^2}. \end{aligned}$$

The investigation of the stability of these solutions can be performed in the analytical form. This proves to be possible due to the fact that the system in variations with periodic coefficients is transformed into a system with constant coefficients. Besides, this system after another transformation splits into two subsystems of a lower order. The results for the cases  $c_\psi \rightarrow \infty$ ,  $\omega_\sigma \rightarrow \infty$  and  $c_\rho \rightarrow \infty$ ,  $\omega_\rho \rightarrow \infty$  are given in the lower part of the table.

The table shows that the installation of the unbalanced rotors with the additional mass  $m$  makes it possible to control to a certain extent the stability of their synchronous motions. So, e.g. choosing the parameters of the system in accordance with the conditions  $\omega > \omega_\rho$  as  $\omega_\sigma \rightarrow \infty$  or  $\omega > \omega_\sigma$  as  $\omega_\rho \rightarrow \infty$ , we can make the antiphase rotation unstable, while in the case of solid rotors such rotation is stable for any  $\omega$ .

Rotors without internal degree of freedom				
Suppo- sition	Type of motions	Conditions of stability		
		Subsystem 1	Subsystem 2	General
$m = 0$ or $\omega_\rho \rightarrow \infty$ $\omega_\sigma \rightarrow \infty$	Antiphase	–	–	Stable at any $\omega$
	Synphase	–	–	Unstable at any $\omega$
Rotors with internal degree of freedom				
$\omega_\sigma \rightarrow \infty$	Antiphase	$\omega < \omega_\rho$	$\omega < \omega_\rho/\sqrt{e^*}$	$\omega < \omega_\rho$
	Synphase	1. $\omega > \omega_\rho$ 2. $A\omega^2 < \omega_\rho^2$  (temporal stability)	$\omega < \omega_\rho/\sqrt{e^*}$	1. $\omega > \omega_\rho$ 2. $\omega < \omega_\rho/\sqrt{e^*}$ 3. $A\omega^2 < \omega_\rho^2$  (temporal stability)
$\omega_\rho \rightarrow \infty$	Antiphase	$\omega < \omega_\sigma$	$\omega < \omega_\sigma$	$\omega < \omega_\sigma$
	Synphase	Unstable at any $\omega$	$\omega < \omega_\sigma/\sqrt{e^*}$	Unstable at any $\omega$

The non-dimensional coefficient  $A = 1 + 2MA^0/I^0 - 4mR^0/I^0$ .

It is natural to expect that in the instability region of the antiphase rotation the synphase rotation will be stable. However, as the research shows, that cannot be stated: as  $\omega_\rho \rightarrow \infty$  the rotation is unstable for any  $\omega$ , while as  $\omega_\sigma \rightarrow \infty$  only the temporal stability can take place. So, the important technical problem — stability guaranteeing of the synphase motion of the rotors of vibro-exciter on the carrying body, either softly vibro-isolated or free,— still has not been solved. In this connection it seems to be interesting to obtain, say, by means of numerical calculation, the character of the motion of the rotors in the region of instability of the antiphase rotation. It could be also of interest to clear up whether it is possible to achieve the aim by supplying the rotors with the additional masses moving in the guides according to the law  $\rho_s(\psi_s) = a\psi_s^2$  where the parameter can be either positive or negative. Also some other modifications of the synchronization scheme could be

under consideration.

**Acknowledgements.** The work has been performed with a support of the Russian Foundation for Basic Research (grant 03-01-00621)

## References

1. *Blekhman I. I.* Synchronization in Science and Technology. New York. (ASME)Press. 1988. 255 p.
2. *Sperling L.* Selbstsynchronisation statisch und dynamisch ungewichtiger Vibratoren. // Technische Mechanik. 14, 1 (1994). P. 9-24; 2 (1994). P. 85-96.
3. *Nagaev R. F.* Quasiconservative synchronizing systems. St. Petersburg: Nauka, 1996. (in Russian).

## Self-balancing of an anisotropically supported rigid rotor. Analytical part

*H. Duckstein, B. Ryzhik (Boris.Ryzhik@mb.uni-magdeburg.de),  
L. Sperling (Lutz.Sperling@masch-bau.uni-magdeburg.de)  
Otto-von-Güricke-Universitaet, Magdeburg, Germany*

**1. Introduction.** In 1932 Thearle [1] introduced a balancing system equipped with a pair of free-moving balls in a circular track. Arranged at the plane of unbalance of a statically unbalanced rotor, the balls automatically seek for positions under specific conditions such as to compensate for the inherent unbalance. This balancing method is of practical interest especially for rotors with variable unbalance such as washing and grinding machines, centrifuges, CD-drives. In 1977 Hedaya et al. [2] generalized the ball balancer by proposing a device with two tracks and four balls for automatic balancing of statically and dynamically unbalanced rigid rotors. Sperling et al. [3, 4] demonstrated that in the strongly post-critical frequency range (where all spring forces may be neglected) full compensation of rotor unbalances is possible only for rotors with a polar moment of inertia smaller than the transverse one, i. e. for rotors with a second critical speed. In [5] they generalized this result taking into account also the spring forces and showing that under this condition the complete compensation is possible if and only if the rotor speed is located beyond the second critical speed. To overcome this major restriction for applying the method to practice, Ryzhik et al.

[6] proposed to perform only partial compensation of unbalances. They demonstrated that a one-plane device is able to equilibrate the vibrations in the own plane, while, for the general rigid rotor, vibrations in the other planes remain not equal to zero. Nevertheless, when the position of device plane is properly chosen, the residual vibrations of the rotor are sufficiently less than those engendered by primary unbalance. The investigations mentioned above were restricted to isotropically supported rigid rotors. In the presented paper the influence of an anisotropy of supports is discussed.

**2. Rotor model and applied analytical methods.** The rotor is characterized by the mass  $M$  and the moments of inertia  $J_z, J_a$  with respect to the axis of rotation and central transverse axis. It rotates around axis  $z$  stationary or quasi-stationary with the speed  $\Omega$ ,  $\varphi_R = \Omega t$ , and is assumed to be axisymmetric, except for the primary unbalances. It has 4 vibrational degrees of freedom, described by the coordinates,  $\mathbf{q}_V = [r_x \ \psi_y \ r_y \ \psi_x]^T$ , (see Fig.1). The supports are characterized by their elastic forces and torques  $f_x = k_{11}r_x + k_{12}\psi_y$ ,  $f_y = k_{33}r_y - k_{34}\psi_x$ ,  $m_y = k_{12}r_x + k_{22}\psi_y$ ,  $m_x = -k_{34}r_y + k_{44}\psi_x$ . It is assumed that the balls roll without slipping around the circular track(s) of the single- or two-plane device. The damping moment caused by the viscous medium in the track(s) acting on the ball is assumed to be proportional to the difference of rotor and ball angular velocities.

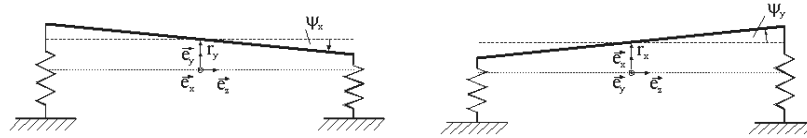


Fig. 1. Main system variables.

The basis of the analytical investigation are the nonlinear equations of motion for the rotor with balancing device, linearized in the vibrational coordinates [3-5]. By means of the method of direct separation of motions [7], applied to the equations of motion of the balls, after averaging the torques, acting on the balls because of the rotor vibrations, we obtain the so-called vibrational moments, causing the balls synchronization.

The vibrational moments depend on the stationary vibrational circular motions. For their approximate determination, we neglect in the corresponding differential equations the vibrational damping and the



masses of the balls and inherent unbalances in comparison with the rotor mass and consider the ball motions with constant phases. Thus, we obtain averaged equations of motion for the ball angular positions  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  with regard to  $\varphi_R$ . Conditions for the existence of constant phases in the average are the existence conditions for synchronous ball motions, and the stability conditions are restricted on the stability of these constant phasing.

**3. Results for the one-plane device with two balls.** The rotor vibrations in case of anisotropic support represent a superposition of the forward whirl with constant deflections in the frame  $\xi \eta z$  rotating with the rotor, and the backward whirl, representing vibrations with the frequency  $2\Omega$  in the rotating frame. The unbalanced forces influence directly only on the forward whirl. Hence, the aim of balancing is restricted on the complete or partial compensation of the forward whirl as the averaged vibrations.

Our investigations revealed that for the case of the single-plane device with two identical balls the parameter

$$\kappa = \frac{f_b}{\hat{r}_1^f} [A_{11}^x + A_{11}^y]. \quad (1)$$

(1) plays an important role. Here,  $f_b$  is the centrifugal force of one ball,  $A_{11}^x$  and  $A_{11}^y$  are the harmonical influence coefficients in the plane of device in  $x$ -direction and  $y$ -direction, respectively, taking into account also the gyroscopic  $\Omega$ -dependent torques, and  $\hat{r}_1^f$  is the averaged rotating displacement in the device plane, caused by the inherent rotor unbalances:  $\hat{r}_{1\xi}^f = \hat{r}_1^f \cos \alpha_1^f$ ,  $\hat{r}_{1\eta}^f = \hat{r}_1^f \sin \alpha_1^f$ .

When the condition  $|\kappa| > 1$  is fulfilled the equations for the ball positions have a solution of the type

$$\alpha_1^* = \alpha_1^f + \gamma, \quad \alpha_2^* = \alpha_1^f - \gamma, \quad \gamma = \arccos(-1/\kappa). \quad (2)$$

This phasing provides a compensation of the forward whirl in the plane of device. It is stable, when  $\kappa < 0$ .

Combining these two inequalities, we obtain the  $\kappa(\Omega) < -1$  for the stable forward whirl compensation. Simultaneous compensation of the backward whirl occurs only, if all proportions of the harmonical influence coefficients of the inherent and ball unbalances with regard to the device plane for  $x$ - and  $y$ - direction are identical.

The second synchronous solution  $\alpha_1^* = \alpha_1^f$ ,  $\alpha_1^* = \alpha_1^f$  is stable under the condition  $\kappa > -1$  and causes a decrease of the averaged vibrations for  $\kappa < 0$ , and their increase for  $\kappa > 0$ . All other synchronous solutions  $\alpha_1^* = \alpha_1^f + \pi$ ,  $\alpha_2^* = \alpha_1^f + \pi$ ;  $\alpha_1^* = \alpha_1^f$ ,  $\alpha_2^* = \alpha_1^f + \pi$ ; and  $\alpha_1^* = \alpha_1^f + \pi$ ,  $\alpha_1^* = \alpha_1^f$  are always unstable. Two special cases of rotor support are considered.

1. *Special Case:* The conditions  $\psi_y \equiv 0$ ,  $\psi_x \equiv 0$  are taken for granted due to support and rotor symmetry. For this known case, repeatedly examined in the literature, the condition for the simultaneous compensation of the backward whirl is fulfilled. The harmonical influence coefficients are

$$A_{11}^x = \frac{1}{M(\Omega_x^2 - \Omega^2)}, \quad A_{11}^y = \frac{1}{M(\Omega_y^2 - \Omega^2)}, \quad (3)$$

where  $\Omega_x^2 = k_{11}/M$ ,  $\Omega_y^2 = k_{33}/M$ .

The resultant centrifugal force  $f_{pr}$  of the primary unbalances causes vibrations with the amplitude

$$\hat{r}_1 = \frac{1}{2} f_{pr} (A_{11}^x + A_{11}^y) \quad (4)$$

and therefore the existence condition for compensation phasing becomes  $|\kappa| = \frac{2f_b}{f_{pr}} > 1$ . This phasing is stable under the condition

$$\frac{1}{\Omega_x^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\Omega_y^2 - \Omega^2} < 0, \quad (5)$$

which means that stable complete balancing is possible in the frequency ranges  $\Omega_x^2 < \Omega^2 < \frac{1}{2}(\Omega_x^2 + \Omega_y^2)$  and  $\Omega_y^2 < \Omega^2$  (we suppose that  $\Omega_x^2 < \Omega_y^2$ ).

2. *Special Case:* The conditions  $r_x \equiv 0$ ,  $r_y \equiv 0$  are taken for granted due to the special choice of supporting. The solutions of the quadratic equation

$$\Delta = (J_a^2 - J_z^2)\Omega^4 - J_a(k_{22} + k_{44})\Omega^2 + k_{22}k_{44} = 0 \quad (6)$$

are the squares of the critical speeds

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{J_a}{2(J_a^2 - J_z^2)} \left[ k_{22} + k_{44} \pm \sqrt{D} \right], \quad (7)$$

where  $D = (k_{22} - k_{44})^2 + 4 \left( \frac{J_z}{J_a} \right)^2 k_{22} k_{44}$ .

Under the condition  $J_z < J_a$  the rotor has two critical speeds  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  ( $\Omega_1 < \Omega_2$ ). Corresponding to formula (1) we obtain the coefficient

$$\kappa = \frac{2f_1}{\hat{r}_1^f(\Omega)\Delta} \left[ -(J_a - J_z)\Omega^2 + \frac{k_{22} + k_{44}}{2} \right] z_1^2, \quad (8)$$

where  $z_1$  is the  $z$ -coordinate of the balancing device. Again,  $|\kappa| > 1$  is the existence condition for the forward whirl compensation in the balancing plane. Provided that  $J_z < J_a$ , the stability condition can be rewritten in the form

$$-\frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2)} < 0 \quad (9)$$

where

$$\Omega_0^2 = \frac{k_{22} + k_{44}}{2(J_a + J_z)}, \quad \Omega_1^2 < \Omega_0^2 < \Omega_2^2, \quad (10)$$

which means that stable complete balancing is possible in the frequency ranges  $\Omega_1^2 < \Omega^2 < \Omega_0^2$  and  $\Omega_2^2 < \Omega^2$ .

**4. Some remarks for the two-plane device with two balls each.** Because in the strongly post-critical range all spring forces can be neglected, there is no difference between isotropic and anisotropic supporting here, which means that the complete compensation is always possible for rotors with a polar moment of inertia smaller than the transverse one (see [3], [4]). Moreover, corresponding to Blekhman's generalized self-balancing principle [7], we can guess that full compensation is possible also for anisotropically supported rotors beyond the highest critical speed, proposing that all critical speeds exist.

**5. Conclusion.** Anisotropy of the rotor supports affects a number and location of critical speeds and the possibility of complete or partial unbalance compensation in the lower frequency ranges, where spring forces play a relevant role. Generally, the results regarding the forward whirl compensation are similar to the results for the isotropically supported rotor.

**Acknowledgements** The authors would like to express their gratitude to the Deutsche Forschungsgemeinschaft for financial support (№ Sp 462/7-1).

## References

1. *Thearle E.L.* A new type of dynamic-balancing machine // Transactions of the ASME, 54, 12 (1932), p. 456-465.
2. *Hedaya M.T., Sharp R.S.* An analysis of a new type of automatic balancer // J. Mechanical Engineering Science, 19, 5 (1977), p. 221-226.
3. *Sperling L., Merten F., Duckstein H.* Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics // Int. J. Rotating Machinery 6, 4 (2000), p. 275-285.
4. *Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H.* Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor // Mathematics and Computers in Simulation, 58, 4 - 6 (2002), p. 351-365.
5. *Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H.* Two-plane automatic balancing // Machine Dynamics Problems, 25, 3/4 (2001), p. 139-152.
6. *Ryzhik B., Duckstein H., Sperling L.* Partial compensation of unbalance by one- and two-plane automatic balancing devices // Proc. of the IFToMM, Sixth International Conference on Rotor Dynamics, (2002), Sydney, Vol. I, p. 446-455.
7. *Blekhman I.I.* Vibrational Mechanics. World Scientific, Singapore, 2000. 509 p.

## Self-balancing of an anisotropically supported rigid rotor. Simulation results.

*H. Duckstein, B. Ryzhik (Boris.Ryzhik@mb.uni-magdeburg.de),  
L. Sperling (Lutz.Sperling@masch-bau.uni-magdeburg.de)*  
Otto-von-Güricke-Universitaet, Magdeburg, Germany

This is the second part of publication presenting investigations of self-balancing devices for rigid rotors. The first part contains an analytical study of one- and two-plane self-balancing devices for the rotor systems mounted on anisotropic supports. In this paper we present simulation results and general considerations about the vibration performance of autobalancing devices. Computer simulations were carried out employing the Advanced Continuous Simulation Language. We simulated transient processes of rotor acceleration and slow down. Simulations confirmed the results of analytical study. They have shown that self-balancing devices can successfully compensate the inherent unbalance of anisotropically supported rotor in some regions of rotational speed. For rotors with a

polar moment of inertia smaller than the transverse one in the frequency range beyond the highest critical speed the compensation of unbalance by means of two-plane devices can be total: balls seek positions such as to completely equilibrate inherent unbalance. In many applications rotors have a large polar moment of inertia, greater than the transverse one, or their nominal speed lay below the highest critical speed, so the complete compensation of unbalance is not possible. An analysis confirmed by simulation results shows that in such cases autobalancing devices can provide partial compensation of unbalance diminishing rotor vibrations. Some simulation results illustrating the peculiarities of vibration performance of anisotropically supported rotor with autobalancing device are presented in Fig.1-5.

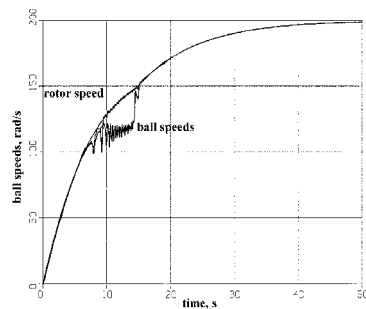


Fig.1. Complete compensation. Two-plane device.  
Ball and rotor speeds during run-up.

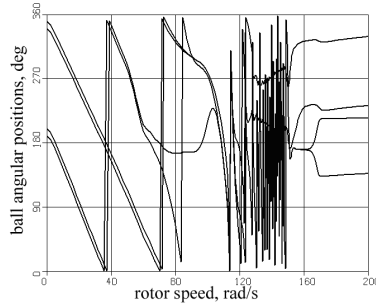


Fig.2. Complete compensation. Two-plane device.  
Ball angular positions during run-up.

Fig.1-3 demonstrate the process of complete unbalance compensation

in the region beyond the highest critical speed. Fig.1 shows rotor and ball speeds during the run-up. In the critical speed areas one can observe a non-synchronous motion of the balls similar to the well-known Sommerfeld-effect in unbalanced rotor systems with a limited driving moment. As can be seen, balls in a certain region continue to move at a speed close to the rotor eigenfrequency, whereas the rotor gains in speed and passes the critical speed area [1,2].

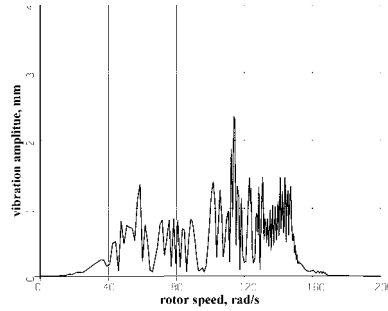


Fig.3. Complete compensation. Two-plane device.  
Amplitude of rotor vibrations in the plane of maximal inherited unbalance during run-up.

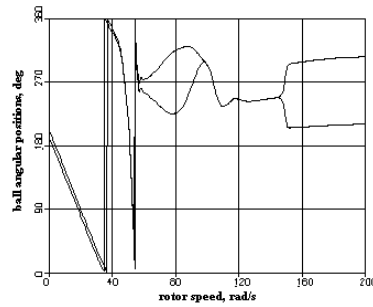


Fig.4. Partial compensation. One-plane device.  
Ball angular positions during run-up.

In the post-critical area balls synchronize with the rotor providing compensation of inherited unbalance. The angular positions of the balls are shown in Fig.2. When the condition  $J_a > J_z$  is fulfilled and parameters of device are properly chosen, a two-plane device completely

compensates initial unbalance in the region beyond the highest critical speed: the summary unbalanced forces and unbalanced moments, as well as rotor vibrations, become equal to zero (Fig.3). The positions of the balls and "results" of complete unbalance compensation are identical for the isotropically and anisotropically supported rotors. The difference between these types of supporting consists in appearance of the double frequency "back whirl" vibrations in the regions where unbalanced forces are not compensated (Fig.3).

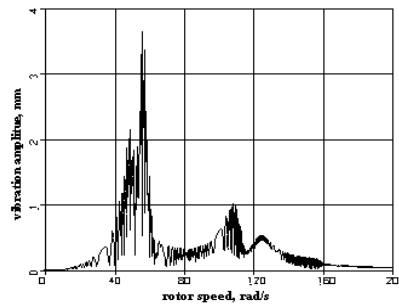


Fig.5. Partial compensation. One-plane device.

Amplitude of rotor vibrations in the plane of device during run-up.

Fig.4-5 illustrate the process of partial unbalance compensation by a one-plane autobalancing device. The system under consideration has only one pair of critical speeds (50 and 120 rad/s) because its polar moment of inertia is greater than the transverse one. One can observe two zones where balls occupy compensation positions: short area beyond the first critical speed and the region after the second (highest) critical speed. In case of partial compensation balls provide only decrease of vibrations and unbalanced forces. In contrast to the case of isotropic supports, for the anisotropic supporting one-plane device does not eliminate completely the vibrations in the plane of device. It compensates only the forward whirl, while backward whirl component remains not equal to zero.

**Conclusion.** Autobalancing devices can efficiently compensate inherent unbalance and decrease rotor system vibrations both when supports are isotropic and anisotropic. In case of complete compensation all vibrations become equal to zero (at least theoretically, on practice there are always some residual vibrations). In case of partial compensation for isotropic supports vibrations in the plane of device become equal to

zero; for the anisotropic supports the residual backward whirl vibrations remain non-compensated.

**Acknowledgements.** The authors would like to express their gratitude to the Deutsche Forschungsgemeinschaft for financial support (№ Sp 462/7-1).

## References

1. Ryzhik B., Amer T., Duckstein H., Sperling L. Zum Sommerfeld-effect beim selbsttätigen Auswuchten in einer Ebene // Technische Mechanik, 21, 4, (2001), p. 297-312.
2. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Display of Sommerfeld-effect in a rigid rotor one-plane autobalancing device // Proc. of the APM-2002, (2002), St.Petersburg.

## Non-Noether Conserved Quantity of Nonholonomic System

*Mei Fengxiang*

Beijing Institute of Technology, Beijing, China

*A non-Noether conserved quantity of nonholonomic system of Chetaev's type is studied. The equations of motion of the system are established and the determining equations and restriction equations of Lie symmetry under special infinitesimal transformations of groups are obtained. An existence theorem of non-Noether conserved quantity of the system is given.*

**1. Equations of Motion and Lie Symmetry.** Let the position of a mechanical system be determined by  $n$  generalized coordinates  $q_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) and its motion be subjected to  $g$  ideal nonholonomic constraints of Chetaev's type

$$f_\beta(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0. \quad (1)$$

The equations of motion of the system can be written in the form[1-4]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, \dots, n), \quad (2)$$



where  $L$  is the Lagrangian,  $Q_s$  are the generalized non-potential forces and  $\lambda_\beta$  the multipliers. Suppose that the system is non-singular, from (2), we can find all generalized accelerations  $\ddot{q}_s$  as

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3)$$

Introduce the following special infinitesimal transformations of time and coordinates  $t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , where  $\varepsilon$  is an infinitesimal parameter and  $\xi_s$  are infinitesimal generators. The determining equations of Lie symmetry of equations(3) are

$$\frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_k, \quad (4)$$

where  $\bar{d}/dt = \partial/\partial t + \dot{q}_k \partial/\partial q_k + \alpha_k \partial/\partial \dot{q}_k$ .

The restriction equations of constraints are

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_k} \xi_k + \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_k} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_k = 0. \quad (5)$$

**2. Non-Noether Conserved Quantity Constructed by Using the Lie Symmetry.** The Hojman theorem [5] on non-Noether conserved quantity constructed by using the Lie symmetry for holonomic system can be generalized to nonholonomic systems as follows.

**Theorem.** If the infinitesimal generators  $\xi_s$  satisfy the determining equations (4) and the restriction equations (5), and there is a function  $\mu = \mu(t, \dot{q}, \ddot{q})$  such that

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{d}}{dt} \ln \mu = 0,$$

then the nonholonomic system (1),(2) possesses the following conserved quantity

$$I = \frac{1}{\mu} \frac{\partial(\mu \xi_s)}{\partial q_s} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left( \mu \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s \right) = \text{const}. \quad (6)$$

If there is no nonholonomic constraint, the above theorem becomes the Hojman theorem.

**3. Illustrated Example.** The Lagrangian of a system is  $L = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/2$ , the equation of nonholonomic constraint is  $f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1$ , and the generalized non-potential forces are  $Q_1 = Q_2 = 0$ .

Equations (3) become

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1, \quad \ddot{q}_2 = \frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1.$$

Equations (4) and (5) have the following solutions

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = (\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2)^2, \quad (7)$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2). \quad (8)$$

Using the Noether theory, we know that the generators (7), (8) are not Noether. The conserved quantity (6) gives

$$I = -2(\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2) = \text{const}, \quad I = -\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const}.$$

**Acknowledgement.** This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant № 19972010, 10272021).

### References

1. *Novoselov V.S.* Variational Methods in Mechanics. L.: Leningrad Univ. Press, 1996. 72 p. (in Russian).
2. *Polyakhov N.N., Zegzhda S.A., Yushkov M.P.* Theoretical Mechanics. L.: Leningrad Univ. Press, 1985. 536 p. (in Russian).
3. *Mei Fengxiang* Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1985. 793 p. (in Chinese).
4. *Mei Fengxiang* Nonholonomic mechanics // ASME, Appl. Mech. Rev., 2000, 53(11). P. 283-305.
5. *Hojman S.A.* A new conservation law constructed without using either Lagrangians and Hamiltonians // J. Phys. A: Math. Gen., 1992, 25. P. L291-L295.

# Non linear vibrations of an unbalanced rotor with radial clearance

*M. Pascal*

(mpascal@iup.univ-evry.fr)

Universite d'Evry Val d'Essonne, France

**1. Introduction.** This work originates from phenomena observed in large commercial jet aircraft when fan blade off occurs. The unbalance produced by this event induces the bending of the shafts of the motor engine, and during this motion, several contacts may appear. After a transient phase, the main rotor of the aircraft engine reaches a so-called "windmilling motion" inside some frequencies range depending on the velocity and on the altitude of the aircraft. Jump and hysteretic phenomena are observed during this motion [1].

In the past, several dynamical models were developed for the prediction of rotor dynamical behavior [2]. The first model taking into account the contact between the rotor and the casing is the Jeffcott rotor. The nonlinear behavior induced by this contact was first investigated in [3]. A physical model with two degrees of freedom, which represents the rotor system with a bearing clearance have been proposed in [4]. Several other investigators use more complex models including friction effect, onset condition for the dry whip, cross-coupling stiffness forces and so on [5, 6, 7]. In this work, the simplified model proposed in [4] is used with the addition of a snubbing stiffness in order to take into account the deformations occurring near the contact zone. Analytical solutions for the whirling motions of the rotor are obtained; a non dimensional analysis is performed in order to explain the mechanism leading to jump phenomenon and a detailed study of the stability conditions for these motions is performed.

**2. Simplified Model.** A simplified model for the dynamic behavior of the rotor system is shown in Fig. 1. In the section of contact between the rotor and the stator, the rotor is modelled by a disk of center  $O$ , radius  $R$  and of mass center  $M$ . The mass center  $M$  is displaced from  $O$ , by a distance  $e$ . The stator is modelled by a ring of center  $O_S$  and of inner radius  $R_S = R + \delta$ , where  $\delta$  is the clearance.

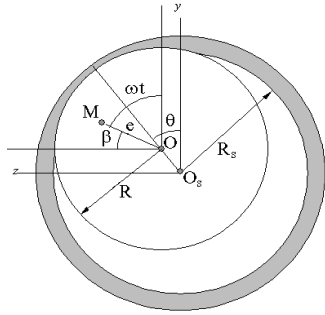


Fig. 1.

Let  $(v, w)$  denote the bending displacements of the rotor,  $\mu$  and  $\gamma$  its mass and stiffness,  $\zeta$  is the damping coefficient. Assuming that the stator is fixed, the motion equations of the rotor are given by

$$\begin{aligned} \mu \ddot{v} + 2\zeta \dot{v} + \gamma v &= N_1 + F_1, \\ \mu \ddot{w} + 2\zeta \dot{w} + \gamma w &= N_2 + F_2. \end{aligned} \quad (1)$$

In a first step, the gyroscopic effects are not taken into account.

The components of the unbalance force are obtained in terms of the mass unbalance  $\mu e$  and of the constant angular velocity  $\omega$  of the rotor

$$F_1 = \mu e \omega^2 \cos \omega t, \quad F_2 = \mu e \omega^2 \sin \omega t. \quad (2)$$

Assuming that the friction forces may be neglected, the components  $N_1$  and  $N_2$  of the contact force exerted by the stator on the rotor are given by

$$N_1 = -N \cos \theta, \quad N_2 = -N \sin \theta, \quad N = \begin{cases} K(r - \delta), & r \geq \delta \\ 0, & r \leq \delta, \end{cases} \quad (3)$$

where  $r, \theta$  are the polar coordinates ( $v = r \cos \theta, w = r \sin \theta$ ), and  $K > 0$  is the contact stiffness. In polar coordinates, the motion equations for  $r > \delta$  are given by

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + 2\zeta\dot{r} + \gamma r + K(r - \delta) &= \mu e \omega^2 \cos(\omega t - \theta), \\ \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + 2\zeta r\dot{\theta} &= \mu e \omega^2 \sin(\omega t - \theta). \end{aligned} \quad (4)$$

**3. Whirling motions.** A particular solution of (4) is given by  $r = a, \theta = \omega t + \beta$ , where  $a$  and  $\beta$  are constants obtained from the equations

$$(\gamma + K - \mu\omega^2)a - K\delta = \mu e \omega^2 \cos \beta, \quad -2a\zeta\omega = \mu e \omega^2 \sin \beta. \quad (5)$$

It results for the determination of the amplitude of the whirling motion the following equation

$$A(\omega)a^2 - 2B(\omega)a + C(\omega) = 0, \quad (6)$$

where  $A(\omega) = 4\zeta^2\omega^2 + (\gamma + K - \mu\omega^2)^2$ ,  $B(\omega) = K\delta(\gamma + K - \mu\omega^2)$ ,  $C(\omega) = K^2\delta^2 - \mu^2e^2\omega^4$ .

The phase angle is given by

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a\zeta\omega}{K\delta - (\gamma + K - \mu\omega^2)a}. \quad (7)$$

Two real solutions are obtained from equation (6), if the discriminant  $\Delta(\omega)$  related to this equation is positive, are

$$a_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A}, \quad a_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{A}, \quad (8)$$

$$\Delta(\omega) = \omega^2(\mu^2e^2(\gamma + K - \mu\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\mu^2e^2 - 4\zeta^2K^2\delta^2) \geq 0.$$

Moreover, when a contact between the rotor and the stator occurs, the rotor amplitude  $a$  is greater than the clearance  $\delta$ . Therefore, the angular velocities domain ( $D$ ) for which the contact takes place is defined by two conditions

$$(D): \quad \Delta(\omega) \geq 0, \quad a \geq \delta. \quad (9)$$

As in [2], it is possible to show that the solution corresponding to the root  $a_1$  of equation (8) is always unstable. Further, only the motion related to the root  $a_2$  of equation (6) will be considered.

**4. Determination of the angular velocities domain ( $D$ ).** The non dimensional amplitude  $a_c = a/\delta$  of the whirling motion is obtained from the equation

$$A(u)a_c^2 - 2B(u)a_c + C(u) = 0, \quad (10)$$

$$A(u) = \nu^2u + (1-u)^2, \quad B(u) = E\lambda(1-u), \quad C(u) = (E^2 - u^2)\lambda^2,$$

where

$$u = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}, \quad \nu = \frac{2\zeta}{\mu\omega_n}, \quad E\lambda = \frac{K}{K + \gamma}, \quad (E\lambda \leq 1), \quad \lambda = \frac{e}{\delta}, \quad \omega_n^2 = \frac{\gamma + k}{\mu}.$$

The angular velocities domain ( $D$ ) for which whirling motions with contact occur is defined by

$$F(u) \geq 0, \quad a_c \geq 1, \quad F(u) \equiv \frac{\Delta(u)}{\lambda^2u} = u(1-u)^2 - \nu(E^2 - u^2). \quad (11)$$

The determination of  $(D)$  depends on three non dimensional parameters, namely  $\lambda$  (related to unbalance),  $E$  (related to the contact stiffness) and  $\nu$  (related to damping). In the following we assume that the damping is small ( $\nu^2 \cong 0$ ). Let first consider the behavior of  $F(u)$ . The derivative of this function  $F'(u) = 3u^2 + 2u(\nu^2 - 2) + 1$  has two real roots  $u_1$  and  $u_2$

$$u_1 = \frac{2 - \nu^2 - (1 - 4\nu^2 + \nu^4)^{1/2}}{3} = \frac{1 + \nu^2}{3} + O(\nu^4),$$

$$u_2 = \frac{2 - \nu^2 + (1 - 4\nu^2 + \nu^4)^{1/2}}{3} = 1 - \nu^2 + O(\nu^4).$$

We deduce the approximated values of  $F(u_1)$  and  $F(u_2)$  when the damping is small

$$F(u_1) = \frac{4}{27} + \frac{\nu}{9}(2 - 9E^2) + O(\nu^4), \quad F(u_2) = \nu^2(1 - E^2) + O(\nu^4). \quad (12)$$

Moreover, from  $F(0) = -\nu^2 E^2 \leq 0$ ,  $F(1) = -\nu^2(E^2 - 1)$ ,  $F(E) = E(1 - E^2) \geq 0$  we deduce the behavior  $F(u)$  according to the values of the parameter  $E$ :

For  $E < 1$ , the equation  $F(u) = 0$  has one positive real root  $U_0 < E < 1$ ,  $F(u)$  is positive for  $u > U_0$  and  $(D) \subset [U_0, +\infty]$  (Fig. 2).

For  $E > 1$ , the equation  $F(u) = 0$  has three positive real roots  $U_1, U_2, U_3$  with  $U_1 < U_2 < 1 < U_3 < E$ . In this case  $F(u)$  is positive for  $U_1 < u < U_2$  and  $u > U_3$ . However, for  $u > U_3 > 1$  we have  $B(u) = E\lambda(1 - \nu) < 0$ .

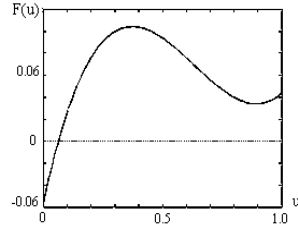


Fig. 2. Behavior of  $F(u)$  for  $E < 1$ .

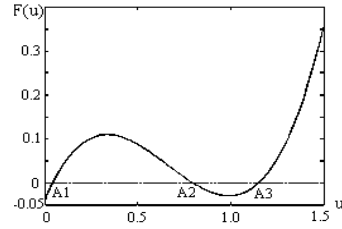


Fig. 3. Behavior of  $F(u)$  for  $E > 1$ .

From  $C(u) = (E^2 - u^2)\lambda^2$  it results that for  $U_3 < u < E$ , equation (12) has two negative real roots  $a_{c1}, a_{c2}$  and for  $u > E$ , this equation has one positive real root  $a_{c2}$ . We conclude that for  $E > 1$ , the angular velocities domain  $(D)$  is included in  $[U_1, U_2] \cup [E, +\infty)$  (Fig. 3).

However, the boundaries of ( $D$ ) are obtained for  $a_c = 1$ . Let us consider the solution of the motion equations when no contact between the rotor and the stator occurs. In this case, the contact force  $\vec{N} = 0$  and the non dimensional amplitude  $a_{sc}$  of the rotor is given by

$$a_{sc} = \frac{\lambda u}{(\nu^2 u + (1 - E\lambda - u^2)^2)^{1/2}}. \quad (13)$$

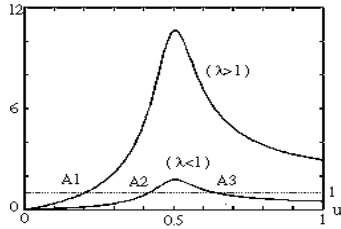


Fig. 4. Curve ( $C_2$ ) without contact.

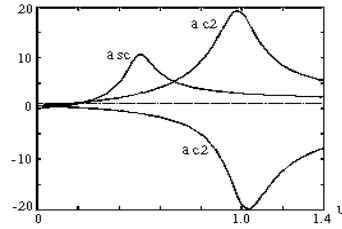


Fig. 5. Case I ( $E < 1, \lambda > 1$ ).

The intersections of the curve with contact ( $C_1$ ):  $a_c = a_c(u)$  with the line  $a_c = 1$  are identical to the intersections of the curve without contact ( $C_2$ ):  $a_{sc} = a_{sc}(u)$  with  $a_c = 1$ . Assuming small damping, a discussion about the behavior of the curve ( $C_2$ ) gives the following results (Fig. 4): for  $\lambda > 1$ , only one intersection of this curve with the line  $a_c = 1$  is obtained while, for  $\lambda < 1$ , two intersections appear.

**5. Jump phenomenon.** Among the intersections of the curve ( $C_2$ ) without contact with the line  $a_c = 1$ , only the points related to the root  $a_{c2}$  of equation (10) are considered. The estimated values of  $a_{c1}$  and  $a_{c2}$  are given by

$$a_{c1} = \begin{cases} \lambda \frac{E-u}{1-u} + O(\nu^2), & u < 1, \\ \lambda \frac{E+u}{1-u} + O(\nu^2), & u > 1, \end{cases} \quad a_{c2} = \begin{cases} \lambda \frac{E+u}{1-u} + O(\nu^2), & u < 1, \\ \lambda \frac{E-u}{1-u} + O(\nu^2), & u > 1. \end{cases} \quad (14)$$

The ranges of monotony of  $a_{c1}$  and  $a_{c2}$  according to the value of the parameter  $E$  are presented in Table 1 for ( $E < 1$ ) and in Table 2 for ( $E > 1$ ). From  $E\lambda < 1$  and these results, three cases are obtained:

I.  $E < 1, \lambda > 1$ : the curve ( $C_1$ ) with contact and the curve ( $C_2$ ) without contact have only one intersection point  $A$  with the line  $a_c = 1$  (Fig. 5); the frequencies domain ( $D$ ) is defined by  $u > u(A)$ . In this case,

the contact between the rotor and the stator induces only an increase of the resonance frequency.

II.  $E > 1, \lambda < 1$  : The curve ( $C_2$ ) without contact intersects the line  $a_c = 1$  in two points  $A_0$  and  $A$ , with  $u(A_0) < u(A)$ . From Table 2 and from  $a_{c1} < a_{c2}$ , only  $A_0$  (Fig. 6) belongs to the stable branch  $a_{c2}$  of the curve with contact. The frequencies domain ( $D$ ) of motions of the rotor with contact is thus defined by  $u(A_0) < u < U_2 < 1 - \nu^2$  where  $U_2$  is one root of  $F(u) = 0$ .

III.  $E < 1, \lambda < 1$  : The curves ( $C_1$ ) and ( $C_2$ ) intersect the line  $a_c = 1$  in two points  $A$  and  $B$ . The frequencies domain ( $D$ ) for contact between the rotor and the stator is defined by  $u(A) < u < u(B)$  (Fig. 7). As in the case I, the contact between the rotor and the stator induces an increase of the resonance frequency.

$u$	0	$1 - 0$	$1 + 0$	$+\infty$
$a_{c1}$	$E\lambda$	$-\infty$	$-\infty$	$-\lambda$
$a_{c2}$	$E\lambda$	$+\infty$	$+\infty$	$\lambda$

Table 1.

$u$	0	$1 - 0$	$1 + 0$	$+\infty$
$a_{c1}$	$E\lambda$	$+\infty$	$-\infty$	$-\lambda$
$a_{c2}$	$E\lambda$	$+\infty$	$-\infty$	$\lambda$

Table 2.

Jump phenomenon and bistability may be observed mainly in case II. In the frequencies range  $[u(A), U_2]$  two different configurations of the system can be obtained: a configuration without contact related to the part  $AB$  of the curve ( $C_2$ ) and a configuration with contact corresponding to the part  $CD$  of the curve ( $C_1$ ).

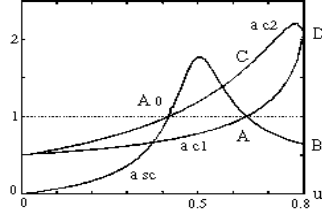


Fig. 6. Case II ( $E > 1, \lambda < 1$ ).

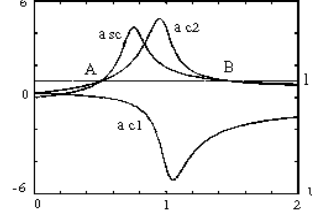


Fig. 7. Case III ( $E < 1, \lambda < 1$ ).

When  $u$  decreases from  $B$  on the curve ( $C_2$ ), a contact is reached at point  $A$  leading to a jump up to the point  $C$  on the curve ( $C_1$ ). On the contrary, when  $u$  increases from  $C$ , the contact between the rotor and



the stator holds only up to the point  $D$  on this curve. At this point, a jump down to the point  $B$  of the curve ( $C_2$ ) without contact occurs.

**6. Stability of the whirling motions.** Let us define the small deviations  $x, y$  from the whirling motion by  $r = a + x$ ,  $\theta = \omega t + \beta + y$  where  $a$  and  $\beta$  are defined by equation (5), and  $x, y$  are obtained from the linear system

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{x} - \omega^2 x - 2a\omega\dot{y}) + 2\zeta\dot{x} + (\gamma + K)x + \mu e\omega^2 y \sin\beta &= 0, \\ \mu(a\ddot{y} + 2\omega\dot{x}) + 2\zeta(\omega x + a\dot{y}) + \mu e\omega^2 y \cos\beta &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

The characteristic equation, related to this system,

$$\begin{aligned} D(s) &\equiv \alpha_0 s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_0 &= a_c, \quad \alpha_1 = 2\nu a_c, \quad \alpha_2 = a_c(\nu^2 + 2(1 + \nu)) - E\lambda, \quad (16) \\ \alpha_3 &= \nu(2a_c(1 + u) - E\lambda), \quad \alpha_4 = A(u)a_c - B(u) \end{aligned}$$

gives the necessary conditions of stability for the whirling motions in the form

$$a_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (17)$$

$$S \equiv \alpha_3^2 \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_4 \alpha_1^2 \leq 0. \quad (18)$$

The necessary condition  $\alpha_4 \geq 0$  is never fulfilled for the solution  $a_{c1} = (B - \sqrt{\Delta})/A$ , leading to the conclusion that this branch of the solution is always unstable. For the solution  $a_{c2}$ , taking into account that  $E\lambda < 1$  and  $a_{c2} < 1$ , the stability conditions (17) are fulfilled. A necessary condition of stability for the branch  $a_{c2}$  is given by condition (18).

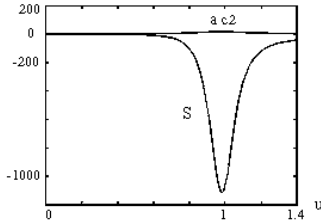


Fig. 8. Stability of  $a_{c2}$  (Case I).

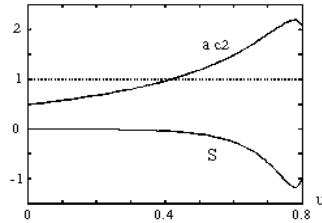


Fig. 9. Stability of  $a_{c2}$  (Case II).

Numerical results are obtained for several values of the parameters (Fig. 8-10). For all cases, the stability conditions (18) is fulfilled along the solution  $a_{c2}$ .

**7. Influence of the gyroscopic effects.** If the gyroscopic effects are taken into account, the motion equations of the rotor are [2]

$$\begin{aligned}\mu\ddot{v} + 2\zeta\dot{v} - \omega g\dot{w} + \gamma v &= N_1 + F_1, \\ \mu\ddot{w} + 2\zeta\dot{w} - \omega g\dot{v} + \gamma w &= N_2 + F_2,\end{aligned}\quad (19)$$

where  $g > 0$  is a constant parameter. The whirling motions are defined as particular solutions of equation (19)  $v = a \cos(\omega t + \beta)$ ,  $w = a \sin(\omega t + \beta)$ . The amplitude  $a$  is a solution of the equation

$$\begin{aligned}A_g(\omega)a^2 - 2B_g(\omega)a + C(\omega) &= 0, \\ A_g &= 4\zeta^2\omega^2 + (\gamma + K - \mu_g\omega^2), \quad B_g = K\delta(\gamma + K - \mu_g\omega^2),\end{aligned}\quad (20)$$

where  $\mu_g = \mu + g > g$ . The phase angle is given by

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\zeta a \omega}{K\delta - (\gamma + K - \mu_g\omega^2)a}.\quad (21)$$

The behavior of the solution depends on the three non dimensional parameters

$$\lambda_g = \frac{\mu e}{\mu_g \delta}, \quad \nu_g = \frac{2\zeta}{\mu_g \omega_g}, \quad E_g = \frac{E\lambda}{\lambda_g}, \quad (\omega_g^2 = \frac{K + \gamma}{\mu_g}).\quad (22)$$

The gyroscopic effects lead to decrease the two parameters  $\lambda$  and  $\nu$  and to increase the parameter  $E$ . Jump phenomena occur for  $E_g > 1$  and  $\lambda_g < 1$ . The corresponding jump frequency is obtained from the point  $A$ , second intersection of the curve  $(C_2)$  without contact with the straight line  $a_c = 1$ . Let us compare the behavior of the curve  $(C_2)$  when gyroscopic effects are not taken into account and the corresponding curve  $(C'_2)$  when these effects are taken into account)

$$(C_2) \quad y_1 = \frac{\lambda u}{((1 - E\lambda - u)^2 + \nu^2 u)^{1/2}},\quad (23)$$

$$(C'_2) \quad y_2 = \frac{\lambda_g u}{((1 - E\lambda - u)^2 + \nu_g^2 u)^{1/2}}.\quad (24)$$

It is not difficult to show that  $y_2 < y_1$ . It results that the jump frequency is decreased when the gyroscopic effects are taken into account (Fig. 11).

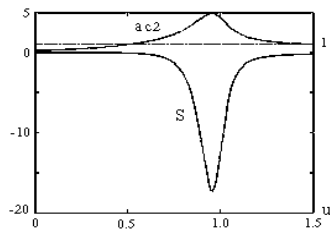


Fig. 10. Stability of  $a_{c2}$  (Case III).

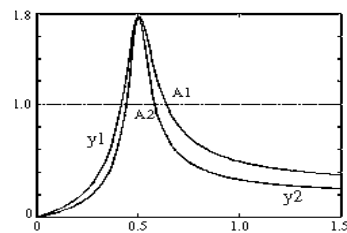


Fig. 11. Gyroscopic effects.

**8. Conclusions.** An attempt to understand the non-linear behavior observed in an aircraft engine, when fan blade off occurs, has been performed using a simplified model for which analytical solutions can be found. Several parameters of fundamental importance on the characteristics of the system behavior have been identified.

### References

1. Bernay B., Pascal M. Non linear dynamics due to fan blade off in a turbomachinery // Proc. of the 9th ISROMAC, Honolulu, Hawaii, Feb.10-14, 2002.
2. Lallane M., Ferraris G. Rotor dynamics prediction in Engineering. John Wiley and Sons, New York, 1998.
3. Yamamoto T. On critical speeds of a shaft. PHD thesis, University of Nagoya, Japan, 1954.
4. Ehrich F.F., O'Connor J.J. Stator whirl with rotors in bearing clearance // ASME J. of Engineering for Industry, August 1967. P. 381-390.
5. Day W.B. Asymptotic expansions in nonlinear rotor dynamics // Quarterly of Applied Mathematics, 44(4), 1987. P. 779-792.
6. Kim Y.B., Noah S.T. Quasi periodic response and stability analysis for a non linear Jeffcott rotor // J.of Sound and Vibration, 190(2),1996. P. 239-253.
7. Jun Jiang, Ulbrich H. Stability analysis of sliding whirl in a non linear Jeffcott rotor with cross coupling stiffness coefficients // Non Linear Dynamics, 24, 2001. P. 269-283.

# Building the mathematical model of the hybrid manipulator

V. Ju. Vlasenko

(Dmitri.Vlasenko@masch-bau.uni-magdeburg.de)

Otto-von-Güricke-Universitaet, Magdeburg, Germany

**1. Introduction.** Typically hybrid multi-joint manipulators have a chain structure and can move in two- and three-dimensional ways. A new type of the manipulator shown in Fig. 1 combines a large number of joints to improve its flexibility. So it can be used in industry, medicine, micro assembly and many other areas.

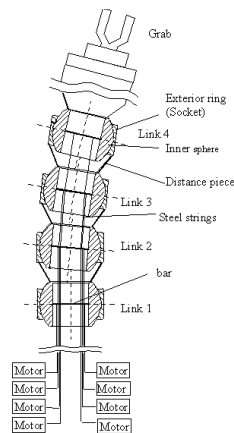


Fig.1. New type of the manipulator.

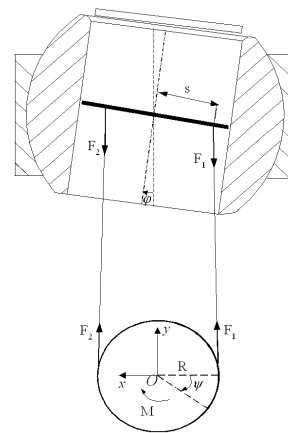


Fig. 2. One-joint manipulator.

This multi-joint hybrid manipulator is made of plastic sphere links. Each link consists of four parts: the inner sphere, the horizontal metal bar at the center of the sphere, the distance piece and the exterior ring (a socket for the next link). On the manipulator base there are motors which drive the links. Each link is connected with a motor by a pair of strings the middle part of which is fixed to the rotor surface and two ends are fixed to the bar. Strings that drive the next link are led through special holes in the proceeding links bar.

The advantages of the offered manipulator are: a big working envelope, flexibility and high rigidity. The strings dependig on the task can also easily control the manipulator. The first disadvantage of the manipulator

is the elasticity of strings, which reduces the accuracy of the manipulator control. The second disadvantage of the manipulator is the fact that we don't know the value and dispensing of the links friction. To solve these problems and to analyse and improve the dynamical behaviour of the manipulator mathematical models of the complete system have to be built up.

The mathematical manipulator model was made in the Dynamic Modeling Laboratory (Dymola) using the Modelica Multi-body library. The main problems of manipulator modelling are as follows:

1. Measurements and approximation of links and rotors friction;
2. Building model objects and links between them.

**2. Description of the one-joint manipulator model.** Let's describe the motion of the multi-joint manipulator in the case of the one-joint manipulator shown in Fig. 2. Trying to reduce the complexity of the model we assume that the link consists only of the inner sphere and the exterior ring. So the link mass center is situated in the center of the sphere. Let  $Oxy$  denote the inertial frame with the origin in the centre of the rotor. The torque  $M$  rotates the rotor with radius  $R$  at the angle  $\psi$ . So, when the rotor rotates the string stretches and the force  $F$  at the string appears. That force rotates the link at the angle  $\varphi$ . Let  $s$  denote the distance between the string and the centre of the link. The following equation describes the elongation of the string  $\Delta l$ :

$$\Delta l = R\psi - s \sin \varphi.$$

Let  $F_1$  be the force at the right end of the string,  $F_2$  – the force at the left end, and  $f$  – the pre-stress acting on the string. So, we get the system of equations that describes the forces at the ends of the string:

$$F_1 = \begin{cases} f + \Delta l \cdot k & \text{when } \Delta l > 0, \\ f & \text{when } \Delta l < 0, \end{cases} \quad F_2 = \begin{cases} f & \text{when } \Delta l > 0, \\ f - \Delta l \cdot k & \text{when } \Delta l < 0, \end{cases}$$

where  $k$  is the string constant.

Let  $m_{fr}$  be the link friction torque,  $M_{fr}$  – the rotor friction torque,  $J_r$  – the rotor moment of inertia, and  $J_l$  – the link moment of inertia. So, the rotor and link movement can be described with the following equations:

$$\begin{aligned} F_1 R - F_2 R &= M - M_{fr} - J_r \ddot{\psi} \\ F_1 s - F_2 s &= J_l \ddot{\varphi} - m_{fr}. \end{aligned}$$

Experimentally we obtain the string constant  $k = 96000N/m$ .

**3. Approximation of link and rotor friction.** The diagram shown in Fig. 3 illustrates measured values of the link friction torque  $m_{fr}$  for different values of the force in the link  $F_L$  and the link angular velocity  $\omega$ .

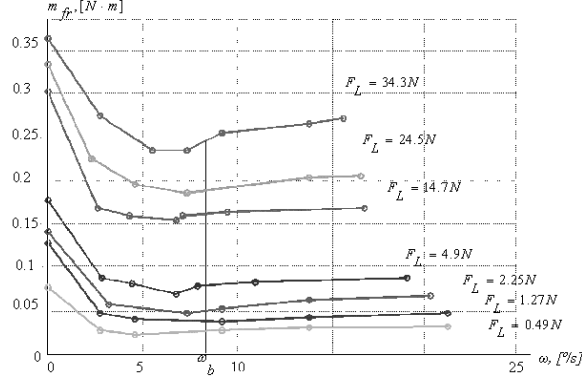


Fig. 3.

The diagram given above shows the following: when the link angular velocity  $\omega$  changes from 0 to the border of the Striebeck-effect  $\omega_b (= 8 \text{ } \circ /s)$  the link friction torque  $m_{fr}$  changes in a parabolic way. With the help of the four experimental constants  $R_1, R_2, \sigma_1, \sigma_2$  we can approximate experimental curves on the diagram:

$$m_{fr} = \begin{cases} \frac{z_1 - z_2}{\omega_b} \omega^2 + \frac{2(z_2 - z_1)}{\omega_b} \omega + z_1 & \text{when } \omega \leq \omega_b, \\ z_2 + k_t (\omega - \omega_b) & \text{when } \omega > \omega_b, \end{cases}$$

$$z_1 = \begin{cases} \sigma_1 \sqrt{\frac{F_L}{R_1}} & \text{when } F_L \leq R_1, \\ k_d (F_L - R_1) & \text{when } F_L > R_1, \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} \sigma_2 \sqrt{\frac{F_L}{R_2}} & \text{when } F_L \leq R_2, \\ k_d (F_L - R_2) & \text{when } F_L > R_2. \end{cases}$$

Experimentally we get these constants values:

$$\sigma_1 = 0.295, \quad \sigma_2 = 0.14, \quad R_1 = 10, \quad R_2 = 14.$$

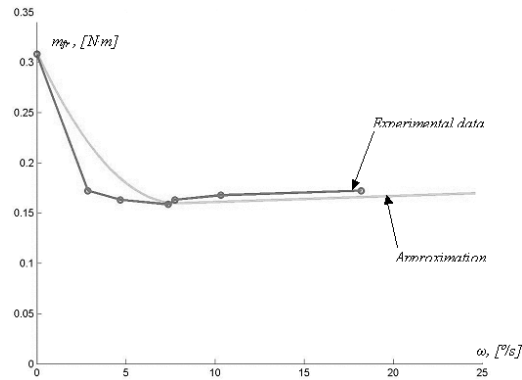


Fig. 4.

The diagram shown in Fig. 4 illustrates experimental data  $m_{fr}$  and the approximation for  $F_L = 24.5N$ .

Rotor friction torque  $M_{fr}$  is approximated in this model according to:  $M_{fr} = \text{sign}(\dot{\psi}) M_{fr}^A$ , where  $M_{fr}^A$  is a constant.

**4. Experimental data.** In our experiment the torque  $M$  is a periodical time function:  $M = \sin(10.2 \pi t)$ , where  $t$  denotes time.

The time dependency of the rotation angle of the link  $\varphi$  and the rotation angle of the rotor  $\psi$  is shown in Fig. 5.

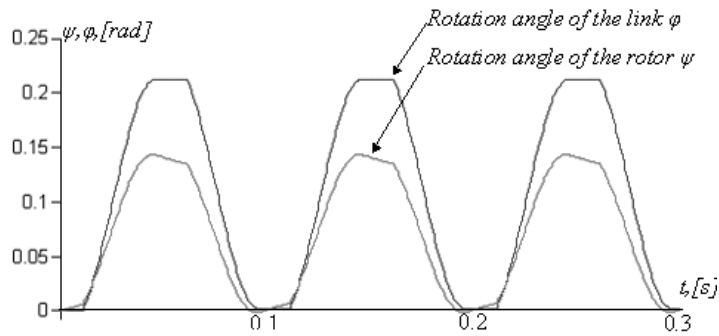


Fig. 5.

This diagram shows that the elasticity of strings does not change significantly the behaviour of the model. It happens because of the big value of the string constant  $k$  for a short string.

The peaks of the curves on the diagram are truncated at areas where the force in the string is less than the force of the links friction. Time dependency of the angular velocity of the link  $\omega$  and the angular velocity of the rotor  $\nu$  is shown in Fig. 6.

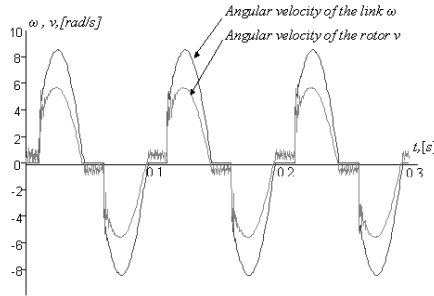


Fig. 6.

This diagram shows that the link does not move and the rotor oscillates, when the modulus of the torque is small. When the modulus of the torque increases, the link and the rotor jump. It happens because the static friction is significantly stronger than dynamic friction. After the jump the angular velocity of the rotor and angular velocity of the link fluently increase because of the torque increasing.

**5. Conclusion.** Building the mathematical model of the hybrid manipulator with plastic links is a complex problem. For the correct mathematical description of our model we need to solve some sub-problems: the measurement and approximation of the links friction torque, the measurement of the string constant, the approximation of the rotor friction torque. The simulation experiments with the mathematical model show that the links friction changes the manipulator movement significantly. Further investigations are necessary in order to analyse the effect of friction in the case of multi-joint manipulator and to develop a control strategy for the link movement.



## Секция II. Динамика КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

### Колебания спутника в плоскости слабоэллиптической орбиты под действием гравитационных и аэродинамических моментов

Ю. Д. Глухих, В. Н. Тхай  
(nikitenok@mtu-net.ru, tkhai@ccas.ru)

Московская государственная академия приборостроения  
и информатики, Россия

**1. Постановка задачи.** Динамические уравнения относительного движения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов приведены в [1]. Система уравнений обладает интегральным многообразием, которое отвечает движениям в плоскости эллиптической орбиты. Это движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2 \alpha}{dv^2} + \mu \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + e \cos v} - 2 \left( 1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} + \kappa_0 (1 + e)^2 \frac{\rho^*}{\rho_\pi^*} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}{(1 + e \cos v)^4} [\sin \alpha + e \sin(\alpha + v)] = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha$  — угол между радиусом-вектором центра масс спутника и его осью инерции, момент относительно которой равен  $C$ ;  $v$  — истинная аномалия;  $e$  — эксцентриситет орбиты;  $\mu$  — инерционный параметр;  $\rho^*$  — плотность атмосферы;  $\rho_\pi^*$  — плотность атмосферы в перигее. Уравнение (1) зависит от параметров:  $e, \mu, \kappa_0$ .

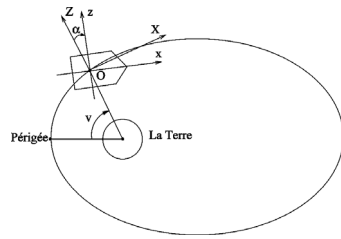


Рис. 1

Физически допустимые значения параметров лежат в диапазонах  $0 \leq e \leq 1$ ,  $-3 \leq \mu \leq 3$ . Спутник будет аэродинамически устойчивым при  $\kappa_0 \geq 0$  [2]. Эти значения  $\kappa_0$  ниже и будут рассмотрены. Уравнение (1) содержит функцию  $\rho^*/\rho_\pi^*$ , характеризующую зависимость плотности атмосферы от высоты и заданную таблично.

Поэтому для полного замыкания уравнения (1) функция  $f$  интерполировалась многочленом Лагранжа. Уравнение (1) обладает свойством обратимости: при замене  $(\alpha, \dot{\alpha}, t)$  на  $(-\alpha, \dot{\alpha}, -t)$  оно не меняет своего вида. При  $e = 0$  уравнение (1) описывает движение спутника по круговой орбите и приобретает вид [2]

$$\frac{d^2 \alpha}{dv^2} + \mu \sin \alpha \cos \alpha + \kappa_0 \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Имеем консервативную систему с одной степенью свободы. Анализ этой системы проводился методом фазовой плоскости [2].

На слабоэллиптической орбите ( $e \ll 1$ ) имеем обратимую,  $2\pi$ -периодическую по  $\alpha$  систему, близкую к консервативной системе с одной степенью свободы. Эта задача наиболее интересна для приложений: гравитационный и аэродинамический моменты являются наиболее существенными из действующих на спутник факторов на низких высотах.

**2. Метод исследования.** Рассмотрим  $2\pi$ -периодическую систему с малым параметром ( $\varepsilon$  — малый параметр)

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon F(\varepsilon, z, \dot{z}, t). \quad (3)$$

При этом обратимое уравнение получим в случае выполнения одного из двух условий [3]

$$f(-z) = -f(z), \quad F(\varepsilon, -z, \dot{z}, -t) = -F(\varepsilon, z, \dot{z}, t) \quad (4)$$

или

$$F(\varepsilon, z, -\dot{z}, -t) = F(\varepsilon, z, \dot{z}, t). \quad (5)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем консервативную систему с одной степенью свободы, которая допускает семейство колебательных движений.

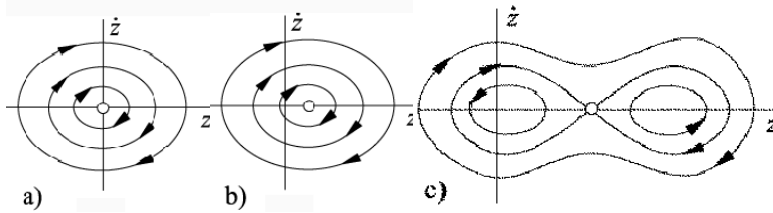


Рис. 2

Эти колебания симметричны относительно оси  $\dot{z}$  в случае (4) (рис. 2а), и оси  $z$  в случае (5) (рис. 2б, 2с).

Система (3)–(4) (система (3) – (5)) обратима с неподвижным множеством  $\{(z, \dot{z}) : z = 0\}$ . В случае  $2\pi$ -периодической по  $z$  системы имеем неподвижное множество  $\{(z, \dot{z}) : z = 0 \pmod{\pi}\}$ .

