

Санкт-Петербургский государственный университет

Т. Атанацкович и А. Гуран
Лекции по теории упругости

В переводе и под редакцией

А.Л. Смирнова и П.Е. Товстика

Санкт-Петербург
2003

ББК 22.251
А92

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета*

А92 Атанацкович Т., Гуран А.
Лекции по теории упругости / Пер. и ред. А.Л. Смирнова
П.Е. Товстика. — СПб., 2003. — 400 с.
ISBN 5-87403-035-2

В книге рассмотрены как классические задачи теории упругости и устойчивости упругих систем, так и относительно новые результаты. Рассматриваемые задачи снабжены подробными указаниями и решениями. Книга представляет уникальную для русскоязычного читателя возможность увидеть достижения отечественной механики глазами зарубежных ученых. Настоящее учебное пособие может быть использовано в курсах лекций “Теория упругости”, “Сопротивление материалов” и “Устойчивость упругих тел”.

Предназначено для студентов старших курсов отделения механики математико-механического факультета, а также для студентов других факультетов университета.

ББК 22.251

ISBN 5-87403-035-2

© Т. Атанацкович, А. Гуран, 2003
© А.Л. Смирнов, П.Е. Товстик, пер., ред., 2003
© С.-Петербургский гос. университет, 2003

От редакторов

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена одной из старейших и наиболее развитых областей механики — теории упругости. Количество монографий и статей, учебников и справочников, посвященных рассмотрению задач теории упругости и опубликованных практически во всех странах мира, не подлежит учету. Без преувеличения можно сказать, что отечественная школа внесла основной вклад в развитие теории упругости в XX в., а книги, написанные русскими и советскими учеными С.П. Тимошенко, Г.В. Колосовым, Н.И. Мусхелишвили, В.В. Новожиловым, А.И. Лурье, по праву считаются классическими в этой области. Парадоксально, что при этом работы и достижения отечественных ученых плохо известны широкому кругу иностранных исследователей. Редко в англоязычных учебниках можно встретить ссылку на работы (даже ставшие классическими) отечественных авторов и уж тем более на результаты их текущих исследований. В этом смысле книга Т. Атанацковича и А. Гурана “Лекции по теории упругости” является счастливым исключением. В ней изложены не только результаты корифеев науки, но и относительно новые результаты отечественных ученых, опубликованные до конца 80-х гг. XX в. Жаль, конечно, что работы 90-х гг. не вошли в книгу (последняя по времени ссылка датирована 1987 г.), но, возможно, для учебного пособия по основам теории упругости, каковым является настоящая книга, это требование несколько завышено. Таким образом, данная книга представляет уникальную для русскоязычного читателя возможность увидеть достижения отечественной механики глазами зарубежных ученых.

Вторая отличительная черта книги — это характерная для североамериканских авторов практическая направленность. Читатель не найдет в книге столь обычного для русскоязычной литературы строго математического анализа задач (существования и единственности решений, обоснования корректности алгоритмов, оценок погрешностей асимптотических решений), зато будет приятно удивлен обилием решенных конкретных задач, рассыпанных по всей книге в качестве при-

меров и задач для решений. Стоит согласиться с авторами, что для студентов технических университетов и для инженеров такое знакомство с началами теории упругости наиболее продуктивно. Отметим, что при этом все основные понятия и определения в книге даны с достаточной математической строгостью.

В работе над переводом книги приняли участие сотрудники и студенты кафедры теоретической и прикладной механики математикомеханического факультета Санкт-Петербургского государственного университета: Ж.В. Короткая, Г.А. Матвеева, Д.С. Мохнатов, Н.Г. Филиппов, В.В. Пиотрович. Особо следует отметить работу В.И. Сергеевой по технической подготовке рукописи. Предметный указатель составлен студентами — слушателями курса лекций “Пакеты прикладных программ”.

Всем им авторы и редакторы выражают свою благодарность.

А.Л. Смирнов, П.Е. Товстик

Предисловие

Эта книга представляет собой курс лекций по теории упругости. Она предназначена для студентов старших курсов высших учебных заведений, специализирующихся в области инженерной и строительной механики. Предполагается, что читатель знаком с курсами механики (статика, динамика) и сопротивления материалов, а также с современными методами вычислений, линейной алгеброй и дифференциальными уравнениями. Наш опыт преподавания теории упругости студентам инженерных специальностей свидетельствует о том, что такой курс должен быть ориентирован на решение конкретных проблем. Мы убеждены, что *постановка* и *решение* задач составляют самую суть теории упругости¹. Конечно, ориентация на постановку и решение задач не исключает необходимости изучения фундаментальных основ. Под фундаментальными основами подразумеваются такие понятия, как напряжение, перемещение и деформация, условия совместности, уравнения состояния, энергия деформации, а также необходимые математические дисциплины: дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций комплексных переменных, вариационные методы и методы вычислений.

Существует много прекрасных книг по теории упругости, часть из которых приведена в библиографии. В список особенностей, которые отличают данную книгу от аналогичных работ, помимо упомянутой выше ориентации на решение задач, следует включить: анализ не только малых деформаций, выбор рассматриваемых задач и использование только декартовых компонент тензоров. По каким причинам нами использовались только декартовы компоненты? Во-первых, тензорный формализм по Декарту легче воспринимается читателем и является своего рода введением к применению тензорных методов в

¹См. P.R. Halmos, The Heart of Mathematics. *Amer. Math. Monthly.* **87**, 519-524 (1980), где утверждается, что “математика в действительности состоит из задач и их решений. Очевидно, что это утверждение справедливо (даже в более сильной форме) для механики в целом и теории упругости в частности.”

механике. Во-вторых, использование недекартовых компонент “усложняет задачу” (см. [47]). Для изучения теории упругости с использованием и классического и тензорного анализа рекомендуется книга Марсдена и Хьюджеса [71]. Введением тензора нелинейных деформаций мы получаем возможность систематического изучения теории геометрически нелинейных пластин (теория фон Кармана) и анализа устойчивости упругих тел. Пусть в несколько упрощенном виде, но в данной книге излагаются трудные, но очень важные проблемы контактных напряжений и устойчивости, как правило опускаемые во вводных курсах.

Глава 1 посвящена изучению напряжений. Сформулирован принцип Эйлера–Коши и доказана теорема Коши. С помощью принципа Д’Аламбера получены уравнения равновесия и движения в терминах компонент матрицы напряжений. Получено правило преобразования матрицы напряжений и показано, что она удовлетворяет закону преобразования декартова тензора второго порядка. Найдены главные напряжения, главные направления и инварианты тензора напряжений. Глава заканчивается классификацией напряженного состояния в точке (линейное, плоское, трехмерное), основанной на свойствах тензора напряжений.

Глава 2 начинается с описания деформации в точке. Мера деформации вводится как половина разности между квадратами линейного элемента в деформированном и недеформированном состоянии. Получен тензор нелинейных деформаций и рассмотрен геометрический смысл его компонент. С помощью линеаризации найден тензор малых деформаций и исследованы его свойства. Получены условия совместности для тензора линейных деформаций и приведены комментарии к условиям совместности для тензора нелинейных деформаций. Глава заканчивается описанием датчиков деформаций и рассмотрением проблемы определения главных значений тензора деформаций по показаниям датчика деформаций.

Эти вводные главы, в которых изложены общие представления о напряжениях и деформациях, подготавливают почву для применения в дальнейшем достаточно простого метода, использующего только декартовы векторы и тензоры. Представлены также уравнения равновесия в цилиндрической и сферической системах координат и соотношения между напряжениями и деформациями в этих координатах.

Глава 3 знакомит с уравнениями состояния упругого тела. Глава, в которой рассмотрена связь между напряжением и деформацией, начинается с изложения истории вопроса, что, вероятно, будет особенно интересно студентам. Выражения записываются в цилиндрических и сферических координатах, что будет полезно в качестве справочной информации для исследователя. Осуществлена линеаризация уравнений состояния в случае малой деформации; выведено правило преобразования тензора упругости четвертого ранга. При помощи по-

следовательного упрощения получены уравнения состояния для анизотропных, моноклиальных, ортотропных, тетрагональных, кубических и изотропных материалов. Приведены соотношения между напряжениями и деформациями для задач термоупругости. Выведены уравнения совместности в терминах напряжений (уравнения Бельтрами–Мичелла); кратко описаны другие формы нелинейных соотношений между напряжениями и деформациями. В этой главе рассмотрены также температурные напряжения.

Глава 4 использует изложенные в первых трех главах результаты для формулировки уравнений движения как краевых задач. В этой главе кратко описаны уравнения линейной теории упругости и определены основные типы краевых задач для этих уравнений. В дальнейшем обсуждаются методы их решения. Рассмотрено применение скалярных и векторных потенциалов при решении задач теории упругости (потенциал Ламе, вектор Галеркина, функция Лява, метод решения Папковича–Нейбера и т. д.). Глава заканчивается описанием принципа Сен-Венана и замечаниями по поводу его получения.

В **главе 5** рассмотрено большое количество классических проблем, в которых решение может быть получено в замкнутой форме. Приведены решения некоторых важных проблем теории упругости. Подробно изучены кручение, изгиб и вращение призматического стержня. Получены элементарные решения Буссинеска первого и второго рода и изучаются их свойства. Особенно интересны задачи о полупространстве, нагруженном касательной силой, и об упругих волнах. Эта глава является “сердцем книги”. В совокупности эти результаты представляют удобный справочный материал для исследователя.

В **главе 6** определены плоская деформация, плоское напряженное состояние, обобщенное плоское напряженное состояние, приведены соответствующие задачи и изложены методы их решения. Введена функция напряжений Эйри. Рассмотрены применение метода комплексных переменных (формулы Колосова и представление Гурса для бигармонической функции), преобразования Фурье и ряд других процедур. Продемонстрировано их использование при решении некоторых важных технических задач. Значительное внимание в этой главе уделено методу комплексных переменных Мусхелишвили, в том числе его применению к задаче о напряжениях вокруг трещины.

В **главе 7** рассматривается использование энергетического метода в теории упругости. Приведены принципы виртуальной и дополнительной работы с соответствующими вариационными формулировками. Обсуждается применение в механике энергетического метода. Доказаны теоремы Кастильяно и продемонстрировано их применение.

В **главе 8** излагается теория пластин фон Кармана. Классическая теория пластин рассматривается как ее частный случай. Приведено несколько примеров. Также представлены основные уравнения теории Рейсснера–Миндлина с соответствующим примером.

В **главе 9** рассматривается контактная задача теории упругости. Приводятся решение Герца и некоторые его обобщения. Также рассматривается задача о соударении упругих тел.

В **главе 10** рассматривается устойчивость упругих тел. Приводятся методы анализа устойчивости Эйлера, энергетический и динамический, а также методы определения критических значений параметров, при которых состояние равновесия упругого тела становится нестабильным. Рассмотрены примеры, в которых проводится анализ устойчивости.

Если глава 5 является “сердцем” книги, то главы 7–10 — ее “руками и ногами”. Каждая из этих глав рассматривает специальные вопросы: энергетические методы, пластины, контактные задачи, упругая устойчивость. Если книга используется в курсе, который читается лишь один семестр, то может не хватить времени для изучения всего текста книги. В этом случае преподаватель может рассмотреть лишь пару глав из четырех последних. Эти четыре главы относительно независимы (хотя в главе 10 используются результаты главы 7). В конце каждой главы дается определенный набор задач. Некоторые из них расширяют и обобщают примеры, изложенные в соответствующей главе, и не всегда достаточно просты. Другие задачи, взятые из числа экзаменационных, вообще говоря, несложны.

Мы благодарны коллегам за замечания и конструктивную критику. Особенно отметим вклад Б.С. Баклича (B.S. Bacic), А. Баяй (A. Bajaj), Р. Плаута (R. Plaut), Р. Рэнда (R. Rand), Ф. Римротта (F. Rimrott), Р. Суше (R. Souchet), Д.Т. Спасича (D.T. Spasic), Х. Уберолла (H. Uberall) и Б.Д. Вуяновича (B.D. Vujanovic). В процессе подготовки материала авторам оказали помощь В. Главарданов (V. Glavardanov), Р. Маретич (R. Margetic), Й. Милидрагович (J. Milidragovic) и Л. Эспе (L. Espeut).

Нельзя не упомянуть блестящих знатоков современной теории упругости Р. Ривлина (R. Rivlin) и К. Трусделла (C. Truesdell). Их труды, а также работы С. Антмана (S. Antman), Дж. Болла (J. Ball), А. Грина (A. Green), М. Гуртина (M. Gurtin), Р. Нобса (R. Knobs), И. Мюллера (I. Müller), П. Нажди (P. Naghdi), С. Немат-Нассера (S. Nemat-Nasser) и В. Нолла (W. Noll) оказали большое влияние на нашу работу над данной книгой.

Нови Сад, Югославия
Оттава, Онтарио, Канада

Т.М. Атанацкович
А. Гуран

Глава 1

Анализ напряжений

1.1 Введение

В этом параграфе анализируются внутренние силы в деформируемом теле. Деформируемое тело может быть твердым или жидким. Здесь мы не даем точного математического определения твердого и жидкого тела¹ (это определение можно найти у Трусделла и Нолла [89]). Мы определяем твердое тело как *деформируемое тело, допускающее наличие касательных напряжений*, другими словами, твердое тело может испытывать касательные силы (т. е. силы, направленные вдоль поверхности, на которую они воздействуют) в течение всего интересующего нас времени. В жидком теле при статической деформации нет касательных напряжений. При анализе напряжений мы сосредотачиваемся на изучении внутренних сил и считаем, что молекулярная структура твердого тела в деформированном состоянии такая же, как и в недеформированном состоянии. На атомном уровне внутренние силы — это ионные, металлические, и силы Ван-дер-Ваальса, действующие между отдельными атомами. Понятие *напряжения* вводится в механике сплошной среды для анализа *интегрального действия* атомных сил. Это так называемый макроскопический взгляд на твердое тело. Мы пренебрегаем тем, что структура тела дискретна, и полагаем, что масса тела непрерывно распределена в трехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, говоря, к примеру, что точка C принадлежит данному телу, мы не имеем в виду, что она находится в межатомном пространстве.

Мы считаем тело свободным от напряжений в том случае, когда внутренние силы, действующие между точками тела, необходимы для придания телу формы, которую оно имело без какого-либо воздействия извне, включая воздействие сил гравитации. Другими словами, тело считается свободным от напряжений в том случае, если на атомном уровне существуют только такие силы и моменты, которые поддерживают атомы в исходном (кристаллическом) состоянии. Мы также исключаем из рассмотрения внутренние силы, сформировавшиеся в процессе придания телу определенного состояния. В теории упругости термин “напряженное состояние тела” употребляется для такого со-

¹ Например, простой материал называется деформируемым, если существует состояние, такое, что группа изотропии в этом состоянии является подгруппой ортогональной группы.

стояния тела, в котором действующие силы вызывают изменения положения равновесия атомов тела относительно исходных положений равновесия. Эти изменения положений равновесия являются результатом *деформации тела*. Деформации появляются вследствие воздействия на тело внешних сил и моментов. Таким образом, анализ напряжений связан с *изменениями межатомных сил* (и не связан с их абсолютными значениями) для любых деформаций упругого тела.

Внешние силы могут быть двух видов: поверхностные и объемные. Объемные силы воздействуют на все точки тела. Такими силами, к примеру, являются силы гравитации и силы инерции. Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ — оси фиксированной системы прямоугольных декартовых координат, заданные для состояния тела κ , а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — их орты. Зададим вектор, определяющий положение произвольной точки M тела B в состоянии κ , в виде

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{f}_0(x_i)$ является объемной силой, отнесенной к единице массы тела в окрестности точки M . Масса части тела, заключенной в объеме dV , равна $dm = \rho_0 dV$, где ρ_0 — плотность материала тела. Таким образом, сила, действующая на часть тела объемом dV , такова: $\mathbf{f}_0(x_i)\rho_0 dV$. Из этого выражения получаем объемную силу, действующую на единицу *объема* тела в окрестности точки M в виде $\rho_0 \mathbf{f}_0(x_i) = \mathbf{f}(x_i)$. Сумма всех объемных сил запишется следующим образом:

$$\mathbf{F}_f = \iiint_V \rho_0 \mathbf{f}_0(x_i) dV = \iiint_V \mathbf{f}(x_i) dV. \quad (2)$$

В выражении (2) V — объем тела B в состоянии κ . Момент объемных сил относительно точки O (рис. 1) имеет вид

$$\mathbf{M}_f = \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}(x_i) dV. \quad (3)$$

В выражении (3) знак “ \times ” определяет векторное произведение.

Другой вид внешних сил — поверхностные силы. Они воздействуют на поверхность тела S (рис. 1) и могут быть равномерно или неравномерно распределенными. Пусть \mathbf{p} — сила, действующая на единицу площади поверхности тела S . Тогда *главный вектор* и *главный момент* поверхностных сил относительно точки O имеют вид

$$\mathbf{F}_S = \iint_S \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{M}_S = \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{p} dS. \quad (4)$$

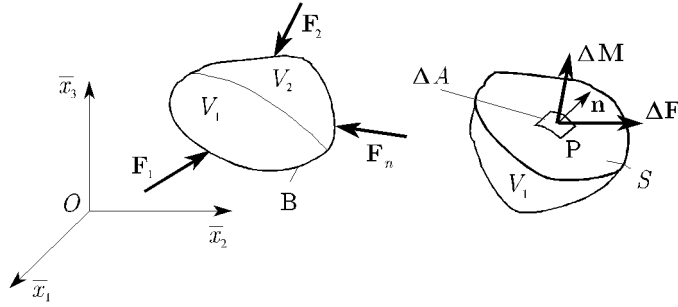


Рис. 1

Если тело B в состоянии κ находится в положении равновесия, то можно записать следующие уравнения равновесия:

$$\mathbf{F}_f + \mathbf{F}_S = 0; \quad \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_S = 0. \quad (5)$$

В выражениях (3) и (4) все моменты являются следствием действия сил. Можно снять это ограничение путем задания *поля заданных моментов*. Такое поле может быть задано с помощью интенсивности \mathbf{m}_V в объеме V и интенсивности \mathbf{m}_S на поверхности S . Тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$\hat{\mathbf{M}}_f = \iiint_V [\mathbf{m}_V + \mathbf{r} \times \mathbf{f}(x_i)] dV; \quad \hat{\mathbf{M}}_S = \iint_S [\mathbf{m}_S + \mathbf{r} \times \mathbf{p}] dS. \quad (6)$$

Материалы, в которых действуют вышеупомянутые заданные моменты, называются *поляризованными материалами*.

1.2 Вектор напряжений. Теорема Коши

Чтобы определить воздействие одной части тела на другую, мы предполагаем, что тело рассечено таким образом, что обе части с объемами V_1 и V_2 вполне определены. В механике сплошной среды Эйлером и Коши (см. [88]) введена следующая **аксиома**:

На любой поверхности (реальной или воображаемой), разделяющей тело, действие одной части тела на другую эквивалентно системе сил и моментов, распределенных по разделяющей тело поверхности.

Мы приняли, что тело B находится в равновесии. Также мы предположили, как показано на рис. 1, что тело рассечено на две части. Предположим далее, что часть V_2 удалена и будем рассматривать только часть V_1 . Так как тело в целом находилось в равновесии, часть тела

V_1 также будет находиться в равновесии под действием поверхностных и объемных сил, а также системы распределенных сил и моментов, действующих по разделяющей объемы V_1 и V_2 поверхности S_1 . Для описания этой распределенной системы сил и моментов зафиксируем на поверхности S_1 произвольно взятую точку P . Пусть \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S_1 в точке P . Введем малый элемент поверхности S_1 площадью ΔA , включающий в себя точку P . Предположим, что размеры этого элемента площадью ΔA стремятся к нулю, но таким образом, что он всегда включает в себя точку P , и что его нормалью всегда является вектор \mathbf{n} . Далее определим величину \mathbf{p}_n с помощью соотношения

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}. \quad (1)$$

В формуле (1) сила $\Delta \mathbf{F}$ является главным вектором всех сил, действующих на поверхность элемента площадью ΔA со стороны части V_2 на часть V_1 . Предполагается, что предел (1) существует. Он называется *вектором напряжений* в точке P для элемента (площадью ΔA), ориентация которого определяется единичным вектором \mathbf{n} . Аналогично определяем

$$\mathbf{m}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta A}, \quad (2)$$

где мы используем $\Delta \mathbf{M}$ для обозначения главного момента всех сил, действующих на поверхность элемента площадью ΔA . При исследовании кристаллов Фойгт в 1887 г. изучал модель упругого тела, атомы которого действуют друг на друга центральными силами и моментами таким образом, что $\Delta \mathbf{M} \neq 0$. Позднее, в 1909 г., исследования Фойгта были продолжены Е. и Ф. Коссера. В классической теории упругости, которую мы излагаем, предполагается, что

$$\mathbf{m}_n = 0 \quad (3)$$

для всех точек P внутри тела B и всех \mathbf{n} .

Отметим, что напряжение \mathbf{p}_n не является векторным полем в обычном понимании, так как оно зависит и от точки P , и от направления, характеризуемого вектором \mathbf{n} . Вектор \mathbf{p}_n изменяется даже в том случае, когда точка P фиксирована. К примеру, положим, что мы изменили \mathbf{n} на $(-\mathbf{n})$. Значит, мы рассматриваем воздействие части тела V_1 на часть V_2 . В соответствии с третьим законом Ньютона действие равно противодействию, поэтому имеем

$$\mathbf{p}_{-\mathbf{n}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{-\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = -\mathbf{p}_n. \quad (4)$$

Уравнение (4) выражает **лемму Коши**: *вектор напряжений, действующий с противоположной стороны той же самой поверхности, равен по модулю и противоположен по направлению.*

Совокупность векторов $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(P)$ в точке P для всех единичных векторов \mathbf{n} (таких векторов бесконечно много) определяет *напряженное состояние* в точке P . **Принцип напряжений Коши** может быть сформулирован следующим образом: *внутренние силы в точке P деформированного тела определяют его напряженное состояние в этой точке.*

Дадим пример появления вектора напряжений. Рассмотрим тонкий призматический стержень, изображенный на рис. 2. На концах стержень нагружен силами \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$. Положим, что площадь поперечного сечения равна A^* .

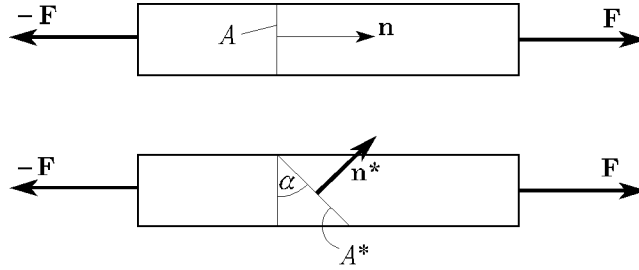


Рис. 2

Предположим также, что силы $\Delta \mathbf{F}$ равномерно распределены по площади A^* с нормалью \mathbf{n}^* (это предположение справедливо в целом ряде случаев). Значит, имеем

$$\mathbf{p}_n^* = \frac{\mathbf{F}}{A^*} \quad (5)$$

для всех точек, лежащих на площади A^* . Если рассмотрим наклоненное сечение с единичным вектором нормали \mathbf{n} , то получим

$$\mathbf{p}_n = \frac{\mathbf{F}}{A}. \quad (6)$$

Это равенство показывает, что вектор \mathbf{p}_n может иметь произвольную ориентацию относительно вектора \mathbf{n} . Таким образом, можно разложить \mathbf{p}_n по направлению \mathbf{n} и направлению, ортогональному \mathbf{n} , которое обозначим как \mathbf{t} . Следовательно,

$$\mathbf{p}_n = \sigma_n \mathbf{n} + \sigma_t \mathbf{t}. \quad (7)$$

Так как \mathbf{n} и \mathbf{t} — единичные взаимно ортогональные векторы, то (рис. 3)

$$|\mathbf{p}_n|^2 = \sigma_n^2 + \sigma_t^2. \quad (8)$$

Компонента σ_n называется *нормальным напряжением*, а компонента σ_t — *касательным напряжением*.

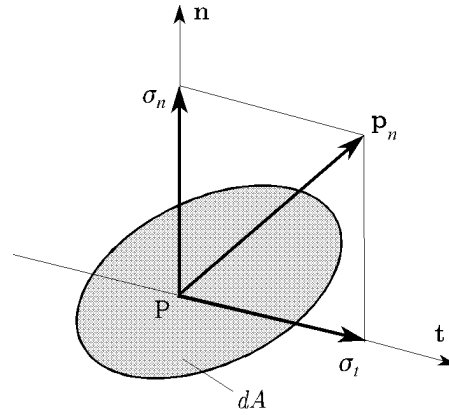


Рис. 3

Как сказано выше, бесконечное множество векторов \mathbf{p}_n определяют напряженное состояние в точке. Покажем, что все эти векторы не являются независимыми и что все они могут быть определены, если известны напряжения на площадках, перпендикулярных осям прямоугольной декартовой системы координат \bar{x}_i .

Вектор напряжений в точке P на плоскости $x_i = \text{const}$ с нормалью \mathbf{e}_i обозначим \mathbf{p}_i . Рассмотрим вектор \mathbf{p}_3 (рис. 4). Его можно разложить по осям \bar{x}_i таким образом, что²

$$\mathbf{p}_3 = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{p}_3)_k \mathbf{e}_k = (\mathbf{p}_3)_k \mathbf{e}_k. \quad (9)$$

Величины $(\mathbf{p}_3)_k$ являются проекциями вектора \mathbf{p}_3 на оси \bar{x}_k . С этого момента вводим обозначение $(\mathbf{p}_i)_j = \sigma_{ij}$.

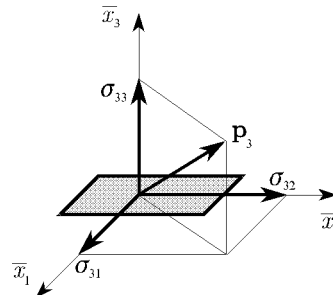


Рис. 4

² В выражении (9) мы применили соглашение Эйнштейна о повторяющихся индексах: по повторяющимся индексам происходит суммирование от $k = 1$ до $k = 3$.

Таким образом, в соответствии с уравнением (9) получаем

$$\mathbf{p}_i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (10)$$

Умножив равенство (10) на \mathbf{e}_k и используя тот факт, что система векторов \mathbf{e}_k является ортогональной системой единичных векторов, имеем

$$\sigma_{ij} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{e}_j. \quad (11)$$

Векторы напряжений \mathbf{p}_i , $i = 1, 2, 3$, для трех координатных плоскостей задаются с помощью равенства (11) девятью скалярными величинами σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Эти величины будем рассматривать как элементы матрицы $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$, а именно

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Первый индекс в σ_{ij} задает координатную плоскость, на которую воздействует вектор напряжений, а второй индекс задает координатную ось, на которую спроецирован вектор напряжений. На рис. 5 показаны компоненты векторов напряжений на координатных плоскостях для малого прямоугольного элемента тела со сторонами dx_i , $i = 1, 2, 3$.

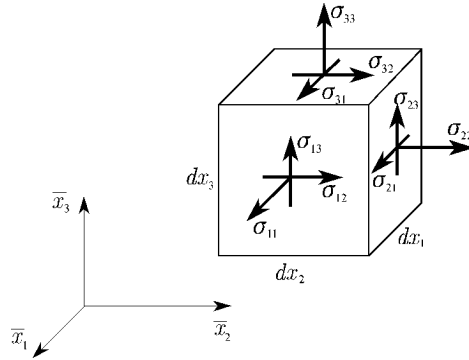


Рис. 5

Заметим, что на этом рисунке применены следующие правила:

- Компоненты σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , считаются положительными в том случае, когда они совпадают по направлению с внешними нормальями к соответствующим координатным плоскостям.
- Компоненты σ_{12} , σ_{13} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{31} , σ_{32} , положительны, если проекции векторов \mathbf{p}_i на соответствующие координатные оси положительны и плоскости, в которых они действуют, имеют положительную внешнюю нормаль.

Согласно с принятыми определениями элементы, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ — нормальные напряжения, а $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ — касательные напряжения.

Покажем, что матрица $\boldsymbol{\sigma}$ определяет напряженное состояние в точке. Рассмотрим бесконечно малый тетраэдр с вершиной в точке P , где мы хотим определить напряженное состояние (рис. 6).

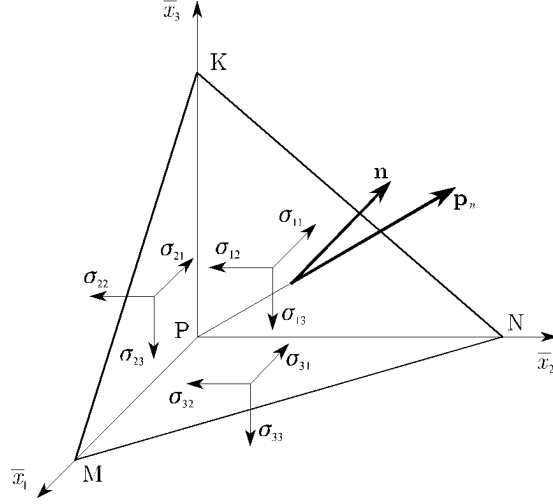


Рис. 6

Тетраэдр $PMNK$ расположен таким образом, что его точки M , N и K лежат на осях \bar{x}_1 , \bar{x}_2 и \bar{x}_3 соответственно. Пусть dA — площадь грани KMN , а \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности KMN . Вектор напряжений на поверхности KMN можно записать в виде

$$\mathbf{p}_n = (\mathbf{p}_n)_i \mathbf{e}_i. \quad (13)$$

Единичный вектор \mathbf{n} запишем в системе \bar{x}_i следующим образом:

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i, \quad (14)$$

где компоненты вектора \mathbf{n} заданы так:

$$n_i = \cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i). \quad (15)$$

Заметим, что n_i удовлетворяют равенству $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Значит, если ввести углы α , β и γ (рис. 7), то получим

$$n_1 = \cos \alpha; \quad n_2 = \cos \beta; \quad n_3 = \cos \gamma. \quad (16)$$

Пусть dA_i — площадь той грани тетраэдра, нормалью к которой является ось \bar{x}_i (например, dA_1 — площадь грани KPN). Тогда площади граней тетраэдра можно выразить следующим образом:

$$dA_i = n_i dA. \quad (17)$$

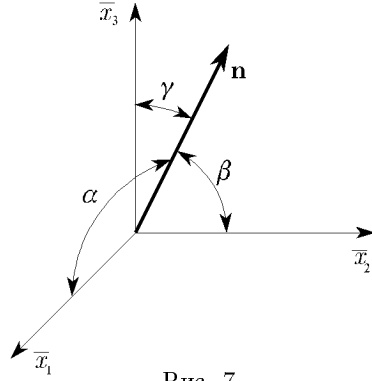


Рис. 7

Отметим также, что объем тетраэдра равен $dV = dA h/3$, где h — его высота. Тетраэдр находится в равновесии под действием следующих поверхностных сил:

$$\mathbf{p}_n dA; \quad -\mathbf{p}_1 dA_1; \quad -\mathbf{p}_2 dA_2; \quad -\mathbf{p}_3 dA_3. \quad (18)$$

Пусть на тетраэдр действует также объемная сила интенсивности \mathbf{f} . Главный вектор сил, действующий на элемент объема dV , примет вид

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f} dV. \quad (19)$$

Тетраэдр будет находиться в равновесии при выполнении следующего условия (для суммы всех сил):

$$\mathbf{p}_n dA - \mathbf{p}_1 dA_1 - \mathbf{p}_2 dA_2 - \mathbf{p}_3 dA_3 + d\mathbf{F} = 0. \quad (20)$$

Умножая равенство (20), к примеру, на единичный вектор \mathbf{e}_1 , получаем следующее соотношение:

$$(\mathbf{p}_n)_1 dA - \sigma_{11} dA_1 - \sigma_{21} dA_2 - \sigma_{31} dA_3 + f_1 dA h/3 = 0. \quad (21)$$

Подставляя (17) в (21) и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_n)_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ &= \sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{21} \cos \beta + \sigma_{31} \cos \gamma = \sigma_{k1} n_k. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогичные результаты получаются и тогда, когда равенство (20) умножается на \mathbf{e}_2 или \mathbf{e}_3 . Обобщая, можем записать

$$(\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ji} n_j. \quad (23)$$

Уравнение (23) выражает фундаментальную **теорему Коши**: из векторов напряжений, действующих на три взаимно перпендикулярные

плоскости в точке, все вектора напряжений однозначно определены. Они определяются с помощью соотношений (23) как линейные функции от σ_{ij} .

Отметим, что поверхностная сила \mathbf{p} , используемая в выражениях (1.1.4), может быть представлена в виде

$$(\mathbf{p})_i = (\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ji}n_j, \quad (24)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S тела B в состоянии κ .

С точки зрения линейных преобразований, **теорема Коши** может быть сформулирована так: *вектор напряжений в точке есть линейное преобразование единичных нормалей к плоскостям, на которых этот вектор напряжений определен*. В матричном виде равенство (23) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_n)_1 \\ (\mathbf{p}_n)_2 \\ (\mathbf{p}_n)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad (25)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^T$ обозначает транспонированную матрицу $\boldsymbol{\sigma}$.

Теорема Коши показывает, что напряженное состояние в точке полностью определяется матрицей $\boldsymbol{\sigma}$. Векторы напряжений (для разных \mathbf{n} их бесконечно много) не являются независимыми и могут быть определены с помощью векторов напряжений, соответствующих трем координатным плоскостям.

1.3 Уравнения равновесия в терминах компонент напряжений

Рассмотрим элемент тела, находящийся в окрестности точки P в деформированном состоянии. Положим, что напряженное состояние в точке P задается матрицей $\boldsymbol{\sigma}$. На рис. 8 показан элемент в форме параллелепипеда со сторонами dx_1 , dx_2 и dx_3 . Также на рис. 8 показана составляющая f_1 действующих на параллелепипед объемных сил, соответствующая \bar{x}_1 .

Отметим, что изменение компоненты напряжений, скажем, σ_{11} можно записать следующим образом:

$$d\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1. \quad (1)$$

Сумма всех компонент сил, действующих на параллелепипед вдоль оси

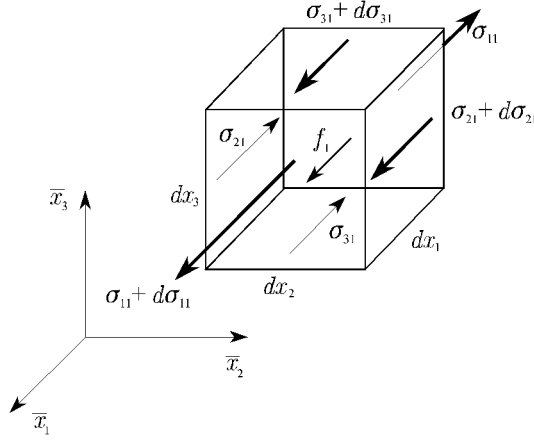


Рис. 8

\bar{x}_1 , такова:

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11} \right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{21} \right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{31} \right) dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \quad (2)$$

Из выражения (2) имеем

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0. \quad (3)$$

Аналогично получим два других уравнения, и полный набор уравнений равновесия примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) могут быть записаны так:

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0, \quad (5)$$

где использовано следующее обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\cdot) = (\cdot)_{,i}. \quad (6)$$

Уравнения (5) должны выполняться в каждой точке тела. Для параллелепипеда, изображенного на рис. 8, сумма моментов также должна равняться нулю. Это условие для оси \bar{x}'_3 (ось \bar{x}'_3 проходит через центр масс параллелепипеда и параллельна оси \bar{x}_3) имеет вид (рис. 9)

$$\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \sigma_{12}\right) \frac{dx_2 dx_3 dx_1}{2} - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 + \sigma_{21}\right) \frac{dx_1 dx_3 dx_2}{2} = 0. \quad (7)$$

Записывая уравнение (7), полагаем, что распределенные по объему тела моменты отсутствуют. Из уравнения (7) следует, что

$$2\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 = 2\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2. \quad (8)$$

При предельном переходе, когда $dx_1 \rightarrow 0$ и $dx_2 \rightarrow 0$, из уравнения (8) следует, что $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Аналогичные выражения получаются и для уравнений моментов для двух других осей, следовательно, можно записать равенство

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (9)$$

Уравнение (9) означает, что матрица напряжений *симметрична*³.

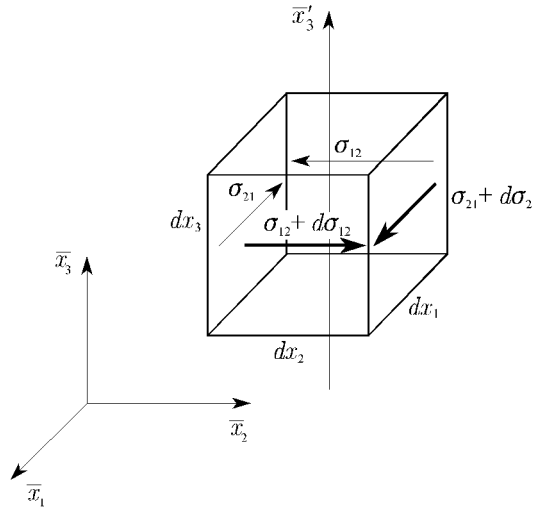


Рис. 9

³ Этот результат иногда называют *аксиомой Больцмана*. Он несправедлив для поляризованных материалов, другими словами, для материалов с заданными моментами.

В результате, с помощью выражения (9), мы можем записать теорему Коши (1.2.23) и уравнения равновесия (5) в виде

$$(\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ij} n_j; \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. \quad (10)$$

Уравнения (10) в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10) локальны в том смысле, что они верны в каждой точке тела, где поле напряжений достаточно гладкое. Однако возможен такой вопрос: если уравнения (10) верны, то верны ли и глобальные уравнения равновесия (1.1.5)?

Чтобы ответить на этот вопрос, используем формулы (1.1.5) и (1.2.24). В результате получим следующее выражение:

$$\mathbf{F}_f + \mathbf{F}_S = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS = 0. \quad (12)$$

Компонентная форма уравнения (12) такова:

$$\iiint_V f_i dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_V \left(f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0, \quad (13)$$

где мы использовали теорему Гаусса⁴. Выражение, стоящее в скобках в правой части уравнения (13), равно нулю (это уравнение равновесия (4)). Уравнение (4) гарантирует равенство нулю суммы всех сил.

Теперь проанализируем сумму всех моментов (1.2.5). Используя лемму Коши, можем записать

$$\iiint_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV + \iint_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dS = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим составляющие выражения (14). К примеру, компонента по оси \bar{x}_1 из (14) такова:

$$\iiint_V (x_2 f_3 - x_3 f_2) dV + \iint_S (x_2 \sigma_{3i} n_i - x_3 \sigma_{2i} n_i) dS = 0. \quad (15)$$

⁴ Пусть \mathbf{b} является векторным полем в области V с границей S ; пусть компоненты b_k вектора \mathbf{b} непрерывны и имеют непрерывные производные в области V . Пусть S — такая кусочно-гладкая поверхность в области V , что полностью ограничивает V , и пусть \mathbf{n} является внешней нормалью к поверхности S . Тогда верно равенство $\iint_S b_k n_k dS = \iiint_V (\partial b_k / \partial x_k) dV$.

Второе слагаемое равенства (15) можно преобразовать к виду

$$\iint_S (x_2 \sigma_{3i} n_i - x_3 \sigma_{2i} n_i) dS = \iiint_V \left[x_2 \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right) - x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) + \sigma_{32} - \sigma_{23} \right] dV. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$\iiint_V \left[x_2 \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 \right) - x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 \right) + \sigma_{32} - \sigma_{23} \right] dV = 0. \quad (17)$$

Из уравнений равновесия (4) и симметрии матрицы напряжений (9) делаем вывод, что второе уравнение глобального равновесия (сумма всех моментов) удовлетворяется. Отметим, что возможен различный подход к проблеме вывода (9). А именно можно начать с общих выражений для суммы моментов всех сил (14) в форме (см. [23])

$$\iint_S (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) n_l dS + \iiint_V (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV = 0. \quad (18)$$

Из равенства (18) можно сделать вывод, что

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2 \frac{\partial \varphi_{ikl}}{\partial x_l}; \quad \varphi_{ikl} = -\varphi_{kil}, \quad (19)$$

где φ_{ikl} обозначают компоненты тензора, кососимметричного по первым двум индексам. Можно показать, что в случае, когда φ_{ikl} отличны от нуля, компоненты напряжений должны зависеть от градиентов высших порядков от вектора перемещения. Классическая теория упругости подобные случаи не рассматривает.

1.4 Основная лемма анализа напряжений

Рассмотрим две плоскости, проходящие через одну точку упругого тела. Пусть \mathbf{n} и \mathbf{m} — единичные векторы нормали к этим плоскостям. Вектор напряжений в каждой плоскости имеет вид

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}; \quad \mathbf{p}_m = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}. \quad (1)$$

Если взять скалярное произведение \mathbf{p}_n на \mathbf{m} , то получим

$$\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{m} = \sigma_{ij} n_j m_i = \sigma_{ji} m_i n_j = \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{n}, \quad (2)$$

где мы использовали свойство симметрии матрицы σ . Уравнение (2) представляет собой **основную лемму анализа напряжений**: проекция вектора напряжений, вычисленная для плоскости с единичной нормалью \mathbf{n} в направлении, определяемом единичным вектором \mathbf{m} , равна проекции вектора напряжений, вычисленной для плоскости с единичной нормалью \mathbf{m} в направлении, определяемом единичным вектором \mathbf{n} .