**Теорема 1** [3]. *Симметричное  $2\pi k$ -периодическое ( $k \in N$ ) колебательное движение консервативной системы с одной степенью свободы, для которого  $T = 2\pi k/m$ ,  $m \in N$ ,  $dT \neq 0$ , продолжается по параметру  $\varepsilon$  в системе (3), если выполнены условия (4) или (5).*

Метод исследования состоит в построении фазового портрета консервативной системы с одной степенью свободы, исследовании зависимости периода  $T(h)$  на семействе колебаний этой системы от величины энергии и применении теоремы 1.

**3. Колебания спутника на слабоэллиптической орбите.** В соответствии с методом, изложенным в разд. 2, построим фазовый портрет системы (2) с интегралом энергии

$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + P(\alpha) = h = \text{const}, \quad P(\alpha) = \mu \sin^2 \alpha - 2\kappa_0 \cos \alpha, \quad (6)$$

( $P(\alpha)$  — потенциальная энергия в этом движении).

Исследуем в фазовой плоскости картину движения спутника при различных соотношениях между гравитационным параметром  $\mu$  и аэродинамическим параметром  $\kappa_0$ .

Возможны три случая [2]: 1).  $\mu > \kappa_0$ ; 2).  $\kappa_0 > \mu > 0$ ,  $\kappa_0 > 0 > \mu$ ; 3).  $\mu < 0$ ,  $|\mu| > \kappa_0$ .

Точки  $\alpha_n = \pi n$ ,  $\alpha_l = \pi l \pm \arccos(-\kappa_0/\mu)$  ( $n, l \in \mathbf{Z}$ ) являются стационарными решениями уравнения (2). При этом

$$P(\alpha_{2n}) = -2\kappa_0, P(\alpha_{2n+1}) = 2\kappa_0, P(\alpha_l) = \mu + \kappa_0^2/\mu.$$

Решение  $\alpha_{2n} = 2\pi n$  соответствует движению, на котором ось  $Oz$  спутника совпадает с направлением радиуса-вектора  $OZ$  орбиты. Решение  $\alpha_{2n+1} = (2n+1)\pi$  сводится к решению  $\alpha_{2n} = 2\pi n$  изменением направления оси  $Oz$  на противоположное. Решение  $\alpha_l = \pi l \pm \arccos(-\kappa_0/\mu)$  соответствует косому положению равновесия. При  $|\kappa_0/\mu| \rightarrow 1$  это решение переходит в решение  $\alpha_l = \pi l$ , где  $l = 2\pi n$  или  $l = (2n+1)\pi$ .

В зависимости от соотношения между инерционным параметром  $\mu$  и аэродинамическим параметром  $\kappa_0$  стационарные решения могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Например, точка  $\alpha_{2n} = 2\pi n$  при  $\mu > \kappa_0$  является равновесием типа центр, а при  $\mu < 0$ ,  $|\mu| > \kappa_0$  — равновесием типа седло.

Устойчивые равновесия окружены замкнутыми кривыми — периодическими движениями. Вычислим период колебаний. Из (6) найдем

$$T = 2 \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{h - \mu \sin^2 \alpha + 2\kappa_0 \cos \alpha}}, \quad (7)$$

где  $\alpha_{min}$ ,  $\alpha_{max}$  — соответственно наименьшее и наибольшее значения углов на рассматриваемом колебательном движении. Теперь для равновесий  $\alpha_n = \pi n$  найдем  $h$  из (6) и тогда получим следующий определенный интеграл

$$T(s) = K \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\mu + \kappa_0(s^2 + 1) + s^2(\kappa_0 + s^2(\kappa_0 - \mu)) \sin^2 x}}, \quad (8)$$

где  $K = 4(1 + s^2)$  и  $s = \operatorname{tg}(\alpha_{max}/2)$ .

Проанализируем зависимости (3.3) для каждого из семейств колебаний, окружающих точки  $\alpha_n = \pi n$ . В случаях 1, 2 эти семейства "простые": колебания окружают одно равновесие. Вычисления убеждают, что на "простых" семействах  $dT(s)/ds > 0$ . В случае 3 имеются колебания, окружающие три положения равновесия:  $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ ,  $\alpha = \pi n \pm \arccos(-\kappa_0/\mu)$  (рис. 3).

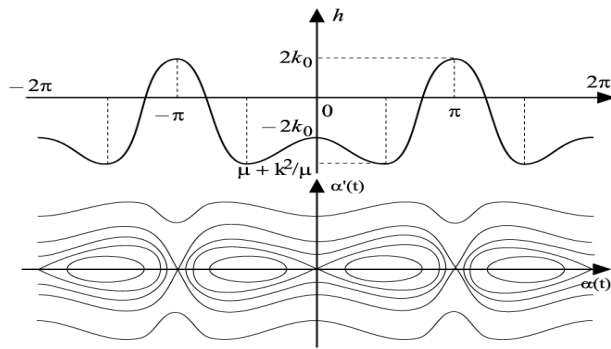


Рис. 3  $\mu < 0, |\mu| > \kappa_0$

Зависимость  $T^*(s)$  ( $T(s) = T^*(s)\sqrt{|\mu|}$ ) на этих колебаний приведена на рис. 4. Здесь  $\beta = \kappa_0/|\mu|$ .

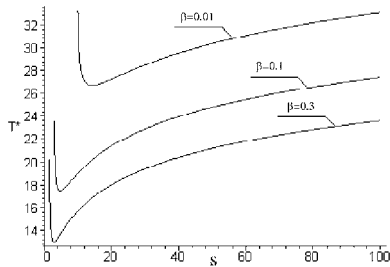


Рис. 4

Использование теоремы 1 и проверка условия  $dT^*/dh \neq 0$  для колебаний, охватывающих тривиальные положения равновесия  $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ , в которых ось  $z$  совпадает с радиусом-вектором, позволяет сделать важный вывод.

**Теорема 2.** Почти все  $2\pi k$ -периодические колебания спутника на круговой орбите, симметричные относительно вертикальных осей  $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ , "продолжаются" на слабоэллиптическую орбиту.

В исследуемых случаях "период"  $T^*(h)$  неограничен сверху и отличается от действительного периода  $T(h)$  конкретным множителем  $f$ , зависящим от параметров системы. Отсюда следует, что всегда существуют  $2\pi k$ -периодические колебания ( $k \in \mathbb{N}$ ). Для этих движений условие  $dT(h^*)/dh \neq 0$  продолжения если и может нарушаться, то только в случае  $\mu < 0, |\mu| > \kappa_0$ .

Отметим, что в работах [2, 4] проводились исследования колебаний спутника на слабоэллиптической орбите. Однако вывод о продолжении был получен только в случае  $\kappa_0 \ll 1$ .

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента (МК-2289.2003.01 (1-ый автор)) и Гранта Минобразования России (2-ой автор).

### Список литературы

1. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. 1978. Т. 11. 223 с.
2. *Мельник Н.В.* Периодические колебания спутника на круговой орбите с учетом влияния сопротивления атмосферы // Препринт ИПМ АН СССР. 1976. № 97. 37 с.
3. *Тхай В.Н.* Периодические движения системы, близкой к автономной обратимой системе // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 661-680.
4. *Мельник Н.В.*  $2\pi$ -периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты при наличии сопротивления атмосферы // Препринт ИПМ АН СССР. 1976. № 119. 45 с.

### Некоторые задачи динамики тела с переменным электрическим зарядом

*Е. К. Колесников, А. Б. Яковлев*  
(Andrey.Jakovlev@pobox.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Развитие космических исследований поставило вопрос о движении тел в плазменном окружении. Известно, что находящиеся в космической плазме объекты приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы и степени освещенности Солнцем и, следовательно, от положения и ориентации тела в процессе движения. Однако в большинстве работ, посвященных этой проблеме, электрический заряд тела считался постоянным.

Впервые задача о движении тела с переменным электрическим зарядом была поставлена в работе О.И. Нестеренко [1] в связи с рассмотрением концепции новых двигательных систем. Изучая влияние величины силы Лоренца на характер движения заряженного спутника в суперпозиции центрального гравитационного и дипольного магнитного полей, Нестеренко установил возможные виды траекторий и критические значения ускорения  $a_L$ , при которых изменяется вид траекторий.

В последние годы возникло новое экологическое приложение этой проблемы, связанное с изучением особенностей движения в околоземном космическом пространстве (ОКП) микрочастиц (МЧ) техногенного происхождения, которые в большом количестве выбрасываются в ОКП при работе твердотопливных ракетных двигателей. Как показали проведенные нами исследования процесса зарядки микрочастиц, инжектированных на различных высотах в ОКП, как величина потенциала, так и его вариации зависят от отражательной способности материала, высоты инжекции и угла наклона орбиты. Например, для алюминиевых микрочастиц при движении по круговой орбите с высотой 1000 км и углом наклона  $50^\circ$  к плоскости магнитного экватора отклонение потенциала от среднего значения в  $-0.40$  В достигает 35%.

Проведенное в работах [2,3] изучение характера движения в ОКП заряженных микрочастиц под действием сил гравитации, Лоренца, солнечного давления и плазменного сопротивления выявило возможность длительного удержания таких микрочастиц. Например, для микрочастицы из углерода радиусом  $0.007$  мкм, инжектированной в плоскости экватора на высоте 15000 км с направленной по азимуту скоростью  $4.31$  км/с, спустя 900 часов с момента инжекции движение становится близким к периодическому движению по замкнутой орбите. Последняя особенность является, по-видимому, общим свойством плоских движений в ОКП сверхмелких частиц из материалов с низким выходом фотоэмиссии.

Проведенное Е.К. Колесниковым изучение движения тела с постоянным электрическим зарядом в предположении слабого возмущающего воздействия силы Лоренца на движение по кеплеровской эллиптической орбите в центральном гравитационном поле выявило существование смещения перигея в плоскости орбиты и прецессии плоскости орбиты микрочастицы вокруг магнитной оси Земли

$$\Delta\lambda \approx \frac{\pi}{2} k^2, \Delta\Phi = \frac{\pi q M}{c \alpha_2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), k^2 = \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) / \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right),$$

где  $r_1, r_2$  — минимальное и максимальное расстояния при движении частицы по орбите,  $q$  — заряд частицы,  $M$  — магнитный момент Земли.

На основе методов качественной теории гамильтоновых систем, развитых в работах Колмогорова, Арнольда и Мозера (так называе-

мой КАМ-теории) [4] удалось доказать для рассматриваемого случая вечную близость к начальным значениям оскулирующих элементов возмущенной орбиты  $a$  (большая полуось) и  $e$  (эксцентриситет), характеризующих ее геометрические параметры, и угла наклона  $i$  орбиты к плоскости магнитного экватора [5].

Проведенные расчеты движения микрочастиц без условия постоянства электрического заряда показали, что при  $i \geq 10^\circ$  микрочастица совершает периодические колебания по широте между зеркальными точками, расположенными в северном и южном полушариях на высоких широтах, которые сопровождаются ее дрейфом по азимуту в восточном направлении. Отмеченные выше осцилляции МЧ между зеркальными точками в высоких широтах обусловлены адиабатической инвариантностью эквивалентного магнитного момента частицы, имеющей место в условиях слабой неоднородности магнитного поля, а азимутальный дрейф вокруг оси конфигурации связан с эффектом неоднородности магнитного поля и возмущающим воздействием сил немагнитной природы (гравитационной силы, электрической составляющей силы Лоренца и силы солнечного давления).

Аналогичная задача возникает в связи с изучением механизмов формирования пылевых колец в окрестности других небесных тел, обладающих сильными магнитными полями (Юпитер, Сатурн и др.). В работах Бернса и Шаффера [6,7] предложено представить заряд частицы в виде нескольких членов разложения в ряд Фурье  $Q = Q_{st} + Q_0 + Q_1 \cos(\theta - \theta_1) + Q_2 \cos(\theta - \theta_2) + \dots$ , где  $\theta$  — угловое положение от перицентра и  $(Q_i, \theta_i)$  — величина и фазовый сдвиг различных членов ряда Фурье. Аналитические оценки и расчеты Бернса и Шаффера доказали существование двух принципиально разных путей эволюции начального распределения пылевых частиц в экваториальной плоскости в зависимости от величины стационарного значения  $Q_{st}$ .

Наконец, задача динамики в космической плазме микрочастиц с переменным зарядом возникает в связи с исследованием проблемы электростатического переноса пылевых частиц у поверхности безатмосферных небесных тел. В ряде статей получен критерий отрыва МЧ от поверхности и выявлены особенности вертикального движения пылевых частиц [8,9]. Результаты численного моделирования указывают на существование 3 возможных режимов вертикальных колебаний пылевой частицы, реализующихся при определенных зна-



чениях ее радиуса [9].

Все вышеизложенное позволяет нам говорить о появлении нового объекта динамического исследования — тела постоянной массы и переменного электрического заряда.

В общем случае система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение такого тела, будет содержать нечетное число уравнений, что делает ее качественный анализ сложным и требует разработки специальных методов. Однако при некоторых условиях заряд тела можно считать равновесным, то есть зависящим только от пространственных координат. В этом случае возможны следующие подходы.

1) Записать функцию Гамильтона и применить аппарат анализа гамильтоновых систем. Для постоянного заряда функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \sum \left( p_i - \frac{qA_i}{c} \right)^2 + q\varphi. \quad (1)$$

Можно показать, что, если заряд не является постоянным, то формальная подстановка в (1) такого заряда приведет к неверным уравнениям движения. Предлагается обобщить формулу (1)

$$H = \frac{1}{2m} \sum \left( p_i - \frac{\Phi_{1i}}{c} \right)^2 + q\Phi_2 \quad (2)$$

так, чтобы получались верные уравнения движения. При этом должны выполняться следующие соотношения

$$q \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{\Phi}_1, \quad q \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \Phi_2. \quad (3)$$

Используя свойства дифференциальных операторов, получим условия, при которых запись гамильтониана в форме (2) для переменного заряда возможна:

$$\vec{B} \perp \operatorname{grad} q, \quad \vec{E} \parallel \operatorname{grad} q. \quad (4)$$

Условия (4) кажутся довольно жесткими, однако, как можно видеть, они соответствуют постановке многих реальных задач. В частности, второе условие (4) реализуется для задач динамики пыли над поверхностью безатмосферного небесного тела. Для плазмосферной плазмы обычно используется модель двухкомпонентной плазмы, описанная в [10]. Согласно этой модели плазма состоит из холодной компоненты с плотностью  $n_1$  и температурой  $T_1$  и горячей компоненты

с плотностью  $n_2$  и температурой  $T_2$ . При этом полная плотность плазмы  $n = n_1 + n_2$ . Значения  $n_1, n_2, T_1$  и  $T_2$  являются функциями параметра Мак-Илвайна  $L$ , выраженного в радиусах Земли расстояния в экваториальной плоскости от центра Земли до силовой линии магнитного поля, проходящей через рассматриваемую точку. Равновесный заряд тела, будучи функцией локальных плотности и температуры, не зависит, таким образом, от продольной координаты вдоль силовой линии магнитного поля, что соответствует первому соотношению (4). Это обстоятельство позволяет применить для анализа движения, как и в случае с постоянным зарядом, методы КАМ-теории.

2) На случай частиц переменного заряда можно обобщить теорию дрейфового движения заряженных частиц [11].

Представляя электрический заряд как произведение составляющих вдоль и поперек магнитного поля  $q = q_0 q(s) (1 + \vec{e} \nabla_{\perp} q)$  и усредняя уравнение движения по ларморовскому периоду, получим выражение для скорости дрейфа поперек магнитного поля

$$\dot{\vec{R}}_{\perp} = \frac{(\vec{g} - \ddot{\vec{R}}) \times \hat{e}_1}{B} \frac{mc}{q_0 q(s)} + \frac{c \vec{E} \times \hat{e}_1}{B} + \frac{Mc}{q_0} \frac{\hat{e}_1 \times \nabla B}{B} + \frac{Mc}{q_0} \hat{e}_1 \times \nabla_{\perp} q. \quad (5)$$

Здесь  $\hat{e}_1$  — орт вдоль магнитного поля,  $M$  — магнитный момент частицы,  $\vec{g}$  — напряженность неэлектромагнитной силы,  $c$  — скорость света. Первые три слагаемых в (5) являются известными [11], а четвертое — новым и связано с изменением заряда. Назовем его скоростью зарядового дрейфа. Полученное выражение проверено сравнением с результатами расчетов для случая постоянного магнитного поля.

### Список литературы

1. *Нестеренко О. И.* Движение электрически заряженного спутника в магнитном поле Земли под действием силы Лоренца // Космич. исследования. 1969. Т. 7. С. 359 - 367.
2. *Колесников Е. К.* Особенности орбитального движения субмикронных частиц в плазмосфере Земли // Космич. исследования. 2001. Т. 39. С. 100 - 105.
3. *Колесников Е. К.* Влияние авроральных потоков электронов на динамику техногенных микрочастиц в полярной ионосфере // Геомагнетизм и аэронавигация. 2001. Т. 41. С. 238 - 242.

4. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М. 1973. 168 с.
5. Вавилов С. А., Колесников Е. К. Некоторые вопросы динамики сильнозаряженных тел в космическом пространстве // Динамические процессы в газах и твердых телах / Физическая механика. Вып. 4. Л. 1981. С. 168 - 180.
6. Burns J. A., Schaffer L. Orbital evolution of circumplanetary dust by resonant charge variation // Nature. 1989. V. 337. P. 340 - 343.
7. Schaffer L., Burns J. A. Lorentz resonances and vertical structure of dust rings: analytical and numerical results // Icarus. 1992. V. 96. P. 65 - 84.
8. Яковлев А. Б. Динамика левитирующих микрочастиц лунного реголита // Астрон. вестн. 1998. Т. 32. С. 398 - 400.
9. Колесников Е. К., Яковлев А. Б. Возможные режимы колебательного движения микрочастиц лунного реголита в электростатическом поле приповерхностного фотоэлектронного слоя // Труды 15 сессии международной школы по моделям механики сплошной среды. СПб. 2001. С. 46 - 55.
10. Lyons L. R., Williams D. J. Quantitative aspects of magnetospheric physics. Dordrecht: Holland, 1987.
11. Нортрон Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967.

## **О сохранении условно-периодических колебаний спутника на эллиптической орбите при учете светового давления**

*И. И. Косенко*

(kosenko@ccas.ru)

Московский государственный университет сервиса, Россия

Рассматриваются колебания несимметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты [1]. Орбитальное движение предполагается заданным. Источник света считается бесконечно удаленным. Так что световой поток имеет одно и то же направление во всех точках орбиты. Используя известное выражение для момента сил светового давления [2], уравнения плоских колебаний спутника после подходящего выбора физических размерностей можно представить в виде [3]

$$\ddot{\delta} = c f(\delta) - \mu [1 + e \cos \nu(t)]^3 \sin(\delta - 2\nu(t) + 2\varphi), \quad (1)$$

где вклад светового давления учитывается при помощи функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{при } \sin x/2 \geq 0, \\ -1 + \cos x & \text{при } \sin x/2 < 0, \end{cases} \quad (2)$$

имеющей только одну непрерывную производную,  $c$  — постоянная, учитывающая отражающие свойства поверхности аппарата, величина  $\mu$  характеризует динамическую асимметрию спутника,  $\nu$  — истинная аномалия,  $\varphi$  — азимут расположения источника света,  $\delta = 2\theta - 2\varphi$ , угол  $\theta$  задает ориентацию спутника относительно инерциальной системы координат и отсчитывается от перицентра. Параметрами задачи являются величины  $e, \mu, c, \varphi$ .

Получившаяся механическая система с  $3/2$  степенями свободы допускает представление в виде автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [3]. Для этого полагаем, что  $q_1 = \delta, q_2 = \nu, p_1 = \dot{\delta}$ . Второй обобщенный импульс  $p_2$  задается дополнительно в качестве переменной, канонически сопряженной с  $q_2$ .

Рассмотрим часто реализуемый на практике случай, когда параметр динамической асимметрии мал  $\mu \ll 1$ . В невозмущенном случае динамической симметрии на вращательное движение спутника влияет только момент сил светового давления. Таким образом, гамильтониан задачи можно в контексте теории возмущений представить в виде  $H(q, p) = H_0(q, p) + \mu H_1(q)$ , где функция Гамильтона невозмущенного движения записывается в форме ( $F(x)$  является первообразной от функции (2))

$$H_0(q, p) = p_1^2/2 - cF(q_1) + (1 + e \cos q_2)^2 p_2,$$

а возмущение, соответственно, — в форме

$$\mu H_1(q) = -\mu (1 + e \cos q_2)^3 \cos(q_1 - 2q_2 + 2\varphi). \quad (3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что  $0 \leq e \leq 1$ . Невозмущенный гамильтониан допускает разделение движений по степеням свободы. Его можно представить в виде:  $H_0(q, p) = H_{01}(q_1, p_1) + H_{02}(q_2, p_2)$ , причем  $H_{01}(q, p) = p^2/2 - cF(q)$ ,  $H_{02}(q, p) = (1 + e \cos q)^2 p$ .

Подробное исследование задачи, которой отвечает каноническая система с гамильтонианом  $H_{01}(q, p)$ , выполнено в работе [3]. Формулы для перехода к переменным действие-угол анализируются при

помощи известных методик отдельно для двух случаев движения: колебаний и вращений. После выполнения в соответствующих областях фазового пространства преобразования к переменным действие-угол [4]  $(q_1, p_1) \mapsto (w_1, I_1)$  получаема угловая переменная  $w_1$  используется затем в качестве быстрой.

Каноническая система с функцией Гамильтона  $H_{02}(q_2, p_2)$  также интегрируется в квадратурах. Формулы для перехода к переменным действие-угол имеют вид:  $I_2 = h_2/n$ ,  $w_2 = t(q_2)n = l$ . Здесь  $h_2$  — постоянная энергии рассматриваемой системы,  $l$  — средняя аномалия, а  $n = (1 - e^2)^{3/2}$  — среднее движение.

Переходя к переменным действие-угол всей невозмущенной канонической системы при помощи канонического преобразования  $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (w_1, w_2, I_1, I_2)$ , получим новое выражение для функции Гамильтона

$$G(w, I) = G_0(I) + \mu G_1(w, I), \quad (4)$$

где  $G_0(I) = h_1(I_1) + h_2(I_2)$ ,

Для применения результатов КАМ-теории воспользуемся одним из примеров работы [5] и перейдем от рассмотрения непрерывной, но неаналитической, динамической системы к анализу каскада симплектических отображений “вдоль” быстрой угловой переменной  $w_1$ . Используем стандартную конструкцию изоэнергетической редукции [6], которую будем проводить в окрестности тора невозмущенной системы, задаваемого вектором переменных действия  $(I_{10}, I_{20}) = (I_1(0), I_2(0))$ . Для этого перейдем к отклонениям от переменных действия  $(I_1, I_2) \mapsto (J_1, J_2)$  так, что  $I_i = I_{i0} + J_i$  ( $i = 1, 2$ ).

В пределах областей аналитичности исходная каноническая система приводится к неавтономной системе с одной степенью свободы

$$w'_2 = K_{J_2}, \quad J'_2 = -K_{w_2}, \quad (5)$$

где функция Гамильтона  $K(w_1, w_2, J_2)$  задается неявно, при помощи интеграла энергии исходной системы из соответствующего трансцендентного уравнения. Функция  $K$  аналитически (в пределах области аналитичности) зависит от малого параметра  $\mu$ . В силу теоремы о неявной функции из условия общего положения в областях колебаний и вращений справедлива формула разложения  $K(w_1, w_2, J_2) = K_0(J_2) + \mu K_1(w_1, w_2, J_2) + \dots$ , где функция

$K_0(J_2)$  неявно задана при помощи “невозмущенного” трансцендентного уравнения  $h_1(I_{10} - K_0) - h_1(I_{10}) + \omega_2 J_2 = 0$ .

Отображение  $(w_2, J_2) \mapsto (w'_2, J'_2)$  за период  $w_1 \in [0, 2\pi]$  является композицией двух аналитических отображений, поэтому оно также аналитично и приводится к виду

$$\begin{cases} w'_2 &= w_2 + 2\pi \gamma(J_2) + \mu f(w_2, J_2, \mu), \\ J'_2 &= J_2 + \mu g(w_2, J_2, \mu). \end{cases} \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что  $\gamma(J_2) = K'_0(J_2)$ . Функция  $J_2 \mapsto \gamma(J_2)$  является аналитической и не равной тождественно нулю в окрестности невозмущенного тора. Это следует из разложения невозмущенного гамильтониана в виде  $K_0(J_2) = k_1 J_2 + k_2 J_2^2 + k_3 J_2^3 + \dots$

Для того, чтобы отображение (6) было закручивающим (при достаточно малом  $\mu$ ) достаточно, чтобы  $\gamma'(J_2) \neq 0$  в окрестности невозмущенного тора. Это означает, что среди коэффициентов  $k_2, k_3, \dots$  имеются отличные от нуля. Тогда в силу теоремы Мозера [7] отображение (6) имеет инвариантную кривую, соответствующую тору, заметаемому траекторией условно-периодического решения возмущенной задачи.

В простейшем случае (общего положения) условие  $k_2 \neq 0$  эквивалентно известному условию изоэнергетической невырожденности невозмущенной системы, сводящемуся в нашем случае к условию  $h''_1(I_1) \neq 0$ , проверяемому непосредственно при помощи формул перехода к переменной действия.

Подводя итог сказанному, заключаем, что в силу условия невырожденности при достаточно малом  $\mu$  большинство невырожденных торов невозмущенной задачи, соответствующих условно-периодическим решениям, сохраняются. Как известно [8], по соображениям размерности в этом случае имеет место устойчивость по переменным действия — они вечно сохраняются, лишь немного искажаясь.

Из полученного результата следует также, что при достаточно малом  $\mu$  существует достаточно малая инвариантная окрестность устойчивого в невозмущенном движении положения равновесия. Таким образом, все движения, имеющие начальные данные в этой окрестности, вечно в ней остаются. Это означает, что спутник будет вечно совершать ограниченные либрации вблизи азимута источника света. В упомянутой окрестности справедлива теорема Пуанкаре

о возвращении [4] и, следовательно, в ней имеются устойчивые по Пуассону решения.

При проведении предельного анализа фиксируем (достаточно малую) величину параметра возмущения  $\mu$ . Получим оценки величины ухода переменной действия  $I_1$  от своего начального значения  $I_{10}$  в зависимости от эксцентриситета при  $e \rightarrow 1$ .

При приближении эксцентриситета орбиты  $e$  к своему предельному значению 1 удобно ввести еще один малый параметр  $\varepsilon$  такой, что  $e = (1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon^2)$ . Проведение анализа, аналогичного выполненному в работе [3], позволяет получить оценку  $|I_1(t) - I_{10}| \leq \text{const} \cdot \mu$ , выполняющуюся при  $t \in (-\text{const} \cdot \varepsilon^{-3}, \text{const} \cdot \varepsilon^{-3})$  для сколь угодно малых величин  $\varepsilon \leq \text{const} \cdot \mu^{1/3}$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-00196, 00-15-96150) и Министерства образования Российской Федерации (Т02-14.0-1054).

### Список литературы

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М: Наука, 1965. 416 с.
2. *Карымов А. А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // ПММ. Т. 26. Вып. 5. 1962. С. 865-876.
3. *Косенко И. И.* Регуляризация предельной задачи о колебаниях спутника на кеплеровой орбите с учетом светового давления // Вторые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб.: Изд-во НИИ Химии С.-Петербургского ун-та, 2000, С. 96-108.
4. *Парс Л. А.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1971. 636 с.
5. *Маркеев А. П.* О качественном анализе систем с идеальной неударяющей связью // ПММ. Т. 53. Вып. 6. 1989. С. 867-872.
6. *Уиттекер Э. Т.* Аналитическая динамика. Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 1999. 588 с.
7. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168с.
8. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. Т. 18. Вып. 5. 1963. С. 13-40.

## О некотором подходе к решению задачи об ограниченном движении двух тел

*Е.Б. Кузнецов, С.Д. Красников*

Московский авиационный институт, Россия

**1. Продолжение по параметру.** Рассмотрим векторное уравнение

$$\Phi(p) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что функция  $\Phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  гладкая и существует единственное решение уравнения (1). Перепишем (1) в виде

$$\Phi(p) = (1 - \mu)\Phi(p_0), \quad \mu \in [0, 1]. \quad (2)$$

Здесь  $p_0 \in \mathbb{R}^m$  некоторая фиксированная точка в  $\mathbb{R}^m$ . Очевидно, что при  $\mu = 0$ ,  $p = p_0$ , а при  $\mu = 1$ ,  $\Phi(p) = 0$ , т.е.  $p$  удовлетворяет исходному уравнению (1). Таким образом, следует ожидать, что при изменении параметра  $\mu$  от 0 до 1 переменная  $p$  будет меняться от произвольного начального значения  $p_0$  до решения системы уравнений (1). Найти функцию  $\mu \mapsto p(\mu)$  можно дифференцируя по  $\mu$  равенство (2)  $\Phi'(p(\mu)) dp(\mu)/d\mu = -\Phi(p_0)$ . Итак, нахождение решения сводится к интегрированию задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{dp(\mu)}{d\mu} = -[\Phi'(p(\mu))]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(\mu)|_{\mu=0} = p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь краевую задачу для системы ОДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad R(x(a), x(b)) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  гладкие функции. Полагаем, что решение задачи (4) существует и единственно. Решение задачи (4) будем искать при помощи метода пристрелки, идея которого заключается в сведении краевой задачи (4) к задаче Коши для системы ОДУ и системе нелинейных уравнений.

Построим схему процесса [1]. Выберем точку  $t_* \in [a, b]$  и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_*} = p \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$



Пусть решением задачи (5) будет функция  $x(t, p)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Понятно, что эта функция должна обращать в тождество граничные условия, т.е.  $\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0$ . Для решения полученного уравнения используем метод продолжения решения по параметру. Тогда имеем

$$\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a, p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b, p)}{\partial p}, \quad \text{где } x = x(a, p), y = x(b, p). \quad (6)$$

Введем обозначение  $X(t, p) = \partial x(t, p) / \partial p$ . Функцию  $X(t, p)$  можно найти из решения задачи Коши

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b, \quad (7)$$

которую получаем дифференцируя по параметру  $p$  задачу (5). Здесь  $A = A(t, p) \equiv f'_x|_{x=x(t, p)}$  — матрица размерности  $n \times n$ , а  $I$  — единичная матрица. Функции, стоящие в правой части системы (3), будут иметь вид  $\Phi(p) = R(x(a, p), x(b, p))$ ,  $\Phi'(p) = R'_x(x(a, p), x(b, p))X(a, p) + R'_y(x(a, p), x(b, p))X(b, p)$ . Целесообразно вычислять функции  $x(t, p)$ ,  $X(t, p)$  параллельно.

**2. Наилучший параметр продолжения.** Пусть дана система  $F_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений относительно  $n+1$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . При решении этой системы методом продолжения по параметру можно поставить вопрос о выборе наилучшего параметра продолжения [2]. Таким наилучшим параметром является длина дуги  $\lambda$ , отсчитываемая вдоль кривой множества решений системы. Локально такой параметр совпадает по направлению с касательной к этой кривой. Выбор  $\lambda$  в качестве параметра продолжения предполагает, что  $x_i$  являются функциями  $\lambda$ , т.е.  $x_i = x_i(\lambda)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ). Чтобы определить  $\lambda$ , необходимо дополнительное соотношение, устанавливающее связь между  $x_i$  и  $\lambda$ . Локально эта связь очевидна:

$$d\lambda^2 = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2. \quad (8)$$

Так как соотношение (8) — дифференциальное, то следует перевести заданную систему в эквивалентную ей дифференциальную форму —

задачу Коши по параметру  $\lambda$ . Получаем следующую задачу Коши

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\lambda} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2 = 1, \quad x_i(\lambda_0) = x_{i0}, \quad (9)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (10)$$

$y : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Имеет место следующая [2]

**Теорема.** Если задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) имеет единственную гладкую интегральную кривую, то для того чтобы эту задачу преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такого аргумента длину дуги  $\lambda$ , отсчитываемую от начальной точки вдоль интегральной кривой задачи. При этом задача (10) преобразуется в задачу

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{\pm f}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n f_j^2}}, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n f_j^2}}, \quad t(0) = t_0. \quad (11)$$

Формально к системе (11) можно прийти следующим путем. Найдем (в условиях системы (10)) связь длины дуги кривой с функциями  $y(t)$ . Очевидно, что

$$d\lambda = \sqrt{dt^2 + \sum_{j=1}^n dy_j^2} = \sqrt{\left(1 + \sum_{j=1}^n f_j^2\right)} dt. \quad (12)$$

Делим отдельно правые и левые части равенств  $dy = f dt$  и  $dt = dt$  на правую и левую часть (12) — получаем систему (11). Проведенные выше преобразования носят исключительно иллюстративный характер. Точное доказательство приведено в монографии [2].

**3. Задача двух тел.** Пусть дана краевая задача (см. [1, 3]):

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$x(0) = a_1, \quad y(0) = a_2, \quad x(T) = b_1, \quad y(T) = b_2.$$

Систему (13) можно записать в виде нормальной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_3 &= -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, \\ \dot{x}_2 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, \\ x_1(0) &= a_1, & x_1(T) &= b_1, & x_2(0) &= a_2, & x_2(T) &= b_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Для набора  $T = 7, a_1 = 2., a_2 = 0, b_1 = 1.0738644361,$   
 $b_2 = -1.0995343576$  выберем  $t_* = 0$  и начальные точки  
 $p_01 = [2., 0., -0.5, 0.5], p_02 = [2., 0., 0.5, -0.5].$

Рассмотрим ключевые моменты (и общие для каждого из методов) преобразования системы. Видно, что нам не обязательно вводить вектор  $p = [p_1, p_2, p_3, p_4]$  состоящий из 4 неизвестных, достаточно и двух, так как  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  заданы. Этот шаг позволяет сократить время вычислений и работать с минимальными размерностями входящих в вычисления матриц. Граничные условия принимают вид  $x_1(T, p) - b_1 = 0, x_2(T, p) - b_2 = 0$ . Тогда

$$\frac{d\Phi(p)}{dp} = \begin{pmatrix} X_{1,j}(T, p) \\ X_{2,j}(T, p) \end{pmatrix}_{j=3,4}.$$

Задача нахождения  $p$  разбита на следующие этапы. Первый — вычисления систем ОДУ (5),(7) производились параллельно стандартными (библиотечными) процедурами. Таким образом, для каждого входного вектора  $p$  мы получали  $X(t, p)$  и  $x(t, p)$ . Поиск решений систем ОДУ (5),(7) осуществлялся методом Рунге–Кутты–Фельберга порядка 4(5) (rkf45), реализованным в системе Maple. На втором этапе использовалась явная схема метода Эйлера.

*Результаты.* Далее предполагается, что "начальное значение – решение" дается следующей таблицей (см. [1])

$p_0N$	Нач.знач.	Решение
1	(-0.5, 0.5)	(0.0000004834, 0.5000000745)
2	(0.5, -0.5)	(0.4510782034, -2.994186665)

$p_0N$	шаг	$\Delta_{\Pi}^{max}$	$\Delta_{НП}^{max}$
1	0.05	0.01246	0.01064
2	0.05	0.00158	0.00149
1	0.1	0.02382	0.02071
2	0.1	0.00311	0.00293

Принятые сокращения:  
 П — результат для метода продолжения по параметру, НП — результат для метода продолжения по наилучшему параметру,  $\Delta^{max}$  — максимальное

отклонение от искомого решения на отрезке, т.е.

$\Delta^{max} = \max_{0 \leq \mu \leq 1} \|\varphi(\mu) - p(\mu)\|_2$ , где  $\varphi(\mu)$  — точное решение.

**4. Параметризация движения по эллипсу.** В предыдущем разделе была проведена параметризация уравнения  $\Phi(p) = 0$ , при этом на каждом шаге "достаточно точно" интегрировалась система

$$\dot{x} = f(x), x(t_*) = p_0, \quad \dot{X} = f'_x(x)X, X(t_*) = I, \quad (15)$$

которая соответствует "внутренней проблеме" [1].

Теперь проведем сравнение не преобразованной системы (15) с преобразованной к наилучшему аргументу. Для простоты будем рассматривать только часть системы (15):

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_*) = p_0. \quad (16)$$

Дифференциальное уравнение (16) задает движение в поле силы тяжести. Начальные параметры выберем следующие (полный обход эллипса):  $T = 10.57$ ,  $p_0 = (2, 0.0, 0.451078, -0.299418)$ . Очевидно, что при приближении к точке  $(0,0)$  на плоскости  $x_1 x_2$  система (16) будет иметь вырожденный характер. Более аккуратное исследование показывает, что на отрезке [8,9] имеем подобие "пограничного слоя". Это говорит о том, что преобразование системы к наилучшему параметру должно дать хорошие результаты.

Далее сравнивается вычислительная ситуация для метода Эйлера, преобразованного и не преобразованного.

Метод	h	$\Delta x$	$\Delta v$	$\Delta_{max} x$	$\Delta_{max} v$	n
НП	0.01	.116	.079	.117	.616	1932
НП	0.005	.057	.040	.058	.331	3885
НП	0.001	.012	.008	.012	.068	19506
Э	0.01	1.49	.660	1.49	.754	1057
Э	0.005	.878	.492	.878	.522	2114
Э	0.001	.200	.153	.200	.153	10570

Сокращения: Э — результат для метода Эйлера, НП — результат для метода Эйлера, преобразованного к наилучшему аргументу,  $\Delta x = \max\{|x_1(T)|, |x_2(T)|\}$  — отклонение от искомого решения на последнем шаге,  $\Delta v = \max\{|x_3(T)|, |x_4(T)|\}$  — отклонение от искомого решения на последнем шаге,  $\Delta_{max} x = \max_{0 \leq t \leq T} \{|x_1(t)|, |x_2(t)|\}$  — максимальное отклонение от искомого решения на отрезке,

$\Delta_{max} v = \max_{0 \leq t \leq T} \{|x_3(t)|, |x_4(t)|\}$  — максимальное отклонение от искомого решения на отрезке,  $n$  — число шагов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 01-01-00038).

### Список литературы

1. *Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N.* Boundary Value Problem for Ordinary Differential Equations with Applications to Optimal Control // Proceedings of the tenth Crimean autumn mathematical school – symposium "Spectral and evolution problems". 2000. Vol. 10. P. 147-155.
2. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. *Bellman R.E., Kalaba R.E.* Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. NY.: American Elsevier Publishing Company, 1965.

### Об устойчивости облачных скоплений микрочастиц в бинарных звездных системах

*А. Л. Кунцын*  
(kunitsyn@chat.ru)

Московский авиационный институт, Россия

Ранее [1,2] был проведен новый (во многом более наглядный) анализ устойчивости семейств положений относительного равновесия (точек либрации) микрометеоритных частиц (или частиц газопылевого облака) в гравитационно репульсивном поле двух тел (звезд), обращающихся относительно их барицентра по кеплеровым орбитам. Анализ устойчивости семейств коллинеарных точек либрации (КТЛ) был проведен [2] только для частного случая одинакового репульсивного влияния на частицу со стороны обоих излучающих тел. Цель данного исследования - как снятие этого ограничения, так и установление связи устойчивых семейств КТЛ с семействами устойчивых треугольных точек либрации (ТТЛ), а также выяснение полной картины их эволюции во всем возможном интервале изменения параметров системы. Получить достаточно простую и физически ясную картину областей устойчивости и их эволюции удалось в результате использования метода исключения параметра, эффективность

которого была продемонстрирована ранее [3] при решении задач, подобных рассматриваемой. Преимущества этого метода построения областей устойчивости заключаются как в возможности получения аналитического решения в случаях, когда традиционный подход не позволяет этого сделать, так и в построении области устойчивости непосредственно в конфигурационном пространстве, что всегда дает более наглядную картину устойчивых состояний системы.

Как было показано [1,2], координаты точек либрации и условия их устойчивости определяются как параметрами гравитационно-репульсивного поля, так и парусностью находящихся в этом поле частиц. В качестве параметра, характеризующего гравитационно-репульсивное поле выбранной звездной пары, следует взять величину, определяемую как [1,2]  $k = \left(\frac{M_2}{C_2}\right) / \left(\frac{M_1}{C_1}\right)$ , где  $M_1, M_2$  - массы основных тел,  $C_1, C_2$  - мощности их излучения соответственно. Очевидно,  $k$  может принимать любые неотрицательные значения.

Силовая функция рассматриваемой задачи, называемой также фотогравитационной ограниченной задачей трех тел, имеет вид [4,5]

$$W = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{Q_1(1 - \mu)}{R_1^2} + \frac{Q_2\mu}{R_2^2}, \quad (1)$$

$$R_i = (x^2 - a_i)^2 + y^2 + z^2, \quad i = 1, 2,$$

где  $x, y, z$  — безразмерные прямоугольные координаты пассивно гравитирующей частицы  $P$  в системе  $Oxyz$ , равномерно вращающейся вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью, равной единице,  $\mu$  и  $(1 - \mu)$  — безразмерные массы основных тел  $S_2$  и  $S_1$ , отнесенные к их общей массе, а  $a_1 = -\mu, a_2 = (1 - \mu)$  — их безразмерные координаты,  $Q_1, Q_2$  — коэффициенты редукции масс тел  $S_2$  и  $S_1$ , характеризующие влияние репульсивного поля светового давления и представляющие собой отношение разности гравитационной и репульсивной сил к гравитационной силе. Как было показано [1,2], для всякого фиксированного значения  $k$ , т.е. для фиксированной пары основных тел  $S_2$  и  $S_1$  коэффициенты редукции не могут быть произвольными, а должны быть связаны линейным соотношением

$$1 - Q_2 = k(1 - Q_1), \quad (2)$$

что не принималось во внимание в большинстве предыдущих работ [4]. Это не позволяло сделать правильных выводов о располо-

жении и устойчивости точек либрации в зависимости от парусности находящихся в них частиц для всякой фиксированной пары основных тел. В данной работе исследование устойчивости (КТЛ) проведем для всех допустимых значений параметров системы  $k$  и  $\mu$  ( $0 < k < \infty$ ,  $0 < \mu \leq 1/2$ ).

Как было показано [1-3, 5], внешние КТЛ, лежащие вне отрезка  $(S_2 S_1)$ , всегда неустойчивы, поэтому рассмотрим только внутренние КТЛ, лежащие на отрезке  $(S_1 S_2)$ . Условие устойчивости, вытекающее из требования отсутствия положительных вещественных частей у корней характеристического уравнения линеаризованной системы, имеет вид: [5]

$$\frac{8}{9} \leq A \leq 1, \quad A = \frac{Q_1(1-\mu)}{R_1^3} + \frac{Q_2\mu}{R_2^3}. \quad (3)$$

Используя уравнение равновесия (получаемое из условия  $\delta W = 0$  при  $y = 0$ )

$$x - \frac{1-\mu}{R_1^3} (x - a_1) Q_1 - \frac{\mu}{R_2^3} (x - a_2) Q_2 = 0 \quad (4)$$

и указанную выше связь (2) между  $Q_1$  и  $Q_2$ , будем иметь

$$A = \left( \frac{1-\mu}{R_1^2} - k \frac{\mu}{R_2^2} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{1-\mu}{R_1^3} + k \frac{\mu}{R_2^3} \right) x + 0 \frac{\mu(1-\mu)}{R_1^3 R_2^3} (1-k) \right],$$

где  $x = R_1 - \mu = 1 - \mu - R_2$ .

Учитывая, что для внутренних точек либрации  $R_1 + R_2 = 1$ , из условия  $A \leq 1$  получим две пары неравенств

$$k \leq f_1(R_1, R_2), \quad k > f_2(\mu, R_1, R_2), \quad (5a)$$

$$k \geq f_1(R_1, R_2), \quad k < f_2(\mu, R_1, R_2), \quad (5b)$$

$$\text{где } f_1(R_1, R_2) \equiv \frac{(1-R_2^3)}{(1-R_1^3)}, \quad f_2(\mu, R_1, R_2) \equiv \frac{(1-\mu)(R_2/R_1)^2}{\mu}.$$

(Случай  $k = f_2(\mu, R_1, R_2)$  будет рассмотрен ниже).

Аналогично из условия  $A \geq 8/9$  выводим две пары неравенств

$$k < f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \leq f_3(\mu, R_1, R_2), \quad (6a)$$

$$k > f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \geq f_3(\mu, R_1, R_2), \quad (6b)$$

где  $f_3(\mu, R_1, R_2) \equiv \frac{1-\mu}{\mu} \frac{9\mu(1-R_2^3) + R_1 R_2^3}{9(1-\mu)(1-R_1^3) + R_1^3 R_2}$ .

Проведем анализ полученных неравенств для различных значений  $k \neq 1$ . Кривые  $k = f_i(\mu, R_1, R_2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $\mu = 0.02$  приведены на рис. 1. Все они пересекаются в одной и той же точке  $C$ , в чем можно убедиться, сравнивая равенства  $f_2(\mu, R_1, R_2) = f_3(\mu, R_1, R_2)$  и  $f_2(\mu, R_1, R_2) = f_1(R_1, R_2)$ , приводящиеся к одному и тому же соотношению

$$(1-\mu)R_{2*}^2(1-R_{1*}^3) = \mu R_{1*}^2(1-R_{2*}^3), \quad (7)$$

определяющему значение  $R_{1*}$  в этой точке в зависимости от  $\mu$  (соответствующее значение  $k^*$  можно определить по одной из формул  $k^* = f_i(\mu, R_1, R_2)$  ( $i = 1, 2, 3$ )). При  $\mu \rightarrow 0$  эта точка перемещается вверх по кривой  $f_1(R_1, R_2)$ , неограниченно приближаясь к ее асимптоте  $R_1 = 1$ .

Из анализа неравенств (5), (6) и (7), (8) вытекает, что устойчивость КТЛ возможна либо при одновременном выполнении неравенств (5б) и (6а), т.е. когда

$$k \geq f_1(R_1, R_2), \quad k < f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k \leq f_3(\mu, R_1, R_2), \quad (8)$$

либо при одновременном выполнении неравенств (5а) и (6б), т.е. когда все неравенства (8) меняются на противоположные.

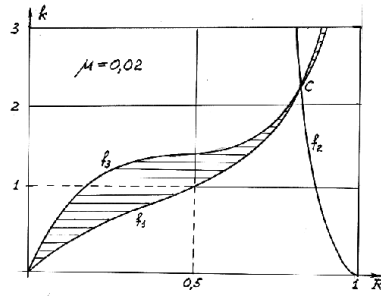


Рис. 1

Области устойчивости, определяемые неравенствами (8) и им противоположными, при  $\mu = 0.02$  на рис. 1 заштрихованы. Каждый горизонтальный отрезок, заключенный между границами построенных областей, представляет все множество устойчивых КТЛ, при данном значении  $k$ , примыкающих слева (или справа) к кривой  $k =$



$f_1(R_1, R_2)$ , определяющей семейство ТТЛ [4]. Координаты левого и правого концов этого отрезка являются соответственно корнями уравнений  $k = f_2(\mu, R_1, R_2)$ ,  $k = f_1(R_1, R_2)$ .

Рассмотрим вопрос об устойчивости в точке  $C$ , в которой все неравенства (8) обращаются в равенства. Представляя условие равновесия в виде:

$$\begin{aligned} [f_2(\mu, R_1, R_2) - k] Q_1 &= f_4(\mu, R_1, R_2) - k, \\ f_4(\mu, R_1, R_2) &\equiv \frac{R_2^2 x}{\mu} + 1, \quad x = R_1 - \mu, \end{aligned} \quad (9)$$

видим, что оно может удовлетворяться при любых значениях коэффициента редукции  $Q_1$  (и соответствующих ему, согласно (2), значениях  $Q_2$ ), если одновременно выполняются равенства

$$k = f_2(\mu, R_1, R_2), \quad k = f_4(\mu, R_1, R_2), \quad (10)$$

определяющие точку пересечения кривых (11) на плоскости  $k, R_1$ .

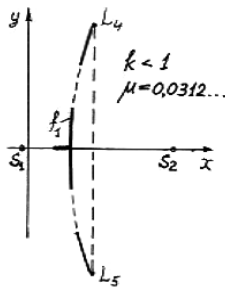


Рис. 2

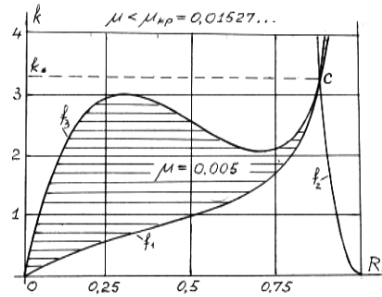


Рис. 3

Нетрудно убедиться, что уравнение  $f_2(\mu, R_1, R_2) = f_4(\mu, R_1, R_2)$  приводится к виду (7), т.е. точкой пересечения кривых (10) опять будет вышеуказанная точка  $C$ . Каждой кривой  $k = f_1(R_1, R_2)$ , при фиксированном значении  $k$  определяющей на плоскости  $k, R_1$  расположение семейства ТТЛ (рис.2), принадлежит единственная КТЛ, являющаяся точкой пересечения этой кривой с осью  $x$ . Поскольку для ТТЛ имеем  $Q_i = R_i^3$  ( $i = 1, 2$ ) [3,4], то в этих КТЛ могут располагаться только частицы с одной и той же парусностью (из проведенного исследования устойчивости ТТЛ [4] вытекает, что для

таких частиц устойчивость будет иметь место при любых значениях  $\mu$ ). Однако при  $k = k^*$  (т.е. в точке  $C$  области устойчивости) в тех же точках либрации, согласно (9), могут, кроме того, находиться частицы с различной парусностью и коэффициентами редукции, связанными лишь соотношением (2). Но устойчивостью будут обладать лишь те из них, коэффициенты редукции которых удовлетворяют неравенствам (3). Исключая в выражении для  $A$  один из коэффициентов редукции (например,  $Q_2$ ) с помощью соотношения (2) при  $k = k^*$ , а затем  $k^*$  с помощью, например, зависимости  $k^* = f_1(R_1, R_2)$  и, наконец, с помощью (7), будем иметь

$$A = \frac{Q_1(1 - R_2^3) + R_1(R_2^3 - R_1^3)}{R_1 R_2 (R_1^2 + R_2^2 - R_1^2 R_2^2)}.$$

Неравенства (3) теперь можно записать в виде

$$\frac{1}{9} R_1 \left( 8R_1^2 + \frac{R_1^3 - R_2^3}{1 - R_2^3} \right) \leq Q_1 \leq R_1^3. \quad (11)$$

Заметим, что такое устойчивое скопление частиц с разной парусностью возможно лишь при значениях  $k \geq 1$  (для случая  $k = 1$  на это явление было указано ранее [5]).

На основании проведенного анализа можно сделать следующие выводы относительно области устойчивости КТЛ в конфигурационном пространстве (т.е. на плоскости  $xy$ ). При  $k < k^*$  кроме всегда устойчивых КТЛ, в которые переходят ТТЛ, при том же значении  $k$  возникает целое семейство устойчивых КТЛ, располагающихся на отрезке оси  $x$ , примыкающем слева (со стороны тела большей массы) к кривой  $f_1$  (рис.2). При этом в каждой точке этого отрезка могут располагаться частицы только с единственной парой значений  $Q_1$  и  $Q_2$ . С уменьшением  $\mu$  длина этого отрезка возрастает, а с увеличением  $k$  он уменьшается, стягиваясь в точку пересечения кривой  $k = f_1(R_1, R_2)$  с осью  $x$  при  $k = k^*$ , причем теперь в этой точке либрации могут находиться частицы с любыми значениями  $Q_1$  и  $Q_2$ , если только  $Q_1$  удовлетворяет неравенствам (11).

При дальнейшем увеличении  $k$  вместо указанного устойчивого семейства КТЛ появляется новое устойчивое семейство, лежащее на отрезке, примыкающем теперь к кривой  $f_1$  справа (со стороны тела меньшей массы). Длина этого отрезка при всех значениях  $\mu$  и  $k$  существенно меньше того, который примыкает к той же кривой слева.

Он исчезает совсем только при  $k = \infty$ , т.е. когда  $Q_1 = 1$ , что имеет место при отсутствии светового потока у тела с массой  $1 - \mu$ .

Отметим еще одно интересное свойство области устойчивости КТЛ, расположенных на отрезке, примыкающем к кривой  $f_1$  слева при весьма малых значениях  $\mu$  и больших значениях  $k$ . В результате расчетов кривых, определяющих область устойчивости (8) было установлено, что при  $\mu < \mu_{кр} = 0.0153\dots$  у кривой  $k = f_2(\mu, R_1, R_2)$  появляются две экстремальные точки (рис.3), в результате чего при значениях  $k$ , подчиненных неравенству  $k_{кр} < k < k^*$  (значение  $k_{кр}$  однозначно определяется величиной  $\mu_{кр}$ ) вышеуказанный отрезок оси  $x$ , представляющий семейство устойчивых КТЛ, распадается на два. При увеличении  $k$  разделяющая эти отрезки щель неустойчивости увеличивается с одновременным уменьшением длины отделившегося отрезка, и при некотором значении  $k = k_{max}$  он стягивается в точку, после чего (при  $k > k_{max}$ ) исчезает совсем, а область устойчивости на плоскости  $xy$  принимает первоначальный вид. Указанное бифуркационное значение  $k_{кр}$  находится из условия  $\partial f_2 / \partial R_1 = 0$ , которое приводится к квадратному уравнению относительно  $\mu$ . Значение  $\mu_{кр}$  является кратным корнем этого уравнения. Из условия кратности находится соответствующее величине  $\mu_{кр}$  значение  $R_{1кр} = 0.4753\dots$ , которое является корнем алгебраического уравнения высокой степени. Соответствующее значение  $k_{кр}$  вычисляется по формуле  $k_{кр} = f_2(\mu, R_{1кр}, R_{2кр})$ , что дает  $k = 1.5074\dots$  Таким образом, рассматриваемый случай реализуется только, когда тело меньшей массы обладает большей мощностью излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (Е00-11.0-28).

### Список литературы

1. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. ж. 1983. Т. 9. № 7. С. 432-435.
2. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. ж. 1985. Т. 11. № 2. С. 145-148.
3. Лукьянов Л.Г. О семействе точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел // Астрон. ж. 1988. Т. 65. Вып. 2. С. 422-432.

4. *Кунитсын А.Л.* Об устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2000. Т. 65. Вып. 5. С. 788-794.
5. *Кунитсын А.Л.* Об устойчивости коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2001. Т. 61. Вып. 4.
6. *Кунитсын А.Л.* О методе исключения параметра при решении задачи устойчивости // Актуальные проблемы классической и небесной механики / Межвед. Сб. научн. тр. Тоо "Эльф". М., 1998.
7. *Kunitsyn A.L., Polyakhova E.N.* The restricted photogravitational three-body problem: a modern state // Astron. and Astrophys. Trans. 1995. V. 6. № 4. P. 283-293.

## Конфигурационное S-пространство динамически симметричного твердого тела в случае Эйлера

*К. Г. Петров*

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Ориентацию твердого тела относительно базиса инерциального пространства принято задавать углами Эйлера или самолетными углами, но возможны и другие виды параметризаций, например, кватернионами, модуль которых равен единице [1]. На основе кватернионов, задающих ориентацию твердого тела, можно построить трехпараметрическую параметризацию модифицированными параметрами Родрига-Гамильтона или s-параметрами [3, 4], выражения которых через компоненты кватерниона ориентации заданы соотношением

$$\vec{s} = \frac{\vec{\lambda}}{1 - \lambda_0}. \quad (1)$$

Вектор из трех s-параметров, определяемых соотношением (1), коллинеарен направляющему вектору оси конечного поворота тела и может быть представлен в виде [3]  $\vec{s} = \text{ctg } \theta_0 \vec{n}$ , где  $\theta_0$  — угол конечного поворота. Компоненты матрицы направляющих косинусов главных центральных осей инерции тела  $Cxyz$  в базисе инерциального пространства выражаются через s-параметры следующим образом [3]

$$A_{11} = (u - 8(s_2^2 + s_3^2))/u, \quad A_{12} = 4(2s_1s_2 - s_3(|s|^2 - 1))/u, \\ A_{13} = 4(2s_1s_3 + s_2(|s|^2 - 1))/u, \quad A_{21} = 4(2s_1s_2 + s_3(|s|^2 - 1))/u,$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= (u - 8(s_1^2 + s_3^2))/u, & A_{23} &= 4(2s_2s_3 - s_1(|s|^2 - 1))/u, \\ A_{31} &= 4(2s_1s_3 - s_2(|s|^2 - 1))/u, & A_{32} &= 4(2s_2s_3 + s_1(|s|^2 - 1))/u, \\ A_{33} &= (u - 8(s_1^2 + s_2^2))/u, & u &= (u^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

При отсутствии момента внешних сил твердое тело совершает движение Эйлера – Пуансо с постоянными величинами момента импульса и кинетической энергии. Предположим, что базис инерциального пространства выбран так, чтобы момент импульса тела был направлен по оси  $CZ$ , тогда интеграл энергии тела примет вид

$$\frac{2T}{L^2} = \frac{A_{31}^2}{A} + \frac{A_{32}^2}{B} + \frac{A_{33}^2}{C}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) выражения направляющих косинусов через  $s$ -параметры, получаем интеграл энергии тела в виде

$$\begin{aligned} \frac{2T}{L^2} &= \frac{1}{C} + \frac{64}{u^2} \left[ \frac{(s_1^2 + s_2^2)^2}{C} + s_3^2 \left( \frac{s_1^2}{A} + \frac{s_2^2}{B} \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (|s|^2 - 1) s_1 s_2 s_3 \right] + \frac{16}{u^2} (|s|^2 - 1)^2 \left( \frac{s_1^2}{B} + \frac{s_2^2}{A} \right) - \frac{16}{u} \frac{s_1^2 + s_2^2}{C}. \end{aligned}$$

Очевидно, что интеграл энергии задает в пространстве  $s$ -параметров поверхность, которая представляет собой множество всех возможных для данных значений момента импульса и кинетической энергии ориентаций тела, иначе говоря — его конфигурационное пространство в пространстве  $s$ -параметров. Эта довольно сложная поверхность [2], но в частном случае динамически симметричного твердого тела конфигурационное пространство имеет существенно более простую форму. Предположим, что ось динамической симметрии тела совпадает с осью  $Cz$ , тогда интеграл энергии тела примет вид

$$\frac{2T}{L^2} = \frac{1}{C} + \frac{16}{u^2} (s_1^2 + s_2^2) \left[ \frac{(|s|^2 - 1)^2 + 4s_3^2}{A} + \frac{4(s_1^2 + s_2^2) - u}{C} \right]. \quad (3)$$

Поверхность (3) является правильным тором [2], который параметризуется двумя угловыми параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  в виде

$$s_1 = \delta \cos \beta / \sin \theta_0, \quad s_2 = \delta \sin \beta \sin \theta_0, \quad s_3 = \text{ctg } \theta_0 \sin \alpha. \quad (4)$$

где  $\delta = 1 + \cos \theta_0 \cos \alpha$ , а параметр  $\theta_0$  равен половине угла нутации тела, который постоянен при невозмущенном движении Эйлера – Пуансо, а его величина определяется соотношением

$$\sin^2 2\theta_0 = (2T/L^2 - 1/C)/(1/A - 1/C).$$

Кинематические уравнения свободно вращающегося твердого тела [2], записанные в s-параметрах, имеют вид

$$(\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^T = -\frac{1}{4}\mathbf{B}(\omega_{rx}, \omega_{ry}, \omega_{rz})^T, \quad (5)$$

где матрица  $\mathbf{B}$  выражается через s-параметры следующим образом

$$\begin{aligned} B_{11} &= s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 + 1, & B_{12} &= 2(s_1 s_2 + s_3), & B_{13} &= 2(s_1 s_3 - s_2), \\ B_{21} &= 2(s_1 s_2 - s_3), & B_{22} &= -s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 + 1, & B_{23} &= 2(s_2 s_3 + s_1), \\ B_{31} &= 2(s_1 s_3 + s_2), & B_{32} &= 2(s_2 s_3 - s_1), & B_{33} &= -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 + 1. \end{aligned}$$

Проекции угловой скорости на главные центральные оси инерции тела можно выразить через момент импульса тела в виде

$$(\omega_{rx}, \omega_{ry}, \omega_{rz})^T = \text{diag}(1/A, 1/A, 1/C)\mathbf{A}^T(0, 0, L)^T.$$

Подставляя параметризацию (4) в кинематические уравнения (5), получаем дифференциальные уравнения для параметров  $\alpha$  и  $\beta$

$$\dot{\alpha} = L\kappa_1(1 + \cos\theta_0 \cos\alpha)/(2 \sin\theta_0), \quad \dot{\beta} = L\kappa_2/2, \quad (6)$$

где

$$\kappa_1 = 2 \sin^2 \theta_0 (A^{-1} - C^{-1}) + C^{-1},$$

$$\kappa_2 = 2(A^{-1} \cos^2 \theta_0 + C^{-1} \sin^2 \theta_0) - C^{-1}.$$

Уравнения (6) легко интегрируются [2] в виде

$$\alpha = 2 \arctg \left\{ \sqrt{\frac{1 + \cos\theta_0}{1 - \cos\theta_0}} \text{tg} \left[ \frac{L\kappa_1}{4}(t + t_0) \right] \right\}, \quad \beta = \beta_0 + \frac{L\kappa_2}{2}t. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получаем траекторию точки, представляющей ориентацию вращающегося твердого тела в пространстве s-параметров. Эта кривая лежит на конфигурационном пространстве тела (3). Введя новые переменные по закону

$$\alpha_1 = 2 \arctg \left\{ \sqrt{\frac{1 - \cos\theta_0}{1 + \cos\theta_0}} \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right\}, \quad \beta_1 = 2 \arctg \text{tg} \frac{\beta}{2}, \quad (8)$$

получим траекторию изображающей точки тела, которая на плоскости новых параметров состоит из отрезков параллельных прямых, покрывающих квадрат  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . При произвольных значениях кинетической энергии и момента импульса тела траектория изображающей точки тела покрывает упомянутый выше квадрат всюду плотно, поэтому при усреднении величин, зависящих от ориентации твердого тела, по его невозмущенному движению Эйлера –

Пуансо можно, для достаточно широкого класса функций (как минимум для непрерывных и кусочно непрерывных функций) заменить усреднение по траектории невозмущенного движения Эйлера — Пуансо усреднением по конфигурационному пространству тела. Весовая функция усреднения по конфигурационному пространству тела пропорциональна относительному времени пребывания изображающей точки в малом участке конфигурационного пространства. В параметрах (8) весовая функция постоянна  $K(\alpha_1, \beta_1) = 1/(4\pi^2)$ .