Предположим, что \mathbf{n} и \mathbf{m} ортогональны. Предположим также, что мы раскладываем \mathbf{p}_n в соответствии с (1.2.7). Тогда

$$\mathbf{p}_n = \sigma_n \mathbf{n} + \sigma_t \mathbf{t}. \quad (3)$$

Взяв скалярное произведение \mathbf{p}_n на \mathbf{m} , имеем

$$\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{m} = (\sigma_t \mathbf{t}) \cdot \mathbf{m} = \sigma_{nm}, \quad (4)$$

так как \mathbf{n} и \mathbf{m} ортогональны. В равенстве (4) мы использовали σ_{nm} для обозначения проекции вектора напряжений \mathbf{p}_n на направление \mathbf{m} . Оно соответствует обозначению, введенному в параграфе 1.2. Теперь основная лемма анализа напряжений означает, что

$$\sigma_{nm} = \sigma_{mn}. \quad (5)$$

Равенство (5) отражает следующий важный факт: *тангенциальные напряжения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях равны по модулю*. Они оба направлены либо к линии пересечения плоскостей, либо от нее.

1.5 Уравнения равновесия в цилиндрической и сферической системах координат

Рассмотрим часть упругого тела в окрестности произвольной точки P . Пусть положение точек тела задается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Векторы напряжений на координатных поверхностях $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ и $z = \text{const}$ обозначим как \mathbf{p}_r , \mathbf{p}_θ и \mathbf{p}_z соответственно. Их составляющие изображены на рис. 10. Мы раскладываем векторы напряжений по координатным линиям таким образом, что

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_r &= \sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{rz} \mathbf{e}_z; \\ \mathbf{p}_\theta &= \sigma_{\theta r} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_z; \\ \mathbf{p}_z &= \sigma_{zr} \mathbf{e}_r + \sigma_{z\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Из рис. 11 можно сделать вывод, что силы, действующие на элементарные поверхности рассматриваемой части тела таковы:

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{p}_r r d\theta dz; \quad \mathbf{S}_\theta = \mathbf{p}_\theta r dr dz; \quad \mathbf{S}_z = \mathbf{p}_z r d\theta dr. \quad (2)$$

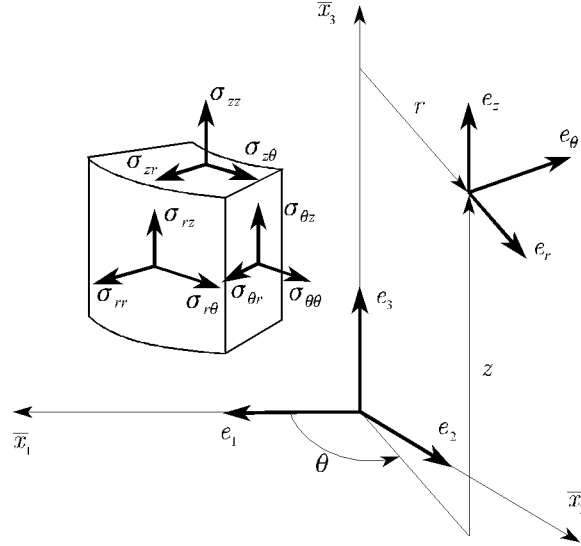


Рис. 10

Объемная сила интенсивности \mathbf{f} , тоже действующая на рассматриваемую часть тела, показана на рис. 11. Используя обозначения из равенств (2), условие равновесия (сумма всех сил равна нулю) запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{S}_r}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{S}_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{S}_z}{\partial z} dz + \mathbf{f} r d\theta dr dz = 0. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3) и принимая во внимание соотношения⁵

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} = 0, \quad (4)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) r d\theta dz dr \\ & \quad + (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{rz} \mathbf{e}_z) d\theta dz dr \\ & \quad + \left(\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) d\theta dz dr \\ & \quad + \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) r d\theta dz dr \\ & \quad + (f_r \mathbf{e}_r + f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_z \mathbf{e}_z) r d\theta dz dr = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

⁵ Уравнения (4) можно доказать, если выразить \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_z через \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 ($\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$) и продифференцировать по θ .

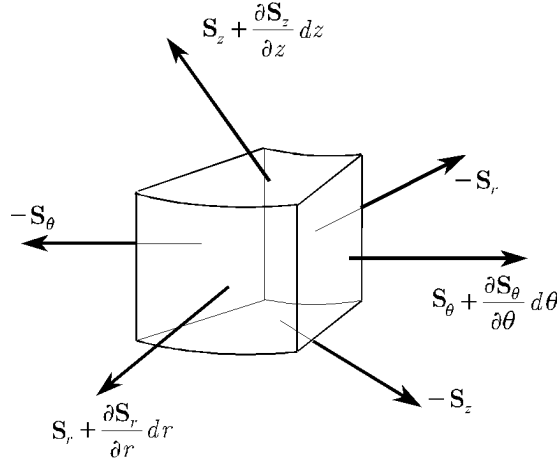


Рис. 11

Из уравнения (5) следует, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r &= 0; \\
 \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r} + f_\theta &= 0; \\
 \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{zr} + f_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Используя то обстоятельство, что показанный на рис. 11 момент всех сил, действующих на тело, равен нулю, имеем

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}; \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr}; \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}. \tag{7}$$

Аналогично получаем уравнения равновесия в сферической системе координат (ρ, θ, φ) , изображенной на рис. 12.

Единичные векторы \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_φ , и их производные связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_\rho &= \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3; \\
 \mathbf{e}_\varphi &= \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 - \sin \varphi \mathbf{e}_3; \\
 \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \rho} = 0; \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\mathbf{e}_\rho; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = 0; \\
 \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\sin \varphi \mathbf{e}_\rho - \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} = \sin \varphi \mathbf{e}_\theta; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \cos \varphi \mathbf{e}_\theta.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Используя выражения (8) и действуя аналогично предыдущему случаю, получаем уравнения равновесия в сферической системе координат в

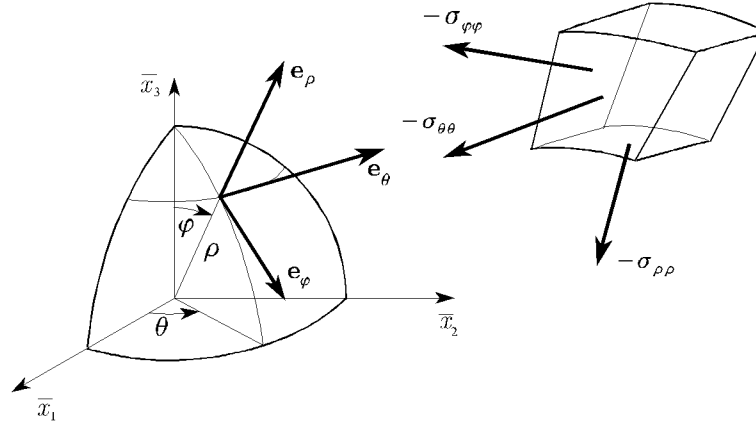


Рис. 12

виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_{\rho} &= 0; \\
 \frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\varphi\rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_{\varphi} &= 0; \quad (9) \\
 \frac{\partial \sigma_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\theta\rho} + \frac{2 \cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\theta\varphi} + f_{\theta} &= 0.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай системы (6), а именно если рассматриваемая задача имеет радиальную (осевую) симметрию. Тогда

$$\sigma_{r\theta} = 0. \quad (10)$$

При условии (10) система (6) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r &= 0; \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_{\theta} &= 0; \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{zr} + f_z = 0.$$

Заметим, что во всех вышеприведенных выражениях составляющие вектора напряжений $\sigma_{rr}, \dots, \sigma_{zz}$ — это так называемые *физические компоненты вектора напряжений*, имеющие размерность [сила/площадь].

1.6 Преобразование матрицы напряжений. Тензор напряжений

В этом параграфе мы рассмотрим два важных вопроса, касающихся матрицы напряжений σ . Во-первых, проанализируем преобразование матрицы напряжений при переходе от одной системы координат к другой. Положим, что задана декартова система координат с осями \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, и матрица напряжений в данной системе имеет компоненты σ_{ij} .

Предположим далее, что другая декартова система координат x_i^* , $i = 1, 2, 3$, имеет ту же начальную точку (рис. 13). Используем c_{ik} для задания направляющих косинусов, т. е.

$$c_{ik} = \cos \angle(x_i^*, x_k). \quad (1)$$

С помощью обозначений (1) представим единичный вектор оси x_i^* в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^* &= \cos \angle(x_i^*, \bar{x}_1) \mathbf{e}_1 + \cos \angle(x_i^*, \bar{x}_2) \mathbf{e}_2 + \cos \angle(x_i^*, \bar{x}_3) \mathbf{e}_3 \\ &= c_{i1} \mathbf{e}_1 + c_{i2} \mathbf{e}_2 + c_{i3} \mathbf{e}_3 = c_{ik} \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как \mathbf{e}_i^* — единичный вектор, учитывая, что он ортогонален \mathbf{e}_k^* при $i \neq k$, имеем

$$c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + c_{i3}^2 - 1 = 0, \quad c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} = 0, \quad \text{для } i \neq k. \quad (3)$$

Можно записать уравнения (3) в виде

$$c_{im}c_{km} = \delta_{ik}, \quad (4)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (5)$$

Используя обозначения (1), выразим единичный вектор \mathbf{e}_i через \mathbf{e}_j^* в виде

$$\mathbf{e}_i = c_{1i} \mathbf{e}_1^* + c_{2i} \mathbf{e}_2^* + c_{3i} \mathbf{e}_3^* = c_{ji} \mathbf{e}_j^*. \quad (6)$$

Если из элементов c_{ij} сформировать матрицу размером $[3 \times 3]$ и обозначить ее $\mathbf{Q} = [c_{ij}]$, то из уравнения (4) следует, что матрица \mathbf{Q} ортогональна, т. е., $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Отметим, что если матрица \mathbf{Q} ортогональна, то $\det \mathbf{Q} = \pm 1$. Если $\det \mathbf{Q} = 1$, то матрица называется *правильно ортогональной*; если же $\det \mathbf{Q} = -1$, то она называется *неправильно ортогональной* матрицей.

Нашу первую задачу можно сформулировать следующим образом: по заданной матрице напряжений с элементами σ_{ij} в системе \bar{x} ,

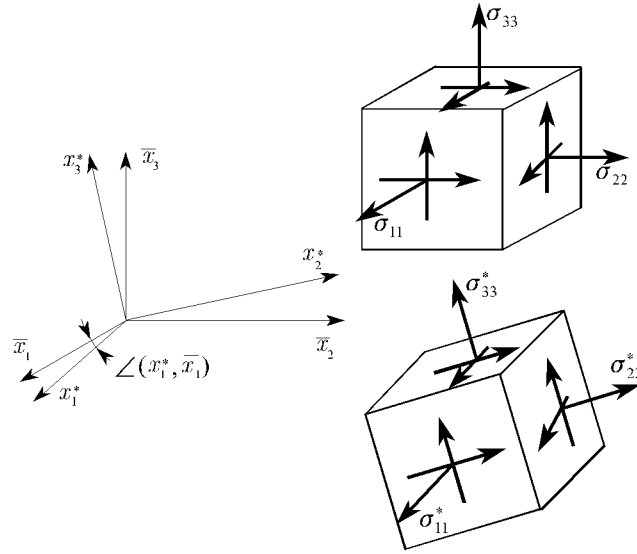


Рис. 13

$i = 1, 2, 3$, найти элементы σ_{ij}^* матрицы напряжений в системе x_i^* , $i = 1, 2, 3$ (обозначим эту матрицу $\boldsymbol{\sigma}^* = [\sigma_{ij}^*]$)⁶. Таким образом, мы хотим найти

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{21}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{31}^* & \sigma_{32}^* & \sigma_{33}^* \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Чтобы этого достичь, отметим, что элементы первой строки матрицы (7) представляют собой компоненты вектора напряжений на координатной плоскости, нормалью которой является ось x_1^* в системе координат x_i^* , $i = 1, 2, 3$, с единичными векторами \mathbf{e}_i^* , $i = 1, 2, 3$. Из равенств (1.3.11) и (2) следует, что

$$\mathbf{p}_i^* = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_i^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ c_{i3} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

⁶ Чтобы избежать ошибок при записи матрицы напряжений, необходимо всегда понимать, в какой системе координат задана данная матрица. Этого можно добиться с помощью записи вида $[\sigma_{ij}]_{\bar{x}_i}$, где индекс у скобки обозначает используемую систему координат. Как правило, мы пренебрегаем индексом у скобки, но четко определяем перед обозначением матрицы $[\sigma_{ij}]$ ту систему координат, которая применялась при задании σ_{ij} .

или

$$\mathbf{p}_i^* = [\sigma_{11}c_{i1} + \sigma_{12}c_{i2} + \sigma_{13}c_{i3}] \mathbf{e}_1 + [\sigma_{21}c_{i1} + \sigma_{22}c_{i2} + \sigma_{23}c_{i3}] \mathbf{e}_2 + [\sigma_{31}c_{i1} + \sigma_{32}c_{i2} + \sigma_{33}c_{i3}] \mathbf{e}_3 = \sigma_{sm}c_{im} \mathbf{e}_s. \quad (9)$$

Определим компоненты вектора \mathbf{p}_i^* в системе x_j^* . Это даст нам величины σ_{ij}^* . Напомним, что для фиксированных i значения σ_{ij}^* представляют собой компоненты вектора напряжений в плоскости, нормальной к которой является ось x_j^* . Таким образом, используя (9) и (1.2.25), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= \mathbf{p}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* = [\sigma_{11}c_{i1} + \sigma_{12}c_{i2} + \sigma_{13}c_{i3}]c_{j1} \\ &\quad + [\sigma_{21}c_{i1} + \sigma_{22}c_{i2} + \sigma_{23}c_{i3}]c_{j2} + [\sigma_{31}c_{i1} + \sigma_{32}c_{i2} + \sigma_{33}c_{i3}]c_{j3} \\ &= \sigma_{sm}c_{im}c_{jk}\delta_{sk} = c_{im}\sigma_{ms}c_{js}, \end{aligned} \quad (10)$$

где δ_{sk} — символ Кронекера (5), причем мы воспользовались симметрией матрицы напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Если записать матрицу \mathbf{Q} в виде

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

то выражение (10) примет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{21}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{31}^* & \sigma_{32}^* & \sigma_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Уравнение (12) можно кратко записать таким образом:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T. \quad (13)$$

В общем случае любой набор из девяти величин σ_{ij} (величин с двумя индексами), отвечающий некоторому набору осей \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, и преобразующийся в другой набор величин по формуле

$$\sigma_{ij}^* = c_{im}\sigma_{ms}c_{js}, \quad (14)$$

в новой системе координат x_i^* , $i = 1, 2, 3$, называется *тензором второго ранга, заданным в декартовых координатах*.

Это название подчеркивает природу первых тензоров (tensor), появившихся в физике. Компоненты σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, измеряют напряжения (tension) внутри деформируемого тела⁷. Итак, с этого момента

⁷ Существуют разногласия по поводу происхождения этого названия. Веблен утверждал: “Удобное, хотя исторически неоправданное название *тензор* было введено А. Эйнштейном” (Veblen O. *Invariants of Quadratic Forms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1962). С другой стороны, Бриллюэн заявил, что это название было введено германским физиком Фойгтом в его работе *Lehrbuch der Kristalphysik* (Brillouin L. *Cours de Physique Theorique-Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Paris: Masson et Cie, 1960).

вместо термина *матрица напряжений* для σ будем использовать термин *тензор напряжений*.

Другой важный вопрос, связанный с тензором напряжений, поставим так: возможно ли найти такое преобразование осей \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, в оси x_i^* , $i = 1, 2, 3$, при котором в системе x_i^* , $i = 1, 2, 3$, тензор напряжений имеет только диагональные элементы?

Требование, чтобы тензор напряжений имел только диагональные элементы (недиагональные элементы равны нулю), означает, что векторы напряжений в координатных плоскостях $x_i^* = \text{const}$ параллельны единичным векторам e_i^* . Другими словами, в системе координат x_i^* , $i = 1, 2, 3$, векторы напряжений в координатных плоскостях имеют только нормальные составляющие напряжения, в то время как касательные напряжения равны нулю.

Пусть \mathbf{n} — единичная нормаль к плоскости, в которой вектор напряжений имеет только нормальную составляющую. В этом случае вектор напряжений должен быть параллелен вектору единичной нормали, т. е.

$$\mathbf{p}_n \parallel \mathbf{n}. \quad (15)$$

Отсюда и из рис. 14 следует, что

$$\mathbf{p}_n = \lambda \mathbf{n}, \quad (16)$$

где λ — коэффициент пропорциональности. Принимая во внимание уравнение (1.3.11), можно записать равенство (16) в следующей форме:

$$\sigma \mathbf{n} - \lambda \mathbf{n} = 0. \quad (17)$$

Раскрывая векторное уравнение (17), получаем следующую систему трех линейных алгебраических уравнений для определения компонент вектора \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \lambda)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0; \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \lambda)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0; \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \lambda)n_3 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Каждый единичный вектор \mathbf{n} , удовлетворяющий уравнению (17), называется *главным направлением* тензора σ (другие названия: собственный вектор, характеристический вектор). Скалярная величина λ называется *главным значением* тензора σ (другие названия: собственное значение, характеристическое значение). Чтобы определить главные направления и главные значения тензора σ , заметим, что однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение в том случае, если определитель системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

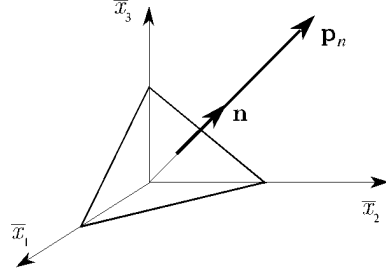


Рис. 14

Раскрывая определитель (19), имеем

$$-\lambda^3 + \hat{I}_1 \lambda^2 - \hat{I}_2 \lambda + \hat{I}_3 = 0, \quad (20)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}; \\ \hat{I}_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [\hat{I}_1^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)]; \\ \hat{I}_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{13}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2) \\ &= \det \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (20) называется *характеристическим уравнением* тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Коэффициенты \hat{I}_k , $k = 1, 2, 3$, называются *главными инвариантами* тензора $\boldsymbol{\sigma}$ (см. параграф 1.8).

Кубическое уравнение (20) имеет три корня. Они могут быть все действительными (необязательно различными) или же один из корней действительный, а два — комплексно-сопряженные. Покажем, что все главные значения тензора $\boldsymbol{\sigma}$ действительные.

Предположим, что главные значения тензора $\boldsymbol{\sigma}$ — комплексно-сопряженные λ и $\bar{\lambda}$. Покажем, что это невозможно в случае, когда тензор $\boldsymbol{\sigma}$ симметричен ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$). Пусть \mathbf{n} и $\bar{\mathbf{n}}$ — главные направления, связанные с λ и $\bar{\lambda}$ соответственно. Тогда

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}; \quad \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{n}}. \quad (22)$$

Скалярно умножая первое из равенств (22) на $\bar{\mathbf{n}}$, а второе на \mathbf{n} и составляя разность, получаем

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = (\lambda - \bar{\lambda}) \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{n}}. \quad (23)$$

Векторы \mathbf{n} и $\bar{\mathbf{n}}$ соответствуют комплексно-сопряженным числам λ и $\bar{\lambda}$, поэтому

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}; \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}, \quad (24)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{v} — действительные векторы и $i = \sqrt{-1}$. Модуль вектора \mathbf{n} таков:

$$|\mathbf{n}|^2 = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1. \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в равенство (23), имеем

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^T - \boldsymbol{\sigma})\bar{\mathbf{n}} = (\lambda - \bar{\lambda}). \quad (26)$$

Поэтому если $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$, то и $\lambda = \bar{\lambda}$. Следовательно, λ — действительное число и вектор \mathbf{n} также действительный. Таким образом, показано, что *симметричный тензор с действительными элементами имеет действительные главные значения*.

Предположим, что λ — корень характеристического уравнения (20). Пусть \mathbf{n} — соответствующее главное направление. Компоненты вектора \mathbf{n} однозначно определяются из системы уравнений (18) и из условия

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (27)$$

если при данном λ два уравнения в системе (18) линейно независимы.

Допустим, что два главных значения λ_n и λ_m различны. Пусть \mathbf{n} и \mathbf{m} — соответствующие главные направления. Тогда имеем

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \lambda_n\mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{m} = \lambda_m\mathbf{m}, \quad (28)$$

или при $\lambda_n = \sigma_1$, $\lambda_m = \sigma_2$

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_1)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0, \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma_1)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0, \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma_1)n_3 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

и

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_2)m_1 + \sigma_{12}m_2 + \sigma_{13}m_3 &= 0, \\ \sigma_{21}m_1 + (\sigma_{22} - \sigma_2)m_2 + \sigma_{23}m_3 &= 0, \\ \sigma_{31}m_1 + \sigma_{32}m_2 + (\sigma_{33} - \sigma_2)m_3 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Умножая уравнения системы (29) соответственно на m_1 , m_2 , m_3 , а системы (30) на n_1 , n_2 , n_3 и вычитая первый результат из второго, получаем

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3) = (\sigma_2 - \sigma_1)\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (31)$$

Отсюда следует, что если $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$. Таким образом, *главные направления, соответствующие различным главным значениям тензора $\boldsymbol{\sigma}$, ортогональны*.

В том случае, когда все главные значения различны (пусть для определенности $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), соответствующие им главные направления \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{k} взаимно ортогональны. Если выбрать оси системы координат \mathbf{g}' $i = 1, 2, 3$, так, чтобы единичными векторами вдоль осей

были \mathbf{n} , \mathbf{m} , \mathbf{k} , то в системе \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, тензор напряжений имеет только диагональные элементы (рис. 15). Векторы \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{k} в данном случае образуют *главный базис*.

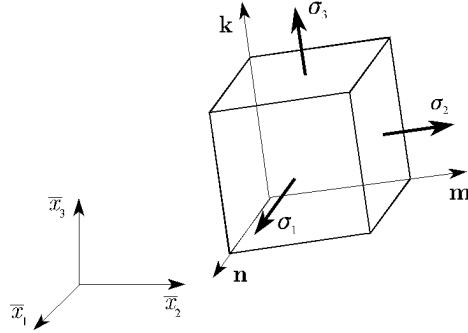


Рис. 15

Элемент объема, взятый в форме параллелепипеда, имеет на трех показанных на рис. 15 гранях векторы напряжений $\sigma_1 \mathbf{n}$, $\sigma_2 \mathbf{m}$ и $\sigma_3 \mathbf{k}$. Значения σ_1 , σ_2 и σ_3 называются *главными напряжениями*. В главном базисе тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

В случае, когда какие-либо два характеристических значения тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ равны, проблема определения главного базиса требует дальнейшего анализа.

Начнем с рассмотрения класса тензоров (большого, чем класс симметричных тензоров), называемого *нормальными тензорами*. Эти тензоры обладают свойством

$$\mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T \mathbf{T}. \quad (33)$$

Отметим, что симметричные ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$) и ортогональные ($\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$) тензоры являются нормальными тензорами. Допустим, что λ_3 — это характеристическое значение (возможно, имеющее кратность больше единицы) нормального тензора \mathbf{T} . Можно предположить, что λ_3 — действительное число (см. комментарии после выражений (21)). Тогда существует хотя бы одно главное направление, скажем \mathbf{n}_3 , удовлетворяющее равенству

$$\mathbf{T} \mathbf{n}_3 = \lambda_3 \mathbf{n}_3. \quad (34)$$

Зададим декартову систему координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, в которой главное направление \mathbf{n}_3 равно единичному вектору \mathbf{e}_3 , ориентированному

вдоль оси \bar{x}_3 . Если \mathbf{v} — произвольный вектор в плоскости Π , определяемой векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , то имеем

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{v} = T_{ij}n_{3j}v_i = \mathbf{T}^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3 = \lambda_3\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (35)$$

Из выражения (35) следует, что если вектор \mathbf{v} лежит в плоскости Π , то в ней лежит и вектор $\mathbf{T}^T\mathbf{v}$. Рассмотрим теперь такой вектор \mathbf{v} , у которого все три компоненты не равны нулю. По предположению $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$. Следовательно, $n_{31} = n_{32} = 0$, $n_{33} = 1$, поэтому из (35) вытекает, что $T_{i3}v_i = \lambda_3v_3 \neq 0$. При произвольных v_1 и v_2 это возможно в том случае, когда $T_{13} = T_{23} = 0$, $T_{33} = \lambda_3$. Тензор \mathbf{T} , таким образом, имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Введем тензор второго ранга $\bar{\mathbf{T}}$ в двухмерном пространстве с компонентами

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Для произвольного вектора \mathbf{u} в плоскости Π имеем

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{u} + \lambda_3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{T}}\mathbf{u}. \quad (38)$$

Предположим, что тензор $\bar{\mathbf{T}}$ симметричен. Тогда существует действительное главное значение λ_2 (существование действительного λ_2 гарантировано аргументацией, приведенной перед равенством (26)), такое, что

$$\bar{\mathbf{T}}\mathbf{u} = \lambda_2\mathbf{u}, \quad (39)$$

где вектор \mathbf{u} лежит в плоскости Π . Из выражений (38) и (39) следует, что

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda_2\mathbf{u}. \quad (40)$$

Таким образом, векторы \mathbf{e}_3 и \mathbf{u} являются главными направлениями тензора \mathbf{T} с главными значениями λ_3 и λ_2 . Покажем теперь, что вектор $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{e}_3$ также является главным направлением тензора \mathbf{T} . Этот вектор \mathbf{v} ортогонален вектору \mathbf{e}_3 и поэтому лежит в плоскости Π . Следовательно, в плоскости Π лежит и вектор $\mathbf{T}\mathbf{v}$. Далее, вектор \mathbf{v} ортогонален вектору \mathbf{u} , но и вектор $\mathbf{T}\mathbf{v}$ ему ортогонален, так как

$$\mathbf{T}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = T_{ij}u_jv_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (41)$$

Таким образом, вектор $\mathbf{T}\mathbf{v}$ должен быть параллелен вектору \mathbf{v} или

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} \quad (42)$$

при некотором значении λ_1 . Отметим, что в начале мы не делали никаких предположений относительно кратности главного значения λ_3 (λ_3

может быть равно λ_1 или λ_2). Следовательно, при симметричном тензоре \mathbf{T} можно сформулировать следующую **теорему**: *независимо от кратности собственных значений всегда существуют три взаимно ортогональных главных направления.*

Конечно, это не означает, что такая тройка всегда будет единственной.

Рассмотрим тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Предположим, что он имеет главное значение кратности 2, скажем, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Используя только что сформулированную теорему, делаем вывод, что λ_1 соответствуют два взаимно ортогональных главных направления \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 (в уравнениях (40) и (42) обозначенные соответственно \mathbf{u} и \mathbf{v}). Любой единичный вектор \mathbf{n} в плоскости, задаваемой векторами \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , можно представить в виде $\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i$, $i = 1, 2$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)\lambda_1\mathbf{n}_i = \lambda_1\mathbf{n}. \quad (43)$$

Из выражения (43) следует, что *любой вектор* в плоскости, определяемой векторами \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , является *главным вектором*.

Если все главные значения одинаковы ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), то с помощью аналогичных рассуждений можно показать, что любой единичный вектор является главным вектором.

1.7 Экстремальные свойства главных напряжений

Рассмотрим теперь экстремальные свойства главных напряжений. Предположим, что задана плоскость с единичной нормалью \mathbf{n} . Вектор напряжений на этой плоскости таков:

$$(\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (1)$$

значит, нормальное напряжение имеет вид (см. (1.2.7))

$$\sigma_n = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij}n_in_j. \quad (2)$$

Мы хотим определить экстремальное значение σ_n . Так как \mathbf{n} — единичный вектор, то его необходимо искать при условии

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_in_i = 1. \quad (3)$$

Проблема нахождения экстремума σ_n , заданного выражением (2) при условии (3), принадлежит классу задач оптимизации при наличии ограничений. Используя множитель Лагранжа, построим новую функцию

$$F = \sigma_n - \lambda(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1), \quad (4)$$

где λ — множитель Лагранжа (неизвестный). Тогда, используя выражение (2), имеем

$$F = \sigma_{ij}n_i n_j - \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1). \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по n_1 , n_2 и n_3 и приравнявая полученные выражения нулю, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n_1} &= 2[(\sigma_{11} - \lambda)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial n_2} &= 2[\sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \lambda)n_2 + \sigma_{23}n_3] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial n_3} &= 2[\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \lambda)n_3] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Это необходимые условия экстремума σ_n . Сравнивая уравнения (6) с уравнениями (1.6.18), видим, что условие параллельности векторов \mathbf{p}_n и \mathbf{n} эквивалентно условию: σ_n имеет стационарное значение. Таким образом, задача определения вектора \mathbf{n} , такого, при котором σ_n достигает экстремума, уже решена. Главные направления \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{k} должны удовлетворять уравнениям (6). Главные значения тензора напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 являются, таким образом, максимальными или минимальными значениями нормального напряжения в точке. Наибольшее из σ_1 , σ_2 и σ_3 является максимальным, а наименьшее — минимальным значением нормального напряжения для всех возможных плоскостей, проходящих через данную точку.

Из проведенного анализа следует, что в главных плоскостях нормальные напряжения имеют экстремальные (или стационарные) значения, а касательные напряжения равны нулю. Это можно показать иначе, с помощью основной леммы анализа напряжений (см. параграф 1.4). Для этого рассмотрим две плоскости I и II, проходящие через точку P . Пусть угол между этими плоскостями равен $d\alpha$, а \mathbf{n} и \mathbf{m} — единичные векторы, ортогональные плоскостям I и II соответственно (рис. 16).

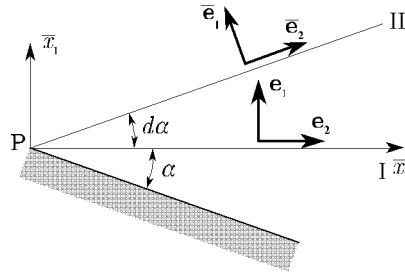


Рис. 16

Нормаль \mathbf{n} к плоскости I будем рассматривать как функцию угла ее поворота вокруг оси \bar{x}_3 . Положительное направление отсчета угла α показано на рис. 16. В обозначениях, принятых на рис. 16, имеем

$$\mathbf{p}_n = \sigma_{11}(\alpha) \mathbf{e}_1 + \sigma_{12}(\alpha) \mathbf{e}_2 + \sigma_{13}(\alpha) \mathbf{e}_3. \quad (7)$$

Отметим, что здесь

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1. \quad (8)$$

Из выражения (7) и рис. 16 следует, что на плоскости II вектор напряжений можно представить в виде

$$\mathbf{p}_m = \left[\sigma_{11}(\alpha) + \frac{d\sigma_{11}}{d\alpha} d\alpha \right] \bar{\mathbf{e}}_1 + \left[\sigma_{12}(\alpha) + \frac{d\sigma_{12}}{d\alpha} d\alpha \right] \bar{\mathbf{e}}_2 + \left[\sigma_{13}(\alpha) + \frac{d\sigma_{13}}{d\alpha} d\alpha \right] \bar{\mathbf{e}}_3. \quad (9)$$

Единичная нормаль \mathbf{m} такова:

$$\mathbf{m} = \cos(d\alpha) \mathbf{e}_1 - \sin(d\alpha) \mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1. \quad (10)$$

Подставляя выражения (7)–(10) в (1.4.2), получаем

$$\begin{aligned} & [\sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3] \cdot [\cos(d\alpha) \mathbf{e}_1 - \sin(d\alpha) \mathbf{e}_2] \\ &= \left\{ \left[\sigma_{11}(\alpha) + \frac{d\sigma_{11}}{d\alpha} d\alpha \right] \bar{\mathbf{e}}_1 + \left[\sigma_{12}(\alpha) + \frac{d\sigma_{12}}{d\alpha} d\alpha \right] \bar{\mathbf{e}}_2 \right. \\ & \quad \left. + \left[\sigma_{13}(\alpha) + \frac{d\sigma_{13}}{d\alpha} d\alpha \right] \bar{\mathbf{e}}_3 \right\} \cdot \mathbf{e}_1. \quad (11) \end{aligned}$$

Переходя в равенстве (11) к пределу при $d\alpha \rightarrow 0$ и учитывая, что

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \sin(d\alpha) \mathbf{e}_1 + \cos(d\alpha) \mathbf{e}_2, \quad (12)$$

получаем

$$-2\sigma_{12} = \frac{d\sigma_{11}}{d\alpha}, \quad (13)$$

Из равенства (13) следует, что для плоскости, в которой σ_{11} достигает экстремума, касательное напряжение σ_{12} стремится к нулю. Констатируем тот факт, что нормальное напряжение при выбранном направлении отсчета угла α изменяется со скоростью, равной удвоенному касательному напряжению с противоположным знаком. Аналогичные рассуждения покажут, что

$$-2\sigma_{13} = \frac{d\sigma_{11}}{d\beta}, \quad (14)$$

где β — угол поворота вокруг оси \bar{x}_2 . Таким образом, σ_{11} достигает экстремума в той плоскости, где $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$.

1.8 Инварианты тензора напряжений

Как показано выше, главные напряжения определяются из уравнения (1.6.20), которое вытекает из необходимых условий (1.7.6) экстремальности нормальных напряжений. Учитывая, что экстремальные значения нормальных напряжений в точке не зависят от выбора системы координат, можно сделать следующий важный вывод: *решения уравнения (1.6.20) должны быть независимы от системы координат.*

Другими словами, если $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются главными напряжениями, найденными из уравнения (1.6.20), а $\sigma' = [\sigma'_{ij}]$ — тензор напряжений в новой системе координат x'_1, x'_2, x'_3 , то уравнение, определяющее главные значения в системе координат x'_1, x'_2, x'_3 (см. (1.6.19)):

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} - \sigma & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} - \sigma & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

должно иметь в качестве корней величины σ_1, σ_2 и σ_3 . Таким образом, можно сделать заключение о том, что главные напряжения являются инвариантами тензора σ относительно преобразования, заданного тензором \mathbf{Q} из (1.6.11). Отсюда следует, что любая величина, зависящая от σ_1, σ_2 и σ_3 , также является инвариантом, если изменение системы координат описывается с помощью тензора \mathbf{Q} .

Покажем, что коэффициенты \hat{I}_1, \hat{I}_2 и \hat{I}_3 , задаваемые выражениями (1.6.21), являются инвариантами. Во-первых, запишем уравнение (1.6.20) в виде

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что

$$-\sigma^3 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0. \quad (3)$$

Сравнивая уравнения (3) и (1.6.20), видим, что

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ \hat{I}_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \\ &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3, \\ \hat{I}_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{13}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2) \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь ясно, почему в выражениях (1.6.21) мы назвали величины \hat{I}_1, \hat{I}_2 и \hat{I}_3 *главными инвариантами* тензора σ .

Можно показать, что тензор напряжений имеет *только три* независимых инварианта. Любой другой инвариант может быть выражен через \hat{I}_1, \hat{I}_2 и \hat{I}_3 .

1.9 Экстремальные значения касательных напряжений

Рассмотрим вопрос об определении экстремальных значений касательных напряжений в данной точке. Из равенства (1.2.7) получаем выражение для определения касательных напряжений для плоскости с нормалью \mathbf{n}^* в виде

$$\sigma_t^2 = |\mathbf{p}_{n^*}|^2 - \sigma_{n^*}^2. \quad (1)$$

Предположим, что нам известны главные значения и главные направления тензора $\boldsymbol{\sigma}$, значит, в главных осях с ортами \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{k} тензор напряжений можно представить следующим образом (рис. 17):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

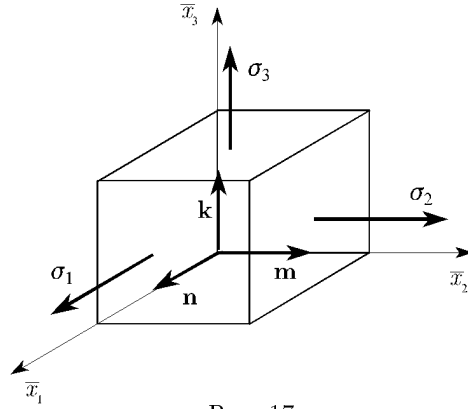


Рис. 17

Тогда вектор напряжений на плоскости с единичной нормалью \mathbf{n}^* таков:

$$\mathbf{p}_{n^*} = \sigma_1 n_1^* \mathbf{n} + \sigma_2 n_2^* \mathbf{m} + \sigma_3 n_3^* \mathbf{k}, \quad (3)$$

где n_1^* , n_2^* и n_3^* — компоненты вектора \mathbf{n}^* в главной системе координат. Следовательно,

$$\sigma_{n^*} = \mathbf{p}_{n^*} \cdot \mathbf{n}^* = \sigma_1 (n_1^*)^2 + \sigma_2 (n_2^*)^2 + \sigma_3 (n_3^*)^2. \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (1), имеем

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 (n_1^*)^2 + \sigma_2^2 (n_2^*)^2 + \sigma_3^2 (n_3^*)^2 - [\sigma_1 (n_1^*)^2 + \sigma_2 (n_2^*)^2 + \sigma_3 (n_3^*)^2]^2. \quad (5)$$

Мы хотим определить экстремумы выражения (5) с учетом ограничения

$$(n_1^*)^2 + (n_2^*)^2 + (n_3^*)^2 = 1. \quad (6)$$

Используя метод множителей Лагранжа, построим новую функцию

$$F(n_1^*, n_2^*, n_3^*) = \sigma_i^2 - \lambda[(n_1^*)^2 + (n_2^*)^2 + (n_3^*)^2 - 1] \quad (7)$$

и найдем экстремум функции (7). Перед тем как определить необходимые условия экстремума, заметим, что с помощью равенства (6) можно привести выражение (5) к виду

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_1^2(n_1^*)^2 + \sigma_2^2(n_2^*)^2 + \sigma_3^2(n_3^*)^2 - \sigma_1^2(n_1^*)^2[1 - (n_2^*)^2 - (n_3^*)^2] \\ &\quad - \sigma_2^2(n_2^*)^2[1 - (n_1^*)^2 - (n_3^*)^2] - \sigma_3^2(n_3^*)^2[1 - (n_1^*)^2 - (n_2^*)^2] \\ &\quad - 2\sigma_1\sigma_2(n_1^*)^2(n_2^*)^2 - 2\sigma_1\sigma_3(n_1^*)^2(n_3^*)^2 - 2\sigma_2\sigma_3(n_2^*)^2(n_3^*)^2 \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2(n_1^*)^2(n_2^*)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2(n_2^*)^2(n_3^*)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2(n_3^*)^2(n_1^*)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в функцию (7) и дифференцируя по n_i^* , $i = 1, 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n_1^*} &= 2n_1^*[(\sigma_1 - \sigma_2)^2(n_2^*)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2(n_3^*)^2 - \lambda] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial n_2^*} &= 2n_2^*[(\sigma_1 - \sigma_2)^2(n_1^*)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2(n_3^*)^2 - \lambda] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial n_3^*} &= 2n_3^*[(\sigma_2 - \sigma_3)^2(n_2^*)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2(n_1^*)^2 - \lambda] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений (9) имеет два семейства решений. Первое семейство решений

$$\begin{aligned} а) \quad n_1^* &= \pm 1, & n_2^* &= 0, & n_3^* &= 0, & \lambda &= 0; \\ б) \quad n_1^* &= 0, & n_2^* &= \pm 1, & n_3^* &= 0, & \lambda &= 0; \\ в) \quad n_1^* &= 0, & n_2^* &= 0, & n_3^* &= \pm 1, & \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя решения (10) в выражение (5), видим, что

$$\sigma_i^2 = 0. \quad (11)$$

Решения (10) дают минимальное значение $\sigma_i^2 = 0$ касательного напряжения в главных плоскостях.

Второе семейство решений:

$$\begin{aligned} а) \quad n_1^* &= 0, & n_2^* &= n_3^* = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & \lambda &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2; \\ б) \quad n_2^* &= 0, & n_1^* &= n_3^* = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & \lambda &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2; \\ в) \quad n_3^* &= 0, & n_1^* &= n_2^* = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, & \lambda &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

После подстановки решений (12) в формулу (5) получим три экстремальных значения σ_t , которые могут быть минимумом или максимумом касательных напряжений:

$$\sigma_{t1} = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|; \quad \sigma_{t2} = \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|; \quad \sigma_{t3} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|. \quad (13)$$

Эти экстремальные значения σ_t называются *главными касательными напряжениями*. Исходя из решений (12) и (13), делаем вывод, что максимальное касательное напряжение действует на плоскости, нормаль которой делит пополам угол между главными плоскостями максимального и минимального главных напряжений, и по модулю равно половине разности между этими двумя главными напряжениями. Отметим, что в плоскостях, где касательные напряжения достигают предельных значений, нормальные напряжения, вообще говоря, не обращаются в нуль. Положение плоскостей с экстремальными касательными напряжениями изображено на рис. 18.