При переходе к параметризации параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  весовая функция усреднения пропорциональна коэффициенту искажения площади при замене переменных. Она имеет следующий вид

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\sin \theta_0}{4\pi^2} \frac{1}{1 + \cos \theta_0 \cos \alpha}. \quad (9)$$

Усреднение величин, зависящих от ориентации твердого тела, производится с использованием весовой функции (9) по формуле.

$$\langle f \rangle_S = \frac{\sin \theta_0}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f d\alpha d\beta}{1 + \cos \theta_0 \cos \alpha}. \quad (10)$$

Усреднение по конфигурационному пространству свободно вращающегося динамически симметричного твердого тела может оказаться полезным при исследовании ротационного движения динамически симметричного твердого тела под действием малых моментов внешних сил. Особенно важными являются усредненные по конфигурационному пространству компоненты матрицы направляющих косинусов  $\mathbf{A}$  и все возможные их попарные произведения. От этих величин зависит усредненный по невозмущенному движению Эйлера — Пуансо момент гравитационных сил. Используя параметризацию (4) конфигурационного s-пространства и формулу усреднения (10), получаем искомые усредненные компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  и их попарные произведения. Для экономии места приведем только те величины, средние значения которых не равны нулю.

$$\langle A_{33} \rangle_s = \cos(2\theta_0), \quad \langle A_{33}^2 \rangle_s = \cos^2(2\theta_0),$$

$$\langle A_{11}^2 \rangle_s = \frac{1}{4}(1 + \cos^2(2\theta_0)), \quad \langle A_{11} A_{22} \rangle_s = \frac{1}{2} \cos(2\theta_0),$$

$$\langle A_{12}^2 \rangle_s = \frac{1}{4}(1 + 2 \cos^2(2\theta_0)), \quad \langle A_{12}A_{21} \rangle_s = -\frac{1}{2} \cos(2\theta_0),$$

$$\langle A_{13}^2 \rangle_s = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta_0), \quad \langle A_{21}^2 \rangle_s = \frac{1}{4}(1 + 2 \cos^2(2\theta_0)),$$

$$\langle A_{22}^2 \rangle_s = \frac{1}{4}(1 + \cos^2(2\theta_0)), \quad \langle A_{23}^2 \rangle_s = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta_0),$$

$$\langle A_{31}^2 \rangle_s = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta_0), \quad \langle A_{32}^2 \rangle_s = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta_0),$$

Работа выполнена при поддержке Минобразования России (грант № T02-14.0-1443).

### Список литературы

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Уравнения ротационного движения, основанные на использовании кватернионных параметров // Изв. РАН. Мех. тверд. тела, 2002. № 3. С. 3-16.
3. *Marandi S.R., Modi V.J.* A preferred coordinate system and the associated orientational representation in attitude dynamics // Acta Astronautics, 1987. Vol. 15, № 11. P. 833-843.
4. *Shuster M.D.* A survey of attitude representations // J. of the Astronaut. Sci., 1993. Vol. 41, № 4. P. 439-517.

### О расстояниях в пространстве эллиптических орбит

*К. В. Холшевников*  
(kvk@astro.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В пространстве кеплеровских орбит введена естественная гильбертова метрика, полезная при рассмотрении следующих вопросов: космический мусор (идентификация фрагментов одного объекта); космический патруль (идентификация спутников, запущенных вместе одной ракетой без подробного описания или вообще без объявления); нахождение родительского тела для метеорных потоков; нахождение родительского тела для малых планет и комет, имеющих близкие орбиты.



Обозначим через  $\mathbf{E}$  5-мерное пространство эллиптических кеплеровских орбит. Пусть  $Q(u)$  — точка на эллипсе  $E \in \mathbf{E}$  с эксцентрисической аномалией  $u$ ;  $d(Q_1, Q_2)$  — евклидово расстояние в  $\mathbf{R}^3$ . Введем зависящую от параметра  $p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) функцию, отображающую  $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$  на множество неотрицательных чисел:

$$\rho^*(E_1, E_2) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int s^p(Q_1(u), Q_2(u)) du \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

$$\rho^*(E_1, E_2) = \max d(Q_1(u), Q_2(u)), \quad \text{если } p = \infty.$$

Интеграл и максимум берутся по отрезку  $u \in [0, 2\pi]$ .

Исследуем выполнимость трех аксиом расстояния.

1.  $\rho^*(E_1, E_2) = 0$  тогда и только тогда, когда  $E_1 = E_2$ . Очевидна справедливость аксиомы, *если исключить круговые орбиты*. В последнем случае две одинаковые окружности с разным началом счета углов приходится рассматривать как различные.

2.  $\rho^*(E_1, E_2) = \rho^*(E_2, E_1)$ . Это очевидно.

3.  $\rho^*(E_1, E_2) \leq \rho^*(E_1, E_3) + \rho^*(E_3, E_2)$ . Доказательство элементарно.

Итак, мы наделили метрикой пространство  $\mathbf{E}^*$ , представляющее собой  $\mathbf{E}$ , из которого исключены круговые орбиты. При любом  $p$  расстояние разрывно на кеплеровских окружностях. Точнее, предельное множество значений  $\rho^*(E_0, E)$  при фиксированном  $E_0$  и стремящемся к фиксированной окружности  $E$  заполняет отрезок. Избавимся от этого неудобства и введем функцию

$$\rho(E_1, E_2) = \begin{cases} \min \left( \frac{1}{2\pi} \int d^p(Q_1(u), Q_2(u+v)) du \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty, \\ \min \max d(Q_1(u), Q_2(u+v)), & p = \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь минимум берется по отрезку  $v \in [0, 2\pi]$ , интеграл и максимум — по отрезку  $u \in [0, 2\pi]$ .

Справедливость первой аксиомы расстояния очевидна. Вторая доказывается подстановкой  $u' = u + v, v' = -v$  с учетом периодичности. Доказательство неравенства треугольника требует некоторых усилий и мы его опустим за недостатком места.

При произвольном  $p$  алгоритм вычисления расстояния довольно сложен и требует много машинного времени при массовых вычислениях. Он значительно упрощается при  $p = \infty$  и особенно  $p = 2$ . Опишем его здесь.

Пусть  $a, e, i, \Omega, \omega$  — кеплеровские элементы  $E$ ;  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ . Описывающие  $E'$  величины помечаются штрихом. Вектор положения  $\mathbf{r}$  на  $E$  выразим через эксцентрическую аномалию  $u$

$$\mathbf{r}/a = \mathbf{P}(\cos u - e) + \mathbf{S} \sin u. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{S} = \eta \mathbf{Q}$ , компоненты ортогональных единичных векторов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  даются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{ \cos \omega \cos \Omega - c \sin \omega \sin \Omega, \cos \omega \sin \Omega + c \sin \omega \cos \Omega, s \sin \omega \}; \\ \mathbf{Q} &= \{ -\sin \omega \cos \Omega - c \cos \omega \sin \Omega, -\sin \omega \sin \Omega + c \cos \omega \cos \Omega, s \cos \omega \}. \end{aligned}$$

Здесь  $c = \cos i$ ,  $s = \sin i$ . Векторы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  существуют всегда, хотя не единственны при  $e = 0$ .

Для приведенного к безразмерному виду квадрата функции расстояния  $W = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 / (2aa')$  легко вывести представление

$$\begin{aligned} W(u, u') &= W_0 + W_1 \cos u + W_2 \sin u + W_3 \cos u' + W_4 \sin u' + \\ &+ 2 [W_5 \cos u \cos u' + W_6 \cos u \sin u' + W_7 \sin u \cos u' + W_8 \sin u \sin u'] + \\ &+ W_9 \cos 2u + W_{10} \cos 2u'. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} 4W_0 &= 2(\alpha + \alpha') + \alpha e^2 + \alpha' e'^2 - 4PP'ee', \quad W_1 = PP'e' - \alpha e, \\ W_2 &= P'Se', \quad W_3 = PP'e - \alpha'e', \quad W_4 = PS'e, \\ 2W_5 &= -PP', \quad 2W_6 = -PS', \quad 2W_7 = -P'S, \quad 2W_8 = - \\ &4W_9 = \alpha e^2, \quad 4W_{10} = \alpha' e'^2, \end{aligned}$$

$PP', PS', P'S$  и  $SS'$  — скалярные произведения соответствующих векторов. Для симметрии мы положили  $\alpha = a/a'$ ,  $\alpha' = a'/a$ .

Вычисление  $\rho^*$  ( $p = 2, \infty$ ).

Пусть

$$f(u) = W(u, u). \quad (5)$$

Очевидно,

$$f(u) = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \sin u + A_3 \cos 2u + A_4 \sin 2u, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= W_0 + W_5 + W_8, & A_1 &= W_1 + W_3, & A_2 &= W_2 + W_4, \\ A_3 &= W_5 - W_8 + W_9 + W_{10}, & A_4 &= W_6 + W_7. \end{aligned}$$

При  $p = 2$  интеграл (1) элементарен. Мы получаем простую формулу

$$\rho^*(E, E') = \sqrt{2aa'A_0} \quad \text{для } p = 2. \quad (7)$$

В случае  $p = \infty$  на первом шаге надо найти все вещественные, лежащие на окружности  $[0, 2\pi)$  корни уравнения

$$f'(u) = 0, \quad (8)$$

где  $f'(u) = A_2 \cos u - A_1 \sin u + 2A_4 \cos 2u - 2A_3 \sin 2u$ . Обозначим через  $w$  корень (8), дающий наибольшее значение величине  $f$ . Тогда

$$\rho^*(E, E') = \sqrt{2aa'f(w)} \quad \text{для } p = \infty. \quad (9)$$

*Вычисление  $\rho$  ( $p = 2, \infty$ ).*

Представим  $W(u, u + v)$  в форме

$$W(u, u + v) = V_0 + V_1 \cos u + V_2 \sin u + V_3 \cos 2u + V_4 \sin 2u, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} V_0 &= W_0 + (W_5 + W_8) \cos v + (W_6 - W_7) \sin v, \\ V_1 &= W_1 + W_3 \cos v + W_4 \sin v, & V_2 &= W_2 + W_4 \cos v - W_3 \sin v, \\ V_3 &= W_9 + (W_5 - W_8) \cos v + (W_6 + W_7) \sin v + W_{10} \sin 2v, \\ V_4 &= (W_6 + W_7) \cos v - (W_5 - W_8) \sin v - W_{10} \sin 2v \end{aligned}$$

являются тригонометрическими многочленами относительно  $v$  первой и второй степени.

В случае  $p = 2$  интеграл (2) с учетом (10) сводится к  $V_0(v)$ . Наименьшее значение функции  $V_0(v)$  находится легко. Таким образом, для  $p = 2$

$$\rho^2(E, E') = 2aa' \left( W_0 - \sqrt{(W_5 + W_8)^2 + (W_6 - W_7)^2} \right). \quad (11)$$

В случае  $p = \infty$  мы сталкиваемся со стандартной минимаксной задачей. Т.к. функция (10) — тригонометрический многочлен на двумерном торе, решение  $(u_0, v_0)$  находится среди корней системы

$$\frac{\partial W(u, u+v)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial W(u, u+v)}{\partial v} = 0. \quad (12)$$

Для их нахождения достаточно решить систему

$$\frac{\partial W(u, u')}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial W(u, u')}{\partial u'} = 0 \quad (13)$$

и положить  $v = u' - u$ .

Система (13) тщательно исследована в [1]. Для ее решения достаточно найти все вещественные корни  $u_k$  уравнения  $g(u) = 0$ , где  $g$  — тригонометрический многочлен одной переменной восьмой степени. Соответствующие значения  $u'_k, v_k = u'_k - u_k$  находятся просто [1].

Затем следует рассмотреть только седловые точки  $u_k, v_k$ , в которых  $W(u, u+v)$  имеет максимум, а  $W(u_k, u_k+v)$  — минимум как функции одной переменной. Наконец, остается пара  $u_0, v_0$ , дающая наименьшее значение величине  $W(u_k, u_k+v_k)$ . Окончательно,

$$\rho^2(E, E') = 2aa'W(u_0, u_0+v_0) \quad \text{для } p = \infty. \quad (14)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-02-17516) и Ведущей научной школы (00-15-96775).

### Список литературы

1. *Kholshevnikov K.V., Vasiliev N.N.* On the Distance Function Between Two Keplerian Elliptic Orbits // *Celest. Mech. & Dyn. Astr.* 1999. **75**(2), С. 75-83.

## Стационарные движения и устойчивость спутника, удерживающего две массы с помощью тросов

П. Б. де Шанвиль д'Арк  
(baudesso@eleves.enpc.fr)

Национальная школа мостов и дорог, Париж, Франция

**1. Введение.** В работе методом Рауса исследуются условия существования и устойчивости стационарных движений связанной орбитальной системы. Она состоит из жесткого креста и из двух масс, присоединенных нерастяжимыми тросами к двум противоположным плечам креста. Изучается возможность использования системы как в качестве крана, так и в качестве якоря. Отметим, что космические краны рассматривались в работе [1].

### 2. Основные обозначения и предположения.

Рассмотрим вышеуказанную систему, основу которой составляет жесткий каркас в форме креста (рис. 1). Пусть  $N$  — центр притяжения,  $m_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\} = \mathcal{J}$  — массы, сосредоточенные на концах  $M_i$ ,  $i \in \mathcal{J}$ ,  $O$  — пересечение ортогональных стрелок  $M_1M_2$  и  $M_3M_4$ ,  $l_i = |OM_i|$  и  $r_i = |NM_i|$ ,  $i \in \mathcal{J}$  — длины плечей  $OM_i$  и  $NM_i$  соответственно,  $r = |NO|$ .

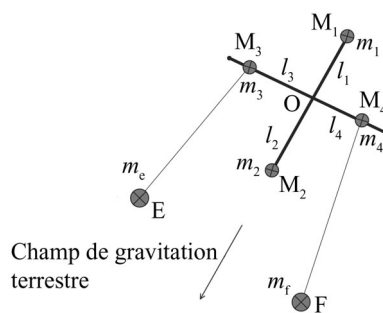


Рис. 1.

Массы  $m_e$  и  $m_f$  с центрами масс  $E$  и  $F$  подвешены в точках  $M_3$  и  $M_4$  невесомыми нерастяжимыми тросами, причем  $r_e = |NE|$ ,  $r_f = |NF|$ ,  $l_e = |EM_3|$ ,  $l_f = |FM_4|$ . Обозначим  $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_e + m_f$ .

Предположим, что ньютоновыми силами взаимодействий между различными массами спутника можно пренебречь по сравнению с силой земного притяжения. Пусть неподвижной геоцентрической системой координат будет  $NXYZ$ , а подвижной — система  $Oxyz$ . В подвижной системе  $\vec{ON} = (-r \sin \theta, -r \cos \theta)$ .

**3. Применение теоремы Пожарицкого.** Отметим, что из теоремы Пожарицкого следует, что всегда существуют стационар-

ные движения  $M_3E$  и  $M_4F$ , направленные соответственно вдоль лучей  $NM_3$  и  $NM_4$ . Именно такие конфигурации нас интересуют. Рассмотрим, следовательно, следующие геометрические условия:  $r_3 - r_e = l_e \varepsilon_e$ ,  $r_4 - r_f = l_f \varepsilon_f$  с  $\varepsilon_i = \pm 1$ , и  $i \in \{e, f\}$ . Для  $\varepsilon_i = +1$  интересующая нас точка  $P \in \{E, F\}$  находится между соответствующими точками  $N$  и  $Q \in \{M_3, M_4\}$ . Для  $\varepsilon_i = -1$  это  $Q$ , расположенная между  $P$  и  $N$ .

**4. Потенциал поправки.** Координата поправки  $\psi$  — циклическая. Произведя сокращение согласно теореме Рауса, получаем потенциал поправки

$$U = U_C + U_N, \quad U_C = p_\psi^2 / (2\mathbf{J}), \quad U_N = -f_N M \sum_{i \in \mathcal{J}} m_i / r_i,$$

где  $U_C$  — потенциальная энергия центробежных сил, а  $U_N$  — потенциальная энергия сил гравитации. Согласно теории размерностей можно установить, что  $f_N M = 1$ .  $\mathbf{J}$  — момент инерции системы по отношению к точке  $N$ , а  $p_\psi = const$  — канонический импульс, связанный с  $\psi$ . На стационарных движениях соотношение  $p_\psi = \mathbf{J} \omega$  связывает константу  $p_\psi$  с угловой скоростью вращения спутника вокруг Земли  $\omega = \dot{\psi}$ .

**5. Особые точки и их устойчивость.** Особые точки функции  $U$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

определяют стационарные конфигурации системы. Подлежащая решению система имеет вид:

$$f(x) = U'_{Nr} \mathbf{J}'_\theta - U'_{N\theta} \mathbf{J}'_r = 0, \quad (1)$$

$$\omega^2 = U'_{Nr} / \mathbf{J}'_r + U'_{N\theta} \mathbf{J}'_\theta. \quad (2)$$

Для исследования положений равновесия проведем анализ уравнения (1), пренебрегая  $p_\psi$ . В рамках теории Рауса достаточные условия для устойчивости таковы:

$$d_1 = U''_{rr} > 0, \quad (3)$$

$$d_2 = U''_{rr} U''_{\theta\theta} - U''_{r\theta}{}^2 > 0. \quad (4)$$

**6. Упрощающая гипотеза: аппроксимация спутников.**

Предположим, что размеры спутника ничтожно малы по сравнению с  $r$ . Считая  $x$  малой величиной, заменим  $l_i \mapsto xl_i$ . После упрощения получаем

$$f(x) = 6 f_2 x^2 / r^2 + o(x^2),$$

где  $f_2 = a_{cc} c^2 + a_{ss} s^2 + a_{cs} c s + a_c c + a_s s + a_0$ ,  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ .

Введем еще обозначения

$$A = m_1 l_1 - m_2 l_2, B = l_3 (m_3 + m_e) - l_4 (m_4 + m_f),$$

$$E = m_e l_e \varepsilon_e + m_f l_f \varepsilon_f,$$

$$I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 - l_3^2 (m_3 + m_e) - l_4^2 (m_4 + m_f)$$

$$J_O = m_e l_e \varepsilon_e l_3 - m_f l_f \varepsilon_f l_4.$$

Тогда можно записать

$$a_{cc} = -12 A B, \quad a_{ss} = 0, \quad a_{cs} = A^2 - B^2 - m I,$$

$$a_c = -m J_O + B E, \quad a_s = -A E, \quad a_0 = A B.$$

В этом приближении положения равновесия не зависят от  $r$ . Нужно найти величины  $\theta$ , для которых выполняется равенство  $f_2 = 0$ , и соотношения, связывающие собственные параметры спутника.

Произведем также разложения  $d_1$  и  $d_2$  по  $x$  до второго порядка. Остановимся здесь только на двух интересных случаях, так как "космический кран" и "якорь" рассматриваются в следующем параграфе. Имеем  $d_1 = m^2 r + \dots > 0$ , и стационарные движения устойчивы по отношению к лучу. Следовательно, остается одно условие (4).

**7. Исследование спутника в конфигурациях "крана" и "якоря".** Отметим, что от  $m_3$  и  $m_4$  зависит только  $B$ , при этом они аналогичны массам  $m_e$  и  $m_f$ , рассмотренным ранее. Эти массы не вносят особого интереса в наше исследование. Положим  $m_3 = m_4 = 0$ , тогда  $B = m_e l_3 - m_f l_4$ .

**8. Конфигурация "кран".**

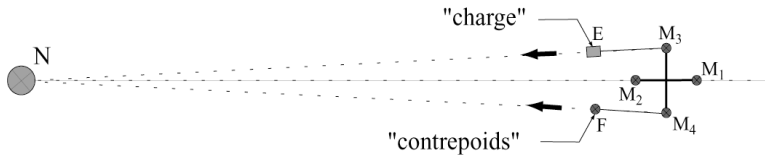


Рис. 2.

В такой конфигурации нужно обеспечить угол  $\theta$  равным нулю, но при этом трос  $M_3 E$ , как и в случае обычного крана, должен быть нагружен (см. рис. 2).

В данном исследовании

$$E = m_e l_e + m_f l_f > 0, J_O = m_e l_e l_3 - m_f l_f l_4.$$

Условие существования стационарного движения для  $\theta = 0$  выражается в виде  $(E - A) B - m J_O = 0$ . В случае  $A = 0$  условие равновесия системы записывается следующим образом:

$$m_e l_e l_3 (m_1 + m_2) - m_f l_f l_4 (m_1 + m_2) - m_e m_f (l_e l_4 + l_f l_3) = 0.$$

Это равенство предполагает положительность величины  $l_f$

$$l_3 (m_1 + m_2) > l_4 m_f.$$

Практические выводы здесь можно делать такие же, как и при исследовании связи между  $m_e$  и  $m_f$ . Но в данном случае обратим внимание на то, что чем больше  $m_1 + m_2$ , тем труднее уменьшить  $l_e$ , то есть приблизить груз к спутнику.

Для исследования устойчивости этих положений равновесия положим  $m J_O = (E - A) B$  и  $A = 0$  в выражении  $d_2$ . Условие устойчивости задается соотношением  $m I + B^2 > 0$  или же

$$m (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) > (m_1 + m_2) (m_e l_3^2 + m_f l_4^2) + m_e m_f (l_3 + l_4)^2. \quad (5)$$

Это условие показывает важность максимального увеличения  $l_1$  и  $l_2$  по сравнению с  $l_3$  и  $l_4$  для устойчивости равновесия. Отметим, что  $l_e$  и  $l_f$  не входят в условие устойчивости такого стационарного движения.

*Замечание 1.* В случае  $l_e = l_f$  имеем соотношение  $J_O = l_e B$ , и поэтому условие равновесия будет иметь вид  $(E - A - m l_e) B = 0$ . Тогда можно рассмотреть равновесие, вызванное отменой  $B$ , то есть при  $m_e l_3 = m_f l_4$ . Отметим, что это выражение напоминает соотношение Архимеда.

*Замечание 2.* Условие, при котором  $A$  не равно нулю, что выражается в асимметрии распределения масс  $m_1$  и  $m_2$ , является дополнительным фактором устойчивости или неустойчивости равновесий. Небольшое изменение угла  $\theta$  приведет к появлению момента сил, прилагаемых к  $m_1$  и  $m_2$ , так как  $M_1 M_2$  больше не будет параллельным к центробежным или гравитационным силам. Тогда получим условие устойчивости в виде

$$(E - A) + m I + B^2 > 0.$$



По отношению к предыдущему случаю будем стремиться максимально увеличить  $A(E - A)$ .

**9. Использование тросов в "якоре".** Будем теперь считать, что тело спутника может быть представлено двумя массами  $M_1$  и  $M_2$ , связанными жесткой осью  $M_1M_2$ . Пусть все параметры спутника зафиксированы, кроме  $l_e$  и  $l_f$ . Тогда положим  $m_e = m_f$  и  $l_3 = l_4$ . Параметр  $\theta$  изменяется между  $-\pi$  и  $\pi$ .

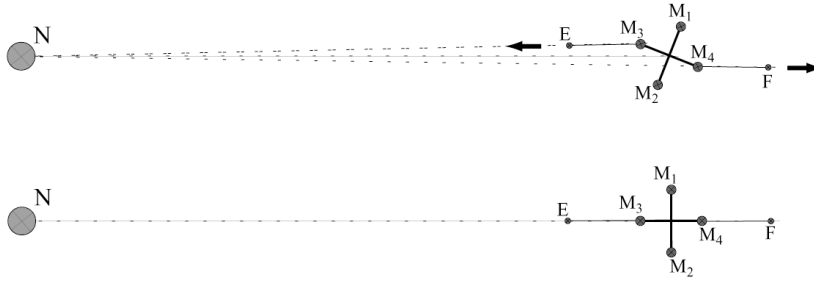


Рис. 3.

Положим  $\varepsilon_e = +1$ ,  $\varepsilon_f = -1$ , учитывая, что симметричный случай совершенно аналогичен. В выбранной нами конфигурации имеем  $B = 0$ ,  $E = m_e l_e - m_f l_f$ ,  $J_O = m_e l_3 (l_e + l_f)$  и  $I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 - 2 m_e l_3^2$ . Тогда получаем следующее условие существования данной конфигурации

$$6 m_e (m l_3 (l_e + l_f) c + A (l_e - l_f) s) + 12 (A^2 - I m) s c = 0.$$

Рассмотрим случай  $A = 0$ . Условием существования стационарного движения становится равенство  $6 m \cos \theta (-2I \sin \theta + J_O) = 0$ . Тогда получаем две совокупности решений. С одной стороны, имеем  $\cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$ , что не зависит от  $l_e$  и  $l_f$ . С другой стороны, для  $I \neq 0$  косвенные решения с  $\sin \theta = m_e l_3 (l_e + l_f) / (2I)$  существуют, если  $m_e l_3 (l_e + l_f) / (2|I|) \leq 1$ . Здесь только параметры  $l_e$  и  $l_f$  позволяют контролировать существование равновесия спутника для данного наклона.

В случае, когда  $A = 0$  и  $I \neq 0$ , условие устойчивости стационарных движений выражаются соотношением

$$r^6 d_2 / 3 = -(1 + s^2) J_O / (2s) + I(1 - 3s^2) / 2 > 0.$$

Тогда, если  $\theta = \pi/2$ , то  $J_O + I < 0$ , где  $m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 / (m_e l_3) < 2l_3 - l_e - l_f$ . В дополнение к случаям, которые рассматривались ранее для  $A = 0$ , теперь имеем еще соотношение  $\sin \theta = J_O / 2I$ , и поэтому получаем условие  $I(-4 + 5J_O^2) > 0$  или  $J_O^2 > 5/4$ .

Так как равенство  $A$  нулю является сильным ограничением, то рассмотрим случай и ненулевого  $A$ . В общем случае это исследование мало интересно, но при необходимости стабилизации спутника на орбите условие его устойчивости принимает вид

$$r^6 d_2 / 3 = -m(J_O + I) + A^2 > 0 \quad \text{или} \quad m(J_O + I) < A^2.$$

Отметим, что в этой формуле появилась величина  $A^2$ . Таким образом,  $A$  оказывает стабилизирующее воздействие вне зависимости от своего знака.

### Список литературы

1. Буров А.А., Степанов С.Я. О колебаниях маятника на круговой орбите // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 714 – 719.

## Секция III. Гидроаэромеханика

### Уточненная фрактальная модель шероховатости при взаимодействии разреженного газа с поверхностью

*О. А. Аксенова, И. А. Халидов*  
(olga@ih6208.spb.edu, khalidov@ih6208.spb.edu)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

От шероховатости поверхности зависят многие используемые на практике характеристики как в задачах аэродинамики разреженных газов, так и механики трения и разрушения, поскольку от шероховатости сильно зависят коэффициенты обмена импульсом и энергией на поверхности тела в потоке газа, аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы [1], коэффициенты сил трения при контактном трении двух поверхностей [2] и другие величины. Фракталы для моделирования шероховатости применялись до сих пор в основном в плоской задаче (например, в работе Блэкмора и Чжоу [3] пространственность достигалась путем параллельного переноса плоской фрактальной кривой). Однако во многих задачах механики, в частности, в аэродинамике разреженных газов, где важна не высота точек поверхности над средним уровнем, а ее наклон, большее значение имеет трехмерность модели [4].

Наиболее известная трехмерная фрактальная модель шероховатости — это модель фрактальной броуновской поверхности (или фрактального броуновского движения над плоскостью), впервые исследованная Мандельбротом и Ван Нессом в 1968 г. [5]. Она широко применяется на практике в программах компьютерного моделирования (например, при моделировании природных ландшафтов, как в популярной программе Vguse). Однако при этом необходимо либо численно восстанавливать реализацию случайного поля по ее спектральной плотности с помощью двумерного преобразования Фурье,

либо производить достаточно трудоемкие расчеты на базе рекурсивного алгоритма случайного срединного смещения [6]. Оба варианта неприемлемы в задачах механики, прежде всего в аэродинамике разреженного газа, по двум причинам. Во-первых, задание граничных условий на твердой поверхности — лишь один из этапов решения задачи расчета течения, т. е. моделирование шероховатости должно осуществляться с минимальными затратами расчетного времени. Во-вторых, реализации фрактального броуновского движения не дифференцируемы, тогда как нахождение закона рассеяния частиц газа на поверхности требует знания наклона, т. е. определения производных от случайного поля по направлениям.

В настоящей работе строится трехмерная фрактальная модель шероховатости, позволяющая значительно ускорить процесс моделирования. В плоской задаче данная модель совпадает с двумерной моделью, предложенной в работе Блэкмора и Чжоу [3]. При этом сохраняется пространственное распределение, позволяющее адекватно имитировать рассеяние частиц газа во всех направлениях, а также остается возможность моделировать наклон поверхности благодаря дифференцируемости реализаций поверхности.

Преимущество данной модели (и всех фрактальных моделей) как перед простыми детерминированными моделями в виде систем плоских элементов, зубцов или синусоид, так и перед статистическими моделями заключается в возможности учета шероховатости более мелкого масштаба. Следует отметить, что недостатки статистического подхода, в частности, мультимасштабный характер геометрии поверхности, не поддающийся учету статистико-вероятностными методами, в последние годы подчеркивались многими авторами не только в связи с применениями к аэродинамике, но и в связи с различными техническими приложениями [7–9].

**1. Фрактальные модели шероховатости.** Фрактальные методы вышли на первый план в последние 10–20 лет. Этот новый и весьма многообещающий подход был предложен Б. Мандельбротом ([5], [7]) и в дальнейшем был источником множества интересных и в значительной степени успешных попыток переноса методов фрактальной геометрии на решение задач, относящихся к шероховатым поверхностям и их взаимодействию с окружающей средой [10]. Изучение фрактальных моделей поверхности особенно стимулировалось исследованиями процессов контакта и трения шероховатых поверх-

ностей, а также процессов разрушения и распространения трещин. Во многих перечисленных работах подчеркивается, что фрактальные свойства поверхностей обнаружены у различных материалов как естественного, так и искусственного происхождения, в том числе шлифованных металлических деталей, бетона, горных пород, причем фрактальные свойства охватывают пространственные масштабы в диапазоне нескольких порядков, начиная с атомных масштабов.

Чаще всего моделируется фрактальное броуновское движение с параметром  $H$  ( $0 < H < 1$ ) над плоскостью — гауссовское случайное поле  $Z(x, y)$  такое, что функция  $Z(x, y)$  почти всегда непрерывна, а случайная величина  $Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y)$  имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)^H$ , где  $\sigma$  — константа. График  $Z(x, y)$  имеет размерность  $d = 3 - H$ . Но для данной модели в задачах рассеяния атомов газа на поверхности основной параметр шероховатости  $\sigma_1$  не определен из-за недифференцируемости. Общий вид графика поверхности приведен во многих упомянутых выше работах (например, [6], [7]).

Наиболее точное моделирование  $Z(x, y)$  достигается с помощью преобразования Фурье от спектральной плотности, которая для фрактального броуновского движения имеет вид  $S(\lambda) = \lambda^{-(2H+1)}$ . На практике же в программах компьютерного моделирования широко применяются алгоритмы случайного срединного смещения, обеспечивающие лишь приближенное имитирование броуновского движения над плоскостью [6]. Но, во-первых, получаемые модели поверхности не обладают многими важными статистическими свойствами и, во-вторых, даже эти упрощенные алгоритмы недостаточно быстры для включения их в задачи механики.

В качестве альтернативной модели шероховатости [11] зададим в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  функцию

$$Z(r, \varphi) = \alpha^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(d-2)n} \psi(\beta^n r + \gamma_n(\varphi)), \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные параметры,  $\psi$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $Z$  — высота поверхности относительно среднего уровня некоторой площадки на поверхности  $dS$ . Обобщаемая формулой (1) двумерная модель обладает двумя важными преимуществами.

Во-первых, она включает в качестве частного случая модель [3],

а, следовательно, и ряд известных моделей [7], [12]. В работе [3] указанная модель сравнивается с экспериментально определенными распределениями профилей и получено хорошее соответствие по статистическим параметрам.

Во-вторых, данная функциональная модель достаточно гибка, чтобы за счет подбора ее параметров успешно приблизить большинство экспериментально наблюдаемых свойств технических поверхностей. Пространственная модель (1) сохраняет упомянутые преимущества, оставаясь при этом более общей и существенно трехмерной (модель [3] фактически двухмерная, так как имеет одинаковое сечение во всех плоскостях, параллельных  $(z, x)$ ). Трехмерность достигается путем введения цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль нормали  $\mathbf{n}$ , и путем сдвига аргумента функции  $\psi$  на величину  $\gamma_n(\varphi)$ .

Функция  $Z(r, \varphi)$  при ограничениях на параметры задачи  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $1 \leq d < 2$ , обладает свойством фрактальности  $Z(\beta r, \varphi) = \beta^{2-d} Z(r, \varphi)$ , где  $d$  — фрактальная размерность графика функции (1), которую можно найти как предел  $d = \lim_{\delta \rightarrow 0} L(\delta) / |\ln \delta|$  отношения логарифма длины  $L(\delta)$  линии профиля шероховатой поверхности при измерении ее в отрезках длины  $\delta$  к модулю логарифма длины одного отрезка [3], [6]. Свойство фрактальности в данном случае означает самоподобие графика, т. е. шероховатость меньшего масштаба в точности повторяет форму крупномасштабной шероховатости с измененным характерным размером по горизонтали в  $\beta$  раз, а по вертикали в  $\beta^{2-d}$  раз.

В настоящей работе мы вносим еще одно уточнение по сравнению с предыдущими результатами [11]. Область значений параметра  $d$  изменяем таким образом, чтобы полученная поверхность была дифференцируемой. Это позволяет производить расчет аэродинамических характеристик взаимодействия разреженного газа с поверхностью без использования искусственного доопределения вектора локальной нормали к поверхности. В частности, при  $0 < d < 1$  реализация поверхности дифференцируема. Свойством фрактальности в этом случае обладает производная  $\partial Z / \partial r$ .

**2. Рассеяние атомов газа на шероховатой поверхности.** Построенная пространственная фрактальная модель шероховатой поверхности (1) наиболее просто реализуема в численных аэроди-

намических расчетах, если функция  $\psi$  в (1) достаточно удобна для аналитического определения точек пересечения траектории атома газа с поверхностью. Поэтому мы предлагаем выбрать эту функцию в виде квадратичного сплайна для периодической функции [11]. Хотя данная модель, вообще говоря, детерминирована, т. е. не содержит случайных элементов, однако с учетом случайностей, возникающих в задачах механики (например, ввиду произвольности точки падения атома газа на поверхность), можно говорить о ее статистических характеристиках, получаемых путем осреднения по площадке  $dS$ .

Нами установлена связь параметров модели с важнейшими характеристиками шероховатости, найдены плотность распределения, среднее квадратичное отклонение производной  $\sigma_1$  (важнейший параметр шероховатости в аэродинамике) и нормированная корреляционная функция (ее можно найти путем суммирования ряда Фурье).

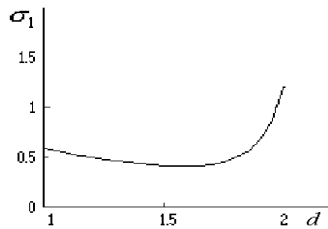


Рис. 1

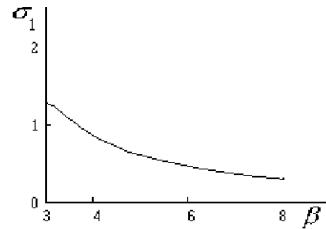


Рис. 2

Значения  $\sigma_1$  приведены на рис. 1 и 2 при различных значениях параметров модели  $d$  и  $\beta$ . Вид шероховатой поверхности  $z(r, \varphi)$  приведен для значений параметров  $\alpha = 0, 4; \beta = 8, d = 1, 3$  в [11].

Методика аэродинамического расчета течений разреженного газа с учетом фрактальной шероховатости, аналогичная методике для статистической модели [1], [4], основана на представлении

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}) = \hat{S} \mathbf{V}_0(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{n}), \quad (2)$$

функции рассеяния  $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v})$  атомов газа, падающих со скоростью  $\mathbf{v}_1$  на площадку  $dS$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ , в виде результата воздействия оператора шероховатости  $\hat{S}$  на локальную функцию рассеяния  $V_0(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{n})$  ( $\mathbf{v}$  — скорость вылетающих атомов газа). Сложность расчетов по формуле (2) вызвана прежде всего необходимостью вычисления так называемых континуальных интегралов, которые входят

в оператор  $\hat{S}$  через вероятность отсутствия пересечений поверхности с известным наклонным уровнем, имитирующим траекторию падающего на поверхность или вылетающего с нее атома газа. Континуальные интегралы при вычислении необходимо аппроксимировать интегралами высокой кратности (до 200).

Результаты расчета коэффициентов обмена нормальным  $p$  и касательным  $\tau$  импульсом на фрактальной шероховатой поверхности методом статистического моделирования Монте-Карло с учетом однократных и двукратных столкновений атомов газа с поверхностью [13] показывают заметное сокращение времени расчета, необходимо для достижения той же точности. Например, расчет коэффициентов обмена и аэродинамических коэффициентов сопротивления и подъемной силы при обтекании выпуклого тела (конуса, сферы или цилиндра) с точностью до двух знаков после запятой (т. е. до  $10^{-2}$ ) с помощью модели (1) требует на порядок (в 10–20 раз) меньше времени, чем расчет континуальных интегралов в традиционном статистическом подходе, при котором поверхность моделируется гауссовским однородным изотропным случайным полем. Еще больше выигрыш при решении таких задач, как численное исследование взаимодействия струи разреженного газа с преградой или расчет внутренних течений газов в каналах и сосудах. Здесь преимущество фрактальных моделей заметно не только в скорости и точности вычислений коэффициентов обмена, но и в удобстве применения результатов для полного расчета течения.

### Список литературы

1. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М., 1975. 343 с.
2. Бородич Ф. М., Онищенко Д. А. Фрактальная шероховатость в задачах контакта и трения (простейшие модели) // Трение и износ. Минск, 1993. Т. 14. № 3. С. 452–459.
3. Blackmore D., Zhou J. A general fractal distribution function for rough surface profiles // SIAM J. Appl. Math. 1996. V.56. № 6. P. 1694–1719.
4. Мирошин Р. Н. Пересечение кривых гауссовскими процессами. Л., 1981. 212 с.
5. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review, 1968. V. 10. № 4. P. 422-437.



6. Peitgen H.-O., Saupe D. The science of fractal images. N.Y., Springer-Verlag, 1988.
7. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. New York-San-Francisco, Freeman, 1982.
8. Thomas T. Surface roughness: The next ten years // Surface Topography, 1988. № 1. P. 3–9.
9. Ling F. Fractals engineering surfaces and tribology // Wear, 1990. № 136. P. 141–156.
10. Gagnepain C., Roques-Carmes C. Fractal approach to two-dimensional and three-dimensional surface roughness // Wear, 1996. № 109. P. 119–126.
11. Аксенова О. А. Фрактальное моделирование шероховатой поверхности при аэродинамическом расчете в разреженном газе // Аэродинамика / под ред. Р. Н. Мирошина. СПб: Изд-во НИИХ С.-Петербургского университета, 2000. С. 120–129.
12. Nayak P. Random process model of rough surfaces // Transactions ASME Journal of Technology, 1971. V. 93. P. 398–407.
13. Мирошин Р. Н., Халидов И. А. Локальные методы в механике сплошных сред. СПб., 2002.

## Теория собственных функций задач математической физики в клиновидной области

*Бестужева А.Н.*

(alla@AB6867.spb.edu)

Санкт-Петербургский государственный университет  
путей сообщения, Россия

*Статья посвящена построению интегрального преобразования, используемого при получении аналитических решений задач о волновых движениях жидкости над наклонным дном, вызванных начальными, периодическими и движущимися возмущениями.*

В рамках линейной дисперсионной теории в области переменной глубины (жидкость ограничена снизу плоским наклонным дном) рассматривается волновое движение идеальной жидкости, вызванное либо возмущением, приложенным к свободной поверхности, либо источником, расположенным в жидкости, либо подвижкой дна. Исследуется функция, описывающая потенциал скорости. Краевая за-

дача приводится к уравнению Пуассона с краевыми условиями третьего типа и углом наклона дна  $\beta = \pi/2n$ ,  $n = 2m + 1$ ,  $m = 0, 1, \dots$ :

$$\Delta\varphi = F_1(r, \theta, z, t), \quad 0 < r < \infty, \quad -\beta \leq \theta \leq 0, \quad |z| < \infty, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\varphi_{tt} + \alpha_1\varphi_{tz} + \alpha_2\varphi_{zz} + \frac{g}{r}\varphi_\theta = F_2(r, z, t), \quad \theta = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_3\varphi + \frac{\alpha_4}{r}\varphi_\theta = F_3(r, z, t), \quad \theta = -\beta,$$

начальными условиями

$$\varphi = F_4(r, z), \quad \varphi_t = F_5(r, z), \quad \theta = 0, \quad t = 0, \quad (3)$$

условием ограниченности  $\varphi < \infty$ , при  $r \rightarrow 0$  и  $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ . Здесь  $\varphi$  – потенциал скорости,  $r, \theta, z$  – цилиндрические координаты,  $t$  – время,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) – константы,  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) – некоторые обобщенные функции. Для определения собственных функций этой задачи решалась задача Штурма-Лиувилля для функции  $\Phi(r, \theta)$  ( $\varphi = \exp\{i(pz + \sqrt{sgt})\}\Phi(r, \theta)$ , где  $p, s$  – вещественные положительные параметры):

$$\frac{1}{r}(r\Phi_r)_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} - p^2\Phi = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad -\beta \leq \theta \leq 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r}\Phi_\theta - s\Phi = 0, \quad \theta = 0, \quad (5)$$

$$\Phi_\theta = 0, \quad \theta = -\beta, \quad (6)$$

$$\text{или} \quad \Phi = 0, \quad \theta = -\beta, \quad (7)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \Phi < \infty, \quad r \rightarrow 0.$$

В зависимости от вида условий на дне задача Штурма-Лиувилля делится на две – *четная* (4),(5),(6) для жесткого наклонного дна и *нечетная* (4),(5),(7) для "абсолютно проницаемого дна. Для *четной* задачи в [1, 2] установлен смешанный спектр собственных функций, найдена их полная система, соответствующая непрерывному  $\Phi^{(c)}$  и дискретному  $\Phi_l^{(d)}$  спектру, и доказана теорема разложения произвольной абсолютно интегрируемой функции по граничным значениям собственных функций. В случае *нечетной задачи* необходимо искать свою систему собственных функций: методом, изложенным в [2], решена задача Штурма-Лиувилля (4),(5),(7) и получено,

что для *нечетной задачи* собственные функции дискретного спектра отсутствуют. Для собственных функций  $\Phi^{(c)}$  и  $\Phi_l^{(d)}$  выведены упрощенные формулы:

$$\Phi^{(c)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j,\chi=0}^1 \sum_{k=1}^n B_{kj}^{(\chi)} \exp A_{kj}^{(\chi)},$$

где  $B_{kj}^{(\chi)} = \frac{(-1)^j}{(p+s_c)^{n-1}} \prod_{\sigma=1}^{n-1} b_{\sigma}^{-1/2} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} b_{\sigma} \prod_{\sigma=1}^{n-k} c_{\sigma},$

$$A_{kj}^{(\chi)} = -rs_c \sin \alpha_{kj} + (-1)^{\chi j} [-rq \cos \alpha_{kj} - \pi/4(n-1)].$$

Здесь введены обозначения:  $b_{\sigma} = p^2 \sin^2 \sigma\beta + q^2,$   
 $c_{\sigma} = \cot \sigma\beta [1/2p^2 \sin 2\sigma\beta + (-1)^{\chi j} i q s_c], \quad \alpha_{kj} = (a_{kj} + (-1)^j \theta).$

$$\Phi_l^{(d)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{n-l} B_{kl}^{(j)} \exp\{-rp \sin(\alpha_{kj} + l\beta)\},$$

где  $B_{kl}^{(j)} = (-1)^j \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} \gamma_{\sigma l}^s \prod_{\sigma=1}^{n-k} \cot \sigma\beta \gamma_{\sigma l}^c.$

Здесь введены обозначения:

$$\gamma_{\sigma l}^s = \sin(\sigma-l)\beta \sin(\sigma+l)\beta, \quad \gamma_{\sigma l}^c = \cos(\sigma-l)\beta \sin(\sigma+l)\beta.$$

Для *нечетной задачи* доказана своя теорема разложения. В общем случае результат сформулирован в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть  $f(r)$  – заданная функция, определенная в промежутке  $(0, \infty)$ , кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая и имеет ограниченную вариацию. Тогда справедливо разложение в случае *четной задачи* при  $n = 2m + 1, (m = 0, 1, \dots)$

$$f(r) = \int_0^{\infty} Q(q, r) dq \int_0^{\infty} f(\xi) Q(q, \xi) d\xi + p \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l Q_l(pr) \int_0^{\infty} f(\xi) Q_l(p\xi) d\xi,$$

где  $\varepsilon_l = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \{2(1 + \cos l\beta)^{2(n-1)} \sin(l\beta) \prod_{\sigma=1, \sigma \neq l}^{n-1} \gamma_{\sigma l}^s\}^{-1},$

в случае *нечетной задачи* при  $n = 1, 2, \dots$

$$f(r) = \int_0^{\infty} Q(q, r) dq \int_0^{\infty} f(\xi) Q(q, \xi) d\xi.$$

При изучении свойств собственных функций обеих задач показано, что для *четной задачи* система включает конечное число функций дискретного спектра (краевых волн), которые соответствуют краевому эффекту. Одна из компонент этой группы известна как волна Стокса. Исследован характер поведения краевых волн, показана связь их числа с углом наклона дна, выявлена существенная особенность этих волн: начиная с некоторого  $\beta$  краевые волны с уменьшением угла наклона приобретают осциллирующий характер в береговой зоне и экспоненциально затухают при значительном удалении от нее. С уменьшением  $\beta$  краевые волны захватывают все большую область прибрежной зоны, проникая в более отдаленные от берега зоны. Проведена оценка размеров прибрежной зоны.

Результатом вышеприведенной теоремы является новое интегральное преобразование. Введен оператор  $D$

$$D_{\bar{l}} = \begin{cases} D &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j,\chi=0}^1 \sum_{k=1}^n B_k^{(\chi)}, \\ D_l &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{n-l} \sqrt{p|\varepsilon_l|} B_{kl}. \end{cases}$$

Даны определения оригинала, изображения и  $D$ -преобразования с новым ядром  $\bar{Q}(\mu, x)$

$$f^D(\mu) = D_{\bar{l}} \left( \int_0^\infty f(x) \exp A_{\bar{l}}(x) dx \right),$$

$$f(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) \bar{Q}(\mu, \xi) \bar{Q}(\mu, x) d \sum_{\bar{l}} \bar{U}(\mu - \mu_{\bar{l}}) d\xi, \quad \text{где}$$

$$A_{\bar{l}} = \begin{cases} A_0 = A_{kj}^{(\chi)}, & \bar{l} = 0, \\ A_l = A_{kj}, & \bar{l} = l, \end{cases} \quad \bar{Q}(\mu, \xi) = \begin{cases} Q(q, p, x), & \bar{l} = 0, \\ \sqrt{p|\varepsilon_l|} Q_l(px), & \bar{l} = l, \end{cases}$$

$$\bar{U}(\mu - \mu_{\bar{l}}) = \begin{cases} q, & \bar{l} = 0, \\ \text{sign } \varepsilon_l u_-(\mu - \mu_l), & \bar{l} = l, \end{cases} \quad u_-(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{sign } \varepsilon_l = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \text{sign} \left( \prod_{\sigma < l} \sin(\sigma - l)\beta \right), \quad \bar{l} = \{0, l\}, \quad l = 2s, \quad s = \overline{1, m},$$

$$\mu_{\bar{l}} = \begin{cases} q, & \bar{l} = 0, \\ \mu_l = p \sin l\beta, & \bar{l} = l. \end{cases}$$

Оригинал и изображение связаны между собой однозначно:

$$f^D(\mu) = \int_0^\infty f(x) \bar{Q}(\mu, x) dx, \quad f(x) = \int_0^\infty f^D(\mu) \bar{Q}(\mu, x) d \sum_l \bar{U}(\mu - \mu_l).$$

Интеграл в  $D$ -преобразовании понимается в смысле интеграла Стильтьеса, получено соотношение, известное как равенство Парсеваля:  $\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \langle f^D(\mu), \varphi^D(\mu) \rangle$ .

Были изучены свойства  $D$ -преобразования исходя из общей теории интегральных преобразований и доказаны такие свойства преобразования как непрерывность  $D$ -трансформанты, линейность, теоремы непрерывности, о дифференцировании, свертке, запаздывании, подобии, умножении, составлена таблица оригиналов и изображений  $D$ -преобразования. Расширен класс функций: это преобразование решает однородные уравнения Фредгольма 1 рода:

$$\int_0^\infty f(\xi) K(x, \xi) d\xi = \varphi(x),$$

где  $K(x, \xi)$  является суммой непрерывного и вырожденного ядер

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \int_0^\infty \bar{Q}(\mu, \xi) \bar{Q}(\mu, x) d \sum_l \bar{U}(\mu - \mu_l) = \\ &= \int_0^\infty Q(q, p, \xi) Q(q, p, r) dq + p \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l Q_l(p\xi) Q_l(px). \end{aligned}$$

Наличие полной системы собственных функций позволило построить точные решения задачи Коши-Пуассона, задачи о волновых движениях жидкости, вызванных перемещением дна, и давлением, приложенным к свободной поверхности, а также задачи об источнике [2, 3, 4, 5].  $D$ -преобразование может быть применено не только к решению гидродинамических задач, но также и к другим задачам математической физики, связанным с клиновидной областью и краевым условием 3 рода: теории теплопроводности и диффузии, электростатики и теории фильтрации, акустики и электродинамики.

## Список литературы

1. *Дорфман А.А.* О неустановившихся волновых движениях над наклонным дном // Изв. АН СССР, МЖГ, 1984, № 6. С. 65-70.
2. *Дорфман А.А.* Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях в области переменной глубины // Изв. АН СССР, МЖГ, 1986. № 2. С. 104-112.
3. *Bestuzheva A.N., Dorfman A.A.* Wave Motions in a Fluid Brought About by Bottom Movement in a Region of Varying Depth // *Oceanology*, 1990. Vol. 30, № 6. P. 681-686.
4. *Bestuzheva A.N., Dorfman A.A.* Wave Motions of a Fluid Due to a Moving System of Pressures on an Inclined Bottom // Translated from *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1991. № 6. P. 38-44.
5. *Bestuzheva A.N., Dorfman A.A.* Wave Motions Caused by a Source in a Fluid of Variable Depth // *J. Appl. Maths. Mechs*, 1991. Vol. 55, № 3. P. 332-337.

## Гибкое машущее крыло

*Т.В. Волошинова, Б.А. Ершов, Е.О. Любимова*

Санкт-Петербургский государственный Университет, Россия

Данная работа представляет собой попытку моделирования механизма полета насекомых. Ключевым вопросом является понимание динамических аспектов этого сложного природного явления. Интерес к изучению полета насекомых вызван потенциальной возможностью моделирования летающих аппаратов, столь же проворных как насекомые и наилучшим образом приспособленных к полету в природе. Изучение полета насекомых представляет большие сложности, чем полета аэроплана. В то время как крылья самолета строго зафиксированы, крылья насекомых совершают взмахи с большими углами атаки ( $\frac{\pi}{4}$ ) и с большой частотой, а совершают вращательные движения в конце каждого взмаха вниз и вверх. В 1996 г. в University of Cambridge зоолог Charlie Ellington и его коллеги [1] показали, что в течение каждого взмаха с большими углами создаются интенсивные вихри на передней кромке крыла насекомого. Результат: большие скорости на верхней поверхности крыла, малое давление и возрастающая подъемная сила. Для аэроплана весьма рискованно добиваться больших углов атаки, при которых произойдет

срыв вихрей, и подъемная сила резко уменьшит свою величину. При полете насекомого, сброшенные вихревые кольца образуют вихревой след, вид следа определяется скоростью полета. В простейшем случае вихревые кольца, образованные каждым крылом, соединяются вместе, формируя кольцо, которое отделяется от насекомого, когда его крылья достигают конца движения вниз.

В 2000 г. физиолог Michael Dickinson и его коллеги из University of California at Berkeley [1] провели эксперименты с механическими крыльями, моделирующими крылья насекомых (фруктовой мушки). Было отмечено, что в конце каждого взмаха насекомое быстро поворачивает крыло, переводя заднюю кромку крыла вперед. Это вращение увлекает окружающий воздух в направлении, совпадающем с движением вихревого кольца, увеличивая поток воздуха, создаваемый вихрем, что добавляет величину подъемной силы.

Для расчета циркуляции на крыле используется модель малых гармонических колебаний слабоизогнутого в плане крыла с переменной по размаху циркуляцией в поступательном потоке идеальной несжимаемой жидкости, предложенная Н.Н. Поляховым [2]. Крыло моделируется квадратной пластиной, лежащей в плоскости  $Oxz$ , которая совершает вращательные движения вокруг оси  $Oz$ . Поток набегает перпендикулярно оси вращения пластинки со скоростью  $V_\infty$  под переменным углом атаки  $\alpha$ . Вихревая пелена, рассматриваемая в модели Н. Н. Поляхова, заменяется системой из двух сцепленных между собой вихревых колец. Первое кольцо охватывает пластинку, не касаясь ее, плоскость кольца располагается под углом  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  по отношению к плоскости пластинки. Второе вихревое кольцо, располагаясь под пластинкой, сцеплено с первым вихревым кольцом так, что угол между плоскостями вихревых колец составляет прямой угол. Система вихревых колец в процессе движения связана с крылом и неподвижна по отношению к нему.

Введем следующие обозначения:  $\gamma_{adj}$  — плотность присоединенных вихрей;  $(x, z)$  — координаты присоединенного вихря;  $(p, q)$  — координаты точки расчета;  $(\xi, z)$  — координаты точек вихревого следа;  $-\partial\gamma_{adj}/\partial z$  — плотность вихревого шнура в точке  $(x, z)$ ;  $-\partial\gamma_{adj}/\partial t$  — индуцированная плотность;  $V_\infty(\alpha(t) - \partial y/\partial x)$  — вертикальная составляющая скорости набегающего потока на крыле. Переменный угол атаки  $\alpha$  изменяется согласно закону  $\alpha(t) = \pi/6 \cos(\pi/2t)$ . Величины  $V_\infty, x, y, z$ , безразмерные.

Условие непроницаемости крыла [2]

$$V_{adj} = V_{\infty}(\alpha(t) - \frac{\partial y}{\partial x}) + V_i + V_{it}, \quad (1)$$

где 
$$V_{adj} = \frac{1}{4\pi} \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{\gamma_{adj}(p-x)}{[(p-x)^2 + (q-z)^2]^{3/2}} dz$$

— скорость вызванная свободными вихрями,

$$V_i = \frac{1}{4\pi} \int_0^2 dx \int_x^{\infty} d\xi \int_0^2 \frac{\partial \gamma_{adj}}{\partial z} \frac{(q-z)}{[(p-\xi)^2 + (q-z)^2]^{3/2}} dz$$

— скорость, вызванная вихревыми шнурами плотности  $-\partial \gamma_{adj} / \partial z$ ,

$$V_{it} = \frac{1}{4\pi} \int_0^2 dx \int_x^{\infty} d\xi \int_0^2 \frac{\partial \gamma_{adj}}{\partial t} \frac{(p-\xi)}{[(p-\xi)^2 + (q-z)^2]^{3/2}} dz$$

— индуцированная скорость.

Вихревая плотность  $\gamma_{adj} = \gamma(x)(1-z^2) \cos(\alpha(t))$ . В свою очередь  $\gamma(x)$  представляется как сумма вихревой интенсивности для крыла бесконечного размаха и поправки на конечность крыла, найденной из уравнения непроницаемости:  $\gamma(x) = \gamma_{\infty} + \gamma_f$ .

На первом этапе уравнение непроницаемости пластинки будет решаться в предположении, что пластинка жесткая, и поэтому слагаемое  $\partial y / \partial x$ , учитывающее местный угол атаки в выражении для вертикальной составляющей скорости, исчезнет. Для приближенного вычисления  $\gamma(x)$  из уравнения (1) интегрирование по промежутку  $x \in [0, 2]$ , заменим суммированием.

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n h (V_{adj}(x_i, p, q) - V_i(x_i, p, q) - V_{it}(x_i, p, q)) = V_{\infty} \alpha(t)$$

Теперь, когда найдены значения  $\gamma(x)$  для набора точек пластины, вихревая интенсивность  $\gamma_{adj}(x, z, t)$  полностью определена. Полная циркуляция  $\Gamma$  представляется как функция времени и может быть

вычислена по формуле: 
$$\Gamma(t) = \int_0^2 \int_0^2 \gamma_{adj} dz dx. \quad (2)$$

В каждый рассматриваемый момент времени первому кольцу присваивается циркуляция (2), второму кольцу — циркуляция, равная по величине циркуляции первого кольца, взятая с противополо-



ложным знаком, обеспечивая тем самым условие равенства постоянной (в данном случае равной нулю) суммарной циркуляции скорости по любому замкнутому контуру [5]. Для нахождения силы, действующей на крыло со стороны набегающего потока, необходимо знать давление, создаваемое потоком на крыло. Для определения величины давления воспользуемся интегралом Коши-Лагранжа для неустановившегося течения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + (V_{\infty} - \omega_z x) \frac{1}{2} V^2 - \nabla \varphi = f(t),$$

где  $V = \nabla \varphi$ ,  $p_{\infty} = \text{const}$ ,  $P = p/\rho$  — для несжимаемой жидкости,  $\varphi$  — потенциал скоростей.

Интеграл Коши-Лагранжа записан в подвижной системе координат [6], жестко связанной с пластинкой. Потенциал скоростей учитывает наличие в потоке двух вихревых колец, связанных с пластинкой. Получив величины давления, вычислим подъемную силу путем интегрирования величины давления по площади пластинки. Таким образом, подъемная сила будет представлена как функция времени:

$$\mathbf{R}(t) = \int_0^2 \int_0^2 p(x, z, t) \mathbf{n} \, dx dz.$$

Распределение аэродинамического давления по пластине дает возможность определять ее прогиб. Считаем, что край пластины, совпадающий с осью вращения, закреплен консолью. Остальные края пластины свободны. Координатные функции представлены балочными функциями. Для нахождения обобщенной координаты применяется метод Бубнова-Галеркина. Полученное решение можно считать исходным для определения последующих приближений.

### Список литературы

1. *Carl Zimmer*. Flight Mechanics // Natural History. 1999. V. 108. № 9. P. 22-23
2. *Поляхов Н.Н.* Избранные труды. Аэрогидродинамика. СПб. 1997. 380 с.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М., 1978. 736 с.
4. *Бабаков Н.М.* Теория колебаний. М., 1968, 580 с.
5. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, ч.1. М., 1963. 584 с.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды, ч. 2, М., 1973. 584 с.

## Структура экранирующего электрического поля вблизи проводящей поверхности в разреженной плазме

Ю. Ф. Гунько

(gunko@ammp.ioffe.rssi.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Определение структуры течения и напряженностей электрических и магнитных полей в окрестности покоящихся и движущихся в плазме тел — одна из основных задач ионосферной аэродинамики. Основная особенность этой задачи заключается в том, что в ней газодинамические и электромагнитные величины ищутся как совместные решения уравнений электромагнитного поля и уравнений, описывающих поведение материальных носителей электрических зарядов. И те и другие удовлетворяют определенным граничным и начальным условиям, которые определяются физической постановкой решаемой задачи. Выбор модели, описывающей поведение среды, также определяется физическими особенностями решаемой задачи.

При решении задач обтекания тел сильно разреженной плазмой в электростатической постановке исходной является система уравнений, приведенная в работах [1,2]. Хотя постановка задачи обтекания, сформулированная в выше упомянутых работах, не является самой общей, но и в таком виде ее решение неосуществимо. Поэтому при решении конкретных задач следует делать дальнейшие разумные предположения относительно влияния тех или иных факторов.

Наиболее простой и достаточно важный частный случай этой задачи — задача об экранировании электрического поля в однокомпонентной плазме (заряженном газе). (Разумеется, плазмы как однокомпонентной среды не существует, но могут существовать области, где присутствуют, в основном, частицы только одного знака. Эта ситуация может сложиться как естественным, так и искусственным путем.) В такой постановке данная задача имеет много общего с классической задачей о прохождении термоэлектронного (термоионного) тока через вакуумный диод. Но и этот вариант требует дальнейших упрощающих предположений.

Примем в качестве таковых, во-первых, предположение о стационарности всех физических величин в приповерхностном слое; во-вторых, предположение об одномерности; и, в-третьих, будем счи-

татъ газ холодным и состоящим из электронов, движущихся в одном направлении. Отметим также, что в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрий в заряженном газе или плазме индуцированные магнитные поля отсутствуют.

Рассмотрим задачу, аналогом которой в эмиссионной электронике является задача о плоском диоде. Введем декартову систему координат с осью  $Ox$ , совпадающей по направлению с направлением движения заряженных частиц. Тогда в силу сделанных предположений  $j_x = \text{const}$ , где  $j_x$  — проекция вектора плотности электрического тока на направление оси  $Ox$ . Обозначим через  $n(x)$  концентрацию электронов на расстоянии  $x$  от координатной плоскости  $Oyz$ , а через  $e$  — абсолютную величину заряда электрона. Тогда  $\rho(x) = -e n(x)$ , где  $\rho(x)$  — объемная плотность электрических зарядов, зависящая только от координаты  $x$ .

Зависимость скорости от координаты обозначим через  $v(x)$ . Если при  $x = 0$  скорость была равна  $v_0$ , а концентрация —  $n_0$ , то

$$j_x = -e n(x) v_x(x) = -e n_0 v_0 = -j_0 = -j. \quad (1)$$

При  $v(x) \neq 0$  из (1) следует  $\rho(x) = -j/v_x(x)$ . Проектируя уравнение движения электронного газа на направление оси  $Ox$ , приходим к следующему уравнению

$$m_e \frac{dv}{dt} = -eE = e \frac{d\varphi}{dx}. \quad (2)$$

Интегрирование уравнения (2) приводит к соотношению, аналогичному закону сохранения энергии, выполняющемуся для каждой отдельно взятой частицы

$$\frac{m_e v^2(x)}{2} - e \varphi(x) = C. \quad (3)$$

Значение  $C$  определяется из граничных условий  $C = (m_e v_0^2)/2$ .

Наиболее простой, хорошо известный случай имеет место при  $v_0 = 0$  (см., например [3,4]). Обобщим полученное там решение на случай, когда  $v_0 \neq 0$ . (Частично это обобщение проведено в [4,5] и ряде других работ). Из (3) получаем

$$v(x) = \pm \sqrt{v_0^2 + 2 e \varphi(x) / m_e}. \quad (4)$$

Если в потоке все частицы движутся в одном направлении, то перед корнем следует брать знак плюс.

С учетом (4) уравнение для определения потенциала электрического поля запишется в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{4\pi j\sqrt{m_e/2e}}{\sqrt{\varphi + m_e v_0^2/2e}}. \quad (5)$$

Перейдем в уравнении (5) к безразмерным потенциалу и координате  $\varphi_1 = 2e\varphi/(m_e v_0^2)$  и  $x_1 = 3x\sqrt{2e^2 n_0 \pi/(m_e v_0^2)}$ . Тогда (5) примет вид

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} = \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_1}}. \quad (6)$$

Первый интеграл уравнения (6) выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)^2 = \frac{16}{9} (\varphi_1(x) + 1)^{1/2} + C, \quad (7)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Выберем в качестве точки, в которой задаются начальные условия, начало координат, а сами условия зададим следующим образом:

$$\varphi_1(x)|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right|_{x=0} = k_1, \quad (8)$$

где  $k_1$  — безразмерный параметр, который может быть выражен через число электрического давления  $R_E = (E^2(0)/8\pi)/(m_e n_0 v_0^2)$  ( $k_1 = 4\sqrt{R_E}/3$ ). Сформулированная задача является задачей Коши для уравнения (6) с граничными условиями (8). Приведем ее решение, опуская довольно громоздкие выкладки.

$$\text{При } 0 \leq k_1 < 4/3 \quad (0 \leq R_E < 1) \quad \varphi_1 = s^2 (z_1^2 + 1)^2 - 1, \quad (9)$$

$$\text{где } z_1 = \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2}\right)^{1/3},$$

$$y = \frac{1}{s^{3/2}} [x_1 + (1-s)^{1/2}(2s+1)], \quad s = 1 - \frac{9k_1^2}{16} = 1 - R_E.$$

$$\text{При } k_1 = 4/3 \quad (R_E = 1) \quad \varphi_1 = (x_1 + 1)^{4/3} - 1. \quad (10)$$

$$\text{При } k_1 > 4/3 \quad (R_E > 1) \quad \varphi_1 = s^2 (z_{2,3}^2 - 1)^2 - 1, \quad (11)$$

$$\text{где } z_2 = \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)^{1/3}, \quad (12)$$

$$z_3 = 2 \cos\left(\frac{\arccos(y/2)}{3}\right). \quad (13)$$

Выражением  $z_2$ , даваемым формулой (12), следует пользоваться при  $|y| \geq 2$ , выражением, даваемым формулой (13), при  $|y| < 2$ .

При  $-4/3 < k_1 < 0$  ( $R_E < 1$ ), для вычисления следует использовать формулу (9), но в качестве  $z_1$  надо брать  $z_1 = z_1(y_1)$ , где

$$y_1 = |s|^{-3/2} [-x_1 + (1-s)^{1/2}(2s+1)] = |s|^{-3/2} (-x_1 + x_{1min}), \quad (14)$$

если выполнено дополнительное условие:  $x_1 < x_{1min}$ .

При  $x_1 > x_{1min}$  в (9) в качестве  $z_1$  надо брать  $z_1 = z_1(y_2)$

$$y_2 = |s|^{-3/2} [x_1 - (1-s)^{1/2}(2s+1)] = |s|^{-3/2} (x_1 - x_{1min}). \quad (15)$$

При  $k_1 = -4/3$  ( $R_E = 1$ )  $\varphi_1 = (x_1 - 1)^{4/3} - 1$ . (16)

При  $k_1 < -4/3$  ( $R_E > 1$ ) величина  $\varphi_1$  вычисляется по формуле (11), где  $z_2 = z_2(y_1)$ ,  $z_3 = z_3(y_1)$

При  $|k_1| \leq 4/3$  ( $R_E \leq 1$ ) полученное решение продолжимо на все вещественные  $x_1$  (а, соответственно, и на все  $x$ ). При  $|k_1| > 4/3$  оно продолжимо только на полубесконечный интервал, ограниченный слева при  $k_1 > 0$  и справа при  $k_1 < 0$ . Отсюда следует вывод, что решение краевой задачи для данного уравнения не всегда существует для рассмотренного режима течения.

Величина  $R_E$  ранее определялась начальными данными на левом конце изучаемого промежутка. Переобозначим ее на  $R_E(0)$ , а также введем параметр  $R_E(x)$ , являющийся локальным параметром электрического давления ( $R_E(x) = E^2(x)/(8\pi m_e n(x)v^2(x))$ ). Как легко видеть,  $R_E(x)$  и  $R_E(0)$  связаны отношением:

$$R_E(x) = 1 + (R_E(0) - 1)/\sqrt{1 + \varphi_1}. \quad (17)$$

Из (17) следуют следующие утверждения:

- 1) если  $R_E(0) < 1$ , то  $R_E(x) < 1$ ;
- 2) если  $R_E(0) > 1$ , то  $R_E(x) > 1$ ;
- 3) если  $R_E(0) = 1$ , то  $R_E(x) = 1$ ;
- 4) в ускоряющем электрическом поле  $R_E \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Другими словами, в рассматриваемой задаче существует три различных режима течения, отвечающих различным значениям параметра  $R_E$ :  $R_E < 1$ ;  $R_E = 1$ ;  $R_E > 1$ , причем это свойство инвариантно по отношению к выбору точки потока, в которой проводится вычисление параметра  $R_E$ . Предельное состояние потока (при больших значениях  $x$ ) оказывается не зависящим от начальных условий.

## Список литературы

1. Филиппов Б.В. Обтекание тел сильно разреженной плазмой // Аэродинамика разреженных газов. Вып. 4. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. С. 133-141.
2. Филиппов Б.В. Аэродинамика тел в верхних слоях атмосферы. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. 128 с.
3. Langmuir J. // Phys. Rev., 2, 456. 1913.
4. Гапонов В.И. Электроника. Часть 1. Физические основы. М. 1960.
5. Капцов И.А. Электрические явления в газах и в вакууме. М.: Гостехиздат. 1950.

## Разделение эмульсии в фильтре с коалесцирующей загрузкой

Г. В. Кочерыженков, С. К. Матвеев, Д. В. Пчелинцев  
(smat@gambler.ru15)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Фильтры с коалесцирующей загрузкой из гидрофобных гранул признаны перспективными при разработке эффективных способов очистки нефтесодержащих вод, представляющих собой эмульсию типа масло-вода. В работе [1] предложена математическая модель разделения монодисперсной эмульсии и выведены уравнения для степени очистки воды от примеси и толщины пленки нефтепродуктов, позволяющие исследовать зависимость этих параметров от времени работы фильтра. В настоящей работе эта модель упрощается за счет квазистационарности процесса и обобщается на случай полидисперсной эмульсии.

Математическое описание разделения эмульсии основано на представлении фильтра, состоящего из сферических гранул одинакового диаметра  $d$ , в виде системы капилляров радиуса  $r_0 = 0.333 d\varepsilon/(1-\varepsilon)$ , обеспечивающего совпадение отношения поверхности пор к их объему с реальным ( $\varepsilon$  – пористость загрузки). Предполагается, что по гидрофобной поверхности капилляров течет пленка из коалесцирующей примеси, в центре капилляров течет эмульсия, а коалесцирующие капли примеси образуют на гидрофобных стенках капилляров сплошную пленку, толщина которой  $\delta$  постоянна по периметру

поперечного сечения и зависит только от продольной (вдоль оси капилляра) координаты  $x$  и от времени  $t$ .

В квазистационарном и квазиодномерном приближении для средних по ядру потока и по сечению пленки скоростей эмульсии  $u_1$  и пленки  $u_2$  можно получить

$$\begin{aligned} u_1 \xi &= \frac{r_\delta^2}{8\mu_1} \left( \rho_1 g - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{r_0^2 - r_\delta^2}{4\mu_2} \left( \rho_2 g - \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{r_\delta^2}{2\mu_2} \Delta \rho g \ln \frac{r_\delta}{r_0}, \\ u_2 \xi &= \frac{r_0^2 - r_\delta^2}{8\mu_2} \left( \rho_2 g - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{r_\delta^2}{4\mu_2} \Delta \rho g \left( 1 + \frac{2r_\delta^2}{r_0^2 - r_\delta^2} \ln \frac{r_\delta}{r_0} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r_\delta = r_0 - \delta$ ,  $\xi = \cos \alpha$ ,  $\alpha$  – среднее значение угла наклона капилляров к вертикали  $z$ ,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho$  – плотность,  $\mu$  – вязкость,  $p$  – давление, которое считается постоянным по всему сечению капилляра, индексом 1 отмечены характеристики эмульсии, индексом 2 – пленки,  $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ .

Суммарный расход через капилляр при этом определится как

$$q = \frac{\cos \alpha}{\pi} \left( Ag - B \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (2)$$

где 
$$A = \frac{s_1^2 \rho_1}{8\mu_1} + \frac{s_2^2 \rho_2}{8\mu_2} + \frac{s_1 s_2 \rho_1}{4\mu_2}, \quad B = \frac{s_1^2}{8\mu_1} + \frac{s_2^2}{8\mu_2} + \frac{s_1 s_2}{4\mu_2},$$

$$s_0 = \pi r_0^2, \quad s_1 = \pi r_\delta^2, \quad s_2 = s_0 - s_1.$$

Уравнения баланса нефтепродуктов в фильтрующейся эмульсии и стекающей по стенке капилляров пленке имеют вид

$$\frac{\partial(\varphi s_1)}{\partial t} + \xi^{-1} \frac{\partial(\varphi s_1 u_1)}{\partial z} = -2\pi r_\delta q_\delta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + \xi^{-1} \frac{\partial(s_2 u_2)}{\partial z} = 2\pi r_\delta q_\delta, \quad (4)$$

где  $\varphi$  – объемная доля нефтепродуктов,  $q_\delta$  – интенсивность коалесценции, т.е. объем нефтепродуктов, коалесцирующих в единицу времени на единице поверхности пленки.

Если предположить, что разделение эмульсии происходит преимущественно за счет седиментации под действием силы тяжести, то с использованием формулы Адамара-Рыбчинского получим

$$q_\delta = \varphi \sin \alpha \frac{|g \Delta \rho| d_k^2 (1+m)}{18\pi \mu_1 (1+2m/3)}, \quad (5)$$

где  $d_k$  – диаметр капель мультисии,  $m = \mu_1/\mu_2$ .

Такая седиментационная модель для определения  $q_\delta$  не учитывает всех факторов, влияющих на процесс коалесценции, и потому требует уточнения с опорой на экспериментальные данные. Не рассматривая возможные уточнения, мы использовали эту модель для иллюстрации результатов, получаемых с помощью уравнений (3)-(4).

Оценки, подтвержденные расчетами по уравнениям (3)-(5), показали, что производной по времени в уравнении (3) можно пренебречь, т.е. считать процесс коалесценции квазистационарным. Тогда, учитывая, что  $s_1 u_1 \approx q = \text{const}$ , из уравнения (3) имеем

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \exp \left[ - \int_0^z \sin \alpha \frac{\xi r_0 |g \Delta \rho| d_k^2 (1+m)}{9q\mu_1(1+2m/3)} \sqrt{1-s_2/s_0} dz \right]. \quad (6)$$

Здесь уже использовано граничное условие  $\varphi = \varphi_0$  при  $z = 0$ , а при интегрировании уравнения (4) следует считать  $s_2 = 0$  при  $z = 0$ . Заметим, что в приведенных выше формулах направление оси  $z$  совпадает с направлением фильтрации и потому при фильтрации снизу вверх ускорение силы тяжести  $g$  следует считать отрицательным.

Если предположить, что гидродинамическая коалесценция пренебрежимо мала по сравнению с седиментационной, т.е. капли эмульсии между собой не взаимодействуют, то легко получить обобщение на случай полидисперсной эмульсии. Действительно, в этом случае каждая фракция осаждается на стенки капилляра независимо и уравнения (5) и (6) можно записать для каждой фракции, сопроводив  $\varphi$ ,  $\varphi_0$ ,  $q_\delta$ ,  $d_k$  дополнительными индексами  $i$ , означающими принадлежность к  $i$ -ой фракции. В уравнении (4) при этом под  $q_\delta$  следует понимать сумму интенсивностей осаждения всех фракций:  $q_\delta = \sum q_{\delta,i}$ .

На рис. 1 показаны результаты расчета фильтрации полидисперсной эмульсии дизельного топлива ( $\rho = 833 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $\mu = 0.005 \frac{\text{кг}}{\text{мс}}$ ) с начальной объемной концентрацией примеси  $\varphi_0 = 0.01$  при высоте фильтрующей загрузки  $H = 0.5\text{м}$ , диаметре гранул 2мм и скорости фильтрации 0.001м/с. Пронумерованные кривые  $\bar{s}_2 = s_2/s_0$  иллюстрируют изменение во времени доли поперечного сечения капилляров, занятой коалесцированной примесью. По убыванию в направлении течения концентрации примеси  $\varphi/\varphi_0$  видно, что основное разделение эмульсии происходит вблизи входа в фильтрующий слой, а затем



пленка нефтепродуктов течет по стенкам капилляров, увлекаемая фильтрующимся потоком. По мере заполнения пор нефтепродукта-

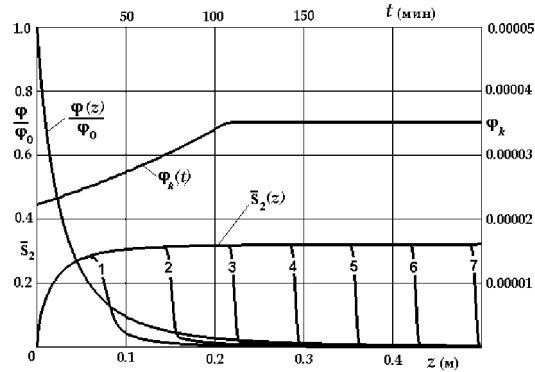


Рис. 1. Фильтрация эмульсии дизельного топлива.

1 –  $t=15$  мин., 2 –  $t=30$  мин., 3 –  $t=45$  мин., 4 –  $t=60$  мин.,  
5 –  $t=75$  мин., 6 –  $t=90$  мин., 7 –  $t=105$  мин.

ми степень очистки эмульсии уменьшается, что видно по кривой изменения во времени концентрации примеси на выходе из фильтра  $\varphi_k(t)$ . После достижения пленкой выходного сечения фильтр работает в стационарном режиме и его конструкция должна обеспечивать эффективное удаление нефтепродуктов, стекающих в пленке, без их смешивания с отфильтрованной водой.

На рис. 2 показаны аналогичные результаты расчета фильтрации эмульсии мазута, имеющего по сравнению с дизельным топливом большие плотность и вязкость ( $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 0.08 \text{ кг/мс}$ ). Видно, что из-за большой вязкости пленка коалесцированной примеси течет медленнее и занимает больше порового пространства. Это несколько снижает степень очистки, но основное снижение коалесценции по сравнению с эмульсией дизельного топлива обусловлено большей плотностью мазута и уменьшением вследствие этого  $\Delta\rho$ .

Поскольку в соответствии с формулой (5) интенсивность коалесценции пропорциональна квадрату диаметра капель  $d_k$ , по мере фильтрации меняется дисперсионный состав эмульсии. На рис. 3 показано изменение по высоте фильтра функции распределения  $f(d_k)$  объемного содержания мазута, нормированной так, что  $\varphi = \int_0^\infty f(d_k)d(d_k)$ . Видно, что в первую очередь коалесцируют крупные

капли и максимум функции распределения смещается в сторону меньших размеров.

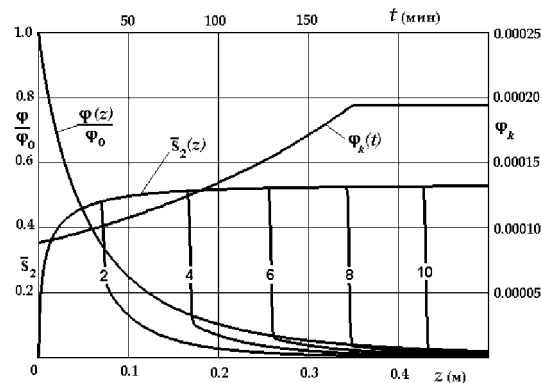


Рис. 2. Фильтрация эмульсии мазута.  
2 –  $t=30$  мин., 4 –  $t=60$  мин., 6 –  $t=90$  мин.,  
8 –  $t=120$  мин., 10 –  $t=150$  мин.

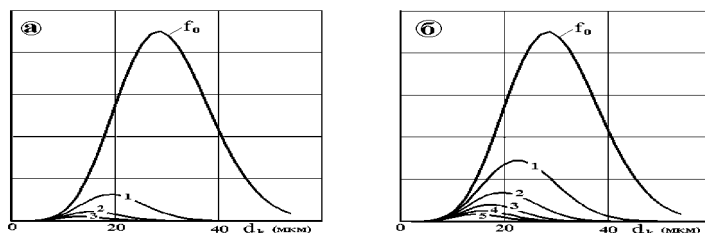


Рис. 3. Функция распределения по размерам частиц дизельного топлива (а) и мазута (б) на разном расстоянии от входа в фильтр.  
1 –  $z=0.1$  м, 2 –  $z=0.2$  м, 3 –  $z=0.3$  м, 4 –  $z=0.4$  м, 5 –  $z=0.5$  м.

### Список литературы

1. Кочерыженков Г. В., Матвеев С. К., Пчелинцев Д. В. Математическое моделирование очистки нефтесодержащих вод в фильтре с коалесцирующей загрузкой. // *Аэродинамика* / Под ред. Р.Н.Мирошина. — СПб.: Издательство НИИХ С.-Петербургского университета. 2002. С. 169–174.

## Определение свободной поверхности жидкости в движущемся сосуде с упругой вставкой асимптотическим методом

Г. А. Кутеева

(Galina.Kuteeva@gk1662.spb.edu)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Рассматривается прямоугольный сосуд, который совершает заданное поступательное движение по гармоническому закону. Внутри сосуда находится идеальная несжимаемая жидкость, движение которой потенциальное. Задача плоская. Считаем, что дно  $S_1$  и одна из стенок сосуда  $S_2$  жесткие. Другая стенка содержит упругую вставку  $\Sigma_2$ . Высота невозмущенной жидкости  $h$  совпадает с размером упругой вставки. Через  $Q$  обозначим объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью  $\Sigma_1$ , упругой вставкой  $\Sigma_2$ , жестким дном  $S_1$  и жесткой стенкой  $S_2$  сосуда.

Введем в рассмотрение неподвижную систему координат  $O'x'z'$  и систему координат  $Oxz$ , неизменно связанную с сосудом. Начало системы координат  $Oxz$  выберем посередине невозмущенной поверхности жидкости. Ось  $Ox$  направлена горизонтально по невозмущенной поверхности жидкости. Примем, что в начальный момент координатные системы  $O'x'z'$  и  $Oxz$  совпадают. Движение сосуда характеризуется скоростью полюса  $O$  подвижной системы координат  $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i}'$ .

Упругая вставка – балка, концы которой  $z = -h$  и  $z = 0$  жестко заделаны. Поверхности  $\Sigma_1, \Sigma_2$  задаются уравнениями  $z - f(x, t) = 0$ ,  $x - B/2 - w(z, t) = 0$  соответственно. Здесь  $B$  – ширина сосуда,  $f(x, t)$  – возвышение свободной поверхности жидкости,  $w(z, t)$  – прогиб упругой вставки.

При реальном движении рассматриваемой гидроупругой системы функционал [2,4]

$$G = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{Q(t)} p dQ + \int_{-h}^0 \left( \frac{m}{2} (w_t + v_{0x})^2 - \frac{EJ}{2} (w_z'')^2 \right) dz \right) dt \quad (1)$$

достигает стационарного значения. Здесь

$$p = \bar{p}(x, z, t) - p_0 = \rho \left( -\Phi_t - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + U + \nabla\Phi \cdot \mathbf{v}_0 \right),$$

$\bar{p}(x, z, t)$  — давление жидкости,  $\Phi(x, z, t)$  — потенциал скоростей,  $p_0$  — постоянное атмосферное давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $U$  — потенциал массовых сил,  $m$  — погонная масса балки (упругой вставки),  $EJ$  — жесткость балки на изгиб ( $E$  — модуль Юнга,  $J$  — момент инерции поперечного сечения балки),  $t_0, t_1$  — время начала и конца рассматриваемого процесса соответственно.

В результате варьирования функционала  $G(1)$  по трем функциям  $\Phi, f, w$  получаем следующие дифференциальные уравнения.

Потенциал скоростей  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \mathbf{r} \in Q, \quad \mathbf{r} = xi + zk. \quad (2)$$

На жестких поверхностях (жестком днище и стенке) выполняются условия непротекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{r} \in S_1, \quad S_2. \quad (3)$$

На свободной поверхности ( $\mathbf{r} \in \Sigma_1$ ) выполняются кинематическое и динамическое условия:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_1} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \frac{f_t}{\sqrt{1 + f_x^2}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot \mathbf{v}_0 - U = 0. \quad (4)$$

На упругой поверхности ( $\mathbf{r} \in \Sigma_2$ ) выполняются условия:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_2} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_2 + \frac{w_t}{\sqrt{1 + w_z^2}}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = \\ = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 - \nabla \Phi \cdot \mathbf{v}_0 - U \right) - m \frac{dv_{0x}}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  — внешние нормали к  $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2$  соответственно.

Объем жидкости внутри сосуда сохраняется:

$$\int_{-B/2}^{B/2} f(x, t) dx = - \int_{-h}^0 w(z, t) dz. \quad (7)$$

Делаем следующую замену  $\Phi(x, z, t) = xv_{0x}(t) + \varphi(x, z, t)$ .

Считаем, что прогиб стенки  $w(z, t)$ , возвышение свободной поверхности  $f(x, t)$ , потенциал скоростей  $\varphi(x, z, t)$  порядка  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  – заданное малое число). Скорость полюса  $v_{0x}$  подвижной системы координат, которая двигается по гармоническому закону, имеет порядок малости  $\varepsilon^2$ . Условия (4), (5) (6) на изменяющихся свободных поверхностях  $\Sigma_1, \Sigma_2$  ( $z = f(x, t), x = B/2 - w(z, t)$ ) снесем на недеформируемые поверхности  $z = 0, x = B/2$  с помощью разложения в ряды Тейлора, при этом оставим члены вплоть до порядка  $\varepsilon$ .

Решение системы (2) – (7) ищем в виде рядов

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^K \beta_k(t) X_k(x), \quad \varphi(x, z, t) = \sum_{k=0}^K R_k(t) X_k(x) Z_k(z),$$

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^K \gamma_k(t) W_k(z),$$

где  $\beta_k(t), R_k(t), \gamma_k(t)$  – обобщенные координаты свободной поверхности жидкости, потенциала скоростей и упругой вставки соответственно,  $X_k(x), Z_k(z), W_k(z)$  – координатные функции, которые выбираются в виде  $X_k(x) = \cos(\lambda_k(x + 1/2)), Z_k(z) = \text{ch}(\lambda_k(z + \xi_1)), W_k(z)$  – балочная функция.

Параметры  $\lambda_1, \lambda_k$  определяем последовательно из соотношений  $\text{tg}(\lambda_1) + \text{th}(\lambda_1 h/B), \lambda_1 \text{tg}(\lambda_1) = \lambda_k \text{tg}(\lambda_k), k = 2, 3, \dots$

Ограничимся рассмотрением первой формы колебаний системы. Примем, что  $x_1 = \beta_1, x_2 = R_1, x_3 = \gamma_1, x_4 = \dot{\gamma}_1$ . Будем решать задачу в случае главного резонанса системы, когда частота возмущения  $\bar{\omega}_0$  находится вблизи собственной частоты системы  $\bar{\omega}_\beta$  :

$$\bar{\omega}_\beta^2 = \bar{\omega}_0^2 - \varepsilon \delta. \quad (8)$$

Рассматриваем уравнения (5), (7) как условия связей, наложенных на уравнения (4), (6). Применим процедуру Бубнова-Галеркина. В полученную систему относительно обобщенных координат введем условия связи с помощью множителей Лагранжа. Уравнения (4), (6) после применения указанных процедур примут следующую форму

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= L_{12} x_2 + \varepsilon \mathcal{F}_1(x_1 x_2), \\ \dot{x}_2 &= L_{21} x_1 + \varepsilon \mathcal{H}_1 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \varepsilon \mathcal{F}_2(x_1^2, x_2^2), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathcal{F}_1(x_1 x_2) = R_{12}^{(1)} x_1 x_2, \mathcal{F}_2(x_1^2, x_2^2) = R_{11}^{(2)} x_1^2 + R_{22}^{(2)} x_2^2,$

$L_{ij}, \mathcal{H}_1, R_{ij}^{(k)}$  – коэффициенты, определяемые параметрами системы. Собственная частота  $\bar{\omega}_\beta$  системы (9):  $\bar{\omega}_\beta^2 = L_{12} L_{21}.$

При этом условие связи (7) получает вид  $x_1 = \bar{k}_1 x_3.$

В системе (9) перейдем к новому базису  $y_1 = x_1, y_2 = L_{12}x_2$ , и произведем замену (8). Тогда эта система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \varepsilon \mathcal{F}_1(y_1, y_2/L_{12}), \\ \dot{y}_2 &= -\bar{\omega}_0^2 y_1 + \varepsilon \delta y_1 + \varepsilon L_{12} \mathcal{H}_1 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \varepsilon L_{12} \mathcal{F}_2(y_1^2, y_2^2/L_{12}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Решение системы (10) ищем в виде  $y_1(t) = y_1^{(0)}(t) + \varepsilon y_1^{(1)}(t)$ ,  $y_2(t) = y_2^{(0)}(t) + \varepsilon y_2^{(1)}(t)$ .

Порождающая система уравнений  $\dot{y}_1^{(0)} = y_2^{(0)}, \dot{y}_2^{(0)} = -\bar{\omega}_0^2 y_1^{(0)}$  имеет решение  $y_1^{(0)}(t) = c_1 \cos(\bar{\omega}_0 t) + c_2 \sin(\bar{\omega}_0 t), y_2^{(0)}(t) = -c_1 \bar{\omega}_0 \sin(\bar{\omega}_0 t) + c_2 \bar{\omega}_0 \cos(\bar{\omega}_0 t)$ , где постоянные  $c_1, c_2$  будут определены далее.

Переходим к системе уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1^{(1)} &= y_2^{(1)} + \mathcal{F}_1(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}/L_{12}), \\ \dot{y}_2^{(1)} &= -\bar{\omega}_0^2 y_1^{(1)} + L_{12} \mathcal{H}_1 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \delta y_1^{(0)} + L_{12} \mathcal{F}_2(y_1^2, y_2^2/L_{12}^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  выбираем в виде  $c_1 = 0, c_2 = -(L_{12} \mathcal{H}_1)/\delta$ . Тогда решение системы уравнений (11) не будет содержать секулярных слагаемых:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 \cos(\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{D}_2 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{D}_3 \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{D}_4 \sin(2\bar{\omega}_0 t), \\ y_2^{(1)} &= \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 \cos(\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{E}_2 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{E}_3 \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{E}_4 \sin(2\bar{\omega}_0 t), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{D}_j, \mathcal{E}_j$  ( $j = \overline{0, 4}$ ) – выражения, которые здесь не выписываются.

После перехода к старому базису  $x_1, x_2$  обобщенные координаты примут следующую форму

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= x_1(t) = -\frac{L_{12} \mathcal{H}_1}{\delta} \sin(\omega_0 t) + \varepsilon (\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 \cos(\bar{\omega}_0 t) + \\ &\quad + \mathcal{D}_2 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{D}_3 \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{D}_4 \sin(2\bar{\omega}_0 t)), \\ R_1(t) &= x_2(t) = -\frac{\mathcal{H}_1 \bar{\omega}_0}{\delta} \cos(\bar{\omega}_0 t) + \frac{\varepsilon}{L_{12}} (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 \cos(\bar{\omega}_0 t) + \\ &\quad + \mathcal{E}_2 \sin(\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{E}_3 \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \mathcal{E}_4 \sin(2\bar{\omega}_0 t)), \\ \gamma_1(t) &= x_3(t) = \bar{k}_1 x_1(t). \end{aligned}$$

Возвышение свободной поверхности  $f(x, t)$ , потенциал возмущенных скоростей жидкости  $\varphi(x, z, t)$ , прогиб упругой вставки определяются формулами  $f(x, t) = \beta_1(t) X_1(x), \varphi(x, z, t) = R_1(t) X_1(x) Z_1(z), w(z, t) = \gamma_1(t) W_1(z)$ .

При учете внутреннего трения в материале упругой вставки [1,3] динамическое условие (6) преобразуется к виду

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + EJ \frac{\bar{\gamma}}{\omega_0} \frac{\partial^5 w}{\partial z^4 \partial t} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left( \rho \frac{B}{2} + m \right) \frac{dv_{0x}}{dt} - \varepsilon \left( \frac{\rho}{2} (\nabla \varphi)^2 + \rho w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \rho w \frac{dv_{0x}}{dt} \right), \quad x = B/2,$$

где  $\bar{\gamma}$  — коэффициент внутреннего трения.

В этом случае изменяются амплитуда колебаний свободной поверхности, прогиба упругой вставки, а также начальные условия, для которых возможен режим периодического решения.

### Список литературы

1. Вибрации в технике: справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. М. 1981. 456 с.
2. Кутеева Г.А. Функционал задачи о прямоугольном движущемся сосуде с упругой вставкой, частично заполненном идеальной несжимаемой жидкостью // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2002. Вып. 3 (№ 15). С. 90-94.
3. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат. 1960. 131 с.
4. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I. et al. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing // J. Fluid Mech. 2000. V. 407. P. 201-234.

### Стохастическое моделирование в динамике разреженного газа

А. А. Пярнпуу, В. В. Чередов, В. И. Шематович

Московский авиационный институт  
(государственный технический университет),  
Институт астрономии РАН, Россия

Исследования течений разреженного газа, в том числе вблизи химически активной твердой поверхности показало, что в таких задачах следует использовать кинетическую модель. Из анализа структуры кинетических масштабов столкновительных процессов в разре-

женных многокомпонентных средах следует, что возможно построение структурных численных моделей, являющихся гибкими и высокоэффективными при алгоритмической реализации на современных мощных компьютерах. Известно, что ионно-молекулярные реакции как и реакции между нейтральными частицами из  $H_2$ ,  $OH$ ,  $N^+$  и др., протекающие при определенной энергии активации, являются одними из определяющих в химии межзвездных частиц, однако их скорости оказываются существенно меньше, чем скорость, определяемая температурой межзвездного облака. Обычно предполагается [1], что скорости эндотермических реакций могут существенно возрастать, если реагирующие частицы кинетически возбуждены. Кинетика и динамика сверхтепловых и возбужденных частиц строго описываются системой нелинейных кинетических уравнений Больцмановского типа с источниками членами [2]. Известно также [3], что молекулы водорода преимущественно образуются на поверхности межзвездных пылинок и испускаются в газовую фазу с избытком кинетической энергии и в колебательно возбужденном состоянии. В результате численного моделирования по методике авторов [4] найдено, что горячие молекулы водорода, образовавшиеся на поверхности пылинок, в облаке межзвездного газа термализуются не полностью. Функция распределения кинетической энергии молекул  $H_2$ , характеризуется избытком кинетически возбужденных (сверхтепловых) частиц по сравнению с локально равновесной функцией распределения. В работе [5] были использованы структурные стохастические модели для изучения столкновительных процессов в разреженных газовых средах. Такие модели основаны на использовании временной структуры задач неравновесной кинетики, которая в значительной степени определяется отношением скорости изменения функции распределения по поступательным степеням свободы к характерному макроскопическому времени явления. При наличии структуры кинетических масштабов можно получить детализированное кинетическое описание разномасштабных по тепловому состоянию газовых сред [4]. В частности, компоненты газодинамической подсистемы описываются балансными уравнениями для числовой плотности и кинетической температуры. Структурное стохастическое моделирование применимо к исследованию кинетики химических реакций на твердой поверхности различной кристаллической структуры, а также на поверхности, покрытой адсорбционным слоем. В первом



случае кинетика взаимодействия разреженного газа в значительной степени зависит от структуры кристаллической решетки материала поверхности при малой химической активности взаимодействия, в то время как при наличии адсорбционного слоя на поверхности вероятность химических превращений на ней, хотя и зависит от свойств адсорбционного слоя, существенно возрастает, и функции распределения отраженных частиц чувствительны к энергии взаимодействия. Приведем краткое описание структурных стохастических моделей применительно к некоторым задачам динамики разреженного газа.

Физический объект исследования представляется как разреженный многокомпонентный химически активный газ [6,7], где разбиение множества частиц  $\alpha$  газа на компоненты  $\alpha = \alpha(\Lambda^\alpha)$  осуществляется по наборам  $\Lambda^\alpha$  квантовых чисел, необходимых для описания физических свойств и внутренней химической структуры частиц ( $\mathbf{S}$  — полное число представляющих исходный газ компонент). Поступательные степени свободы частиц газа описываются скоростями  $\mathbf{c}$ , а внутренние степени свободы, определяющие состояние внутренне возбужденных частиц (вращательные, колебательные и электронные возбужденные состояния), — фиксированной внутренней энергией  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Lambda^\alpha)$ . Такое разбиение обычно включает различные по химической структуре атомы, молекулы и их ионы в разных состояниях внутреннего возбуждения.

В силу условия разреженности газа рассматриваются лишь парные взаимодействия частиц — столкновения. В результате столкновений частиц газа возможны изменения как динамических переменных — скоростей, так и параметров внутренней структуры частиц  $\Lambda^\alpha$ . Множество однотипных изменений характеристик частиц при взаимодействии частиц газа будем рассматривать как столкновительный процесс

$$m : \alpha_i(\Lambda^{\alpha_i}, \vec{c}_i) + \alpha_j(\Lambda^{\alpha_j}, \vec{c}_j) \rightarrow \alpha_k(\Lambda^{\alpha_k}, \vec{c}_k) + \alpha_l(\Lambda^{\alpha_l}, \vec{c}_l) \quad (1)$$

Для конкретных кинетических задач это множество включает упругие процессы, процессы возбуждения и девозбуждения внутренних состояний, бимолекулярные химические и плазмохимические реакции, ионизационно-рекомбинационные процессы и т.д. Энергетико-вероятностные свойства элементарных актов столкновительного процесса (1) будем задавать дифференциальной функцией рассеяния

$dR_m = g_{ij}d\sigma_m$ ,  $g_{ij} = |\vec{c}_i - \vec{c}_j|$ ,  $d\sigma_m = \sigma_m(g_{ij}, \Omega)d\Omega'$ , характеризующей энергетическое состояние сталкивающихся частиц и вероятность реализации их взаимодействия [6,7]. Здесь  $g_{ij}$  - относительная скорость сталкивающихся частиц, а  $\sigma_m$  - дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол  $\Omega$ . Возможные состояния частиц газа по поступательным и внутренним степеням свободы будем описывать на микроскопическом уровне при помощи функций распределения  $F_\alpha(t, \vec{c}) = n_\alpha(t, \Lambda_\alpha)f_\alpha(t, \vec{c})$ , где  $n$  - плотность заселения состояний  $\Lambda_\alpha$  частицами газа, а  $f_\alpha$  - нормированное одночастичное распределение по скоростям. Изменение состояния газа за счет реакций коэффициентами скорости столкновительных процессов (1)  $q_m(t) = \int dR_m f_{\alpha_i} f_{\alpha_j} d\vec{c}_i d\vec{c}_j = \langle R_m \rangle_{f_i f_j}$ , которые определяют среднюю частоту столкновений, отвечающих процессу  $m$ . Среднее время между очередными столкновениями частицы  $\alpha_i$  с частицами  $\alpha_j$ , приводящими к реализации процесса  $m$ , равно  $\tau_m^{\alpha_i} = (n_{\alpha_j} q_m)^{-1}$ .

Детальный анализ многомасштабных кинетических систем заключается в исследовании возможных структурных соотношений между характерными кинетическими масштабами для многокомпонентного газа:  $\tau = \sum_\alpha n_\alpha \tau^\alpha / \sum_\alpha n_\alpha$ . Тогда исходное множество компонент газа можно представить следующим образом [6]

$$\{\alpha\}_S = \{\tilde{\alpha}\}_{\tilde{S}} \cup \{\hat{\alpha}\}_{\hat{S}}, \quad \{\tilde{\alpha}\}_{\tilde{S}} = \{\alpha : \tau^\alpha \ll \tau\}_S, \quad \{\hat{\alpha}\}_{\hat{S}} = \{\alpha : \tau^\alpha \sim \tau\}_S \quad (2)$$

Последние два условия (2) отражают характер изменения функций распределения по поступательным степеням свободы на кинетическом масштабе  $\tau$ : для компонент с тильдой — малые отклонения от локального равновесного состояния; для компонент со шляпкой — существенные изменения.

Для исследования характера неравновесности по поступательным степеням свободы столкновительной кинетики в разреженном многокомпонентном газе используем параметр  $\varepsilon = \tau/\theta$ , где  $\theta$  - характерное макроскопическое время изменения состояния газа. Общая картина неравновесного состояния многокомпонентной газовой среды по поступательным степеням свободы определяется ситуацией, когда  $\varepsilon \sim 1$ . В этом случае газовая среда характеризуется сильной неравновесностью по поступательным степеням свободы, а детальная структура уровней требуемого кинетического описания определяется из соотношений (2). В свою очередь, эти соотношения определяют характер зависимости функций распределения  $f_\alpha$  от време-

ни  $t' = t/\theta$ . Функции распределения компонент кинетической (или быстрой) подсистемы явно зависят от времени и определяются решением кинетических уравнений Больцмана, а для компонент газодинамической (или медленной) подсистемы - определяются локально-равновесными максвелловскими распределениями с неявной зависимостью от времени через температуру газа. В то же время рассматриваемый газ может обладать произвольной степенью неравновесности по внутренним степеням свободы и химическому составу.

Объемная кинетика столкновительных процессов в разреженном многокомпонентном газе определяется решением задачи Коши для системы кинетических уравнений больцмановского типа

$$\frac{\partial F_{\alpha_i}}{\partial t} = \sum_m J_m(F_{\alpha_i}, F_{\alpha_{ij}}) \quad F_{\alpha_i}(t = t_0) = F_{\alpha_i}^{(0)}, \quad \alpha_i = 1, S. \quad (3)$$

Интегралы столкновений равны

$$J_m(F_{\alpha_i}, F_{\alpha_j}) = \int dR_m d\vec{c}_j [e_m F_{\alpha_k}(\vec{c}'_k) F_{\alpha_l}(\vec{c}'_l) - F_{\alpha_k}(\vec{c}_i) F_{\alpha_j}(\vec{c}_j)]$$

и соответствуют балансу частиц в пространстве состояний рассматриваемой кинетической системы.

При наличии структуры кинетических масштабов (2) можно получить, исходя из системы (3), детализированное кинетическое описание разномасштабных по тепловому состоянию газовых сред.

В кинетической теории газов существуют развитые аналитические и численные методы исследования кинетических систем, находящихся в близко к локально-равновесному ( $\varepsilon \ll 1$ ) состоянию. Однако при традиционных численном и аналитическом подходах к решению описывающих стадию сильной неравновесности по поступательным степеням свободы кинетических уравнений Больцмана встречаются принципиальные математические и вычислительные трудности [2]. С развитием вычислительной техники появилась возможность решения сложных задач математической физики на ЭВМ. В частности, численное исследование неравновесной кинетики столкновительных процессов в разреженном многокомпонентном газе с учетом возможных структур кинетических масштабов проводится на основе физико-вероятностного аналога [2,6].

Релаксационные процессы в кинетических системах с глобально или локально равновесным тепловым состоянием описываются уравнениями равновесной химической кинетики

$dn_{\alpha_i}/dt = \sum_m [n_{\alpha_k} n_{\alpha_l} q_{\alpha_k \alpha_l} - n_{\alpha_i} n_{\alpha_j} q_{\alpha_j \alpha_i}]$ , где кинетические коэффициенты скорости столкновительных процессов являются либо константами в случае полного теплового равновесия — равновесная химическая кинетика, либо зависят от температуры газа в случае локального теплового равновесия — химическая кинетика в газодинамическом приближении.

Численная модель, отражающая структуру кинетической системы в приближении глобально и/или локально равновесного теплового состояния, представляет собой частный случай структурной стохастической модели релаксационных процессов [6]. Переходам между состояниями численной модели отвечают скачкообразные дискретные изменения заселенностей на  $\pm 1$  и соответствующие изменения инвариантов  $\Delta^\alpha$  столкновений при реализации возможных каналов химических реакций. Распределение во времени таких переходов определяется показательным законом времени ожидания очередного столкновения. Индивидуальные вероятности  $\omega_{ij}^m$  взаимодействия модельных частиц либо постоянны во времени для каждой из пар, либо слабо зависят от времени через локальные температуры  $T_\alpha$  в случае газодинамического приближения. Монте-карловская реализация данной модификации стохастического алгоритма характеризуется экономичностью требований к ресурсам ЭВМ и является эффективным средством исследования релаксационных процессов в глобально или локально равновесных по тепловому состоянию химически реагирующих кинетических систем [2,5].

Изложенный в работе подход к моделированию кинетических систем со смешанными состояниями успешно используется для решения задач космической физики с многокомпонентными газовыми средами, когда функция распределения лишь некоторых компонент описывается на микроскопическом уровне [7,8]. Подобные ситуации характерны для достаточно широкого круга кинетических задач, в числе которых воздействие высокоэнергичных частиц на верхнюю атмосферу Земли, химическое взаимодействие частиц газа с твердыми поверхностями [9]. Высокой эффективностью отличаются предложенные алгоритмические реализации структурных стохастических моделей для исследования процессов тепловой и химической релаксации в кинетических, газодинамических и химически активных газовых средах [10]. В частности, функции распределения для различных компонент кинетических систем определяются с большой точ-

ностью путем накопления статистических данных о скоростях моделирующих эти компоненты элементов численной модели.

### Список литературы

1. *Yee J.H., Lepp S., Dalgarno A.* // *MNRA*. 1987. V. 227. 461 p.
2. *Пярнпуу А.А., Тsvetkov G.A., Шематович, V.I.* Kinetic simulation of chemical reactions in the rarefied multicomponent gas near the solid surface // *Rarefield Gas Dynamics*. NY., 1991. P. 1385-1390.
3. *Leonas V.B., Пярнпуу А.А., Wang Z.X.* // *J.T.Ph Letters*. 1991. V. 17, Is. 16. P. 56.
4. *Шематович В.И., Пярнпуу А.А., Чередов В.В. и др.* Структурное стохастическое моделирование кинетических систем // *Математическое моделирование*. 2002. Т. 14, № 8. С. 44-50.
5. *Пярнпуу А.А., Шематович В.И.* Кинетическое моделирование химических процессов при движении космических аппаратов в верхней атмосфере Земли // *Математическое моделирование*. 2000. Т. 12, № 5. С. 22-27.
6. *Пярнпуу А.А., Шематович В.И.* Структурное стохастическое моделирование столкновительных процессов в разреженных газовых средах // *Сообщения по прикладной математике*. М., 1985. 40 с.
7. *Marov M.Ya., Shematovich V.I., Bisikalo D.V. et al.* Non-equilibrium processes in the planetary and cometary atmospheres: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 293 p.
8. *Shematovich V.I., Gerard J.-C., Bisikalo D.V. et al.* Thermalization of O(1D) atoms in the thermosphere // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104, № A3. P. 4287-4295.
9. *Пярнпуу А.А., Степанов М.Д., Шематович В.И.* Исследование взаимодействия разреженного газа с твердой поверхностью методом структурного стохастического моделирования // *Тезисы докладов IV Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях / XIX Международный семинар по струйным, отрывным и нестационарным течениям*. СПб., 2002. С. 370-371.
10. *Пярнпуу А.А., Чередов В.В., Шематович В.И.* Моделирование физико-химических процессов на поверхности межзвездных пылинок // *Кинетическая теория и динамика разреженных газов / Материалы Всероссийского семинара*. Новосибирск, 2002. С. 99-100.

## Истечение из форкамеры колебательно неравновесного газа

*М. А. Рыдалевская, Т. В. Рябикова*

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Российский государственный гидрометеорологический университет, Россия

Задача об адиабатическом истечении идеального газа из отверстия является классическим примером на применение интеграла Бернулли и адиабаты Пуассона. Если состояние газа внутри сосуда известно, то интегралы движения позволяют определить параметры вытекающей струи на выходе из сопла в зависимости от давления [1]. В настоящее время в связи с рядом практических задач возникла необходимость исследования истечения газовых струй с физико-химическими эффектами из форкамеры через малое отверстие. Сложность решения таких задач связана с тем, что при этом нарушается баротропность, и соответственно, не действует адиабата Пуассона.

В данной работе задача об истечении колебательно возбужденного газа из сосуда через малое отверстие решается с использованием обобщенного выражения адиабаты, полученного для газовых смесей с внутренними степенями свободы и химическими реакциями [2]. Конкретные расчеты проведены для высокотемпературного молекулярного азота. Рассмотрены ситуации, когда в форкамере устанавливаются квазистационарные распределения с разной степенью колебательной неравновесности. Для каждого случая вычисляются параметры вытекающей струи и объемный расход газа, исследуются зависимости этих величин от давления вне форкамеры.

**1. Кинетика и газодинамика течений с физико-химическими процессами** Систему кинетических уравнений для газовых смесей с физико-химическими превращениями с учетом иерархии времен релаксации различных степеней свободы можно записать в безразмерном виде

$$D_i f_i = \frac{1}{\varepsilon} J_i' + J_i'', \quad i = 1, \dots, I, \quad (1)$$

где  $f_i$  — одночастичная функция распределения частиц  $i$ -го сорта;  $D_i$  — дифференциальный оператор, описывающий изменение функ-

ции распределения вдоль фазовой траектории;  $J'_i$  и  $J''_i$  — операторы столкновений, соответствующие "быстрым" и "медленным" стадиям процесса;  $\varepsilon = \tau/\theta$  — аналог числа Кнудсена для столкновений, описываемых оператором  $J'_i$  ( $\tau$  — среднее время между наиболее редкими из этих столкновений,  $\theta$  — характерное время течения) [3].

В нулевом приближении по параметру  $\varepsilon$  будем иметь систему  $J'_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, I$ , решением которой является функция [3]

$$f_i^{(0)} = \frac{s_i m_i^3}{h^3} \exp \left\{ \gamma_0 \left( \frac{m_i c^2}{2} + \varepsilon_i \right) + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_{\lambda} \psi_i^{(\lambda)} \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $h$  — постоянная Планка;  $m_i$ ,  $s_i$  и  $\varepsilon_i$  — масса, статистический вес и внутренняя энергия  $i$ -ой частицы;  $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}$ , ( $\bar{\mathbf{u}}$  — скорость молекулы,  $\bar{\mathbf{v}}$  — среднемассовая скорость газа);  $\psi_i^{(\lambda)}$  — аддитивные инварианты столкновений, описываемых оператором  $J'_i$ ;  $\gamma_{\lambda}$  — интенсивные параметры ( $\gamma_0 = -1/(kT)$ ,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура газа).

Система кинетических уравнений (1) позволяет в этом приближении получить систему газодинамических уравнений [3]:

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad \frac{de}{dt} + (e+p) \text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \frac{d\psi_{\lambda}}{dt} + \psi_{\lambda} \text{div } \bar{\mathbf{v}} = \Delta\psi_{\lambda}, \quad (3)$$

где  $\lambda = 1, \dots, \Lambda$ . Здесь  $\bar{\mathbf{F}}$  — сила, действующая на единицу массы;  $p$  — давление;  $\rho$ ,  $e$  и  $\psi_{\lambda}$  — плотности макропараметров (массы, энергии и суммарного значения инвариантов  $\psi_i^{(\lambda)}$ ). Релаксационные члены имеют вид  $\Delta\psi_{\lambda} = \sum_i \int \psi_i^{(\lambda)} J''_i(f^{(0)}) d\bar{\mathbf{c}}$ . Часть аддитивных инвариантов  $\psi_i^{(\lambda)}$  соответствует сохранению частиц, неделимых при столкновениях, определяющих быструю стадию процесса и описываемых операторами  $J'_i$ .

Умножая уравнения (3), относящиеся к плотностям неделимых частиц  $\psi_{\lambda}$ , на массу  $m_{\lambda}$  этих частиц и суммируя, получим уравнение неразрывности для плотности  $\rho$ :  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0$ .

Для стационарных течений в поле консервативных сил первые уравнения (3) позволяют вывести интеграл Бернулли, справедливый на линиях тока  $v^2/2 + U + \tilde{h} = \text{const}$ , где  $U$  — потенциал массовых сил,  $\tilde{h} = (e+p)/\rho$  — энтальпия единицы массы газа.

В некоторых частных случаях можно получить и другие интегралы движения для течений с физико-химическими превращениями. В ситуации, когда по одним степеням свободы успело установиться локальное равновесие, а другие степени свободы заморожены, в уравнениях (3)  $\Delta\psi_\lambda = 0$ . При этом будем иметь

$$\frac{d\psi_\lambda}{dt} + \psi_\lambda \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \lambda = 1, \dots, \Lambda. \quad (4)$$

Сопоставляя (4) с уравнением неразрывности, получим интегралы

$$\tilde{\psi}_\lambda = \psi_\lambda / \rho = \operatorname{const}, \quad \lambda = 1, \dots, \Lambda, \quad (5)$$

справедливые на траекториях жидких частиц.

Вид функции распределения (2) позволяет представить параметры  $e$ ,  $p$ , и  $\psi_\lambda$  ( $\lambda = \overline{1, \Lambda}$ ) в виде функций от интенсивных параметров  $\gamma_\lambda$  ( $\lambda = \overline{0, \Lambda}$ ). На основе такого представления в работе [2] был получен интеграл

$$\gamma_0 \bar{h} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \tilde{\psi}_\lambda = \operatorname{const}, \quad (6)$$

который можно рассматривать как обобщение адиабаты. Он соответствует сохранению энтропии единицы массы газа  $\bar{s} = s/\rho$  вдоль траектории жидких частиц, в случае локального равновесия.

**2. Адиабатическое истечение газа из сосуда через малое отверстие** Пусть газ с физико-химическими процессами вытекает в среду через малое отверстие. Течение можно считать адиабатическим, т.к. нет обмена тепла с окружающей средой, а также квазистационарным, т.к. параметры внутри сосуда мало изменяются. Интеграл Бернулли в этом случае будет иметь вид  $v_0^2/2 + \bar{h}_0 = v^2/2 + \bar{h}$ , где  $v_0$  и  $\bar{h}_0$  ( $\gamma_0^0, \gamma_1^0, \dots, \gamma_\Lambda^0$ ) — параметры внутри сосуда,  $v$  и  $\bar{h}$  ( $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda$ ) — параметры на выходе. Как и в [1], в силу малости отверстия можно положить  $v_0 = 0$ . Тогда скорость истечения газа из сосуда будет выражаться формулой

$$v = \sqrt{2(\bar{h}_0 - \bar{h})}. \quad (7)$$

В условиях, когда состояние газа внутри сосуда фиксировано, то-есть  $\gamma_0^0, \gamma_1^0, \dots, \gamma_\Lambda^0$  заданы, неизвестными остаются параметры



$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda$ . Для определения этих параметров имеем интегралы движения (5) и (6):

$$\gamma_0 \tilde{h} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda \tilde{\psi}_\lambda = \gamma_0^0 \tilde{h}_0 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_\lambda^0 \tilde{\psi}_\lambda^0, \quad \tilde{\psi}_\lambda = \tilde{\psi}_\lambda^0, \lambda = 1, \dots, \Lambda. \quad (8)$$

Следует отметить, что лишь  $\Lambda - 1$  уравнений (8) для  $\tilde{\psi}_\lambda$  являются независимыми. Следовательно, мы имеем  $\Lambda$  независимых уравнений (8) относительно  $\Lambda + 1$  неизвестных  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda$ . В этих условиях для замыкания системы необходимо добавить еще одно уравнение. Им может быть выражение для давления  $p$  на выходе из форкамеры

$$p = nkT = -n/\gamma_0, \quad (9)$$

где  $n$  — числовая плотность частиц в вытекающей струе. Выражая  $n$  через функции распределения (3), в общем случае можем записать  $n = n(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda)$ .

Система (8) - (9) может рассматриваться как система алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\Lambda$ . В условиях, когда состояние газа в сосуде фиксировано, решение уравнений (8) - (9) будет определять зависимости  $\gamma_\lambda = \gamma_\lambda(p)$  ( $\lambda = \overline{1, \Lambda}$ ), а, следовательно, и зависимости от давления  $p$  всех гидродинамических параметров, включая удельную энтальпию  $\tilde{h}$ .

Вернемся к формуле (7). Если  $p = p_0$  (давление внутри сосуда равно давлению среды, в которую вытекает газ), то все параметры  $\gamma_\lambda = \gamma_\lambda^0$  остаются неизменными и  $\tilde{h}(p_0) = \tilde{h}_0$ . В этих условиях, согласно (7)  $v = 0$  и газ вытекать не будет. Учитывая выражение для давления  $p$  и удельной энтальпии  $\tilde{h}$ , получим

$$\frac{d\tilde{h}}{dp} = \frac{1}{\rho} > 0. \quad (10)$$

Формулы (7) и (10) показывают, что и в газе с физико-химическими процессами истечение газа из сосуда, возможно лишь при  $p < p_0$ .

Наряду, со скоростью важное значение имеет величина  $q = \rho v$  — массовый расход на единицу площади. Используя (7), можем записать  $q = \sqrt{2\rho^2(\tilde{h}_0 - \tilde{h})}$ . При заданных параметрах  $\gamma_0^0, \gamma_1^0, \dots, \gamma_\Lambda^0$

$q = q(p)$ . При этом

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{\sqrt{2(\tilde{h}_0 - \tilde{h})}} \left[ 2(\tilde{h}_0 - \tilde{h}) \frac{d\rho}{dp} - \rho \frac{d\tilde{h}}{dp} \right]. \quad (11)$$

Ранее в работе [2] было получено выражение для скорости звука в изоэнтропических потоках газа с физико-химическими превращениями:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad (12)$$

где  $dp$  и  $d\rho$  — полные дифференциалы давления  $p$  и плотности  $\rho$ , рассматриваемых как функции от  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_L$ .

Согласно формулам (7), (10) и (12), формулу (11) можно записать в виде

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{v} \left( \frac{v^2}{a^2} - 1 \right). \quad (13)$$

Как и в случае простого газа (см., например, [1]), из (13) получаем, что при  $v = a$  ( $M = 1$ )  $dq/dp = 0$  при фиксированных условиях в сосуде. Эта ситуация будет осуществляться при некотором значении давления  $p = p_*$ . При  $p_* < p < p_0$  скорость газа  $v$  меньше скорости звука  $a$  и  $\frac{dq}{dp} < 0$ , при  $0 < p < p_*$   $v > a$  и  $\frac{dq}{dp} > 0$ . Таким образом, массовый расход газа достигает максимума  $q = q_{max}$  при  $p = p_*$ , когда скорость истечения равна скорости звука  $a$ . Эксперименты подтверждают справедливость полученных зависимостей при  $p_* \leq p \leq p_0$ , но при  $p < p_*$  расход остается постоянным, равным максимальному.

**3. Истечение из форкамеры двухатомного газа из ангармонических осцилляторов** В качестве примера исследуем истечение из сосуда колебательно возбужденного двухатомного газа с учетом ангармоничности. Как известно, процессы релаксации в газе идут с различными скоростями. В связи с этим в форкамере могут установиться квазистационарные распределения (3) с разной степенью неравновесности. В эти распределения будут входить различные аддитивные инварианты  $\psi_i^{(\lambda)}$ , а значит, по-разному будут выглядеть уравнения (8)-(9).

В настоящей работе исследовалось истечение молекулярного азота при следующих условиях в форкамере. Плотность газа оставалась

постоянной  $\rho_0 = mn_L = 1,25 \text{ кг/м}^3$  ( $n_L$  — число Лошмидта), температура  $T_0$  газа варьировалась от  $300 \text{ К}$  до  $800 \text{ К}$ . Рассматривались ситуации: а) все колебательные переходы заморожены; б) учитывались колебательные обмены с относительным дефектом резонанса  $\alpha = |\Delta\varepsilon_{vibr}|/\varepsilon_v \leq 1/2$ ; в) газ находился в состоянии термодинамического равновесия. В ситуации (б) отношение температуры 1-го колебательного уровня  $T_{1,0}$  [4] к температуре газа  $T_0$  принималось равным 10. Для каждого случая был проведен расчет параметров вытекающей струи в зависимости от отношения давления  $p$  на выходе к давлению  $p_0$  в сосуде.

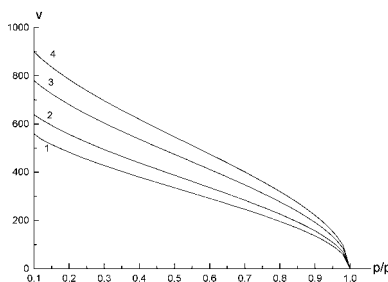


Рис. 1 Скорость истечения

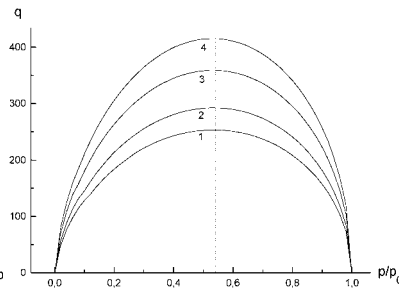


Рис. 2 Массовый расход

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчета скорости истечения  $v$  (м/с) и массового расхода  $q$  (кг/(с·м<sup>2</sup>)) колебательно неравновесного газа в условиях неравновесной ситуации (б). При этом кривые 1 соответствуют температуре газа  $T_0 = 300 \text{ К}$ ; 2 —  $T_0 = 400 \text{ К}$ , 3 —  $T_0 = 600 \text{ К}$ , 4 —  $T_0 = 800 \text{ К}$ .

Результаты расчетов показывают, что при истечении из форкамеры колебательно неравновесного газа наблюдаются такие же эффекты, как и в случае простого газа, когда справедлива адиабата Пуассона. Скорость газа монотонно убывает с увеличением давления, а массовый расход достигает максимума при одном и том же отношении  $p/p_0$ . Повышение температуры  $T_0$  в сосуде приводит к увеличению скорости  $v$  и материального расхода  $q$ . При этом с увеличением температуры  $T_0$  возрастает и скорость звука  $a$ .

### Список литературы

1. Валландер С.В. Лекции по гидромеханике. ЛГУ, 1978.

2. Рыдалевская М.А. Аэродинамические свойства течений газа с физико-химическими процессами // Аэродинамика. СПбГУ, 2000.
3. Валландер С.В., Нагнибеда Е.А., Рыдалевская М.А. Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов. Л., 1977.
4. Treanor C.E., Rich I.W., Rehm R.G. Vibrational Relaxation of anharmonic oscillators with exchange-dominated Collisions // J. Chem. Phys., 1968. V. 48. № 4. P. 1798-1807.

## **К задаче о колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды**

*В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий*  
(samson@imec.msu.ru)

Институт механики МГУ, Москва, Россия

Отец русской авиации, профессор Николай Егорович Жуковский считал главным искусством механика способность составлять уравнения движения механического объекта (математическую модель), допускающие если не решение, то качественный анализ поведения объекта (естественно, с сохранением основных природных его свойств). Конечно, само понятие "искусство" скорее иррационально. Поэтому развитие рациональной механики воспитало такое отношение к модели, что она должна возникать, как частный конкретный случай (общей) модели. В отдельных задачах механики подобный подход, наверное, уже привел к рациональной последовательности "все более сложных" моделей, каждая из которых занимает свою "нишу" в пространстве параметров исследуемого объекта.

В задачах прикладной аэродинамики, в частности, при дозвуковых скоростях, на взгляд авторов, состояние вопросов далеко от описанного идеала. Серия упрощенных (эмпирических, полуэмпирических) моделей — статическая, квазистатическая, квазистационарная и прочие, — соседствуют с феноменологическими моделями "жидких осцилляторов" как бы сами по себе. При этом они находят трудами экспериментаторов свою "нишу", но мало какая из них обоснована методами теоретической гидромеханики.

1. В качестве иллюстрации обсудим задачу о поступательном движении тонкого жесткого крыла в направлении поперек потока

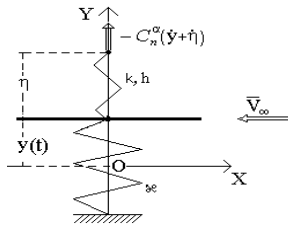


Рис. 1.

несжимаемой среды (в экспериментах - вода или воздух) (рис. 1).

Пусть ограниченная, непрерывная функция  $y(t)$  описывает закон перемещения крыла. Пусть  $\dot{y}$  и  $\ddot{y}$  также ограничены. Кроме того, будем считать, что срединная плоскость симметричного крыла ориентирована вдоль потока.

Скорость  $V_\infty$  и вязкость среды выберем в таком диапазоне, чтобы коэффициент

нормальной аэродинамической силы  $N$  "в статике" был линейной функцией угла  $\alpha$  атаки ( $|\alpha| < \alpha_* \approx 0.2 \div 0.3 \text{ рад} (13^\circ \div 19^\circ)$ ).

Очевидно, что при  $\dot{y} \neq 0$  имеем  $N(t) \neq 0$ . Более того, даже в том случае, когда в момент времени  $t_0$  крыло остановили и удерживают неподвижным,  $N(t) \neq 0$  при  $t > t_0$ , хотя и относительно быстро убывает по величине. В некоторых экспериментах отмечается даже смена знака  $\dot{N}(t)$ .

В этих условиях "статическая" модель, в которой мгновенное значение угла атаки отождествляется с углом тангажа, дает, очевидно, неверное описание силы  $N$  (т.к.  $N_{st} \equiv 0$ ).

В случае "медленных" движений крыла, когда  $\dot{y} \ll V_\infty$ , обычно пользуются "квазистатической" моделью, в которой принимают

$$C_n = -C_n^\alpha \frac{\dot{y}}{V_\infty} \quad (1)$$

Уравнения движения крыла в этом случае принимают вид

$$M\ddot{y} = F_e - \frac{1}{2}\rho S V_\infty C_n^\alpha \dot{y} \quad (2)$$

где  $M$  — масса крыла,  $F_e$  — приложенные к крылу вынуждающие силы, а остальные параметры традиционны для прикладной аэромеханики.

Вопрос об определении конструктивных условий применимости модели (1,2) по-прежнему актуален. Один из возможных подходов к ответу на него дан ниже.