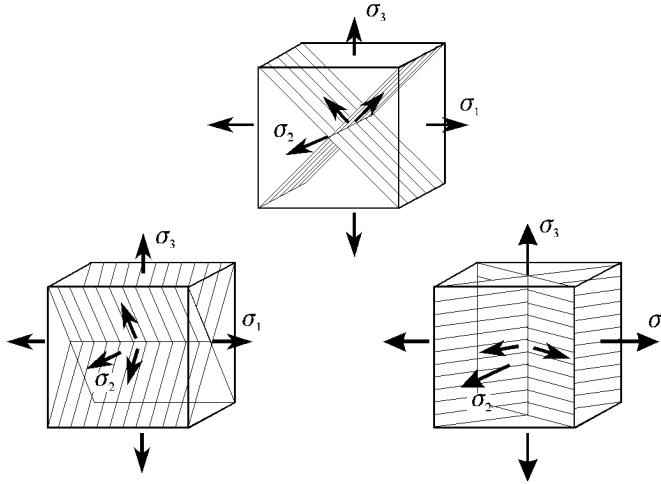


Рис. 18

1.10 Сферическая и девиаторная части тензора напряжений

Октаэдрическая плоскость — это такая плоскость, нормаль к которой образует равные углы с главными осями в данной точке тела. Существует восемь октаэдрических плоскостей, каждая из которых

проходит через углы главного элемента (элемент тела, грани которого параллельны главным плоскостям). Одна из октаэдрических плоскостей изображена на рис. 19. Единичная нормаль к октаэдрической плоскости имеет вид

$$\mathbf{b} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{n} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{m} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}. \quad (1)$$

Подставляя выражения (1) и (1.9.2) в равенство (1.7.2), имеем

$$\sigma_{\text{oct}} = \mathbf{p}_b \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} \hat{I}_1. \quad (2)$$

Из выражения

$$\sigma_{t \text{ oct}} = \sqrt{|\mathbf{p}_b|^2 - \sigma_{\text{oct}}^2}, \quad (3)$$

учитывая (2), получаем величину касательного напряжения в октаэдрической плоскости в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{t \text{ oct}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2\hat{I}_1^2 - 6\hat{I}_2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Последние выражения можно упростить, используя главные касательные напряжения, задаваемые формулами (1.9.13). В результате имеем

$$\sigma_{t \text{ oct}} = \frac{2}{3} \sqrt{\sigma_{t1}^2 + \sigma_{t2}^2 + \sigma_{t3}^2}. \quad (5)$$

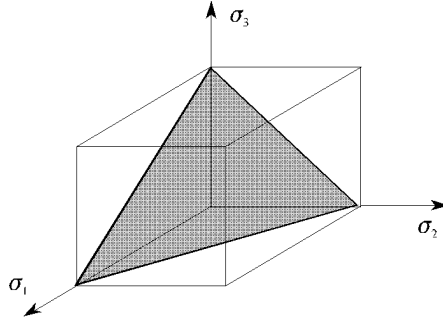


Рис. 19

Октаэдрические напряжения важны в теории разрушений. В частности, в теории октаэдрических касательных напряжений упругого

разрушения предполагается, что разрушение упругого материала имеет место тогда, когда октаэдрическое касательное напряжение (4) достигает критического значения. Эта теория упругого разрушения известна как теория *энергии формоизменения* Максвелла–фон Мизеса. Октаэдрическое напряжение σ_{oct} иногда называют *гидростатическим* или *объемным напряжением*.

Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ можно разложить на две части следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{\text{oct}} \delta_{ij}. \quad (6)$$

В равенстве (6) второе слагаемое

$$\hat{S}_{ij} = \sigma_{\text{oct}} \delta_{ij} \quad (7)$$

называется *сферической* частью, а первое слагаемое

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{ij} \quad (8)$$

называется *девиаторной* частью тензора напряжений. При записи выражения (8) мы использовали равенство (1.8.4). Отметим, что первый инвариант девиаторной части тензора напряжений равен нулю; таким образом, имеем

$$\hat{\sigma}_{ii} = \hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} + \hat{\sigma}_{33} = 0. \quad (9)$$

Из формул (2), (1.8.4) и (7) для сферической части тензора $\boldsymbol{\sigma}$ получаем выражение

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{ij}. \quad (10)$$

Девиаторная часть тензора $\boldsymbol{\sigma}$ в силу равенств (6) и (10) такова:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{\text{oct}} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_{\text{oct}} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_{\text{oct}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Когда тензор напряжений записан в главных осях, выражение (11) принимает вид

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{\text{oct}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{\text{oct}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{\text{oct}} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

1.11 Круги напряжений Мора

Напряженное состояние в точке может быть представлено графически с помощью кругов Мора. Для простоты рассмотрим случай,

когда тензор напряжений задан в главных осях. Тогда имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Пусть главные напряжения обозначены так, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Для плоскости с единичной нормалью \mathbf{n} квадрат модуля вектора напряжений \mathbf{p}_n равен

$$|\mathbf{p}_n|^2 = |\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \quad (2)$$

Нормальное напряжение определяется равенством $\sigma_n = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n}$, следовательно,

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (3)$$

Так как \mathbf{n} — единичный вектор, то имеем

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (4)$$

Из системы уравнений (2)–(4) можно определить величины n_1^2 , n_2^2 и n_3^2 . Если умножить уравнение (3) на $-(\sigma_1 + \sigma_2)$, а уравнение (4) на $\sigma_1 \sigma_2$ и сложить результаты с уравнением (2), то в итоге получим (при учете равенства $|\mathbf{p}_n|^2 = \sigma_n^2 + \sigma_t^2$)

$$\sigma_n^2 + \sigma_t^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 = n_3^2 [\sigma_3^2 - \sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2]. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что

$$\sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_t^2 + \sigma_1 \sigma_2 = n_3^2 [(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)], \quad (6)$$

или

$$n_3^2 = \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + \sigma_t^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right]^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \quad (7)$$

Аналогичным образом получаем два других уравнения вида (7):

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + \sigma_t^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right]^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)}, \\ n_2^2 &= \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \sigma_t^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right]^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя то обстоятельство, что $n_1^2 \geq 0$, $n_2^2 \geq 0$, $n_3^2 \geq 0$, и полагая $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, из формул (7) и (8) получим неравенства

$$\begin{aligned} \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + \sigma_t^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right]^2 &\geq 0, \\ \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + \sigma_t^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right]^2 &\geq 0, \\ \left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]^2 + \sigma_t^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right]^2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Область, задаваемая неравенствами (9), изображена на рис. 20 на плоскости с координатами σ_n , σ_t . Из неравенств (9) заключаем, что допустимые значения напряжений σ_n и σ_t должны лежать в заштрихованной области на рис. 20. Граница этой области образована тремя окружностями, которые называются *кругами напряжений Мора*. Единичную нормаль \mathbf{n} , соответствующую кругам Мора, обозначим через \mathbf{n}^* . Найдем компоненты касательного напряжения σ_t на кругах Мора в проекциях на главные оси. Используя формулу (1.2.7), получаем выражение

$$\sigma_t = \mathbf{p}_{n^*} - \sigma_{n^*} = \sigma \mathbf{n}^* - [(\sigma \mathbf{n}^*) \cdot \mathbf{n}^*] \mathbf{n}^*. \quad (10)$$

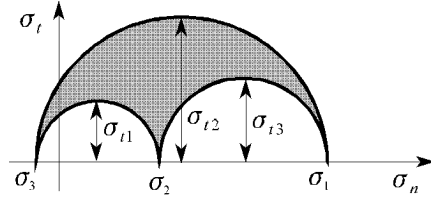


Рис. 20

В системе координат с главными осями имеем

$$\sigma_t = (\sigma_t)_1 \mathbf{n} + (\sigma_t)_2 \mathbf{m} + (\sigma_t)_3 \mathbf{k}. \quad (11)$$

Используя формулы (1) и (10), видим, что компоненты касательного напряжения σ_t в главной системе координат таковы:

$$\begin{aligned} (\sigma_t)_1 &= [\sigma_1 - \sigma_1(n_1^*)^2 - \sigma_2(n_2^*)^2 - \sigma_3(n_3^*)^2] n_1^*, \\ (\sigma_t)_2 &= [\sigma_2 - \sigma_1(n_1^*)^2 - \sigma_2(n_2^*)^2 - \sigma_3(n_3^*)^2] n_2^*, \\ (\sigma_t)_3 &= [\sigma_3 - \sigma_1(n_1^*)^2 - \sigma_2(n_2^*)^2 - \sigma_3(n_3^*)^2] n_3^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что можно организовать процесс графического определения компонент касательного напряжения (12), аналогичный методу кругов Мора (см. [41]).

1.12 Плоское напряженное состояние

В качестве частного случая напряженного состояния рассмотрим так называемую *плоскую задачу* теории упругости. Если тело ограничено двумя параллельными плоскостями с достаточно малым расстоянием между ними и какой-либо замкнутой поверхностью (как показано на рис. 21), мы говорим, что это тело является *плоским*.

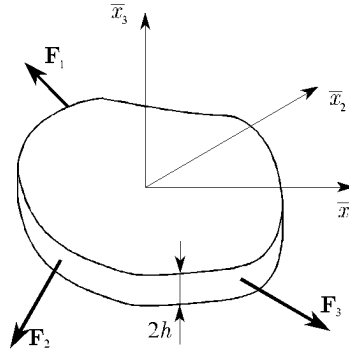


Рис. 21

Для постановки *плоской задачи* теории упругости нужно ввести несколько упрощающих предположений. Чтобы обосновать наши *математические* допущения, должны быть сделаны следующие *физические* допущения:

- а) Верхняя и нижняя поверхности тела не нагружены или, если существует нагрузка, приложенная к верхней и нижней поверхности тела, то эта нагрузка *постоянна* и порождает постоянное напряжение $\sigma_{33} \neq 0$, в то время как $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$.
- б) Нагрузка на боковые поверхности равномерно распределена по толщине.
- в) Компоненты объемных сил в направлениях осей \bar{x}_1 и \bar{x}_2 равномерно распределены по толщине ($f_1 = f_1(x_1, x_2)$, $f_2 = f_2(x_1, x_2)$), а объемные силы в направлении \bar{x}_3 равны нулю ($f_3 = 0$).

На толщину плоского тела ограничения не накладываются. Толщина используется при классификации плоских задач. Обычно задача о *плоском напряженном состоянии* применяется к плоским телам, относительно тонким в сравнении с другими размерами; в то же время методы *плоской деформации* применяются в случае достаточно толстых плоских тел. Более подробно плоское напряженное состояние и плоская деформация исследуются в главе 6.

Основываясь на предположениях а), б), в), можно сказать, что в плоских задачах напряжения не изменяются в направлении оси \bar{x}_3 и линии, параллельные оси \bar{x}_3 в недеформированном состоянии, в деформированном состоянии остаются прямыми и параллельными оси \bar{x}_3 . Математически плоское напряженное состояние в случае ($\sigma_{33} = 0$) определяется так: *напряженное состояние в точке называется плоским напряженным состоянием, если векторы напряжений в данной точке компланарны для любых плоскостей, проходящих через эту точку.*

Если сориентировать систему координат таким образом, чтобы векторы напряжений были параллельны плоскости \bar{x}_1, \bar{x}_2 , (рис. 21), то плоское напряженное состояние будет определяться равенством $(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{p}_3 = 0$. На основании приведенного определения делаем вывод, что

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0. \quad (1)$$

С учетом равенств (1) и предположений а), б) и в) уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0. \quad (2)$$

Тензор напряжений запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В тензоре (3) мы положили $\sigma_{33} = 0$. Если $\sigma_{33} \neq 0$, можно всегда получить $\sigma_{33} = 0$ с помощью наложения поля напряжений со знаком, противоположным знаку σ_{33} . Из вида тензора (3) следует, что одно из главных значений тензора напряжений в случае плоского напряженного состояния равно нулю (см. параграф 1.6).

1.13 Нормальное и касательное напряжения при плоском напряженном состоянии

Поскольку плоские задачи теории упругости имеют многообразное применение, проведем подробный анализ напряженного состояния в точке для случая плоской задачи. Возьмем произвольную точку P , принадлежащую плоскому телу (рис. 22). На рис. 22 видно, что единичная нормаль к произвольной плоскости задается формулой

$$\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2. \quad (1)$$

Тензор напряжений в случае плоской задачи имеет вид (1.12.3), следовательно, вектор напряжения таков:

$$\begin{bmatrix} (p_n)_1 \\ (p_n)_2 \\ (p_n)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

или, с учетом того, что $\sigma_{21} = \sigma_{12}$:

$$\mathbf{p}_n = (\sigma_{11} \cos \varphi + \sigma_{12} \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + (\sigma_{12} \cos \varphi + \sigma_{22} \sin \varphi) \mathbf{e}_2. \quad (3)$$

Нормальное и касательное напряжения представим в виде

$$\sigma_n = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n}; \quad \sigma_t = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{l}, \quad (4)$$

где \mathbf{l} — единичный вектор на наклонной плоскости, т. е.

$$\mathbf{l} = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2. \quad (5)$$

Подставляя выражения (1) и (5) в формулы (4), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_t &= -\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

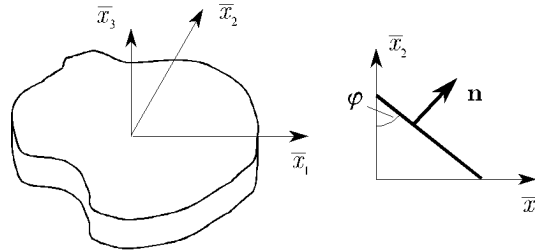


Рис. 22

Так как σ_n и σ_t зависят только от одной переменной φ , задача определения главных значений напряжений значительно упрощается. А именно необходимое условие существования экстремального значения σ_n принимает вид

$$\frac{d\sigma_n}{d\varphi} = 2 \left[-\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi \right] = 0. \quad (7)$$

Из формулы (7) получаем

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}, \quad (8)$$

где $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$. Если $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, то из выражения (7) находим

$$\cos 2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \pi/4, \quad \varphi_2 = 5\pi/4, \quad (9)$$

таким образом, при $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ главные плоскости образуют с осью \bar{x}_2 углы $\pi/4$ и $5\pi/4$. Когда $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$, уравнение (7) определяет два угла φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, задающие главные плоскости. Используя формулы (6) и (7), легко увидеть, что

$$\left. \frac{d\sigma_n}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1=\varphi_2} = 2\sigma_t|_{\varphi=\varphi_1=\varphi_2} = 0, \quad (10)$$

таким образом, в главных плоскостях касательные напряжения исчезают.

1.14 Круги Мора при плоском напряженном состоянии

Найдем значение σ_n из выражения (1.13.6) для угла φ , определяемого с помощью формулы (1.13.8). Чтобы добиться этого, заметим, что из формулы (1.13.8) мы имеем

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi|_{\varphi=\varphi_1} &= \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}, \\ \cos 2\varphi|_{\varphi=\varphi_1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \quad (2)$$

совместно с формулами (1), из уравнения (1.13.6) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n|_{\varphi=\varphi_1} = \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_n|_{\varphi=\varphi_2} = \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формулы (3) определяют главные напряжения для плоской задачи.

Чтобы получить круги Мора (иначе говоря, зависимость σ_n от σ_t), начнем с выражений (1.13.6). Используя формулы (2), находим

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi, \\ \sigma_t &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Из равенств (4) следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi; \\ \sigma_t &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (5)$$

Возведя формулы (5) в квадрат и сложив результаты, имеем

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_t^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2. \quad (6)$$

В уравнении (6) присутствуют нормальная σ_n и касательная σ_t компоненты вектора напряжений для произвольной наклонной плоскости. В системе координат с осями σ_n , σ_t уравнение (6) задает окружность с радиусом R и центром в точке с координатами $(0, a)$. Радиус R и параметр a определяются из выражений

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}, \quad a = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}. \quad (7)$$

Окружность (6) называется *кругом напряжений Мора* (рис. 23). Каждая точка, лежащая на круге Мора, представляет напряженное состояние для плоскости с соответствующим углом φ (см. рис. 22). В особых случаях, когда $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$, имеем

$$\begin{aligned}\varphi = 0, & \quad \sigma_n = \sigma_{11}, & \quad \sigma_t = \sigma_{12}; \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, & \quad \sigma_n = \sigma_{22}, & \quad \sigma_t = -\sigma_{12}.\end{aligned}\quad (8)$$

Точки, соответствующие значениям $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$, изображены на рис. 23. Предположим, что величины σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} известны. Тогда известно положение точки B ($\varphi = 0$). Для построения круга Мора можно использовать точку B , соединив ее отрезком прямой с точкой, лежащей на оси σ_n на расстоянии a (задаваемом формулой (7)) от начала координат. Этот отрезок задает радиус круга Мора. В точках, где круг Мора пересекает ось σ_n , получают максимальное и минимальное значения нормальных (главных) напряжений. Величины σ_1 и σ_2 соответствуют плоскостям с ориентацией, задаваемой углами φ_1 и φ_2 , удовлетворяющими соотношению (1.13.8) (рис. 23).

Таким образом, имеем

$$\sigma_1 = a + R, \quad \sigma_2 = a - R \quad (9)$$

и, используя формулы (7), в соответствии с выражениями (3) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

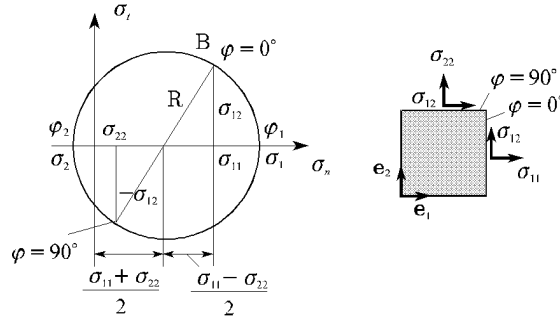


Рис. 23

Уравнения (4) можно записать в более простой форме, если ввести угол ψ так, как показано на рис. 24. А именно ψ является углом между главной плоскостью и произвольной плоскостью; значит,

$$\varphi = \psi + \varphi_1. \quad (11)$$

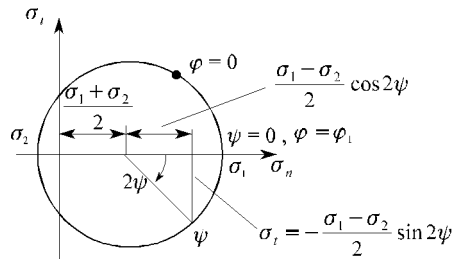


Рис. 24

Подставляя выражение (11) в формулы (4), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \cos[2(\psi + \varphi_1)] + \sigma_{12} \sin[2(\psi + \varphi_1)], \\ \sigma_t &= -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \sin[2(\psi + \varphi_1)] + \sigma_{12} \cos[2(\psi + \varphi_1)]. \end{aligned} \quad (12)$$

В итоге, подставив формулы (1) в равенства (12), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\psi, \\ \sigma_t &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (13)$$

На круге Мора (рис. 25) показаны точки, соответствующие углам $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Для произвольного значения $\psi > 0$ выражения (13) определяют точку на окружности (см. рис. 24). Записав выражения (13) в виде

$$\sigma_n = a + R \cos 2\psi; \quad \sigma_t = R \sin 2\psi, \quad (14)$$

делаем вывод, что на *круге Мора* угол между радиусом, соответствующим точке $\psi = 0$, и радиусом, соответствующим точке, определяемой из выражений (14), составляет 2ψ .

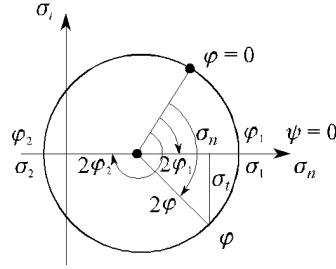


Рис. 25

Найдем инварианты тензора напряжений в случае плоского напряженного состояния. Когда тензор напряжений имеет вид (см. (1.12.3))

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

инварианты (1.8.4) таковы:

$$\hat{I}_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \hat{I}_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2, \quad \hat{I}_3 = 0. \quad (16)$$

В главных осях тензор $\boldsymbol{\sigma}$ выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Из выражения (17) имеем

$$\hat{I}_1 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \hat{I}_2 = \sigma_1\sigma_2, \quad \hat{I}_3 = 0. \quad (18)$$

И наконец, сравнивая выражения (16) и (18), видим, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_1\sigma_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2. \quad (19)$$

1.15 Напряжения на внешних поверхностях тела

Если тело нагружено поверхностными силами, имеем

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{на} \quad S_p, \quad (1)$$

где S_p — часть внешней поверхности тела, а $\hat{\mathbf{p}}$ считаем заданной величиной. Если

$$\hat{\mathbf{p}} = 0, \quad (2)$$

то поверхность S_p называем *свободной поверхностью*. На рис. 26,а изображена часть тела со свободной поверхностью. Введя систему координат так, как показано на рис. 26,б, имеем

$$\mathbf{p}_3 = 0. \quad (3)$$

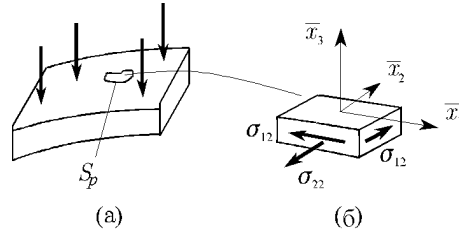


Рис. 26

Из равенства (3) следует, что тензор напряжений в системе координат, изображенной на рис. 26,б, для точки, лежащей на свободной поверхности, имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Определяя нормальное σ_n и касательное σ_t напряжения в той плоскости, в которой лежит вектор \mathbf{e}_3 и которая имеет единичную нормаль \mathbf{n} , имеем

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (6)$$

а угол φ показан на рис. 22. Подставляя формулу (6) в равенство (5), получаем

$$\mathbf{p}_n = (\sigma_{11} \cos \varphi + \sigma_{12} \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + (\sigma_{12} \cos \varphi + \sigma_{22} \sin \varphi) \mathbf{e}_2. \quad (7)$$

Выражение (7) идентично выражению (1.13.3). Следовательно, все выводы, сделанные из (1.13.3), применимы и в данном случае. Это важно, так как большинство измерений производится на свободной поверхности тела. Таким образом, для анализа этих измерений можно использовать результаты параграфа 1.13.

1.16 Линейное напряженное состояние

Одним из частных случаев напряженного состояния в точке является случай линейного напряженного состояния, определяемый следующим образом: *напряженное состояние в данной точке тела называется линейным напряженным состоянием, если векторы напряжений для всех плоскостей, проходящих через эту точку, коллинеарны*. Другими словами, напряженное состояние линейно, если в данной точке

$$\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Из определения следует, что можно так выбрать систему координат, чтобы в случае линейного напряженного состояния тензор напряжений имел вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Примером линейного напряженного состояния является нагруженный вдоль продольной оси призматический стержень, изображенный на рис. 2. Ось \bar{x}_1 совпадает с продольной осью стержня. Для плоскости A^* единичная нормаль \mathbf{n}^* задается в виде

$$\mathbf{n}^* = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (3)$$

следовательно,

$$\mathbf{p}_n^* = \sigma \cos \varphi \mathbf{e}_1. \quad (4)$$

С помощью равенства (4) нормальная и касательная составляющие вектора напряжений для наклонной плоскости A^* таковы:

$$\sigma_n^* = \sigma \cos^2 \varphi, \quad \sigma_t^* = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi. \quad (5)$$

Задачи

1. Напряженное состояние в точках P , Q и S задано тензорами напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 100 & 20\sqrt{3} & 0 \\ 20\sqrt{3} & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

соответственно. Компоненты напряжения заданы в $[\text{Н}/\text{мм}^2]$. Определить главные значения и главные направления.

2. Найти вектор напряжений и его нормальную и касательную составляющие в случае, когда напряженное состояние в точке определяется тензором σ , а плоскость задана уравнением (компоненты напряжения заданы в $[\text{Н}/\text{мм}^2]$):

$$\text{а) } \sigma = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad 2x_1 + 3x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0;$$

$$\text{б) } \sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0;$$

$$\text{в) } \sigma = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}, \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

3. Главные напряжения в точке таковы: $\sigma_1 = 300 \text{ Н}/\text{мм}^2$; $\sigma_2 = 124 \text{ Н}/\text{мм}^2$; $\sigma_3 = 56 \text{ Н}/\text{мм}^2$. Найти наибольшее касательное напряжение и октаэдрическое напряжение.
4. Показать, что октаэдрическое касательное напряжение $\sigma_{t \text{ oct}}$, задаваемое формулой (1.10.4), всегда меньше наибольшего касательного напряжения, задаваемого соотношениями (1.9.13).
5. Нарисовать круги Мора при $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.
6. Компоненты напряжений в теле заданы как функции координат в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= ax_1 + bx_2^2 + cx_3^3, & \sigma_{12} &= lx_1 + mx_3, \\ \sigma_{22} &= dx_1 + ex_2^2 + fx_3^3, & \sigma_{23} &= nx_2 + px_3, \\ \sigma_{33} &= gx_1 + hx_2^2 + kx_3^3, & \sigma_{31} &= qx_1^2 + sx_3^2, \end{aligned}$$

где a, b, \dots, s — постоянные величины. Если тело находится в состоянии равновесия, найти соответствующие объемные силы.

7. Решение кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ можно найти следующим образом.

Произведем замену переменных $x = y - a/3$ и преобразуем уравнение к виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad (\text{а})$$

где $p = b - a^2/3$ и $q = c - ab/3 + 2a^3/27$. Подставляя $y = rz$, получим

$$z^3 + \frac{p}{r^2}z + \frac{q}{r^3} = 0. \quad (\text{б})$$

Делая еще одну подстановку $z = \cos \theta$ и учитывая тригонометрическое тождество $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$, имеем

$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0. \quad (6)$$

Сравнивая уравнения (6) и (6), видим, что

$$r = \sqrt{-\frac{4p}{3}}; \quad \cos 3\theta = -\frac{4q}{r^3}. \quad (7)$$

Из первого равенства (7) определим значение r , а из второго — три значения угла θ : $\theta_1 = \theta_0$, $\theta_2 = \theta_0 + 2\pi/3$ и $\theta_3 = \theta_0 + 4\pi/3$. Отсюда решения уравнения (6) таковы:

$$z_1 = \cos \theta_0, \quad z_2 = \cos \theta_2, \quad z_3 = \cos \theta_3. \quad (8)$$

Применить изложенную процедуру для решения характеристического уравнения (1.6.20)

$$-\lambda^3 + \hat{I}_1 \lambda^2 - \hat{I}_2 \lambda + \hat{I}_3 = 0. \quad (9)$$

8. В данной точке тела главные напряжения и главные направления имеют вид

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 4, \quad \sigma_3 = 1, \\ & \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{m} = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}, \\ \text{б) } & \sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = -1, \\ & \mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{m} = \frac{\sqrt{3}}{3} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}, \\ \text{в) } & \sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 1, \\ & \mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Для каждого варианта найти тензор напряжений в системе координат с единичными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Глава 2

Анализ деформаций

2.1 Введение

Силы, действующие на твердое (в нашем случае упругое) тело, порождают в нем деформации. В жидкостях они создают поток. Одна из главных задач механики сплошных сред состоит в количественном описании испытываемых телом деформаций. Это достигается введением системы *мер деформаций*. Меры деформации основываются на геометрических величинах, описывающих деформацию тела. По предположению рассматриваемое тело считается сплошным. Это означает, что изменения в теле непрерывны, так что малая окрестность данной точки в недеформированном состоянии остается окрестностью той же точки в деформированном состоянии. Другими словами, никакая конечная (однако малая) часть тела не может быть деформирована таким образом, чтобы ее объем стал равным нулю.

Когда тело движется, его точки испытывают *перемещение*, т. е. вектор положения произвольной частицы меняется по отношению к фиксированной системе координат. Один из способов количественно описать деформации в данной точке, назовем ее P , состоит в определении относительных изменений длин линейных элементов, имеющих начало в точке P , а также изменений углов между любой парой таких линейных элементов. В дифференциальной геометрии показано, что длину линейных элементов и углы между ними можно определить, если *метрика* в данной точке известна. Таким образом, чтобы определить меру деформации, нужно найти метрики в точке P в недеформированном и деформированном состояниях и сравнить их.

Для того чтобы вычислить метрики, введем отображение в трехмерном евклидовом пространстве E^3 . Пусть в недеформированном состоянии тело B занимает часть κ_0 от пространства E^3 , тогда как в деформированном состоянии оно занимает часть κ . Назовем части пространства κ_0 и κ *недеформированным* и *деформированным состояниями* тела. В точке P , где мы анализируем деформации, введем две системы координат — в состояниях κ_0 и κ . Пусть $\hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$, — координаты в состоянии κ_0 и ξ_i , $i = 1, 2, 3$, — координаты в состоянии κ . Вообще говоря, системы координат могут быть неодинаковыми (каждая может быть декартовой или криволинейной). Предполагается, что координаты ξ_i , $i = 1, 2, 3$, точки в состоянии κ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями координат $\hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$, в состоянии κ_0 . Это означает, что имеют место однозначные соотно-

шения

$$\xi_i = f_i(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3), \quad \hat{\xi}_i = g_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Предполагается, что функции f_i и g_i непрерывны и имеют непрерывные первые производные по всем аргументам. Условие, что преобразование $\xi_i = f_i$ обратимо и разрешимо относительно $\hat{\xi}_i$, удовлетворяется тогда и только тогда, когда якобиан преобразования не обращается в нуль. Для изучения деформаций мы можем использовать и координаты $\hat{\xi}_i$, и координаты ξ_i .

Далее мы используем единую декартовую систему координат с осями \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, и единичными векторами \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, в *обоих* состояниях κ_0 и κ . В первом приближении, называемым *лагранжевым представлением*, материальная частица задается на основе ее *начальных координат* X_i ($X_i = \hat{\xi}_i$) в состоянии κ_0 . Таким образом, координаты произвольной материальной точки в деформированном состоянии κ ($x_i = \xi_i$) задаются в виде¹

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3) = x_i(X_j). \quad (2)$$

Запись (2) означает, что “наблюдатель находится на фиксированной частице”. В эйлеровском представлении “наблюдатель находится в фиксированной точке пространства”; следовательно, можно записать

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3) = X_i(x_j). \quad (3)$$

Система (2) может быть получена разрешением уравнения (3) относительно x_i . Наше предположение о $x_i(X_j)$ гарантирует, что такое обращение всегда возможно. Представления Лагранжа и Эйлера имеют свои преимущества и недостатки. Вообще говоря, в теории упругости используется представление Лагранжа, а в механике жидкостей оказывается более удобным представление Эйлера.

2.2 Меры деформации. Тензор деформаций

Рассмотрим тело V в двух состояниях κ_0 и κ . Зафиксируем две точки в состоянии κ_0 и обозначим их P и Q . Мы используем представление Лагранжа, так что координаты X_i точки в состоянии κ_0 являются независимыми переменными. В деформированном состоянии κ точка P перемещается в точку \bar{P} . *Вектор перемещения* точки P определяется как

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad (1)$$

¹ В выражении (2) мы не различаем функцию и ее значение. Иначе говоря, нужно было бы написать $x_i = \hat{x}_i(X_j)$, где $\hat{x}_i(X_j)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

где \mathbf{R} — вектор положения точки P в состоянии κ_0 в системе координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, а \mathbf{r} — вектор положения той же точки относительно той же системы координат в состоянии κ (рис. 1). Пусть Q — точка в окрестности P в состоянии κ_0 . В состоянии κ точка Q переместится в точку \bar{Q} . Кривая C_0 , соединяющая P и Q в состоянии κ_0 , изменится и превратится в кривую \bar{C} в состоянии κ (рис. 2). Мы говорим, что деформация в точке P известна, если мы знаем:

- а) длину в деформированном состоянии ds произвольного линейного элемента, начинающегося в точке P (например, C_0), первоначальная длина которого равнялась dS ;
- б) разность между углом $\angle(QPR)$, образованным произвольной парой линейных элементов, начинающихся в точке P , и углом $\angle(\bar{Q}\bar{P}\bar{R})$, образованным соответствующими элементами, начинающимися в той же точке, но уже в деформированном состоянии.

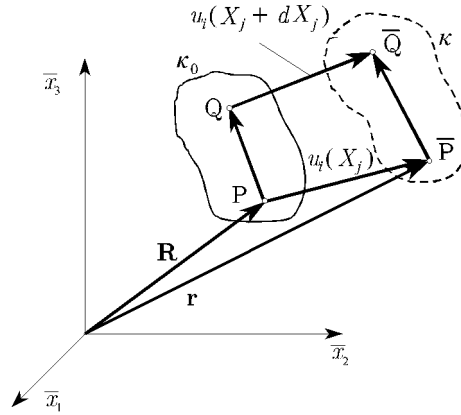


Рис. 1

Покажем, как можно получить оба условия а) и б). Сначала определим dS . Если \mathbf{R} — вектор положения точки P , то $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$ — вектор положения точки Q . Предположим здесь, что мы имеем дело с представлением Лагранжа в обобщенной криволинейной системе координат, так что

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3). \quad (2)$$

Из формулы (2) имеем

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\xi}_i} d\hat{\xi}_i. \quad (3)$$

Квадрат длины дуги, соединяющей точки P и Q :

$$(dS)^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\xi}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\xi}_j} d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j. \quad (4)$$

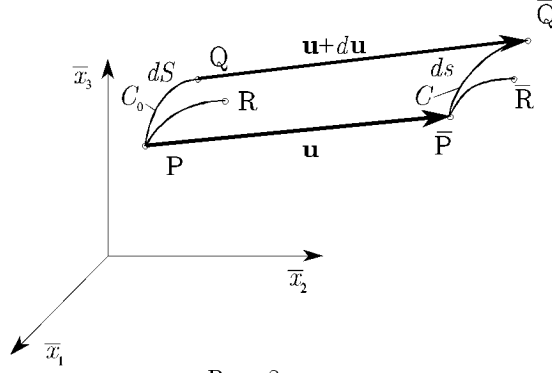


Рис. 2

Векторы $\partial \mathbf{R} / \partial \hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, 3$, называются *базисными векторами* в состоянии κ_0 . Если $\hat{\xi}_i = X_i$ (где X_i образуют прямоугольную декартову систему координат), то $\partial \mathbf{R} / \partial \hat{\xi}_i = \mathbf{e}_i$. Уравнение (4) можно записать в виде

$$(dS)^2 = G_{ij} d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j. \quad (5)$$

Симметричная (так как скалярное произведение коммутативно) двухиндексная система $[G_{ij}]$ образует *фундаментальный* или *метрический тензор* в состоянии κ_0 . В случае прямоугольной декартовой системы координат $G_{ij} = \delta_{ij}$. В деформированном состоянии κ вектор положения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\hat{\xi}_i)$ таков, что $(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Следовательно,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\xi}_i} d\hat{\xi}_i, \quad (6)$$

или

$$ds^2 = g_{ij} d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j. \quad (7)$$

Система $[g_{ij}]$ также симметрична и образует *фундаментальный* или *метрический тензор* в деформированном состоянии κ . Заметим, что из равенства (1) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\xi}_i} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\xi}_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\xi}_i}. \quad (8)$$

В качестве *меры деформации* возьмем следующую величину:

$$(ds)^2 - (dS)^2. \quad (9)$$

Из выражений (5) и (7) получаем

$$(ds)^2 - (dS)^2 = [g_{ij} - G_{ij}] d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j = 2\bar{E}_{ij} d\hat{\xi}_i d\hat{\xi}_j, \quad (10)$$

где

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}]. \quad (11)$$

Система $[\bar{E}_{ij}]$ представляет собой тензор второго ранга, называемый *тензором деформаций Лагранжа–Грина*. Далее мы покажем, что $[\bar{E}_{ij}]$ действительно является тензором (т. е. удовлетворяет закону преобразования тензоров второго ранга) и в случае, когда тензор $[\bar{E}_{ij}]$ известен, удовлетворяются оба требования а) и б).

Теперь рассмотрим прямоугольную декартову систему координат X_i . Так как $G_{ij} = \delta_{ij}$ и $g_{ij} = (\partial x_m / \partial X_i)(\partial x_m / \partial X_j)$, имеем

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right). \quad (12)$$

Используя равенство (1), получаем

$$dx_i = dX_i + du_i. \quad (13)$$

Из выражения (13) следует, что

$$\frac{\partial x_m}{\partial X_i} = \delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \quad (14)$$

и $g_{ij} = (\delta_{mi} + \partial u_m / \partial X_i)(\delta_{mj} + \partial u_m / \partial X_j)$. Наконец, подставляя выражения (14) в формулы (12), получаем компоненты \bar{E}_{ij} в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right], \\ \bar{E}_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right], \\ \bar{E}_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right], \\ \bar{E}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right), \\ \bar{E}_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right), \\ \bar{E}_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Система равенств (15) может быть записана в компактной форме:

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right). \quad (16)$$

Из элементов \bar{E}_{ij} можно образовать симметричную матрицу $\bar{\mathbf{E}}$:

$$\bar{\mathbf{E}} = [\bar{E}_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Покажем, что матрица $\bar{\mathbf{E}}$ является тензором второго ранга². Предположим, что задана новая система координат x_i^* , такая что

$$\mathbf{r} = X_i \mathbf{e}_i = X_i^* \mathbf{e}_i^*. \quad (18)$$

Единичные векторы систем координат \bar{x}_i и x_i^* обозначаются как \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_i^* и связаны соотношением

$$\mathbf{e}_i = c_{ki} \mathbf{e}_k^*, \quad (19)$$

где $c_{ki} = \cos \angle(x_k^*, \bar{x}_i)$ (см. выражение (1.6.6)). Взяв скалярное произведение равенства (18) на вектор \mathbf{e}_m , получаем

$$X_i \delta_{im} = X_i^* c_{km} \delta_{ik}, \quad (20)$$

или

$$X_m = c_{im} X_i^*. \quad (21)$$

Из выражения (21) следует, что

$$dX_i = c_{ki} dX_k^*. \quad (22)$$

Так как величина (9) — скаляр, то его значение не зависит от выбора системы координат. Следовательно, это значение должно быть одинаковым в обеих системах координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, и x_i^* , $i = 1, 2, 3$. Таким образом, из равенств (10) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(ds)^2 - (dS)^2] &= \bar{E}_{11}(dX_1)^2 + \dots + 2\bar{E}_{13}dX_1dX_3 \\ &= \bar{E}_{11}^*(dX_1^*)^2 + \dots + 2\bar{E}_{13}^*dX_1^*dX_3^*, \end{aligned} \quad (23)$$

где величины \bar{E}_{ij}^* определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ij}^* &= (\bar{E}_{11}c_{i1} + \bar{E}_{12}c_{i2} + \bar{E}_{13}c_{i3})c_{j1} + (\bar{E}_{21}c_{i1} + \bar{E}_{22}c_{i2} + \bar{E}_{23}c_{i3})c_{j2} \\ &\quad + (\bar{E}_{31}c_{i1} + \bar{E}_{32}c_{i2} + \bar{E}_{33}c_{i3})c_{j3} = c_{im}\bar{E}_{ms}c_{js}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из выражений (24) заключаем (как и в параграфе 1.6), что матрица (17) в системе координат x_i^* , $i = 1, 2, 3$,

$$[\bar{E}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11}^* & \bar{E}_{12}^* & \bar{E}_{13}^* \\ \bar{E}_{12}^* & \bar{E}_{22}^* & \bar{E}_{23}^* \\ \bar{E}_{13}^* & \bar{E}_{23}^* & \bar{E}_{33}^* \end{bmatrix} \quad (25)$$

может быть получена из уравнений (24), что матричным виде запишется следующим образом:

$$\bar{\mathbf{E}}^* = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{E}}\mathbf{Q}^T, \quad (26)$$

² Мы докажем это, потому что пока не доказано, что $[G_{ij}]$ и $[g_{ij}]$ — тензоры; в противном случае $[\bar{E}_{ij}]$ является тензором как разность между двумя тензорами.

где \mathbf{Q} задается в виде (1.6.11). Уравнение (26) показывает, что $\bar{\mathbf{E}}$ является симметричным тензором второго ранга.

Определим теперь геометрический смысл элементов \bar{E}_{ij} тензора деформаций Лагранжа–Грина (17). Чтобы сделать это, зафиксируем находящуюся в окрестности точки P точку Q . Предположим далее, что вектор положения точки Q отличается только по координате X_1 от вектора положения точки P . Тогда точка Q в состоянии κ_0 имеет координаты $X_1 + dX_1, X_2, X_3$, так что

$$dX_1 \neq 0, \quad dX_2 = 0, \quad dX_3 = 0. \quad (27)$$

Значит, $dS = dX_1$ и формула (23) принимает вид

$$\frac{1}{2}[(ds)^2 - (dS)^2] = \bar{E}_{11} dX_1^2. \quad (28)$$

Однако, так как $dS = dX_1$, из равенства (28) следует, что

$$ds = \sqrt{1 + 2\bar{E}_{11}} dX_1. \quad (29)$$

Найдем теперь *относительное удлинение* (называемое также *растяжением* или более общим термином *деформацией*) при помощи соотношения

$$e_{PQ} = \frac{ds - dS}{dS}. \quad (30)$$

Подставляя $dS = dX_1$ в формулу (30), получаем

$$e_{11} = \sqrt{1 + 2\bar{E}_{11}} - 1. \quad (31)$$

Аналогично, выбирая $dX_1 = dX_3 = 0, dX_2 \neq 0$ и $dX_1 = dX_2 = 0, dX_3 \neq 0$, имеем

$$e_{22} = \sqrt{1 + 2\bar{E}_{22}} - 1, \quad e_{33} = \sqrt{1 + 2\bar{E}_{33}} - 1. \quad (32)$$

Из выражений (31) и (32) делаем вывод, что *диагональные элементы тензора деформаций Лагранжа–Грина определяют относительные удлинения линейных элементов вдоль координатных осей по формулам (31), (32)*.

Рассмотрим особый случай, когда компоненты тензора деформаций малы; а именно $|\bar{E}_{ij}| \leq \eta$ и η настолько мало, что величиной η^2 можно пренебречь по сравнению с величиной η . Тогда из выражений (31) и (32) следует, что

$$e_{11} = \bar{E}_{11}, \quad e_{22} = \bar{E}_{22}, \quad e_{33} = \bar{E}_{33}. \quad (33)$$

Уравнение (33) интерпретируется так: *если элементы тензора деформаций Лагранжа–Грина малы (квадратичными элементами можно*

пренебречь), то диагональные элементы являются относительными удлинениями вдоль координатных осей.