**2.** Естественно, вода и воздух, хотя и близки по своим свойствам к идеальной жидкости, таковой все же не являются. Поэтому традиционная для идеальной жидкости связь между количеством

$K_y$  "поперечного" движения жидкости и скоростью тела не выполняется. Это обстоятельство позволяет ввести новую переменную  $\dot{\eta}$ , имеющую смысл скорости  $K_y = m(\dot{\eta} + \dot{y})$ , где  $m$  — присоединенная масса для конкретного крыла.

Дополним скорость  $\dot{\eta}$  ее интегралом по времени, т.е. положением  $\eta$ , и получим пару переменных  $\eta, \dot{\eta}$ , которые вполне могут претендовать на описание одной из бесконечного числа степеней свободы жидкости в ее движении относительно крыла.

Пронормируем все переменные задачи следующим образом: приняв за единицу длины длину хорды крыла, назначим масштаб времени таким, чтобы  $V_\infty = 1$ . Оставим за безразмерными величинами прежние обозначения.

**3.** Движение механического объекта  $A$ , имеющего массу  $m$  и абсолютную координату  $y + \eta$ , описывается уравнением

$$m(\ddot{y} + \ddot{\eta}) = F + R, \quad (3)$$

где  $F$  — сила взаимодействия между крылом и объектом  $A$ ,  $R$  — реакция внешней связи (например, в случае неограниченного объема среды — реакция бесконечно удаленной границы, т.е. то, что обеспечивает невозмущаемость потока на бесконечном удалении от крыла).

Стремление к построению линейной модели представляется вполне оправданным, когда речь идет об "относительно малом" возмущении стационарного движения. Поэтому для обеих сил примем линейную зависимость от фазовых координат:  $F = -k\eta - h\dot{\eta}$ ,  $R = -C_n^\alpha(\dot{y} + \dot{\eta})$ . Поскольку сила  $F$  — сила внутреннего взаимодействия между крылом и объектом  $A$ , то она, естественно, не зависит от  $y, \dot{y}$ . Поскольку сила  $R$  — сила, так сказать, тоже "внутреннего" взаимодействия между "неподвижной" границей и объектом  $A$ , то она зависит лишь от его абсолютной скорости.

В итоге имеем для (3)

$$m(\ddot{y} + \ddot{\eta}) = -k\eta - h\dot{\eta} - C_n^\alpha(\dot{y} + \dot{\eta}) \quad (4)$$

Каждому конкретному крылу отвечают свои значения удельной (на единицу длины) присоединенной массы и коэффициента  $C_n^\alpha$ . В принципе, не было бы ничего удивительного, если бы и коэффициенты  $k, h$  в модели (4) тоже были переменными.

4. Тестирование модели проводилось по данным экспериментов, в которых разные крылья совершали принудительные гармонические колебания  $y = \varepsilon \cos \omega t$  с различными значениями амплитуды  $\varepsilon$  ( $0.1 \div 0.2$ ) и частоты ( $0.5 \div 2$ ). Отметим, что эксперименты проводились в различных организациях и в разных странах.

В качестве типичного примера приведем на рис.2,3 данные [1], полученные в ЦАГИ им. проф. Жуковского, для  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\omega = 0.5$ . Крестиками отмечены измеренные значения нормальной силы (в нашей интерпретации — силы  $F'$ ) на крыле. Пунктиром изображено "квазистатическое" значение (1) силы  $-F$ . Сплошная линия — результат вычисления силы  $-F'$  для установившихся колебаний объекта  $A$  по модели (4) при подобранных  $k_* = 2$ ,  $h_* = 12$ .

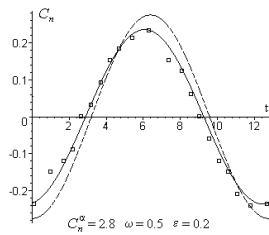


Рис. 2.

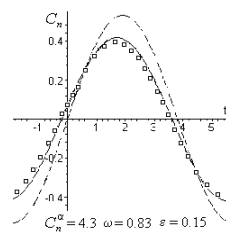


Рис. 3.

Отметим, что эти колебания можно было бы отнести к "медленным движениям", т.к.  $\max |\dot{y}| \sim 0.1$ . Тем не менее, отличие измерений от "квазистатики" обозначилось вполне определенное (хотя и относительно малое). Модель (4), естественно, улучшила описание.

Обработка большого числа опытных данных показала определенную универсальность модели (4). Это и дало основание авторам назвать объект  $A$  присоединенным к крылу "жидким осциллятором" (материальной точкой массы  $m$ , соединенной с крылом вязкоупругим элементом с жесткостью  $k_*$  и "вязкостью"  $h_*$ ).

5. "Жидкий осциллятор" мог бы быть введен в практику инженерных расчетов еще в 1971 году при соответствующей интерпретации результатов школы С.М. Белоцерковского. В [2] после значительного упрощения соответствующей интегро-дифференциальной системы было получено дополнительное дифференциальное уравнение второго порядка, которое можно считать предшественником (4). Однако выбор других фазовых переменных "перемешал" индивидуальные ( $m$ ,  $C_n^\alpha$ ) и универсальные ( $k_*$ ,  $h_*$ ) параметры.

6. Уравнение (4) позволило описать "последействие" потока при прекращении движения тела.

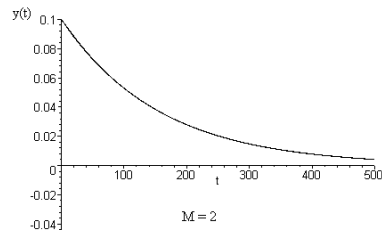


Рис. 4.

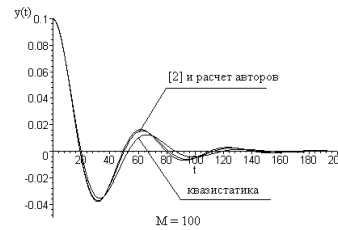


Рис. 5.

Сочетание (4) с уравнением движения крыла при упругом закреплении к опоре позволило рассчитать процесс затухания колебаний крыла. Результаты не только практически совпадают с аналогичными в [2] (рис.4,5), но и дали объяснение некоторым, на первый взгляд, парадоксальным результатам в [2].

7. Описанный подход распространен не только на случай угловых колебаний крыла, но и на дополнительное описание момента аэродинамических сил ([3])

**Заключение.** За рубежом давно уже господствует мнение, что современные вычислительные технологии полностью отменили потребность в простых механико-математических моделях, на основе которых можно было бы вести прикидочные расчеты инженеру и конструктору, освоившим основы теоретической механики, теории колебаний и прикладной аэромеханики. В отечественной механике со времен Н.Е. Жуковского считалась важной роль простых моделей в процессе формирования инженерной интуиции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00190), программы "Университеты России" и гранта Президента РФ № МК-263.2003.01.

#### Список литературы

1. Гребешов Э.П., Шакарвене Е.П. Нестационарные характеристики трех прямоугольных крыльев различного удлинения // Труды ЦАГИ, 1989. Вып. 2485. С. 3-31.
2. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Локтев Б.Е., Томшин В.М. Линейные и квазилинейные задачи динамики жесткого аппа-



рата с отклоняющимися рулями // Труды ВВИА им. Жуковского, 1971. Вып. 1302 С. 110-146.

3. *Селюцкий Ю.Д.* О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Труды конференции-конкурса молодых ученых Института механики МГУ, 2002. С. 79-84.

## **Параллельная версия итерационно-маршевого метода интегрирования уравнений Навье-Стокса**

*Л. И. Скурин*

(leonid.skurin@pobox.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В работах [1, 2] и в других работах автора развивается итерационно-маршевый метод (ИММ) численного интегрирования уравнений Навье-Стокса для газа и жидкости. Метод применим для решения многомерных стационарных и нестационарных, внутренних и внешних задач. Отличительная особенность метода в том, что решение всех типов задач основано на единой процедуре — маршевой по пространственной координате для двумерных задач и по двум координатам для трехмерных задач. Другими словами, для всех задач используется единая алгебраическая процедура — решение системы алгебраических уравнений для вектора искомых сеточных функций на лучах, поперечных по отношению к маршевым осям. Аналитически показано, что метод имеет безусловные устойчивость и сходимость для задач гидродинамики. Применимость метода к расчету течений сжимаемой жидкости продемонстрирована на многочисленных примерах [2, 3].

В настоящей работе предлагаются в рамках ИММ вычислительные схемы для стационарных и нестационарных задач, пригодные для численного решения с помощью параллельного алгоритма. Показано, что эти схемы также обладают безусловной сходимостью. При их использовании вычисления, связанные с упомянутой алгебраической процедурой, могут осуществляться для каждого луча на отдельном процессоре в пределах одного временного шага или глобальной итерации. Таким образом, практически весь объем вычислений (в пределах каждого временного шага, либо глобальной итерации) представляется в виде суммы большого числа независимых

между собой и близких по объему частей.

Рассмотрим сначала схему для стационарных задач. В рамках ИММ для них оказывается эффективной модифицированная схема, представляющая собой схему, основанную на принципе установления по времени [1, 2]. В соответствии с ней каждый временной шаг реализуется применением одной маршевой процедуры. Чтобы построить схему, реализуемую параллельным алгоритмом, изменим несколько аппроксимацию производных от составляющих скорости по маршевой координате. Рассмотрим следующий конечно-разностный аналог двумерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, записанной в декартовой системе координат и с "замороженными коэффициентами":

$$\frac{u_{jm}^\sigma - u_{jm-1}^{\sigma-1}}{\Delta x} + \frac{v_{j+1m}^\sigma - v_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{u_{jm}^\sigma - u_{jm-1}^\sigma}{\Delta t} + |u_0| \frac{u_{jm}^\sigma - S_1 u_{jm-1}^{\sigma-1} - S_2 u_{jm-1}^{\sigma+1}}{\Delta x} + v_0 \frac{u_{j+1m}^\sigma - u_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} + \frac{p_{jm-1}^{\sigma+1} - p_{jm}^\sigma}{\Delta x} = \frac{u_{j+1m}^\sigma - 2u_{jm}^\sigma + u_{j-1m}^\sigma}{Re\Delta y^2} + \frac{u_{jm-1}^{\sigma+1} - 2u_{jm}^\sigma + u_{jm-1}^{\sigma-1}}{Re\Delta x^2},$$

$$\frac{v_{jm}^\sigma - v_{jm-1}^\sigma}{\Delta t} + |u_0| \frac{v_{jm}^\sigma - S_1 v_{jm-1}^{\sigma-1} - S_2 v_{jm-1}^{\sigma+1}}{\Delta x} + v_0 \frac{v_{j+1m}^\sigma - v_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} + \frac{p_{j+1m}^\sigma - p_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} = \frac{v_{j+1m}^\sigma - 2v_{jm}^\sigma + v_{j-1m}^\sigma}{Re\Delta y^2} + \frac{v_{jm-1}^{\sigma+1} - 2v_{jm}^\sigma + v_{jm-1}^{\sigma-1}}{Re\Delta x^2},$$

$$S_1 = (1 + u_0/|u_0|)/2, \quad S_2 = (1 - u_0/|u_0|)/2,$$

где индексы  $\sigma, j$  — номера узловых точек соответственно вдоль маршевой оси  $x$  и ортогональной ей  $y$ ,  $m$  — номер временного слоя,  $u, v$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y$  соответственно,  $p$  — давление,  $Re$  — число Рейнольдса.

Схема (1) отличается от модифицированной схемы, рассмотренной в [1], тем, что значения сеточных функций в точке с индексом  $(\sigma - 1)$  берутся со слоя  $(m - 1)$  (а не с  $m$ , как в [1]). Это означает, что производные по  $x$  от компонент скорости аппроксимируются при сходимости, то есть, например,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{jm}^\sigma - u_{jm}^{\sigma-1}}{\Delta x} + \frac{u_{jm}^{\sigma-1} - u_{jm-1}^{\sigma-1}}{\Delta x}.$$

Здесь второй член исчезает при сходимости по времени.

Модифицированная схема на каждом временном слое реализуется с использованием маршевой процедуры, то есть путем последовательного отыскания решения на лучах  $\sigma = 2, 3, \dots, N - 1$ . Отыскание решений на этих лучах для системы (1), как нетрудно видеть, можно осуществлять в произвольном порядке, а, значит, и с использованием параллельного алгоритма. Однако важно выяснить, имеет ли место для этой системы устойчивость. Рассмотрим этот вопрос, используя метод разделения переменных. Подставим в эту систему вектор неизвестных в виде  $\vartheta_{jm}^\sigma = (u_*, v_*, p_*)^T \lambda^m \exp[i(\gamma\sigma + \alpha j)]$ .

Матрица системы уравнений для  $u_*, v_*, p_*$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \lambda - e^{-i\gamma} & \lambda i r_y \sin \alpha & 0 \\ \lambda R_1 - R_2 & 0 & e^{i\gamma} - \lambda \\ 0 & \lambda R_1 - R_2 & \lambda i r_y \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$R_1 = r_t + |u_0| + 2/(Re\Delta x) + 2r_y(1 - \cos \alpha)/(Re\Delta y) + v_0 r_y i \sin \alpha$$

$$R_2 = r_t + |u_0|(S_2 e^{i\gamma} + S_1 e^{-i\gamma}) + (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma})/(Re\Delta x),$$

$$r_t = \Delta x/\Delta t, \quad r_y = \Delta y/\Delta t.$$

Этой матрице соответствует характеристическое уравнение

$$(\lambda - e^{-i\gamma})(\lambda - e^{i\gamma})(\lambda R_1 - R_2) + (\lambda R_1 - R_2)\lambda^2 A^2 = 0, \quad A^2 = r_y^2 \sin^2 \alpha.$$

Оно имеет три корня:

$$\lambda_1 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{\cos \gamma}{1 + A^2} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{(1 + A^2)^2} - \frac{1}{1 + A^2}}. \quad (3)$$

Обозначим  $\xi = 2r_y(1 - \cos \alpha)/(Re\Delta y)$  и рассмотрим модуль первого корня  $|\lambda_1|^2 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{|r_t + |u_0|(S_2 + S_1) \cos \gamma + 2/(Re\Delta x) \cos \gamma + i|u_0|(S_2 - S_1) \sin \gamma|^2}{|r_t + |u_0| + 2/(Re\Delta x) + \xi + v_0 r_y i \sin \alpha|^2} = \\ &= \frac{(r_t + 2/(Re\Delta x) \cos \gamma + |u_0| \cos \gamma)^2 + |u_0|^2 \sin^2 \gamma}{(r_t + 2/(Re\Delta x) + \xi + |u_0|)^2 + v_0^2 A^2} = \end{aligned}$$

$$\frac{[r_t + 2/(Re\Delta x) \cos \gamma]^2 + 2[r_t + 2/(Re\Delta x) \cos \gamma]|u_0| \cos \gamma + |u_0|^2}{[r_t + 2/(Re\Delta x) + \xi]^2 + 2[r_t + 2/(Re\Delta x) + \xi]|u_0| + |u_0|^2 + v_0^2 A^2}.$$

Так как  $\xi \geq 0$ ,  $r_t > 0$ , то  $[r_t + 2/(Re\Delta x) + \xi] - [r_t + 2/(Re\Delta x) \cos \gamma] \geq 0$  и, следовательно, всегда  $|\lambda_1| \leq 1$ .

Рассмотрим оставшиеся два корня

$$|\lambda_{2,3}| = \frac{|\cos \gamma \pm i\sqrt{1 + A^2 - \cos^2 \gamma}|}{1 + A^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \leq 1.$$

Таким образом, все корни не превышают единицу, и, значит, схема (1) безусловно устойчива. Факт устойчивости подтвержден при численном решении тестовых задач на основе уравнений, записанных в консервативной форме.

Решения нестационарных задач базируются на основной схеме ИММ [1, 2]. В этом случае решение на каждом временном слое находится с помощью глобальных итераций (ГИ), каждая из которых представляет собой маршевую процедуру. Введем в соответствующую схему изменения, аналогичные изменениям для модифицированной схемы. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{u_{jm}^\sigma - (u_{jm}^{\sigma-1})^{s-1}}{\Delta x} + \frac{v_{j+1m}^\sigma - v_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} = 0, \quad (4) \\ & \frac{u_{jm}^\sigma - u_{jm-1}^\sigma}{\Delta t} + |u_0| \frac{u_{jm}^\sigma - S_1(u_{jm}^{\sigma-1})^{s-1} - S_2(u_{jm}^{\sigma+1})^{s-1}}{\Delta x} + \\ & + v_0 \frac{u_{j+1m}^\sigma - u_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} + \frac{(p_{jm}^{\sigma+1})^{s-1} - p_{jm}^\sigma}{\Delta x} = \\ & = \frac{u_{j+1m}^\sigma - 2u_{jm}^\sigma + u_{j-1m}^\sigma}{Re\Delta y^2} + \frac{(u_{jm}^{\sigma+1})^{s-1} - 2u_{jm}^\sigma + (u_{jm}^{\sigma-1})^{s-1}}{Re\Delta x^2}, \\ & \frac{v_{jm}^\sigma - v_{jm-1}^\sigma}{\Delta t} + |u_0| \frac{v_{jm}^\sigma - S_1(v_{jm}^{\sigma-1})^{s-1} - S_2(v_{jm}^{\sigma+1})^{s-1}}{\Delta x} + \\ & + v_0 \frac{v_{j+1m}^\sigma - v_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} + \frac{p_{j+1m}^\sigma - p_{j-1m}^\sigma}{2\Delta y} = \\ & = \frac{v_{j+1m}^\sigma - 2v_{jm}^\sigma + v_{j-1m}^\sigma}{Re\Delta y^2} + \frac{(v_{jm}^{\sigma+1})^{s-1} - 2v_{jm}^\sigma + (v_{jm}^{\sigma-1})^{s-1}}{Re\Delta x^2}, \end{aligned}$$

где  $s$  — номер ГИ. Предполагается, что все искомые функции относятся к текущей  $s$ -й ГИ за исключением функций с индексом  $(s-1)$ .

Схема (4) отличается от основной схемы, рассмотренной в [1], тем, что значения сеточных функций в точках с индексом  $(\sigma - 1)$  берутся с  $(s - 1)$ -й ГИ (а не с  $s$ -й, как в [1]). Благодаря этому, отыскание решений на поперечных лучах по системе (4), как нетрудно видеть, можно осуществлять с использованием параллельного алгоритма.

Исследуем устойчивость ГИ. В соответствии с методом разделения переменных, представим вектор неизвестных на данном временном слое в виде  $(\vartheta_{jm}^\sigma)^s = (u^*, v^*, p^*)^T \lambda^s \exp[i(\gamma\sigma + \alpha j)]$ . Этот вектор должен удовлетворять системе, которая следует из (4) с учетом того обстоятельства, что величины с индексом  $(m - 1)$  фиксированы. Матрица системы для  $u^*, v^*, p^*$  будет иметь вид (2), где меняется лишь выражение для  $R_2$ . А именно, в этом выражении исчезает положительное слагаемое  $r_t$ . Таким образом, в рассматриваемом случае мы имеем те же три корня (3), и каждый из них не превышает единицу. То есть, схема (4) безусловно устойчива.

Аналогично (1), (4) в рамках ИММ могут быть построены параллельные схемы для случая аппроксимации маршевых производных со вторым порядком [2], для задач о течениях сжимаемой жидкости [3], для трехмерных задач [4].

#### Список литературы

1. *Скурин Л.И.* Итерационно-маршевый (по пространству) метод решения задач механики жидкости и газа // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 6. С. 88-94.
2. *Skurin L. I.* Iterative Space-Marching Method for Incompressible and Compressible Full Navier-Stokes Equations // N. Satofuka (Ed.). Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, ICCFD, Kyoto, Japan. 10 — 14 July 2000. P. 319-324.
3. *Полянский А.Ф., Скурин Л.И.* Численное моделирование вязких до- и сверхзвуковых течений газа с использованием итерационно-маршевого метода // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№ 15). С. 111-115.
4. *Полянский А.Ф., Скурин Л.И.* Решение пространственных задач гидродинамики итерационно-маршевым методом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 2 (№ 8). С. 90-96.

## Н-теорема для сложных сред

В. А. Цибаров, Е. В. Цибарова

(fluid@niimm.spb.su)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Университет Северной Каролины, США

К сложным средам (системам) можно отнести смеси газов, газогидровзвеси, кровь, буровые растворы, легочную паренхиму, биологические и экономические системы и т.п. В качестве математической модели принимается обобщение стохастических моделей работ [1,2], представляющих собой системы уравнений Фоккера – Планка с источником. Модели цитируемых работ учитывают не только парные "мгновенные" взаимодействия объектов, но и их тройные, однодвухчастичные, двух-трехчастичные взаимодействия и эффект вырожденности состояний системы, а модель из [2] — еще и однодвухчастичные взаимодействия. Предлагаемое обобщение позволяет учесть *частичность* вырождения системы, что иллюстрируется двумя квазиравновесными статистиками: распределение населения по доходам и занятости в момент времени  $t$ ; квазиравновесная заселенность  $n_v$  колебательных уровней с учетом ангармонизма колебаний.

Стохастическая модель должна допускать выход системы на полное или частичное равновесие. Обоснованию этого служит Н-теорема. Условия ее выполнимости ослаблены по сравнению с [1,2]. Она приведена здесь в виде двух теорем.

**1. Стохастическая система.** Пусть  $f_i(\mathbf{x}_i \in R^n, t)$  — одночастичные функции распределения объектов сорта  $i$ ,  $\mathbf{x}_i \in \omega_i$  — случайные индивидуальные переменные. Предлагаемая стохастическая модель отличается от моделей работ [1,2] только видоизменением множителя  $\varphi_i$ , обусловленного вырожденностью состояний системы. Поэтому эволюция системы описывается уравнениями

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i f_i) = J_i + J_q, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J_i &= J_i^{\text{bin}} + J_i^{\text{tr}} + J_i^{\text{bin-tr}} + J_i^{\text{un-bin}} + J_i^{\text{un-tr}}, \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{reg}} - \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{st}} = \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{div}} + \dot{\mathbf{x}}_i', \quad \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{st}} = h_i^{-1} \nabla \cdot (B_i h_i), \\ h_i &= f_i / (s_i \varphi_i), \quad \varphi_i = 1 + \vartheta_i f_i^{\text{D}}, \quad f_i = f_i^{\text{B}} f_i^{\text{D}}, \\ \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{reg}} &= \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{div}} + \dot{\mathbf{x}}_i^{(1)}, \quad \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}_i^{\text{div}} = 0, \quad \nabla = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

При этом  $\lim_{(\vartheta_i f_i) \rightarrow 0} \{(\ln \varphi_i) / (\vartheta_i f_i)\} = 1$ ,  $s_i$  — статистический вес. Тензоры "диффузии"  $B_i$  определяются по  $\dot{x}_i^{(1)}$ , исходя из условия полного или частичного равновесия, с помощью наиболее вероятных распределений, получаемых независимо методами статистической термодинамики [3,4]. Множители  $\varphi_i$  входят традиционным образом [1,2,5] в операторы  $J_i$ ,  $f_i^B$  — "больцмановский" множитель функции распределения (при возможности только полного вырождения  $f_i^B = 1$ ), а  $\vartheta_i = \delta_i / s_i$  (если  $f_i$  — плотность математического ожидания) или  $\vartheta_i = N \delta_i / s_i$  (если  $f_i$  — плотность вероятности),  $N$  — общее число объектов или общая числовая плотность (в зависимости от задачи). Параметр  $\delta_i = \pm 1$  для бозонов или фермионов, а для больцмановских объектов  $\delta_i = 0$ . В общем случае  $\delta_i$  — искомый параметр. Конкретный вид операторов  $J_i$  нам не потребуется. Их структуру можно найти в [1,2]. Источник  $J_q$  для биологических систем (в силу закона эволюции) берется со знаком минус, а для задач микроэкономики — со знаком плюс, т.к. он призван описывать постоянное создание предприятий малого бизнеса. В случае газозвесей  $J_q$  любого знака и совпадает с оператором  $J_{gr}$  рассеяния молекул газа частицами [1].

**2. Частично вырожденные квазиравновесные распределения.** Наиболее вероятные распределения, описывающие невырожденные или полностью вырожденные состояния системы, описываются статистиками [1,3,4]

$$f_i = s_i / \left\{ \exp \left( - \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_{\lambda} \psi_i^{(\lambda)} \right) - \delta_i \right\}.$$

Здесь  $\psi_i^{(\lambda)}$  — аддитивные инварианты,  $\gamma_{\lambda}$  — интенсивные параметры системы, подлежащие определению по ее экстенсивным параметрам или из макроскопических уравнений переноса.

При частичном вырождении состояния системы

$$\ln h_i = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \psi_i^{(\lambda)} \iff f_i = \bar{s}_i f_i^B / \left\{ \exp \left( - \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \gamma_{\lambda} \psi_i^{(\lambda)} \right) - \delta_i \right\}.$$

Выписанные здесь выражения для  $f_i$  максимизируют энтропию Больцмана и Шеннона. Приведем два примера таких статистик.

**2.1. Распределение населения по доходам и трудовой занятости.** Пусть  $p_i^0(E_i, L_i, t)$  — плотность вероятности распределения трудоспособного населения по доходам  $E_i$  и численности  $L_i$  лиц, за-

нятых трудовой деятельностью. Число рабочих мест  $N_w$  меньше общей численности трудоспособного населения  $N_a$ . Распределение по доходам  $f_i^B$  — экспоненциальное [2] со средним доходом  $\sigma$ . Поскольку одно рабочее место может быть занято только одним человеком, то  $p_i^D$  — статистика Ферми–Дирака ( $\delta_i = -1$ ). Поэтому

$$p_i^0 = \frac{\tilde{s}_i \exp(-x)}{\sigma Z (\exp(\gamma L_i) + 1)}, \quad Z = \sum_{i=1}^{N_a} \frac{\tilde{s}_i}{\exp(\gamma L_i) + 1}, \quad x = \frac{E_i}{\sigma}.$$

Для рассматриваемой задачи естественно считать  $\tilde{s}_i = 1$ . Если параметр  $\gamma$  задан, то мы имеем дело с контактным равновесием. В противном случае он определяется обычным образом по  $N_w$  и  $N_a$ .

При введении в рассмотрение вместо  $p_i$  плотности математического ожидания  $f_i^0$  имеем

$$f_i^0 = N_a p_i^0, \quad \sum_{i=1}^{N_a} \tilde{s}_i L_i / Z = N_w / N_a,$$

что и дает численное значение  $\gamma$ .

**2.2. Ангармонизм колебаний.** Ангармонизм колебаний приводит к нарушению максвелл–больцмановского распределения для заселенности  $n_v$  верхних колебательных уровней молекул. Будем считать, что это соответствует частичному вырождению состояний системы только относительно дополнительного "колебательного инварианта"  $\psi_v$ , где  $v$  — номер уровня. При нашем подходе  $n_v = n_\epsilon n_\psi$ , где  $n_\epsilon$  — распределение по внутренней энергии,  $n_\psi = f_v^B f_v^D$ . Пусть  $v_*$  — номер уровня, начиная с которого инвариант  $\psi_v$  практически горизонтален [4],  $\gamma_1 = \epsilon_1 / (kT_1)$ ,  $\epsilon_1$  и  $T_1$  — энергия и температура 1-го колебательного уровня,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\epsilon_v = \epsilon_1 E_v$  — энергия колебаний,  $\alpha_1 = \Delta\epsilon / \epsilon_1$  — отношение постоянной ангармонизма  $\Delta\epsilon$  к энергии первого колебательного уровня,  $\alpha = \alpha_1 (v_* - 1)$ . Предположим, что  $f_v^B(v) = \exp(-\gamma_1 v)$  при  $v \leq v_*$  и  $f_v^B = f_{v_*}^B(v) = \exp(-\gamma_1 v_*)$  при  $v \geq v_*$ . Функция  $E_v(v)$  и аддитивный инвариант для  $f_v^D$  определяются выражениями  $E_v(v) = v - \alpha_1 v(v-1) + \dots$ ,  $\psi_v = \epsilon_1 \Psi(v)$ ,  $\Psi(v) = \alpha v + b$ . Естественное предположение, что  $n_\psi(v=0) = 1$  и (подобно [4])  $n_\psi \rightarrow \exp\{-\gamma_1 E(v_*)\}$  при  $v \rightarrow \infty$ , определяет  $b$  и  $\delta_v$ . Это дает

$$n_\psi = \frac{F(v) \delta(v)}{(1 - \exp\{-\gamma_1 \alpha v_*\}) + \delta(v)}, \quad (2)$$

$$F(v) = \exp\{\gamma_1(\alpha - 1)v\}, \quad \delta(v) = \exp\{\gamma_1 \alpha (v - v_*)\}.$$



Здесь  $F = F(v)$  и  $\delta = \delta(v_*) = 1$  при  $v \leq v_*$ ,  $F = F(v_*)$  и  $\delta = \delta(v)$  при  $v \geq v_*$ . Эффективный "колебательный аддитивный" инвариант для псевдобольцмановской статистики  $\Psi_v^{\text{eff}} = -\gamma_1^{-1} \ln n_\psi$ . При  $\gamma_1 = 1$ ,  $v_* = 41$  и  $v_* = 53$  он удовлетворительно совпадает с полученным в [4] для значений введенного там параметра  $\alpha = 1/4, 1/8$ .

**3. H-теорема.** Результаты работ [3,4] позволяют энтропию ( $S$ ) сложной системы, допускающей вырожденность состояний, представить через функцию  $H$  в виде

$$S = -k H = -k \sum_i \int_{\omega_i} H_i f_i d\omega_i, \quad H_i = \{\ln h_i - (\ln \varphi_i) / (\vartheta_i f_i)\}.$$

Для физических систем коэффициент  $k$  совпадает с постоянной Больцмана, а для биологических и экономических систем  $k = 1$ . С учетом стохастических уравнений (1) и соотношений

$$\frac{\partial}{\partial t} (H_i f_i) = \ln h_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad \nabla (H_i f_i) = \ln h_i \nabla f_i, \quad \nabla \ln h_i = \frac{\nabla \ln \varphi_i}{\vartheta_i f_i}$$

легко получить равенство

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (H_i f_i) + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i H_i f_i) \right\} d\omega_i = \\ &= \sum_i \int \left\{ \ln h_i (J_i + J_q) - \frac{\ln \varphi_i}{\vartheta_i} (\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}_i') \right\} d\omega_i. \quad (3) \end{aligned}$$

Из интегральной леммы, доказанной в [2], следует неравенство  $\sum_i \int \ln h_i J_i d\omega_i \leq 0$ . Равенство соответствует равновесию (квазиравновесию) в системе. Если тензоры  $B_i$  определяются по стационарному квазиравновесному распределению  $f_i^0$ , то (см. [2])  $\dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}_i^0(t) - B_i \cdot \nabla (h_i/h_i^0)$ , а в  $H_i$  следует заменить  $\ln h_i$  на  $\ln (h_i/h_i^0)$ . Преобразование (3) с учетом теоремы Остроградского – Гаусса дает

$$\frac{dH}{dt} = - \sum_i \int f_i B_i : \left( \nabla \ln \frac{h_i}{h_i^0} \right) \left( \nabla \ln \frac{h_i}{h_i^0} \right) d\omega_i + Q - Q_n, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{Q} + \sum_i \int \ln \left( \frac{h_i}{h_i^0} \right) J_i d\omega_i, \quad Q_n = \sum_i \int_{\partial\omega} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \frac{\ln \varphi_i}{\vartheta_i} dS, \\ \tilde{Q} &= \sum_i \int \left\{ \ln \left( \frac{h_i}{h_i^0} \right) J_q + \left( 1 - \frac{f_i}{f_i^0} \right) \nabla \cdot \left( \dot{\mathbf{x}}_i^0 \frac{\ln \varphi_i}{\vartheta_i} \right) \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Первая сумма в (4) отрицательна, если тензор  $B_i$  симметричен и для его компонент выполнены условия Сильвестера положительной

определенности квадратичной формы. Соотношения (3) и (4) позволяют сформулировать Н-теорему в форме двух теорем.

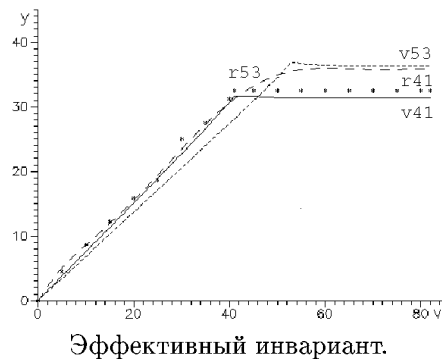
**Теорема 1.** При любых тензорных коэффициентах  $B_i$  изменение Н-функции со временем не превосходит ее изменения, обусловленного пространственно распределенными источниками  $J_q$  и изменением фазового объема. Если пространственный источник отсутствует или отрицателен, а фазовый объем расширяется или постоянен, то  $dH/dt \leq 0$ . Знак равенства соответствует полному или частичному равновесию системы.

**Теорема 2.** Если тензорные коэффициенты  $B_i$ , входящие в операторы Фоккера – Планка, симметричны и удовлетворяют условию Сильвестера положительной определенности квадратичной формы, то  $dH/dt \leq \tilde{Q} - Q_n$ , где  $\tilde{Q}$  и  $Q_n$  определены выражениями (4). Если, кроме того, источник  $\tilde{Q}$  отрицателен или отсутствует, число элементов, пересекающих границу области заданная  $\mathbf{x}_i$ , можно пренебречь, то  $Q_n = 0$  и  $dH/dt \leq 0$ . Знак равенства соответствует равновесию или квазиравновесию системы.

Если  $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{r} \in R^m, \mathbf{y}_i\}$ ,  $\mathbf{r} \in V$ ,  $\mathbf{y}_i \in \Omega_i$ ,  $f_i \in \partial\Omega_i = 0$ , то обобщение аналога теорем из [4] для  $H$  и ее плотности  $\bar{H} = \sum_i \int_{\Omega_i} H_i f_i d\Omega_i$  внутри  $V$  очевидно: к правым частям неравенств добавляется член

$$Q_0 = \int_V \bar{Q} dV, \quad \bar{Q} = \sum_i \int_{\Omega_i} \left\{ \ln h_i J_q - \frac{\ln \varphi_i}{\vartheta_i} (\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}}'_i) \right\} d\Omega_i,$$

имеющий тот же смысл, что и в теореме 1.



Здесь введены обозначения:  
v41 — эффективный инвариант при  $v_* = 41$ ,  
v53 — эффективный инвариант при  $v_* = 53$ ,  
r41 — инвариант Рыцалевской [4] при  $v_* = 41$ ,  
r53 — инвариант Рыцалевской [4] при  $v_* = 53$ .

### Список литературы

1. Цибаров В. А. Кинетический метод в теории газовзвесей. СПб, 1997. 192 с.
2. Цибаров В. А., Цибарова Е. В. Стохастическая модель сложных сред // *Аэродинамика* / Под ред. Р. Н. Мирошина — СПб, 2002. С. 90-111.
3. Жаров В. Т., Рыдалевская М. А. Статистические распределения и частичные химические равновесия в газовой фазе // *Журнал физ. химии*. 1982. Т. 56. № 9. С. 2141–2145.
4. Рыдалевская М. А. Статистические и кинетические модели в физико-химической газодинамике: Автореф. докт. дисс. СПб, 1997. 30 с.
5. Гиришфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд З. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., 1961. 929 с.

## Секция IV. Механика деформируемого твёрдого тела

### Механические аспекты развития глаукомы

*С. М. Бауэр*

(Svetlana.Bauer@podox.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Известно, что при повышении внутриглазного давления (ВГД) атрофия зрительного нерва происходит в области решетчатой пластинки глаза. Решетчатой пластинкой (РП) называется участок склеры недалеко от заднего полюса глаза, на котором через множество мелких отверстий проходят пучки зрительного нерва. РП играет важную роль в балансе внутриглазного и внутричерепного давлений. "В норме уровни давления по одну и по другую сторону от РП диска зрительного нерва различны, и со стороны глаза мембрана испытывает постоянно вдвое большее механическое воздействие" [1]. На данный момент не существует единого мнения, объясняющего развитие глаукомы. С середины прошлого века существуют две точки зрения на этот процесс. Одни ученые выступают за признание механического генезиса атрофии зрительного нерва. Другие — за ишемическую (сосудистую) природу этого заболевания. В настоящее время сохраняются обе эти точки зрения, однако "роль механического фактора" признается и сторонниками ишемической концепции.

В ряде работ деформация РП глаза изучалась на основе экспериментальных данных и клинических наблюдений. Представляет также интерес построение математических моделей, адекватно описывающих поведение РП при изменении ВГД.

Основной проблемой на пути аналитического исследования РП является отсутствие точных данных о ее механических характеристиках. При расчетах напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин обычно последние заменяют некоторыми сплошными пластинами с приведенными параметрами, которые определяются из условия, что средние перемещения "приведенной" и перфорированной пластины при одинаковых нагрузках являются одинаковыми. Имеющиеся в литературе данные о средней глубине экскавации диска зрительного нерва при фиксированных значениях ВГД позволяют оценить приведенный модуль упругости РП.

Экспериментальные данные, представленные в [2], показывают, что увеличение ВГД практически не меняет размеры склерального канала, через который проходит оптический нерв. Кроме того, РП существенно мягче склеры — основной оболочки глаза. (Она в 5-6 раз тоньше и, кроме того, ослаблена множеством отверстий). В связи с этим удобно рассматривать РП как круглую или близкую к круглой пластину с жестко заделанным краем.

В [3] по прикладной программе ADINA проведено сравнение решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и РП) и отдельно задачи о деформации пластинки под действием нормального давления. Оболочка глаза моделируется упругой изотропной сферической оболочкой постоянной толщины  $H = 1$  мм и радиуса  $R = 12$  мм, а РП — изотропной пластиной постоянной толщины  $h = 0.2$  мм и радиуса  $r = 0.75$  мм. В расчетах полагалось, что модуль упругости склеры  $E = 14.3$  МПа, коэффициент Пуассона принимался равным 0.4. Модуль упругости пластины принимался на порядок меньшим  $E_p = 1.43$  МПа. Сравнение результатов, полученных для составных оболочек и упрощенных задач, в которых влияние сферической оболочки игнорируется, показывает, что, как и отмечается в экспериментах [2], диаметр склерального кольца меняется мало. Изменение радиуса РП на порядок меньше, чем величина ее прогиба, разница в значениях максимальных прогибов не превосходит 2 %. Таким образом, деформацию РП можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки. Такой подход облегчает учет особенностей строения РП — ее анизотропию и неоднородность.

При моделировании РП рассматривается как трансверсально-изотропная неоднородная по радиусу и по углу круглая пластинка. Расчеты деформаций РП под действием нормального давления про-

водились в рамках общей линейной уточненной теории С. А. Амбарцумяна [4] и в рамках новой уточненной итерационной теории деформаций анизотропных пластин [5]. Все проведенные расчеты показывают, что нервные волокна подвергаются сдавливанию и сдвигу, причем наиболее существенными являются деформации сдвига вертикального элемента.

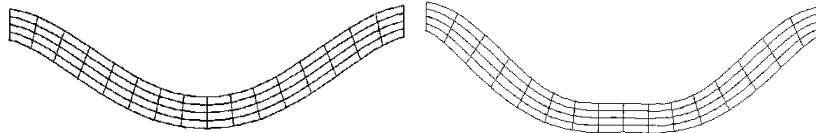


Рис. 1.

Рис. 2.

Если "отверстия" расположены равномерно по всей пластине и модуль упругости можно считать постоянным, то в этом случае прогиб деформированной пластины при давлении 50 мм рт. ст. имеет форму, представленную на рис. 1. Если число "отверстий" (или площадь, ими занимаемая) увеличивается при приближении к краю пластины, что характерно для большинства людей, модуль упругости убывает при приближении к краю, и прогиб деформированной пластины имеет форму, представленную на рис. 2. Такое строение РП ведет к большим деформациям сдвига и, таким образом, к большому нарушению зрительных функций на периферии.

В центре пластины деформации незначительны, они на два-три порядка меньше, чем на краю. Наибольшие деформации каналов наблюдаются на расстояниях от  $2/3 R$  до  $R$  от центра пластины. Поэтому при возрастании внутриглазного давления атрофия нервно-зрительных волокон, вызванная сдвигом волокон и их сдавливанием, происходит, в первую очередь, вблизи края пластины.

Как отмечается в [1], у подавляющего большинства людей РП имеют неравномерную по углу механическую структуру, причем более плотной являются "височная и носовая" (горизонтальная) часть, а наиболее слабыми являются ее верхние и нижние области (вертикальная часть). Особенности такой структуры может передать модуль упругости вида  $E(r, \tau) = E_1(r) + E_2(r) \cos 2\theta$ . На рис. 3 и 4 представлены полные прогибы трансверсально-изотропных и изотропных неоднородных пластин. При изгибе под действием нормального давления трансверсально-изотропные пластины имеют более гладкую

поверхность в окрестности жестко зацементированного края. Как отмечают офтальмологи, "зоны преимущественного распространения глаукоматозной экскавации – верхе- и нижневисочные отделы" [1].

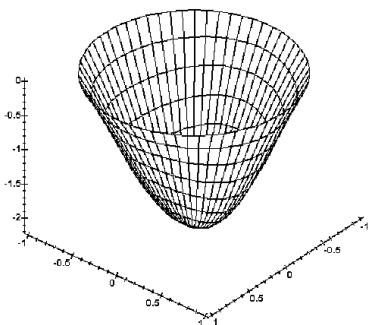


Рис. 3.

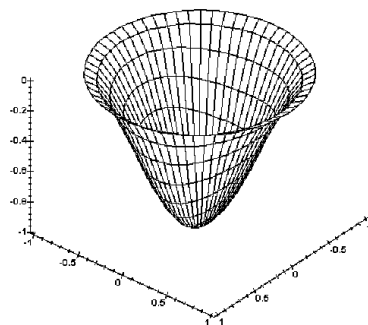


Рис. 4.

На рис. 5 представлены линии уровня функции, характеризующей деформации сдвига. Эти результаты находятся в соответствии с данными, представленными в [1]. У больных глаукомой отмечено "преобладание вертикальной величины диаметра экскавации диска над горизонтальной". На рис. 6 приведена картинка, которая в учебниках по офтальмологии характеризует сужение поля зрения человека при глаукоме.

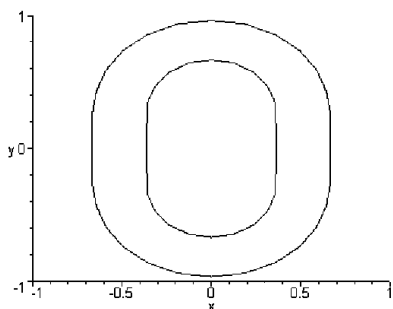


Рис. 5.

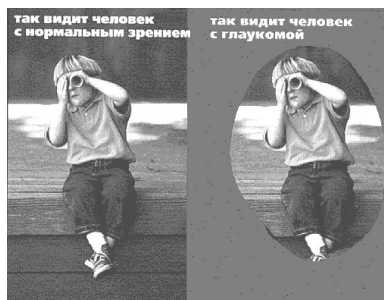


Рис. 6.

Сравнение рис. 5 и 6 показывает, что, по-видимому, атрофия зрительного нерва наступает при достижении касательными усилиями некоего критического значения, что соответствует изменению поля

зрения при глаукоме, представленному на рис. 6 и, таким образом, подтверждает механическую концепцию происхождения глаукомы и показывает, что большая неоднородность по углу ведет к большей предрасположенности к глаукоматозным повреждениям.

Изучение деформаций РП, проведенное на основе моделей однослойных пластин, не позволяет объяснить тот факт, что по данным офтальмологов атрофия зрительного нерва при изменении ВГД возникает на "наружном слое", на уровне заднего края РП склеры. По описаниям офтальмологов РП состоит из нескольких слоев ткани, имеющих отверстия круглой формы. В связи с этим рассматривались большие осесимметричные деформации многослойной безмоментной оболочки вращения с упругими связями между слоями. Расстоянием между слоями пренебрегаем. Предполагая, что слои могут проскальзывать друг по другу, напряжения касательного взаимодействия слоев оболочки принимаем в виде  $q_1^k = \alpha_k (s_0^{k+1} - s_0^k)(r - r_*)$ , где функции  $s_0^k(s)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , указывают дуговую координату точки  $s$   $k$ -го слоя до деформации. На краю пластины приняты условия упругой заделки слоев  $T_1^k = c_k (s - s_0^k)$  при  $r = r_*$ .

Параметры жесткости  $c_k$  могут быть различными для разных слоев, и, судя по описанию структуры решетчатой пластинки, последний "наружный" лист решетчатой пластинки имеет наиболее жесткие граничные условия:  $c_N > c_k$  при  $k < N$ .

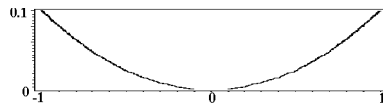


Рис. 7.



Рис. 8.

Расчеты проводились для двух- и трехслойных пластин при различных параметрах  $c_k$  и  $\alpha_k$ . В широком диапазоне изменения этих параметров при учете особенностей строения решетчатой пластинки (последний "наружный" слой является "более плотным и массивным", а также более жестким [1]) получается, что наиболее сильные относительные смещения происходят на уровне последнего слоя, причем эти смещения увеличиваются к краю пластины. Это соответствует тому факту, что начальные дистрофические изменения в нервных волокнах определяются на уровне заднего края решетчатой пластинки склеры.



На рис. 7 представлен прогиб пластины при  $c_k/E_p = 0.03$ ,  $k = 1, 2$ ;  $c_3/E_p = 0.04$ . На рис. 8 представлена фотография прогиба решетчатой пластины при глаукоме. Таким образом, причиной развития глаукомы может быть смещение слоев РП.

Как одна из возможных причин развития глаукомы рассматривается также потеря устойчивости осесимметричного состояния РП.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00234).

### Список литературы

1. Нестеров А.П. Глаукома. М., 1995. 256 с.
2. Yan D. B., Coloma F. M., Metheerairut A. et al. Deformation of the lamina cribrosa by elevated intraocular pressure // British Journal of Ophthalmology, 1994. P. 643-648.
3. Bauer S.M., Romanova A.A., Smirnov A.L. On formulation of the problem on deformation of the Lamina Cribrosa // Russian Journal of Biomechanics, 2001. Vol. 5,(3). P. 18-22.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., 1987. 360 с.
5. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб., 1996. 280 с.

### Напряженно-деформированное состояние в клапанном аппарате сердца при внешнем воздействии

П. И. Бегун

(begun@fromgu.com)

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Россия

В последние два десятилетия сформировалось новое направление в кардиологии — рентгенохирургия клапанов сердца. В процессе операции производится расширение суженных отверстий трикуспидального, митрального, аортального и легочного клапанов баллонным дилататором. Моделирование дилатируемых структур — неотъемлемая часть системы предоперационной диагностики этих операций.

Расчетные схемы для исследования напряженно-деформированного состояния при дилатации клапанов построены при следующих

допущениях (обоснование принятых допущений приведено в [1]): материал клапанных структур отвечает условиям сплошности, однородный и изотропный, начальные напряжения в структурах отсутствуют. Вычисления проведены при использовании программ Solid Works и Cosmos Works, при разбиении моделей структур клапанного аппарата на 120 тысяч конечных элементов. Число введенных конечных элементов до 120 тысяч существенно влияет на результат.

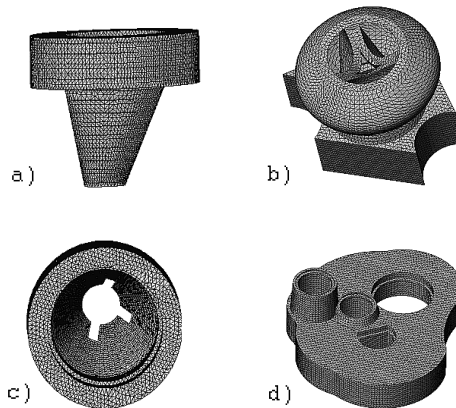


Рис. 1. Конечно-элементные модели митрального (а), аортального(б), трикуспидального (с) клапанов и атриовентрикулярной перегородки (d)

Дальнейшее увеличение числа конечных элементов на результатах вычислений сказывается незначительно. Для рассматриваемых математических моделей необходим компьютер класса не ниже, чем Pentium III 750 МГц, с объемом оперативной памяти не менее 512 Mb и объемом жесткого диска не менее 20 Gb. Расчет каждой из моделей на компьютерах подобного класса, при разбиении на 120 тысяч элементов, занимает порядка 10 — 20 минут.

Положительный исход операционной коррекции клапанов определяется разрушением их по комиссурам и созданием отверстия, достаточного для выполнения клапаном физиологических функций. При использовании эхокардиограмм, выполненных до и после операции, и результатов вычислений по разработанному алгоритму определены величины допускаемых напряжений в комиссурах клапанов

по закону распределения случайных величин по Стьюденту при обработке небольшого числа измерений (по пять операций на каждом клапане). Например, в митральных клапанах математическое ожидание допускаемых напряжений в комиссурах — 1,83 МПа. С доверительной вероятностью  $p = 0,9$  погрешность оценки допускаемых напряжений для материала комиссур составляет 16%.

Значения отсутствующих в литературе механических свойств трикуспидального клапана спрогнозированы, исходя из физиологической целесообразности значений параметров этих структур в правой и левой частях сердца — равной надежности митрального и трикуспидального клапанов в неповрежденном сердце: величина модуля нормальной упругости трикуспидального клапана в два раза меньше модуля нормальной упругости митрального клапана, а допускаемое напряжение меньше в 4 раза. Механические свойства аортального клапана введены в соответствии с [2]. Диапазон геометрических параметров структур клапанов задан в соответствии с данными клинической анатомии сердца [3].

Исследовано влияние на результаты коррекции клапанного отверстия высоты створок и комиссур, толщины, ширины и модуля нормальной упругости патологически измененных створок и диаметра фиброзного кольца. Например, 1) при изменении модуля нормальной упругости задней створки трикуспидального клапана от 5 МПа до 15 МПа при постоянном значении модулей упругости двух других створок 10 МПа величина дилатированного отверстия уменьшается от 3,3 см<sup>2</sup> до 2,7 см<sup>2</sup>, а расстояние от вершины трикуспидального клапана до зоны разрушения — от 8,5 мм до 7 мм; 2) при изменении модуля нормальной упругости задней створки митрального клапана от 10 МПа до 30 МПа при постоянном значении модуля упругости другой створки 20 МПа величина дилатированного отверстия уменьшается от 2,26 см<sup>2</sup> до 1,24 см<sup>2</sup>, а расстояние от вершины митрального клапана до зоны разрушения — от 6,2 мм до 4,3 мм; 3) при увеличении высоты створки трикуспидального клапана от 20 до 30 мм, величина дилатированного отверстия уменьшается от 3,4 см<sup>2</sup> до 2,3 см<sup>2</sup>, а расстояние от вершины клапана до зоны разрушения — от 7,1 мм до 4,8 мм. Погрешность предоперационной диагностики размеров дилатированных клапанных отверстий по отношению к результатам их клинической коррекции составляет 35 %.

## Список литературы

1. Бегун П. И. Гибкие элементы медицинских систем. СПб.: Политехника, 2002. 300 с.
2. Сагалевич В.М., Завалишин Н.Н. и др. Перемещения и усилия в элементах клапанно-аортального комплекса в диастолу и систолу // Механика композитных материалов. 1985. № 1. С. 114-123.
3. Михайлов С.С. Клиническая анатомия сердца. М.: Медицина, 1987. 288 с.

## Осевое сжатие конической оболочки из разномодульного материала

*И. В. Викторов*

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

**1. Введение.** Рассматривается осевое сжатие конической оболочки, изготовленной из материала, по разному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Систематическому изложению разномодульной теории упругости посвящена книга [1]. Такой материал получается, в частности, при армировании изотропной матрицы упругими нитями с учетом того, что нити не работают на сжатие. Другим примером разномодульного материала является бетон, плохо сопротивляющийся растяжению. Основные уравнения для оболочки, армированной упругими нитями, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию, были получены в статье [2].

При осевом сжатии конической оболочки в средней ее части материал сжат, а напряженное состояние близко к безмоментному. Однако в окрестностях крайних параллелей реализуется напряженное состояние типа краевого эффекта, при котором имеются интенсивные изгибные деформации и некоторые волокна оказываются растянутыми. В результате для разномодульного материала задача построения напряженного состояния оказывается нелинейной даже при небольших нагрузках.

**2. Определяющие соотношения.** Оболочка, подкрепленная двумя системами волокон, наклоненных под углами  $\theta_1 = \theta$  и  $\theta_2 = -\theta$  к образующей, сжимается вдоль оси. Напряжения в оболочке  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(k)}$  представляют собой сумму напряжений в матрице  $\sigma_{ij}^{(0)}$

и осредненных напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$ , связанных с растяжением-сжатием волокон. Поскольку задача симметричная, то  $\sigma_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Запишем соотношения между напряжениями  $\sigma_{ii}$  и деформациями  $\varepsilon_{ii}$  при  $i = 1, 2$ . Для изотропной матрицы они имеют вид

$$\sigma_{11}^{(0)} = F_0(\varepsilon_{11} + \nu_0\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22}^{(0)} = F_0(\varepsilon_{22} + \nu_0\varepsilon_{11}), \quad (1)$$

где  $F_0 = E_0\delta_0/(1-\nu_0^2)$ ,  $E_0$  — модуль Юнга и  $\nu_0$  — коэффициент Пуассона для матрицы. Коэффициент  $\delta_0 < 1$  определяет относительный объем оболочки, занятый матрицей. Случай  $\delta_0 = 1$  соответствует неподкрепленной оболочке.

Напряжения от нитей

$$\sigma_{ii}^{(k)} = 2C_i\sigma^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

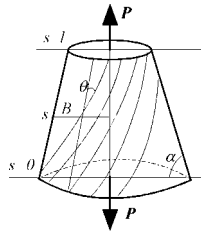
где  $\sigma^{(k)}$  — напряжения вдоль нитей,  $C_1 = \cos^2\theta$ ,  $C_2 = \sin^2\theta$ .

В соответствии с гипотезами Кирхгофа деформации  $\varepsilon_{ij}$  являются линейными функциями координаты  $z$ , являющейся расстоянием от срединной поверхности оболочки

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \kappa_1 z, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \kappa_2 z. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — деформации растяжения-сдвига, а  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — деформации изгиба-кручения срединной поверхности оболочки. Деформации волокон  $\varepsilon^{(k)} = C_1\varepsilon_{11} + C_2\varepsilon_{22}$ , где  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  те же, что и в (3).

Вводится следующая модель волокна:



$$\sigma^{(k)} = \begin{cases} F^k \varepsilon^{(k)}, & \varepsilon^{(k)} \geq 0, \\ 0, & \varepsilon^{(k)} < 0, \end{cases} \quad F_k = E_k \delta_k, \quad (4)$$

т.е. волокна не сопротивляются сжатию в продольном направлении. Здесь  $E_k$  — модуль Юнга нитей, а  $\delta_k$  — относительный объем, заполненный волокнами.

Деформации  $\varepsilon^{(k)}(z)$  являются линейными функциями от  $z$ :  $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon_m + \kappa^{(k)}z$ , где  $\varepsilon_m = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2$ ,  $\kappa^{(k)} = C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2$ , а функции  $\sigma^{(k)}(\varepsilon^{(k)})$  определяются равенством (4). Здесь  $\varepsilon_m$  — деформация растяжения-сжатия вдоль волокон. Пусть  $\varepsilon_b = |\kappa^{(k)}| h/2$  — максимальное значение второго слагаемого в выражении для  $\varepsilon^{(k)}$ , соответствующего деформациям изгиба.

Возможны следующие три случая.

1) Если  $\varepsilon_m \geq \varepsilon_b$ , то волокна растянуты при всех значениях  $z$ , и мы приходим к формулам, где деформации  $\varepsilon_j$  и  $\kappa_j$  действуют независимо, а именно,

$$T_i = \sum_{j=1}^2 K_{ij} \varepsilon_j, \quad M_i = \sum_{j=1}^2 D_{ij} \kappa_j, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Коэффициенты  $K_{ij}$  и  $D_{ij}$  определены в [2] и задаются формулами

$$\begin{aligned} K_{11} &= K(1 + \gamma C_1^2), & D_{11} &= D(1 + \gamma C_1^2), \\ K_{12} &= K_{12} = K(\nu_0 + \gamma C_1 C_2), & D_{12} &= D_{12} = D(\nu_0 + \gamma C_1 C_2), \\ K_{22} &= K(1 + \gamma C_2^2), & D_{22} &= D(1 + \gamma C_2^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Здесь } \gamma = \frac{E_k \delta_k (1 - \nu_0^2)}{E_0 \delta_0}, \quad K = \frac{E_0 h \delta_0}{1 - \nu_0^2}, \quad D = \frac{E_0 h^3 \delta_0}{12(1 - \nu_0^2)}.$$

Параметр  $\gamma$  имеет смысл отношения жесткости на растяжение волокон к жесткости матрицы ( $\gamma = 0$  соответствует изотропной оболочке).

2) В промежуточном случае  $|\varepsilon_b| < \varepsilon_m$  волокна сопротивляются сжатию только в части объема оболочки. Тогда  $T_i = T_i^{(0)} + T_i^{(k)}$ ,  $M_i = M_i^{(0)} + M_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ . Здесь  $T_i^{(k)}$  и  $M_i^{(k)}$  — усилия и моменты в нитях, а  $T_i^{(0)}$  и  $M_i^{(0)}$  — усилия и моменты в матрице, которые вычисляются по формулам (5) и (6) при  $\gamma = 0$ . В этом случае как усилия  $T_j^{(k)}$ , так и моменты  $M_j^{(k)}$  зависят и от деформаций растяжения-сжатия  $\varepsilon_j$ , и от деформаций изгиба-кручения  $\kappa_j$ . Если волокна равномерно распределены по толщине оболочки, то получаем [3]

$$T_j^{(k)} = C_j F_k \delta_k \frac{(\varepsilon_m + \varepsilon_b)^2}{2|\kappa|}, \quad M_j^{(k)} = C_j F_k \delta_k \frac{(\varepsilon_m + \varepsilon_b)^2}{6\kappa|\kappa|} (2\varepsilon_b - \varepsilon_m). \quad (7)$$

Эти равенства справедливы как для  $\kappa > 0$ , так и для  $\kappa < 0$ . Соотношение (7) не используется при  $\kappa = 0$ , поскольку тогда имеют место только случаи 1 или 3.

3) Если  $\varepsilon_m \leq -\varepsilon_b$ , то волокна не сопротивляются сжатию и в этом случае  $T_j^{(k)} = M_j^{(k)} = 0$ .

**3. Сжатие конической оболочки.** Три уравнения равновесия оболочки запишем в виде [4]

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{ds} + \frac{B'}{B}(T_1 + T_2) &= 0, & (') &= \frac{d}{ds}, \\ \frac{dQ_1}{ds} + \frac{B'}{B}Q_1 + \frac{T_2}{R_2} &= 0, & R_2 &= \frac{B}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \frac{B'}{B}(M_1 - M_2) + Q_1 = 0, \quad B = R - s \cos \alpha,$$

где  $s$  — длина дуги меридиана. Форму срединной поверхности характеризуют функции  $B(s)$ ,  $R_2(s)$ ,  $\alpha$ . Здесь  $B(s)$  — расстояние от точки срединной поверхности оболочки до оси вращения,  $R_2(s)$  — главный радиус кривизны,  $\alpha$  — угол конусности.  $Q_1$  — перерезывающая сила.

На краях  $s = 0$  и  $s = l$  ставим граничные условия жесткого закрепления

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad T_1 = P/(2\pi B \sin \alpha), \\ w_R(0) = 0, \quad w_R(l) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w'(l) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

**4. Безмоментное решение.** Напряженное состояние в средней части оболочки достаточно точно характеризует безмоментное решение (10):

$$T_1 = \frac{P}{2\pi B \sin \alpha}, \quad T_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\varepsilon_1 \quad (10)$$

В этом случае уравнение границы области работы нитей имеет вид  $\varepsilon^{(k)} = 0$ , откуда находится угол наклона нитей к образующей (11), при котором они перестают работать на растяжение в оболочке:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = 1/\nu_0. \quad (11)$$

Если угол больше данного значения, то волокна могут работать только в области краевого эффекта.

**5. Зоны краевого эффекта.** Перепишем систему (8) в перемещениях, предполагая, что нити линейно упругие (т.е. случай 1)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{ds^2} - p \frac{du}{ds} + a_{11} p \frac{dw}{ds} + a_{10} p^2 (u + w) = 0, \\ \mu^4 \left( \frac{d^4 w}{ds^4} + a_{23} p \frac{d^3 w}{ds^3} + \dots \right) + a_{21} p \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{du}{ds} + a_{20} p (u + w) \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\mu$  — малый параметр,  $a_{ij}$  — коэффициенты, не зависящие от  $s$ . Причем  $p(s) = \cos \alpha / (R - s \cos \alpha)$ ,  $\mu^4 = (h^2)/(12R^2)$ . Тогда безмоментное решение будет иметь вид

$$u_0 = c_1 \ln p + c_2, \quad w_0 = -c_1 \ln p - (c_2 + c_1/a_{20}), \quad (13)$$

а с добавлением интегралов краевого эффекта:

$$u = u_0 + \frac{a_{11} \mu p^{\beta+1}}{\lambda \sqrt{2}} (-c_3 + c_4) \cos s_1 + (c_3 - c_4) \sin s_1 e^{s_1} +$$

$$+((c_5 - c_6) \cos s_2 + (c_5 + c_6) \sin s_2)e^{s_2}, \quad (14)$$

$$w = w_0 + p^\beta (c_3 \cos s_1 + c_4 \sin s_1)e^{s_1} + (c_5 \cos s_2 + c_6 \sin s_2)e^{s_2},$$

$$\text{где } s_1 = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_0^s \lambda ds, \quad s_2 = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_l^s \lambda ds, \quad \lambda = \sqrt[4]{(a_{20} - a_{11})a_{21}p^2(s)},$$

$\beta$  — параметр зависящий от  $\gamma$  и  $\theta$ , а  $c_i$  — константы, которые находятся из условий (9).

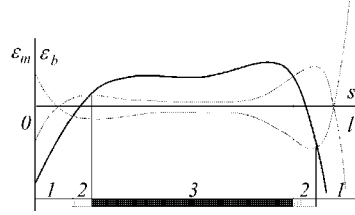


Рис. 1.  $\theta = 70^\circ$

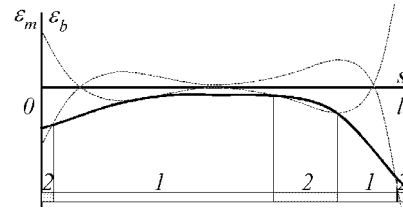


Рис. 2.  $\theta = 55^\circ$ .

Теперь, используя решение (14), можно определить, как ведут себя волокна при определенном значении  $s$  в зависимости от угла их намотки  $\theta$ . Так, при горизонтально расположенных нитях ( $\theta = 90^\circ$ ) они практически везде растянуты. С уменьшением  $\theta$  на краях оболочки постепенно увеличиваются участки, где нити не работают или работают не по всей ее толщине, а затем такие участки появляются и вдали от краев оболочки (11).

На рис. 1 и 2 построены графики  $\varepsilon_b(s)$ ,  $-\varepsilon_b(s)$  (пунктиром) и  $\varepsilon_m(s)$  (сплошной линией) для  $\theta = 70^\circ$ ,  $\theta = 55^\circ$  и показано, какой интервал оболочки к какому случаю поведения нитей относится. Полученные результаты не являются достаточно точными, т.к. деформации  $\varepsilon_b(s)$  и  $\varepsilon_m(s)$  были получены для линейно упругих нитей, но дают возможность судить о поведении волокон при осевом сжатии конической оболочки.

### Список литературы

1. Амбарцумян. С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320с.
2. Haseganu E. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E. Buckling of Thin Anisotropic Shell // *The Transactions of the CSME* 24(1B). 2000. P. 169-178.
3. Смирнов А. Л., Товстик П. Е. Тонкие оболочки, подкрепленные



нелинейно-упругими нитями // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб, 2002. С. 277-282.

4. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Л., 1962. 432 с.

### **Об исследовании функционально-механических свойств сплава TiNi при статических и ударных динамических испытаниях малых образцов**

*А. А. Груздков<sup>1</sup>, С. И. Кривошеев<sup>2</sup>, Ю. В. Петров<sup>3</sup>, А. И. Разов<sup>3</sup>,  
А. А. Уткин<sup>3</sup>, Г. Д. Федоровский<sup>3</sup> (G.Fed@podox.spbu.ru)*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный технологический университет

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Никелид титана – материал способный проявлять эффект памяти формы, заключающийся в возврате предварительной остаточной деформации при последующем нагревании, которая является следствием структурных изменений в материале и имеет характерный период развития вследствие релаксационных процессов, происходящих при деформации [1]. Он начинает проявляться, когда длительность нагружения становится соизмеримой с характерным временем релаксации.

Определение параметров, описывающих динамические свойства материала, требует знания напряженного состояния в образце в течение всего времени нагружения. Следовательно, для анализа результатов динамических испытаний следует выбирать такие схемы нагружения, которые соответствуют задачам механики, допускающим аналитическое решение. Методы испытаний материалов в условиях кратковременного нагружения подразделяют на "динамические" и "квазистатические". В испытаниях первого типа размеры образцов выбираются достаточно большими, чтобы время пробега волн по образцу превосходило время, необходимое для качественного изменения свойств материала (разрушения, перехода в пластическое состояние, фазовых превращений и т. д.). Напряженное состояние в образце определяется из решения волновой задачи.

В данной работе был применен альтернативный подход. В проведенных испытаниях размеры образцов были выбраны достаточно

малыми, чтобы за счет многократного отражения волн в образце за время действия нагрузки реализовывалось напряженное состояние, близкое к однородному. В этом случае для анализа результатов эксперимента можно воспользоваться решением соответствующей квазистатической задачи.

**1. Описание и результаты экспериментов.** В опытах использовали проволочные образцы диаметром 2 мм из сплава TiNi марки ТН-1. Испытания проводились по схеме трехточечного изгиба. Сосредоточенная нагрузка, действующая на середину образца, создавалась следующим образом. Нагружающий импульс передавался на образец через стальную треугольную призму-ударник, имеющую следующие размеры: боковая грань, на которую передавалось давление –  $10 \times 20$  мм, расстояние от нее до ребра, контактировавшего с образцом – 6 мм. Нагружающий импульс генерировался магнитно-импульсной установкой емкостью 12 мкФ с запасаемой энергией до 15 кДж [2]. Установка позволяет формировать импульс давления в микросекундном интервале длительности с амплитудой до 2 ГПа. Тестирование посредством лазерного интерферометра показало соответствие импульса магнитного давления импульсу механической нагрузки, передаваемой в образец. Динамические испытания были дополнены квазистатическими, которые проводились на испытательных машинах Р-0.5 и РМУ-0.05. В экспериментах измеряли параметры импульса давления, передаваемого на ударник (амплитуда, длительность) и остаточный прогиб, полученный образцом. Форма импульса хорошо аппроксимируется квадратом синусоидальной функции. Проведено несколько серий испытаний, в которых варьировали расстояние между опорами ( $L$ ) и длительность импульса ( $T$ ).

По результатам экспериментов были построены зависимости остаточного прогиба ( $u_*$ ) от амплитуды силы, действовавшей на ударник:  $F = P_{\max} S$ , где  $S$  – площадь поверхности контакта шины и ударника ( $200 \text{ мм}^2$ ). Экстраполяцией на нулевое значение остаточного прогиба ( $u_* = 0$ ) определялось пороговое (минимальное) значение амплитуды нагрузки, при которой образец начинает деформироваться неупруго.

**2. Расчет напряжений.** Поставленная задача заключалась в том, чтобы построить зависимость критической амплитуды импульса напряжения, т.е. минимальной амплитуды напряжения, при которой в материале появляется макроскопическая остаточная деформа-

ция, от длительности нагружения. Для корректной интерпретации экспериментальных данных необходимо было учитывать инерционные свойства ударника, из-за которых длительности и амплитуды импульсов, действующих на образец, могли более чем на порядок отличаться от длительностей и амплитуды импульсов, действующих на ударник.

Для описания поведения образца воспользуемся моделью балки с одной степенью свободы. В линейно-упругом приближении сила реакции балки пропорциональна прогибу. Уравнение движения ударника в этом случае можно записать в виде  $m \cdot \ddot{u} = -k \cdot u + F(t)$ ,  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ , где  $u$  – прогиб,  $m$  – масса ударника,  $k$  – жесткость балки,  $F(t)$  – сила, действующая на ударник, которая задается соотношением

$$F(t) = \begin{cases} A \sin^2 \frac{\pi t}{t_1}, & t < t_1 \\ 0, & t \geq t_1 \end{cases}$$

где  $t_1$  – длительность импульса,  $A$  – амплитуда. Для свободных колебаний имеем:  $u = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t$ , где  $\nu = \sqrt{k/m}$  – собственная частота колебаний системы.

Движение под действием приложенной силы определяется уравнением

$$\ddot{u} + \nu^2 u = \frac{A}{2m} (1 - \cos \omega t), \quad \text{где } \omega = \frac{2\pi}{t_1}.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$u = C_1 \cdot \cos \nu t + C_2 \cdot \sin \nu t + \frac{A}{2k} \left( 1 + \frac{\cos \omega t}{(\omega/\nu)^2 - 1} \right).$$

Находя произвольные постоянные из начальных условий, получаем закон, по которому изменяется прогиб во время действия силы. Из полученного соотношения находим смещение и скорость в момент времени  $t_1$  (окончания действия силы). Эти значения используем в качестве начальных данных для уравнения, описывающего свободное (инерционное) движение. Учитывая, что сила реакции балки равна  $G(t) = u(t)k$ , получаем, что сила, действующая непосредственно на образец, задается соотношением

$$G(t) = \begin{cases} \frac{A}{\omega^2 - \nu^2} \left( \omega^2 \cdot \sin^2 \frac{\nu t}{2} - \nu^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right), & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ \frac{A}{1 - (\nu/\omega)^2} \sin \frac{\nu t_1}{2} \cdot \sin \nu \left( t - \frac{t_1}{2} \right), & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что продолжительность импульса и амплитуда импульса, действующего на образец, равны, соответственно,

$$t_2 = \frac{\pi}{\nu} + \frac{t_1}{2} \quad \text{и} \quad G_{\max} = \frac{A}{1 - (\nu/\omega)^2} \sin \frac{\nu t_1}{2}.$$

Из уравнения равновесия опертой балки [3] нетрудно получить, что  $u = (GL^3)/(48EJ)$ , где  $G$  – сосредоточенная сила, действующая на балку,  $L$  – расстояние между опорами,  $E$  – модуль Юнга,  $J$  – момент инерции.

Анализ полученных соотношений для балки круглого сечения показывает, что  $t_2$  определяется в основном значением  $L$  и слабо зависит от остальных параметров. Поэтому для того, чтобы эффективно варьировать длительность импульса, следует изменять расстояние между опорами.

Для определения критического напряжения в сечении балки в случае квазистатического нагружения достаточно рассмотреть задачу об упругопластическом изгибе опертой балки [4]. Нормальное напряжение в осевом направлении задается формулой

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_S \frac{y}{\zeta}, & |y| > \zeta, \\ \sigma_S \operatorname{sign} y, & |y| \leq \zeta. \end{cases}$$

Здесь  $x$  – ось балки,  $y$  – ось нагрузки,  $\zeta$  – расстояние от оси  $y = 0$  до пластической зоны,  $\sigma_S$  – предел текучести. Критическая нагрузка соответствует переходу всего центрального поперечного сечения в пластическое состояние, т.е.  $\zeta \rightarrow 0$ . Из равенства момента приложенной силы относительно опор изгибающему моменту балки получается соотношение  $\sigma_S = (3LG)/(2D^3)$ , где  $G$  – критическая нагрузка.

**3. Обсуждение результатов и выводы.** Длительность импульса нагрузки, действующего на образец, много больше времени пробега упругих волн по длине образца. Это оправдывает использование в расчетах поля напряжений в образце квазистатической модели. При длительности импульса, превышающей одну миллисекунду, критическое напряжение, полученное из результатов динамических испытаний, совпадает со значением, полученным по результатам статических испытаний. Для импульсов меньшей длительности точки в двойных логарифмических координатах хорошо описываются линейной функцией, т.е. зависимостью вида:  $\alpha \lg \sigma + \lg t = \text{const}$  или  $\sigma^\alpha \cdot t = \text{const}$ .

Отметим, что обработка результатов двух разных серий экспериментов дала очень близкие значения. Это свидетельствует в пользу надежности примененного метода определения реакции материала на динамическое воздействие.

После деформирования во время последующего нагревания все образцы демонстрировали эффект памяти формы – возврат остаточного прогиба. Это подтверждает то, что во всех случаях в процессе неупругого деформирования участвовали недислокационные механизмы — двойникование или переориентация мартенсита.

Таким образом, можно утверждать, что обнаружено два типа реакции материала на импульсное нагружение, имеющие "квазистатический" и выраженный "динамический" характер. При квазистатическом воздействии пороговая амплитуда напряжения практически не зависит от длительности импульса нагружения. При переходе к более кратковременному импульсному нагружению наблюдается сильная зависимость критической амплитуды импульса напряжения от его длительности ("динамический" характер отклика).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 00-15-96023, № 01-01- 00250, № 02-01-01035 и ЦКП № 00-01-05020), ФЦП "Интеграция", ФЦП Министерства промышленности, науки и технологий (№ 40.010.11.1195) и конкурсного центра СПбГУ (грант № Е00-4.0-174).

#### Список литературы

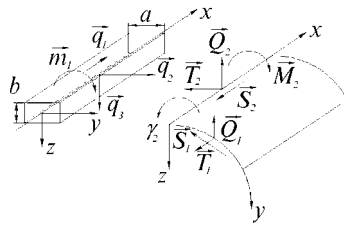
1. *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В.* Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 132 с.
2. *Кривошеев С.И., Петров Ю.В.* Экспериментальная установка и методика исследования пороговых разрушающих нагрузок для образцов с макротрещинами при кратковременных ударных воздействиях, создаваемых импульсным магнитным полем. ИПМАШ РАН, СПбГТУ. Препр. № 142. Изд. ИПМАШ РАН, СПб., 1997. 32 с.
3. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

## К задаче об устойчивости цилиндрической панели, сопряженной со стержнем

З. Г. Ершова, В. И. Ершов  
(vasily75@yandex.ru)

Рыбинская государственная авиационная  
технологическая академия, Россия

Рассмотрим устойчивость полубесконечной цилиндрической панели:  $0 \leq x \leq 2l = L/R$ ,  $0 \leq 2y \leq 2y_0$ , где  $L$  — длина оболочки,



$R$  — радиус срединной поверхности оболочки. Криволинейные края оболочки шарнирно оперты. На прямолинейном краю  $y = 0$  оболочка подкреплена прямолинейным стержнем прямоугольного поперечного сечения.

В качестве уравнений, описывающих равновесие цилиндрической оболочки при осевом сжатии, возьмем систему [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} + Rq_1 = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial x} - Q_2 + Rq_2 = 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \kappa_1 T_1 + (S_1 + S_2)\tau + \kappa_2 T_2 + T_2 + Rq = 0, \quad (1) \\ \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} + RQ_2 = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} + RQ_1 = 0. \end{aligned}$$

Возьмем уравнения равновесия стержня в виде [2]:

$$\frac{d\vec{Q}^c}{dx} + \vec{\kappa}^c \times \vec{Q}^c + \vec{q} = 0, \quad \frac{d\vec{M}^c}{dx} + \vec{\kappa}^c \times \vec{M}^c + \vec{\nu} \times \vec{Q}^c + \vec{m} = 0. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения для векторных величин, описывающих напряженно-деформированное состояние стержня:

$$\begin{aligned} \vec{Q}^c = Q_1^c \vec{i} + Q_2^c \vec{j} + Q_3^c \vec{k}, \quad \vec{M}^c = M_1^c \vec{i} + M_2^c \vec{j} + M_3^c \vec{k}, \\ \vec{q}^c = q_1^c \vec{i} + q_2^c \vec{j} + q_3^c \vec{k}, \quad \vec{m}^c = m_1^c \vec{i} + m_2^c \vec{j} + m_3^c \vec{k}, \quad (3) \\ \vec{\kappa}^c = \kappa_1^c \vec{i} + \kappa_2^c \vec{j} + \kappa_3^c \vec{k}, \quad \vec{\theta}^c = \theta_1^c \vec{i} + \theta_2^c \vec{j} + \theta_3^c \vec{k}, \end{aligned}$$

где  $\vec{Q}^c$  и  $\vec{M}^c$  — векторы внутренних усилий и моментов ( $Q_1^c$  — осевая сила,  $Q_2^c$  и  $Q_3^c$  — перерезывающие силы,  $M_1^c$  — крутящий момент,

$M_2^c$  и  $M_3^c$  изгибающие моменты),  $\vec{q}^c$  и  $\vec{m}^c$  — векторы внешней распределенной нагрузки и внешнего распределенного момента,  $\vec{x}^c$  — вектор изменения кривизны и кручения стержня,  $\vec{\theta}^c$  — вектор поворота (бесконечно малый) элемента стержня.

Будем считать, что до потери устойчивости стержень сжат в осевом направлении таким образом, что его осевая деформация  $\varepsilon_1^c$  равна осевой деформации оболочки. Тогда  $(Q_1^c)_0 = E^c S \varepsilon_1^c = -2E^c S \lambda \mu^2$ . В исходном состоянии  $Q_1^c = (Q_1^c)_0$ , а остальные компоненты векторов  $\vec{Q}^c$ ,  $\vec{M}^c$ ,  $\vec{q}^c$ ,  $\vec{m}^c$ ,  $\vec{x}^c$  и  $\vec{\theta}^c$ , входящих в (4), равны нулю.

Из условия взаимодействия оболочки со стержнем получаем граничные условия:

$$\begin{aligned} a_f \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_r \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + S = 0, \quad -a_k \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x^2} + M_2 + a_r Q_{2*} = 0, \\ -a_z \frac{\partial^4}{\partial x^4} (w + a_r \gamma_2) - 2a_f \lambda \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w + a_r \gamma_2) + Q_{2*} = 0, \\ a_y \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2a_f \lambda \mu^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - T_2 - a_r \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$a_r = \frac{a}{2R}, \quad a_f = \frac{E^c F}{EhR}, \quad a_k = \frac{G^c I_k}{EhR^3}, \quad a_y = \frac{E^c I_y}{EhR^3}, \quad a_z = \frac{E^c I_z}{EhR^3}.$$

Решение  $w(x, y)$ , локализованное в окрестности прямолинейного края  $y = 0$ , разыскиваем в виде [3]

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sum_{k=1}^4 C_k w_k \exp\left(\frac{iq_k y}{\mu}\right) \sin \frac{px}{\mu}, \quad \{w, v, \gamma_2, T_2, M_2, Q_{2*}\}, \\ u(x, y) = \sum_{k=1}^4 C_k w_k \exp\left(\frac{iq_k y}{\mu}\right) \cos \frac{px}{\mu}, \quad \{u, S\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим решение (5) в граничные условия (4). Тогда для определения критической нагрузки получаем уравнение в виде равенства нулю определителя четвертого порядка  $||b_{jk}|| = 0$ , элементы которого равны:

$$\begin{aligned} b_{1k} = -a_f (p_1^2 u + a_r p_1^3 v) + S = 0, \quad b_{2k} = a_k p_1^2 \gamma_2 + M_2 + a_r Q_{2*} = 0, \\ b_{3k} = (-a_z p_1^4 + 2a_f \lambda \mu^2 p_1^2) (w + a_r \gamma_2) + Q_{2*} = 0, \\ b_{4k} = (a_y p_1^4 - 2a_f \lambda \mu^2 p_1^2) v - T_2 + a_r p_1 S = 0, \quad \text{где } p_1 = p/\mu = \pi/l. \end{aligned} \quad (6)$$

Первые слагаемые связаны со стержнем, а остальные — с оболочкой. Слагаемые в (6) зависят от следующих основных безразмерных параметров:  $\mu$ ,  $a_0 = a/R$ ,  $b_0 = b/R$ ,  $l = L/R$ ,  $e_0 = E^c/E$ . Порядок всех остальных параметров будем сравнивать с порядком малого параметра тонкостенности оболочки  $\mu$ .

При асимптотическом анализе ограничимся рассмотрением случая  $\{a_0, b_0\} \sim \mu^\xi$ ,  $0 < \xi \leq 2$ ,  $\{l, \varepsilon_0\} \sim 1$ .

Тогда для параметров и неизвестных имеем оценки:

$$\begin{aligned} a_r \sim \mu^\xi, \quad a_f \sim \mu^{2\xi-1}, \quad \{a_k, a_y, a_z\} \sim \mu^{4\xi-1}, \quad p \sim \mu, \quad q_k \sim \sqrt{\mu}, \\ w \sim 1, \quad u \sim \mu, \quad v \sim \mu^{1/2}, \quad \gamma_2 \sim \mu^{-1}, \\ T_2 \sim \mu^2, \quad S \sim \mu^{3/2}, \quad Q_{2*} \sim \mu^{5/2}, \quad M_2 \sim \mu^3. \end{aligned}$$

Теперь можно провести сравнение порядков величин "стержневых" и "оболочечных" слагаемых в выражениях (6). Полагая  $b_{jk} = b_{jk}^c + b_{jk}^o$ , получаем приведенные в таблице 1 порядки этих величин.

$j$	$b_{jk}^c$	$b_{jk}^o$	$\xi_*$
1	$\mu^{2\xi}$	$\mu^{3/2}$	3/4
2	$\mu^{4\xi-3/2}$	$\mu^3$	9/8
3	$\mu^{4\xi-1} + \mu^{2\xi+1}$	$\mu^{5/2}$	7/8
4	$\mu^{4\xi-1/2} + \mu^{2\xi+3/2}$	$\mu^2$	5/8

Таблица 1.

При  $\xi = \xi_*$  для соответствующего граничного условия порядки величин  $b_{jk}^c$  и  $b_{jk}^o$  равны, а при  $\xi < \xi_*$  (то есть для более толстого стержня) порядок "оболочечного" слагаемого  $b_{jk}^o$  мал по сравнению с  $b_{jk}^c$ .

Пусть толщина стержня увеличивается (величина  $\xi$  убывает). Тогда в соответствии со значениями величин  $\xi_*$  первым из граничных условий, в котором проявляется присутствие стержня, будет условие 2. Далее идут условия 3, 1 и 4.

Рассмотрим устойчивость стержня при отсутствии оболочки. Для прямоугольного сечения возможны две формы потери устойчивости — с прогибами в направлении осей  $z$  и  $y$ . Этим прогибам соответствуют критические значения параметра нагрузки

$$\lambda_1^c = \frac{a_z p_1^2}{2a_f \mu^2} \quad \text{при } w \neq 0, \quad \lambda_2^c = \frac{a_y p_1^2}{2a_f \mu^2} \quad \text{при } v \neq 0.$$

При сделанных предположениях:  $a_0 \sim b_0 \sim \mu^\xi$ ,  $l \sim 1$  оба критических значения  $\lambda_1^c$  и  $\lambda_2^c$  имеют один порядок, равный

$$\lambda_j^c \sim \mu^{2\xi-2}, \quad j = 1, 2,$$



следовательно, стержень теряет устойчивость раньше, чем оболочка, при  $\xi > 1$  (напомним, что замкнутая в окружном направлении оболочка теряет устойчивость при  $\lambda = 1$ ).

Пусть теперь оболочка присутствует и стержень весьма тонкий. Будем увеличивать толщину стержня (т.е. уменьшать  $\xi$  от 2). При  $\xi > 9/8$  (см. табл. 1) оболочка подкрепляет стержень и препятствует его потере устойчивости по всем четырем граничным условиям. При  $1 < \xi < 9/8$  один стержень потерял бы устойчивость раньше, чем оболочка, но оболочка препятствует его потере устойчивости по трем из четырех условий. Наконец, при  $\xi < 1$  стержень теряет устойчивость при  $\lambda^c \gg 1$ , т.е. значительно позже, чем оболочка. Следует ожидать, что в последнем случае формы потери устойчивости, локализованные в окрестности края  $y = 0$ , отсутствуют.

### Список литературы

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек // Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел. 1967. М.: ВИНТИ. 1968. 348 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 1. М., 1987.
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. – М., 1995. 320 с.

### Статические свойства балочной модели разрушения тонких отслоений

*Б. А. Зимин, М. А. Миркин, О. В. Темнов*

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Различные методы отслаивания широко применяются для исследования трещиностойкости композитных материалов [1]. Балочное приближение в теории разрушения представляет собой описание разрушения в рамках соответствующих упрощенных моделей упругих тел. Точность его та же, что и при традиционном использовании для расчета напряженно-деформированного состояния [2].

Рассмотрим модель разрушения тонких отслоений в композитном материале [3]. Пусть трещина подросла на величину  $\Delta l$ , при этом прогиб балки  $f$  изменится, сила  $P$  произведет работу  $\delta A$ , причем на разрушение материала по линии  $\Delta l$  будет израсходована некоторая

энергия  $\delta W$ . Используя представление Гриффитса о работе разрушения и выражение для потенциальной энергии консольной балки [4], найдем

$$\gamma = P_{\text{кр}}^2 l^2 / (4EIb), \quad (1)$$

где  $\gamma$  – работа разрушения на единицу поверхности,  $EI$  – изгибная жесткость,  $b$  – ширина отщепленной полоски,  $P_{\text{кр}}$  – величина усилия, при котором происходит отслоение. Из теории Гриффитса [2] следует связь между параметром разрушения  $\gamma$  и коэффициентом интенсивности напряжений  $K_{IC}$

$$K_{IC} = \sqrt{E\gamma/(1-Y^2)}, \quad (2)$$

где  $E, Y$  – модули Юнга и Пуассона соответственно.

Подставляя (1) в (2), найдем, что

$$K_{IC} \sim \frac{M}{b} \sqrt{\frac{3}{(1-Y^2)h^3}}, \quad (3)$$

где  $M = Pl$ ,  $h$  – толщина отслоения. При  $\gamma = 0,3$  и  $b = h = 1K_{IC} = 1,932M$ . Точное решение [5] для отслоения полубесконечной полоски при  $\gamma = 0,3$  и  $b = h = 1$  дает  $K_{IC} = 1,825M$ . Таким образом, решение балочного приближения для задач механики разрушения практически соответствует решению, полученному методом теории упругости. Отличие составляет не более 5% от точного решения.

Исходной информацией для анализа процесса расслоения композитного материала является диаграмма растяжения, записанная в координатах (усилие – перемещение) или (усилие – время), что при постоянной (средней) скорости движения захватов испытательной машины равносильно [3]. Техника и методика проведения экспериментов на отслоение с целью получения значения удельной энергии продвижения трещин описаны в [3]. Эксперименты по расслоению позволяют рассматривать [3] адгезиограмму  $P-t$ , полученную во время испытаний, как запись реализации некоторого случайного процесса. При осуществлении измерительной процедуры в экспериментах по отслоению среди прочих физических величин важное место занимает величина

$$F(t) = \frac{1}{T} \int_0^T P^2(t) dt, \quad (4)$$

где  $T$  – общее время расслоения образца. Эта величина является временным интегралом от  $P^2(\tau)$ . Существенно, что измерительный процесс протекает во времени. Физически определяющим является отношение  $T/\tau$ , где  $\tau$  – время корреляции стохастического процесса  $P(t)$ . Если  $T/\tau \gg 1$  и присутствуют условия, обеспечивающие эргодичность (технология изготовления материала и методика проведения экспериментов не изменяются), процесс  $F(T)$  нормализуется, а его плотность распределения вероятностей асимптотически приближается к гауссовому распределению [6]. В случае  $T/\tau \sim 1$  необходима информация о статистической структуре континуума реализаций процесса  $P(t)$ , имеющей место на всем протяженном интервале  $0 \leq t \leq T$ .

В дальнейшем рассматриваем элементы ансамбля множества адгезиограмм  $\bigcup_{i=1}^n D_i \Omega$  разрушения данного материала. Каждой такой адгезиограмме  $D_i \in \Omega$  можно поставить в соответствие гипотезу  $H_i$  о том, что разрушение произойдет по этой адгезиограмме, и с такой гипотезой связать априорную вероятность  $P(H_i)$  ее осуществления.

Расслоение образца происходит по какой-то одной адгезиограмме  $D_i$ . При этом само событие  $A$  (расслоение образца) происходит одновременно с осуществлением одной из гипотез  $H_i$ , так что вероятность расслоения образца  $S(A)$  может быть представлена в виде:

$$S(A) = \sum_{D_i \in \Omega} S(A/D_i)S(H_i), \quad (5)$$

где  $S(A/D_i)$  – вероятность расслоения при условии, что расслоение происходит по адгезиограмме  $D_i$ . Множество  $\Omega$  возможных адгезиограмм расслоения является несчетным. Мера Лебега существует только в счетных пространствах. Для дальнейшего анализа используем элементы теории гауссовой меры [6].

Известно, что нормальность случайного процесса представляет нормальность всех его конечномерных распределений. Трудно рассчитывать, что из экспериментальных данных удастся извлечь столь богатую информацию. На практике обычно ограничиваются исследованием одномерных распределений. Для многих углепластиков экспериментально была построена гауссова мера [3].

Рассмотрим множество таких траекторий процесса расслоения  $X(t)$ , когда начальное усилие на адгезиограмме  $X_0 = P_0 = 0$ ; в мо-

мент  $t_1$  процесс  $X(\tau)$  будет находиться в пределах  $P_1 < x(t_1) < Q_1$ , в момент  $t_2$  – в пределах  $P_2 < x(t_2) < Q_2, \dots$ , в момент  $t_n$  – в пределах  $P_n < x(t_n) < Q_n$ . Используя метод, приведенный в работе [7], и учитывая гауссовость процесса расслоения, построим меру реализаций множества таких траекторий (адгезиограмм)  $S(A)$  (5)

$$P(A) = [2^n \pi^n \sigma^2 (t_1 - t_0)(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})]^{1/2} \times \\ \times \int_{P_1}^{Q_1} dx_1 \int_{P_2}^{Q_2} dx_2 \cdots \int_{P_n}^{Q_n} X(x_1 \dots, x_n) dx_n, \quad (6)$$

где  $X(x_1 \dots, x_n) =$   
 $= \exp \left( -\frac{x_1^2}{2\sigma(t_1 - t_0)} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{2\sigma(t_2 - t_1)} - \dots - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2\sigma(t_n - t_{n-1})} \right).$

Для широкого класса функционалов (4), в частности для всех ограниченных и непрерывных функционалов в пространстве непрерывных функций на отрезке, таких, что  $x_0 = 0$ , существует континуальный интеграл по мере Винера [7]. Математическое ожидание от  $F(T)$  известно [7] и равно  $\sigma$ . Таким образом, установлено, что для характеристики разрушения функционал (4) может использоваться только для "гауссовых" процессов расслоения, что должно быть установлено заранее. Эксперименты на стекло- и углепластиках показывают [3], что углепластики более подходят к этому критерию.

### Список литературы

1. Бугаков И.И. Работа разрушения слоистых стеклопластиков по поверхности раздела // Проблемы прочности. 1978. № 4. С. 49-51.
2. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 295 с.
3. Zimin B.N. Statistical description of composite laminate structure and damage by delamination // Theoretical and applied fracture mechanics 24 (1996). P. 197-201.
4. Зимин Б.Н. Влияние геометрической нелинейности на масштабный фактор при разрушении тонких оснований // К 90-летию со дня рождения профессора Н.Н. Поляхова. 1997. С. 89-92. (Прикладная механика, Вып. 10).
5. Златин А.Н., Храпков А.Л. Полубесконечная трещина, параллельная граница упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 4. С. 810-813.

6. *Богачев В.И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997. 352 с.  
 7. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М.: Изд. иностр. литер, 1961. 158 с.

## Теоремы аппроксимации и существования в теории тонких оболочек

*Б. Н. Квасников*

Санкт-Петербургский государственный университет  
путей сообщения, Россия

**1. Исходные гипотезы и постулаты.** Аксиоматика метода [1] построена на системе гипотез [2]

$$F \sim \mu^{\tilde{F}}, \quad F_{,1} \sim \mu^{t_1} F, \quad F_{,2} \sim \mu^{t_2} F, \quad (1)$$

$$B \sim \mu^{\tilde{B}}, \quad B_{,1} \sim \mu^{\nu_1} B, \quad B_{,2} \sim \mu^{\nu_2} B, \quad (2)$$

$$Q \sim \mu^{\tilde{Q}}, \quad Q_{,1} \sim \mu^{\psi_1} Q, \quad Q_{,2} \sim \mu^{\psi_2} Q, \quad (3)$$

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 = 0, \quad (4)$$

$$l_1 \geq \xi_* \sim \mu^{-t_1}, \quad l_2 \geq \eta_* \sim \mu^{-t_2} \quad (5)$$

и постулатов

$$\tilde{F}_i = \tilde{F}_k = \max_s \{\tilde{F}_s\}, \quad i \neq k, \quad s \in 1 : m, \quad \tilde{F}_\emptyset = \max_s \{\tilde{F}_s\}, \quad (6)$$

$$\nu_1, \psi_1 \leq t_1, \quad \nu_2, \psi_2 \leq t_2, \quad (7)$$

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} \Rightarrow \text{ПКЗ} = \text{ГКЗ} + \text{ДКЗ}, \quad (8)$$

где  $F$ ,  $B$  и  $Q$  — функции (безразмерные) напряженного состояния, геометрии оболочки и внешнего воздействия на нее (краевого и поверхностного);  $\sim$  — символ точного порядка;  $\mu \gg 1$  — большой параметр ( $\mu = h^{-1}$ ,  $h = h^*/Rc_\nu$  — параметр тонкостенности,  $h^*$  — толщина оболочки,  $R$  — характерный линейный размер,  $c_\nu = \sqrt{12(1-\nu^2)}$ ),  $\nu$  — коэффициент Пуассона);  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{Q}$  — показатели интенсивности функций  $F, B, Q$ ;  $(\cdot)_{,1} = \partial/\partial\xi$ ,  $(\cdot)_{,2} = \partial/\partial\eta$  — символы частных производных по безразмерным координатам  $\xi, \eta$ ;  $t_i \geq 0, \nu_i \geq 0, \psi_i \geq 0$  — показатели изменяемости функций  $F, B, Q$ ;  $a_i$  — числа;  $l_1, l_2$  — длины (безразмерные, отнесенные к  $R$ ) оболочки вдоль  $\xi$  и  $\eta$ ;  $\xi_*, \eta_*$

— длины "рисунка деформации" (термин по [3]) вдоль этих линий координат;  $\tilde{F}_i, \tilde{F}_k$  — показатели интенсивности двух членов (ведущих с показателем  $\tilde{F}_6$ ) одинакового наибольшего порядка в каждом отдельно взятом уравнении исходной системы;  $m$  — число членов данного уравнения;  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  — функции основного и дополнительного напряженного состояния (гладкая и быстроменяющаяся часть решения); ПКЗ, ГКЗ и ДКЗ — полная, главная и дополнительная краевые задачи.

Погрешность (асимптотическая) системы равна наибольшей из погрешностей отдельных уравнений [1]

$$\chi \sim \mu^{-\alpha}, \quad \alpha = \min\{\alpha_i\}, \alpha_i = \tilde{F}_{i6} - \tilde{F}_{in} > 0, \quad (9)$$

где  $\tilde{F}_{in}$  — показатель интенсивности наибольшего из второстепенных (отбрасываемых) членов данного уравнения.

Постулат Ньютона (6) и гипотезы (1), (2) позволяют для однородной системы дифференциальных уравнений составить порядковые уравнения

$$Gx = g, \quad (10)$$

где  $x$  — матрица-столбец неизвестных  $x_i, i = 1, 2, \dots$  для  $\tilde{F}_i, \tilde{B}_i$ ;  $G$  — прямоугольная матрица коэффициентов при  $x_i$ ;  $g$  — матрица-столбец свободных членов.

Плоскость параметров  $t_1, t_2$ , в которой выполняются соотношения (1) – (10), названа в [1] областью асимптотической непротиворечивости, а в однородной задаче — асимптотическим портретом. Точки плоскости  $t_1, t_2$ , в которых выделение аппроксимаций происходит с наивысшей точностью, названы характерными точками; набор значений  $\tilde{F}, t_i, \tilde{B}, \nu_i, \alpha$  в этих точках есть параметры асимптотического интегрирования.

**2. Теоремы аппроксимации.** Ограничимся тремя классами оболочек: цилиндрическими (круговыми и некруговыми), тороидальными и оболочками двойкой кривизны типа кривой трубы (трубопроводы).

Уравнения **круговой цилиндрической оболочки** имеют постоянные коэффициенты и в (2)  $B = \text{const} \Rightarrow \nu_1 = -\infty, \nu_2 = -\infty$ . В простейшем случае, когда характерным линейным размером  $R$  принят радиус  $R_2$  поперечного сечения  $K_1 = 0 \sim \mu^{-\infty}, K_2 = 1/R_2 = 1 \sim \mu^0 \Rightarrow \tilde{K}_1 = -\infty, \tilde{K}_2 = 0$ , где  $K_1, K_2$  — кривизны (безразмерные) в продольном  $\xi$  и окружном  $\eta$  направлениях.

**Теорема 1.** Если существует решение уравнений круговой цилиндрической оболочки при  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 1$ ,  $\nu_1 = -\infty$ ,  $\nu_2 = -\infty$  в классе функций основной гипотезы (1), то:

1. Параметры асимптотического интегрирования головных уравнений безмоментной теории (БМТ), чистомоментного состояния (ЧМС), краевого эффекта (КЭ), полубезмоментной теории (ПБТ), простого и обобщенного краевых эффектов (ПКЭ и ОКЭ)

$$\text{БМТ: } t_1 = 0, t_2 = 0, \alpha = 2, \{\tilde{T}_1, \tilde{S}\} = -1, \{\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\gamma}, \tilde{u}_i\} = 0,$$

$$\text{ЧМС: } t_1 = 0, t_2 = 0, \alpha = 2, \{\tilde{u}_i, \tilde{w}\} = 0,$$

$$\text{КЭ: } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{2}, \alpha = 1, \{\tilde{\varkappa}_i, \tilde{\tau}\} = 0, \tilde{\nu}_i = -\frac{1}{2},$$

$$\{\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\gamma}, \tilde{w}\} = -1, \tilde{u}_i = -\frac{3}{2}, \{\tilde{T}_i, \tilde{S}\} = -2, \tilde{N}_i = -\frac{5}{2}, \{\tilde{M}_i, \tilde{H}\} = -3,$$

$$\text{ПБТ: } t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 0, \alpha = 1, \tilde{\varkappa}_2 = 0, \tilde{\tau} = -\frac{1}{2},$$

$$\{\tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\lambda}_1\} = -1, \tilde{T}_1 = -2, \tilde{S} = -\frac{5}{2}, \{\tilde{T}_2, \tilde{M}_i, \tilde{N}_2\} = -3,$$

$$\text{ПКЭ: } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 0, \alpha = 1, \tilde{\varkappa}_1 = 0, \tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{2}, \tilde{\varepsilon}_i = -1,$$

$$\tilde{T}_2 = -2, \tilde{N}_1 = -\frac{5}{2}, \tilde{M}_i = -3,$$

$$\text{ОКЭ: } t_1 = 0, t_2 = 1/4, \alpha = 1/2, \tilde{\varkappa}_2 = 0, \tilde{\tau} = -\frac{1}{4}, \tilde{\varkappa}_1 = -\frac{1}{2},$$

$$\tilde{\lambda}_1 = -\frac{3}{4}, \tilde{\varepsilon}_i = -1, \tilde{T}_1 = -2, \tilde{S} = -\frac{9}{4}, \tilde{T}_2 = -\frac{5}{2}, \tilde{N}_2 = -\frac{11}{4}, \tilde{M}_i = -3$$

выделяют аппроксимации, разрешающие уравнения которых

$$\text{БМТ: } u_{2,1111} = 0,$$

$$\text{ЧМС: } w_{,11} = 0,$$

$$\text{КЭ: } \Delta^8 w + \mu^2 w_{,1111} = 0, \Delta^8 = \Delta \Delta \Delta \Delta, \Delta = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2,$$

$$\text{ПБТ: } (\partial^4 / \partial \eta^4 + \partial^2 / \partial \eta^2)^2 \varkappa_2 + \mu^2 \partial^4 \varkappa_2 / \partial \xi^4 = 0,$$

$$\text{ПКЭ: } \varkappa_{1,1111} + \mu^2 \varkappa_1 = 0,$$

$$\text{ОКЭ: } \partial^8 \varkappa_2 / \partial \eta^8 + \mu^2 \partial^4 \varkappa_2 / \partial \xi^4 = 0.$$

2. Асимптотический портрет имеет вид, представленный на рис. 1.

Примечание.

Обозначение функций  $F = \{T_1, S, \varepsilon_i, \dots\}$  и доказательство см. в [1].

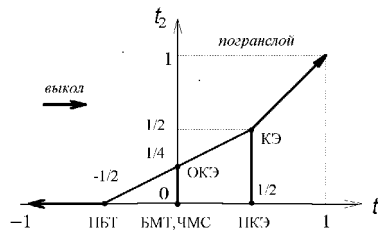


Рис. 1.  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 1$ ,  $\tilde{K}_2 = 0$ ,  $\tilde{k} = -1$ .

Уравнения **некруговой цилиндрической оболочки** имеют переменные вдоль  $\eta$  коэффициенты  $B(\eta)$ . Ограничимся случаем  $\tilde{K}_2 = 0$ ,  $\nu_2 = 0$ , когда поперечное сечение (безразмерное) имеет порядок  $O(1)$  и при дифференцировании по  $\eta$  он не меняется (нулевая изменямость), чему отвечает "спокойная" геометрия оболочки. При такой геометрии в [4] доказана теорема, аналогичная теореме 1, и асимптотический портрет сохраняется по рис. 1.

Для **тороидальной оболочки** [4]

$$K_1 = kck_c^{-1}, K_2 = 1, A_1 = k_c, A_2 = 1, A_{1,2} = -ks, \quad (11)$$

где  $k$  — кривизна оси (безразмерная),  $c = \cos \eta$ ,  $k_c = 1 + kc$ ,  $A_i$  — параметры Ляме,  $s = \sin \eta$ ,  $\eta \in [0, 2\pi]$  — меридиональная координата.

Ограничимся случаем  $\tilde{k} = 0$ ,  $\nu_2 = 0$ , когда кривизна оси и длина тора средние, а изменямость коэффициента  $B(\eta)$  нулевая. В этом случае в [4] доказана теорема, аналогичная теореме 1. Асимптотический портрет представлен на рис. 2.

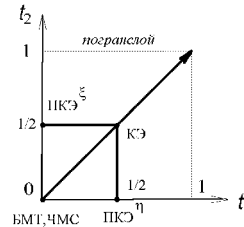


Рис. 2.  $\tilde{k} = 0$ .

У тора обе линии координат  $\xi$  (продольная) и  $\eta$  (меридиональная) являются неасимптотическими линиями на поверхности (за исключением полюсной линии  $\eta = \pi/2$ ) и поэтому простой краевой эффект возможен вблизи каждой из них (ПКЭ $^\xi$ , ПКЭ $^\eta$  на рис. 2). По сравнению с рис. 1 на рис. 2 отсутствует узел полубезмоментной теории (ПБТ на рис. 1), который возможен только у длинных оболочек. Нет также характерной точки обобщенного краевого эффекта (ОКЭ на рис. 1); он вырождается в ПКЭ $^\xi$  на рис. 2.

Для **оболочки двоякой кривизны типа кривой трубы** ограничимся случаем  $\tilde{k} = -1$ , когда кривизна оси  $k$  по порядку равна  $h = \mu^{-1}$  в (1.1) и в уравнениях появляется второй малый параметр — кривизна оси  $k$ . В этой ситуации в [4] доказываемая теорема, аналогичная теореме 1, и асимптотический портрет сохраняется по рис. 1. Оболочка малой кривизны при  $\tilde{k} = -1$  оказывается длинной, вследствие чего появляется узел полубезмоментной теории (ПБТ).



**3. Теоремы существования. Теорема 2.** Если в согласии с аксиоматикой п.1 выделена прямоугольная область в криволинейных координатах  $\xi, \eta$  круговой цилиндрической оболочки в теореме 1, то:

1. Решение уравнений безмоментной теории (БМТ), чистомоментного состояния (ЧМС), простого и обобщенного краевых эффектов (ПКЭ и ОКЭ) в классе функций основной гипотезы (1.1) существует и общие интегралы (ОИ) или семейства частных интегралов (СЧИ) разрешающих функций имеют вид ( $\alpha p$  – параметр погрешности решения)

$$\begin{aligned} \text{БМТ: } t_1 = 0, t_2 = 0, \alpha p = 2, \text{ ОИ, } b \neq 0, i, n = 0, \\ u_2 = (A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + 2(1 + \nu)b^{-2}6A_3\xi)e^{b\eta}, \\ \text{ЧМС: } t_1 = 0, t_2 = 0, \alpha p = 2, \text{ ОИ, } b \neq 0, i, n = 0, \\ w = -b(A_0 + A_1\xi)e^{b\eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{КЭ: } t_1 = 1/2, t_2 = 1/2, \alpha p = 1, a = \text{fix}, \text{ СЧИ, } \varkappa_2 = \sum A_r e_r, \\ e_r = \exp(\mu^{1/2}(a\xi + b_r\eta)), r \in 1 : 8, A_r(\xi, \eta), \\ b_r \text{ из } ((a^2 + b_r^2)^2 - ia^2)((a^2 + b_r^2)^2 + ia^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ПБТ: } t_1 = -1/2, t_2 = 0, \alpha p = 1, a = \text{fix}, \text{ СЧИ, } \varkappa_2 = \sum A_r e_r, \\ e_r = \exp(\mu^{-1/2}a\xi + b_r\eta), r \in 1 : 8, A_r(\xi, \eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_* = \sqrt{\sqrt{16a^4 + 1} + 1}, b_r = \left( \pm \sqrt{\sqrt{k_*^2 + k_*\sqrt{2}} \mp (k_* - \sqrt{2})/\sqrt{2}} \pm \right. \\ \left. \pm i \sqrt{\sqrt{k_*^2 + k_*\sqrt{2}} \pm (k_* + \sqrt{2})/\sqrt{2}} \right) / 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ПКЭ: } t_1 = 1/2, t_2 = 0, \alpha p = 1, b = \text{fix}, \text{ ОИ, } \varkappa_1 = \sum A_r e_r, \\ e_r = \exp(\mu^{1/2}a_r\xi + b\eta), a_r \text{ из } a_r^4 + 1 = 0, r \in 1 : 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ОКЭ: } t_1 = 0, t_2 = 1/4, \alpha p = 1/2, \text{ ОИ, } \varkappa_2 = \sum_{r=1}^8 A_r^\alpha e_r^\alpha + \\ + \sum_{r=1}^4 A_r^b e_r^b, e_r^\alpha = \exp(a\xi + \mu^{1/4}b_r\eta), b_r \text{ из } b_r^8 + a^4 = 0, a = \text{fix}, \\ e_r^b = \exp(a_r\xi + \mu^{1/4}b\eta), a_r \text{ из } a_r^4 + b^8 = 0, b = \text{fix}. \end{aligned}$$

2. Интегралы в п.1 с меньшей точностью остаются справедливыми в любой точке асимптотического портрета на рис. 1.

Доказательство см. в [5, 6].

Аналогично формулируются и доказываются теоремы существования для уравнений некруговой цилиндрической оболочки, тора и оболочки двойкой кривизны типа кривой трубы.

## Список литературы

1. Квасников Б.Н. Асимптотический метод построения и решения укороченных уравнений тонких оболочек // Колебания и устойчивость механических систем. Л., 1981. С. 187-218. (Прикл. мех. Вып. 5).
2. Квасников Б.Н. Качественная оценка напряженного состояния тонкой оболочки по параметрам асимптотического интегрирования // Вторые Поляховские чтения. Избранные труды. СПб.: СПбГУ, 2000. С. 266-277.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1976. 512 с.
4. Квасников Б.Н. К проблеме построения приближенных методов расчета в теории тонких оболочек // Динамика и устойчивость механических систем. Л., 1984. С. 126-138. (Прикл. мех. Вып. 6).
5. Квасников Б.Н. Интегрирование уравнений тонких упругих оболочек с быстро- и медленноменяющимися коэффициентами // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. Л., 1990. С. 163-172. (Прикл. мех. Вып. 8).
6. Квасников Б.Н. Об одном подходе к решению краевых задач в теории тонких оболочек // Динамика и устойчивость механических систем. Л., 1995. С. 192-209. (Прикл. мех. Вып. 9).

## Устойчивость цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением под действием осевой нагрузки

М. В. Кликушина  
(klikusha@mail.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*Исследована устойчивость упругой цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением под действием осевой сжимающей нагрузки. Для нахождения приближенного значения критической нагрузки, при сечениях, близких к квадратным, применяется асимптотический метод. В качестве начального приближения используется решение задачи устойчивости оболочки с квадратным поперечным сечением.*

Рассмотрим упругую оболочку с прямоугольным поперечным сечением под действием однородной распределенной нагрузки  $T = h \sigma$ ,

где  $h$  — толщина оболочки,  $\sigma$  — напряжение.

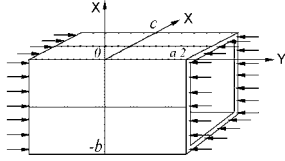


Рис. 1.

Две противоположные стенки оболочки представляют собой пластины длиной  $a$  и шириной  $b$ , две другие — пластины длиной  $a$  и шириной  $c$ . В силу симметрии можем рассматривать только первую и вторую стенки оболочки.

Уравнение для определения бокового перемещения  $w^{(k)}(x, y)$  стенки с номером  $k$  имеет вид

$$\frac{\partial Q_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{(k)}}{\partial y} + \lambda \pi^2 \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где  $w^{(1)}$  и  $w^{(2)}$  — нормальные перемещения первой и второй стенок соответственно,  $Q_x^{(k)}$ ,  $Q_y^{(k)}$  — поперечные силы,  $\lambda = h\sigma/D\pi^2$  — параметр нагрузки,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  — жесткость на изгиб.

Возьмем  $b = 1$ ,  $c = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда при  $\varepsilon = 0$  поперечное сечение будет квадратным. Для первой стенки:  $-1 < x < 0$ ,  $-a/2 < y < a/2$ , для второй:  $0 < x < 1 + \varepsilon$ ,  $-a/2 < y < a/2$ . Граничные условия в месте соединения пластин могут быть записаны в виде [1]

$$\begin{aligned} w^{(1)}(0, y) = w^{(2)}(0, y) = 0, \quad w_x^{(1)}(0, y) = w_x^{(2)}(0, y), \\ w_{xx}^{(1)}(0, y) = w_{xx}^{(2)}(0, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что на краях оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания

$$w^{(k)} = M_y^{(k)} = 0 \quad \text{при } y = -a/2, y = a/2, \quad (3)$$

или свободного края

$$Q_y^{(k)} + \frac{\partial M_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \lambda \pi^2 \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} = 0, \quad M_y^{(k)} = 0 \quad \text{при } y = -a/2, y = a/2, \quad (4)$$

где  $M_y^{(k)}$ ,  $M_{xy}^{(k)}$  — изгибающие моменты,  $k = 1, 2$ . В силу симметрии оболочки по ширине, можем рассмотреть половину каждой стенки. Тогда для первой стенки:  $-1/2 < x < 0$ , для второй:  $0 < x < (1+\varepsilon)/2$ .

Симметричная форма потери устойчивости удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} w_x^{(1)}\left(-\frac{1}{2}, y\right) &= \left(Q_x^{(1)} + \frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y}\right)\left(-\frac{1}{2}, y\right) = 0, \\ w_x^{(2)}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}, y\right) &= \left(Q_x^{(2)} + \frac{\partial M_{xy}^{(2)}}{\partial y}\right)\left(\frac{1+\varepsilon}{2}, y\right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Разложим решение в ряд по  $\varepsilon$ :

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \varepsilon w_1(x, y) + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots \quad (6)$$

Подстановка разложения (6) в уравнение (1) и граничные условия (2), (3) (или (4)), (5) делит задачу на нулевое и первое приближения.

Решение краевой задачи нулевого приближения известно [1]  
 $w_0(x, y) = W(y) \sin(\pi x)$ .

Уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{\partial Q_{1,x}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{1,y}^{(k)}}{\partial y} + \lambda_0 \pi^2 \frac{\partial^2 w_1^{(k)}}{\partial y^2} + \lambda_1 \pi^2 \frac{\partial^2 w_0^{(k)}}{\partial y^2} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Записывая уравнение (7) для каждой стенки отдельно, скалярно умножая каждое уравнение на  $w_0^{(k)}$ , получим соотношения

$$S_1 + \lambda_1 \pi^2 (w_0^{(1)}, w_{0,yy}^{(1)}) = 0, \quad S_2 + \lambda_1 \pi^2 (w_0^{(2)}, w_{0,yy}^{(2)}) = 0,$$

где  $(f, g) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_1^z f g dx dy = \int_S f g dS$ ,  $z = -1/2$  или  $1/2$  для первой

и второй стенки соответственно, а  $S_i$  зависят от граничных условий. Сложив их и упростив с помощью граничных условий, получим уравнение для нахождения параметра  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} W(W'' - \pi^2 W) dy - (1 - \nu) W W' \Big|_{-a/2}^{a/2} + \\ + \frac{1}{2} \lambda_1 \left( \int_{-a/2}^{a/2} W W'' dy - W W' \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В антисимметричном случае ( $W(-y) = -W(y)$ ) функция  $W = C_1 \operatorname{sh}(\pi \gamma_1 y) + C_2 \operatorname{sh}(\pi \gamma_2 y)$  является решением уравнения для оболочки с квадратным поперечным сечением с двумя свободными краями [2]. Здесь  $\gamma_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha = \sqrt{4 - \lambda_0}/2$ ,  $\beta = \sqrt{\lambda_0}/2$ .

Параметр  $\lambda_0$  в антисимметричном случае представляет собой решение уравнения [2]

$$(\lambda_0 - 3 + 2\nu + \nu^2)\beta \operatorname{sh}(\alpha\pi a) + (\lambda_0 - 1 + 2\nu - \nu^2)\alpha \sin(\beta\pi a) = 0. \quad (9)$$

Аналогичные формулы получены для симметричного случая  $W(-y) = W(y)$ .

Для оболочки с шарнирно опертыми краями возможно разделение переменных  $w^{(k)}(x, y) = f^{(k)}(x) \sin(m\pi y/a)$ ,  $k = 1, 2$ .

Решение задачи нулевого приближения для оболочки с квадратным поперечным сечением было получено в статье [1]  $f_0^{(k)} = \sin(\pi x)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\lambda_0 = a^2/m^2 + 2 + m^2/a^2$ . В этом случае поправка первого приближения  $\lambda_1$  находится в явном виде:  $\lambda_1 = -2(a^2/m^2 + 1)$ , где  $m$  — число волн по длине.

Для оболочки со свободными краями  $\lambda_1$  и  $\lambda_0$  находятся с помощью численных методов из формул (8) и (9) соответственно.

В таблице 1 приведены значения  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1$  для оболочки со свободными краями при  $\nu = 0.3$ . Значения параметра  $\lambda$ , вычисленные методом конечных элементов с помощью пакета *ADINA*, содержатся в таблице 2.

Каждая строка подразделяется на две, где в первую записываем значения параметра критической нагрузки  $\lambda$  для антисимметричной формы потери устойчивости, а во вторую — для симметричной.

$\varepsilon \backslash a$	0.4	1.0	2.0	4.0	8.0	10.0
0.0	1.518	2.043	2.366	2.310	2.310	2.310
	7.317	2.593	2.261	2.310	2.310	2.310
0.1	1.354	1.788	2.143	2.079	2.079	2.079
	7.161	2.411	2.025	2.079	2.079	2.079
0.2	1.191	1.534	1.920	1.847	1.848	1.848
	7.005	2.229	1.789	1.849	1.848	1.848
0.3	1.028	1.279	1.697	1.616	1.617	1.617
	6.849	2.046	1.553	1.618	1.617	1.617

Таблица 1.

Результаты, приведенные в первой таблице, показывают, что при малом  $\varepsilon$  значения параметра  $\lambda$  для симметричной и антисимметричной форм сближаются при увеличении длины оболочки  $a$ .

При сравнении результатов асимптотического метода и расчетов методом конечных элементов видно, что относительная погрешность параметра нагрузки уменьшается при увеличении длины оболочки и уменьшении параметра сечения  $\varepsilon$ .

$\varepsilon \backslash a$	0.4	1.0	2.0	4.0	8.0	10.0
0.0	1.489	2.025	2.374	2.314	2.329	2.332
	7.318	2.586	2.265	2.314	2.329	2.332
0.1	1.308	1.766	2.138	2.071	2.084	2.084
	7.160	2.338	2.017	2.072	2.084	2.084
0.2	1.120	1.513	1.899	1.831	1.841	1.839
	7.002	2.187	1.773	1.833	1.841	1.839
0.3	0.955	1.289	1.679	1.609	1.619	1.618
	6.870	2.010	1.554	1.613	1.619	1.618

Таблица 2.

На рис. 2, на примере оболочки длиной  $a = 8$ , показано, как при увеличении  $\varepsilon$  графики параметров критических нагрузок  $\lambda$  расходятся для шарнирно опертой оболочки (рис.2 а)) и оболочки со свободными краями (рис.2 б)).

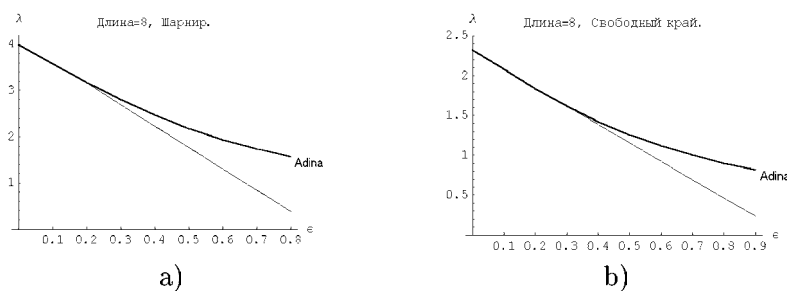


Рис. 2.

Область применимости асимптотического метода для оболочки со свободными краями (приблизительно до  $\varepsilon = 0.4$ ) шире, чем для оболочки с шарнирно опертыми краями (до  $\varepsilon = 0.3$ ).

Форма потери устойчивости для оболочек с шарнирно опертыми и свободными краями длиной  $6$  при  $\varepsilon = 0.2$  приведена на рис. 3 а) и б) соответственно.

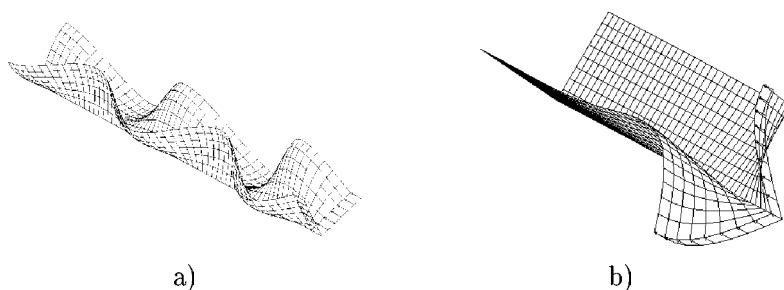


Рис. 3.

Для шарнирно опертой оболочки форма потери устойчивости покрывает всю поверхность оболочки. Для оболочки с прямоугольным поперечным сечением и свободными краями при малых  $\varepsilon$  форма потери устойчивости локализована в окрестности свободного края.

#### Список литературы

1. Филиппов С. Б. Устойчивость цилиндрической оболочки с квадратным поперечным сечением // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 97-101.
2. Кликушина М. В., Филиппов С. Б. Устойчивость цилиндрической оболочки с квадратным поперечным сечением, имеющей два свободных края // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 1 (№ 1). С. 86-92.

### **Устойчивость тонкой круговой анизотропной цилиндрической оболочки при чистом кручении**

*И. Л. Кузиванов*  
([ikuzivanov@mail.ru](mailto:ikuzivanov@mail.ru))

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*В данной работе методом асимптотического интегрирования изучается потеря устойчивости тонкой круговой анизотропной цилиндрической оболочки с различными типами обмоток.*

**1. Постановка задачи** Рассматриваем тонкую круговую цилиндрическую оболочку, усиленную упругими нитями, расположенными параллельно срединной поверхности. Считаем, что нити расположены симметрично относительно срединной поверхности. Будем так же считать, что оболочка усилена  $N$  системами нитей, каждая из которых имеет три определяющих ее параметра: это угол наклона нитей к образующим цилиндра  $\theta^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , жесткость материала нитей по отношению к жесткости материала оболочки  $E^{(k)}$  и отношение объема, занимаемого  $k$ -ой системой нитей к объему всего композитного материала  $\delta^{(k)}$ .

Напряжения  $\sigma_{ij}$  анизотропной оболочки складываются из напряжений  $\sigma_{ij}^{(0)}$  материала оболочки и напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$ , вызванных деформациями нитей:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^{(k)}. \quad (1)$$

Для оболочки соотношения, связывающие напряжения  $\sigma_{ij}^{(0)}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= \frac{E^{(0)}\delta^{(0)}}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), & \sigma_{12}^{(0)} &= \frac{E^{(0)}\delta^{(0)}}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22}^{(0)} &= \frac{E^{(0)}\delta^{(0)}}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E^{(0)}$  — жесткость материала оболочки,  $\delta^{(0)}$  — отношение объема, занимаемого материалом оболочки, к объему всего композитного материала, и  $\nu$  — коэффициент Пуассона для материала оболочки.

Для нитей соотношения, связывающие напряжения и деформации, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= E^{(k)}\delta^{(k)}(c_k^4\varepsilon_{11} + c_k^3s_k\varepsilon_{12} + c_k^2s_k^2\varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12}^{(k)} &= E^{(k)}\delta^{(k)}(c_k^3s_k\varepsilon_{11} + c_k^2s_k^2\varepsilon_{12} + c_k s_k^3\varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22}^{(k)} &= E^{(k)}\delta^{(k)}(c_k^2s_k^2\varepsilon_{11} + c_k s_k^3\varepsilon_{12} + s_k^4\varepsilon_{22}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $s_k = \sin \theta^{(k)}$ ,  $c_k = \cos \theta^{(k)}$ . Пренебрегаем эффектом Пуассона деформации нитей в силу предполагаемой тонкости нитей.



**2. Расчет анизотропных оболочек** Рассматриваем две тонкие круговые анизотропные цилиндрические оболочки, отличающиеся друг от друга расположением систем усиливающих их нитей (рис. 1). В первом случае это оболочка, имеющая две одинаковые системы нитей, расположенные под углом  $\theta$  и  $-\theta$  к образующим,  $E^{(1)} = E^{(2)}$ ,  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)}$ ,  $\theta^{(1)} = -\theta^{(2)}$ . Во втором случае оболочка имеет одну систему нитей эквивалентной жесткости  $E^{(3)} = E^{(1)}$ ,  $\delta^{(3)} = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ ,  $\theta^{(3)} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

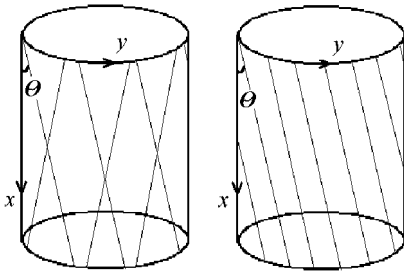


Рис. 1.

На обоих краях оболочки прием условия заделки. Далее, учитывая, что при кручении оболочка теряет устойчивость с образованием вмятин от края до края оболочки, слегка наклоненных к образующим, удовлетворяем также условию периодичности в окружном направлении.

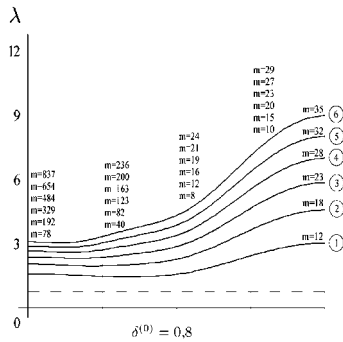


Рис. 2.

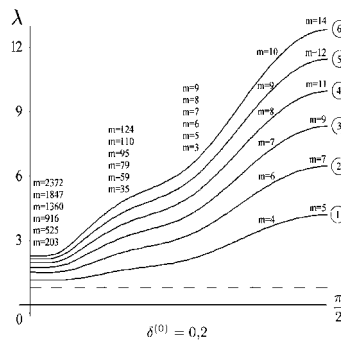


Рис. 3.

При расчетах критических усилий примем:  $h = 0.005R$ , где  $h$  и  $R$  — толщина и радиус оболочки соответственно,  $\nu = 0.3$ , доля изотропной части  $\delta^{(0)} = 0.8$  (относительно небольшое содержание нитей) и  $\delta^{(0)} = 0.2$  (содержание нитей значительно). Жесткость нитей возьмем в 50, 100, 150, 200, 250 и 300 раз больше жесткости материала оболочки.