Рассмотрим случай, когда точки Q и R лежат в окрестности точки P на осях \bar{x}_1 и \bar{x}_2 соответственно (рис. 3). Угол $\angle(QPR)$ в этом случае равен $\pi/2$. Разность между векторами, определяющими положение точек Q и P, R и P в состоянии κ_0 , обозначим $d\mathbf{R}^1$ и $d\mathbf{R}^2$ соответственно. В состоянии κ эти векторы преобразуются в векторы $d\mathbf{r}^1$ и $d\mathbf{r}^2$ (см. рис. 3).

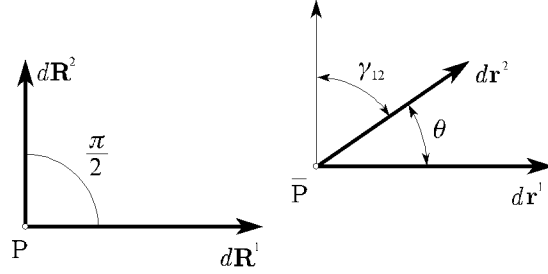


Рис. 3

Так как

$$d\mathbf{R}^1 = dX_1 \mathbf{e}_1, \quad d\mathbf{R}^2 = dX_2 \mathbf{e}_2, \quad (34)$$

то, следовательно,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^1 &= d\mathbf{R}^1 + d\mathbf{u}^1 = dX_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dX_1 \mathbf{e}_i, \\ d\mathbf{r}^2 &= d\mathbf{R}^2 + d\mathbf{u}^2 = dX_2 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_i}{\partial X_2} dX_2 \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (35)$$

Из выражений (35) получаем

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^1 \cdot d\mathbf{r}^2 &= \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) dX_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} dX_1 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} dX_1 \mathbf{e}_3 \right] \\ &\times \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2 \mathbf{e}_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) dX_2 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} dX_2 \mathbf{e}_3 \right] = 2\bar{E}_{12} dX_1 dX_2, \end{aligned} \quad (36)$$

где использованы выражения (15). Однако из формул (30)–(32) имеем

$$d\mathbf{r}^1 \cdot d\mathbf{r}^2 = \sqrt{1 + \bar{E}_{11}} \sqrt{1 + \bar{E}_{22}} dX_1 dX_2 \cos \theta. \quad (37)$$

Объединяя равенства (36) и (37), окончательно получаем

$$\cos \theta = \sin \gamma_{12} = \frac{2\bar{E}_{12}}{\sqrt{1 + 2\bar{E}_{11}} \sqrt{1 + 2\bar{E}_{22}}}. \quad (38)$$

Угол $\gamma_{12} = \pi/2 - \theta$ называется *углом сдвига* между осями \bar{x}_1 и \bar{x}_2 . Аналогично мы можем получить следующие соотношения, связывающие углы сдвига с другими компонентами тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\sin \gamma_{23} &= \frac{2\bar{E}_{23}}{\sqrt{1+2\bar{E}_{22}}\sqrt{1+2\bar{E}_{33}}}, \\ \sin \gamma_{13} &= \frac{2\bar{E}_{13}}{\sqrt{1+2\bar{E}_{11}}\sqrt{1+2\bar{E}_{33}}}.\end{aligned}\quad (39)$$

Из выражений (38) и (39) следует, что *компоненты E_{12} , E_{13} и E_{23} тензора деформаций Лагранжа–Грина связаны с углами сдвига между координатными осями.*

Заметим, что как формулы (31), (33), так и формулы (38), (39) являются нелинейными соотношениями между относительными удлинениями и углами сдвига. Для случая малых компонент тензора деформаций, т. е. тогда, когда $|\bar{E}_{ij}| \leq \eta$ и η настолько мало, что величиной η^2 можно пренебречь по сравнению с величиной η , уравнения (38) и (39) принимают вид

$$\frac{1}{2}\gamma_{12} = \bar{E}_{12}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{13} = \bar{E}_{13}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{23} = \bar{E}_{23}. \quad (40)$$

В случае представления Эйлера координаты материальной точки в деформированном состоянии x_i являются независимыми переменными. Следовательно, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_i)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_i)$. Таким образом, для декартовой системы координат в состояниях k и k_0 получатся следующие выражения длины линейного элемента в недеформированном и деформированном состояниях:

$$\begin{aligned}(dS)^2 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_j} dx_i dx_j = \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} dx_i dx_j, \\ (ds)^2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} dx_i dx_j = \delta_{ij} dx_i dx_j.\end{aligned}\quad (41)$$

Вместо равенства (10) теперь имеем

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2\bar{\bar{E}}_{ij} dx_i dx_j. \quad (42)$$

Величины $\bar{\bar{E}}_{ij}$ определяются из выражения (42):

$$\bar{\bar{E}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \right). \quad (43)$$

Они образуют симметричный тензор второго ранга, называемый *тензором деформаций Эйлера–Альманси*. В силу того, что $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{u}$ (см. формулу (1)), имеем

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_i} = \delta_{mi} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}. \quad (44)$$

Подставляя выражения (44) в формулы (43), получаем (ср. с формулами (16))

$$\bar{\bar{E}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right). \quad (45)$$

С учетом равенств (45) компоненты тензора деформаций Эйлера–Альманси становятся такими:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{E}}_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \\ \bar{\bar{E}}_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right], \\ \bar{\bar{E}}_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right], \\ \bar{\bar{E}}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \bar{\bar{E}}_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \\ \bar{\bar{E}}_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Анализ, подобный представленному выше, для тензора деформаций Лагранжа–Грина приводит к соотношениям, связывающим относительное удлинение и углы сдвига с компонентами $\bar{\bar{E}}_{ij}$. Результирующие выражения имеют вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{11}}} - 1, \\ e_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{22}}} - 1, \\ e_{33} &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{33}}} - 1, \\ \sin \gamma_{12} &= \frac{2\bar{\bar{E}}_{12}}{\sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{11}} \sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{22}}}, \\ \sin \gamma_{13} &= \frac{2\bar{\bar{E}}_{13}}{\sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{11}} \sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{33}}}, \\ \sin \gamma_{23} &= \frac{2\bar{\bar{E}}_{23}}{\sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{22}} \sqrt{1 - 2\bar{\bar{E}}_{33}}}. \end{aligned} \quad (47)$$

В дальнейшем будем рассматривать *малые деформации*. При этом мы полагаем, что величины $\partial u_i / \partial X_j$ малы, а именно

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \leq \eta; \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \leq \eta, \quad (48)$$

с настолько малым η^2 , что им можно пренебречь по сравнению с величиной η . В таком случае тензор деформаций называется *тензором малых деформаций* или *линейным тензором деформаций*. Его компоненты E_{ij} (см. (16)) таковы:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \approx \bar{E}_{ij}. \quad (49)$$

Вводя величину ω_{ij} с помощью выражения

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad (50)$$

тензор деформаций Лагранжа–Грина можно записать через линейный тензор деформаций следующим образом:

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2} (E_{ki} + \omega_{ki})(E_{kj} + \omega_{kj}). \quad (51)$$

Физический смысл величин ω_{ij} обсуждается в параграфе 2.4. В большинстве приложений деформация тела настолько мала, что достаточно использовать малый тензор деформаций E . Таким образом, когда мы говорим *тензор деформаций*, то подразумеваем *тензор малых деформаций*.

Диагональные элементы тензора деформаций есть относительные удлинения вдоль осей \bar{x}_i (см. соотношения (33)), а недиагональные элементы равны половине углов сдвига (см. соотношения (40)). Вопрос, которым мы задаемся сейчас, можно сформулировать так: возможно ли определить относительное удлинение для *произвольного направления* и угол сдвига для двух *произвольных линейных элементов*, начинающихся в точке P ? Если да, то тензор деформаций полностью описывает деформацию в точке, в соответствии с требованиями *а)* и *б)*. Ниже мы рассмотрим этот вопрос.

2.3 Удлинение и угол сдвига для произвольных направлений

Из формул (2.2.10) в случае декартовой системы координат $\hat{\xi}_i = X_i$ имеем

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{dS} \right)^2 - 1 \right] = \bar{E}_{ij} \frac{dX_i}{dS} \frac{dX_j}{dS}. \quad (1)$$

Равенство (1) справедливо для любой деформации. Мы полагаем деформацию настолько малой, что можно заменить $[\bar{E}_{ij}]$ на $[E_{ij}]$. Пусть \mathbf{n} — произвольный единичный вектор в направлении линейного элемента, начинающегося в точке P , в которой мы ищем относительное удлинение (см. рис. 1). Вектор положения точки Q относительно P имеет вид $d\mathbf{R} = dX_i \mathbf{e}_i$. Относительное удлинение в направлении, определяемом вектором $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$, таково:

$$e_n = \frac{ds - dS}{dS}. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\frac{dX_i}{dS} = \cos \angle(d\mathbf{R}, \bar{x}_i) = \frac{d\mathbf{R}}{dS} \cdot \mathbf{e}_i = n_i, \quad (3)$$

и используя формулу (2), запишем равенство (1) в виде

$$e_n + \frac{1}{2}e_n^2 = \bar{E}_{ij} n_i n_j. \quad (4)$$

Если пренебречь величинами $|\partial u_i / \partial X_j|^2$ в выражениях для \bar{E}_{ij} , то компоненты \bar{E}_{ij} становятся равными компонентам E_{ij} . Тот же порядок приближения требует пренебречь величиной e_n^2 , так что формула (4) принимает вид

$$e_n = E_{ij} n_i n_j, \quad (5)$$

давая относительное удлинение в произвольном направлении \mathbf{n} . Отметим аналогию между выражениями (5) и (1.7.2). Тензор напряжений заменяется тензором деформаций, а нормальная компонента вектора напряжений — относительным удлинением. Из соотношения (5) заключаем, что *тензор деформаций \mathbf{E} определяет относительное удлинение для любого направления*. Таким образом, требование а) параграфа 2.2 удовлетворяется.

Пусть $d\mathbf{R}^1$ и $d\mathbf{R}^2$ — два бесконечно малых вектора, соединяющих точки Q и R с точкой P (см. рис. 2) в состоянии κ_0 . Угол сдвига для этих двух линейных элементов, начинающихся в точке P , определяется выражением

$$\gamma_{nm} = \angle(d\mathbf{R}^1, d\mathbf{R}^2) - \angle(d\mathbf{r}^1, d\mathbf{r}^2) = \theta - \theta', \quad (6)$$

где $d\mathbf{r}^1$ и $d\mathbf{r}^2$ использовались для обозначения векторов, соединяющих точки \bar{Q} и \bar{R} с точкой \bar{P} в состоянии κ . Запишем также, что

$$d\mathbf{R}^1 \cdot d\mathbf{R}^2 = dS_1 dS_2 \cos \theta, \quad (7)$$

где $dS_1 = |d\mathbf{R}^1|$ и $dS_2 = |d\mathbf{R}^2|$. В состоянии κ векторы $d\mathbf{r}^1$ и $d\mathbf{r}^2$ зада-

ются следующим образом:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^1 &= d\mathbf{R}^1 + d\mathbf{u}^1 = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j^1 \mathbf{e}_i, \\ d\mathbf{r}^2 &= d\mathbf{R}^2 + d\mathbf{u}^2 = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j^2 \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

По определению скалярного произведения имеем

$$d\mathbf{r}^1 \cdot d\mathbf{r}^2 = |d\mathbf{r}^1| |d\mathbf{r}^2| \cos \theta' = (1 + \epsilon_n)(1 + \epsilon_m) dS_1 dS_2 \cos \theta', \quad (9)$$

где \mathbf{n} и \mathbf{m} использовались для обозначения единичных векторов вдоль направлений $d\mathbf{R}^1$ и $d\mathbf{R}^2$; таким образом,

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{R}^1}{dS_1} = \frac{dX_i^1}{dS_1} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{m} = \frac{d\mathbf{R}^2}{dS_2} = \frac{dX_i^2}{dS_2} \mathbf{e}_i. \quad (10)$$

Используя выражения (8), получаем

$$d\mathbf{r}^1 \cdot d\mathbf{r}^2 = d\mathbf{R}^1 \cdot d\mathbf{R}^2 + d\mathbf{R}^1 \cdot d\mathbf{u}^2 + d\mathbf{R}^2 \cdot d\mathbf{u}^1 + d\mathbf{u}^1 \cdot d\mathbf{u}^2. \quad (11)$$

Объединив формулы (9) и (11) и произведя деление на $dS_1 dS_2$, имеем

$$(1 + \epsilon_n)(1 + \epsilon_m) \cos \theta' - \cos \theta = n_i \frac{\partial u_i}{\partial X_j} m_j + m_i \frac{\partial u_i}{\partial X_j} n_j, \quad (12)$$

где мы пренебрегли последним членом из равенства (11), так как он имеет порядок $|\partial u_i / \partial X_j|^2$. Чтобы увидеть это, заметим, что

$$\frac{d\mathbf{u}^1 \cdot d\mathbf{u}^2}{dS_1 dS_2} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j^1 \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial u_m}{\partial X_r} dX_r^2 \mathbf{e}_m \right) \frac{1}{dS_1 dS_2} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} n_j \frac{\partial u_i}{\partial X_r} m_r. \quad (13)$$

Правая часть равенства (12) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} n_i \frac{\partial u_i}{\partial X_j} m_j + m_i \frac{\partial u_i}{\partial X_j} n_j &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) n_i m_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) m_i n_j \\ &= E_{ij} (n_i m_j + m_i n_j) = 2E_{ij} n_i m_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Вводя угол сдвига γ_{nm} по формуле

$$\theta' = \theta - \gamma_{nm}, \quad (15)$$

и подставляя выражения (14) и (15) в равенство (12), имеем

$$\gamma_{nm} \sin \theta = 2E_{ij} n_i m_j - (\epsilon_n + \epsilon_m) \cos \theta. \quad (16)$$

При записи уравнения (16) мы полагали, что γ_{nm} мало, и пренебрегли членами порядка γ_{nm}^2 , так как они имеют порядок $|\partial u_i / \partial X_j|^2$. Из уравнения (16) в частном случае, когда $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$ ($\theta = \pi/2$), получаем

$$\frac{1}{2} \gamma_{nm} = E_{ij} n_i m_j. \quad (17)$$

Смысл выражения (16), или (в частном случае $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$) выражения (17), формулируется следующим образом: *тензор деформаций \mathbf{E} определяет угол сдвига для двух произвольных направлений, начинающихся в произвольной точке P .*

Кратко коснемся других мер деформаций. Они часто определяются исходя из специфических требований. Например, некоторые *мультипликативно симметричны* (удвоение длины соответствует удвоенному значению меры деформации, а уменьшение длины вдвое соответствует уменьшенному вдвое значению меры деформации). Если принять $\lambda = ds/dS$, то λ мультипликативно симметрично. Другие меры деформации *аддитивно симметричны* (мера аддитивно симметрична, если удвоение длины эквивалентно по мере деформации уменьшению длины вдвое с обратным знаком). К примеру, следующие две меры: $f = \ln \lambda$, где $\lambda = ds/dS$, и $g = -\ln[\operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma/2)]$, где γ — угол сдвига, аддитивно симметричны.

Логарифмические меры деформации часто называются “*естественными мерами деформации*”. Заметим, что относительное удлинение, определяемое формулой (2.2.30), не является ни аддитивным, ни мультипликативно симметричным. Обзор различных мер деформации, используемых в теории упругости, см. в [25, 88]³.

2.4 Бесконечно малое вращение

В этом параграфе мы хотим дать физическую интерпретацию величины ω_{ij} , определяемой выражением (2.2.50). Рассмотрим точку P и находящуюся в ее окрестности точку Q (см. рис. 1) в состоянии κ_0 . В состоянии κ эти точки перемещаются в точки \bar{P} и \bar{Q} соответственно. Положим, что вектор перемещения точки P задается выражением

$$\mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{u}(P), \quad (1)$$

³ Тензоры деформаций Лагранжа–Грина и Эйлера–Альманси — отнюдь не единственные применяемые тензорные меры деформаций. Есть еще *правый тензор Коши–Грина*, *тензор Фингера* (левый тензор Коши–Грина), *тензор деформаций Рейнера*, *тензор деформаций Кильчевского* и др. При геометрической интерпретации (подобной выражениям (2.2.31) и (2.2.39)) использование разных мер деформаций приводит к различным результатам.

или

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i . \quad (2)$$

Вектор перемещения точки Q имеет вид

$$\mathbf{u}(Q) = \mathbf{u}(P) + d\mathbf{u} . \quad (3)$$

В общем случае величины du_i задаются следующим образом:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j , \quad (4)$$

и из выражения (4) получаем

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] dX_j . \quad (5)$$

Вводя *тензор вращения* $\boldsymbol{\omega}$ с компонентами ω_{ij} , задаваемыми по формулам (2.2.50), имеем

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) , \quad (6)$$

и соотношение (5) принимает вид

$$du_i = [E_{ij} + \omega_{ij}] dX_j , \quad (7)$$

где $[E_{ij}]$ является линейным тензором деформаций. Отметим, что тензор $\boldsymbol{\omega}$ кососимметричен, т. е. $\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^T$. Покажем, что часть вектора перемещения

$$d\hat{\mathbf{u}} = \omega_{ij} dX_j \mathbf{e}_i \quad (8)$$

соответствует бесконечно малому вращению твердого тела⁴ в окрестности точки P. Рассмотрим часть тела в координатной плоскости \bar{x}_1, \bar{x}_2 (рис. 4).

Если окрестность точки P делает бесконечно малый поворот на угол w_3 “как твердое тело”, то можно записать, что

$$w_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial X_2} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1} , \quad (9)$$

⁴ Одним из способов проверки этого является следующий. Заметим, что для фиксированной точки P компоненты ω_{ij} постоянны. Тогда (8) можно проинтегрировать и получить $\hat{\mathbf{u}} = \omega_{ij} X_j \mathbf{e}_i$. Вычислим бесконечно малый тензор деформаций \mathbf{E}^ω для поля перемещений $\hat{\mathbf{u}}$. Результатом будет выражение $E_{ij}^\omega = \frac{1}{2} [(\partial u_i^\omega / \partial X_j) + (\partial u_j^\omega / \partial X_i)] = 0$. Отсюда следует, что $\hat{\mathbf{u}}$ соответствует перемещению “как твердого тела” окрестности точки P относительно точки P. Важно подчеркнуть, что тензор деформаций Лагранжа–Грина, задаваемый формулами (2.2.16), не равен нулю для поля перемещений $\hat{\mathbf{u}} = \omega_{ij} X_j \mathbf{e}_i$ (см. задачу 11 в конце этого параграфа).

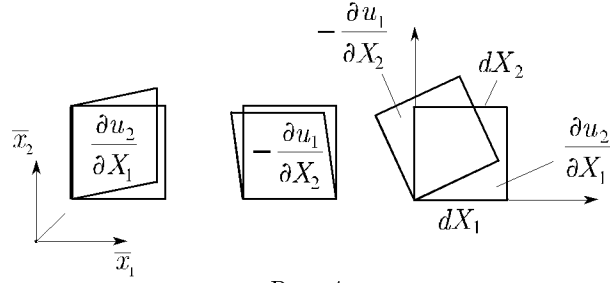


Рис. 4

или

$$-w_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) = \omega_{12}. \quad (10)$$

Это означает, что один из компонентов тензора ω связан с углом поворота окрестности как твердого тела. Можно связать и другие компоненты тензора ω с углами поворота вокруг координатных осей; следовательно,

$$w_1 = -\omega_{23}, \quad w_2 = \omega_{13}, \quad w_3 = -\omega_{12}. \quad (11)$$

Так как тензор ω кососимметричен (см. соотношения (6)), а именно

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad (12)$$

то его матричное представление в системе координат \bar{x}_i таково:

$$\omega = [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Пусть \mathbf{w} — вектор бесконечно малого поворота, другими словами, сопутствующий вектор кососимметричного тензора ω :

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3. \quad (14)$$

Компонентами вектора \mathbf{w} являются величины

$$w_1 = -\omega_{23}, \quad w_2 = \omega_{13}, \quad w_3 = -\omega_{12}. \quad (15)$$

Теперь уравнение (8) можно записать в виде

$$d\dot{\mathbf{u}} = \omega d\mathbf{X} = \mathbf{w} \times d\mathbf{X}. \quad (16)$$

Выражение (16) вновь показывает, что второе слагаемое в формуле (7), а именно $d\dot{\mathbf{u}}$, задаваемое выражением (8), представляет собой перемещение окрестности точки P как “перемещение твердого тела”, так как левая часть формулы (16) — это хорошо известная формула

Эйлера для бесконечно малого поворота твердого тела. Заметим, что соотношение (6) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) \mathbf{e}_3 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя выражения (16) и (7) в равенство (3), получаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{Q}) = \mathbf{u}(\mathbf{P}) + \mathbf{E} d\mathbf{X} + \mathbf{w} \times d\mathbf{X}. \quad (18)$$

Уравнение (18) есть математическое выражение **теоремы Гельмгольца**: *перемещение точки Q, находящейся в окрестности точки P, состоит из трех частей: поступательного перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{P})$, чистой деформации $\mathbf{E} d\mathbf{X}$ и поворота как твердого тела $\mathbf{w} \times d\mathbf{X}$.*

2.5 Главные направления тензора деформаций

Так как \mathbf{E} — симметричный тензор второго ранга, то к нему применимы рассуждения, изложенные в параграфе 1.6. Отсюда делаем вывод о существовании трех взаимно ортогональных направлений, в которых тензор деформаций имеет только диагональные элементы. Эти направления называются *главными направлениями тензора деформаций*. Соответствующие диагональные элементы называются *главными деформациями*. Следовательно, в системе координат, оси которой направлены вдоль главных направлений, тензор деформаций имеет вид

$$\mathbf{E} = [E_{ij}] = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Главные деформации e_i , $i = 1, 2, 3$, определяются из уравнения

$$-e^3 + \bar{I}_1 e^2 - \bar{I}_2 e + \bar{I}_3 = 0, \quad (2)$$

где параметры \bar{I}_i , $i = 1, 2, 3$, задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= E_{11} + E_{22} + E_{33}, \\ \bar{I}_2 &= \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix}, \\ \bar{I}_3 &= \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Главные деформации удовлетворяют равенству

$$(e - e_1)(e - e_2)(e - e_3) = 0, \quad (4)$$

следовательно, из уравнений (2) и (4) можно получить *инварианты тензора деформаций*

$$\bar{I}_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad \bar{I}_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_1 e_3, \quad \bar{I}_3 = e_1 e_2 e_3. \quad (5)$$

Отметим, что величины e_i , $i = 1, 2, 3$, — вещественные числа, так как \mathbf{E} является симметричным тензором. Главные деформации e_i могут равняться нулю (если $ds = dS$) или быть положительными либо отрицательными (в зависимости от того, $ds > dS$ или $ds < dS$).

Главные направления \mathbf{n} , \mathbf{m} и \mathbf{k} определяются из системы уравнений, которая для \mathbf{n} записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (E_{11} - e_1)n_1 + E_{12}n_2 + E_{13}n_3 &= 0, \\ E_{21}n_1 + (E_{22} - e_1)n_2 + E_{23}n_3 &= 0, \\ E_{31}n_1 + E_{32}n_2 + (E_{33} - e_1)n_3 &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Главные значения тензора \mathbf{E} , а именно e_i , $i = 1, 2, 3$, являются экстремальными значениями относительного удлинения в данной точке.

2.6 Тензор деформаций в цилиндрической и сферической системах координат

Декартовы координаты произвольной точки выражаются через цилиндрические координаты r, θ, z с помощью формул (см. рис. 1.10)

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta; \quad x_3 = z. \quad (1)$$

Вектор перемещения \mathbf{u} может быть записан в виде

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

где u_r, u_θ, u_z являются функциями от r, θ, z . Поскольку $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$, имеем

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{u}. \quad (3)$$

В силу того, что $\mathbf{R} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$, можем записать⁵

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{R} &= dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z, \\
 d\mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \\
 &= \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + u_r \mathbf{e}_\theta \right) d\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} dz \mathbf{e}_r \\
 &\quad + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + u_\theta (-\mathbf{e}_r) \right) d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + \frac{\partial u_z}{\partial r} dr \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} d\theta \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Так как $(dS)^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}$ и $(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, то, используя формулы (3), получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}((ds)^2 - (dS)^2) &= d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{u} + \frac{1}{2} d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \\
 &= \bar{E}_{rr}(dr)^2 + \bar{E}_{\theta\theta}(r d\theta)^2 + \bar{E}_{zz}(dz)^2 \\
 &\quad + 2\bar{E}_{r\theta}r d\theta dr + 2\bar{E}_{\theta z}r d\theta dz + 2\bar{E}_{zr} dz dr. \tag{5}
 \end{aligned}$$

В выражении (5) величины $\bar{E}_{rr}, \dots, \bar{E}_{zr}$ безразмерны; это означает, что они представляют собой *физические компоненты тензора деформаций*. Из формул (4) следует, что

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right], \\
 \bar{E}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 \right], \\
 \bar{E}_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 \bar{E}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right],
 \end{aligned} \tag{6}$$

⁵ Из уравнений $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$, можно получить производные от \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_z по r , θ и z , которые нужны в выражениях (4).

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right], \\ \bar{E}_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

В сферической системе координат ρ , θ , φ имеет место следующая связь с декартовыми координатами (рис. 5):

$$x_1 = \rho \sin \varphi \cos \theta; \quad x_2 = \rho \sin \varphi \sin \theta; \quad x_3 = \rho \cos \varphi. \quad (7)$$

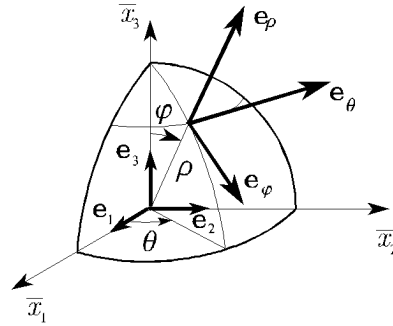


Рис. 5

Единичные векторы \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_θ и их производные можно выразить так же, как в формулах (1.5.8). Тогда $\mathbf{R} = \rho \mathbf{e}_\rho$ и, следовательно, можем записать

$$d\mathbf{R} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + \rho \sin \varphi d\theta \mathbf{e}_\theta, \quad d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} d\theta, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{u} = u_\rho \mathbf{e}_\rho + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (9)$$

Из определения

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} [(ds)^2 - (dS)^2] &= d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \\ &= \bar{E}_{\rho\rho} (d\rho)^2 + \bar{E}_{\varphi\varphi} (\rho d\varphi)^2 + \bar{E}_{\theta\theta} (\rho \sin \varphi d\theta)^2 \\ &+ 2\bar{E}_{\rho\varphi} \rho d\rho d\varphi + 2\bar{E}_{\varphi\theta} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta + 2\bar{E}_{\theta\rho} \rho \sin \varphi d\theta d\rho, \quad (10)\end{aligned}$$

с помощью подстановки формул (8) и (9) в выражение (10) получим

компоненты тензора деформаций

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\rho\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \right)^2 \right], \\
\bar{E}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \\
\bar{E}_{\theta\theta} &= \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_\varphi}{\rho} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho} \sin \varphi \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho} \cos \varphi \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho} \sin \varphi + \frac{u_\varphi}{\rho} \cos \varphi \right)^2 \right], \\
\bar{E}_{\rho\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right], \\
\bar{E}_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{u_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2 \sin \varphi} \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{u_\theta}{\rho} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{u_\theta}{\rho} \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{u_\rho}{\rho} + \cos \varphi \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \right], \\
\bar{E}_{\theta\rho} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho} \right) + \frac{1}{2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho} \sin \varphi \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{u_\theta}{\rho} \right) \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial u_\theta}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho} \sin \varphi + \cos \varphi \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Выражения (6) и (11) значительно упрощаются, если пренебречь нелинейными членами в компонентах векторов перемещения и их производных (члены в квадратных скобках в (6) и (11)). В этом случае мы получаем компоненты *линейного тензора деформаций в цилиндрической и сферической системах координат*. Как и ранее, обозначаем эти компоненты $E_{rr}, \dots, E_{zr}; E_{\rho\rho}, \dots, E_{\theta\rho}$.

2.7 Условия совместности линейного и нелинейного тензоров деформаций

Компоненты малого тензора деформаций определяются из выражений (2.2.49). Имеем

$$E_{kj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} \right), \quad (1)$$

и в силу симметрии в общем случае существует шесть независимых значений E_{ij} . Если вектор смещения \mathbf{u} задан (т. е. u_i — известные непрерывно дифференцируемые функции от X_j), то можно единственным образом определить \mathbf{E} при помощи равенства (1). Если, однако, тензор \mathbf{E} известен, то имеется шесть уравнений в частных производных (1), которые определяют *три компоненты* u_i вектора перемещения \mathbf{u} . Очевидно, что компоненты тензора \mathbf{E} не являются независимыми и должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям, называемым *условиями совместности*, которые обеспечивают единственность вектора \mathbf{u} . Чтобы определить условия совместности, детально рассмотрим задачу определения вектора перемещения \mathbf{u} из тензора деформаций \mathbf{E} . Так как мы изучаем *непрерывную упругость*, то полагаем, что тело в процессе деформации не разрушается (не образуются трещин, дыр и т. п.); иными словами, оно остается сплошным. Тогда компоненты вектора перемещения \mathbf{u} , а именно функции $u_i = u_i(X_j)$, должны быть *однозначными функциями* от X_j . Это означает, что можно переформулировать наш вопрос таким образом: какие ограничения должны быть наложены на компоненты $E_{ij}(X_k)$, чтобы обеспечить существование единственного непрерывного решения u_i из формулы (1)? Допустим, что нам дана точка P в односвязном теле⁶. Допустим также, что вектор перемещения точки P есть \mathbf{u}^P и задан в виде $\mathbf{u}^P = u_i^P \mathbf{e}_i$. Нужно определить вектор перемещения произвольной точки Q (рис. 6).

Интегрируя выражение (2.4.7), имеем

$$u_i^Q = u_i^P + \int_P^Q [E_{ij} + \omega_{ij}] dX_j. \quad (2)$$

Интегрирование по частям второго слагаемого под знаком интеграла

⁶ Тело называется односвязным, если в области κ , занимаемой телом, каждая замкнутая кривая, находящаяся внутри κ (т. е. внутри тела), может быть стянута в точку непрерывной деформацией и в ходе этого процесса кривая не покидает области κ .

приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_P^Q \omega_{ij} dX_j &= \int_P^Q \omega_{ij} d(X_j - X_j^Q) \\ &= \omega_{ij}(X_j - X_j^Q) \Big|_P^Q + \int_P^Q (X_j^Q - X_j) \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_m} dX_m, \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$\int_P^Q \omega_{ij} dX_j = \omega_{ij}^P (X_j^Q - X_j^P) + \int_P^Q (X_j^Q - X_j) \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_m} dX_m, \quad (4)$$

так что выражение (2) принимает вид

$$u_i^Q = u_i^P + \omega_{ij}^P (X_j^Q - X_j^P) + \int_P^Q (X_j^Q - X_j) \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_m} dX_m. \quad (5)$$

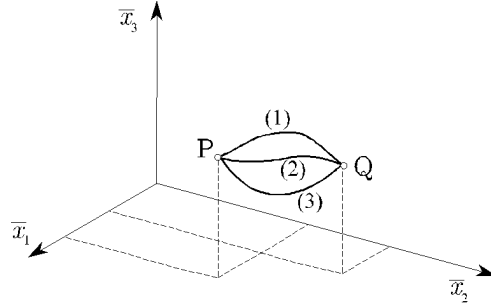


Рис. 6

Теперь выразим $\partial \omega_{ij} / \partial X_m$ через производные от компонент E_{ij} .
Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_m} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_m} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_m} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_m} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X_j} \left(E_{im} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right) - \frac{\partial}{\partial X_i} \left(E_{jm} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial E_{im}}{\partial X_j} - \frac{\partial E_{jm}}{\partial X_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя соотношения (6) в формулы (5), имеем

$$u_i^Q = u_i^P + \omega_{ij}^P (X_j^Q - X_j^P) + \int_P^Q \left[E_{im} + (X_j^Q - X_j) \left(\frac{\partial E_{im}}{\partial X_j} - \frac{\partial E_{jm}}{\partial X_i} \right) \right] dX_m. \quad (7)$$

Значения u_i^Q не должны зависеть от пути интегрирования (они должны быть одинаковыми для путей (1), (2) и (3), показанных на рис. 6). Первые два слагаемых в правой части равенства (7) зависят только от координат точек P и Q и, следовательно, не зависят от пути интегрирования. Интеграл в формуле (7) не зависит от пути, если (теорема Стокса) функция под знаком интеграла удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \Lambda_{im}}{\partial X_l} = \frac{\partial \Lambda_{il}}{\partial X_m}, \quad (8)$$

где

$$\Lambda_{im} = E_{im} - X_j \left(\frac{\partial E_{im}}{\partial X_j} - \frac{\partial E_{jm}}{\partial X_i} \right). \quad (9)$$

Используя тот факт, что

$$\frac{\partial X_j}{\partial X_l} = \delta_{jl}, \quad (10)$$

из выражений (9) получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_{im,l} &= E_{im,l} - \delta_{jl}(E_{im,j} - E_{jm,i}) - X_j(E_{im,jl} - E_{jm,il}), \\ \Lambda_{il,m} &= E_{il,m} - \delta_{jm}(E_{il,j} - E_{jl,i}) - X_j(E_{il,jm} - E_{jl,im}), \end{aligned} \quad (11)$$

где, как и ранее, $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial X_i$. Подставляя равенства (11) в формулы (8), видим, что

$$\begin{aligned} E_{im,l} - (E_{im,l} - E_{lm,i}) - X_j(E_{im,jl} - E_{jm,il}) \\ = E_{il,m} - (E_{il,m} - E_{ml,i}) - X_j(E_{il,jm} - E_{jl,im}). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как все X_m независимы, из выражений (12) получаем

$$E_{im,jl} + E_{jl,im} - E_{il,jm} - E_{jm,il} = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (13) известна как *уравнения совместности*. Она определяет необходимые и достаточные условия существования однозначного поля перемещений. Всего имеется 81 уравнение (13). Однако число независимых уравнений, вытекающих из (13), много меньше. Заметим, что в уравнениях (13) изменятся знаки, если переставить местами индексы i, j и m, l . Отсюда следует, что уравнения (13) превращаются в тождества при $i = j$ и $m = l$. Отметим также, что система уравнений (13) не изменяется при перестановке следующих индексов: 1) i, m и j, l ; 2) i, l и j, m ; 3) i, j и m, l . Следовательно, в системе (13) существует *только шесть* уравнений, которые не повторяются и не тождественны нулю. Эти уравнения получены для $(imjl) = (1212); (2323); (3131); (1213); (2321); (3132)$. Таким образом, система уравне-

ний (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
E_{11,22} + E_{22,11} - 2E_{12,12} &= 0, \\
E_{22,33} + E_{33,22} - 2E_{23,23} &= 0, \\
E_{33,11} + E_{11,33} - 2E_{31,31} &= 0, \\
E_{11,23} + E_{23,11} - E_{31,12} - E_{12,13} &= 0, \\
E_{22,31} + E_{31,22} - E_{12,23} - E_{23,21} &= 0, \\
E_{33,12} + E_{12,33} - E_{23,31} - E_{31,32} &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Соотношения (5) называются *интегралами Чезаро* для перемещения. В них член вне интеграла определяет бесконечно малое “*перемещение твердого тела*”. Другими словами, когда заданы компоненты E_{ij} , вектор перемещения определяется с точностью до бесконечно малого перемещения твердого тела.

Можно поставить следующий вопрос: каковы условия совместности для (конечного) тензора деформаций Лагранжа–Грина $\bar{\mathbf{E}}$? Другими словами, какие условия обеспечивают существование однозначного решения u_i системы нелинейных уравнений в частных производных

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) = \bar{E}_{ij}, \tag{15}$$

когда правая часть содержит известные функции координат? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем условие, гарантирующее интегрируемость (15). Мы начнем с замечания, что существование однозначного векторного поля перемещений \mathbf{u} эквивалентно существованию функций $x_i(X_j)$, $i = 1, 2, 3$ (см. (2.1.2)) и их обращений (2.1.3). Функции $x_i(X_j)$ порождают метрический тензор в деформированном состоянии κ , который обозначим $[g_{ij}]$ (см. (2.2.7) и (2.2.11)). В недеформированном состоянии κ_0 метрическим тензором является $[\delta_{ij}]$ (символ Кронекера), соответствующий евклидову пространству. В евклидовом пространстве *тензор кривизны* равен нулю. Следовательно, если в нем существуют функции $x_i(X_j) = X_i + u_i$ со свойствами, указанными в параграфе 2.2, то тензор кривизны в деформированном состоянии κ должен также быть нулевым, так как в состоянии κ тело опять занимает часть евклидова пространства. Хорошо известная теорема Римана утверждает, что симметричный тензор $[g_{ij}]$ является метрическим тензором для евклидова пространства тогда и только тогда, когда он не сингулярен ($\det[g_{ij}] \neq 0$), положительно определен ($g_{ij}a_i a_j > 0$ для всех $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$), а тензор Римана–Кристоффеля, образованный из него, тождественно равен нулю. В нашем случае (см. (2.2.14)) компоненты метрического тензора таковы:

$$g_{ij} = \left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right). \tag{16}$$

Условием того, что тензор Римана–Кристоффеля $[R_{krij}]$ обращается в нуль, является равенство⁷

$$R_{krij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X_i \partial X_r} + \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial X_k \partial X_r} - \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial X_j \partial X_i} \right) = g^{qs} (\Lambda_{ir,q} \Lambda_{jk,s} - \Lambda_{ij,q} \Lambda_{kr,s}) = 0. \quad (17)$$

В выражении (17) мы использовали $\Lambda_{ms,p}$ для обозначения символов Кристоффеля первого рода, зависящих от метрического тензора $[g_{ij}]$ следующим образом:

$$\Lambda_{ms,p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial X_s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial X_m} - \frac{\partial g_{ms}}{\partial X_p} \right). \quad (18)$$

Метрический тензор взаимного базиса обозначим как $[g^{qs}]$ ⁸. Заметим, что запятая в $\Lambda_{ms,p}$ не обозначает дифференцирования, а служит для разделения индексов m и s , относительно которых $\Lambda_{ms,p}$ симметричен ($\Lambda_{ms,p} = \Lambda_{sm,p}$), и индекса p . Подставляя выражения (16) в формулы (17) и (18), можно получить условия совместности через производные вектора перемещения. Можно также показать, что соотношения (17) сводятся к системе (13), если пренебречь членами выше первого порядка $(\partial u_i / \partial x_j)$.

Отметим, что в теории дислокаций интеграл от вектора перемещения по замкнутой кривой (см. рис. 6) не равен нулю:

$$\left(\int_P^Q du_i \right)_1 + \left(\int_Q^P du_i \right)_3 = b_i. \quad (19)$$

В выражении (19) мы используем $(\int_P^Q du_i)_t$ для обозначения интеграла от точки P до точки Q вдоль пути $t = 1, 3$. Вектор $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ называется вектором Бюргерса (см., например, [9]). Условие (19) приводит к такой форме уравнений совместности, в которой правая часть уравнений (13) не равна нулю. Такие задачи мы не рассматриваем.

⁷ В тензорном анализе показано, что обращение в нуль тензора Римана–Кристоффеля обеспечивает коммутативность ковариантных производных второго порядка. Например, если v_k — ковариантный вектор, то его ковариантная производная имеет вид $v_{k;p} = \partial v_k / \partial X_p + v_m \Lambda_{kp}^m$, где символы Кристоффеля второго рода задаются по определению как $\Lambda_{ik}^j = g^{jm} \Lambda_{ik,m}$. Условие $R_{rkij} = 0$ означает, что $(v_{k;r})_{;l} = (v_{k;l})_{;r}$.

⁸ Метрический тензор взаимного базиса определяется из условия

$$g_{ki} g^{im} = \delta_k^m \begin{cases} 1, & \text{если } m = k; \\ 0, & \text{если } m \neq k. \end{cases}$$

2.8 Плоская деформация

Как особый случай общей деформации рассмотрим случай плоской деформации. Она определяется так: *тело претерпевает плоскую деформацию, если вектор перемещения любой точки параллелен фиксированной плоскости, называемой плоскостью деформации, и не зависит от расстояния от этой точки до плоскости деформации.*

Допустим, что вектор деформаций в каждой точке тела параллелен плоскости координат \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Тогда из определения плоской деформации следует, что

$$u_1 = u_1(X_1, X_2), \quad u_2 = u_2(X_1, X_2), \quad u_3 = 0. \quad (1)$$

Из выражений (1) заключаем, что тензор деформаций в случае плоской деформации имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где компоненты E_{ij} задаются в виде

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}, \quad E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right). \quad (3)$$

Пример *длинного тела* (стержня), нагруженного вдоль своей продольной оси, показан на рис. 7.