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчета критических усилий для оболочки с двумя симметрично расположенными системами нитей и с долей изотропной части  $\delta^{(0)} = 0.8$  и  $\delta^{(0)} = 0.2$  соответственно в зависимости от угла наклона нитей  $\theta$ . Графики 1-6 отвечают соотношениям жесткости нитей по отношению к жесткости материала оболочки: больше в 50, 100, 150, 200, 250 и 300 раз соответственно.

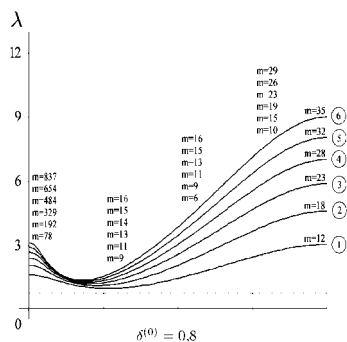


Рис. 4.

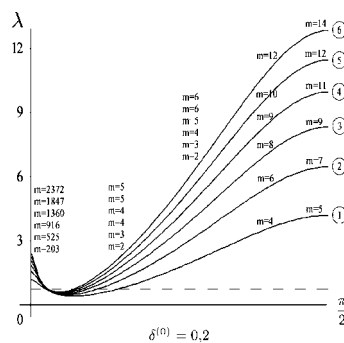


Рис. 5.

Рис. 4 и 5 отвечают расчетам оболочки с одной системой усиливающих нитей с долей изотропной части  $\delta^{(0)} = 0.8$  и  $\delta^{(0)} = 0.2$  соответственно.

В первую очередь следует отметить существенное повышение параметра критической нагрузки  $\lambda$  с ростом жесткости нитей и одновременным увеличением числа волн  $m$  по сравнению с изотропной оболочкой в обоих случаях (пунктирная линия). Также в обоих случаях выявлено существенное влияние угла наклона нитей на значения критического параметра и форму потери устойчивости.

Для оболочки с одной обмоткой наблюдается резкое падение параметра критической нагрузки  $\lambda$  при  $\theta$  в районе  $\pi/18$  (рис. 4, 5), причем в последнем случае значение критического параметра лежит ниже значения для изотропной оболочки. Это происходит в том случае, когда угол наклона нитей совпадает с углом образования вмятин. Таким образом, для каждой заранее заданной системы нитей можно вычислить угол наклона при котором устойчивость минимальна, и избегать такого расположения нитей в оболочках, работающих на кручение.

Наиболее же устойчивой к кручению является конструкция, ко-

гда нити расположены в оболочке по параллелям, перпендикулярно к образующим. Это объясняется тем, что в этом случае нити работают на растяжение и препятствуют образованию большого числа волн в окружном направлении.

Необходимо отметить существенное влияние степени анизотропии на значения критической нагрузки и форму потери устойчивости, что легко видеть, сравнивая графики на рис. 2, 3 и рис. 4, 5 соответственно. Так, в случае большего (в 4 раза) количества нитей, значения критических параметров различаются примерно на треть.

### Список литературы

1. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.

### Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной пластинами

И. Н. Макаренко  
(irina07@hotmail.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*Исследованы низкочастотные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной по параллелям кольцевыми пластинами прямоугольного поперечного сечения. Разработан численный метод решения системы уравнений колебаний, основанный на использовании ортогональной прогонки и позволяющий определять низшие частоты колебаний оболочки для любого числа пластин.*

**1. Основные уравнения.** Пусть первой цилиндрической оболочке соответствует интервал изменения длины дуги меридиана  $s$  от  $s_1$  до  $s_2$ , второй цилиндрической оболочке — от  $s_2$  до  $s_3$ . На срединной поверхности пластины введем радиальную координату  $s_p$ ,  $s_p \in [1, 1 + b]$ , где  $b$  — безразмерная ширина кольцевой пластины. Параметры, характеризующие первую оболочку, пластину и вторую оболочку, будем обозначать символами с верхними индексами 1, 2 и 3 соответственно.

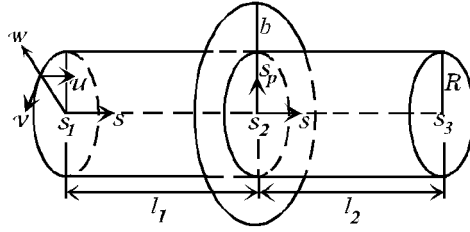


Рис. 1. Система координат.

Считаем, что все части изготовлены из одного материала. Оба цилиндра имеют безразмерную толщину  $h$ , пластина — толщину  $a$ .  $L$  — безразмерная длина всей цилиндрической оболочки:  $L = l_1 + l_2 = s_3 - s_1$  (Рис. 1).

Систему уравнений, описывающую малые свободные колебания каждой оболочки с  $m$  волнами по параллели, запишем в безразмерном виде [1]-[3]:

$$\begin{aligned} T_1' + \frac{B'}{B}(T_1 - T_2) + \frac{m}{B}S + \lambda u &= 0, \\ S' + 2\frac{B'}{B}S - \frac{m}{B}T_2 + \frac{Q_2}{R_2} + 2\frac{H'}{R_2} + \lambda v &= 0, \\ Q_1' + \frac{B'}{B}Q_1 + \frac{m}{B}Q_2 - \frac{T_2}{R_2} + \lambda w &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Штрих обозначает дифференцирование по  $s$  ( $s_p$ );  $B(s)$  — расстояние от точки срединной поверхности оболочки до оси вращения;  $R_2(s)$  — радиус кривизны;  $\lambda = 4\pi^2(1 - \nu^2)\rho\omega^2 R^2/E$  — искомый параметр частоты;  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала;  $\omega$  — частота колебаний в герцах;  $u, v, w$  — проекции перемещений точек срединной поверхности;  $T_1, T_2, S$  — нормальные и касательные усилия;  $H$  — крутящий момент.

Усилия  $T_i, Q_i, S$  связаны с перемещениями  $u, v, w$  по формулам:

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_1' + \frac{B'}{B}(M_1 - M_2) + 2\frac{m}{B}H, \quad Q_2 = -\frac{m}{B}M_2 + 2\frac{B'}{B}H, \\ M_1 &= \mu^4(k_1 + \nu k_2), \quad M_2 = \mu^4(k_2 + \nu k_1), \\ T_1 &= \varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \quad T_2 = \varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1, \quad H = \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\ S &= \frac{1 - \nu}{2}\left(v' - \frac{B'}{B}v - \frac{m}{B}u\right), \quad \varepsilon_1 = u', \quad \varepsilon_2 = \frac{m}{B}v + \frac{B'}{B}u + \frac{w}{R_2}, \\ k_1 &= \vartheta_1', \quad k_2 = \frac{m}{B}\vartheta_2 + \frac{B'}{B}\vartheta_1, \quad \vartheta_1 = -w', \quad \vartheta_2 = \frac{m}{B}w + \frac{v}{R_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\vartheta_1, \vartheta_2$  — углы поворота элемента срединной поверхности вокруг тангенциальных осей;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $k_1, k_2$  — компоненты тангенциальной и изгибной деформации;  $\mu$  — малый параметр. Для обоих цилиндров  $\mu_1^4 = h^2/12$ , для пластины  $\mu_2^4 = a^2/12$ .

Формулы (1)–(2) представляют собой запись трех систем уравнений, описывающих свободные колебания пластины и двух цилиндрических оболочек.

На краях цилиндра  $s = s_1$  и  $s = s_3$  заданы либо условия шарнирного опирания  $v = w = T_1 = M_1 = 0$ , либо условия жесткой заделки  $u = v = w = \vartheta_1 = 0$ . Край круговой пластины  $s_p = 1 + b$  свободен:  $T_1 = M_1 = S = Q_1$ .

На параллели сопряжения  $s = s_2$ ,  $s_p = 1$  должны быть выполнены условия непрерывности перемещений, усилий, угла поворота  $\vartheta_1$  и момента  $M_1$ :

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= -u^{(2)}, \quad u^{(1)} = w^{(2)}, \quad w^{(3)} = -u^{(2)}, \quad u^{(3)} = w^{(2)}, \\ \vartheta_1^{(1)} &= \vartheta_1^{(2)}, \quad \vartheta_1^{(2)} = \vartheta_1^{(3)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad v^{(2)} = v^{(3)}, \\ M_1^{(1)} + \varkappa M_1^{(2)} - M_1^{(3)} &= 0, \quad T_1^{(1)} + \varkappa Q_1^{(2)} - T_1^{(3)} = 0, \\ Q_1^{(1)} - \varkappa T_1^{(2)} - Q_1^{(3)} &= 0, \quad S^{(1)} + \varkappa S^{(2)} - S^{(3)} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varkappa = a/h = \mu_2^2/\mu_1^2$ .

**2. Численное интегрирование уравнений колебаний оболочек.** Введем обозначения  $y_1 = u$ ,  $y_2 = v$ ,  $y_3 = w$ ,  $y_4 = \vartheta_1$ ,  $y_5 = T_1$ ,  $y_6 = S$ ,  $y_7 = M_1$ ,  $y_8 = Q_1$  и преобразуем систему (1)–(2) для каждой из трех частей конструкции к нормальной форме  $dy/ds = A(s, \mu, \lambda)y$ . Получим три системы линейных дифференциальных уравнений, каждая из которых имеет восьмой порядок. При вычислении коэффициентов матрицы  $A(s, \mu, \lambda)$  учтем, что  $B^{(1)} = B^{(3)} = R_2^{(1)} = R_2^{(3)} = 1$ . При интегрировании системы по пластине выберем направление интегрирования от большего радиуса пластины к меньшему. Тогда  $B(s_p) = 2 + b - s_p$ , при  $s_p \in [1, 1 + b]$ , и  $1/R_2^{(2)} = 0$ .

Пусть  $\bar{y}_j^{(k)} = (u_j^{(k)}, v_j^{(k)}, w_j^{(k)}, \vartheta_{1j}^{(k)}, T_{1j}^{(k)}, S_j^{(k)}, M_{1j}^{(k)}, Q_{1j}^{(k)})^T$ ,  $j = 1, \dots, 8$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Для первой оболочки и пластины общее решение, удовлетворяющее условиям при  $s = s_1$  и при  $s_p = 1 + b$ , всегда можно представить

в виде:

$$\bar{y}^{(1)} = \sum_{j=1}^4 A_j \bar{y}_j^{(1)}, \quad \bar{y}^{(2)} = \sum_{j=1}^4 B_j \bar{y}_j^{(2)}. \quad (4)$$

В результате прогонки [4] по первой цилиндрической оболочке и по пластине находятся значения векторов  $\bar{y}_j^{(k)}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $k = 1, 2$  на параллели сопряжения  $s = s_2$ ,  $s_p = 1$ . Их координаты можно представить в виде четырех матриц  $U_1, U_2, F_1$  и  $F_2$ . Для второй цилиндрической оболочки общее решение ищется в виде:

$$\bar{y}^{(3)} = C_1 \bar{y}_1^{(3)} + \dots + C_8 \bar{y}_8^{(3)}, \quad (5)$$

где  $\bar{y}_1^{(3)}(s_2) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \dots, \bar{y}_8^{(3)}(s_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ .

Значения  $\bar{y}^{(3)}$  на краю  $s = s_3$  второй цилиндрической оболочки, можно найти прогонкой восьми векторов  $\bar{y}_j^{(3)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ .

Подставив решения (4)–(5) в условия (3) в точке сопряжения  $s = s_2$ ,  $s_p = 1$  и в граничные условия в точке  $s = s_3$ , получим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} U_1 \bar{A} = U_2 \bar{B}, \\ F_1 \bar{A} = F_2 \bar{B} + \bar{C}_2, \\ U_2 \bar{B} = \bar{C}_1, \\ F_3 \bar{C}_1 + U_3 \bar{C}_2 = 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} \bar{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)^T, \\ \bar{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)^T, \\ \bar{C}_1 = (C_1, C_2, C_3, C_4)^T, \\ \bar{C}_2 = (C_5, C_6, C_7, C_8)^T. \end{cases} \quad (6)$$

Для определения собственных частот колебаний сопряженных оболочек нужно приравнять нулю определитель системы (6). Понизим порядок определителя, исключив из системы (6) неизвестные  $B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, \dots, C_8$ . Получим систему четвертого порядка:  $[F_3 U_1 + U_3 (F_1 - F_2 U_2^{-1} U_1)] \bar{A} = 0$ .

В качестве векторов в точке сопряжения следует взять столбцы матрицы  $G = (U_1, H)^T$ , где  $H = F_1 - F_2 U_2^{-1} U_1$ . Тогда после прогонки этих векторов по второй цилиндрической оболочке и приравнивания нулю определителя на ее краю, получится уравнение, эквивалентное равенству нулю определителя системы (6). Отыскав его корни, вычисляем значения частот колебаний сопряженных оболочек.

Если цилиндрическая оболочка подкреплена двумя или более пластинами, то в каждой из точек сопряжения используем алгоритм

составления новых линейно-независимых векторов, описанный выше. На краю последней оболочки, приравнявая нулю определитель системы однородных алгебраических уравнений, находим наименьшее собственное значение частотного параметра  $\lambda$  и соответствующую ему первую частоту колебаний конструкции.

**3. Результаты расчетов.** Ниже представлены результаты расчетов методом ортогональной прогонки для шарнирно опертой цилиндрической оболочки длины  $L$ , сопряженной с одной (рис. 2) и двумя (рис. 3) пластинами. По оси абсцисс показано отношение  $k = b/a$ , по оси ординат — значения первой частоты колебаний конструкции в герцах. Пластины равномерно расположены вдоль образующей цилиндра. Рассматривалась конструкция со следующими параметрами:  $h = 0.01$ ,  $L = 4.0$ ,  $a = 0.01$ ,  $b = k \cdot a$ ,  $R = 0.1$  м,  $E = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 730$  кг/м<sup>3</sup>.

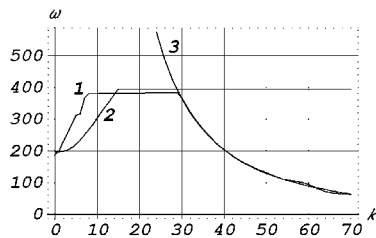


Рис. 2. Первая частота колебаний цилиндра с одной пластиной.

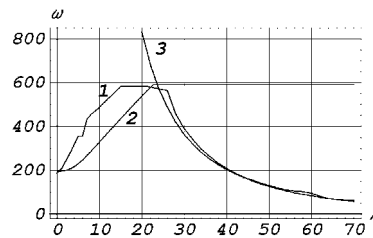


Рис. 3. Первая частота колебаний цилиндра с двумя пластинами.

Кривая 1 — результат решения краевой задачи (1)–(3) методом ортогональной прогонки.

При малых значениях  $k$  кольцевая пластина является достаточно узкой, и ее можно рассматривать как круговой стержень с прямоугольным поперечным сечением (стержневая модель). Кривая 2 на рис. 2 и 3 показывает значения наименьшей частоты конструкции, соответствующие стержневой модели. Эти значения получены по асимптотическим формулам, предложенным в работах [2], [3].

Кривая 3 описывает колебания пластины с жестко заделанным краем  $s_p = 1$  и свободным краем  $s_p = 1 + b$ .

Первая частота стержневой модели (кривая 2) хорошо совпадает с первой частотой более точной модели кольцевой пластины (кривая 1) только для  $k < 30$ . С увеличением  $k$  наименьшая частота

цилиндрической оболочки, подкрепленной одной или двумя пластинами (кривая 1), приближается к первой частоте пластины с жестко заделанным краем  $s_p = 1$  и свободным краем  $s_p = 1 + b$  (кривая 3).

При малых  $k$  и цилиндрическая оболочка и пластины колеблются с числом волн по параллели  $m \neq 0$ . При больших  $k$  колеблется только пластина, в то время как цилиндрическая оболочка остается практически неподвижной, и колебания являются осесимметричными ( $m = 0$ ).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00327).

#### Список литературы

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1979. 384 с.
2. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб: Изд.С.-Петербургского ун-та. 1999. 196 с.
3. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shell // 4th EUROMECH, Mets, France, June 2000. Book of abstract, II. P. 545.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук, 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171-174.

#### Влияние температуры на собственные частоты колебаний анизотропной пластины

Г. А. Матвеева

(mga@phoenix.math.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*В работе исследуется влияние температуры на собственные частоты колебаний сдвига однородной анизотропной пластины. Толщина пластины предполагается постоянной. Интерес к этой задаче связан с использованием таких пластин для кварцевых резонаторов [1,2]. Рассматривается влияние зависимости модулей упругости от температуры. Расчеты проводились для пластин из меди и серебра. Методом возмущений найдены поправки к собственным частотам колебаний пластины.*

1. **Влияние температурной зависимости модулей упругости.** В декартовой системе координат  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , система



уравнений гармонических колебаний трехмерного упругого анизотропного тела имеет вид [3,4]

$$\sum_{j,k,l=1}^3 E_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad (E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}),$$

где  $u_k$  — проекции перемещения,  $E_{ijkl}$  — компоненты тензора модулей упругости,  $\rho$  — плотность,  $\omega$  — частота колебаний. По повторяющимся индексам проводится суммирование, латинские индексы принимают значения 1,2,3.

Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными  $\sigma_{i3} = 0$  ( $x_3 = 0, h$ ). По закону Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\sigma_{ij}$  — напряжения.

Считаем, что толщина пластины  $h$  постоянна, рассматриваем колебания сдвига, поэтому функции  $u_i$  зависят только от  $x_3$  [3]. В этом случае краевая задача принимает вид

$$\begin{cases} E_{i313} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + E_{i323} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + E_{i333} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2 u_i = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = 0 \text{ при } x_3 = 0, h, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1)$$

Она определяет три серии частот колебаний [3]

$$\omega_{pn} = n\pi h^{-1} (\lambda_p \rho^{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (p = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где  $\lambda_p$  — собственные значения матрицы  $E_{i3k3}$ . Частотам (2) соответствуют формы колебаний  $u_i^p(x_3) = U_i^p \cos(n\pi h^{-1} x_3)$ , где  $U_i^p$  — собственные векторы матрицы  $E_{i3k3}$ , которые предполагаются нормированными:

$$\sum_{k=1}^3 E_{i3k3} U_k^p = \lambda_p U_i^p, \quad \sum_{i=1}^3 U_i^p U_i^q = \delta_{pq}.$$

Рассмотрим, какое влияние на собственные частоты колебаний пластины оказывает зависимость ее модулей упругости от температуры. Температурные зависимости модулей упругости могут быть

представлены степенным рядом:

$$E_{i3k3}(\theta) = E_{i3k3}(\theta_0)[1 + T_{E_{i3k3}}^{(1)}(\theta - \theta_0)] + O((\theta - \theta_0)^2),$$

где  $\theta$  — конечная температура,  $\theta_0$  — начальная фиксированная температура,  $T_{E_{i3k3}}^{(1)}$  — температурный коэффициент первого порядка модулей упругости. Обозначим  $\Delta E_{i3k3} = E_{i3k3} T_{E_{i3k3}}^{(1)}$ .

Решения системы уравнений гармонических колебаний после введения температурных характеристик модулей упругости

$$\sum_{k=1}^3 (E_{i3k3} + \Delta E_{i3k3} \Delta\theta) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2} + \rho\omega^2 u_i = 0$$

будем искать в виде:  $u_i^p = u_{i,0}^p + \Delta\theta \Delta u_i^p$ ,  $\omega_p = \omega_{p,0} + \Delta\theta \Delta\omega_p$ , где  $u_{i,0}^p$ ,  $\omega_{p,0}$  — решения системы (1),  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ ,  $\Delta u_i^p$ ,  $\Delta\omega_p$  — коэффициенты поправок к собственным формам и частотам. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\Delta\theta$ . При  $\Delta\theta^0$  получим систему (1), которой, очевидно, удовлетворяют  $u_{i,0}$ ,  $\omega_0$ . При  $\Delta\theta^1$ , оставляя в левой части слагаемые, содержащие члены  $\Delta u_i$ , получим следующую систему:

$$\begin{aligned} & (E_{i3k3} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho\omega^2) \Delta u_k \Big|_{i=k} + \sum_{k=1}^3 E_{i3k3} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Delta u_k \Big|_{i < k} = \\ & = -2\rho\omega \Delta\omega u_i - \sum_{k=1}^3 \Delta E_{i3k3} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u_k. \end{aligned}$$

Для существования решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть была ортогональна всем решениям  $u^p$  сопряженного однородного уравнения [5], т.е.

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} (2\rho\omega \Delta\omega(u_i, u_i) + (\Delta S u_k, u_i)) dx_3 = \\ & = \rho\omega \Delta\omega |U|^2 h - (\Delta S U_i, U_i) \frac{\pi^2 n^2}{2h} = 0, \end{aligned}$$

где  $(, )$  — скалярное произведение, а  $\Delta S$  — матрица поправок модулей упругости  $\Delta E_{i3k3}$ .

Найденный коэффициент поправки к собственной частоте  $\Delta\omega$  имеет вид

$$\Delta\omega_{pn} = \frac{\pi^2 n^2 (\Delta S U_i^p, U_i^p)}{2h^2 \rho\omega_{pn}}, \quad (3)$$

где  $U^p$  — собственные векторы матрицы  $E_{i3k3}$ .

Таким образом, из-за влияния температуры собственные частоты колебаний пластины будут вычисляться по формулам:

$$\omega_{pn} = \omega_{pn}^{(0)} + \omega_{pn}^{(1)} \Delta\theta \quad (p = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, \dots),$$

где  $\omega_{pn}^{(0)}$  — значение частоты при  $\theta = \theta_0$ ,  $\omega_{pn}^{(1)} = \Delta\omega_{pn}$ .

**2. Результаты расчетов.** Расчеты проводились для пластин из меди и серебра, для которых  $\rho_1 = 9300 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 18500 \text{ кг/м}^3$  соответственно [2]. Данные  $E_{i3k3}$ ,  $T_{E_{i3k3}}$  также взяты из [2]. Формула относительной поправки, как следует из (2) и (3), такова:

$$\frac{\omega_{pn}^{(1)}}{\omega_{pn}^{(0)}} \Delta\theta = r_{pn} \Delta\theta, \quad \text{где} \quad r_{pn} = \frac{(\Delta S U_p, U_p)}{2\lambda_p}.$$

Для пластины из меди толщиной  $h = 0.001 \text{ м}$ , например, получаем, что при изменении температуры на  $10^\circ$  ( $\Delta\theta = 10^\circ$ )  $\omega_{2,1} = 0,18 * 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{2,1}^{(1)} \Delta\theta = -0,13 * 10^4 \text{ с}^{-1}$  ( $p = 2, \quad n = 1$ ). Видим, что поправка  $\omega_{pn}^{(1)} \Delta\theta$  может внести вклад в величину  $\omega_{pn}$  в четвертой значащей цифре.

### Список литературы

1. Bauer S. M., Filippov S. B., Semenov B. N., Tovstik P. E., Vorokhovskiy Y. L. The effect of the temperature on the vibration frequencies of plane-convex plate of quartz resonators // Proceeding of the IEEE Frequency Control Symposium 27-29 May 1992, The Hershey Lodge and Convention Center Hershey, Pennsylvania, USA. P. 603—606.
2. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах. М. 1990. 583 с.
3. Товстик П.Е. Свободные высокочастотные колебания анизотропной пластины переменной толщины // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 3 С. 473-479.
4. Новацкий В. Теория упругости. М. 1975. 872 с.
5. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в примерах и задачах. СПб. 1997. 275 с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М. 1987. 360 с.

## Возмущения спектра собственных частот колебаний оболочек

А. Л. Смирнов, О. В. Федчун  
(smirnov@bals.usr.pu.ru, olga@of4380.spb.edu)  
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*Известно, что анализ задач колебаний и устойчивости упругих систем предполагает решение граничных задач. При этом частоты колебаний или критические нагрузки являются корнями характеристического уравнения. Найти аналитические выражения для значений корней возможно лишь для узкого круга задач. Однако, когда коэффициенты характеристического уравнения зависят от малых параметров, возникает возможность асимптотического нахождения корней. В статье рассмотрен случай, когда исходная задача сводится к задаче на собственные значения для пучка операторов (несамосопряженное возмущение). К такого вида задачам приводит, например, анализ вращающихся упругих тел.*

**1. Случай простых собственных корней.** Начнем с рассмотрения стандартной задачи на собственные значения. Рассматриваем задачу вида

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}, \quad \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k \mu^k. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — матрица размера  $[n \times n]$ ,  $\mathbf{U}$  — собственный вектор размера  $[n \times 1]$ ,  $\lambda$  — собственное число, а  $\mu$  — малый параметр, то есть  $\mu \ll 1$ . Рассматривается случай, когда матрица  $\mathbf{A}_0$  симметрична. Представим собственные векторы и числа матрицы  $\mathbf{A}$  в виде рядов по малому параметру  $\mu$

$$\mathbf{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k \mu^k, \quad \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mu^k, \quad (2)$$

подставим их в (1) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получим систему уравнений ( $k = 0, 1, \dots$ )

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I})\mathbf{U}_k = \sum_{k_1=1}^{k-1} (\lambda_{k-k_1} \mathbf{U}_{k_1} - \mathbf{A}_{k-k_1} \mathbf{U}_{k_1}) + (\lambda_k \mathbf{U}_0 - \mathbf{A}_k \mathbf{U}_0),$$

При  $k = 0$  получаем спектр  $\lambda_0^i$  и собственные векторы  $U_0^i$  невозмущенной задачи. Пусть все собственные значения невозмущенной задачи простые, а ортонормированные собственные векторы  $e_j$  невозмущенной задачи образуют базис, в котором мы представляем векторы в виде  $U_k^i = \sum_{j=1}^n D_{kj}^i e_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Очевидно, что  $D_{0j}^i = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Используя свойство ортогональности собственных векторов невозмущенной задачи  $e_j$  и полагая  $j \neq i$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) получаем

$$D_{kj}^i = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left( \sum_{k_1=1}^{k-1} \left( D_{k_1 j}^i \lambda_{k-k_1}^i - \sum_{l=1}^n D_{k_1 l}^i (A_{k-k_1} e_l) e_j \right) - (A_k e_i) e_j \right),$$

где  $\Delta_{ij} = \lambda_0^j - \lambda_0^i$ . Коэффициенты  $D_{ki}^i$  для  $k = 1, 2, \dots$  неопределены. Можно считать, что  $D_{ki}^i = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$ . Это означает, что поправка к собственному вектору  $e_i$  ищется в подпространстве, ортогональном этому вектору.

Теперь полагая,  $j = i$  при  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots$  получим формулу для  $\lambda_k^i$

$$\lambda_k^i = \sum_{k_1=1}^{k-1} \sum_{l=1}^n D_{k_1 l}^i (A_{k-k_1} e_l) e_i + (A_k e_i) e_i.$$

**2. Спектр пучка операторов.** Теперь перейдем к задаче о несамосопряженном возмущении (спектр пучка операторов). Рассматривается задача вида  $AU = B(\lambda)U$ , где матрицы  $A$  и  $B$  представляются в виде  $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^k$ ,  $B = \sum_{i=1}^N B_i \lambda^i$ ,  $B_i = \sum_{k=0}^{\infty} B_{i,k} \mu^k$ . Решение, как и прежде, ищется в виде разложения по малому параметру  $\mu$ . Нас интересует частный случай, а именно  $A = A_0 + A_2 \mu^2$ ,  $B = A_1 \mu \lambda + I \lambda^2$ . Задачи такого вида возникают при исследовании свободных колебаний вращающихся тел. В этом случае член  $A_0$  связан с упругой энергией невращающегося тела,  $A_2$  — с энергией начальных напряжений и центробежных сил и  $A_1$  — с энергией сил инерции Кориолиса. При этом  $U$  — вектор перемещений,  $\lambda$  — параметр собственной частоты,  $\mu$  — параметр угловой скорости вращения. На этот раз, представляя собственные векторы и числа матрицы  $A$  в виде (2), получим ( $k = 0, 1, \dots$ )

$$(A_0 - (\lambda_0)^2 I)U_k =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{k-1} \left( \lambda_{k-k_1-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_{k_1} - A_2 \mathbf{U}_{k-2} + \sum_{l=0}^{k-k_1} \lambda_l \lambda_{k-k_1-l} \mathbf{U}_{k_1} \right).$$

При  $k=0$  задача на собственные значения имеет вид

$$\mathbf{A} \mathbf{U}_0^i = (\lambda_0^i)^2 \mathbf{U}_0^i.$$

Спектр состоит из  $n$  пар частот вида  $+\lambda_0^i, -\lambda_0^i$ , каждой из которых соответствует собственный вектор  $\mathbf{U}_0^i$ . Будем рассматривать случай, когда все собственные числа  $\lambda_0$  простые и отличны от нуля. Тогда собственные векторы образуют ортогональный базис, элементы которого после нормирования обозначим  $\mathbf{e}_i$ . Далее получим формулы для поправок к частотам и собственным векторам  $\lambda_k^i$  и  $D_{kj}^i$

$$\begin{aligned} D_{kj}^i &= \frac{1}{\lambda_0^j - \lambda_0^i} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k_1=1}^{k-1} \left( \sum_{k_2=0}^{k-k_1} \lambda_{k_2}^i D_{k_1 l}^i (\mathbf{B}_{k-k_1-k_2} \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_j - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_{k_1 l}^i (\mathbf{A}_{k-k_1} \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_j \right) + \sum_{k_2=0}^{k-1} \lambda_{k_2}^i (\mathbf{B}_{k-k_2} \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j - (\mathbf{A}_k \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j \right), \\ \lambda_k^i &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k_1=1}^{k-1} \left( \sum_{k_2=0}^{k-k_1-1} -\lambda_{k_2}^i D_{k_1 l}^i (\mathbf{B}_{k-k_1-k_2} \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_{k_1 l}^i (\mathbf{A}_{k-k_1} \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_i \right) - \sum_{k_2=0}^{k-1} \lambda_{k_2}^i (\mathbf{B}_{k-k_2} \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i + (\mathbf{A}_k \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right) \\ &\quad (k=1, 2, \dots \quad i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

Можно заметить, что первые поправки для частот из пары  $\pm\lambda^i$  одинаковы, а поправки к соответствующему собственному вектору отличаются знаком. Для второй поправки ситуация обратная.

$$\lambda_{\pm}^i = \pm\lambda_0^i + \mu\lambda_1^i \pm \mu^2\lambda_2^i \dots, \quad \mathbf{U}^i = \mathbf{U}_0^i \pm \mu\mathbf{U}_1^i + \mu^2\mathbf{U}_2^i \pm \dots.$$

Возмущение в указанной задаче приводит к расщеплению собственных частот и векторов и к их сдвигу. При этом ответственными за расщепление оказываются нечетные члены разложения. Уместен вопрос, при каких условиях на матрицу  $\mathbf{B}$  в указанной задаче происходит только сдвиг частот? При произвольном  $n$  достаточным условием оказывается следующее ограничение на коэффициенты матрицы  $\mathbf{B}$ :  $b_{ij}a_{ij} = 0$  и  $b_{ij} = b_{ji}$   $i, j = 1, \dots, n$ .

**3. Колебания вращающейся оболочки.** Рассмотрим уравнение колебаний вращающейся оболочки, имеющее структуру

$$(\mathbf{A}_0 - \mu\lambda\mathbf{A}_1 + \mu^2\mathbf{A}_2 - \lambda^2 I)U = 0, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 2q \\ 0 & 2q & q^2 \end{pmatrix},$$

$$a = p^2 + (1 - \nu)/2q^2, \quad b = (1 + \nu)/2pq, \quad c = \nu p, \quad d = (1 - \nu)/2p^2 + q^2 + h^4(2p^2(1 - \nu) + q^2), \\ e = q + h^4((2 - \nu)p^2q + q^3), \quad f = 1 + h^4(p^2 + q^2)^2, \\ q = m/2, \quad p = k\pi/3, \quad \nu = 0.3, \quad h - \text{относительная толщина}$$

Для того, чтобы определить частоту  $\lambda$ , следет знать  $\lambda_0$  и  $U_0$ . В общем случае формулы для  $\lambda_0$  и  $U_0$  достаточно громоздки и содержат параметры  $p, \nu, h/R, L/R, q$ . Рассмотрим колебания тонкой оболочки средней длины при  $\nu = 0.3$ , с числом волн по параллели  $m = 3$  и с одной волной в осевом направлении  $k = 1$ . Колебания с таким числом волн представляют особый интерес, так как собственные частоты будут минимальными ([2]). Решение невозмущенной задачи представлено в таблице 1.

$\lambda_0$	$U_0(e_j)$
$\pm 0.258669$	$\{0.1645, -0.545619, 0.82173\}$
$\pm 1.1917$	$\{0.883854, -0.288293, -0.36836\}$
$\pm 2.0077$	$\{0.437883, 0.786885, 0.434823\}$

Таблица 1.

Собственные векторы, ортогональные для невозмущенной задачи, теряют ортогональность для ненулевых  $\mu$ . Например, условие ортогональности для уравнения (3) при условии, что  $\mathbf{A}_0$  симметрична, имеет вид  $\mu U^i \mathbf{A}_1 U^j + (\lambda^i + \lambda^j) U^i U^j = 0$ .

В таблице 2 представлены для сравнения результаты, полученные аналитически и по асимптотическим формулам. Полученный ряд является формальным асимптотическим, т.е., вообще говоря, расходящимся. Область сходимости ряда, т.е. область применимости метода возмущений, исследована в [1]. Эта область существенно зависит от показателя изменчивости решения.

	$\lambda_0$	$\lambda(\mu = 0.1)$	двучленное приближение	трехчленное приближение
$\lambda_{-}^3$	-2.0077	-2.0928	-2.09237	-2.09287
$\lambda_{-}^2$	-1.917	-1.22322	-1.22369	-1.22329
$\lambda_{-}^1$	-0.258669	-0.175606	-0.175811	-0.175812
$\lambda_{+}^1$	0.258669	0.355142	0.355151	0.35525
$\lambda_{+}^2$	1.1917	1.181153	1.18122	1.18162
$\lambda_{+}^3$	2.0077	1.95495	1.9555	1.955

Таблица 2.

Низкочастотные колебания цилиндрических оболочек — это квазипоперечные колебания промежуточной изменяемости, и для них метод возмущения применим при условии  $\mu < \varepsilon^{-1/2}$ ,  $\varepsilon \sim (t/R)^{-1/4}$ ,  $t, R$  — размерные толщина и радиус. В данном случае  $\mu < 0.4$ .

### Список литературы

1. Товстик П.Е., Смирнов А.Л. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. М.: Наука, 1984. С. 280-290.
2. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.

## О деформации капсулы хрусталика при аккомодации

А. С. Тупяев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

**1. Введение.** Изучение механизма аккомодации остается актуальным в настоящее время. В последнее время появились работы Р.Шахара, в которых сделаны попытки опровергнуть классическую теорию аккомодации Гельмгольца и построить новую теорию. В работе [1] предпринята попытка провести математическое доказательство теории Шахара, основанное на рассмотрении линейной модели деформации капсулы хрусталика под действием сил, равнодействующая которых лежит в экваториальной плоскости. Недавно появились новые работы [2,3], в которых при помощи прикладной программы



АВАQUS проведено исследование больших (нелинейных) деформаций капсулы хрусталика при аккомодации. Результаты работ [2,3] согласуются с классической теорией Гельмгольца.

В данной работе на основе безмоментной теории оболочек рассматриваются большие деформации капсулы хрусталика, а также изучается изменение давления жидкости внутри хрусталика при аккомодации. Используется упрощенная модель хрусталика глаза (как и в работах [1-3]), не учитывающая влияния на него со стороны стекловидного тела глаза.

**2. Построение модели хрусталика.** Хрусталик представляет собой тонкую оболочку, наполненную практически несжимаемой жидкостью. Известно, что в свободном состоянии капсула хрусталика принимает форму, близкую к сферической.

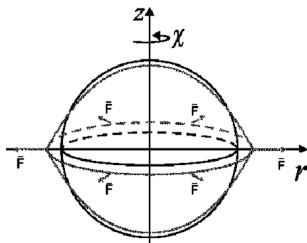


Рис. 1.

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \chi, z)$  (рис. 1.). Исследуется деформация хрусталика при растяжении силами, направленными от центра и лежащими в плоскости  $z = 0$ , проходящей через экватор. Обозначим через  $R$  — радиус недеформированной капсулы хрусталика,  $\bar{R}$  — радиус хрусталика, находящегося только под действием внутренней жидкости, до растяжения силами,

лежащими в плоскости  $z = 0$ , а  $R_1$  — радиус круга, образованного сечением плоскостью  $z = 0$  оболочки хрусталика после растяжения.

Опишем напряженно-деформированное состояние оболочки хрусталика двумя функциями (см. рис.2):

$$\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, R_1]; \quad \psi : [0, R_1] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}].$$

Функция  $\varphi$  сопоставляет угловой координате элемента поверхности оболочки до деформации, координату  $r$  того же элемента поверхности после деформации. При известной форме деформации данная функция позволяет найти напряжения по поверхности оболочки. Функция  $\psi$  сопоставляет координате  $r$  элемента поверхности оболочки после деформации угол между плоскостью  $z = 0$  и нормалью к этому элементу поверхности оболочки.

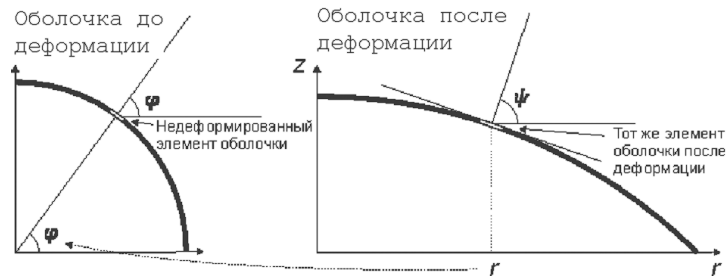


Рис. 2

Функция  $\varphi$  монотонна, поскольку оболочка растягивается при деформации по всей поверхности. Таким образом, для удобства в дальнейшем будем рассматривать вместо  $\varphi$  обратную ей функцию  $\varphi : [0, R_1] \rightarrow [0, \pi/2]$ .

Главные направления кривизны оболочки в силу осевой симметрии совпадают в каждой точке с направлениями координатных линий  $r = \text{const}$  и  $\chi = \text{const}$ .

Обозначим кривизны и деформации в направлении  $r = \text{const}$  и  $\chi = \text{const}$  как  $\rho_\chi, \rho_r, \varepsilon_\chi, \varepsilon_r$  соответственно. Для определения этих величин нетрудно вывести следующие соотношения:

$$\rho_\chi(r) = \frac{\cos(\chi)}{r}, \quad \rho_r = -\psi' \sin(\psi) = \cos(\psi)',$$

$$\varepsilon_\chi(r) = \frac{r}{R \cos(\varphi)} - 1, \quad \varepsilon_r(r) = \frac{1}{\varphi' R \sin(\psi)} - 1.$$

**3. Определение напряженно-деформированного состояния оболочки.** Для описания напряженно-деформированного состояния оболочки воспользуемся уравнениями равновесия элемента поверхности оболочки в направлении нормали к поверхности оболочки и в направлении координатной линии  $\chi = \text{const}$ , а также интегралом, полученным из условия минимизации потенциальной энергии деформации оболочки. Примем для простоты коэффициент Пуассона оболочки равным нулю. Первое уравнение

$$\rho_\chi \varepsilon_\chi + \rho_r \varepsilon_r = \frac{p}{E h}, \quad (1)$$

где  $p$  – давление внутренней жидкости,  $E$  – модуль Юнга оболочки.

Второе уравнение

$$\frac{\varepsilon_\chi}{1 + \varepsilon_\chi} = \left( \frac{r \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \right)'. \quad (2)$$

Минимизируя потенциальную энергию деформации оболочки, получим следующее соотношение:

$$r^2 \cos(\psi)' [p/(E h) - \varepsilon_r \cos(\psi)'] = \varepsilon_r \cos^2(\psi). \quad (3)$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_r = \frac{\cos(\psi)' r^2}{\cos^2(\psi) + (\cos(\psi)')^2 r^2} \frac{p}{E h}; \quad \varepsilon_\chi = \frac{\cos(\psi) r}{\cos^2(\psi) + (\cos(\psi)')^2 r^2} \frac{p}{E h}.$$

Сделав замену переменной  $\cos(\psi) = \tau$  и подставив найденные значения  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\chi$  в уравнение (2), получим уравнение

$$\frac{\tau r}{\tau' r^2 + E h/p(\tau^2 + \tau'^2 r^2)} = \left( \frac{\tau' r^3}{\tau r + E h/p(\tau^2 + \tau'^2 r^2)} \right)'$$

Нетрудно подобрать частное решение этого уравнения  $\tau = C_1 r$ , откуда  $\psi = \arccos(C_1 r)$ . Это решение отвечает граничному условию  $\psi(0) = \pi/2$ , т.е. и является искомым. Таким образом, при использовании уравнений безмоментной теории, независимо от начальных условий, для любой деформации оболочка сохраняет форму двух сложенных сферических сегментов. Очевидно, что на окружности пересечения сферических сегментов ( $z = 0$ ) образуется зона сильных деформаций изгиба. В этой зоне моменты, которыми мы пренебрегаем, достигают значительных величин и за счет этого в окрестности экватора могут быть отклонения от сферической поверхности.

Подставив найденное значение  $\psi$  в уравнение (1), можно получить следующую приближенную формулу для вычисления  $\varphi$

$$\cos(\psi) = (p/(2E h) + C_1) R \cos(\varphi),$$

т.е. в первом приближении  $\cos(\psi)$  пропорционален  $\cos(\varphi)$ . А учитывая, что  $\cos(\psi) = r / R'$ , где  $R'$  – величина обратная кривизне поверхности оболочки после деформации, получим, что  $\varepsilon_\chi = \text{const}$ . Таким образом, в каждой точке поверхности, оболочка имеет одинаковую кривизну, находится под одинаковым давлением и одинаково

деформирована в направлении  $r = \text{const}$ . Из уравнения (1) следует, что в этом случае и  $\varepsilon_r = \text{const}$ . Таким образом, получаем, что оболочка равномерно растянута. Этот вывод позволяет нам распространить результаты вычислений и на случай коэффициента Пуассона, отличного от нуля. Для этого заменим далее модуль Юнга  $E$ , на следующее выражение, учитывающее вклад коэффициента Пуассона:  $E/(1 - \nu)$ . Постоянная  $C_1$  находится из граничных условий на функцию  $\varphi$ :

$$p(1 - \nu)/(Eh) = 2C_1(R_1/R - 1).$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние оболочки описывается соотношениями

$$\varepsilon_\chi = \varepsilon_r = \frac{4EhR_1/R - 1}{p\pi R(1 - \nu)} \arccos\left(\frac{pR_1(1 - \nu)}{2EhR_1/R - 1}\right) - 1,$$

$$\psi = \arccos\left(\frac{pr(1 - \nu)}{2EhR_1/R - 1}\right).$$

**4. Изменение давления внутри хрусталика при аккомодации.** Перейдем от функции  $\psi$ , описывающей форму деформации оболочки, к функции

$$z(r) = (\sqrt{1 - C_1^2 r^2} - \sqrt{1 - C_1^2 R_1^2})/C_1.$$

Объем хрусталика

$$V = \int_0^{R_1} 2\pi r z(r) dr = \frac{\pi}{3} \frac{2 - \sqrt{1 - C_1^2 R_1^2} (2 + C_1^2 R_1^2)}{C_1^3}.$$

Выражая  $C_1$  через  $V$  и подставляя  $C_1$  в формулу

$$p = \frac{2EhC_1}{(1 - \nu)} (R_1/R - 1),$$

мы таким образом можем найти давление внутри оболочки для любых значений  $R$ ,  $V$ ,  $R_1$ . Построим график зависимости  $p/p_0$  от  $R_1/R$ , где  $p_0$  — начальное давление внутри хрусталика, т.е. график зависимости относительного изменения давления от относительного изменения радиуса хрусталика в плоскости  $z = 0$ .

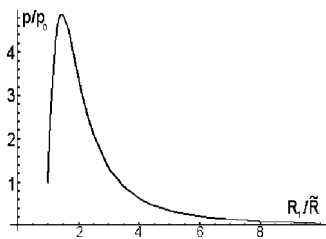


Рис. 3.

Для случая  $R \geq 0,95 \tilde{R}$ , т.е. малого начального растяжения внутренним давлением при растяжении в плоскости  $z = 0$ , давление сначала резко возрастает, а затем начинает падать (рис.3). Эти результаты согласуются с результатами, полученными в [2] и [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00234).

### Список литературы

1. Schachar R.A., Huang T., Huang X. Mathematic Proof of Schachar's Hypothesis of Accommodation // Ann. Ophthalmol., 1993. V. 25. P. 5-9.
2. Harvey J. Burd, Stuart J. Judge, Mark J. Flavell. Mechanics of accommodation of the human eye // Vision Research, 39, 1999. P. 1591-1595.
3. H.J. Burd, S.J. Judge, J.A. Cross Numerical modelling of the accommodating lens // Vision Research, 42, 2002. P. 2235-2251.

### О концепции собственного времени в механике сплошных сред

Г. Д. Федоровский  
(G.Fed@pobox.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Известно, что практически все сплошные среды при определенных условиях деформирования обладают "простой" (линейной) или "сложной" (нелинейной) "памятью", обусловленной структурным (релаксационным, фазовым, физическим) состоянием среды. Структурное состояние может изменяться при различных физико-химико-механических воздействиях, вызывающих ускорение или замедление процесса деформирования и разрушения. Нетривиальное влияние этих воздействий можно учесть, по-видимому, единственным в настоящее время унифицированным способом — посредством использования "эндохронного" (с собственным, внутренним временем) подхо-

да, путем применения соответствующих "простых" или "сложных" физико-химико-механо-временных аналогий (температурно-, влажностно-, радиационно-, напряженно-временных, и т.д.). Идея введения собственного времени является естественной с физической точки зрения, поскольку принципиально она аналогична общепризнанному фундаментальному физическому подходу эйнштейновской теории относительности, по которой при протекании процессов движения тел с большой скоростью и массой происходит, как было установлено А.А. Фридманом, изменение геометрии (метрики) пространства-времени. В механике сплошной среды на метрику времени может влиять множество физико-химико-механических воздействий. Это влияние с достаточной точностью, в отличие от теории относительности, может быть установлено из опытов.

При надлежащей нормировке и структуре масштабов (мер) внутреннего времени [1, 2], для описания немонотонных процессов можно применять квазилинейный принцип сложения (суперпозиции) механических откликов в пространстве эндохронного времени, с "простой" "памятью" этих откликов. В качестве функций "памяти" при моделировании процессов ползучести и релаксации применимы функции ползучести и релаксации, а при моделировании макроразрушения (повреждаемости) и наступления пластичности (текучести) — функция долговечности и (длительной) пластичности. "Простой" или "сложной" "памятью" обладает и эндохронное время. Функциями или функционалами памяти времени являются его масштабы, имеющие в нетривиальных случаях иерархическую конструкцию, что связано со сложным строением сред. По существу, в общем случае, этот масштаб является временной компонентой фундаментального метрического тензора пространства-времени.

Под структурным состоянием можно понимать различные состояния структуры среды при воздействиях — с "размытым" (плавным), и интенсивным переходом, характеризуемым соответствующим изменением функций "памяти". Например, эти переходы заметны на диаграмме растяжения материалов (напряжение-деформация) при постоянной скорости деформирования и температуре (участок упругого деформирования, вынужденной эластичности у полимеров, текучести у металлов (и у полимеров при повышенной температуре) неустановившейся и установившейся ползучести, вязкотекучести и момент разрушения). На термомеханической кривой зависимости де-

формации от температуры при растяжении с постоянной скоростью повышения температуры и фиксированным усилием также наблюдаются переходы: для полимеров — из стеклообразного состояния — в высокоэластическое, а, затем, — в вязкотекучее, как и для металлов. На кривых масштабов времени также заметны различные переходы. Наиболее нежелательными (катастрофическими) являются интенсивные переходы, которые могут иметь место в технологических и эксплуатационных процессах изготовления и использования ответственных изделий, особенно переходы, связанные с накоплением повреждений (разрушением), текучести (деформируемости) и температурным физическим (релаксационным) изменением структуры.

Рассмотрим унифицированные эндохронные уравнения ползучести и релаксации при одноосном растяжении, сжатии или чистом сдвиге, в случае малых деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= e(t) + \varepsilon^T(t) = \bar{P}^\xi \sigma + \varepsilon^T(t) = \\ &= \int_{0^-}^{\xi} P(\xi - \zeta) \dot{\sigma}(\zeta) d\zeta + \varepsilon^T(t) = \int_{0^-}^t P(\xi - \zeta) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \varepsilon^T(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \bar{R}^\xi e = \int_{0^-}^t R(\xi - \zeta) \dot{e}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$ ,  $e$  и  $\varepsilon^T$  — полная, механическая и тепловая деформации;  $\sigma$  — напряжение;  $t$  — лабораторное время;  $P$ ,  $\bar{P}^\xi$  и  $R$ ,  $\bar{R}^\xi$  — операторы ползучести и релаксации; а  $\xi$  — эндохронное время. Поскольку соотношения ползучести и релаксации квазилинейны в шкале внутреннего времени, то они взаимно обратимы в его пространстве (постулируется равенство эндохронных времен для напряжений и деформаций):  $\xi^\sigma = \xi^e = \xi \rightarrow G^\sigma = G^e = G$ , т.е. связаны соотношением  $\bar{P}^\xi R = \bar{R}^\xi P = 1$ . Аргумент подынтегральных функций, например, в (1)  $\xi^\sigma - \zeta$  в изотермическом случае (при  $\varepsilon^T = 0$ ), может быть определен следующим образом:  $\xi^\sigma(t) - \zeta = \bar{G}^\sigma(t - \tau) = G^\sigma [t - \rho, \sigma(\rho), \bar{f}^\sigma \sigma] (t - \tau)$ ,  $\bar{f}^\sigma \sigma = \int_0^\rho f^\sigma(\chi) \dot{\sigma}(\chi) d\chi$ ,  $f^\sigma(0) = 0$ .  $G^\sigma(t, \sigma, \bar{f}^\sigma \sigma) = g^\sigma(t, \sigma) \{1 - \bar{f}^\sigma \sigma\}$ ,  $g^\sigma$  и  $f^\sigma$  — масштабы внутреннего времени (иерархический набор масштабов: первый — обобщенный, второй — характеризующий  $\xi^\sigma$  в случае постоянного напряжения,

третий — ответственный за дополнительное изменение  $\xi^\sigma$  при переменном  $\sigma$ ; в [1] рассмотрены и другие варианты  $\xi$  и его масштабов). При  $\sigma(t) = H(t)\sigma^0 = \text{const } G = g(t, \sigma^0)$ , в случае  $\sigma \leq \sigma_l$  (в линейной области)  $G^\sigma = g^\sigma = 1$ ,  $\bar{f}^\sigma \sigma = 0$ ,  $\xi = t$ . При других физико-химических влияниях, например, "простом" действии температуры  $T$  необходимо  $t - \rho$  (и соответствующим образом  $\rho$ ) заменить на величину  $\xi^T - \zeta^T = \int_\rho^t g^T [T(\varphi)] d\varphi$ , где  $g^T(T)$  — масштаб времени по температуре.

Унифицированные эндохронные критерии прочности и отсутствия текучести в форме повреждаемости, базирующиеся на подходе (интеграле) Бейли имеют вид [2]

$$\omega_q(t) = \bar{\omega}_q^m t = \int_0^\xi \frac{d\zeta}{\xi_q[m(\zeta)]} = \int_0^t \frac{G[\tau, \sigma(\tau), \bar{f}\sigma]}{\xi_q[m(\zeta)]} d\tau \leq 1. \quad (5)$$

Здесь  $\omega$  — повреждаемость;  $\bar{\omega}^m$  — оператор повреждаемости;  $t$  — лабораторное время;  $m = \sigma, \dot{\sigma}, e, \dot{e}, A, I$  ( $A(\zeta) = \int_0^\zeta \sigma(\eta) \dot{e}(\eta) d\eta$  — работа (энергия),  $I(\zeta) = \int_0^\zeta \sigma(\eta) d\eta$  — импульс);  $m_q(\xi)$  — кривая длительной прочности ( $q = c$ ) или длительной текучести (пластичности) ( $q = p$ ).

В случае сложного напряженно-деформированного состояния изотропной среды рассмотрены определяющие уравнения с собственными временами для девиаторной и шаровых частей механических тензоров, а для анизотропной — с анизотропными временами [1], с введением соответствующих мер повреждаемости [2].

Критерий структурного перехода может быть дан в форме:

$$\xi(t) \leq \xi_s, \quad (6)$$

где  $\xi_s$  — эндохронное время структурного перехода.

Проанализируем некоторые результаты исследования ряда сред при деформировании. По полученным нами экспериментальным данным о ползучести и длительной прочности полиметилметакрилата (ПММА) при различных постоянных уровнях напряжения установлено, что во всем интервале времени (от минут до месяца) работа разрушения ПММА является инвариантом (постоянной):  $A_c = 3,1 \pm 0,3$  МПа (при  $t = 1$  мкс, в случае динамического нагружения, работа в 1,8 раза больше). Следует отметить другой ин-



тересный инвариант в отмеченном статическом промежутке лабораторного времени: достижение величины эндохронного времени определенного постоянного значения. Разрушение ПММА наступает при  $\lg(\xi_c^\sigma / \xi_0) = 6 \pm 0,2$  ( $\xi_0 = 1$  мин) (6). К ПММА применимы и другие критерии (5), но использование выявленных инвариантов во многих случаях эффективней.

В [3] получены кривые долговечности характеризующие переходы от статической фазы (ветви) к динамической полистирола (ПС), ПММА и ультрафарфора (УФ), происходящие для ПС и УФ приблизительно при  $\lg(\xi_c^\sigma / \xi_0) = \lg(t_c / t_0) = -4,5$  ( $t_0 = 1$  сек,  $\xi_c^\sigma = t_c$ , т.к. рассматривается линейная постановка), а для ПММА — при  $-4,2$ .

По экспериментальным данным Ж. Кэмбелла были исследованы [4] свойства достижения текучести мягкой стали при различных постоянных скоростях деформирования  $\dot{\gamma}$  в динамическом и статическом диапазонах и при различных температурах, а также в шкале обобщенного по температуре времени. Установлено, что температурно-скоростное и температурно-временное соответствия "сложные". Для описания наступления текучести при переменной нагрузке и температуре наиболее рационально использовать интегральные критерии типа "накопления" текучести, в которых в качестве основной, наиболее простой опорной функции ядер используется обобщенная кривая "долговечности" стойкости к текучести  $\dot{\gamma}_p(\xi_p^T)$ . Аналогичный вид имеют соотношения импульсного вида.

Проведенные нами опыты показали, что физические (релаксационные) переходы термовязкоупругих свойств различных полимерных материалов: частично-кристаллических фторопласта-10 и фторопласта-4МБ, а также сетчатого, сшитого эпоксидного компаунда ЭД-6 различны и соответствуют значениям логарифма эндохронного времени  $\xi_s^{T,\sigma}$  5, 9 и 7 при  $\xi = 1$  мин. Наиболее тугоплавкий, с большей степенью кристалличности полимер Ф-4 имеет слабый переход. "Сетчатый" ЭД-6 проявляет интенсивный переход из стеклообразного — в высокоэластическое состояние (при температуре стеклования  $T_g$  и температуре высокоэластического перехода —  $T_v$ ). На зависимости мер времени от температуры  $g^T(T)$  наблюдаются заметные переломы приблизительно при средних температурах  $T_{gv} = (T_g + T_v)/2$ . Существенно различие масштабов  $g^\sigma$ , характеризующих нелинейные свойства сред и обусловленных их строением.

## Список литературы

1. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 3 (№ 15). С. 87-91.
2. Федоровский Г.Д. Унифицированные макроскопические модели вязкоупругости и повреждаемости реологически сложных сред на базе концепций эндохронного "времени", накопления повреждений, энергетической и импульсной // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов / Тр. XIX Междуна. конф. СПб., 2001. Т. 2. С. 158-163.
3. Беллендир Э.Н. Экспериментальное исследование хрупкого разрушения твердых тел в волне растягивающих напряжений // Дисс. канд. физ.-мат. наук 01.04.07. СПб., 1990. 171 с.
4. Федоровский Г.Д. Математическое описание наступления текучести в металлах в условиях низких и высоких температур при высокоскоростных нагружениях. // Актуальные проблемы механики, прочности и теплопроводности при низких температурах / Тез. докл. УП науч.-технич. конф. СПб., 2001. С. 73-76.

## Секция V.

### История механики

#### О развитии геоцентрической концепции мироздания

*В.Б. Александров*

Северо-Западная академия государственной службы, Россия

Геоцентризм, характерный для античного миропонимания, впервые обрел свое систематическое выражение в картине мира, созданной Аристотелем. Не будучи научной, в современном смысле слова, она, тем не менее, давала связное, внутренне согласованное истолкование процессов земного и небесного миров. Космология и физика в этой картине мира сопрягались в единое, целостное видение окружающей действительности. По-видимому, главной ее особенностью явилась глубокая укорененность в повседневном опыте и здравом смысле той эпохи. Эта укорененность обусловила как продуктивные, так и слабые стороны данной картины мира.

Определяющей чертой методологии Аристотеля являлась опора на наблюдение. Соответственно главный критерий эффективности своих построений мыслитель видел в их соответствии наблюдениям. Так, в частности, сферы, введенные им для различных небесных тел, должны, как он сам полагал, "в своей совокупности объяснить наблюдаемые явления" [1, с.313]. Известно, что именно наблюдения за лунным затмением убедили Аристотеля в том, что Земля имеет шарообразную форму. Наблюдение же стало основой формулирования главного принципа его механики, согласно которому покой выступает естественным состоянием тел в подлунном мире и что движение возможно лишь при условии воздействия (в прямом контакте) на тело некоторого двигателя. Парадоксально, но факт, космология и физика Аристотеля в значительно большей степени основаны на непосредственном опыте, эмпирии, чем наука Нового времени. Как отмечает известный историк науки А. Койре, "аристотелевская наука

гораздо лучше согласовывалась с общепризнанным жизненным опытом, чем галилеева или декартова наука. В конце концов, тяжелые тела естественно падают вниз, огонь естественно взмывает вверх, Солнце и Луна восходят и заходят, а брошенные тела не сохраняют без конца прямолинейности своего движения: инерционное движение не является экспериментальным фактом; на деле повседневный опыт постоянно ему противоречит” [2, с.18]. Аристотель не знал мысленного эксперимента, идеализации. Однако ограниченность повседневного опыта приводила к тому, что, начиная размышлять о природе космоса в целом, Аристотель вынужден был покидать почву опыта и наблюдений и обращаться к умозрению. Сам Аристотель осознает особое значение умозрения для своих построений, указывая, что ”умозрительные науки предпочтительнее всех остальных” [1, с.182]. Умозрение существенно дополняет аргументы в пользу сферической формы Земли, которая может быть объяснена еще и тем, что она не подвержена никакому воздействию со стороны сферической Вселенной. Если бы Земля не была шарообразной, она не могла бы покоиться в центре мира. Умозрение стало тем путем, который привел к конструированию иерархически организованного космоса, состоящего из подлунного и надлунного миров. Такая конструкция космоса особым образом ориентировала его дальнейшее познание. Физический мир, в котором находит себя человек, оказывается миром качественным, миром, в котором царствует приблизительность. Действительно, повседневная действительность, в которой человек живет и действует, подвижна, неоднозначна, здесь по выражению А. Койре, все ”более или менее”, ”почти”, ”приблизительно”, ”около того”. Этот мир не предполагает для своего осмысления использования точных математических, в частности, геометрических понятий. Применять математику к природному миру кажется противоречащим здравому смыслу. В природе нет кругов, эллипсов или прямых линий.

Принципиально иначе обстоит дело на небесах. Здесь происходят совершенные и упорядоченные движения сфер в соответствии с самыми строгими и незыблемыми законами геометрии. Поэтому математическая астрономия возможна, а математическая физика нет.

Дальнейшее развитие геоцентрической концепции мироздания пошло по пути наполнения ее математическим содержанием, и, прежде всего, того ее раздела, который касается движения небесных тел. Основателем научной астрономии считают Гиппарха Никейско-

го (II в. до н.э.). Подбирая радиусы эпициклов и расстояния между их центрами и центром Земли, Гиппарх построил точную для своего времени теорию наблюдаемого с Земли движения Луны и Солнца. Эта теория позволяла предсказывать лунные затмения с точностью до одного-двух часов (правда, солнечные затмения удавалось предсказывать с меньшей точностью). Следующий шаг в развитии математической астрономии был сделан Птолемеем. Птолемей был убежден в том, что только математика дает прочное и определенное знание и что арифметические и геометрические доказательства являются совершенными. Не случайно его основной труд назывался "Математический синтаксис астрономии". Птолемей, и в этом его историческое достижение, создал действующую систему мира. Разработанные им таблицы позволяли достаточно точно предсказывать движение планет. Таким образом, он существенно усовершенствовал созданную Гиппархом теорию видимого с Земли движения небесных тел. Известно, что в III в. до н.э. Аристархом Самосским были сформулированы принципы гелиоцентрического миропонимания. Однако они не были восприняты Птолемеем, поскольку геоцентрическая система оказалась в то время более эвристичной для геометрического представления движения планет. Кроме того, гелиоцентрическая система противоречила целому ряду непосредственных наблюдений, что также предопределило ее судьбу.

Характерно, что в соответствии с логикой математического естествознания, Птолемей в своих построениях руководствовался принципом простоты, выбирая из возможных гипотез простейшую. В тех случаях, когда простейшая гипотеза оказывалась несогласной с небесными явлениями, следует, полагал Птолемей, выбирать наиболее подходящую, т.е. согласную с ними. Однако система Птолемея с точки зрения современной методологии науки содержала в себе весьма существенный изъян, который не позволяет назвать ее научным построением. Он состоит в том, что система Птолемея принципиально опиралась на гипотезы *ad hoc*. Для того, чтобы максимально точно описать движение небесного тела, Птолемей должен был заниматься своеобразной "игрой" — подбирать наиболее подходящее сочетание эксцентриков и эпициклов. Эти процедуры сделали систему Птолемея весьма сложной и громоздкой, что и явилось одним из мотивов ее преобразования Н. Коперником.

Определенные сложности возникли и в отношениях системы Пто-

Птолема с картиной мира Аристотеля. Если с точки зрения математики, в частности геометрии, астрономия Птолема была в целом приемлемой, то в плане космологии, т.е. реального истолкования ее содержания возникали определенные проблемы. Получалось, что сферы вращались сами по себе, их центры ничем не заполнены. Это противоречило космологии Аристотеля, который полагал, что такие движения невозможны. Космология Птолема значительно сложнее, чем космология Аристотеля истолковывалась в терминах физики.