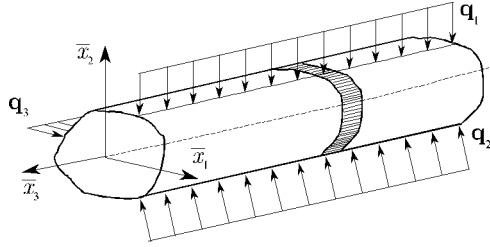


Рис. 7

Если нагрузка не зависит от осевой координаты X_3 , а концы тела жестко заделаны, то достаточно далеко от концов имеет место плоская деформация. Линейный элемент, определяемый единичным вектором \mathbf{n} , имеет относительное удлинение (см. (2.3.5)) $e_n = E_{ij} n_i n_j$. Единичный вектор \mathbf{n} можно выразить через угол φ (рис. 8):

$$\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (4)$$

откуда следует, что относительное удлинение таково:

$$e_n = E_{11} \cos^2 \varphi + E_{22} \sin^2 \varphi + E_{12} \sin 2\varphi. \quad (5)$$

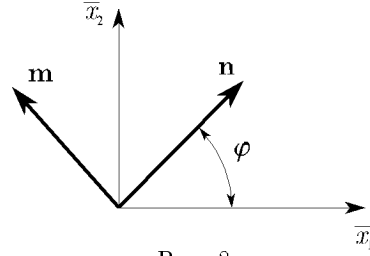


Рис. 8

Аналогично, угол сдвига для направлений \mathbf{n} и \mathbf{m} , где

$$\mathbf{m} = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \quad (6)$$

получаем из выражения (2.3.17) в виде

$$\frac{1}{2} \gamma_{nm} = -\frac{1}{2} (E_{11} - E_{22}) \sin 2\varphi + E_{12} \cos 2\varphi. \quad (7)$$

Уравнение (5) можно записать следующим образом:

$$e_n = \frac{1}{2} (E_{11} + E_{22}) + \frac{1}{2} (E_{11} - E_{22}) \cos 2\varphi + E_{12} \sin 2\varphi. \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) имеют тот же вид, как и (1.14.4) для случая плоского напряженного состояния. Следовательно, на основе (7) и (8) можно получить круг Мора для плоской деформации.

В главных осях тензор деформаций записывается так:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где e_1 , e_2 и $e_3 = 0$ — главные деформации. Если справедливо выражение (9), то соотношения (7), (8) принимают вид

$$e_n = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) + \frac{1}{2} (e_1 - e_2) \cos 2\varphi, \quad \frac{1}{2} \gamma_{nm} = -\frac{1}{2} (e_1 - e_2) \sin 2\varphi. \quad (10)$$

В заключение из выражений (2) и (2.7.13) получим весьма простое условие совместности для случая плоской деформации:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = 0. \quad (11)$$

2.9 Линейный тензор деформаций. Объемное расширение

Как показано выше, линейный тензор деформаций получается, если пренебречь квадратичными членами в градиенте вектора перемещения. Тогда

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (1)$$

Так как

$$x_i = X_i + u_i, \quad (2)$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot) \frac{\partial x_j}{\partial X_i} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot). \quad (3)$$

Когда членами второго порядка в $\partial u_i / \partial X_j$ можно пренебречь, а также если u_i малы (по сравнению с размерами тела), то из формулы (3) заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot); \quad X_i = x_i. \quad (4)$$

Уравнение (4) остается в силе, если величина (\cdot) порядка $\partial u_i / \partial X_j$. В этом случае нет разницы между представлениями Лагранжа и Эйлера. Следовательно, тогда, когда членами второго порядка в $\partial u_i / \partial X_j$ можно пренебречь, тензоры деформаций Лагранжа–Грина и Эйлера–Альманси совпадают:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\bar{\mathbf{E}}} = \mathbf{E}. \quad (5)$$

Первый инвариант тензора деформаций \mathbf{E} имеет важное свойство, а именно он связан с *объемным расширением*. Чтобы показать это, рассмотрим элемент тела в недеформированном состоянии (рис. 9).

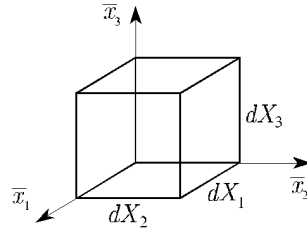


Рис. 9

Объем параллелепипеда на рис. 9

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3. \quad (6)$$

Определим объем того же элемента в деформированном состоянии κ . В нем параллелепипед остается параллелепипедом, но его грани не ортогональны. В состоянии κ грани таковы: $(\partial \mathbf{r} / \partial X_1) dX_1$, $(\partial \mathbf{r} / \partial X_2) dX_2$, $(\partial \mathbf{r} / \partial X_3) dX_3$, а значит объем dv равен смешанному произведению

$$dv = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} dX_1 \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} dX_2 \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} dX_3 \right). \quad (7)$$

Используя тождество

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}] [\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}] = \det \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{c} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

и применяя его к равенству (7), получаем

$$(dv)^2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} \right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} \right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_1} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_2} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_3} \right) \end{vmatrix} (dX_1 dX_2 dX_3)^2 \quad (9)$$

Сравнивая выражения (9) и (2.2.7), делаем вывод, что элементы определителя являются компонентами метрического тензора $[g_{ij}]$. Откуда, используя (2.2.11), имеем

$$dv = \sqrt{g} dX_1 dX_2 dX_3 = \sqrt{g} dV, \quad (10)$$

где

$$g = \begin{vmatrix} 1 + 2\bar{E}_{11} & 2\bar{E}_{12} & 2\bar{E}_{13} \\ 2\bar{E}_{12} & 1 + 2\bar{E}_{22} & 2\bar{E}_{23} \\ 2\bar{E}_{13} & 2\bar{E}_{23} & 1 + 2\bar{E}_{33} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Раскрыв определитель (11), получаем

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{1 + 2\bar{I}_1 + 4\bar{I}_2 + 8\bar{I}_3}, \quad (12)$$

где \bar{I}_i , $i = 1, 2, 3$, — инварианты тензора деформаций Лагранжа-Грина. Затем определим *объемное расширение* e_v как

$$e_v = \frac{dv - dV}{dV}, \quad (13)$$

следовательно,

$$e_v = \sqrt{1 + 2\bar{I}_1 + 4\bar{I}_2 + 8\bar{I}_3} - 1. \quad (14)$$

Для случая малого градиента вектора перемещения ($|\partial u_i / \partial X_j| \ll 1$) из равенства (14) следует, что

$$\epsilon_v = E_{11} + E_{22} + E_{33}, \quad (15)$$

т. е. *объемное расширение равно первому инварианту линейного тензора деформаций \mathbf{E}* .

При анализе деформации упругих тел в случае, когда одно измерение много больше двух других (стержни), бывает, что большие векторы перемещения приводят к малой деформации. Тогда $\bar{E}_{ij} \ll \omega_{ij}$ (см. разложение (2.2.51)) и, используя (2.2.51), имеем

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{ki} \omega_{kj}. \quad (16)$$

Из формулы (16) при учете (2.4.13) получаем

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &\approx E_{11} + \frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2), & \bar{E}_{12} &\approx E_{12} - \frac{1}{2}w_1 w_2, \\ \bar{E}_{22} &\approx E_{22} + \frac{1}{2}(w_3^2 + w_1^2), & \bar{E}_{23} &\approx E_{23} - \frac{1}{2}w_2 w_3, \\ \bar{E}_{33} &\approx E_{33} + \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2), & \bar{E}_{13} &\approx E_{13} - \frac{1}{2}w_1 w_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Тензор деформаций (17) используется в теориях стержней и пластин.

2.10 Измерение деформаций. Датчики деформаций

Часто бывает важно измерить деформации и напряжения в данной точке упругого тела. Множество методов, которые используются для этой цели, составляют предмет *экспериментального анализа деформаций*. Основными средствами являются: хрупкие лаки, датчики деформаций, фотоупругость, фотоупругие покрытия, методы распространения волн (акустоупругость), техника решетки (метод Мора), рентгеновские методы и т. д. Мы рассмотрим измерение деформаций с помощью датчиков деформаций.

Датчик деформаций (по электрическому сопротивлению) — это просто отрезок провода, которому придали форму, показанную на рис. 10, и прикрепили к непроводящей подкладке. Затем датчик наклеивается на поверхность там, где нужно измерить деформацию. Удлинение провода вызывает изменение электрического сопротивления, и это используется для оценки деформации.

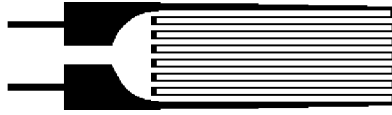


Рис. 10

Чтобы определить главные деформации и ориентацию главных осей (см. (2.8.9)), можно использовать розетку датчиков деформаций (на рис. 11 изображена равноугольная розетка).

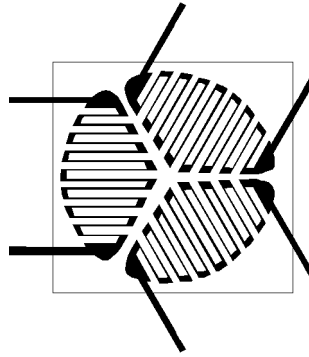


Рис. 11

Она состоит из трех датчиков, измеряющих деформации в трех направлениях. Из показаний розетки датчиков деформаций мы получаем значения деформации в трех направлениях в данной точке поверхности упругого тела. Размеры розетки малы, и резонно положить, что все три датчика расположены в одной точке тела. Выбор подходящего датчика требует учета многих факторов (размера и формы тела, сопротивления и чувствительности материала, температуры, предельных деформаций и т. д.).

Допустим, что розетка датчиков деформаций произвольно ориентирована по отношению к главным направлениям тензора деформаций в данной точке. Пусть ψ обозначает неизвестный угол между выбранным датчиком, скажем “0”, и осью \bar{x}_1 главной системы координат \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Пусть α — угол между датчиком “0” и двумя другими датчиками, которые мы обозначаем “ $+\alpha$ ” и “ $-\alpha$ ” (рис. 12).

Обозначим $\varepsilon_{-\alpha}$, ε_0 и $\varepsilon_{+\alpha}$ показания датчиков “ $-\alpha$ ”, “0” и “ $+\alpha$ ”

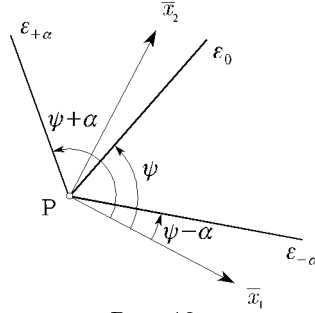


Рис. 12

соответственно. Тогда из выражений (2.8.10) имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{-\alpha} &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \cos(2\psi - 2\alpha), \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \cos 2\psi, \\ \varepsilon_{+\alpha} &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \cos(2\psi + 2\alpha),\end{aligned}\quad (1)$$

где e_1 и e_2 — неизвестные главные деформации.

Система уравнений (1) должна быть решена относительно e_1 , e_2 и ψ . Введем следующую систему обозначений:

$$A = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \quad B = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \cos 2\psi, \quad C = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \sin 2\psi. \quad (2)$$

Применив их в системе уравнений (1), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{-\alpha} &= A + B \cos 2\alpha + C \sin 2\alpha, \\ \varepsilon_0 &= A + B, \\ \varepsilon_{+\alpha} &= A + B \cos 2\alpha - C \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (3)$$

Из выражений (3) следует, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha} &= 2C \sin 2\alpha, \\ 2\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha} &= 2B(1 - \cos 2\alpha),\end{aligned}\quad (4)$$

или

$$\frac{\varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha}}{2\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha}} = \frac{C \sin 2\alpha}{B(1 - \cos 2\alpha)}. \quad (5)$$

Однако из формул (2) мы видим, что

$$\frac{C}{B} = \operatorname{tg} 2\psi. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в равенство (5), получаем

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{(1 - \cos 2\alpha)(\varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha})}{\sin 2\alpha(2\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha})}. \quad (7)$$

Соотношение (7) определяет ориентацию главных осей.

Главные значения тензора деформаций найдем следующим образом. Складывая и вычитая выражения (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e_1 + e_2) &= A = \varepsilon_0 - B \\ &= \varepsilon_0 - \frac{2\varepsilon_0 - \varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha}}{2(1 - \cos 2\alpha)} = \frac{\varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{+\alpha} - 2\varepsilon_0 \cos 2\alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)} \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\frac{1}{2}(e_1 - e_2) = \frac{C}{\sin 2\psi} = \frac{\varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha}}{2 \sin 2\alpha \sin 2\psi}. \quad (9)$$

Наконец, объединяя (8) и (9), получаем

$$e_{1,2} = \frac{\varepsilon_{-\alpha} + \varepsilon_{+\alpha} - 2\varepsilon_0 \cos 2\alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)} \pm \frac{\varepsilon_{-\alpha} - \varepsilon_{+\alpha}}{2 \sin 2\alpha \sin 2\psi}. \quad (10)$$

Так как ψ определяется из равенства (7), значения e_1 и e_2 следуют из формулы (10).

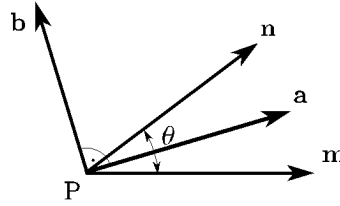


Рис. 13

Нетрудно увидеть, что угол сдвига нельзя измерить непосредственно розеткой датчиков деформаций. Рассмотрим процедуру, которая делает возможным определение угла сдвига между двумя направлениями, заданными единичными векторами \mathbf{n} и \mathbf{m} (рис. 13). Допустим, что известен угол $\theta = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{m})$. Допустим также, что единичные векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} заданы так, что \mathbf{a} делит пополам угол θ , а \mathbf{b} ортогонален \mathbf{a} . Тогда можем записать

$$2\mathbf{a} \cos(\theta/2) = \mathbf{m} + \mathbf{n}, \quad 2\mathbf{b} \sin(\theta/2) = \mathbf{m} - \mathbf{n}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (11)$$

Из выражений (11) следует, что

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} \cos(\theta/2) - \mathbf{b} \sin(\theta/2), \quad \mathbf{n} = \mathbf{a} \cos(\theta/2) + \mathbf{b} \sin(\theta/2). \quad (12)$$

Подставляя равенства (12) в формулу (2.3.16), получаем

$$\gamma_{nm} \sin \theta = E_{ij}(a_i a_j - b_i b_j)(1 - \cos^2 \theta), \quad (13)$$

или

$$\gamma_{nm} = (e_a - e_b) \sin \theta. \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что, расположив два датчика деформаций вдоль единичных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и измерив e_a и e_b , можно определить значение γ_{mn} . Выражение (13) было получено в работе [49].

Сделаем замечание о точности измерений датчиками деформаций. Строго говоря, деформация e_T в точке тела, где помещается датчик деформаций, не равна деформации e_D , снимаемой с датчика, кроме случая, когда жесткость на растяжение датчика очень мала по сравнению с жесткостью на растяжение тела. Это важно знать тогда, когда датчики деформаций используются для измерения деформации в материалах с малой жесткостью на растяжение (таких как пластики). Используя довольно сложный анализ взаимной деформации (т. е. случай, когда деформация тела и деформация датчика влияют друг на друга), Александров и Мхитарян показали [3], что

$$k = \frac{e_T}{e_D} = \frac{4}{\pi d} \left(1 + \frac{d}{2} \right), \quad (15)$$

где d — постоянная, определяемая материалом и напряженным состоянием тела, а также размерами и материалом датчика.

Рассмотрим датчик деформаций длиной $2a$ и шириной b , расположенный на теле, модуль упругости и коэффициент Пуассона которого (см. параграф 3.4) равны соответственно E_2 и ν_2 . Тогда d задается в виде

$$d = \frac{aE_2}{2(1-\nu_2^2)} \frac{1}{E_D} \quad \text{или} \quad d = \frac{aE_2}{2} \frac{1}{E_D}. \quad (16)$$

Первое выражение в (16) соответствует плоской деформации, а второе — плоскому напряженному состоянию. Здесь мы использовали E_D , чтобы обозначить жесткость датчика (на расширение) на единицу его ширины. Пусть датчик длиной $2a$ и шириной b нагружен растягивающей силой Q . Положим также, что эта сила вызывает удлинение датчика, равное Δl . Тогда жесткость датчика составляет $E_D = Q(2a)/(b \Delta l)$. Постоянная k в некоторых случаях может достигать значений порядка 30. Если $d > 10$, то можно считать, что $k = 1$.

Задачи

1. Для вектора перемещения с компонентами

$$u_1 = kX_1, \quad u_2 = k(X_2 + 4X_3), \quad u_3 = k(4\sqrt{2}X_1 + 3X_3),$$

определить тензор деформаций, главные значения, главные направления и объемное расширение.

2. Рассмотреть следующие тензоры деформаций:

$$\text{а) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k(X_2^2 + X_3^2) & kX_2X_3 \\ 0 & kX_2X_3 & kX_3^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{б) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & kX_1(X_2^2 + X_3^2) & kX_1X_2X_3 \\ 0 & kX_1X_2X_3 & kX_1X_3^2 \end{bmatrix},$$

где $k = \text{const}$. Есть ли однозначное поле перемещений, которое можно определить из \mathbf{E} ?

3. Поле перемещений, соответствующее задаче изгиба пластин, задается в виде

$$u_1 = u_0(X_1, X_2) + X_3\psi(X_1, X_2),$$

$$u_2 = v_0(X_1, X_2) + X_3\varphi(X_1, X_2),$$

$$u_3 = w_0(X_1, X_2),$$

где $u_0, v_0, w_0, \psi, \varphi$ — непрерывно дифференцируемые функции. Определить компоненты тензора \mathbf{E} .

4. Получить выражения (2.10.7) и (2.10.10) для случая, когда углы между “0” и двумя другими датчиками не равны.

5. Показания розетки датчиков деформаций таковы:

$$\varepsilon_0 = 308 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_{+45} = -432 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_{-45} = 592 \cdot 10^{-6}.$$

Найти главные удлинения и ориентацию главных осей.

6. Компоненты тензора деформаций заданы следующим образом:

$$E_{11} = a(X_1^2 + X_2^2) + 2b(X_1^5 + X_2^5),$$

$$E_{22} = 4(X_1^2 + X_2^2) + 2b(X_1^5 + X_2^5),$$

$$E_{12} = 5X_1X_2(X_1^3 + X_2^3 + 1),$$

$$E_{33} = E_{13} = E_{23} = 0,$$

где a и b постоянные. Определить значения постоянных a и b , при которых выполняются условия совместности.

7. Вектор перемещения имеет следующие компоненты:

$$u_1 = kX_1^2, \quad u_2 = kX_2X_3, \quad u_3 = k(2X_1X_3 + X_1^2),$$

где $k = \text{const}$. Определить тензор деформаций Лагранжа-Грина $\bar{\mathbf{E}}$. В точке $T(1, 1, -1)$ найти относительное удлинение e_n для случая $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$. Вычислить компоненты линейного тензора деформаций \mathbf{E} и относительное удлинение согласно выражению (2.3.5) для того же направления \mathbf{n} .

8. Проверить условия совместности для следующих тензоров деформаций:

$$\begin{aligned} \text{а) } E_{11} &= 2X_1^2 + 3X_2^2 + X_3 + 1, \\ E_{22} &= 2X_2^2 + X_1^2 + 3X_3 + 2, \\ E_{33} &= 3X_1 + 2X_2 + X_3^2 + 1, \\ E_{12} &= 4X_1X_2, \quad E_{13} = E_{23} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } E_{11} &= kX_1(X_1^2 + X_3^2), \\ E_{12} &= 2kX_1X_2X_3, \\ E_{22} &= X_2^2X_3, \quad E_{13} = E_{23} = 0, \\ E_{33} &= kX_3^2, \end{aligned}$$

где $k = \text{const}$.

9. Исходя из выражения (2.2.21) и используя формулы (1.6.6), показать, что

$$X_m X_m = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = X_m^* X_m^* = (X_1^*)^2 + (X_2^*)^2 + (X_3^*)^2,$$

т. е. что длина вектора \mathbf{R} не меняется при преобразовании \mathbf{Q} .

10. Пластина $0 \leq X_1 \leq a$, $0 \leq X_2 \leq b$ зафиксирована вдоль сторон $X_1 = 0$, $X_2 = 0$. Две другие стороны свободны.

Если даны компоненты тензора деформаций

$$E_{11} = k(X_1^2X_2 + X_2^2), \quad E_{22} = kX_1X_2^2,$$

где $k = \text{const}$, найти компоненты u_1 и u_2 вектора перемещения.

11. В выражении (2.4.18) движение твердого тела соответствует случаю, когда $\mathbf{E} = 0$ $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \right)$.

Вектор перемещения точки Q относительно точки P задается в виде

$$\mathbf{u}(Q) = \mathbf{u}(P) + \mathbf{w} \times d\mathbf{X}. \quad (a)$$

Пусть расстояние между точками P и Q конечно (вместо $d\mathbf{X}$ положим $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$, где a_i конечны), следовательно, равенство (a) примет вид

$$\mathbf{u}(Q) = \mathbf{u}(P) + \mathbf{w} \times \mathbf{a}. \quad (б)$$

Показать, что тензор деформаций Лагранжа–Грина $\bar{\mathbf{E}}$, соответствующий выражению (б), не равен нулю и задается следующим образом:

$$[E_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1\omega_2 & -\omega_1\omega_3 \\ -\omega_1\omega_2 & \omega_1^2 + \omega_3^2 & -\omega_2\omega_3 \\ -\omega_1\omega_3 & -\omega_2\omega_3 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix},$$

а значит, формула (б) определяет поле перемещений как “поле перемещений твердого тела” только в том случае, когда \mathbf{w} настолько мало, что $|w_i w_j| \approx 0$.

12. Ортогональная матрица ($\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$), задаваемая выражением (1.6.11), соответствует вращению вокруг фиксированной оси. Показать, что:

- а) любая ортогональная матрица имеет собственные значения, равные $+1$ или -1 ;
- б) если $\det[c_{ij}] = \pm 1$, то собственные значения ортогональной матрицы либо все вещественные с кратностью 2 или 3, либо одно собственное значение вещественно, а другие — комплексно-сопряженные числа;
- в) главное направление, соответствующее вещественному собственному значению, называется *осью вращения*. Следовательно, единичный вектор \mathbf{d} , направленный вдоль оси вращения, удовлетворяет равенству $\mathbf{Q}\mathbf{d} = \mathbf{d}$;
- г) угол поворота ϕ вокруг оси вращения с единичным вектором \mathbf{d} с компонентами d_i определяется из выражений

$$\cos \phi = \frac{1}{2} [(c_{11} + c_{22} + c_{33}) - 1], \quad d_i = \frac{1}{2 \sin \phi} \epsilon_{ijk} c_{jk},$$

где ϵ_{ijk} — символ перестановок Леви–Чивита:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{для } i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; \\ -1, & \text{для } i, j, k = 1, 3, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3; \\ 0, & \text{для } i = j, i = k, j = k; \end{cases}$$

- д) если вектор \mathbf{d} и угол поворота ϕ известны, то элементы матрицы \mathbf{Q}

$$c_{ij} = \cos \phi \delta_{ij} - (1 + \cos \phi) d_i d_j - \sin \phi \epsilon_{ijk} d_k .$$

13. Исходя из выражений (2.6.4) и используя соотношение (2.4.7) в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} = & [E_{rr} dr + (E_{r\theta} + \omega_{r\theta})(r d\theta) + (E_{rz} + \omega_{rz}) dz] \mathbf{e}_r \\ & + [(E_{\theta r} + \omega_{\theta r}) dr + E_{\theta\theta}(r d\theta) + (E_{\theta z} + \omega_{\theta z}) dz] \mathbf{e}_\theta \quad (a) \\ & + [(E_{zr} + \omega_{zr}) dr + (E_{z\theta} + \omega_{z\theta})(r d\theta) + E_{zz} dz] \mathbf{e}_z , \end{aligned}$$

найти компоненты тензора бесконечно малого вращения в цилиндрической системе координат. Аналогично, начиная с выражений (2.6.8) и используя соотношение

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} = & [E_{\rho\rho} d\rho + (E_{\rho\theta} + \omega_{\rho\theta})(\rho \sin \varphi d\theta) + (E_{\rho\varphi} + \omega_{\rho\varphi})(\rho d\varphi)] \mathbf{e}_\rho \\ & + [(E_{\theta\rho} + \omega_{\theta\rho}) d\rho + E_{\theta\theta}(\rho \sin \varphi d\theta) + (E_{\theta\varphi} + \omega_{\theta\varphi})(\rho d\varphi)] \mathbf{e}_\theta \quad (б) \\ & + [(E_{\varphi\rho} + \omega_{\varphi\rho}) d\rho + (E_{\varphi\theta} + \omega_{\varphi\theta})(\rho \sin \varphi d\theta) + E_{\varphi\varphi}(\rho d\varphi)] \mathbf{e}_\varphi , \end{aligned}$$

найти компоненты тензора бесконечно малого вращения в сферической системе координат (ответы см. в параграфе 4.3).

14. Пусть координаты x_i произвольной точки в деформированном состоянии задаются через ее координаты в недеформированном состоянии X_j в виде $x_i = c_{ij} X_j + b_i$, где c_{ij} (компоненты ортогонального тензора $\mathbf{Q} = [c_{ij}]$, $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$) и b_i — постоянные величины. Используя формулу $u_i = x_i - X_i$, показать, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} = 0 .$$

Таким образом, движение твердого тела соответствует случаю $\bar{E}_{ij} = 0$ (см. (2.2.16)).

15. Используя символ перестановок, определенный в задаче 12, показать, что:

- а) уравнения совместности (2.7.13) можно представить в виде

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jms} \frac{\partial^2 E_{ls}}{\partial X_k \partial X_m} = 0 . \quad (a)$$

- б) применяя тождество $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, показать, что выражение (а) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 E_{ji}}{\partial X_k \partial X_k} + \frac{\partial^2 E_{kk}}{\partial X_i \partial X_j} - \left(\frac{\partial^2 E_{jk}}{\partial X_k \partial X_i} + \frac{\partial^2 E_{ki}}{\partial X_j \partial X_k} \right) + \left(\frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial X_k \partial X_l} - \frac{\partial^2 E_{kk}}{\partial X_l \partial X_l} \right) \delta_{ij} = 0. \quad (б)$$

Глава 3

Закон Гука

3.1 Введение

Анализ, проведенный выше, применим ко всем телам, которые могут быть достаточно точно определены как *непрерывные тела*. Рассмотрим экспериментальные данные, служащие основой для математического описания упругих тел. Первые эксперименты над упругими телами проводились для измерения силы, необходимой для того, чтобы сломать стержень или порвать канат. Упомянем аппарат Галилея (1638), ломающий балку при изгибе с нагрузкой на конце; аппарат да Винчи (1500), измеряющий силу, требуемую, чтобы порвать канат; и аппарат Мариотта (1700), предназначенный для измерения силы, нужной для того, чтобы сломать упругую балку при растяжении¹.

На рис. 1 показан аппарат, предложенный Леонардо да Винчи.

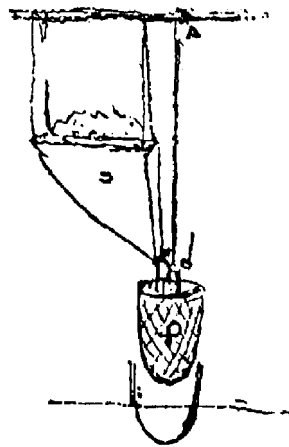


Рис. 1

Песок пересыпается из большого контейнера в специальный контейнер (P). В тот момент, когда канат обрывается, поток песка останавливается. Затем измеряется вес песка в контейнере (P). Он соответствует силе, требуемой для разрыва каната. Аппарат Мариотта показан на

¹ Историческую справку о ранних экспериментах в механике твердых тел с подробными комментариями см. в [6].

рис. 2,а. Он предназначен для измерения силы, необходимой, чтобы сломать стержень АВ под действием веса, обозначенного С.

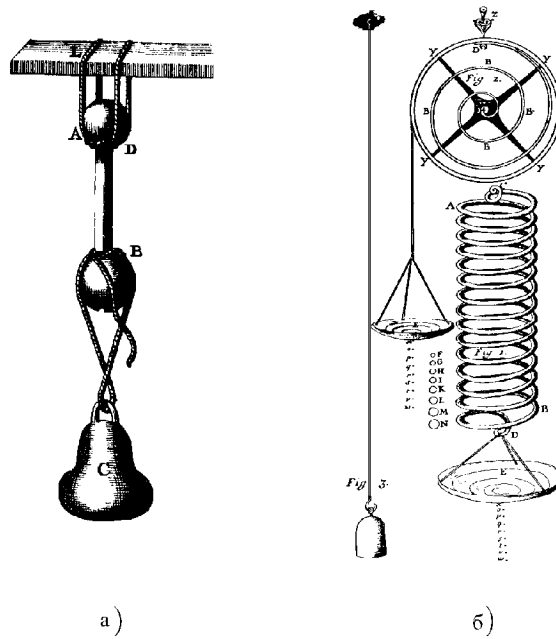


Рис. 2

Соотношение между напряжением и деформацией в механике сплошной среды называется *уравнением состояния*. Г.В. Лейбниц был первым, кто понял, что уравнения состояния должны определяться экспериментально². Это установлено после ряда опытов, выполненных Робертом Гуком в 1676 г. В конце статьи о гелиоскопах Гук привел анаграмму *ceiinossttuv*. Позже в своей книге *De Potentia Restitutiva*, опубликованной в 1678 г., Гук дал расшифровку анаграммы: *Ut tensio sic vis*.

За экспериментальную основу своего закона Гук берет четыре типа опытов, которые он выполнил, делая свое открытие: прогиб металлической проволоки в форме винтовой пружины; кручение спиральной пружины; деформация растяжения длинной металлической проволоки; прогиб конца консольной деревянной балки. На рис. 2,б схематично показаны устройства для трех экспериментов Гука.

² Согласно Трусделлу (С. Truesdell: *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788*; Introduction to *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Vol. X et XI Seriei Secundae. Zürich, Orell Füssli) Г.В. Лейбниц в письме к Джеймсу Бернулли от 24 сентября 1690 г. утверждает, что в действительности *связь между растяжением и растягивающей силой должна определяться экспериментом*.

Чтобы объяснить экспериментальное основание закона Гука, проанализируем соотношение, связывающее напряжение и деформацию в случае простого растяжения. Вид нагрузки и характерные результаты показаны на рис. 3. Пусть A_0 обозначает площадь поперечного сечения стержня в недеформированном состоянии.

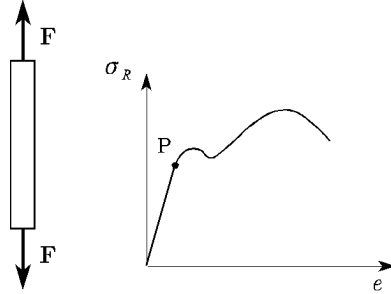


Рис. 3

Предположим, что напряженное состояние в стержне линейно и что вектор напряжения постоянен на всем поперечном сечении. Введем величину $\sigma_R = F/A_0$, называемую *инженерным напряжением* или *напряжением Пиолы-Кирхгофа*. Оно измеряет действующую силу, отнесенную к единице площади поперечного сечения стержня в недеформированном состоянии. Это напряжение Коши σ (как определено в главе 1), если сила F поделена на площадь поперечного сечения в деформированном состоянии. Если мы экспериментально установим для каждого значения силы F длину стержня l , то сможем вычислить деформацию (относительное удлинение, см. (2.2.30)) как $e = (l - l_0)/l_0$, где l_0 — длина стержня в недеформированном состоянии. Из рис. 3 видно, что при достаточно малых e зависимость σ_R от e можно выразить в виде *закона Гука*

$$\sigma_R = Ee, \quad (1)$$

где $E = \text{const}$ — *модуль Юнга*. Соотношение (1) справедливо до точки P на рис. 3, которая называется *пределом пропорциональности*.

Уравнение (1) — частный случай более общего соотношения

$$\sigma_R = f(e), \quad (2)$$

где $f(e)$ — нелинейная функция. Так как деформация e может быть определена из тензора деформаций \mathbf{E} , то по крайней мере для случая, показанного на рис. 3, напряжение σ_R — функция тензора деформаций. Поэтому мы *предполагаем*, что существует функциональная зависимость между тензором напряжений Коши и тензором деформаций, т. е.

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(E_{rs}), \quad (3)$$

и функции F_{ij} удовлетворяют условию

$$F_{ij}(E_{rs} = 0) = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Условие (4) — математическое выражение предположения, что в недеформированном состоянии напряжения в теле равны нулю. Полагаем также, что F_{ij} — аналитические функции по всем аргументам и их можно представить в виде рядов Тейлора. Оставляя только члены первого порядка, получаем

$$\sigma_{ik} = C_{iklm} E_{lm}, \quad (5)$$

где $C_{iklm} = \text{const}$. Эти постоянные составляют четырехиндексную систему и называются *упругими постоянными*. Можно показать, что эти постоянные образуют тензор четвертого ранга, называемый *тензором упругости*. В этом тензоре 81 компонента, но они не все независимы. Выражение (5) представляет собой *обобщенный закон Гука*. Если величины C_{iklm} не зависят от выбора точки, то материал называется *упруго-однородным*. В следующих двух параграфах мы исследуем величины C_{iklm} из формул (5).

3.2 Преобразование тензора упругости при повороте системы координат

Предположим, что в декартовой системе координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, обобщенный закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}. \quad (1)$$

Нужно узнать, какой вид примет равенство (1) в другой системе координат x_i^* , $i = 1, 2, 3$, и таким образом найти закон преобразования для величин C_{ijkl} . Пусть \mathbf{Q} — ортогональная матрица с компонентами c_{ij} (см. параграф 1.6):

$$c_{ij} = \cos \angle(x_i^*, \bar{x}_j). \quad (2)$$

Допустим, что в системе координат x_i^* мы имеем

$$\sigma_{kl}^* = C_{klst}^* E_{st}^*. \quad (3)$$

Правила преобразования для σ_{ij} и E_{kl} известны (см. (1.6.10)) и (2.2.24)):

$$\sigma_{kl}^* = \sigma_{mn} c_{km} c_{ln}, \quad E_{st}^* = E_{pr} c_{sp} c_{tr}. \quad (4)$$

Из равенства (4) следует, что $(\mathbf{E}^* = \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{Q}^T \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \mathbf{E}^* \mathbf{Q})$, т. е.

$$E_{pr} = E_{st}^* c_{sp} c_{tr}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в формулу (1) и полученный таким образом результат в выражение (4), имеем

$$\sigma_{kl}^* = C_{mnp r} E_{st}^* c_{sp} c_{ir} c_{km} c_{ln} . \quad (6)$$

Сравнивая выражения (6) и (3), видим, что

$$C_{klst}^* = C_{mnp r} c_{km} c_{ln} c_{sp} c_{tr} . \quad (7)$$

Из равенства (7) следует, что упругие постоянные образуют декартовый тензор четвертого ранга, так как любая система четвертого порядка, удовлетворяющая условию (7), является по определению декартовым тензором четвертого ранга. Он называется *тензором упругости*. Заметим также, что формула (7) гарантирует, что равенство (1) имеет один и тот же вид во всех декартовых системах координат.

3.3 Анизотропные, ортотропные и изотропные упругие тела

Рассмотрим некоторые частные случаи выражений (3.2.1), соответствующие определенным видам упругих материалов. Для каждого материала определен вид тензора упругости $[C_{ijkl}]$.

Пусть тело деформировано таким образом, что $E_{12} = E_{21} \neq 0$, а все другие компоненты тензора деформаций равны нулю. Тогда из (3.2.1) следует, что

$$\sigma_{mn} = C_{mn12} E_{12} + C_{mn21} E_{21} = [C_{mn12} + C_{mn21}] E_{12} , \quad (1)$$

где использовано свойство симметрии тензора деформаций. Определим тензоры четвертого ранга

$$\begin{aligned} \bar{C}_{mnkl} &= \frac{1}{2}(C_{mnkl} + C_{mnlk}) , \\ \bar{\bar{C}}_{mnkl} &= \frac{1}{2}(C_{mnkl} - C_{mnlk}) . \end{aligned} \quad (2)$$

Тензор $[\bar{C}_{mnkl}]$ симметричен, а $[\bar{\bar{C}}_{mnkl}]$ — кососимметричен по двум последним индексам. Очевидно, что $C_{nmkl} = \bar{C}_{nmkl} + \bar{\bar{C}}_{nmkl}$. С учетом соотношений (2) уравнение (1) можно записать в виде

$$\sigma_{mn} = \bar{C}_{mn12} E_{12} + \bar{\bar{C}}_{mn21} E_{21} . \quad (3)$$

Аналогично (с другими k, l) можно доказать, что, используя выражения (2), тензор упругости можно сделать симметричным по двум последним индексам; таким образом, $\bar{C}_{ijkl} = \bar{C}_{ijlk}$. В дальнейшем будем полагать, что C_{ijkl} симметризован, и опускать черту над \bar{C}_{ijkl} в

выражениях (2). Тогда для обобщенного закона Гука, записанного с помощью соотношений (3.2.1), имеем

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (4)$$

Из равенств (4) следует, что тензор $[C_{ijkl}]$ имеет самое большее $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ независимые постоянные.

Предположим теперь, что деформация в точке такова, что $E_{11} \neq 0$ — единственная ненулевая компонента тензора деформаций. Тогда соотношение (3.2.1) принимает вид

$$\sigma_{mn} = C_{mn11} E_{11}. \quad (5)$$

Из равенства (5) следует, что

$$\sigma_{12} = C_{1211} E_{11}, \quad \sigma_{21} = C_{2111} E_{11}. \quad (6)$$

Так как $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, то

$$C_{1211} = C_{2111}, \quad (7)$$

или, обобщая, получаем

$$C_{ijkl} = C_{jikl}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что тензор $[C_{ijkl}]$ имеет всего 36 независимых компонент. Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент тензора $[C_{ijkl}]$ может быть достигнуто с помощью термодинамики.

Начнем анализ с введения понятия *плотности энергии деформации*. Рассмотрим работу dU , совершенную компонентами напряжения σ_{ij} над единицей объема упругого материала, когда компоненты тензора деформаций увеличиваются на dE_{ij} (см. параграф 7.2):

$$dU = \sigma_{ij} dE_{ij}. \quad (9)$$

Величина $U = \int_{E_{ij}=0}^{E_{ij}} dU = \int_{E_{ij}=0}^{E_{ij}} \sigma_{ij} dE_{ij}$ называется *плотностью энергии деформации*. Заметим, что из выражения (9) вытекает соотношение

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}}. \quad (10)$$

Плотность энергии деформации U играет важную роль в теории упругости³. Существование функции U , определяемой выражением (9), гарантировано для обратимого изотермического или адиабатического процесса деформации. Если ввести выражение (см. параграф 7.2)

$$dU_c = E_{ij} d\sigma_{ij}, \quad (11)$$

³ Понятие плотности энергии деформации U было введено Гринем в 1839 г. в его работе о преломлении света в некристаллических средах.

то

$$dU + dU_c = d(\sigma_{ij} E_{ij}), \quad (12)$$

и

$$E_{ij} = \frac{\partial U_c}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (13)$$

Величина U_c называется *дополнительной плотностью энергии*, а соотношение (см. формулу (12))

$$U_c = \sigma_{ij} E_{ij} - U \quad (14)$$

— *преобразованием Лежандра*. Подставляя (3.2.1) в (9), получаем

$$dU = C_{ijkl} E_{kl} dE_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} dE_{ij}, \quad (15)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial E_{ij}} = C_{ijkl} E_{kl}. \quad (16)$$

Продифференцировав выражение (16), получаем

$$\frac{\partial}{\partial E_{kl}} \left(\frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \right) = C_{ijkl}. \quad (17)$$

Меняя порядок дифференцирования в выражении (17), имеем

$$\frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(\frac{\partial U}{\partial E_{kl}} \right) = C_{klij}. \quad (18)$$

Из соотношений (17) и (18) следует, что

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (19)$$

Представим тензор $[C_{ijkl}]$ со свойствами (4), (8) и (19) в матричной форме:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Вследствие условия симметрии (19) матрица (20) имеет только 21 независимую компоненту⁴. Материал с 21 независимой постоянной в матрице C_{ijkl} называется *анизотропным материалом*.

⁴ О количестве независимых компонент C_{ijkl} были долгие споры. Пуассон и Коши на основании упрощенной молекулярной модели упругого тела утверждали, что существует всего 15 независимых постоянных. Грин получил правильное число 21. Намного позже М. Борн, используя современные результаты молекулярной теории, доказал, что число независимых постоянных также равно 21.

Приступим к изучению различных классов материалов, определяя матрицу $[C_{ijkl}]$ для каждого класса.

Моноклиальный материал — это материал, обладающий свойством симметрии относительно одной плоскости. Примем (без потери общности) в качестве этой плоскости координатную плоскость \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Тогда упругие свойства материала не изменятся при следующей замене координат:

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = x_2, \quad x_3^* = -x_3. \quad (21)$$

Матрица преобразования для соотношений (21) имеет вид

$$\mathbf{Q}_1 = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

При преобразовании (22) должно удовлетворяться равенство

$$C_{ijkl}^* = C_{ijkl}. \quad (23)$$

Подставляя (22), например, в (3.2.7), получаем

$$C_{1111}^* = C_{1111}. \quad (24)$$

Следовательно, условие (23) выполняется при произвольном C_{1111} . Однако из равенства (3.2.7) следует, что

$$C_{1123}^* = -C_{1123}, \quad (25)$$

откуда

$$C_{1123} = 0. \quad (26)$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что равны нулю и 7 дополнительных постоянных; таким образом, моноклиальные материалы (20) имеют 13 независимых постоянных и соответствующая матрица принимает вид

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1323} & C_{2323} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Ортотропный материал симметричен по своим упругим свойствам относительно двух ортогональных плоскостей. Пусть это плоскости \bar{x}_1, \bar{x}_2 и \bar{x}_2, \bar{x}_3 . Тогда ортотропный материал симметричен в соответствии с выражением (22), а также

$$x_1^* = -x_1, \quad x_2^* = x_2, \quad x_3^* = x_3. \quad (28)$$

Матрица преобразования, соответствующая равенствам (28), имеет вид

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Применяя выражение (29) к формулам (3.2.7) и (23), получаем

$$C_{1112} = C_{2212} = C_{3312} = C_{1323} = 0, \quad (30)$$

таким образом, ортотропный материал имеет 9 упругих постоянных.

Тетрагональным материалом называется ортотропный материал с одинаковыми свойствами вдоль двух осей и отличными свойствами вдоль третьей оси. Поэтому если упругие постоянные ортотропного материала остаются неизменными при преобразовании

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = x_3, \quad x_3^* = -x_2, \quad (31)$$

описываемом матрицей

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

то этот материал — тетрагональный. Подставляя (32) в равенства (3.2.7) и (23), получаем

$$C_{2222} = C_{3333}, \quad C_{1122} = C_{1133}, \quad C_{1212} = C_{1313}, \quad (33)$$

таким образом, тетрагональный материал имеет шесть независимых упругих постоянных.

Кубический материал — это тетрагональный материал, который инвариантен при еще одной перемене координат:

$$x_1^* = x_2, \quad x_2^* = -x_1, \quad x_3^* = x_3. \quad (34)$$

Преобразованию (34) соответствует матрица

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Вновь подставляя матрицу (35) в равенства (3.2.7) и (23), имеем

$$C_{1111} = C_{2222}, \quad C_{2233} = C_{1122}, \quad C_{2323} = C_{1212}. \quad (36)$$

Таким образом, кубический материал имеет три независимые постоянные и матрица (27) в случае кубического материала принимает вид

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

И наконец, материал называется *изотропным*, если его упругие свойства одинаковы по всем направлениям. Можно показать, что кубический материал является изотропным, если выполняется инвариантность при преобразовании (см. [48])

$$x_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \quad x_2^* = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \quad x_3^* = x_3, \quad (38)$$

или

$$\mathbf{Q}_5 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Используя соотношения (39), (3.2.7) и (23), получаем

$$C_{1212} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}. \quad (40)$$

Таким образом, изотропный материал имеет две независимые упругие постоянные, которые обычно обозначаются следующим образом:

$$C_{1122} = \lambda, \quad C_{1111} = \lambda + 2\mu, \quad C_{1212} = \mu. \quad (41)$$

Постоянные λ и μ называются *постоянными Ламе*. Заметим, что согласно упрощенной молекулярной теории Пуассона и Коши изотропный материал описывается только одной постоянной. Это равносильно условию $\lambda = \mu$ в формулах (41). Многие эксперименты, проводившиеся в течение девятнадцатого века, доказали, что в общем случае $\lambda \neq \mu$, хотя в частных случаях возможно равенство $\lambda = \mu$. Используя формулы (41), запишем матрицу (37) в виде

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (42)$$

С учетом (42) обобщенный закон Гука (3.2.1) для изотропного материала принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\vartheta + 2\mu E_{11}, & \sigma_{22} &= \lambda\vartheta + 2\mu E_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\vartheta + 2\mu E_{33}, & \sigma_{12} &= 2\mu E_{12}, \\ \sigma_{13} &= 2\mu E_{13}, & \sigma_{23} &= 2\mu E_{23}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $\vartheta = \text{tr } \mathbf{E} = E_{11} + E_{22} + E_{33}$. Соотношения (43) можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda\vartheta\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \quad (44)$$

Обобщенный закон Гука для изотропных тел (44) можно получить прямо из равенства (3.2.1) и условия, что $[C_{ijkl}]$ — изотропный тензор четвертого ранга. Известно, что изотропные тензоры четвертого ранга являются линейными комбинациями тензоров $[\delta_{ij}\delta_{kl}]$, $[\delta_{ik}\delta_{jl}]$ и $[\delta_{il}\delta_{jk}]$. Следовательно, в общем случае имеем

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \lambda_1\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda_2\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (45)$$

где λ , λ_1 , λ_2 — постоянные. Однако в силу того, что C_{ijkl} удовлетворяют условию

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl}, \quad (46)$$

верно равенство $\lambda_1 = \lambda_2$. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$. Тогда соотношения (45) упрощаются:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (47)$$

Подставляя (47) в (3.2.1), получаем соотношения (44). Их можно легко решить относительно компонент тензора деформаций \mathbf{E} . А именно приняв $i = j$ в уравнениях (44), получаем

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \Theta = \sigma_{ii} = 3\lambda\vartheta + 2\mu E_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\vartheta. \quad (48)$$

Из выражения (48) можно определить первый инвариант Θ тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ через первый инвариант ϑ тензора деформаций \mathbf{E} в виде

$$\vartheta = \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu}. \quad (49)$$

Из равенств (44) следует также, что

$$E_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda\vartheta}{2\mu}\delta_{ij}, \quad (50)$$

следовательно,

$$E_{ij} = \frac{-\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\Theta + \frac{\sigma_{ij}}{2\mu}. \quad (51)$$

Основной результат этого параграфа заключается в соотношениях (44) и (51). Оба соотношения основаны на *первом члене* ряда

(3.1.3). В некоторых приложениях нелинейные связи между тензорами деформаций и напряжений нужны, чтобы детальнее описать поведение материала. Один из способов получить такую связь (это так называемая *материально нелинейная теория*) заключается в сохранении членов второго порядка в разложении функции (3.1.3) в ряд:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + \frac{1}{2}D_{ijklrs}E_{kl}E_{rs}, \quad (52)$$

где $[D_{ijklrs}]$ — тензор шестого ранга. Можно показать, что в тензоре $[D_{ijklrs}]$ 79 независимых компонент. Следовательно, в общем случае упругое тело, описываемое соотношениями (52), имеет 100 независимых постоянных. Основным недостатком теории, основанной на выражениях (52), является то, что она принимает во внимание квадраты градиента вектора перемещения $(\partial u_i / \partial X_j)$ (во втором члене правой части равенств (52)) и в то же время пренебрегает членами того же порядка в выражении для нелинейного тензора деформаций (так как в (52) используется тензор \mathbf{E} , а не $\bar{\mathbf{E}}$ или $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$).

Чтобы избежать этого противоречия, можно использовать связь напряжений и деформаций в виде (44) с нелинейным тензором деформаций вместо линейного. Тогда с тензором $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ вместо \mathbf{E} получаем (см. [25])

$$\sigma_{ij} = \lambda(\text{tr } \bar{\bar{\mathbf{E}}})\delta_{ij} + 2\mu\bar{\bar{E}}_{ij}. \quad (53)$$

Материал, описываемый соотношениями (53), называется *материалом Сетха*. Тогда вполне логично записать обобщение закона Гука (где в уравнениях (52) используется $[\bar{\bar{E}}_{ij}]$ вместо $[E_{ij}]$) в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\bar{\bar{E}}_{kl} + \frac{1}{2}D_{ijklrs}\bar{\bar{E}}_{kl}\bar{\bar{E}}_{rs}. \quad (54)$$

В уравнениях (54) опять имеем в общем случае 100 независимых материальных параметров.

3.4 Постоянные Ламе. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона

В теории упругости вместо постоянных Ламе λ и μ часто используются две другие постоянные: *модуль упругости E* и *коэффициент Пуассона ν* . Определим связь между постоянными Ламе и “инженерными” постоянными E и ν .

Рассмотрим стержень, нагруженный так, как показано на рис. 2 главы 1. Предположим, что ось \bar{x}_1 направлена вдоль оси стержня и что две другие оси направлены таким образом, что $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ образуют прямоугольную декартову систему координат. Напряженное состояние в

любой точке стержня таково:

$$\sigma_{11} = \sigma = \frac{F}{A}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1)$$

Так как на тело не действуют объемные силы, компоненты напряжения (1) удовлетворяют уравнениям равновесия (1.3.10). Подставляя выражения (1) в уравнения (3.3.51), получаем

$$E_{11} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad E_{22} = E_{33} = \frac{-\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad (2)$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0.$$

Из равенств (2) следует, что уравнения совместности (2.7.14) удовлетворяются. Введем новые постоянные E и ν следующим образом:

$$\nu = -\frac{E_{22}}{E_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (3)$$

так что равенства (2) принимают вид

$$E_{11} = \frac{\sigma}{E}, \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{\sigma}{E}\nu = -\nu E_{11}. \quad (4)$$

Величина E называется *модулем упругости* или *модулем Юнга*, а ν — *коэффициентом Пуассона*. Из выражений (3) следует, что

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5)$$

Отметим, что молекулярная теория Пуассона и Коши приводит к соотношению $\lambda = \mu$, или

$$\nu = \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Споры о числе независимых постоянных, необходимых, чтобы описать изотропное упругое тело, фактически концентрировались на вопросе о величине коэффициента Пуассона. Как видно из равенства (6), молекулярная теория Пуассона и Коши предсказывает, что всего одной постоянной достаточно, чтобы описать изотропный упругий материал. Если взять за эту постоянную E , то отношение поперечной и продольной деформации (а это именно ν) равно $\nu = 1/4$. Проведенные эксперименты (отметим работы Г. Вертгейма в 1848 г.) ясно показали, что $\nu \neq 1/4$ для некоторых изотропных упругих материалов; таким образом, в соотношении, связывающем тензоры напряжений и деформаций, *необходимы две постоянные*.

Рассмотрим теперь упругое тело под действием гидростатического давления на его границе:

$$\mathbf{p}_n = -p \mathbf{n}. \quad (7)$$

Компоненты тензора напряжений таковы:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (8)$$

В данном случае уравнения равновесия выполняются, и из уравнений (3.3.51) следует, что

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}, \quad E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0. \quad (9)$$

Так как $\theta = E_{ii}$ равняется объемному расширению (см. (2.9.15)), имеем

$$e_v = \theta = E_{11} + E_{22} + E_{33} = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu}. \quad (10)$$

Введем постоянную k , называемую *модулем объемного сжатия*:

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (11)$$

тогда уравнение (10) примет вид

$$e_v = \theta = -\frac{p}{k}. \quad (12)$$

Подставляя выражения (5) в равенство (11), получаем

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (13)$$

И наконец, чтобы записать закон Гука и обратный к нему, подставляем выражения (5) в уравнения (3.3.44) и (3.3.51):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - 2\nu)E_{ij} + \nu\vartheta\delta_{ij}], \\ E_{ij} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\Theta\delta_{ij}], \end{aligned} \quad (14)$$

где ϑ и Θ — первые инварианты тензоров деформаций и напряжений соответственно.

Запишем неравенства, которым должны удовлетворять λ и μ . Термодинамические рассуждения (плотность энергии деформации U положительна) приводят к следующим ограничениям на постоянные Ламе в обобщенном законе Гука (3.2.44):

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (15)$$

Из соотношений (15), (3) и (5) следует, что

$$E > 0, \quad \nu > -1. \quad (16)$$

Равенство (13) можно использовать для получения другого вида ограничения на ν . А именно когда $\nu = 1/2$, имеем $k = \infty$. Материал с таким модулем объемного сжатия называется *несжимаемым упругим материалом*, так как

$$e_v = 0, \quad (17)$$

что следует из выражения (12). Следовательно, для линейно упругого материала (14) имеем

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Интересно, что для некоторых упругих материалов коэффициент Пуассона ν отрицателен (см. [84]). Для таких материалов растяжение стержня по направлению оси приводит к *расширению* в поперечном направлении.

Для материала Сетха, описываемого выражением (3.3.53), можно записать (рассуждая, как в случае (3.3.44)) [25]:

$$\bar{\bar{E}}_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \bar{\bar{E}}_{22} = -\nu \bar{\bar{E}}_{11}, \quad 9\lambda + 5\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (19)$$

Ограничения (19) (как и следовало ожидать) сильнее, чем (15), так как неравенства (15) гарантируют, что U положительна только для *малых деформаций*.

3.5 Влияние температуры на связь напряжений и деформаций

Нашей целью в этом параграфе является рассмотрение уравнений состояния для упругого тела, подверженного изменению температуры. Эти уравнения связывают тензор напряжений σ , тензор деформаций \mathbf{E} и температуру T . Уравнения состояния термоупругости могут быть выведены из свободной энергии материала Гельмгольца, определяемой следующим образом (см. [74]):

$$H = U - sT, \quad (1)$$

где $H = H(E_{ij}, s)$ — *плотность свободной энергии*, s — энтропия, T — абсолютная температура. Допустив, что тензор напряжений σ и энтропия s не зависят явно от производных по времени от E_{ij} и T , получим (см. [30]):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial E_{ij}}, \quad s = -\frac{\partial H}{\partial T}. \quad (2)$$

Разложим функцию H в степенной ряд около недеформированного состояния ($E_{ij} = 0$) в случае $T = T_0$; получаем

$$H(E_{ij}, T) = H(0, T_0) + \frac{\partial H(0, T_0)}{\partial E_{ij}} E_{ij} + \frac{\partial H(0, T_0)}{\partial T} (T - T_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 H(0, T_0)}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} E_{ij} E_{kl} + 2 \frac{\partial^2 H(0, T_0)}{\partial E_{ij} \partial T} E_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 H(0, T_0)}{\partial T^2} (T - T_0)^2 \right] + \dots \quad (3)$$

В естественном состоянии свободная энергия H и энтропия равны нулю, поэтому

$$H(0, T_0) = 0, \quad \frac{\partial H(0, T_0)}{\partial T} = 0. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) и (4) в формулы (2), получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H(0, T_0)}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial^2 H(0, T_0)}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} E_{kl} + \frac{\partial^2 H(0, T_0)}{\partial E_{ij} \partial T} (T - T_0), \quad (5)$$

где мы пренебрегаем членами более высокого порядка. Так как в естественном состоянии ($E_{ij} = 0$, $T = T_0$) напряжение равно нулю (т. е. $\sigma_{ij} = 0$), имеем

$$\frac{\partial H(0, T_0)}{\partial E_{ij}} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, из выражения (5) следует, что

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} E_{kl} - \beta_{ij} \bar{\theta}, \quad (7)$$

где

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_{E_{ij}} = -\beta_{ij}, \quad \bar{\theta} = T - T_0. \quad (8)$$

Записав выражения (8), мы указали, какая переменная остается постоянной после взятия частных производных. Уравнение (7) представляет собой уравнение состояния *Дюамеля–Неймана* для линейного анизотропного термоупругого тела. Постоянные c_{ijkl} зависят от материала тела и называются *упругими постоянными в изотермическом состоянии*. Постоянные β_{ij} описывают механические и тепловые свойства материала. В случае изотропного тела, пользуясь аргументами, аналогичными приведенным в параграфе 3.3, уравнение (7) можно свести к виду

$$\sigma_{ij} = (\lambda \vartheta - \gamma \bar{\theta}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \quad (9)$$

При записи выражения (9) мы использовали λ и μ для обозначения постоянных Ламе и γ для обозначения материальной постоянной, которая, как мы покажем, связана с коэффициентом теплового расширения. Заметим, что (9) можно было бы принять за уравнение состояния. Используя тот же метод, что и в параграф 3.3, можно разрешить уравнения (9) относительно E_{ij} и получить

$$\vartheta = E_{ii} = \frac{\gamma \bar{\theta}}{k} + \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu}, \quad (10)$$

где k задается выражением (3.4.15), $\Theta = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ и (сопоставив с формулами (3.3.49) и (3.3.51))

$$E_{ij} = \frac{-\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \Theta + \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{\gamma}{3k} \bar{\theta} \delta_{ij}. \quad (11)$$

Чтобы определить физическое значение величины γ , рассмотрим свободное тепловое расширение тела, т. е. случай, когда $\sigma_{ij} = 0$ и $\bar{\theta} \neq 0$. Тогда из равенств (11) получим

$$E_{ij}^{\theta} = \frac{\gamma}{3k} \bar{\theta} \delta_{ij}. \quad (12)$$

Если обозначить за α_t коэффициент линейного теплового расширения, то из выражений (12) следует, что

$$\alpha_t = \frac{\gamma}{3k} = \frac{\gamma}{3\lambda + 2\mu}. \quad (13)$$

Следовательно, величина γ связана с коэффициентом линейного теплового расширения α_t равенством (13).

При решении задач термоупругости поле разности температур $\bar{\theta}$ в большинстве случаев заранее неизвестно. Оно должно быть определено из *обобщенного уравнения теплопроводности*. Чтобы вывести это уравнение, нужно рассмотреть *движение тела*. Начнем с определения скорости и ускорения.

Если тело движется, вектор положения произвольной точки \mathbf{r} становится функцией исходного вектора положения \mathbf{R} той же точки и времени t . Таким образом, вместо уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(X_i)$ (как в параграфе 2.2), имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(X_i, t). \quad (14)$$

Если тело находится в исходном состоянии κ_0 в момент времени t_0 , то вектор \mathbf{r} должен удовлетворять условию $\mathbf{r}(X_i, t_0) = \mathbf{R}(X_i)$. Векторы скорости и ускорения таковы:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \mathbf{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \mathbf{e}_i, \quad (15)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \mathbf{e}_i, \quad (16)$$

Обобщенное уравнение теплопроводности получается из первого и второго законов термодинамики (см. [30] и перечисленную там литературу). В итоге для изотропных тел оно имеет вид⁵

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X_3^2} - \eta \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \frac{q}{\lambda_0} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}. \quad (17)$$

В уравнении (17) мы используем q для обозначения количества тепла, вырабатываемого в единице объема тела; λ_0 — теплопроводность. Производная по времени от первого инварианта тензора деформаций θ такова:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [E_{11} + E_{22} + E_{33}] = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right). \quad (18)$$

Параметры κ (тепловая диффузия) и η задаются в виде

$$\kappa = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, \quad \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}, \quad (19)$$

где c_ε — удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Из уравнения (17) очевидно, что существует связь между уравнением теплопроводности и движением тела. Следовательно, мы должны добавить к уравнениям (17) уравнения движения. Их можно получить из уравнений равновесия (1.3.4). А именно пользуясь правилом Даламбера, добавим инерциальные силы к полю распределенных сил. Инерциальные силы в единице объема dv таковы:

$$f_1^{\text{in}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} dv, \quad f_2^{\text{in}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} dv, \quad f_3^{\text{in}} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} dv, \quad (20)$$

где ρ_0 — плотность тела в деформированном состоянии, которая в применяемом нами линейном приближении равна плотности в начальном (недеформированном) состоянии. Пользуясь формулами (20) в выражениях (1.3.4), получаем уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что для систем (9), (17), (21) и (2.2.49) должны быть заданы начальные и граничные условия.

⁵ Как правило, идею о включении дополнительного члена, появляющегося вследствие деформации в обычном уравнении теплопроводности, связывают с именем русского физика Н.А. Умова, высказавшего эту мысль в своей книге в 1871 г.

3.6 Закон Гука в цилиндрических и сферических системах координат

Закон Гука (3.3.44) можно записать в других системах координат, пользуясь законами преобразования тензоров. Так как у нас уже есть тензор деформаций, записанный в цилиндрической и сферической системах координат (см. параграф 2.6), то можно использовать эти выражения для получения следующих результатов:

1. Цилиндрическая система координат

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \sigma_{rr} &= \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\vartheta + 2\mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right], \\
 \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для записи (1) мы использовали линейную часть соотношений (2.6.6).

2. Сферическая система координат

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= 2 \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{\rho} \operatorname{ctg} \varphi, \\
 \sigma_{\rho\rho} &= \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\vartheta + 2\mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho} \right), \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\vartheta + 2\mu \left(\frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_\varphi}{\rho} \operatorname{ctg} \varphi \right), \\
 \sigma_{\rho\varphi} &= \mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right], \\
 \sigma_{\varphi\theta} &= \mu \left(\frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \varphi \frac{u_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right), \\
 \sigma_{\theta\rho} &= \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{\rho} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Для записи (2) мы использовали линейную часть соотношений (2.6.11).

В случае термоупругого тела соотношения между напряжениями и деформациями в цилиндрической и сферической системах координат можно получить из выражений (1) и (2) путем замены члена $(\lambda\vartheta)$ на $(\lambda\vartheta - \gamma\bar{\theta})$.

3.7 Условия совместности Бельтрами–Мичелла

В этом параграфе мы рассмотрим, в каком виде могут быть записаны уравнения совместности (2.7.14) для линейно упругого тела, описываемого уравнениями (3.3.44) или (3.4.14). Сначала выразим тензор деформаций \mathbf{E} через тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Из (3.4.14) имеем

$$\begin{aligned} E_{22} &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{22} - \nu\Theta], \\ E_{33} &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{33} - \nu\Theta], \\ E_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2\mu} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$. Рассмотрим систему уравнений совместности (2.7.14). Заменим производные по X_i производными по x_i (см. (2.9.4)). Тогда, например, уравнение (2.7.14) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial x_2 \partial x_2} - 2 \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0. \quad (2)$$

Используя выражения (1), перепишем уравнение (2) в виде

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}. \quad (3)$$

Из уравнений равновесия (1.3.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя первое уравнение (4) по x_3 , а второе по x_2 и складывая результаты, получаем

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \quad (5)$$

Используя первое из уравнений равновесия (1.3.4)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0, \quad (6)$$

имеем

$$- \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \quad (7)$$

Подставляя равенство (7) в уравнение (5), получаем

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}. \quad (8)$$

Используя (8) в уравнении (3), имеем

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_2^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} \right) \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (1 - \nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_{11} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} \right) \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассуждая аналогично, приходим еще к двум уравнениям вида (10), а именно

$$\begin{aligned} (1 - \nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_{22} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} \right) \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right), \\ (1 - \nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_{33} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} \right) \\ = (1 + \nu) \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Складывая уравнения (10) и (11), получаем

$$(1 - \nu) \nabla^2 \Theta = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right). \quad (12)$$

Введя дивергенцию векторного поля объемных сил:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}, \quad (13)$$

уравнение (12) можно переписать в виде

$$\nabla^2 \Theta = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет большое значение в приведенном ниже анализе. Подставив (14) в уравнение (10), получаем

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{f} + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0. \quad (15)$$

Рассуждая аналогично, можно вывести еще два уравнения вида (15).

Другую группу уравнений совместности можно получить, исходя из равенства (2.7.14), например:

$$\frac{\partial^2 E_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 E_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 E_{31}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0. \quad (16)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (3.4.13), имеем

$$E_{33} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{33} - \nu\Theta], \quad E_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}, \quad E_{31} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{31}. \quad (17)$$

Из уравнений (17) и (16) следует, что

$$(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1 \partial x_2} = (1+\nu) \left(-\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_2 \partial x_3} \right). \quad (18)$$

Дифференцируя уравнения равновесия (6) и (4) по x_2 и x_1 соответственно и складывая получившиеся выражения, имеем

$$\frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_2 \partial x_3} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right). \quad (19)$$

При подстановке (19) в (18) получаем следующий результат:

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0. \quad (20)$$

Аналогичным образом можно вывести еще два уравнения вида (20). Тогда полный набор уравнений совместности (2.7.14) можно записать так:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\nu}{1-\nu} (\operatorname{div} \mathbf{f}) \delta_{ij} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0. \quad (21)$$

Уравнения (21) называются *условиями совместности Бельтрами–Мичелли*.

3.8 Конечные деформации в линейном напряженном состоянии

В параграфе 3.1 мы объясняли предположения (3.1.3) полученным экспериментально соотношением (3.1.2). Однако существует важное различие между (3.1.2) и (3.1.3). А именно в равенстве (3.1.3) компоненты тензора напряжений Коши σ представляют собой силу на единицу площади сечения *в деформированном состоянии* κ , тогда как σ_R в выражении (3.1.2) — сила на единицу площади тела *в недеформированном состоянии* κ_0 . Таким образом, σ_R — компонента напряжения *Пуоли–Кирхгофа*. Ниже мы представим вид равенства (3.1.2) в том случае, если взять обобщенный закон Гука в виде (3.3.53). Тогда для линейного напряженного состояния (нагруженный вдоль продольной оси стержень) имеем

$$\sigma_{11} = \lambda(\text{tr } \bar{\mathbf{E}}) + 2\mu\bar{E}_{11}, \quad (1)$$

или (см. (3.4.19))

$$\sigma = \sigma_{11} = E\bar{E}_{11}, \quad (2)$$

где $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$. Из выражений (2.2.47) получаем

$$e_{11} = e = \left(1 - 2\bar{E}_{11}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \quad (3)$$

откуда

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sigma/E}} - 1. \quad (4)$$

Разрешив равенство (4) относительно σ , получаем (см. [78])

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{2e + e^2}{2(1 + e)^2}. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что: *если уравнение, связывающее напряжение и тензор конечных деформаций, берется в линейной форме (2), то соотношение, связывающее напряжение и относительное удлинение e , — нелинейная функция, задаваемая равенством (5).*

Чтобы связать σ_R с e , начнем с определения σ_R :

$$\sigma A = \sigma_R A_0, \quad (6)$$

где A и A_0 — площади поперечного сечения стержня в деформированном и недеформированном состоянии соответственно. Разрешая (6) относительно σ_R , получаем

$$\sigma_R = \sigma \frac{A}{A_0}. \quad (7)$$

Допустим, что стержень имеет квадратное поперечное сечение со сторонами a_0 ⁶ в недеформированном состоянии. В деформированном состоянии сторону квадратного поперечного сечения обозначаем a и вычисляем с помощью выражений (3.4.19). В результате

$$a = a_0(1 + \epsilon_{22}) = a_0 \left(\frac{1}{1 + 2\nu\sigma/E} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Так как $(A/A_0) = (a/a_0)^2$, имеем

$$\sigma_R = \sigma \frac{1}{1 + 2\nu\sigma/E}. \quad (9)$$

Окончательно, из формул (4) и (9) следует, что

$$\frac{\sigma_R}{E} = \frac{2e + e^2}{2[1 + (1 + \nu)(2e + e^2)]}. \quad (10)$$

На рис. 4 показана зависимость σ_R от e . Легко увидеть, что эта зависимость может быть аппроксимирована линейной функцией *только для малых значений e* . Таким образом, мы приходим к следующему заключению: *линейная зависимость тензора напряжений от конечного тензора деформаций Эйлера-Альманси приводит к нелинейной зависимости напряжения Пиолы-Кирхгофа от относительного удлинения e* .

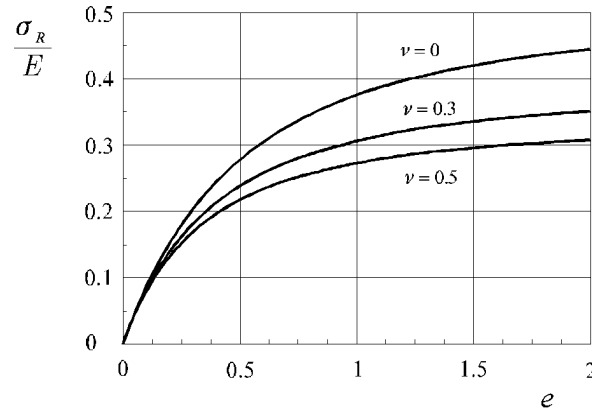


Рис. 4

Тот факт, что функции $\sigma_R - e$ и $\sigma - e$ нелинейны (по крайней мере для некоторых материалов), устанавливался достаточно долгое время.

⁶ Это допущение не существенно. Можно доказать, что полученный коэффициент A/A_0 сохраняется при произвольном поперечном сечении.

Поэтому вместо формулы (3.1.1) в литературе (особенно по теории стержней) используются и нелинейные соотношения, такие как (5) и (10), подходящие для определенных видов материалов. Некоторые из возможных вариантов (см. [6, 65]) приведены ниже:

линейный закон, Гук

$$e = a\sigma;$$

экспоненциальный закон

$$e = a\sigma^m;$$

параболический закон

$$\sigma = ae - be^2;$$

гиперболический закон

$$e = \frac{\sigma}{a - b\sigma}, \quad e^2 = a\sigma^2 + b\sigma;$$

кубический и биквадратно-параболический закон

$$\begin{aligned} \sigma &= ae + be^2 + ce^3, & e &= a\sigma + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^3, \\ \sigma &= a\epsilon be^2 + ce^3 + de^4; \end{aligned}$$

экспоненциальный закон

$$\begin{aligned} \sigma &= c \exp^{-1/e}, & e &= \exp(m\sigma) - 1, & \sigma &= \frac{e}{1-e} \exp(me) \\ \sigma &= c[\exp(me) - 1], & e &= \sigma[a + b \exp(m\sigma)]; \end{aligned}$$

закон Британской Королевской Комиссии

$$\sigma = Ae - Be^2;$$

закон Нельсона

$$e = a\sigma^n;$$

закон Стокса

$$\sigma = \frac{\alpha e}{1 + \beta e};$$

закон Ричардсона

$$\sigma = ae - be^2;$$

закон Билелло и Метцгера

$$\sigma = ae^{1/2};$$

закон Лабииша

$$\sigma = a \frac{e^3}{1 + e}.$$

Во всех перечисленных формулах $a, b, c, d, n, m, \alpha, \beta, \gamma, A, B$ — постоянные, определяемые экспериментально.

Разнообразие предложенных обобщений закона Гука объясняется экспериментальными результатами, которые не могли быть описаны линейным законом. Действительно, Белл [6] утверждает: “Эксперименты за 280 лет обильно продемонстрировали для каждого исследованного с достаточной точностью твердого вещества, что деформация, возникающая в результате малого напряжения, не является линейной функцией”.

Задачи

1. Показать, что главные направления тензора напряжений и тензора деформаций совпадают в случае изотропного упругого тела.
2. Найти E_{11}/E_{22} и E_{22}/E_{33} , если в данной точке линейно упругого тела нормальные напряжения удовлетворяют выражениям

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{33}} = \frac{b}{c}.$$

3. Вывести соотношения между постоянными Ламе λ, μ и модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , как показано в таблице. Таким образом, чтобы описать изотропный упругий материал, можно использовать любые две из четырех постоянных (λ, μ, E и ν).

	λ	μ	E	ν
λ, μ	λ	μ	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
λ, ν	λ	$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\lambda}{\nu}$	ν
μ, E	$\frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}$	μ	E	$\frac{(E - 2\mu)}{2\mu}$
E, ν	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	E	ν

4. Показать, что поле напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c[x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)], & \sigma_{22} &= c[x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)], \\ \sigma_{33} &= c\nu(x_1^2 + x_2^2), & \sigma_{12} &= -2c\nu x_1 x_2, & \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0, \end{aligned}$$

где $c = \text{const}$, удовлетворяет уравнениям равновесия с нулевыми объемными силами. Выполняются ли уравнения совместности?

5. Прямой стержень нагружен вдоль своей оси, совпадающей с осью \bar{x}_3 прямоугольной декартовой системы координат $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Компонентой тензора напряжений $\sigma_{33} = \sigma$ можно управлять. Боковая поверхность стержня зафиксирована таким образом, что $E_{22} = E_{33} = 0$. Найти условный модуль упругости, определяемый как

$$E_{\text{вид}} = \frac{\sigma}{E_{33}}.$$

6. Рассмотреть куб, сделанный из материала, описываемого формулами (3.3.53). Пусть куб нагружен таким образом, что нормальные напряжения на его сторонах таковы: $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Показать, что объемное расширение задается формулой

$$e_\nu = 1 - \left(1 + \frac{2\nu\sigma}{E}\right) \sqrt{1 - \frac{2\sigma}{E}},$$

где E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона. Показать, что при $\nu = 1/2$ гарантируется выполнение равенства $e_\nu = 0$ только тогда, когда коэффициент σ/E мал.

7. Показать, что вектор напряжения \mathbf{p}_n для изотропного тела, описываемого формулами (3.3.44), можно записать следующим образом [26]:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(\mathbf{u}) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu(\mathbf{n} \times \operatorname{curl} \mathbf{u}),$$

где $\partial(\cdot)/\partial \mathbf{n}$ — производная по направлению от (\cdot) , т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j \mathbf{e}_i.$$

Здесь “ \times ” означает векторное произведение,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \mathbf{e}_3.$$

Оператор \mathbf{p}_n называется *оператором напряжения*.

8. Определить $\mathbf{p}_n(\mathbf{u})$ в цилиндрической и сферической системах координат. Сначала, как показано ниже, найти $\operatorname{curl} \mathbf{u}$:

- а) Для цилиндрической системы координат (r, θ, z) начать с использования соотношений $x_1 = r \cos \theta$; $x_2 = r \sin \theta$; $x_3 = z$,

чтобы получить выражения

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ dx_2 &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta, \\ dx_3 &= dz. \end{aligned} \quad (a)$$

б) Разрешить равенства (а) относительно dr и $d\theta$ и получить формулы

$$\begin{aligned} dr &= \cos \theta dx_1 + \sin \theta dx_2, \\ d\theta &= -\frac{\sin \theta}{r} dx_1 + \frac{\cos \theta}{r} dx_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_1} &= \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial x_2} &= \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \quad (б)$$

Затем вычислить

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}. \quad (в)$$

в) Использовать (в) и аналогичные выражения вместе с $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$ (см. параграф 1.5) в последнем уравнении задачи 7, чтобы получить формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{u} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (г)$$

г) Подобным образом показать, что в сферической системе координат (ρ, φ, θ) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\varphi) - \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\theta) \right] \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (д)$$

9. Используя формулу (2.4.17), а именно $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$, определить компоненты вектора \mathbf{w} в цилиндрической и сферической системах координат.

Глава 4

Краевые задачи теории упругости

4.1 Введение

В этом параграфе мы рассмотрим основные системы уравнений теории упругости, состоящие из уравнений равновесия, уравнений состояния (закон Гука или закон Дюамеля–Неймана) и уравнений совместности. Для постановки задач необходимо знание граничных условий, начальных условий и объемных сил, действующих на тело.

При решении задачи теории упругости обычно сталкиваются с серьезными математическими проблемами. Первый вопрос, на который нужно ответить, это *вопрос существования решения* в данном функциональном пространстве. В зависимости от пространства, которому принадлежит решение, мы различаем *классические и обобщенные (или слабые)* решения задач теории упругости. Отметим работу [53], в которой рассматриваются классические результаты для теорем существования в теории упругости.

Другой важный вопрос — единственность решения (см., например, [63]). Мы представим доказательство единственности решения Кирхгоффа. Мы выделяем уравнения равновесия и движения для линейной упругости и линейной термоупругости. Так как рассматриваются малые деформации и перемещения, во всех нижеследующих уравнениях используется равенство $X_i = x_i$ (см. (2.9.4)). Опишем основные системы уравнений.

1. Упругость

В этом случае имеем три уравнения движения (3.5.21) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

и шесть уравнений закона Гука для изотропных тел, заданных в виде (3.3.44):

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}, \quad (2)$$

где

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

К системам (1) и (2) добавим соотношения совместности (2.7.13) в форме

$$\frac{\partial^2 E_{im}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 E_{jl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 E_{il}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 E_{jm}}{\partial x_i \partial x_l} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, 15 независимых переменных σ_{ij} , u_i , E_{ij} удовлетворяют 15 уравнениям (1)–(3) и, кроме того, системе соотношений (4). Из равенств (2) имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Подставляя равенство (5) в уравнения (1), получаем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j + \left(f_j - \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (6)$$

где $\vartheta = E_{11} + E_{22} + E_{33}$ и

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\cdot) \quad (7)$$

является оператором Лапласа.

Уравнения (6) называются *дифференциальными уравнениями Ламе*. Их решения $u_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t)$ должны удовлетворять соотношениям совместности (4). В случае равновесия уравнения (6) упрощаются и принимают вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j + f_j = 0, \quad (8)$$

или

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + (1 - 2\nu) \nabla^2 u_j + \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} f_j = 0. \quad (9)$$

Используя формулы (3.4.5), имеем

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - 2\nu, \quad \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E}. \quad (10)$$

В особом случае, когда объемные силы равны нулю, уравнения (8) принимают вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j = 0. \quad (11)$$

Предположим, что компоненты объемных сил f_i либо равны нулю, либо постоянны. Тогда, дифференцируя уравнения (8) или (11) по x_j , $j = 1, 2, 3$, и суммируя результаты, получаем

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \vartheta = 0, \quad (12)$$

или

$$\nabla^2 \vartheta = 0. \quad (13)$$

Из равенства (13) мы делаем вывод о том, что: *если объемные силы отсутствуют или постоянны, то первый инвариант тензора деформаций $\vartheta = E_{11} + E_{22} + E_{33}$ является гармонической функцией.* Из соотношения $\vartheta = e_v$ (см. (2.9.15)) следует, что когда объемные силы отсутствуют или постоянны, то объемное расширение есть гармоническая функция. Применяя оператор Лапласа к уравнениям (11), имеем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^2 \vartheta + \mu \nabla^2 \nabla^2 u_j = 0. \quad (14)$$

С учетом формулы (13) уравнения (14) принимают вид

$$\nabla^2 \nabla^2 u_j = \nabla^4 u_j = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^4(\cdot) = & \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}(\cdot) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}(\cdot) + \frac{\partial^4}{\partial x_3^4}(\cdot) \\ & + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(\cdot) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2}(\cdot) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial x_3^2}(\cdot) \end{aligned} \quad (16)$$

является *бигармоническим оператором.* Из уравнений (15) следует, что *если объемные силы отсутствуют или постоянны, то компоненты вектора перемещения u_i — бигармонические функции.*

Исходя из формул (3.3.49) и (13), заключаем, что

$$\nabla^2 \Theta = 0, \quad (17)$$

т. е.: *если объемные силы отсутствуют или постоянны, то первый инвариант тензора напряжения является гармонической функцией.*

Применяя бигармонический оператор к обеим частям выражения (3.3.51), получаем

$$\nabla^4 E_{ij} = \frac{-\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \nabla^2(\nabla^2 \Theta) + \frac{\nabla^4 \sigma_{ij}}{2\mu}. \quad (18)$$

Так как u_i удовлетворяет уравнениям (15) и Θ удовлетворяет равенству (17), то справедливо утверждение, что

$$\nabla^4 \sigma_{ij} = 0, \quad (19)$$

следовательно, *если объемные силы отсутствуют или постоянны, то компоненты напряжения являются бигармоническими функциями.*

В ряде задач более удобно пользоваться уравнениями совместности Бельтрами–Мичелла (3.7.21) вместо уравнений (4). Тогда нужно решить систему уравнений (1) совместно с соотношениями

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\nu}{1-\nu} (\operatorname{div} \mathbf{f}) \delta_{ij} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

при наложенных определенных граничных условиях.

2. Термоупругость

В случае термоупругого тела основные соотношения — три уравнения (1) и уравнения состояния (3.5.9):

$$\sigma_{ij} = (\lambda \vartheta - \gamma \bar{\theta}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \quad (21)$$

Используя формулы (3) в выражениях (21) и подставляя результат в систему уравнений (1), получаем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j + \rho \left(f_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = 0. \quad (22)$$

Равенства (22) должны решаться вместе с уравнением теплопроводности (3.5.17)

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \frac{q}{\lambda_0} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}. \quad (23)$$

Можно упростить формулу (23), полагая, что $|\bar{\theta}/T_0| \ll 1$. В дальнейшем будем использовать T для обозначения температурного приращения $\bar{\theta}$. Тогда уравнения (22) и (23) примут вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j + \left(f_j - \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{q}{\lambda_0} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\vartheta = E_{11} + E_{22} + E_{33} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3 = \operatorname{div} \mathbf{u}$.

Для уравнений (22) и (24) должны быть заданы граничные и начальные условия. Далее мы вернемся к вопросу о задании граничных условий.

4.2 Классификация задач

Как показано в предыдущем параграфе, при решении задачи теории упругости мы располагаем тремя уравнениями движения, шестью уравнениями состояния (закон Гука) и шестью соотношениями

между деформациями и перемещениями. Значит, необходимо определить пятнадцать неизвестных: три составляющие вектора перемещения \mathbf{u} ; шесть компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и шесть компонент тензора деформаций \mathbf{E} . В случае термоупругости добавляются уравнение теплопроводности (4.1.24) и одна неизвестная величина (температурное приращение $\bar{\theta}$ (или T)).

На практике в большинстве случаев нагружение и условия закрепления тела описываются вектором напряжения (или перемещения) на границе. Так, если на границе задан вектор напряжения, имеем (см. (1.15.1))

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{p}}, \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}(x_i)$ — заданная функция. Если задан вектор перемещения \mathbf{u} , то

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \quad (2)$$

где $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(x_i)$ — заданная функция.

Для системы уравнений (4.1.1) с учетом соотношений (4.1.3) можно сформулировать следующие *основные краевые задачи*. Сделаем это для статического случая.

- а) *Первая основная краевая задача*. Заданы объемные силы f_i . Определить шесть компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и три компоненты вектора перемещения \mathbf{u} внутри тела, если заданы¹ следующие граничные условия на поверхности тела S (рис. 1, а):

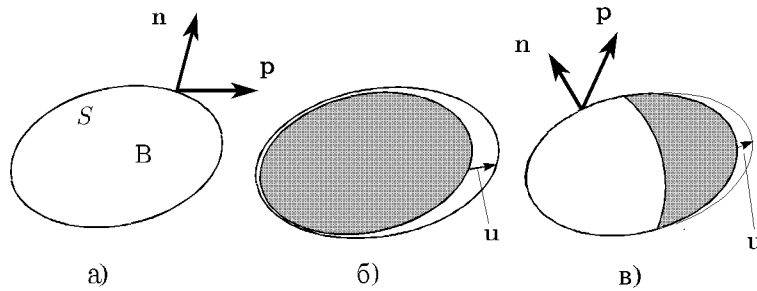


Рис. 1

$$(\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i \quad \text{на } S, \quad (3)$$

где \hat{p}_i — известные функции координат точки на поверхности S тела V .