Преодоление системы Птолема Коперником состояло не только в унификации, упорядочении движений небесных тел с помощью более прозрачных геометрических образов, но и в наполнении последних физическим содержанием. При этом, конечно, нельзя забывать и о том, что Коперник в своих построениях, и это хорошо известно, исходил также из умозрительных, метафизических представлений о том, что Солнцу — великому светильнику мира подобает центральное место. В физическом же плане превосходство астрономии Коперника над астрономией Птолема выразилось в том, что в ней оказался достаточно полно и точно реализован принцип зависимости между расстоянием планет от Солнца и временем их обращения.

#### Список литературы

1. *Аристотель*. Сочинения. Т. 1. М.: Мысль, 1976.
2. *Койре А.* Очерки истории философской мысли. М.: Прогресс, 1985.

### Профессор Анатолий Андреевич Гриб

*Ю. З. Алешков*

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

Анатолий Андреевич Гриб (17.09.1912–6.11.1978) поступил в Ленинградский государственный университет в 1930 году, после его окончания — в аспирантуру по кафедре гидроаэромеханики под научным руководством Сергея Алексеевича Христиановича.

С.А. Христианович родился (9.11.1908) в Петербурге. Закончив среднюю школу в 1925 г., поступил в Ленинградский университет "на ... антропологическое отделение географического факультета, но затем перешел, точнее, поменялся по объявлению (по обычаям

того времени) на физико-математический факультет ЛГУ, который закончил в 1930 г. по математическому отделению. Глубокому математическому образованию С.А. Христиановича содействовали как прекрасные профессора и преподаватели, работавшие в Ленинградском университете (уже тогда маститые В.И. Смирнов и Н.М. Гюнтер, совсем еще молодой Н.Е. Кочин, своеобразную лекторскую манеру которого Сергей Алексеевич часто вспоминает, и другие), так и группа ярких молодых талантов, учившихся в то время на ленинградском физ-мате (С.Л. Соболев, В.А. Амбарцумян, С.Г. Михлин, Л.В. Канторович и другие)" [1].

После университета вплоть до отъезда в Москву в 1935 г. он работает в Государственном гидрологическом институте в Ленинграде (ГГИ), где работали В.М. Маккавеев, А.А. Саткевич, К.И. Страхович. Здесь Сергей Алексеевич создал метод расчета неустановившегося движения жидкости в каналах и реках. Эта работа составила часть книги "Некоторые новые вопросы механики сплошной среды", написанной вместе с его молодыми тогда товарищами — С.Г. Михлиным (пластичность) и Б.Б. Девисоном (фильтрация). Издана в 1938 г.

Развитию гидромеханики в Санкт-Петербургском университете способствовали работы П.Л. Чебышёва, А.М. Ляпунова, Д.К. Бобылева, Д.И. Менделеева, А.А. Фридмана, Н.Е. Кочина и др. [2, 3].

Кафедра гидроаэромеханики в Ленинградском университете была организована в 1929 году профессором Алексеем Александровичем Саткевичем, который с 1925 г. на физико-математическом факультете начал читать курс лекций по теоретической гидроаэромеханике. Он был ее первым заведующим (1929–1936). Для чтения лекций и научной работы на кафедре были приглашены Н.Е. Кочин, К.И. Страхович, Е.В. Красноперов, Г.Г. Ростовцев, В.И. Егоров, а с 1932 г. — И.А. Кибель, А.А. Изаксон, С.А. Христианович, Н.Н. Поляхов, О.Н. Розанов [2-5].

В 1932 г. была издана первая часть учебника "Введение в теоретическую гидромеханику", написанная Н.Е. Кочиным и Н.Е. Розе. В 1937 г. вышел второй том курса "Теоретическая гидромеханика", авторы — Н.В. Розе, И.А. Кибель, Н.Е. Кочин. Начиная с 1933 г. исследования по газовой динамике на кафедре возглавлял профессор И.А. Кибель.

В период 1936–1941 гг. кафедрой руководил профессор Констан-

тин Иванович Страхович [6]. В период 1942–1954 работал в КБ, затем в политехническом и технологическом институтах.

Результатом обучения в аспирантуре А.А. Гриба (1935–1938) явилась его диссертация "Гидродинамическая теория взрывной волны", которую он защитил в 1940 г. в Томском государственном университете, где он работал после окончания аспирантуры [7]. Основные положения этой работы были опубликованы в журнале ПММ за 1944 г. в выпусках № 3, № 4.

Первая статья называется "О распространении плоской ударной волны при обыкновенном взрыве у твердой стенки", вторая — "Влияние места инициирования на параметры воздушной ударной волны при детонации взрывчатых газовых смесей".

В печати отмечается, что эти результаты, по данным Л.И. Седова, относятся к 1939–1940 годам [8]. Я.Б. Зельдович [9] пишет, что А.А. Гриб защитил диссертацию в 1940 г. в Ленинградском Горном институте, а К.П. Станюкович фиксирует получение этих результатов в 1941 г. [10].

В первой из указанных статей А.А. Гриб, рассматривая одномерное неустановившееся движение идеального газа в области, ограниченной твердой стенкой, считает, что начальные условия имеют разрывный характер и в месте разрыва они не связаны условиями динамической совместности. Поэтому в дальнейшем такой разрыв существовать не может. Опираясь на исследования Б. Римана [11], Н.Е. Кочина [12] и С.А. Христиановича [13], А.А. Гриб для этой новой задачи определяет схему распада произвольного разрыва. Он полагает, что к стенке побежит слабый разрыв (волна разрежения), стационарный сильный разрыв отделяет газовую волну от ударной воздушной, причем перед фронтом ударной волны находится возмущенный воздух.

Поставленную нелинейную газодинамическую задачу А.А. Гриб решил со всей полнотой и оригинальностью. По самой физической постановке и методам решения она была новой, поэтому ей можно дать название "Задача А.А. Гриба".

Во второй статье, отражающей содержание его диссертации, построена гидродинамическая теория детонации.

Отечественная война (1941–1945) застала Анатолия Андреевича в Ленинграде. По состоянию здоровья он был лишен возможности принимать непосредственное участие в боевых действиях. С эвакуа-



цией Ленинградского университета в г. Саратов А.А. Гриб с августа 1942 г. работает на кафедре гидроаэромеханики ЛГУ. В военные годы А.А. Гриб был заместителем декана математико-механического факультета (1942–1946) и одновременно руководил работой кафедры (1942–1944) [7].

После возвращения университета из эвакуации в 1944 году кафедру возглавил акад. В.И. Смирнов, а затем заведующими кафедрой гидроаэромеханики были: 1950–1975 — С.В. Валландер, профессор, член-корреспондент АН СССР, 1977–1987 — Н.Н. Поляхов, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР, 1989–2001 — В.Г. Дулов, профессор, член-корреспондент АН СССР (РАН), лауреат государственной премии СССР. С 2001 г. кафедрой гидроаэромеханики заведует профессор С.К. Матвеев.

Мы, студенты-механики (1954–1959) математико-механического факультета ЛГУ слушали общий курс лекций по гидромеханике в 1956–1957 учебном году, который читал профессор, заведующий кафедрой гидроаэромеханики (1950–1975) Сергей Васильевич Валландер. Читал он с увлечением и доходчиво [14].

С распределением на кафедру гидроаэромеханики после третьего курса обучения в Университете нам читали курсы: Исаак Павлович Гинзбург: теория сопротивления (IY курс), теория волн (IY курс, осенний семестр), механика полета управляемых тел (Y курс, зимний семестр); Анатолий Андреевич Гриб: газовая динамика (IY курс), неустановившееся движение газа (Y курс, осенний семестр); Рэм Георгиевич Баранцев: трансзвуковая газодинамика (IY курс, зимний семестр; Y курс, осенний семестр); Максим Антонович Ковалев: аэродинамический расчет, (Y курс, осенний семестр).

На Y курсе С.В. Валландер вел семинар и читал лекции по аэродинамике разреженных газов.

Лекции Анатолия Андреевича у нас, студентов, вызывали большой интерес, ибо были посвящены актуальным проблемам в области ракетной техники и взрыва. Они являлись также великолепной демонстрацией математических методов, созданных Б. Риманом, для решения нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными [11].

Одновременно с чтением лекций Анатолий Андреевич осуществлял руководство курсовыми и дипломными работами. Вот перечень тем дипломных работ, предложенных в 1958–1959 учебном году:

1). Асимптотическое поведение ударных волн. 2). Методы гашения ударных волн. 3). Переход сферической ударной волны в плоскую. 4). Гидродинамическая теория ударных труб. 5). Распространение ударной волны от обыкновенного взрыва в грунте. 6). Движение газа в камере и сопле пороховой ракеты. 7). Линеаризация решения задачи о взрыве вокруг автомодельного течения. 8). Гидравлический удар в трубах с внезапно меняющимся сечением.

Круг научных интересов Анатолия Андреевича был чрезвычайно широк. Автор этой статьи также слушал лекции профессора А. А. Гриба, но дипломную работу писал у профессора И. П. Гинзбурга. После четвертого курса студенты кафедры гидроаэромеханики проходили практику (в июле) в одной из организаций Ленинграда. А. А. Гриб, будучи консультантом в институте морской гидротехники, рекомендовал меня на практику в этот институт. Здесь я занимался исследованием в области теории длинных волн, вызванных действием подводного взрыва. Образование и распространение волн на воде, взаимодействие их с преградами — интересная и важная проблема морской гидротехники, значение которой не уменьшается со временем [15].

Однажды перед заседанием кафедры Анатолий Андреевич поздравил меня, аспиранта кафедры гидроаэромеханики, с публикацией моей первой работы. Это внимание, проявленное ко мне, было очень приятно.

В 1975 году 5 июня была назначена защита моей докторской диссертации. В это время в Новосибирске проходила научная конференция, на которую уехали многие члены кафедры гидроаэромеханики. От кафедры на Ученом совете присутствовал А. А. Гриб.

Анатолий Андреевич — замечательный, скромный и отзывчивый человек, крупный ученый. Своей жизнью и творчеством он вписал замечательную страницу в историю Санкт-Петербургского (Ленинградского) университета и науки России.

#### Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Рыжов О.С. О трубах академика Сергея Алексеевича Христиановича и о нем самом // С.А.Христианович. Механика сплошной среды. М. 1981.
2. Буравцев А.И., Дулов В.Г., Матвеев С.К. Гидроаэромеханика в Санкт-Петербургском университете // Гидроаэромеханика. СПб.

1999. С. 6–26.

3. *Богатко В.И., Мирошин Р.Н., Цибаров В.А.* Об истории развития аэродинамики и Ленинградском — Санкт-Петербургском университете // *Аэродинамика*. СПб., 1997. С. 5-29.
4. *Цветков О.Б.* Основатель кафедры гидроаэромеханики (К 150-летию со дня рождения профессора А.А.Саткевича) // *Аэродинамика*. СПб., 2000. С. 5-7.
5. *Степанов Г.Ю.* Александр Александрович Саткевич // *Изв. АН СССР, МЖГ*. 1971. № 2. С. 3-11.
6. *Мирошин Р.Н.* Константин Иванович Страхович // *Гидроаэромеханика*. СПб., 1999. С. 27-39.
7. *Богатко В.И., Буравцев А.И.* Анатолий Андреевич Гриб // *Гидроаэромеханика*. СПб., 1999. С. 66-73.
8. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М. 1977.
9. *Зельдович Я.Б.* Теория ударных волн и введение в газодинамику. М.-Л., 1946.
10. *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М. 1971.
11. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. М.-Л., 1948.
12. *Кочин Н.Е.* К теории разрывов в жидкости. Собр. Соч.: В 2-х т. М.-Л. 1949. Т. 1.
13. *Христианович С.А.* Неустановившееся движение в каналах и реках. Избранные работы. М. 1998, С. 8-144.
14. *Балландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. Л. 1978.
15. *Алешков Ю.З.* Течение и волны в океане. СПб. 1996.

## **Из истории НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова**

*В. С. Сабанеев*

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В сентябре 1931 г. Совет ЛГУ решил организовать НИИ математики и механики. Уже в мае 1932 г. было принято Постановление СНК РСФСР "О сети научно-исследовательских учреждений РСФСР". Директором института был назначен проф. А.Р. Кулишер, зам. директора по научной части — проф. В.И. Смирнов. Институт делился на 2 отдела: отдел математики во главе с В.И. Смирновым и отдел механики, который возглавляли в 1932–36 гг. — проф. Е.Л. Ни-

колаи, а 1936–41 гг. — проф. А.И. Лурье. Отдел математики не имел в своем составе подразделений. В отдел механики входили сначала три, а позднее четыре лаборатории.

Базой для создания института послужили лаборатории, созданные при кафедрах в 1930–32 гг. В 1930 г. организована первая в Советском Союзе лаборатория поляризационно-оптического метода исследования напряжений (рук. асс. Л.Э. Прокофьева-Михайловская). 1931 г. — начало создания лаборатории аэродинамики (рук. М.А. Ковалев). Для размещения аэродинамической трубы был выделен зал бывшей университетской церкви, расположенной на третьем этаже здания Двенадцати коллегий. К ноябрю 1933 г. аэродинамическая труба была готова к эксплуатации. По качеству потока она оказалась очень удачной. В 1932 г. была организована лаборатория пластических деформаций (рук. доц. Г.А. Смирнов-Аляев). Работы этой лаборатории повлекли за собой создание ряда лабораторий в ВУЗ'ах и институтах АН СССР. С 1939 г. эту лабораторию возглавил Г.Б. Талыпов, ученик Г.А. Смирнова-Аляева.

В 1934 г. были организованы Экспериментальные мастерские НИИММ. В частности, они стали выпускать аппаратуру для поляризационно-оптического метода и снабжать этой аппаратурой лаборатории заводов и институтов СССР, а позднее и стран народной демократии. В 1936 г. доц. А.К. Калищук организовал лабораторию вибраций, в которой был целый ряд установок, предназначенных для исследования сложных явлений теории нелинейных колебаний.

В 1937 г. проф. А.Р. Кулишер был репрессирован. Директором НИИММ был назначен проф. В.И. Смирнов. В.И. Смирнов — один из последних энциклопедистов — сыграл большую роль в истории института. Он организовал обширную сеть научных семинаров, стимулировал работу в новых областях математики и механики, активно помогал молодым ученым. Именно он в течение 20 лет определял научные направления института и задавал высокий уровень выполнявшихся работ.

Во время войны часть сотрудников ушла на фронт, другие были эвакуированы в города Елабугу и Саратов, некоторые остались в осажденном Ленинграде. В этот период, естественно, нельзя говорить о работе института как единого целого. Тем не менее группа сотрудников института и факультета под руководством В.И. Смирнова выполнила важную оборонную работу по исследованию аэро-

динамики оперенных снарядов, мин и авиабомб.

В 1944–45 гг. после эвакуации начался ремонт помещений силами сотрудников. В 1945 г. был осуществлен переезд факультета и института в здание бывших Бестужевских курсов. Первыми восстановленными лабораториями стали лаборатория аэродинамики (единственная из лабораторий НИИММ, оставшаяся в здании Двенадцати коллегий) и лаборатория оптического метода. Руководителем последней стал доц. С.П. Шихобалов. После демобилизации Г.Б. Талыпова стала восстанавливаться лаборатория пластических деформаций. Она несколько изменила свой профиль и стала называться лабораторией сопротивления материалов.

В 1946 г. проф. И.П. Гинзбург осуществил свои довоенные планы и создал лабораторию газовой динамики. Лаборатория стала интенсивно наращивать объем хозяйственных работ, а это давало ей возможность вводить в строй новые экспериментальные установки. В 1949–50 гг. под руководством доц. Г.Н. Бухаринова стала почти заново создаваться лаборатория вибраций, переданная после войны на кафедру теоретической механики.

В 1957 г. директором института стал проф. С.В. Валландер. Он формально был директором только шесть лет, но за этот небольшой срок очень многое успел сделать для института. С.В. Валландер на несколько десятилетий определил перспективные научные направления и добился превращения института в крупное научно-исследовательское учреждение. Для того, чтобы подтвердить последнее, укажем, что после организации Вычислительного центра (созданного частично и за счет ставок НИИММ), в институте по госбюджету осталось 35 ед., в т.ч. ст. науч. сотр. — 7.

В 1958 г. С.В. Валландер добивается юридического оформления ВЦ как проблемной лаборатории. В 1959 г. ему удается получить 98 штатных единиц, т.е. увеличить численность института в 3,5 раза. Появляется возможность пополнить уже имевшиеся лаборатории и организовать несколько новых групп: теории вероятностей, математической физики, теории управления, автоматического регулирования, теории оболочек, прочности полимеров. Позднее все эти группы были преобразованы в лаборатории НИИММ и ВЦ.

В 1963 г. директором института стал доц. Г.П. Самосюк, возглавлявший в то время ВЦ. Г.П. Самосюк оставил большой след в истории НИИММ. Он возглавлял ВЦ и НИИММ по 18 лет. В течение

16 лет он возглавлял одновременно оба учреждения. Он — один из организаторов Вычислительного центра, под его руководством ВЦ стал самым мощным в системе Минвуза РСФСР. Он настойчиво и последовательно реализовывал планы по развитию перспективных научных направлений, разработанные С.В. Валландером и им. На его плечи легли все заботы по составлению технического задания на проектирование, доработке проекта, контролю за ходом строительства, организации переезда подразделений института в Петродворец.

В 1967 г. организована лаборатория физической кинетики (рук. доц. Б.В. Филиппов). В 1969 г. в связи с образованием факультета прикладной математики–процессов управления лаборатория теории оболочек и лаборатория динамики были исключены из состава института. В 1972 г. начался переезд лаборатории газовой динамики в отдельный корпус в Петродворце. Последующие шесть лет шла трудная и незнакомая для сотрудников института работа по составлению технического задания на проектирование лабораторий, по обсуждению и доработке проекта, по перевозке сначала малогабаритного, а затем и крупногабаритного оборудования. Наконец, весной 1979 г. институт стал функционировать в новых помещениях. Началась работа по монтажу оборудования, по подготовке помещений и экспериментальных установок к вводу в эксплуатацию. Основная часть механических лабораторий была сдана уже в конце 1979 г. [1,2].

В 1981 г. директором института был назначен заведующий отделом дискретных устройств и автоматов ВЦ доц. М.К. Чирков. В своей административной деятельности он всегда руководствовался заповедью "не навреди". Свои решения он принимал обдуманно, неторопливо. Иногда он принимал неверные решения, но всегда находил в себе мужество для исправления допущенных ошибок. В трудные годы с 1991 по 2002 все свои силы и возможности он направлял на сохранение коллектива института.

В 1985 г. приказом Минвуза РСФСР Вычислительный центр был включен в состав института. В институте кроме математических и механических лабораторий появились отделы по разработке нового программного обеспечения и отделы технического обслуживания парка ЭВМ. После включения ВЦ в институт численность по госбюджету достигла 356 ед., по хоздоговорам — 245 ед., а объем хоздоговорных работ составлял 3–3,5 млн. руб.

Комиссия Головных советов Минвуза РСФСР, проверявшая в

1987 г. деятельность института, в своей справке отметила, что НИИММ как по своему кадровому составу, так и по значению выполняемых работ стоит на уровне ведущих научно-исследовательских учреждений АН СССР. В 1988 г. в связи со 100-летием со дня рождения академика В.И. Смирнова институту было присвоено его имя.

Период 1991–2002 гг. можно охарактеризовать как период резкого свертывания научных исследований, сопровождаемого сокращением числа сотрудников института. В 1991 г. правительство резко уменьшило финансирование предприятий военно-промышленного комплекса — основных заказчиков НИИММ по хоздоговорам. Это привело фактически к сокращению в 1991–92 гг. всех сотрудников, работавших на хоздоговорных ставках. Небольшая часть из них уволена из института, остальные были переведены на бюджетные ставки на условиях неполной рабочей недели. Это создало напряженность в бюджете НИИММ и привело к необходимости перевода и бюджетных сотрудников на работу с неполной рабочей неделей.

Однако процесс сокращения бюджетных сотрудников (или уменьшения долей ставок у них) продолжается до настоящего времени. Финансирование научно-исследовательских институтов высшей школы в последние два десятилетия обладает очень странной особенностью. Считается, что индексация зарплаты сотрудников не влечет за собой увеличения стоимости выполняемых работ. Отсюда следует, что каждая индексация зарплаты приводит к необходимости сокращения части сотрудников или уменьшения долей ставок у них.

В этих условиях все усилия дирекции института и ректора университета проф. Л.А. Вербицкой были направлены на закрепление сотрудников НИИММ в университете. Первым действием в этом направлении был перевод всего младшего обслуживающего персонала и служб главного инженера в штат университета. Уменьшение количества студентов, приходящихся на одного преподавателя, позволило перевести на ставки профессоров и доцентов большое количество научных сотрудников института, имевших ученые степени. Для сохранения высококвалифицированных инженеров и программистов был создан центр технического сопровождения образовательных программ. В него было переведено 60 сотрудников института [3].

Семидесятилетие НИИММ его сотрудники встретили с надеждой на то, что правительство изменит свою политику в отношении науки и станет нормально ее финансировать.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00327).

#### Список литературы

1. *Сабанеев В.С.* Научно-исследовательскому институту математики и механики — 50 лет // Вестник ЛГУ, 1983. № 1. С. 5-9.
2. *Сабанеев В.С.* Развитие механики на математико-механическом факультете и в НИИ математики и механики в XX веке // Сборник трудов НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова под ред. М.К.Чиркова, СПб., 2002. С. 3–26.
3. *Сабанеев В.С.* Научно-исследовательскому институту математики и механики им. акад. В.И. Смирнова — 70 лет // Санкт-Петербургский университет, 2002. 30 октября. С. 1-4.

#### Вклад кафедры теоретической механики Петербургского университета в развитие механики в 1917 — 2002 гг.

*В. С. Сабанеев, С. Б. Филиппов*  
(sbf@petrodvoretz.spb.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

В 1917 г. преподавание всех дисциплин механического цикла в университете осуществляла кафедра механики. С 1917 г. заведовать кафедрой стал Гурий Васильевич Колосов. Сам он еще с 1914 г. читал курс теории упругости на физико-математическом факультете. Сначала его научные интересы были связаны с вопросами аналитической механики и динамики твердого тела. Позднее он заинтересовался задачей о движении твердого тела в жидкости, где развил результаты В.А. Стеклова и С.А. Чаплыгина, а также плоской задачи теории упругости, где он впервые ввел и начал систематически применять аппарат теории функций комплексного переменного. Именно эти работы принесли ему всемирную известность.

В этот период на кафедре начала создаваться школа по динамической метеорологии, которую возглавил выдающийся механик и физик Александр Александрович Фридман. Он знаменит своим открытием нестационарных решений уравнений А. Эйнштейна, что легло в основу современной космологии. Его фундаментальная работа по гидромеханике сжимаемой жидкости [1] дала импульс многим



исследованиям по динамической метеорологии, в том числе по теории турбулентности. Из школы А.А. Фридмана вышли такие крупные ученые, как Н.Е. Кочин и И.А. Кибель.

В 1929 г. в связи с бурным развитием авиа- и кораблестроения кафедры механики разделилась на три кафедры: аналитической механики, теории упругости и гидроаэромеханики. В соответствии со своими научными интересами, Г.В. Колосов стал заведовать кафедрой теории упругости, а заведовать кафедрой аналитической механики был приглашен профессор Николай Владимирович Розе — выдающийся геомагнитолог, гидрограф и механик. В 1920 г. он руководил первой советской гидрографической экспедицией в Северном Ледовитом океане. На основании полученных материалов был составлен первый в истории Арктики прогноз состояния льдов Карского моря. Позднее он неоднократно участвовал в работах по исследованию геомагнитного поля многих районов Арктики. Он организовал и осуществил Генеральную геомагнитную съемку СССР. Не прекращая своих исследований по земному магнетизму, он с 1924 г. стал заведовать кафедрой теоретической механики в Военно-морской Академии. В 1932–33 гг. Н.В. Розе в составе авторского коллектива публикует двухтомный учебник по теоретической механике [2], прекрасно построенный в методическом отношении. В 1932 г. он издал еще один учебник по динамике твердого тела [3]. Отметим, что это первая книга отечественного автора, посвященная этому вопросу. В том же году в соавторстве с Н.Е. Кочиным он опубликовал учебник по гидромеханике [4], который впоследствии стал первым томом всемирно известного двухтомника Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля, Н.В. Розе "Теоретическая гидромеханика". Наконец, в 1938 г. выходят его лекции по аналитической механике [5]. Несмотря на сложность этого раздела механики, книга написана строго и в то же время доступно. В начале 1942 г. Н.В. Розе был необоснованно репрессирован и вскоре умер в тюрьме. Посмертно реабилитирован в 1954 г.

Из работ других сотрудников кафедры необходимо упомянуть книгу Ю.А. Круткова и А.Н. Крылова по теории гироскопов [6]. Позднее в 1939–40 гг. Н.Н. Поляхов совместно с В.П. Ветчинкиным (сотрудником ЦАГИ) публикуют монографию по теории гребного винта [7]. В этой капитальной монографии собраны все существенные результаты, известные в то время.

В феврале 1942 г. часть сотрудников кафедры была эвакуирована

в Саратов, где в течение пяти семестров они вели занятия со студентами. В 1944 г. кафедра стала называться кафедрой теоретической механики. Заведовать кафедрой стал Евгений Леопольдович Николаи. В течение многих лет он возглавлял Ленинградское Механическое общество и был редактором журнала этого общества "Вестник механики и прикладной математики". В 1933 г. этот журнал был преобразован во всесоюзный, ныне широко известный, журнал "Прикладная математика и механика". В 1933–36 гг. этот журнал издавался в Ленинграде и Е.Л. Николаи был ответственным редактором этого издания. Кроме того, Е.Л. Николаи написал учебник по теоретической механике в 3-х частях [8]. Этот учебник был принят во всех ВТУЗах страны и выдержал очень большое число изданий, например, 1-я часть (статика и кинематика) — 20 изданий. Всеобщее признание этот учебник получил вследствие доступности изложения, разумной степени строгости и обилия технических иллюстраций излагаемого материала. После 1944 г. Е.Л. Николаи издает три книги по теории гироскопов. Необходимо отметить, что в монографии [9] впервые приводится полная система уравнений движения гироскопа, учитывающая инерцию кардановых колец.

После смерти Е.Л. Николаи в 1950 г. заведовать кафедрой стал Юрий Александрович Крутков — известный физик-теоретик, блестящий лектор. В те годы его научные интересы постепенно склоняются в сторону механики и статистической физики. Он исследовал движение вибратора, введя в правую часть дифференциального уравнения, кроме детерминированной силы, еще и случайную силу. Эти результаты были применены им к исследованию качки корабля и к задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки при наличии сопротивления и случайных моментов [10].

После кончины Ю.А. Круткова в 1952 г. заведовать кафедрой пригласили Николая Николаевича Поляхова — крупного специалиста по теории крыла и винта. Н.Н. Поляхов оставил глубокий след в истории кафедры, факультета и университета не только как крупный ученый, блестящий оратор, но и как обаятельный интеллигентный человек. Хотя Николай Николаевич никого активно не воспитывал, однако после его кончины стало ясно, что он оказывал большое воздействие на всех окружающих своей тактичностью, манерой общения с людьми, стилем проведения заседаний. Он очень тщательно относился к подбору будущих сотрудников кафедры, требуя от них

не только высоких профессиональных качеств, но и безусловной порядочности.

В 50-е годы Н.Н. Поляхов разрабатывает теорию нестационарных движений несущей поверхности конечного размаха при произвольных удлинениях. Результаты этих исследований опубликованы им в монографии [11].

В 1975 г. Н.Н. Поляхов со своими учениками С.А. Зегждой и М.П. Юшковым приступили к работе по подготовке к изданию курса теоретической механики для студентов-математиков. Работа продолжалась в течение 10 лет и подытожила 32-летний опыт преподавания механики студентам-математикам [12]. Изложение ряда разделов курса существенно отличается от традиционного. Так, в кинематике наряду с декартовыми используются и произвольные криволинейные координаты. Это позволяет в динамике точки и системы сразу ввести уравнения Лагранжа II рода и канонические уравнения. Уравнения движения при наличии как голономных, так и неголономных связей выводятся непосредственно из 2-го закона Ньютона без использования вариационных принципов. Этот оригинальный фундаментальный курс для студентов университетов был высоко оценен специалистами. Создание этого учебника, вне всякого сомнения, — главное достижение Н.Н. Поляхова как педагога.

В 1970–87 гг. Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда и М.П. Юшков написали ряд работ, посвященных вопросам механики неголономных систем. Ими разработана единая теория как линейных, так и нелинейных неголономных систем любого порядка. Они вывели общие уравнения движения этих систем в произвольном неортогональном базисе, а также получили формулы, определяющие обобщенные реакции неголономных связей.

Тематика научных исследований, проводимых на кафедре в 1950–70 гг., весьма разнообразна. В связи с задачей о вынужденных колебаниях круглой толстой плиты Г.Н. Бухариновым было получено решение пространственной задачи теории упругости для цилиндра конечной длины при осесимметричной деформации. П.Е. Товстик под руководством Г.Н. Бухаринова успешно применил асимптотические методы интегрирования уравнений с малым параметром при старшей производной сначала при изучении колебаний цилиндрических и конических пружин, а затем и тонких оболочек вращения. А.А. Тихонов(ст.)получил оценки для движения при наличии посто-

янно действующих возмущений на бесконечном интервале времени.

Уравнения Лагранжа–Максвелла были применены А.Ю. Львовичем при исследовании ряда электромеханических систем: электромагнитного прерывателя, некоторых виброизмерительных систем, вибростенда и т.п. Применение этих уравнений позволяет изучить электромеханические системы как единое целое, т.е. получить связанные уравнения механической и электромеханической части. Результаты этих исследований вошли в монографию [13]. Позднее А.Ю. Львовичу совместно с Н.Н. Поляховым удалось обобщить учение о связях, в том числе неголономных, применительно к электрическим машинам постоянного и переменного тока. Эти результаты отражены в книге [14]. Обоснование и вывод уточненных уравнений электрических машин дан в монографии Ф.Ф. Родиокова и А.Ю. Львовича [15].

В 1977 г. по настоятельной просьбе руководства факультета профессор Н.Н. Поляхов стал заведовать кафедрой гидроаэромеханики, передав заведование кафедрой теоретической и прикладной механики Петру Евгеньевичу Товстику.

П.Е. Товстик создал научно-педагогическую школу в области разработки и применения асимптотических методов расчета тонкостенных конструкций. Им разработан общий метод асимптотического анализа в задачах динамики и устойчивости оболочек вращения, осложненных наличием точек поворота и переходных линий. С помощью этого метода удалось установить, что поверхность оболочки делится на зоны покоя и зоны интенсивных колебаний.

Для двумерных задач теории оболочек разработан метод асимптотического расщепления переменных. Применение этого метода позволило получить решения большого класса задач. Результаты исследований отражены в монографиях [16, 17]. Большие достижения в разработке теории оболочек отмечены в 1998 г. присуждением П.Е. Товстику (в составе научного коллектива) Государственной премии РФ.

Асимптотические методы, разработанные для анализа оболочек с гладкой срединной поверхностью, оказалось возможным применить для исследования свободных колебаний и устойчивости сопряженных и подкрепленных шпангоутами оболочек (С.Б. Филиппов [18]).

Труды сотрудников кафедры в области теории оболочек и пластин заслужили международное признание. В 1993 г. в издатель-

стве Американского математического общества вышел из печати российско-канадский сборник статей [19], в котором большинство из авторов и редактор с российской стороны (А.Л. Смирнов) являются сотрудниками кафедры [20].

Новым направлением исследований стало приложение методов расчета оболочек и пластин к решению задач офтальмологии. Под руководством П.Е. Товстика С.М. Бауэр проводила теоретические исследования биомеханических систем, моделирующих поведение глаза человека при некоторых операциях, травмах и заболеваниях. Результаты этих исследований отражены в монографии [21].

В проблеме соударения упругих тел С.А. Зегждой был предложен новый подход, основанный на квазистатическом учете высших форм колебаний соударяющихся тел. Разработан приближенный метод решения интегрального уравнения относительно закона распределения давления по площадке контакта. Основные результаты, полученные в этой области, изложены в монографии [22].

Л.И. Кузнецовым, В.Е. Пасынковым и А.А. Тихоновым (мл.) исследован широкий круг вопросов, связанных с движением искусственных спутников Земли (ИСЗ) относительно центра масс. Изучены различные способы демпфирования колебаний гравитационно ориентированных спутников. Исследованы резонансные явления при их колебаниях. В последние годы А.А. Тихонов (мл.) выполнил большой цикл работ по исследованию динамики экранированных ИСЗ. Рассмотрены либрационные движения спутника с заряженным экраном в магнитном поле Земли. Проанализировано влияние собственного момента ИСЗ на его вращательное движение. Предложен способ полукратного управления ориентацией ИСЗ, основанный на использовании взаимодействия заряда ИСЗ с геомагнитным полем.

В 1960 — 1980 гг. на кафедре проводились исследования по теории автоматического управления. Был предложен способ синтеза инвариантных систем автоматического регулирования, основанный на введении дополнительных связей между каналами управления. Был также разработан метод синтеза кинематических схем имитационных стендов, используемых при подготовке пилотов (Б.А. Ершов и др.) После организации в 1987 г. кафедры гидроупругости Б.А. Ершов перешел на эту кафедру, и темой его научных исследований стали переходные процессы при движении гибкого профиля в потоке несжимаемой и сжимаемой жидкости. Им предложен анали-

тический метод построения переходного процесса при свободных и вынужденных колебаниях системы. Эти результаты отражены в монографии [23].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00327).

### Список литературы

1. Фридман А.А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Петроград, 1922. Ч. 1. 250 с.; Ч. 2. 266 с.
2. Теоретическая механика / Под ред. Н.В.Розе. Л.-М., Ч. 1, 1932. 372 с.; Ч. 2, 1933. 428 с.
3. Розе Н.В. Динамика твердого тела. Л., 1932. 306 с.
4. Кочин Н.Е., Розе Н.В. Введение в теоретическую гидромеханику. М.-Л., 1932. 315 с.
5. Розе Н.В. Лекции по аналитической механике. Л., 1938. 203 с.
6. Крылов А.Н., Крутков Ю.А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Л., 1932. 356 с.
7. Ветчинкин В.П., Поляхов Н.Н. Теория и расчет воздушного гребного винта (Аэродинамика и прочность). М., 1940. 520 с.
8. Николаи Е.Л. Теоретическая механика. Ч. 1, 1938; Ч. 2, 1939; Ч. 3, 1939.
9. Николаи Е.Л. Гироскоп в кардановом подвесе. М., 1944.
10. Поляхов Н.Н. Развитие кафедры механики в Петербургском-Ленинградском университете // Очерки по истории Ленинградского университета. 1962. Вып. 1. С. 20-28.
11. Поляхов Н.Н. Теория нестационарных движений несущей поверхности. Л., 1960. 84 с.
12. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. Л., 1985. 536 с.; Изд. 2-е / Под ред. П.Е. Товстика, М., 2000. 592 с.
13. Львович А.Ю. Основы теории электромеханических систем. Л., 1973. 196 с.
14. Львович А.Ю. Электромеханические системы. Л., 1989. 296 с.
15. Родюков Ф.Ф., Львович А.Ю. Уравнения электрических машин. СПб., 1997. 272 с.
16. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.
17. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы. М., 1995. 320 с.
18. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб., 1998. 196 с.

19. Asymptotic Methods in Mechanics / Ed. by R. Vaillancourt, A. Smirnov. Providens, 1993. 282 p. (CRM Proc. and Lect. Vol. 3).
20. *Сабанеев В.С.* Кафедра теоретической и прикладной механики в период 1960–1999 гг. // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 4 (№ 22). С. 60-67.
21. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб., 2000. 92 с.
22. *Зегжда С.А.* Соударение упругих тел. СПб., 1997. 316 с.
23. *Ершов Б.А.* Переходные процессы в связанных задачах гидроаэроупругости. СПб., 2000. 164 с.

### **Становление и развитие теории поступательно-вращательного движения двух твердых тел**

*Е. В. Самбурская*

(elena@math.pomorsu.ru)

Поморский государственный университет, Архангельск, Россия

*История развития теории поступательно-вращательного движения небесных тел рассмотрена в работах [1, 2]. Данная статья посвящена научным исследованиям, выполненным во второй половине XX-го века.*

Современная теория поступательно-вращательного движения абсолютно-твердых небесных тел создана, в основном, работами Георгия Николаевича Дубошина, Владимира Трофимовича Кондураря и их многочисленными последователями и учениками. Из автореферата диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук В. Т. Кондураря (1964г.): "До сих пор такой единой, строгой теории поступательного и вращательного движения конкретных тел создано не было. Классическая теория движения спутников и планет, принципиальное развитие которой в основном было завершено к концу XIX века, изучало поступательное и вращательное движения твердого тела независимо друг от друга, и, следовательно, уравнения поступательного движения этой теории отделялись от уравнений вращательного движения. Так, во всех работах о вращательном движении планеты или спутника вокруг его соб-

ственного центра масс предполагалось, что поступательное движение последнего задано, и поэтому уравнения движения центра масс не рассматривались. Аналогично и при изучении поступательного движения планеты или спутника вокруг центрального тела уравнения их вращательного движения не изучались.

Таким образом, в настоящее время мы имеем вместо единой общей теории поступательного и вращательного движения две разрозненные теории — теорию движения центров масс и теорию вращения вокруг центров масс, причем совершенно не ясно, насколько они являются точными. В некоторых случаях отклонения от наблюдений далеко превышают современную точность наблюдений. Развитие техники наблюдений и несоответствие теории и практики вызывают необходимость повышения точности теоретических исследований. Теперь необходим новый подход к изучению некоторых задач небесной механики. Классическая схема материальных точек и схема материального тела и точки в ряде случаев оказываются недостаточными.

Перед небесной механикой стоит задача — построить новую, более точную и вполне строгую математическую теорию поступательно–вращательного движения небесных тел, в основе которой лежит абстрактная схема абсолютно твердых тел, с помощью которой можно изучать с той или иной степенью приближения реальные законы движения конкретных небесных тел.<sup>11</sup>

Начало работ автора над вопросами поступательно–вращательного движения небесных тел относится к 30-м годам, когда появились его первые работы о проблеме движения двух эллипсоидов, в которых были указаны пути решения и возможные обобщения этой проблемы, учитывающие более сложные формы тел (например, фигуры, близкие к эллипсоидальным). Автор исследует простейшие случаи движения центров инерции однородных сфероидов по круговым орбитам в случаях, когда оси вращения либо взаимно параллельны, либо перпендикулярны, а одна из плоскостей симметрии совпадает с плоскостью орбиты. В этих же работах впервые делаются попытки в проведении исследования проблемы устойчивости (в смысле Ляпунова) найденных частных решений при приближенном потенциале взаимодействующих тел, а также строятся периодические решения, близкие к круговым. Лишь позднее (после 1958 года) В. Т. Кондурарем были выполнены работы, учитывающие поступательно–вра-



щательное движение двух абсолютно твердых тел на основе строгих уравнений Г. Н. Дубошина.

Цикл работ Г. Н. Дубошина с 1945 года также посвящен изучению данной проблемы. Им найдены два вида решений, которые определяют периодические движения, близкие к указанным круговым кеплеровским движениям. В последующих работах Г. Н. Дубошин совершенствуется в определении разложения обратного расстояния между двумя точками по положительным и отрицательным степеням аппликаты. И затем приводятся разложения силовых функций Солнца и точки, движущейся равномерно по окружности в плоскости экватора Сатурна. В работе [3] Г. Н. Дубошин предлагает новую форму разложения обратного расстояния между двумя точками в бесконечный ряд достаточно простой структуры. Эта новая форма разложения обуславливается в значительной степени применением цилиндрических координат для притягиваемой точки вместо прямоугольных или полярных и имеет по сравнению с классическими формами то преимущество, что координаты притягивающей точки входят только в коэффициенты ряда для обратного расстояния, которое рассматривается таким образом как функция цилиндрических координат притягиваемой точки. Кроме того, при таком способе разложения коэффициенты ряда оказываются весьма простыми функциями координат другой, притягивающей, точки, для которых получаются общие выражения в виде полиномов с числовыми коэффициентами, весьма просто вычисляемыми. В работе указываются области пространства, в которых подобные ряды сходятся абсолютно и могут быть применены для приложений к различным задачам.

Особенностью рассматриваемых разложений силовой функции в работах Г. Н. Дубошина является то, что представленные ряды располагаются не по положительным, а по отрицательным степеням расстояния притягиваемой точки от некоторой основной координатной плоскости. Поэтому такие разложения применимы только в тех случаях, когда упомянутое расстояние достаточно велико. В данных работах автор предлагает разложение силовой функции некоторых простейших тел: однородного одномерного круглого кольца; однородного плоского кольца, имеющего конечную ширину; однородного круглого диска с массой  $m$  и радиусом  $a$ ; однородного круглого диска, лежащего в плоскости  $z = \bar{z}$ ; однородного сжатого эллипсоида вращения; однородного шара.

Итак, как уже было сказано ранее, в 1958 году была опубликована работа Г. Н. Дубошина [4], в которой рассматривается общая задача о поступательно–вращательном движении системы абсолютно твердых тел, элементарные частицы которых притягиваются по закону Ньютона. Составляются дифференциальные уравнения движения в абсолютной системе координат и показывается, что эти уравнения имеют те же десять классических интегралов, как и уравнения абсолютного движения системы материальных точек (т.е. интегралы движения центра тяжести системы, интегралы моментов количества движения и интеграл живых сил). Исследуется вопрос о разделении общих уравнений на уравнения поступательного движения центров масс и на уравнения вращательного движения тел около центров масс. Устанавливается, что строгое разделение уравнений на две независимые системы имеет место только в том случае, когда каждое из тел системы есть шар, обладающий сферическим распределением плотностей. Во всех остальных случаях такое разделение уравнений возможно только в некотором приближении. В частности, если в дифференциальных уравнениях движения оставить только члены второго и третьего порядков относительно обратных расстояний, то уравнения поступательного движения отделяются и образуют независимую систему, а уравнения вращательного движения содержат координаты центров масс, которые могут быть рассматриваемы как известные функции времени. Также рассматриваются некоторые преобразования абсолютных уравнений движения к подвижным осям, имеющим либо только поступательное движение, либо обладающим и поступательным, и вращательным движениями. Именно эта работа Г. Н. Дубошина фактически положила начало активным исследованиям проблемы поступательно–вращательного движения абсолютно твердых тел в общем виде.

Далее выходят в свет работы Г. Н. Дубошина, в которых он приводит дифференциальные уравнения поступательно–вращательного движения двух взаимно притягивающихся абсолютно твердых тел произвольной формы в относительной системе координат. Сформулировав эту общую задачу, автор рассматривает частные случаи: однородный шар и однородный материальный отрезок — «стержень». Впервые вводятся понятие регулярных движений, названия специальных случаев движения осесимметричных тел: — «поплавок», в этом случае стержень постоянно остается перпендикулярным к плос-

кости круговой орбиты, в которой находится центр инерции; «стрела» — стержень постоянно совпадает с касательной к круговой орбите; «спица» — стержень, который находится в плоскости круговой орбиты. Доказано, что центр инерции осесимметричного тела, обладающего дополнительной симметрией относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения, может совершать как круговые, так и прямолинейные движения.

Решение В. Т. Кондурарем в 1959 году вопроса о поступательно-вращательном движении сфероида вокруг шара находит свое приложение в задаче о движении искусственных спутников вокруг Земли в предположении, что искусственный спутник имеет форму вытянутого сфероида, а также при сооружении межпланетных посадочных станций, имеющих предельную форму сжатого сфероида, т.е. «тарелки» или «диска».

В 1963 году В. В. Белецкий в работе [5] рассмотрел частный случай: задачу о поступательно-вращательном движении твердого тела в поле тяготения однородного шара. При этом силовая функция задачи имела интегральное представление. Доказано, что если твердое тело обладает определенными свойствами симметрии в своем внутреннем строении и во внешней форме, то центр инерции твердого тела может двигаться по круговой орбите тогда, когда одна из плоскостей симметрии находится в плоскости орбиты. Удалось доказать, что достаточным условием устойчивости поступательно-вращательного движения твердого тела по круговой орбите в поле тяготения однородного шара является такое невозмущенное движение, при котором большая ось инерции тела была бы направлена по радиус-вектору орбиты, меньшая ось — по нормали к плоскости орбиты и, следовательно, средняя ось — по касательной к орбите.

При исследовании регулярных движений неограниченной задачи двух тел используется приближенное выражение силовой функции. Поэтому в ряде работ силовая функция или потенциал взаимного притяжения твердых тел представляется рядом того или иного рода за счет разложения подынтегральной функции. Данные результаты изложены в работах В. В. Видякина, Г. Н. Дубошина. Одновременно делаются попытки исследовать поступательно-вращательное движение простейших тел (дисков, стержней, однородных сфероидов и других), изложенные в работах В. В. Белецкого, В. В. Видякина, В. Т. Кондураря и т.д.

Значительные исследования в области поступательно-вращательного движения принадлежат В. В. Видякину. В своих работах он наработывает практику подхода к решению задач интегриродифференциальных уравнений достаточно высоких порядков. Это — определение условий существования плоских движений, регулярных и полурегулярных решений, формирование специальных задач прикладного порядка. Естественно при этом решаются и проблемы устойчивости найденных решений. Появляются первые попытки доказательства преимуществ в изучении совместного поступательного и вращательного движения твердых тел, по сравнению с результатами изолированного поступательного и вращательного движения. Наиболее ярко это проявилось в задаче трех тел — известные Лагранжевы и Эйлеровы решения. Доказано, что эти решения возможны лишь для тел определенной структуры и ориентации. Этот результат невозможно получить из независимого исследования поступательного и вращательного движения твердых тел.

#### Список литературы

1. *Юркина М. И.* Развитие теории вращения твердого небесного тела на основе уравнения Гамильтона-Якоби. К истории теории потенциала и теории вращения небесных тел // 1980. Деп. в ОНТИ ЦНИИГА и К. М. № 24–80.
2. *Баркин Ю. В., Демин В. Г.* Поступательно-вращательное движение небесных тел // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Астрон., 1982. № 20. С. 87–206.
3. *Дубошин Г. Н.* Разложение обратного расстояния в теории притяжения // ПММ, 1946. Т. 10. Вып. 3.
4. *Дубошин Г. Н.* О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся твердых тел // А. Ж., 1958. Т. 35, № 2. С. 265–276.
5. *Белецкий В. В.* Некоторые вопросы поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле сил // Искусственные спутники Земли. Изд-во АН СССР, 1963. Вып. 16. С. 68–93.
6. *Видякин В. В., Емельянов Н. В., Меньшикова Т. В., Самбурская Е. В.* Поступательно-вращательное движение двух твердых тел. Ч. 2. / Учебное пособие. Архангельск: ПГУ, 1997.

## ”Трактат по механике” Шарля Боссю

*В.И. Яковлев, Е.А. Морозова*

(iakovlev@psu.ru)

Пермский государственный университет, Россия

Большую роль в развитии механики XVIII в. сыграли работы Шарля Боссю, талантливого французского механика, математика, историка науки. Теоретические и экспериментальные результаты его работ стали важным этапом формирования основ классической механики, гидромеханики, гидротехники, истории математических наук.

Кратко остановимся на основных идеях механики, изложенных в его трактате “*Traite elementaire de mecanique*”, изданном в Париже, в 1775 г. Это одна из первых крупных работ Боссю, где изложены результаты его теоретических и экспериментальных изысканий. В ней был аккумулирован богатый преподавательский опыт автора, что позволило ей стать одним из первых учебников по механике.

Сочинение было переведено на русский язык В. Висковатовым и издано в С.Петербурге в 1806 г. под названием “Основания статики”. Книга разделена на две части: статику и динамику, последняя в свою очередь делится на две подчасти: “О движениии, рассматриваемом в самом себе” и “О сообщении движений”. Иначе говоря, механика Боссю представлена статикой, динамикой и кинематикой. Сам факт, что Боссю делил подобным образом динамику, делает его структуру механики одной из самых прогрессивных для того времени.

Во вступлении к этой книге Боссю дает определение двух разделов механики твердых тел — статики и динамики. После этого он вводит в рассмотрение определения девятнадцати важнейших понятий механики, среди которых определение самой науки, понятия тела, его состава, величины и плотности, пространства, покоя и движения, силы и т. д.

В разделе “Основания статики” Боссю дает подробную геометрическую характеристику силы, а также формулировку трех основных аксиом статики, которые являются фундаментом его теории.

На основании доказанных в этом разделе теорем автор получает аналитическое и геометрическое условия равновесия. Следуя традиции той эпохи, Боссю приводит недостаточно строгие доказательства изложенных им теорем, опираясь на очевидные для него вещи.

Здесь же автор вводит в рассмотрение понятие моментов сил, выводит правило для нахождения момента равнодействующей двух сил и уравнения моментов параллельных сил относительно точки, прямой, плоскости. Отметим, что при получении уравнения моментов для четырех сил, лежащих в одной плоскости и произвольно направленных, Боссю делает замечание, которое вплотную подводит его к понятию пары сил. Однако этой задаче он не уделяет особого внимания.

Затем автор определяет центр тяжести площади треугольника, трапеции, площади произвольного многоугольника, дуги круга, сектора круга, треугольной пирамиды, произвольной пирамиды.

Третью главу этого раздела автор посвятил практическим применениям изложенного теоретического материала к решению задач о равновесии простейших механизмов.

Динамические взгляды Боссю требуют более детального изучения. Отметим только, что в первой части раздела "Основания динамики", которая называется "О движении, рассматриваемом в самом себе", излагаются принцип инерции, равномерное, равноускоренное и равнозамедленное движения, а также движение центра тяжести тела. Во второй части "О сообщении движений" рассматриваются удары тел и другие случаи их взаимодействия. Автор творчески развивает взгляды своих великих предшественников — Галилея, Декарта, Ньютона, Эйлера и Даламбера.

Для уточнения вклада Шарля Боссю в развитие статики проведем краткий сравнительный анализ первой части "Оснований механики" и книги "Начальные основания статики" его ученика Гаспара Монжа. На первый взгляд, их труды во многом сходны, такое изложение было присуще большинству трудов по механике того времени, оба ученых избрали геометрический подход при изложении теории и решении задач. Но при ближайшем рассмотрении видны качественные отличия их подходов к узловым моментам теории.

Основные понятия у обоих авторов в целом очень похожи, но Монж уточняет, расширяет понятия механики, которые ввел Боссю.

Предлагаемые обоими авторами аксиомы не противоречат современным представлениям о свойствах сил и вызываемых ими движений, однако, существенно отличаются от современных. В процессе изложения материала оба автора осознают незавершенность предлагаемой ими аксиоматики и вынужденно дополняют свои аксиомы

новыми утверждениями, кажущимися им очевидными.

Неполнота аксиоматики оказалась причиной недостаточной строгости доказательства многих теорем. Это свойственно всем работам тех лет. Однако если продолжить сравнительную характеристику, то доказательства Боссю, как правило, более строги. Монж, стремясь к доказательности своих утверждений, часто использовал недостаточно очевидные или недоказанные утверждения.

Подтверждением этому является то, как подошли оба ученых к доказательству правила параллелограмма сил. Монж, заметив, что доказательство Боссю основывается на законе, который нужно доказать, приводит свое доказательство, но при этом повторяет ошибку своих предшественников, основывая его на лемме, которую не доказывает.

Важно отметить, что Ш. Боссю и Г. Монж вплотную подошли к понятию пары сил, введенному в механику Л. Пуансо. К сожалению, они не уделили этому важному понятию достаточного внимания, однако в следующих изданиях своего курса Монж уже использовал учение о паре сил.

Важным результатом работы Ш. Боссю явилось то, что те две силы, к которым, согласно Эйлеру, может быть приведена любая система сил, приложенных к твердому телу, всегда могут быть выбраны перпендикулярными друг к другу. Необходимо также отметить, что он получил аналитические условия равновесия совершенно иным — геометрическим способом. Боссю приводит три уравнения равновесия для плоской системы сил и шесть — для пространственной. Эти уравнения совпадают с современными с точностью до обозначений.

Однако большинство ученых связывают имя Шарля Боссю с развитием гидромеханики. Боссю провел множество экспериментов в Школе инженерного дела в Мезьере, а позднее и в Париже. В 1786 г. вышел его "Теоретический и экспериментальный трактат по гидромеханике", который является обобщением его теоретических работ и многочисленных опытов в этой области.

Боссю также увлекался теорией движения водяных колес. Он провел целый ряд экспериментов, посвященных этому вопросу, в результате которых им было сделано следующее заключение: скорость колеса, соответствующая его оптимальной отдаче, должна быть приблизительно равной  $2/5$  скорости потока, что полностью совпадало с результатами соответствующих опытов Дж. Смитона. Также Боссю

опытным путем показал справедливость предположения, сделанного Х. Хуаном: "давление на колесо следует считать пропорциональным первой степени скорости потока". Боссю пришел к результату, что для больших колес отношение между мощностью и давлением колеса в среднем равно 3:1, а среднее отношение между скоростью истечения воды и скоростью вращения колеса равно 5:2. Боссю установил также, что на колесе следует ставить как можно больше лопаток, но так, чтобы это не утяжеляло колеса. Заслуга Боссю в этой области механики состоит, прежде всего, в том, что он старался сочетать теорию с практически полученными результатами. Переходя к оценке вклада Ш.Боссю, можно утверждать, что творчество этого выдающегося ученого было важным звеном истории развития мировой механики. Это была необходимая ступень от Вариньона, Эйлера и Даламбера к Лагранжу и Пуансо. В Боссю блестяще сочетались талант педагога и ученого, экспериментатора и теоретика — механика и математика. По его книгам учились не только во Франции, но и во многих других европейских странах, в том числе, и в России.

В детстве он учился вместе с Ж. Э. Монтюкла и Ж.Ж. Лаландом, в молодости его поддерживали Ш.Э.Л. Камю, А. Клеро и Ж.Л. Даламбер, в зрелые годы он работал с Э. Безу, А. Кондорсе, Ж.Л. Даламбером, Г. Монжем, а позднее - с Ж.Л. Лагранжем, П.С. Лапласом, Л. Пуансо, С.Д. Пуассоном и другими выдающимися учеными Франции, профессорами Парижской Политехнической школы. Он был одним из них.

#### Список литературы

1. *Боссю Ш.* Основания механики. СПб., 1806.
2. *Монж Г.* Начальные основания статики. СПб., 1803.



# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>Пленарные доклады</b>	<b>5</b>
<i>Белецкий В.В.</i> Егоров, Лидов, Ершов и полёты к Луне . . .	5
<i>Зегзюда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.</i> Основные результаты Поляховской школы по аналитической ме- ханике . . . . .	16
<i>Карпетян А.В.</i> Устойчивость и бифуркация стационар- ных движений неавтономных систем . . . . .	22
<i>Черных К.Ф.</i> Комплексная нелинейная упругость (теория и приложения) . . . . .	29
<b>Секция I. Теоретическая и прикладная механика</b>	<b>41</b>
<i>Веретенников В.Г., Красильников П.С., Слинцын В.А.</i> О вынужденных колебаниях динамических систем . . . .	41
<i>Галиуллин И.А.</i> Регулярные прецессии в осесимметричных силовых полях . . . . .	47
<i>Диевский В.А.</i> Преобразование уравнений электрической машины двойного питания . . . . .	53
<i>Иванов С.Е., Мельников Г.И.</i> Исследование устойчи- вости движения динамических систем полиномиальной структуры с периодическими параметрами . . . . .	57
<i>Карпетян А.В.</i> Устойчивость и бифуркация стационар- ных движений волчка, заполненного жидкостью, на плоскости с трением . . . . .	62

<i>Кудаев С.П.</i> Геометрическая интерпретация принципа Гаусса . . . . .	69
<i>Локшин Б.Я., Селюцкий Ю.Д.</i> К динамике полета противораковых ракет . . . . .	73
<i>Пойда В.К.</i> Общее уравнение механики Ньютона-Фарадея в расширенном неголономном базисе . . . . .	79
<i>Поликарпов С.А.</i> О неустойчивости траекторий бильярда при неупругом отражении от границы . . . . .	83
<i>Родюков Ф.Ф.</i> Асинхронно-синхронная машина, эквивалентная большой электроэнергетической системе . . . . .	86
<i>Суликашвили Р.</i> О движениях тел с группой симметрии правильных многогранников при наличии роторов . . . . .	89
<i>Тверев К.К.</i> Неголономная неидеальная неудерживающая связь в задаче управления нелинейной системой . . . . .	94
<i>Тхай В.Н., Швыгин А.Л.</i> Задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, когда центр тяжести расположен на главной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки . . . . .	97
<i>Утина Н.В., Шепелявый А.И.</i> Задача Стокера для дискретных систем синхронизации . . . . .	101
<i>Blekhman I.I., Sperling L.</i> Stabilization of the synphase post-critical regime of rotation of vibroexciters by means of internal degree of freedom. . . . .	107
<i>Duckstein H., Ryzhik B., Sperling L.</i> Self-balancing of an anisotropically supported rigid rotor. Analytical part . . . . .	111
<i>Duckstein H., Ryzhik B., Sperling L.</i> Self-balancing of an anisotropically supported rigid rotor. Simulation results. . . . .	116
<i>Mei Fengxiang</i> Non-Noether Conserved Quantity of Nonholonomic System . . . . .	120
<i>Pascal M.</i> Non linear vibrations of an unbalanced rotor with radial clearance . . . . .	123
<i>Vlasenko D.Ju.</i> Building the mathematical model of the hybrid manipulator . . . . .	132
<b>Секция II. Динамика космического полета</b>	<b>137</b>
<i>Глухих Ю.Д., Тхай В.Н.</i> Колебания спутника в плоскости слабоэллиптической орбиты под действием гравитационных и аэродинамических моментов . . . . .	137

<i>Колесников Е.К., Яковлев А.Б.</i> Некоторые задачи динамики тела с переменным электрическим зарядом . . . . .	142
<i>Косенко И.И.</i> О сохранении условно-периодических колебаний спутника на эллиптической орбите при учете светового давления . . . . .	147
<i>Кузнецов Е.Б., Красников С.Д.</i> О некотором подходе к решению задачи об ограниченном движении двух тел .	152
<i>Куницын А.Л.</i> Об устойчивости облачных скоплений микрочастиц в бинарных звездных системах . . . . .	157
<i>Петров К.Г.</i> Конфигурационное S-пространство динамически симметричного твердого тела в случае Эйлера .	164
<i>Холшевников К.В.</i> О расстояниях в пространстве эллиптических орбит . . . . .	168
<i>Шанвиль П.</i> Стационарные движения и устойчивость спутника, удерживающего две массы с помощью тросов . .	173
<b>Секция III. Гидроаэромеханика</b>	<b>179</b>
<i>Аксенова О.А., Халидов И.А.</i> Уточненная фрактальная модель шероховатости при взаимодействии разреженного газа с поверхностью . . . . .	179
<i>Бестужева А.Н.</i> Теория собственных функций задач математической физики в клиновидной области . . . . .	185
<i>Волошинова Т.В., Ершов Б.А., Любимова Е.О.</i> Гибкое машущее крыло . . . . .	190
<i>Гунько Ю.Ф.</i> Структура экранирующего электрического поля вблизи проводящей поверхности в разреженной плазме . . . . .	194
<i>Кочерыженков Г.В., Матвеев С.К., Пчелинцев Д.В.</i> Разделение эмульсии в фильтре с коалесцирующей загрузкой . . . . .	198
<i>Кутеева Г.А.</i> Определение свободной поверхности жидкости в движущемся сосуде с упругой вставкой асимптотическим методом . . . . .	203
<i>Пяртпуу А.А., Чередов В.В., Шематович В.И.</i> Стохастическое моделирование в динамике разреженного газа .	207
<i>Рыдалевская М.А., Рябикова Т.В.</i> Истечение из форкамеры колебательно неравновесного газа . . . . .	214

<i>Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.</i> К задаче о колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды . . . . .	220
<i>Скурин Л.И.</i> Параллельная версия итерационно-маршевого метода интегрирования уравнений Навье-Стокса . . . . .	225
<i>Цибаров В.А., Цибарова Е.В.</i> Н-теорема для сложных сред	230
<b>Секция IV. Механика деформируемого твердого тела</b>	<b>236</b>
<i>Бауэр С.М.</i> Механические аспекты развития глаукомы . . .	236
<i>Бегун П.И.</i> Напряженно-деформированное состояние в клапанном аппарате сердца при внешнем воздействии .	241
<i>Викторов И.В.</i> Осевое сжатие конической оболочки из разномодульного материала . . . . .	244
<i>Груздков А.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Разов А.И., Уткин А.А., Федоровский Г.Д.</i> Об исследовании функционально-механических свойств сплава TiNi при статических и ударных динамических испытаниях малых образцов . . . . .	249
<i>Ершова З.Г., Ершов В.И.</i> К задаче об устойчивости цилиндрической панели, сопряженной со стержнем . . . . .	254
<i>Зимин Б.А., Миркин М.А., Темнов О.В.</i> Статические свойства балочной модели разрушения тонких отслоений .	257
<i>Квасников Б.Н.</i> Теоремы аппроксимации и существования в теории тонких оболочек . . . . .	261
<i>Кликушина М.В.</i> Устойчивость цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением под действием осевой нагрузки . . . . .	266
<i>Кузванов И.Л.</i> Устойчивость тонкой круговой анизотропной цилиндрической оболочки при чистом кручении . .	271
<i>Макаренко И.Н.</i> Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной пластинами . . . . .	275
<i>Матвеева Г.А.</i> Влияние температуры на собственные частоты колебаний анизотропной пластины . . . . .	280
<i>Смирнов А.Л., Федчун О.В.</i> Возмущения спектра собственных частот колебаний оболочек . . . . .	284
<i>Титяев А.С.</i> О деформации капсулы хрусталика при аккомодации . . . . .	288
<i>Федоровский Г.Д.</i> О концепции собственного времени в механике сплошных сред . . . . .	293

<b>Секция V. История механики</b>	<b>299</b>
<i>Александров В.Б.</i> О развитии геоцентрической концепции мироздания . . . . .	299
<i>Алешков Ю.З.</i> Профессор Анатолий Андреевич Гриб . . . . .	302
<i>Сабанеев В.С.</i> Из истории НИИ математики и механики им. акад. В.И. Смирнова . . . . .	307
<i>Сабанеев В.С., Филиппов С.Б.</i> Вклад кафедры теоретической механики Петербургского университета в развитие механики в 1917 — 2002 гг. . . . .	312
<i>Самбурская Е.В.</i> Становление и развитие теории поступательно-вращательного движения двух твердых тел . . . . .	319
<i>Яковлев В.И., Морозова Е.А.</i> "Трактат по механике" Шарля Боссю . . . . .	325