¹ Граничные условия (3) можно интерпретировать следующим образом. Пусть $P \in V$ — произвольная точка внутри тела и $Q \in S$ — произвольная точка на поверхности тела. Тогда $\lim_{P \rightarrow Q} \mathbf{p}_n(P) = \hat{\mathbf{p}}(Q)$.

- б) *Вторая основная краевая задача.* Заданы объемные силы f_i . Определить шесть компонент тензора напряжений σ и три компоненты вектора перемещения \mathbf{u} внутри тела, если заданы² следующие условия на границе тела S (см. рис. 1, б):

$$u_i(x_i) = \hat{u}_i \quad \text{на } S, \quad (4)$$

где u_i — известные функции координат точки на границе S тела B .

- в) *Третья (смешанная) основная краевая задача.* Заданы объемные силы f_i . Определить шесть компонент тензора напряжений σ и три компоненты вектора перемещения \mathbf{u} внутри тела, если вектор напряжения задан на части границы S_p , а вектор перемещения — на участке границы S_u ($S_p \cup S_u = S$; см. рис. 1, в):

$$(\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ij}n_j = \hat{p}_i \quad \text{на } S_p, \quad u_i(x_i) = \hat{u}_i \quad \text{на } S_u, \quad (5)$$

где \hat{p}_i и \hat{u}_i — известные функции координат точки на границе S тела B .

В случае первой основной краевой задачи имеем систему уравнений (4.1.1) при наличии условий (3). Найденные компоненты тензора напряжений подставляются в уравнения (4.1.2) для нахождения компонент тензора деформаций. Наконец, вектор перемещения определяется из равенств (4.1.3). Он должен удовлетворять уравнениям совместности (4.1.4). Заметим, что в соответствии с выражениями (2.7.7) поле перемещений определяется только с точностью до движения тела как абсолютно твердого.

Для второй основной краевой задачи рассматриваем соотношения (4.1.6) при условиях (4). Тензор деформаций определяется из уравнений (4.1.3), а тензор напряжений — из (4.1.2).

В случае смешанной краевой задачи нужно решить системы уравнений (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.6) при условиях (3), (4).

Три типа краевых задач, сформулированных выше, — отнюдь не единственные краевые задачи, важные в теории упругости. Существует много других комбинаций задания тензора напряжений и вектора перемещения, имеющих значение в инженерной практике. Некоторые авторы определяют такие краевые задачи, как: *четвертая краевая задача* — в которой заданы нормальная компонента вектора перемещения ($u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$) и касательная компонента вектора напряжения на поверхности S или на части поверхности S ; *пятая краевая*

² Как и выше, условия (4) могут быть интерпретированы следующим образом:
 $\lim_{P \rightarrow Q} \mathbf{u}(P) = \dot{\mathbf{u}}(Q)$ для $P \in B$ и $Q \in S$.

задача — в которой заданы нормальная компонента вектора напряжения и касательная компонента вектора перемещения ($u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$); *шестая краевая задача* — в которой заданы определенные соотношения между компонентами тензора напряжений и вектором перемещения. Краевые задачи этих типов важны, например, в контактных задачах.

В динамических случаях можно сформулировать те же три типа основных краевых задач. Основное различие в том, что в динамических задачах мы должны задать начальные значения для вектора перемещения и его производной по времени; т. е. необходимо задать начальное значение для *вектора скорости*. Таким образом, если мы рассматриваем движение тела за время $t \in [t_0, \infty)$, то нужно задать

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=t_0} &= \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3), \\ \left. \frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} &= \hat{v}_i(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, в случае термоупругости мы должны задать начальные и граничные условия для обобщенного уравнения теплопроводности (4.1.23). Распределение начальной температуры может быть описано как непрерывная или разрывная функция координат

$$T(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=t_0} = \hat{T}(x_1, x_2, x_3), \quad (7)$$

где $\hat{T}(x_1, x_2, x_3)$ — известная функция.

На границе термоупругого тела может быть задан ряд условий. Возможно, самое простое из них — это когда задана температура на всей этой границе S или на ее части, обозначенной как S_T :

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{T}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{на} \quad S_T, \quad (8)$$

где $\bar{T}(x_1, x_2, x_3, t)$ — известная функция (возможно, зависящая от времени) и $S_T \subseteq S$.

На границе или на ее части ($S_q \subseteq S$) можно задать поток тепла. В этом случае получаем

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \hat{q}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{на} \quad S_q, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i, \quad (9)$$

где $\hat{q}(x_1, x_2, x_3, t)$ — известная функция. В случае так называемого *закона охлаждения Ньютона* граничные условия на $S_N \subseteq S$ таковы:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = c(T^* - T) \quad \text{на} \quad S_N, \quad (10)$$

где c — постоянная, а T^* — температура окружающей среды.

4.3 Уравнения Ламе в цилиндрической и сферической системах координат

В параграфе 4.1 мы записали уравнения движения с помощью вектора перемещения (см. (4.1.6)). Их можно записать и в векторной форме:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \left(\mathbf{f} - \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\right) \\ & = (\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div} \mathbf{u} - 2\mu(\operatorname{curl} \mathbf{w}) + \left(\mathbf{f} - \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\right) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

где ∇^2 определяется формулой (4.1.7), $\nabla\operatorname{div} \mathbf{u} = (\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})/\partial x_i)\mathbf{e}_i$, а \mathbf{w} — вектор поворота, определяемый из соотношений (2.4.14) и (2.4.15). Запишем уравнение (1) в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Для этого используем формулы (1.5.6), (3.6.1) и результаты задачи 8 из главы 3. Таким образом, в случае цилиндрической системы координат имеем

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)r\frac{\partial\vartheta}{\partial r} - 2\mu\left[\frac{\partial\omega_z}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial z}(r\omega_\theta)\right] + r\left(f_r - \rho_0\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right) = 0, \\ & (\lambda + 2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} - 2\mu\left[\frac{\partial\omega_r}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right] + \left(f_\theta - \rho_0\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\right) = 0, \quad (2) \\ & (\lambda + 2\mu)r\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) - \frac{\partial\omega_r}{\partial\theta}\right] + r\left(f_z - \rho_0\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta & = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \omega_{\theta r} & = \omega_z = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right], \\ \omega_{z\theta} & = \omega_r = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - r\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right], \\ \omega_{rz} & = \omega_\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что ω_z , ω_r , ω_θ представляют собой компоненты тензора бесконечно малого поворота в цилиндрической системе координат.

В случае осевой симметрии получаем

$$u_\theta = 0, \quad (4)$$

и u_r , u_z не зависят от θ . Тогда уравнения (2) и (3) принимают вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial}{\partial z}(r\omega_\theta) + r \left(f_r - \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) &= 0, \quad f_\theta = 0, \\ (\lambda + 2\mu)r \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - 2\mu \frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) + r \left(f_z - \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\vartheta = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (6)$$

Рассмотрим следующий вид системы уравнений (5) для статической задачи при отсутствии объемных сил. В этом случае она выглядит так:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)r} \frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) = 0. \quad (7)$$

Из формул (7) можем исключить ϑ . Получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) \right] + \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Процедура решения заключается в следующем. Сначала уравнение (8) решается для ω_θ . Затем из равенств (7) вычисляем первый инвариант тензора деформаций ϑ . Чтобы найти компоненты вектора перемещения, используем выражения (3) и (6); имеем

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = 2\omega_\theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \vartheta. \quad (9)$$

В уравнениях (9) правые части известны, а значит, можно найти u_r и u_z . Система (9) сводится к одному уравнению в частных производных дифференцированием первого уравнения (9) по z , а второго — по r и сложением результатов. Тогда получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r}. \quad (10)$$

Перейдем к сферической системе координат $(\rho, \varphi, \vartheta)$. Из выражений (1.5.9) и (3.6.2) находим

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\rho \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\omega_\theta \sin \varphi) \right] + \rho \sin \varphi \left(f_\rho - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \omega_\varphi) \right] + \rho \left(f_\theta - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \omega_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial \omega_\rho}{\partial \theta} \right] + \rho \sin \varphi \left(f_\varphi - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\vartheta &= E_{\rho\rho} + E_{\varphi\varphi} + E_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \sin \varphi) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \\ \omega_{\theta\varphi} = \omega_\rho &= \frac{1}{2\rho \sin \varphi} \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta \sin \varphi) \right], \\ \omega_{\varphi\rho} = \omega_\theta &= \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\varphi) \right], \\ \omega_{\rho\theta} = \omega_\varphi &= \frac{1}{2\rho \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right].\end{aligned}\quad (12)$$

Для осесимметричных задач в сферической системе координат получаем, что все компоненты вектора перемещения не зависят от θ и $u_\theta = 0$. Тогда выражения (11) и (12) приводятся к виду

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} + 2\mu \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega_\theta \sin \varphi) + \rho \left(f_\rho - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} \right) &= 0, \quad f_\theta = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \omega_\theta \sin \varphi) + \rho \left(f_\varphi - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \right) &= 0,\end{aligned}\quad (13)$$

и

$$\begin{aligned}\vartheta &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \sin \varphi), \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\varphi) \right], \quad \omega_\rho = \omega_\varphi = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Сделаем два дополнительных замечания относительно уравнений Ламе (1). Они получены из закона Гука и линейного тензора деформаций. Резонно поставить вопрос о форме уравнений Ламе в случае, когда в законе Гука (3.3.53) используется нелинейный тензор деформаций³. Можно показать, что нелинейные уравнения Ламе отличаются от линейных наличием аддитивного члена, имеющего вид объемных сил. Более детально этот вопрос освещен в работе [17].

Другое замечание касается термоупругости. А именно уравнения (4.1.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\mathbf{f} - \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) - \gamma \nabla \bar{\theta} \\ = (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - 2\mu (\operatorname{curl} \mathbf{w}) + \left(\mathbf{f} - \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) - \gamma \nabla \bar{\theta} = 0,\end{aligned}\quad (15)$$

³ Уравнения Ламе для случая, когда используется нелинейный тензор деформаций, впервые были получены Н.А. Кильчевским в 1940 г. (см. [17]).

где $\nabla\bar{\theta}$ — градиент температурного приращения $\bar{\theta} = T - T_0$. В цилиндрической и сферической системах координат градиенты температурного приращения таковы⁴:

$$\nabla\bar{\theta} = \nabla(T - T_0) = \frac{\partial(T - T_0)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(T - T_0)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial(T - T_0)}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (16)$$

$$\nabla\bar{\theta} = \nabla(T - T_0) = \frac{\partial(T - T_0)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(T - T_0)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial(T - T_0)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (17)$$

соответственно. При использовании уравнения (16) уравнения (2) в случае термоупругости принимают вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}(r\omega_\theta) \right] + r \left[\left(f_r - \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} \right] &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right] + \left(f_\theta - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} &= 0, \quad (18) \\ (\lambda + 2\mu)r \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right] + r \left[\left(f_z - \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right] &= 0. \end{aligned}$$

В сферической системе координат имеем

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\rho \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(\omega_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \theta} \right] \\ + \rho \sin \varphi \left[\left(f_\rho - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \rho} \right] &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \omega_\varphi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right] \\ + \rho \left(f_\theta - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} &= 0, \quad (19) \\ (\lambda + 2\mu) \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \omega_\theta \sin \varphi) \right] \\ + \sin \varphi \left[\rho \left(f_\varphi - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi} \right] &= 0. \end{aligned}$$

К уравнениям (18), (19) нужно добавить уравнение теплопроводности (4.1.23). В цилиндрической системе координат оно имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \frac{q}{\lambda_0} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}, \quad (20)$$

⁴ Выражения для градиента скаляра, дивергенции вектора и оператора Лапласа (дивергенция градиента) в цилиндрической и сферической системах координат можно получить из уравнений (б) и (в) задачи 8 главы 3.

а в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \theta^2} - \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{T_0} \right) + \frac{q}{\lambda_0} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (21)$$

4.4 Единственность решения

Предположим, что решение краевой задачи, поставленной в параграфе 4.2, существует. Докажем его единственность. Сначала обратимся к статическим задачам.

Рассмотрим интеграл

$$J = \iint_S (p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3) dS = \iint_S p_i u_i dS, \quad (1)$$

где p_i — компоненты вектора напряжения и S — поверхность тела V . Так как $p_i = \sigma_{ij} n_j$, имеем

$$J = \iint_S (P n_1 + Q n_2 + R n_3) dS, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} P &= \sigma_{11} u_1 + \sigma_{21} u_2 + \sigma_{31} u_3, \\ Q &= \sigma_{12} u_1 + \sigma_{22} u_2 + \sigma_{32} u_3, \\ R &= \sigma_{13} u_1 + \sigma_{23} u_2 + \sigma_{33} u_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Из теоремы Гаусса следует, что

$$J = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dV, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \\ = u_1 \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) + u_2 \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) \\ + u_3 \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right) + \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ + \sigma_{23} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \sigma_{31} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя уравнения равновесия (1.3.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} = & -(f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3) \\ & + [\sigma_{11} E_{11} + \sigma_{22} E_{22} + \sigma_{33} E_{33} + 2\sigma_{12} E_{12} + 2\sigma_{13} E_{13} + 2\sigma_{23} E_{23}]. \end{aligned} \quad (6)$$

В дальнейшем мы покажем (см. формулу (7.2.23)), что выражение в квадратных скобках в формуле (6) равно $2u$, где u — плотность энергии деформации, определенная с помощью соотношения (3.3.9). Используя закон Гука (3.3.43), можем преобразовать выражение в квадратных скобках. Получим

$$\begin{aligned} 2u = & (\sigma_{11} E_{11} + \sigma_{22} E_{22} + \sigma_{33} E_{33} + 2\sigma_{12} E_{12} + 2\sigma_{13} E_{13} + 2\sigma_{23} E_{23}) \\ = & \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 + 2\mu(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 + 2E_{12}^2 + 2E_{13}^2 + 2E_{23}^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Если $\mu > 0$, $\lambda > 0$, то функция u является положительно определенной функцией компонент тензора деформаций и $u = 0$ тогда и только тогда, когда все компоненты тензора деформаций равны нулю. Объединяя выражения (1), (2), (4) и (6), получаем

$$\iiint_V f_i u_i dV + \iint_S p_i u_i dS = 2 \iiint_V u dV. \quad (8)$$

Уравнение (8) выражает **теорему Клапейрона**: *Если тело находится в равновесии под действием объемных сил f_i и поверхностных сил p_i , то работа этих сил на перемещении u_i из начального состояния равна интегралу по объему тела от функции $2u$, заданной формулой (7).*

Теперь вернемся к доказательству единственности. Предположим, что любая фундаментальная задача параграфа 4.2 имеет два решения. Пусть u_i^I , E_{ij}^I и σ_{ij}^I являются соответственно полями перемещений, деформаций и напряжений для первого решения, а u_i^{II} , E_{ij}^{II} и σ_{ij}^{II} соответствуют тем же полям для второго решения. Поскольку уравнения, которым удовлетворяют оба решения, линейны, то их разность

$$u_i = u_i^I - u_i^{II}; \quad E_{ij} = E_{ij}^I - E_{ij}^{II}; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II} \quad (9)$$

также является решением уравнений равновесия (1.3.4) при

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0. \quad (10)$$

Таким образом, из уравнения (8) вытекает, что

$$\iint_S p_i u_i dS = 2 \iiint_V u dV. \quad (11)$$

Заметим, что в первой основной краевой задаче поверхностные силы, соответствующие u_i , σ_{ij} , равны нулю, так как оба решения удовлетворяют одинаковым краевым условиям. Таким образом, в первой основной задаче имеем

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0 \quad \text{на } S, \quad (12)$$

во второй основной задаче

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{на } S, \quad (13)$$

и, наконец, в третьей краевой задаче

$$\sigma_{ij}n_j = p_i = 0 \quad \text{на } S_p; \quad u_i = 0 \quad \text{на } S_u. \quad (14)$$

Во всех случаях равенство (11) означает, что

$$\iiint_V u \, dV = 0. \quad (15)$$

Функция u является положительно определенной функцией компонент тензора деформаций (см. (7)). Тогда из условия (15) следует, что $E_{ij} = 0$, или

$$E_{ij}^I = E_{ij}^{II}, \quad (16)$$

т. е. тензоры деформаций обоих решений тождественны, откуда вытекает, что напряжения также тождественны:

$$\sigma_{ij}^I = \sigma_{ij}^{II}. \quad (17)$$

Итак, мы получили **теорему единственности**: *решение основных статических краевых задач приводит к единственным полям деформаций и напряжений.*

Первое доказательство теоремы единственности принадлежит Кирхгофу (1859). Отметим, что равенство (16) не гарантирует единственности перемещений. То есть из (16) следует, что два решения u_i^I и u_i^{II} различаются по полям перемещений, при которых тензор деформаций равен нулю, что соответствует перемещению тела как абсолютно твердого. Во второй и третьей основных краевых задачах перемещения определяются единственным образом, так как они заданы на части границы и перемещения тела как твердого устранены.

Представленный здесь анализ охватывает и односвязные, и многосвязные тела. Однако он неприменим для нелинейной теории упругости (нелинейность материала или геометрическая нелинейность), описываемой, например, уравнениями (3.3.53). Потеря устойчивости упругих тел есть результат неединственности решения статических задач нелинейной упругости (см. главу 10).

Рассмотрим теперь динамическую термоупругую задачу. Для этого свяжем механические и тепловые свойства системы. Интегрируя уравнение (4.1.1) по объему тела и используя теорему о дивергенции, получаем⁵

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \\ = \iiint_V f_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV + \iint_S p_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dS. \end{aligned} \quad (18)$$

Два члена в левой части формулы (18) представляют скорость изменения внутренней и кинетической энергии. В правой части первый член есть работа объемных сил, а второй — работа поверхностных сил (см. [30]). Любые процессы деформации в термоупругом теле должны удовлетворять уравнениям (18), уравнениям движения (4.1.1)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (19)$$

и обобщенному уравнению теплопроводности (4.1.24), которое мы запишем в виде (см. (3.5.19))

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) - \gamma T_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + q = c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (20)$$

где c_ϵ — характеристический нагрев при постоянной деформации и γ — постоянная, определяемая из формулы (3.5.13).

К системе уравнений (19), (20) добавим следующие граничные и начальные условия (см. (4.2.5)):

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_n)_i &= \sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i(x_i, t), \quad x_i \in S_p; \\ u_i(x_i) &= \hat{u}_i(x_i, t), \quad x_i \in S_u; \\ \hat{q}_i n_i &= \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = f_q(x_i, t), \quad x_i \in S; \\ u_i(x_i, t_0)_0 &= \bar{u}_i(x_i), \quad \frac{\partial u_i(x_i, t_0)}{\partial t} = \bar{v}_i(x_i), \quad x_i \in V; \\ T(x_i, t_0) &= f_T(x_i), \quad x_i \in V, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\hat{p}_i, \hat{u}_i, \dots, f_T$ — известные функции.

⁵ На самом деле в нелинейном случае первый член под интегралом должен быть $\sigma_{ij} d_{ij}$, где d_{ij} — компоненты тензора растяжения ($d_{ij} = (1/2)[\partial/\partial x_j(\partial u_i/\partial t) + \partial/\partial x_i(\partial u_j/\partial t)]$). Только в случае малых деформаций компоненты d_{ij} равны производным по времени от тензора деформаций.

Предположим, что существуют два решения системы уравнений (19)–(21). Обозначим их как $u_i^I, E_{ij}^I, \sigma_{ij}^I, T^I$ и $u_i^{II}, E_{ij}^{II}, \sigma_{ij}^{II}, T^{II}$. Функции

$$u_i = u_i^I - u_i^{II}, \quad E_{ij} = E_{ij}^I - E_{ij}^{II}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I - \sigma_{ij}^{II}, \quad T = T^I - T^{II}, \quad (22)$$

удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad \lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) - \gamma T_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (23)$$

при условиях

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}n)_i &= \sigma_{ij} n_j = 0, \quad x_i \in S_p; \\ u_i(x_i) &= 0, \quad x_i \in S_u; \\ \hat{q}_i n_i &= \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i = 0, \quad x_i \in S; \\ u_i(x_i, t_0) &= 0, \quad \frac{\partial u_i(x_i, t_0)}{\partial t} = 0, \quad T(x_i, t_0) = 0, \quad x_i \in V. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя первый закон термодинамики (18) для нахождения решений (22) уравнений (23) при условиях (24), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (25)$$

Компоненты тензора напряжений определяются из равенства (3.5.9):

$$\sigma_{ij} = (\lambda \vartheta - \gamma T) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} = 2\mu \left[E_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\vartheta - \frac{1+\nu}{\nu} \alpha_t T \right) \delta_{ij} \right], \quad (26)$$

где $\bar{\theta} = T$ (см. параграф 4.1) и использованы соотношения $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ (см. задачу 3 главы 3) и $\gamma = \alpha_t(3\lambda + 2\mu) = 2\mu\alpha_t(1+\nu)/(1-2\nu)$. Из уравнений (25), (26) следует, что

$$\begin{aligned} 2\mu \iiint_V \left(E_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_t T \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) dV \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV = 0, \quad (27) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \iiint_V \left(E_{ij} E_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^2 \right) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \right] \\ = \frac{E\alpha_t}{1-2\nu} \iiint_V T \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dV. \quad (28) \end{aligned}$$

Подставим член $\partial\vartheta/\partial t$ из уравнения (23) в формулу (28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \iiint_V \left(E_{ij} E_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^2 \right) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \right] \\ = \frac{E\alpha_t}{(1-2\nu)\gamma T_0} \iiint_V T \left(\lambda_0 \nabla^2 T - c_\epsilon \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV. \end{aligned} \quad (29)$$

Первое слагаемое из левой части (29) может быть преобразовано с использованием теоремы дивергенции. Получим

$$\begin{aligned} \iiint_V T \nabla^2 T dV &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV - \iiint_V \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV \\ &= \iint_S T \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS - \iiint_V \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \iint_S T \hat{q}_i n_i dS - \iiint_V \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV. \end{aligned} \quad (30)$$

Из граничных условий (24) заключаем, что первое слагаемое правой части равно нулю, таким образом, формула (29) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \iiint_V \left(E_{ij} E_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^2 \right) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \right] \\ + \frac{E\alpha_t c_\epsilon}{(1-2\nu)\gamma T_0} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V T^2 dV \\ = - \frac{E\alpha_t \lambda_0}{(1-2\nu)\gamma T_0} \iiint_V \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV. \end{aligned} \quad (31)$$

Локальная форма второго закона термодинамики означает, что поток тепла и градиент температуры должны удовлетворять неравенству

$$\frac{\hat{q}_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \quad (34)$$

В нашем случае⁶ $\hat{q}_i = \lambda_0 \partial T / \partial x_i$, значит, из неравенства (32) следует, что $\lambda_0 > 0$, и мы полагаем, что это условие соблюдается. Следова-

⁶ В общем случае $\hat{q}_i = k_{ij} \partial T / \partial x_j$, где $[k_{ij}]$ — тензор теплопроводности.

тельно, выражение (31) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \iiint_V \left(E_{ij} E_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^2 \right) dV \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV + \frac{E\alpha_t c_\epsilon}{(1-2\nu)\gamma T_0} \frac{1}{2} \iiint_V T^2 dV \right] \leq 0. \quad (33) \end{aligned}$$

Неравенство (33) превращается в равенство при $t = t_0$. Выражение в скобках есть положительно определенная квадратичная функция \bar{S} от компонент вектора скорости, тензора деформаций и температуры. Запишем неравенство (33) в виде

$$\frac{d\bar{S}}{dt} \leq 0, \quad \bar{S}(t_0) = 0. \quad (34)$$

Отсюда вытекает, что \bar{S} есть убывающая функция. Учитывая равенство (34), делаем вывод, что $\bar{S} \leq 0$. Но так как \bar{S} — положительно определенная функция, то $\bar{S} \geq 0$, откуда заключаем, что

$$\begin{aligned} \bar{S} = \mu \iiint_V \left(E_{ij} E_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^2 \right) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \\ + \frac{E\alpha_t}{1-2\nu} \frac{c_\epsilon}{\gamma T_0} \frac{1}{2} \iiint_V T^2 dV = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

для всех $t \geq t_0$. Из равенства (35) приходим к выводу, что разности решений равны нулю, следовательно:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad E_{ij} = 0, \quad T = 0, \quad (36)$$

для всех $t \geq t_0$. Таким образом, решение краевой задачи (19)–(21) единственно с точностью до движения тела как абсолютно твердого. Если перемещение задано на поверхности S таким образом, что движение тела как твердого исключено, то решение единственно.

4.5 Предположения о форме решения уравнений равновесия

Не существует общего метода решения уравнений равновесия для упругого тела. Во многих практических случаях делаются специальные предположения о форме решений (“модели”). Обычно эта форма

содержит одну или более вспомогательных функций, которые тождественно удовлетворяют части полной системы уравнений равновесия. Вспомогательные функции вводятся внутри предполагаемого класса так, чтобы удовлетворять оставшимся уравнениям равновесия и/или граничным условиям. В зависимости от используемых уравнений (Ламе или Бельтрами–Мичелла) вводятся предположения либо о векторе перемещения, либо о компонентах тензора напряжений. Мы рассмотрим несколько таких моделей.

А. Предположения о перемещении

Для решения уравнений Ламе (4.1.8) вводим предположение о векторе перемещений. Ниже приведены конкретные алгоритмы.

А.1. Вектор Галеркина

Известно, что любое векторное поле (в нашем случае \mathbf{u}) может быть представлено как сумма двух векторных полей, скажем \mathbf{v} и \mathbf{w} , таких, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $\operatorname{curl} \mathbf{w} = 0$. Необходимое условие для существования таких \mathbf{v} и \mathbf{w} — это существование скалярной функции φ и векторного поля Ψ таких, что $\mathbf{v} = \operatorname{curl} \Psi = \nabla \times \Psi$ и $\mathbf{w} = \operatorname{grad} \varphi$. Используя это, предположим, что поле перемещений задается в виде

$$2\mu\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \nabla \times \Psi. \quad (1)$$

Предположим далее, что член $\operatorname{curl} \Psi = \nabla \times \Psi$ может быть выражен в терминах новой векторной функции $\Phi = F_i \mathbf{e}_i$, удовлетворяющей соотношениям

$$(\nabla \times \Psi)_i = c \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2)$$

где c — константа, определяемая ниже. Тогда уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$2\mu u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_j} \right). \quad (3)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3 \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \Phi, \quad (4)$$

то второе слагаемое правой части равенства (3) представляет собой градиент скаляра $(\partial F_i / \partial x_i) = \operatorname{div} \Phi$. Мы берем скалярную функцию $\operatorname{div} \Phi$, объединяем ее со скалярной функцией φ и переопределяем функцию Φ так, что равенство (1) принимает вид

$$2\mu u_i = c F_{i,jj} - F_{j,ij}. \quad (5)$$

Подставляя равенство (5) в (4.1.9) при $f_i = 0$, получаем

$$(1 - 2\nu)[cF_{i,jju} - F_{j,iju}] + [cF_{k,jjk} - F_{j,jkk}]_{,i} = \\ = (1 - 2\nu)[cF_{i,jju} - F_{j,uji}] + (c - 1)F_{j,kkj} = 0. \quad (6)$$

Напомним, что здесь мы использовали обозначение $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$. Из формулы (6) следует, что

$$cF_{i,jju} + \left(\frac{c-1}{1-2\nu} - 1\right)F_{j,kkj} = 0. \quad (7)$$

Если выбрать константу c такой, чтобы было верно равенство

$$\frac{c-1}{1-2\nu} - 1 = 0, \quad (8)$$

или $c = 2(1 - \nu)$, то вектор перемещения из уравнения (5) принимает вид ($F_i = H_i$)

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu)H_{i,jj} - H_{j,ij}. \quad (9)$$

Вектор $\mathbf{H} = H_i \mathbf{e}_i$ называется *вектором Галеркина*.

Компоненты вектора \mathbf{H} удовлетворяют бигармоническому уравнению (это следует из формулы (7) при константе c , выбранной согласно уравнению (8))

$$\nabla^4 H_i = H_{i,jjkk} = \frac{\partial^4 H_i}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 H_i}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 H_i}{\partial x_3^4} + \\ + 2\frac{\partial^4 H_i}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2\frac{\partial^4 H_i}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + 2\frac{\partial^4 H_i}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} = 0. \quad (10)$$

Если мы найдем вектор Галеркина из формулы (10), то вектор перемещения определяется выражением (9) и можно легко найти компоненты тензора напряжений.

А.2. Потенциал Ламе. Функция Лява

В особом случае, когда компоненты вектора Галеркина не только бигармонические $\nabla^4 H_i = 0$, но и гармонические функции

$$\nabla^2 H_i = 0, \quad (11)$$

выражение (9) принимает вид

$$2\mu u_i = -H_{j,ji}. \quad (12)$$

Введем *потенциал перемещений*

$$\phi = H_{j,j} = \operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3}, \quad (13)$$

тогда уравнение (12) станет таким:

$$2\mu u_i = -\phi_{,i}. \quad (14)$$

Скалярная функция ϕ называется *потенциалом перемещений Ламе*.

Предположим, что вектор Галеркина имеет только одну компоненту, скажем $H_3 = Z$, тогда

$$\nabla^4 Z = 0. \quad (15)$$

В этом случае Z называется *функцией перемещений Лява*. Заметим, что соотношение (9) сводится к виду

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_3}, & 2\mu u_2 &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ 2\mu u_3 &= 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

А.3. Функции Папковича-Нейбера

В некоторых задачах вектор перемещения предлагается искать в форме комбинаций гармонических функций

$$u_i = A(\phi_0 + x_j \phi_j)_{,i} + B\phi_i, \quad (17)$$

где A и B — постоянные и

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Как это видно из условия (17), вектор перемещения выражается через четыре гармонические функции.

Предположения (17), (18) были использованы Папковичем и Нейбером независимо друг от друга⁷. Миндлиным было показано существование связи между вектором Галеркина и функциями Папковича-Нейбера. Действительно, предположим, что лапласиан $\nabla^2 H_i$ и дивергенция $\partial H_i / \partial x_i$ компонент вектора Галеркина задаются так:

$$H_{i,jj} = \nabla^2 H_i = 2\bar{\phi}_i, \quad H_{i,i} = \operatorname{div} H_i = \psi, \quad (19)$$

где $\bar{\phi}_i$ и ψ — функции, подлежащие определению. Тогда из равенства (10) следует

$$\nabla^4 H_i = H_{i,jjkk} = 2\bar{\phi}_{i,kk} = 2\nabla^2 \bar{\phi}_i = 0, \quad (20)$$

и это означает, что $\bar{\phi}_i$ — гармонические функции. Из соотношений (19) следует также, что

$$H_{i,ijj} = 2\bar{\phi}_{i,i} = \psi_{,jj} = \nabla^2 \psi. \quad (21)$$

⁷ Папкович П.Ф. *Извест. Акад. наук СССР, Физ. Мат. Сер.*, **10**, 1425–1435 (1932); Нейбер Г. *Zeit. Angew. math. Mech.*, **14**, 203–212 (1934).

Применяя оператор Лапласа $\nabla^2(\cdot)$ к обеим частям равенства (21), видим, что

$$\nabla^4 \psi = \psi_{,iijj} = 0, \quad (22)$$

т. е. ψ — бигармоническая функция. Из (21) имеем

$$\nabla^2 \psi = \psi_{,ii} = 2\bar{\phi}_{i,i}, \quad (23)$$

где

$$\psi = x_i \bar{\phi}_i + \phi_0, \quad (24)$$

а ϕ_0 — произвольная гармоническая функция. Таким образом, соотношение (24), вытекающее из специального предположения (19) о векторе Галеркина, сводится к потенциалу перемещений (см. выражения (13), (14) и (19)) вида (17). Подставив формулы (19) и (24) в выражение (9), получаем

$$2\mu u_i = 4(1-\nu)\bar{\phi}_i - (x_m \bar{\phi}_m + \phi_0)_{,i} = (3-4\nu)\bar{\phi}_i - x_j \bar{\phi}_{j,i} - \phi_{0,i}, \quad (25)$$

где, как было установлено, ϕ_0 и $\bar{\phi}_i$, $i = 1, 2, 3$, — гармонические функции.

В определенных случаях ($\nu \neq 1/4$, ограничения на область) можно ограничиться тремя гармоническими функциями в выражении (25) (см. [86]).

Б. Предположения о напряжениях

Для решения уравнений равновесия, выраженных в терминах напряжений, у нас есть система, состоящая из уравнений (1.3.10) и соотношений Бельтрами–Мичелла (3.7.21). В случае нулевых объемных сил

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ij} = 0 \quad (26)$$

обычно используется *метод функций напряжений*. Рассмотрим несколько возможных способов выбора функций напряжений.

Б.1. Функции напряжений Максвелла

Пусть U_1 , U_2 и U_3 — такие функции, что компоненты напряжения задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= U_{2,33} + U_{3,22}, & \sigma_{22} &= U_{3,11} + U_{1,33}, & \sigma_{33} &= U_{1,22} + U_{2,11}, \\ \sigma_{12} &= -U_{3,12}, & \sigma_{23} &= -U_{1,23}, & \sigma_{13} &= -U_{2,13}. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу соотношений (27) первая группа уравнений (26) тождественно удовлетворяются. Подставив (27) во вторую группу уравнений (26),

получаем

$$\begin{aligned}
& [(1 + \nu)\nabla^2 U_2 - \Theta]_{,33} + [(1 + \nu)\nabla^2 U_3 - \Theta]_{,22} = 0, \\
& [(1 + \nu)\nabla^2 U_1 - \Theta]_{,22} + [(1 + \nu)\nabla^2 U_2 - \Theta]_{,11} = 0, \\
& [(1 + \nu)\nabla^2 U_3 - \Theta]_{,11} + [(1 + \nu)\nabla^2 U_1 - \Theta]_{,33} = 0, \\
& - [(1 + \nu)\nabla^2 U_3 - \Theta]_{,12} = 0, \\
& - [(1 + \nu)\nabla^2 U_2 - \Theta]_{,13} = 0, \\
& - [(1 + \nu)\nabla^2 U_1 - \Theta]_{,23} = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Для записи уравнений (28) мы использовали формулу (4.1.17). Из (28) можно получить три независимых соотношения, которым должны удовлетворять функции U_i . Функции U_i называются *функциями напряжений Максвелла*.

Б.2. Функции напряжений Финци

Функции напряжений Максвелла зачастую трудно получить. Финци предложил представлять функции напряжений в форме *тензора функций напряжений*, а именно предположим, что функции U_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, заданы таким образом, что выполняются следующие соотношения (см. [54]):

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= U_{22,33} + U_{33,22} - 2U_{23,23}, \\
\sigma_{22} &= U_{11,33} + U_{33,11} - 2U_{31,31}, \\
\sigma_{33} &= U_{11,22} + U_{22,11} - 2U_{12,12}, \\
\sigma_{12} &= [U_{23,1} + U_{31,2} - U_{12,3}]_{,3} - U_{33,12}, \\
\sigma_{13} &= [U_{23,1} + U_{31,2} + U_{12,3}]_{,2} - U_{22,13}, \\
\sigma_{23} &= [-U_{23,1} + U_{31,2} + U_{12,3}]_{,1} - U_{11,23},
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$U_{ij} = U_{ji}. \tag{30}$$

Функции U_{ij} используются как компоненты тензора второго ранга \mathbf{U} . Они называются *функциями напряжений Финци*. Соотношения (29) можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{imr} \epsilon_{jns} U_{rs,mn}, \tag{31}$$

где ϵ_{ijk} — перестановочный символ Леви-Чивита (см. определение в задаче 12 из главы 2). Можно легко показать, что равенства (29) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (26); таким образом, остается только одно условие: шесть функций U_{ij} должны удовлетворять условиям совместности (26).

В схеме задач теории упругости часто используется *функция напряжений Эйри*. Их можно получить из функций напряжений Максвелла, если положить $U_1 = U_2 = 0$ и $U_3 \neq 0$.

4.6 Методы решения

В предыдущих параграфах мы привели системы уравнений теории упругости. При этом выделены следующие три метода решения этих уравнений.

Прямой метод решения — это метод, в котором мы находим поля напряжений, деформаций и перемещений через заданные поверхностные и объемные силы. Вообще говоря, прямой метод решения приводит к значительным математическим трудностям, поэтому он не слишком удобен на практике.

В *обратном методе* мы полагаем известным либо поле перемещений, либо поле напряжений и находим все другие величины, включая поверхностные и объемные силы, соответствующие данному полю. В обратном методе нет больших математических затруднений, но часто бывает нелегко получить решение, представляющее практический интерес.

В *полуобратном методе* (или методе Сен-Венана) считаются частично заданными напряжения и (или) перемещения. Затем используются уравнения теории упругости для получения уравнений, с помощью которых находим оставшиеся неопределенными напряжения и (или) деформации. Полуобратный метод с успехом применяется при решении многих инженерных задач. Действительно, использование метода Сен-Венана приводит к решениям (ныне считающимся классическими) при решении задач изгиба и кручения призматического стержня.

Многие численные математические процедуры используют для решения систем уравнений все три метода. Эти процедуры можно разделить на три группы:

- а) те, в которых достигается точное аналитическое решение;
- б) те, в которых получают приближенное аналитическое решение;
- в) те, в которых получают численное решение.

Естественно, что в каждом конкретном случае главной целью является получение решения методами группы (а). Кратко изложим некоторые из *математических методов*. Более детальное рассмотрение математического аппарата можно найти в специальной литературе (см., к примеру, [31]).

1. Метод комплексной переменной

Для решения плоских задач теории упругости успешно применяется метод комплексной переменной, разработанный Г.В. Колосовым и Н.И. Мусхелишвили (см. [29]). Он базируется на особой форме решения

бигармонического уравнения. А именно в двумерном случае любое решение бигармонического уравнения может быть выражено через две аналитические функции комплексной переменной. Это решение далее используется для определения напряжений внутри тела. Мы рассмотрим метод комплексной переменной ниже, в параграфе 6.4.

2. Метод интегральных преобразований

В этом методе число независимых переменных уменьшается путем применения интегральных преобразований. Затем решается полученная система уравнений (в большинстве случаев аналитически). Искомое решение получается применением обратного преобразования. Пусть для определенности $\bar{f}(\lambda)$ — преобразованная функция $f(x)$. Тогда

$$\bar{f}(\lambda) = \int_a^b f(x)K(x, \lambda) dx, \quad (1)$$

где $K(x, \lambda)$ — ядро преобразования, а пределы интегрирования a и b могут быть конечными или бесконечными. Отметим наиболее часто используемые преобразования:

$$\begin{aligned} \text{Лапласа :} & \quad K(x, \lambda) = e^{-\lambda x}; \\ \text{Фурье :} & \quad K(x, \lambda) = e^{i\lambda x}, \quad i = \sqrt{-1}; \\ \text{Меллина :} & \quad K(x, \lambda) = x^{\lambda-1}; \\ \text{Бесселя :} & \quad K(x, \lambda) = J_n(\lambda x)x, \end{aligned} \quad (2)$$

где J_n — функции Бесселя первого рода n -го порядка.

3. Методы степенных рядов и рядов Фурье

Решение уравнений упругости часто предлагается в виде степенных рядов или рядов Фурье. Например, в плоской задаче функция напряжения может быть представлена в виде конечного степенного ряда

$$\Phi = \sum_{i=1}^n a_i x_1^i x_2^{n-i}. \quad (3)$$

Решение дифференциального уравнения для функции напряжения можно искать в виде бесконечного ряда

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1)\varphi_n(x_2). \quad (4)$$

В выражении (4) функции f_n и φ_n выбраны специальным образом. Например, φ_n выбрана так, что

$$\varphi_n(x_2) = C_n \sin(\lambda_n x_2) + D_n \cos(\lambda_n x_2), \quad (5)$$

где C_n, D_n, λ_n — постоянные.

Как пример математического метода, используемого для получения аналитического приближенного решения (группа б), упомянем только метод Ритца.

4. Метод Ритца

Метод Ритца относится к классу *прямых методов вариационного исчисления* (см. [51, 91]). Решение уравнения в этом методе предполагается принадлежащим к определенному классу функций U . Затем доказывается, что точное решение уравнений упругости для данной задачи есть минимум некоторого функционала (обычно это общая энергия тела). Нужный элемент из класса U выбирается таким образом, чтобы дать наименьшее возможное значение функционала (внутри класса функций U). Аппроксимируя значение функционала функцией из класса U , мы надеемся получить приближенное выражение для точного минимизирующего элемента функционала, представляющего собой точное решение уравнений упругости. Приближенные решения, полученные методом Ритца, часто имеют преимущества над другими аналитическими аппроксимациями, так как для решения Ритца мы можем иногда получить оценку погрешности приближенного решения.

Метод Ритца играет существенную роль в *методе конечных элементов* и его численных реализациях. Оценка погрешности для метода Ритца может быть получена из соответствующих вариационных принципов.

Из методов группы (в) рассмотрим методы конечных и граничных элементов.

5. Методы конечных и граничных элементов

Оба этих метода относятся к численным методам. Они характерны тем, что значения зависимых переменных внутри тела выражаются через их значения в дискретных точках внутри тела и (или) на его границе. Затем значения функций в дискретных точках определяются численно путем минимизации особого функционала (метод Ритца) или приравниванием функционала к нулю (метод взвешенных невязок). В любом случае в результате получаются численные значения искомых переменных в конечном числе точек. Оба метода изложены во многих книгах (см., например, [8, 14]). Существует много прикладных программ, которые используют методы конечных и граничных элементов для решения задач поля (механика жидкости, теория упругости и др.).

6. Метод конечных разностей

Это классический численный метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. С его помощью определяются численные значения искомых переменных (напряжения, деформации, перемещения). Проблема исследования сходимости численного метода и поведения решения в точках сингулярности — важные моменты, на которые следует обратить особое внимание при использовании данного метода.

4.7 Принцип Сен-Венана

Из анализа, представленного выше, становится понятно, что задача решения дифференциальных уравнений теории упругости представляет собой серьезную математическую проблему. Зачастую бывает трудно получить решение, удовлетворяющее дифференциальным уравнениям и в то же время граничным и начальным условиям. Часто решение может быть найдено проще, если изменить граничные условия. Сделать это надо так, чтобы *главный вектор сил* и *главный момент* “новых” граничных условий были такими же, как главный вектор и главный момент “старых” (исходных) граничных условий. Тогда возникает важный вопрос: насколько будут различаться напряжение, деформация и перемещение внутри тела при изменении граничных условий от “старых” к “новым”? Ответ на этот вопрос дает знаменитый **принцип Сен-Венана**: *если некоторое распределение поверхностных сил на участке тела замещается на другое, дающее такой же главный вектор и главный момент, то действие тех и других поверхностных сил на точки тела, достаточно удаленные от области приложения этих сил, одинаково*. Физическое значение принципа Сен-Венана для стержня продемонстрировано на рис. 2.

Предположим, что стержень, изображенный на рисунке, заделан в твердую стену. Пусть S_1 есть часть поверхности стержня, соприкасающаяся со стеной. Распределение напряжений на S_1 неизвестно и, кроме того, в действительности достаточно сложно. Однако из основных условий равновесия (см. параграф 1.3) мы заключаем, что действие стенки (статически) эквивалентно действию сосредоточенной силы \mathbf{R} и сосредоточенного момента \mathbf{M} . Принцип Сен-Венана утверждает, что деформация стержня и поле напряжений в точках, “достаточно удаленных” от S_1 , одинаковы вне зависимости от граничных условий в уравнениях упругости до тех пор, пока результирующая сила и результирующий момент равны \mathbf{R} и \mathbf{M} соответственно. Таким образом, к принципу Сен-Венана обращаются всякий раз, когда хотят пренебречь локальными и краевыми эффектами.

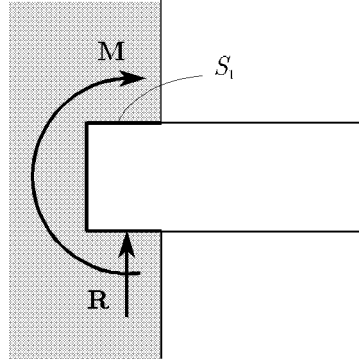


Рис. 2

Важность и математическое применение принципа Сен-Венана станут понятнее, если мы, как делал⁸ Сен-Венан, рассмотрим деформацию в упругом стержне. Так как различие между главным вектором сил и главным моментом при “старых” и “новых” граничных условиях равно нулю, то можно рассматривать поле напряжений и поле деформаций в призматическом упругом стержне длиной L , которые вызываются внешней нагрузкой, *имеющей результирующую силу и результирующий момент, равные нулю*.

Для ознакомления с современными результатами мы отсылаем читателя к обзорным работам [58, 59].

Задачи

1. Используя функции напряжения Максвелла (4.5.27), показать, что удовлетворяются уравнения равновесия (4.5.26).
2. Показать, что каждая следующая функция удовлетворяет бигармоническому уравнению (4.5.15):

$$\text{а) } (C_1 e^{\alpha x_1} + C_2 e^{-\alpha x_1} + C_3 x_1 e^{\alpha x_1} + C_4 x_1 e^{-\alpha x_1}) \sin(\alpha x_2),$$

$$C_i = \text{const}, \alpha = \text{const},$$

$$\text{б) } x_1 V,$$

$$\text{в) } x_2 V,$$

⁸ Saint-Venant A.J.C. de. 1856. Mémoire sur la torsion des prismes, *Memories présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France*, 14, 233-260; и Saint-Venant A.J.C. de. 1856. Mémoire sur la flexion des prismes, *J. Math. Pures Appl.*, 1, 89-189. В действительности, Сен-Венан предполагал, что “детальная” форма описания распределения нагрузки на конце стержня менее значима, чем значения главных векторов сил и моментов.

$$\text{г) } (x_1^2 + x_2^2)V,$$

где V — гармоническая функция, т. е. $\nabla^2 V = 0$.

3. Используя закон Гука, показать, что вектор перемещения можно выразить в терминах функций напряжения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{E}(U_1 - U_2 - U_3)_{,1}, \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{E}(U_2 - U_1 - U_3)_{,2}, \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{E}(U_3 - U_1 - U_2)_{,3}. \end{aligned}$$

4. Предположим, что объемные силы описываются тригонометрической функцией времени

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}(x_i) \cos \omega t + \mathbf{f}^{(2)}(x_i) \sin \omega t, \quad (\text{а})$$

где ω — постоянная, а $\mathbf{f}^{(1)}$ и $\mathbf{f}^{(2)}$ — заданные функции. Динамическая задача с силами в такой форме называется *задачей периодического осциллятора с частотой ω* . Положить, что перемещения имеют вид

$$\mathbf{u}(x_j, t) = \mathbf{u}^{(1)} \cos \omega t + \mathbf{u}^{(2)} \sin \omega t. \quad (\text{б})$$

Пусть *комплексная амплитуда* периодических колебаний $\mathbf{u}_c = (u_1, u_2, u_3)$ определяется как

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}^{(1)} + i\mathbf{u}^{(2)}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (\text{в})$$

а комплексная сила как

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{f}^{(1)} + i\mathbf{f}^{(2)}. \quad (\text{д})$$

Используя равенство (4.3.1), показать, что вектор комплексной амплитуды удовлетворяет равенству

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_c + \mu \nabla^2 \mathbf{u}_c + (\mathbf{f}_c + \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}_c) = 0. \quad (\text{е})$$

5. Показать, что в том случае, когда объемные силы не равны нулю, уравнение (4.5.10) принимает вид

$$H_{i,jjkk} = -\frac{f_i}{1-\nu}.$$

Интересно, что не только в случае, когда объемные силы отсутствуют, но и в случае, когда они не равны нулю, отдельные компоненты вектора Галеркина удовлетворяют не связанным друг с другом парным уравнениям.

6. Рассмотрим статический случай уравнения (4.3.1). Определим *оператор упругости* следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div} \mathbf{u} - \mu(\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{u}). \quad (\text{a})$$

Показать, что статический случай уравнения (4.3.1) соответствует уравнению

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0. \quad (\text{б})$$

Оператор упругости является симметричным дифференциальным оператором. Он положителен для второй и третьей основных краевых задач (см. [31]). Заметим также, что для $\mu = 1$, $\lambda = -1$ оператор \mathbf{A} превращается в оператор Лапласа.

Глава 5

Решение некоторых задач теории упругости

5.1 Введение

В этой главе рассматриваются решения некоторых конкретных задач теории упругости с помощью полуобратного метода. Все задачи имеют практическое применение в технике. Приводятся классы задач, которые могут быть решены изложенными в предыдущих главах “классическими” способами. Некоторые решения записаны в виде, допускающем сравнение с решениями, полученными при помощи элементарной теории сопротивления материалов и теории стержней. Так как в инженерном деле стержень является одним из самых распространенных объектов, детально рассматриваются задачи растяжения, кручения и изгиба упругого стержня. Такие задачи (определение напряженно-деформированного состояния призматического стержня, нагруженного приложенной к его концам системой сил и моментов) называются *задачами Сен-Венана*.

Другим важным классом задач являются задачи о цилиндрах и шарах, а именно анализ полей напряжений и деформаций для упругих и термоупругих цилиндров и шаров под действием поверхностных и объемных сил.

Приводится решение *задач Буссинеска (элементарные решения первого и второго рода)*. При решении задач о воздействующей на упругое тело сосредоточенной силе мы сталкиваемся с понятием *обобщенных функций*. Наиболее известной обобщенной функцией является *дельта-функция Дирака*¹. Подробному анализу обобщенных функций посвящен ряд фундаментальных работ (см., например, [67, 10]). Приведем физическое обоснование использования таких функций. Применение обобщенных функций отражает тот факт, что в заданной точке невозможно измерить некоторую физическую величину (в данном случае силу). Вместо этого мы находим среднее значение распределенной

¹ Уточним, что обобщенные функции не являются функциями в полном смысле слова. Это функционалы (операторы, определяющие соответствие между некоторым пространством функций и множеством действительных чисел). Каждой обобщенной функции соответствует некоторая последовательность обычных функций, удовлетворяющих определенным требованиям (так называемые “хорошие функции”).

нагрузки в малой окрестности точки и рассматриваем предел этой величины как ее значение в точке.

Пусть нужно найти плотность сосредоточенной силы F , действующей в точке начала прямоугольной системы координат, расположенной на внешней поверхности тела S , причем ось x_3 направлена по нормали к поверхности S . В дальнейшем полагаем, что величина сосредоточенной силы $F = 1$.

Для нахождения плотности силы F равномерно распределим ее по кругу радиусом ϵ с центром в точке с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, лежащему в координатной плоскости x_1, x_2 . Тогда *среднее значение* F_ϵ плотности силы на всей поверхности тела S примет вид

$$F_\epsilon(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\epsilon^2}, & \text{при } (x_1^2 + x_2^2) < \epsilon; \\ 0, & \text{при } (x_1^2 + x_2^2) \geq \epsilon. \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что

$$\iint_S F_\epsilon dS = 1. \quad (2)$$

Нас интересует предельное значение функции $F_\epsilon(x_1, x_2)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Обозначим его через $\delta(x_1, x_2)$. Из выражения (1) следует, что

$$\delta(x_1, x_2) = \begin{cases} +\infty, & \text{при } (x_1^2 + x_2^2) = 0; \\ 0, & \text{при } (x_1^2 + x_2^2) \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Потребуем также для функции $\delta(x_1, x_2)$ выполнения равенства (2):

$$\iint_S \delta(x_1, x_2) dS = 1. \quad (4)$$

Однако для функции, задаваемой выражением (3), имеем $\iint_S \delta dS = 0$.

Это означает, что функция (3) не соответствует величине силы. Чтобы выйти из положения, используем другой вариант предельного перехода и вместо предела в точке функции F_ϵ используем так называемый *слабый предел*. А именно для любой непрерывной функции $\phi(x_1, x_2)$ слабый предел функции F_ϵ , задаваемой выражением (1), таков:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_S F_\epsilon(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2) dS \equiv \iint_S \delta(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2) dS = \phi(0, 0). \quad (5)$$

Таким образом, слабый предел функции F_ϵ есть не что иное, как функционал, присваивающий функции $\phi(x_1, x_2)$ значение $\phi(0, 0)$. Мы говорим, что дельта-функция Дирака является слабым пределом F_ϵ , т. е.

$$\lim F_\epsilon \xrightarrow{w} \delta. \quad (6)$$

Заметим, что из выражений (2) и (6) следует, что

$$\iint_S \delta(x_1, x_2) dS = 1, \quad (7)$$

так что равенство (4) выполняется тогда, когда δ является слабым пределом F_ϵ . Если на тело действуют несколько сосредоточенных сил F_i , приложенных в точках $1, 2, \dots, K$, с координатами $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, \dots, x_3^K$, то функция распределения плотности силы принимает вид

$$F = \sum_{n=1}^K F_n \delta((x_1 - x_1^n), (x_2 - x_2^n), (x_3 - x_3^n)). \quad (8)$$

Вместо функции (1) можно использовать и другие функции, называемые *базисными функциями* (или “хорошими функциями”). К примеру, *чашка* определяется как

$$\omega_\epsilon(x_1, x_2) = \begin{cases} C_\epsilon \exp(-\epsilon^2/(\epsilon^2 - |x|^2)) & \text{при } |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq \epsilon, \\ 0 & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > \epsilon, \end{cases} \quad (9)$$

и может быть использована в качестве базисной функции, если постоянная C_ϵ определена из условия (2), или

$$\omega_\epsilon = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon^2}|x|^2\right), \quad (10)$$

где опять $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Функция (10) удовлетворяет условию (2). Отметим, что функции (9), (10) непрерывны. Каждую из них можно использовать в качестве модели для дельта-функции Дирака. Представление сосредоточенных сил с помощью функции Дирака особенно полезно, если функционал преобразований применяется для решения конкретных задач (см., например, параграф 6.3).

Данная глава построена таким образом, что вначале рассматриваются статические задачи, а затем термоупругие и динамические задачи.

5.2 Тяжелый стержень

Рассмотрим призматический упругий стержень длиной l , закрепленный в верхней точке $x_3 = l$. Точный способ закрепления задается ниже. На нижнем конце мы вводим декартову систему координат \bar{x}_i .

Ось \bar{x}_3 ориентирована таким образом, что ось симметрии стержня совпадает с геометрической осью стержня и направлена вверх (рис. 1).

Считаем, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений. Компоненты массовых сил в системе координат \bar{x}_i таковы:

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = -\rho_0 g, \quad (1)$$

где ρ_0 — плотность материала стержня, g — ускорение свободного падения. Предположим, что тензор напряжений в стержне имеет компоненты

$$\sigma_{33} = \rho_0 g x_3, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (2)$$

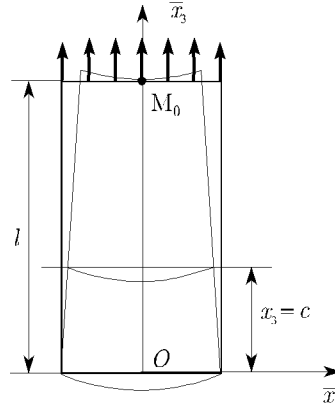


Рис. 1

Тензор напряжений с компонентами (2) удовлетворяет уравнениям равновесия ((4.1.1) при $\partial^2 u_i / \partial t^2 = 0$) и условиям совместности (4.1.20). Так как стержень является призматическим, единичный вектор \mathbf{n} , направленный по нормали к боковой поверхности (рис. 2), имеет вид

$$\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (3)$$

где φ произвольно. Из равенств (2) и (3) получим

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{0}. \quad (4)$$

На верхнем конце стержня $x_3 = l$ имеем

$$\sigma_{33}(l) = \rho_0 g l. \quad (5)$$

Верхний конец стержня должен быть зафиксирован таким образом, чтобы удовлетворялось равенство (5). Из закона Гука (3.4.14) следует, что

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{E}(-\nu \rho_0 g x_3), & E_{22} &= \frac{1}{E}(-\nu \rho_0 g x_3), \\ E_{33} &= \frac{1}{E}(\rho_0 g x_3), & E_{12} &= E_{13} = E_{23} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu \rho_0 g x_3}{E}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g x_3}{E}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

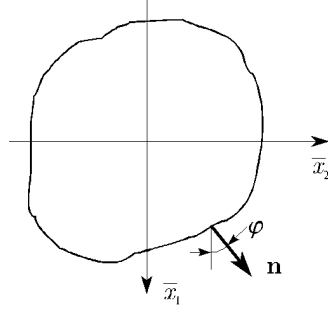


Рис. 2

Из второго уравнения (7) находим

$$u_3 = \frac{\rho_0 g x_3^2}{2E} + w_0(x_1, x_2), \quad (8)$$

где w_0 — произвольная функция от x_1 и x_2 . Из третьего уравнения (7) следует, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial w_0}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial w_0}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Интегрируя равенства (9), получаем

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_1} + u_0(x_1, x_2), \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w_0}{\partial x_2} + v_0(x_1, x_2), \quad (10)$$

где u_0 и v_0 — произвольные функции от x_1 и x_2 . Подставляя равенства (10) в первое уравнение (7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\frac{\nu \rho_0 g x_3}{E}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_0}{\partial x_2} = -\frac{\nu \rho_0 g x_3}{E}. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу того, что правые части уравнений (11) являются функциями только от x_3 , справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} = \frac{\nu \rho_0 g}{E}, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} = \frac{\nu \rho_0 g}{E}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x_2} = 0. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (7), получаем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial v_0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} = 0, \quad (13)$$

откуда делаем вывод, что

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_2} + \frac{\partial v_0}{\partial x_1} = 0. \quad (14)$$

Из равенств (12) следует, что $u_0 = u_0(x_2)$ и $v_0 = v_0(x_1)$. Используя это обстоятельство, второе уравнение (14) можно записать в виде

$$\frac{du_0}{dx_2} + \frac{dv_0}{dx_1} = 0, \quad (15)$$

или

$$\frac{du_0}{dx_2} = a = \text{const}, \quad \frac{dv_0}{dx_1} = -a. \quad (16)$$

Таким образом, имеем

$$u_0 = ax_2 + b_1, \quad v_0 = -ax_1 + b_2, \quad (17)$$

где a , b_1 и b_2 — постоянные. Из равенств (12) и (14) получаем, что

$$w_0 = \frac{\nu \rho_0 g}{2E} (x_1^2 + x_2^2) + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3, \quad (18)$$

где c_1 , c_2 и c_3 — постоянные. С учетом выражений (17) и (18) уравнения (8) и (10) принимают вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu \rho_0 g}{E} x_1 x_3 - c_1 x_3 + ax_2 + b_1, \\ u_2 &= -\frac{\nu \rho_0 g}{E} x_2 x_3 - c_2 x_3 - ax_1 + b_2, \\ u_3 &= \frac{\rho_0 g}{2E} (x_3^2 + \nu x_1^2 + \nu x_2^2) + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Постоянные c_i , $i = 1, 2, 3$, определяются из условий на верхнем конце. Если положить, что

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \text{для } x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = l, \quad (20)$$

то точка M_0 (см. рис. 1) будет неподвижна. Далее, потребовав, чтобы вращение вокруг оси \bar{x}_1 было невозможно, мы фиксируем элемент поверхности в плоскости \bar{x}_1, \bar{x}_3 в точке $x_1 = x_2 = 0, x_3 = l$. Это эквивалентно требованию, чтобы $\partial u_2 / \partial x_1 = 0$ в точке $x_1 = x_2 = 0, x_3 = l$. Аналогично, если невозможно вращение вокруг двух других осей в

точке $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = l$, мы требуем, чтобы удовлетворялись равенства $\partial u_1 / \partial x_3 = 0$ и $\partial u_2 / \partial x_3 = 0$. Таким образом (см. (2.4.14)), вектор поворота в точке M_0 равен нулю в том случае, когда

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \quad (21)$$

в точке $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = l$. Подставляя уравнения (19) в (20) и (21), получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu \rho_0 g}{E} x_1 x_3, & u_2 &= -\frac{\nu \rho_0 g}{E} x_2 x_3, \\ u_3 &= \frac{\rho_0 g}{2E} (x_3^2 + \nu x_1^2 + \nu x_2^2 - l^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Из решения (22) ясно, что поперечные сечения стержня, плоские в недеформированном состоянии, в деформированном состоянии перестают быть плоскими.

Например, поперечное сечение $x_3 = c = \text{const}$ превращается в поверхность, задаваемую соотношением

$$x'_3 = c + u_3 = c + \frac{\rho_0 g (c^2 - l^2)}{2E} + \frac{\nu \rho_0 g}{2E} (x_1^2 + x_2^2). \quad (23)$$

Из решения (22) также следует, что все точки на боковой поверхности стержня смещаются к оси стержня и что величина этого смещения пропорциональна расстоянию от нижнего конца стержня $x_3 = 0$. Верхнее основание стержня $x_3 = l$ изгибается вверх. Это является следствием граничного условия $\sigma_{33} = \text{const}$ при $x_3 = l$.

5.3 Вращающийся стержень

Предположим, что бесконечный цилиндрический стержень радиусом R вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Рассмотрим задачу *относительного* равновесия конфигурации данного стержня в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Ось z направлена вдоль продольной оси стержня. Объемной силой в данном случае является сила инерции, имеющая лишь одну составляющую. В уравнениях (1.5.6) имеем

$$f_r = \rho_0 \omega^2 r, \quad (1)$$

где ρ_0 — плотность материала стержня. Положим также, что

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta} = 0 \quad (2)$$

и все зависимые переменные являются функциями только от r . Значит, (1.5.6) принимает вид

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0\omega^2 r = 0. \quad (3)$$

Из выражения (3.6.1) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) + 2\mu \frac{du}{dr}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) + 2\mu \frac{u}{r}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $u_r = u$ и $u_\theta = u_z = 0$. Подставляя равенства (4) в уравнение (3), получаем

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \rho_0 \frac{\omega^2 r}{\lambda + 2\mu} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \rho_0 \frac{\omega^2 r^3}{8(\lambda + 2\mu)}, \quad (6)$$

где C_i , $i = 1, 2$, — постоянные. Так как $u(0)$ конечно, то $C_2 = 0$, следовательно,

$$u = C_1 r - \rho_0 \frac{\omega^2 r^3}{8(\lambda + 2\mu)}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в первое уравнение (4), имеем

$$\sigma_{rr} = 2C_1(\lambda + \mu) - 2(2\lambda + 3\mu) \frac{\rho_0 \omega^2 r^2}{8(\lambda + 2\mu)}. \quad (8)$$

В силу того, что $\sigma_{rr}(R) = 0$, постоянная C_1 такова:

$$C_1 = \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{\rho_0 \omega^2 R^2}{8(\lambda + 2\mu)}. \quad (9)$$

При таком значении C_1 компонента вектора перемещения u принимает вид

$$u = \frac{\rho_0 \omega^2 r}{8(\lambda + 2\mu)} \left(R^2 \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} - r^2 \right). \quad (10)$$

5.4 Сферическая оболочка под действием внутреннего и внешнего давления

Рассмотрим сферическую оболочку с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом $R_1 < R_2$. Пусть p_1 и p_2 — соответственно величины внутреннего и внешнего давления. Из соображений симметрии положим, что в сферической системе координат (ρ, φ, θ) справедливы равенства

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}(\rho), \quad \sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho}(\rho) \quad (1)$$

и $\sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$. Так как объемные силы равны нулю, то уравнения равновесия (1.5.9) приводятся к одному простому уравнению

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}}{d\rho} + \frac{1}{\rho}(2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (2)$$

Предположим также, что

$$u_\rho = u_\rho(\rho), \quad u_\theta = u_\varphi = 0. \quad (3)$$

Тогда тензор деформаций (линейная часть в (2.6.11)) имеет вид

$$\begin{aligned} E_{\rho\rho} &= \frac{du_\rho}{d\rho}, & E_{\varphi\varphi} &= \frac{u_\rho}{\rho}, & E_{\theta\theta} &= \frac{u_\rho}{\rho}, \\ E_{\theta\varphi} &= E_{\rho\varphi} = E_{\rho\theta} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из закона Гука в форме (3.6.2) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \lambda \left(\frac{du_\rho}{d\rho} + 2\frac{u_\rho}{\rho} \right) + 2\mu \frac{du_\rho}{d\rho}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(\frac{du_\rho}{d\rho} + 2\frac{u_\rho}{\rho} \right) + 2\mu \frac{u_\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя равенства (5) в уравнение (2), получаем

$$\frac{d^2u_\rho}{d\rho^2} + 2\frac{d}{d\rho} \left(\frac{u_\rho}{\rho} \right) = 0, \quad (6)$$

или

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 u_\rho) = \text{const} = 3a. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) при $u = u_\rho$ имеет вид

$$u = a\rho + \frac{b}{\rho^2}, \quad (8)$$

где b — новая постоянная. Подставляя (8) в равенство (5), получаем

$$\sigma_{\rho\rho} = a(3\lambda + 2\mu) - 4\mu \frac{b}{\rho^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = a(3\lambda + 2\mu) + 2\mu \frac{b}{\rho^3}. \quad (9)$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий на внутренней и внешней поверхностях оболочки. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= -p_1, & \text{при } \rho &= R_1, \\ \sigma_{\rho\rho} &= -p_2, & \text{при } \rho &= R_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя соотношения (10) в равенства (9), получаем

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{(3\lambda + 2\mu)(R_2^3 - R_1^3)}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{4\mu(R_2^3 - R_1^3)}. \quad (11)$$

Вектор перемещения полностью определяется с помощью формул (8) и (11). Компоненты напряжения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{1}{1 - \psi^3} \left[\psi^3 \left(1 - \frac{R_2^3}{\rho^3} \right) p_1 - \left(1 - \frac{\psi^3 R_2^3}{\rho^3} \right) p_2 \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1 - \psi^3} \left[\psi^3 \left(1 + \frac{R_2^3}{2\rho^3} \right) p_1 - \left(1 + \frac{\psi^3 R_2^3}{2\rho^3} \right) p_2 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\psi = R_1/R_2$. В частном случае, когда $p_2 = 0$, из уравнений (12) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{1}{1 - \psi^3} \left[\psi^3 \left(1 - \frac{R_2^3}{\rho^3} \right) p_1 \right] = \frac{p_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{\rho^3} \right) < 0, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1 - \psi^3} \left[\psi^3 \left(1 + \frac{R_2^3}{2\rho^3} \right) p_1 \right] = \frac{p_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_2^3}{2\rho^3} \right) > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве другого частного случая рассмотрим бесконечное упругое тело с внутренней сферической полостью радиусом $R_1 = R$, находящееся под действием равномерного давления $p_2 = p$. Полагая в равенствах (11) $R_2 \rightarrow \infty$, $p_1 = 0$, $p_2 = p$, получаем

$$a = \frac{-p}{(3\lambda + 2\mu)}, \quad b = \frac{-pR^3}{4\mu}, \quad (14)$$

так что формулы (9) принимают вид

$$\sigma_{\rho\rho} = -p \left(1 - \frac{R^3}{\rho^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = -p \left(1 + \frac{R^3}{2\rho^3} \right). \quad (15)$$

Отметим, что на границе полости $\rho = R$ имеют место равенства

$$\sigma_{\rho\rho} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{3}{2}p. \quad (16)$$

5.5 Кручение призматического стержня с произвольным поперечным сечением

Рассмотрим призматический стержень длиной l с произвольным (но постоянным) поперечным сечением. Боковая поверхность стержня свободна от напряжений. К основаниям стержня приложена пара моментов величины M (или система сил и моментов, дающая нулевой главный вектор сил и главный момент, равный M). Объемных сил нет. Пусть \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$, — декартова система координат, причем ось \bar{x}_1 ориентирована параллельно геометрической оси стержня. Начало системы координат \bar{x}_i не связано с какой-либо определенной точкой поперечного сечения. Оно может, в частности, совпадать с центром масс поперечного сечения (рис. 3). Воспользуемся методом Сен-Венана и сделаем следующие предположения относительно деформации стержня.

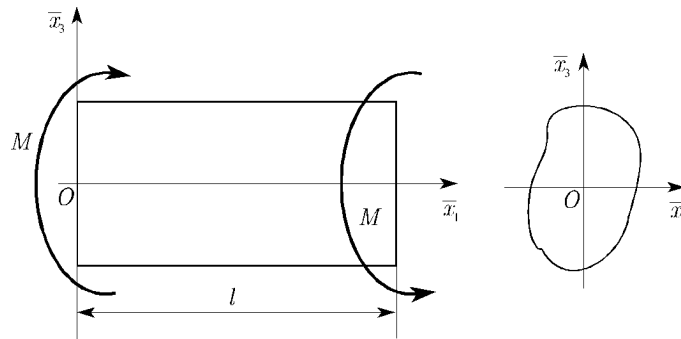


Рис. 3

- а) Поперечное сечение стержня при $x_1 \neq 0$ поворачивается вокруг оси \bar{x}_1 (относительно поперечного сечения при $x_1 = 0$) на угол, пропорциональный расстоянию между сечением и основанием ($\bar{x}_1 = 0$).
- б) Составляющая вектора перемещения вдоль оси \bar{x}_1 (т. е. u_1) одинакова для всех поперечных сечений (т. е. не зависит от x_1), а зависит только от x_2 и x_3 .

Из допущений (а) и (б) следует, что

$$\varphi = \bar{\theta} x_1, \quad u_1 = u_1(x_2, x_3), \quad (1)$$

где φ — угол поворота поперечного сечения относительно поперечного сечения $x_1 = 0$ и $\bar{\theta} = \text{const}$. Из выражений (1) мы получаем компоненты

вектора перемещений в виде (рис. 4):

$$u_2 = \overline{OP}[\cos(\alpha + \varphi) - \cos \alpha], \quad u_3 = \overline{OP}[\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha]. \quad (2)$$

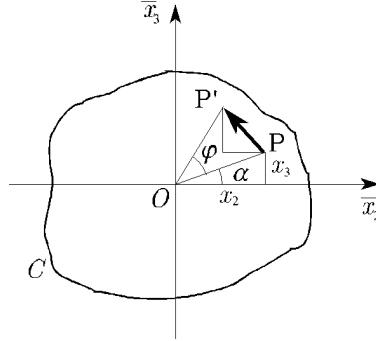


Рис. 4

Если предположить, что угол φ мал, то из равенств (1) и (2) следует, что

$$u_1 = u_1(x_2, x_3), \quad u_2 = -\bar{\theta}x_1x_3, \quad u_3 = \bar{\theta}x_1x_2. \quad (3)$$

Используя выражения (1) и (3), получаем компоненты тензора деформаций:

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{23} = 0,$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(-\bar{\theta}x_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad E_{13} = \frac{1}{2} \left(\bar{\theta}x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \quad (4)$$

Из уравнений (4) и закона Гука (3.3.43) следует, что

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0,$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(-\bar{\theta}x_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad \sigma_{13} = \mu \left(\bar{\theta}x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \quad (5)$$

С учетом выражений (5) уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0. \quad (6)$$

Если записать u_1 в виде

$$u_1 = \bar{\theta}\Phi(x_2, x_3), \quad (7)$$

причем Φ является функцией, подлежащей определению, то после подстановки выражений (5) в уравнения (6) получаем

$$\nabla^2 \Phi(x_2, x_3) = 0, \quad (8)$$

где

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}. \quad (9)$$

Граничные условия, соответствующие (9), вытекают из того факта, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений:

$$\mathbf{p}_n = (\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } C, \quad (10)$$

где C обозначает границу поперечного сечения стержня и

$$n_2 = \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_2), \quad n_3 = \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_3). \quad (11)$$

Из равенств (5), (7) и (10) мы получаем следующие граничные условия для Φ на C :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_3 \right) n_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + x_2 \right) n_3 = 0. \quad (12)$$

Производная от функции Φ по направлению нормали (называемая *нормальной производной*) к кривой C определяется следующим образом:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} n_3, \quad (13)$$

тогда граничные условия (12) принимают вид

$$\frac{d\Phi}{dn} = x_3 n_2 - x_2 n_3 \quad \text{на } C. \quad (14)$$

Функция Φ называется *функцией кручения* и система (9), (14) представляет собой граничную задачу Неймана. Таким образом, функция кручения является гармонической внутри границы C и имеет определенную на границе нормальную производную. Интегрируя равенство (14) по границе C , получаем

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS &= \oint_C [x_3 n_2 - x_2 n_3] dS = \\ &= \oint_C [x_3 dx_3 + x_2 dx_2] = \oint_C d[x_2^2 + x_3^2] = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

причем мы использовали то обстоятельство, что (рис. 5) $dx_2 = -n_3 dS$ и $dx_3 = n_2 dS$.

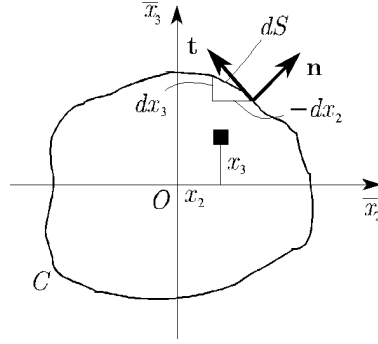


Рис. 5

Условие (15) (т. е. обращение в нуль интеграла от нормальной производной от функции Φ , вычисленного по всей границе C) гарантирует существование решения системы (9), (14). Предположим, что существует два решения Φ^1 и Φ^2 системы (9), (14). Пусть $\tilde{\Phi} = \Phi^1 - \Phi^2$. Функция $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет равенству $\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0$ в области A , находящейся внутри C , и $\partial \tilde{\Phi} / \partial n = 0$ на C . С помощью теоремы Грина² имеем

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} dS &= \oint_C \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_3} n_3 \right] dS = \oint_C \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} dx_3 - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_3} dx_2 \right] = \\ &= - \int \int_A [\nabla^2 \tilde{\Phi}] dA. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $\partial \tilde{\Phi} / \partial n = 0$, то

$$\int \int_A [\nabla^2 \tilde{\Phi}] dA = 0, \quad (17)$$

откуда $\tilde{\Phi} = \text{const}$. Таким образом, функция кручения определяется однозначно с точностью до произвольной постоянной.

Крутящий момент можно записать в виде (см. рис. 5):

$$M = \int \int_A (\sigma_{13} x_2 - \sigma_{12} x_3) dA = \mu \bar{\theta} \int \int_A \left(x_2^2 + x_3^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} x_2 \right) dA, \quad (18)$$

² Если функции P и Q непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области A , ограниченной кривой C , то $\int \int_A [\partial Q / \partial x_2 - \partial P / \partial x_3] dA = \oint_C [P dx_2 + Q dx_3] = \oint_C u_t dS = \int \int_A \text{curl } \mathbf{u} dA$, где $\mathbf{u} = P \mathbf{e}_2 + Q \mathbf{e}_3$, и $\text{curl } \mathbf{u} = \partial Q / \partial x_2 - \partial P / \partial x_3$.

откуда после использования теоремы Грина имеем

$$M = \mu \bar{\theta} \left\{ J_0 - \int_A \int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] dA \right\}, \quad (19)$$

где $J_0 = \iint_A (x_2^2 + x_3^2) dA$ — полярный момент инерции поперечного сечения для точки O . Запишем (19) в виде

$$M = \bar{\theta} D, \quad D = \mu \left\{ J_0 - \int_A \int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] dA \right\}, \quad (20)$$

где D называется *крутильной жесткостью стержня*.

Из вышеприведенного анализа следует, что задача кручения стержня с произвольным поперечным сечением решена однозначно, если определена функция кручения Φ . Ниже будет показано, что напряжения и крутильные моменты не зависят от выбора точки O начала системы координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$ (см. рис. 3). Пусть в качестве начала координат взята точка O_1 с координатами $x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$. Мы снова используем x_1, x_2, x_3 для координат произвольной точки в новой системе координат с началом в точке O_1 . Значит, ось \bar{x}_3 по-прежнему является осью вращения, и вместо равенств (3) мы имеем

$$u_1^{(1)} = u_1^{(1)}(x_2, x_3), \quad u_2^{(1)} = -\bar{\theta} x_1 (x_3 - x_3^{(1)}), \quad u_3^{(1)} = \bar{\theta} x_1 (x_2 - x_2^{(1)}), \quad (21)$$

а компоненты тензора напряжений (вместо (5)) принимают вид

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0,$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(-\bar{\theta} (x_3 - x_3^{(1)}) + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right), \quad \sigma_{13} = \mu \left(\bar{\theta} (x_2 - x_2^{(1)}) + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} \right). \quad (22)$$

Аналогичным образом получаем, что $\Phi^{(1)}$, определяемая с помощью выражения $u_1^{(1)} = \bar{\theta} \Phi^{(1)}(x_2, x_3)$, удовлетворяет равенству

$$\nabla^2 \Phi^{(1)}(x_2, x_3) = 0 \quad (23)$$

при условии

$$\frac{d}{dn} (\Phi^{(1)} + x_3^{(1)} x_2 - x_2^{(1)} x_3) = x_3 n_2 - x_2 n_3 \quad \text{на } C. \quad (24)$$

Отметим, что $\Phi^{(1)} + x_3^{(1)} x_2 - x_2^{(1)} x_3$ является гармонической функцией, если $\Phi^{(1)}$ есть гармоническая функция. Так как функции $\Phi^{(1)} + x_3^{(1)} x_2 -$

$x_2^{(1)}x_3$ и Φ удовлетворяют одинаковым граничным условиям, а также исходя из доказанной выше теоремы единственности (см. (17)), делаем вывод, что функции $\Phi^{(1)} + x_3^{(1)}x_2 - x_2^{(1)}x_3$ и Φ одинаковы с точностью до произвольной постоянной, а именно

$$\Phi^{(1)} = \Phi - x_3^{(1)}x_2 + x_2^{(1)}x_3 + c, \quad (25)$$

где $c = \text{const}$. Из выражений (22) видно, что система напряжений, найденная с помощью функции $\Phi^{(1)}$, идентична системе напряжений, найденной с помощью функции Φ . Что касается перемещений, то из уравнений (21) и (3) получаем

$$u_2^{(1)} = u_2 + \bar{\theta}x_1x_3^{(1)}, \quad u_3^{(1)} = u_3 - \bar{\theta}x_1x_2^{(1)}. \quad (26)$$

Из выражений (22) и того обстоятельства, что напряжения одинаковы, следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \mu \left(-\bar{\theta}(x_3 - x_3^{(1)}) + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right) = \mu \left(-\bar{\theta}x_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{13} &= \mu \left(\bar{\theta}(x_2 - x_3^{(1)}) + \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} \right) = \mu \left(\bar{\theta}x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

или

$$\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \bar{\theta}x_3^{(1)}, \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \bar{\theta}x_2^{(1)}. \quad (28)$$

Из равенств (28) следует, что

$$u_1^{(1)} = u_1 - \bar{\theta}x_3^{(1)}x_2 + f(x_3), \quad (29)$$

где

$$f(x_3) = \bar{\theta}x_2^{(1)}x_3 + d, \quad (30)$$

и $d = \text{const}$. Исходя из выражений (26), (29), заключаем, что поля перемещений, соответствующие двум разным точкам начала системы координат, отличаются перемещением стержня как твердого тела.

Обсудим различные подходы к задаче кручения. Этот подход был предложен Прандтлем. Уравнения равновесия (6) могут быть удовлетворены путем введения *функции напряжений Прандтля*³ $\Psi(x_2, x_3)$ по формулам

$$\sigma_{12} = \mu\bar{\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\mu\bar{\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}. \quad (31)$$

³ Прандтль изложил данный метод в своей статье в 1903 г. (см. [81]). Функция напряжений Прандтля является частным случаем функций напряжений Финци (см. (4.5.29)).

При подстановке равенств (31) в (5) получаем

$$\mu\bar{\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} = \mu\left(-\bar{\theta}x_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), \quad -\mu\bar{\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} = \mu\left(\bar{\theta}x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right). \quad (32)$$

Дифференцируя первое равенство (32) по x_3 , а второе — по x_2 и вычитая результаты, имеем

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2} = -2. \quad (33)$$

Уравнение (33) является дифференциальным уравнением Пуассона. Для получения граничных условий, соответствующих уравнению (33), подставляем равенства (31) в граничные условия (10):

$$\begin{aligned} \sigma_{12}\frac{dx_3}{dS} - \sigma_{13}\frac{dx_2}{dS} &= \mu\bar{\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dS} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dS}\right) = \\ &= \mu\bar{\theta}\frac{d\Psi}{dS} = 0 \quad \text{на } C. \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда следует, что

$$\Psi = \text{const} \quad \text{на } C. \quad (35)$$

Ниже мы вернемся к вопросу об определении постоянной в формуле (35). В односвязной области (сплошное поперечное сечение) можно взять $\Psi = 0$ на C . Отметим, что уравнение (33) при условии (35) представляет собой граничную задачу *типа Дирихле*.

Определим главный момент внешних сил, приложенных к концам стержня. Используя формулы (18) и (31), получаем

$$\begin{aligned} M &= \int_A \int (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{12}x_3)dA = -\mu\bar{\theta} \int_A \int \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_3}x_3\right) dx_2 dx_3 = \\ &= -\mu\bar{\theta} \int_A \int \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(\Psi x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\Psi x_3)\right) dx_2 dx_3 + 2\mu\bar{\theta} \int_A \int \Psi dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Применяя теорему Гаусса и граничное условие $\Psi = 0$ на C , имеем

$$M = 2\mu\bar{\theta} \int_A \int \Psi dA. \quad (37)$$

Для определения главного вектора силы найдем ее компоненты вдоль осей \bar{x}_2 и \bar{x}_3 :

$$Q_2 = \int_A \int \sigma_{12}dA = \mu\bar{\theta} \int_A \int \frac{\partial\Psi}{\partial x_3}dA = -\mu\bar{\theta} \oint_C \Psi dx_2 = 0, \quad (38)$$

где мы опять воспользовались теоремой Гаусса. Аналогично получаем

$$Q_3 = \int \int_A \sigma_{13} dA = 0, \quad (39)$$

откуда делаем вывод, что *главный вектор силы, действующий на каждое основание, равен нулю.*

Существует связь между функцией кручения, вводимой с помощью выражения (7), и функцией напряжений Прандтля, вводимой с помощью соотношений (31). А именно подставляя (7) в (5) и сравнивая результат с (31), видим, что

$$-x_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \quad x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}. \quad (40)$$

Так как Φ является гармонической функцией, то существует *сопряженная функция* $\bar{\Phi}$, связанная с Φ уравнениями *Коши-Римана* (см. [22]):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_2}. \quad (41)$$

Подставляя выражения (41) в уравнения (40), получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_2} - x_2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_3} - x_3. \quad (42)$$

Проинтегрировав равенства (42), видим, что

$$\Psi = \bar{\Phi} - \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} + c, \quad (43)$$

где $c = \text{const}$. Из формулы (43) и граничных условий для Ψ заключаем, что задача кручения решена, если найдена такая гармоническая функция $\bar{\Phi}$, что

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x_3^2} = 0, \quad (44)$$

причем должно удовлетворяться равенство

$$\bar{\Phi} = \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} + c \quad \text{на } C. \quad (45)$$

Таким образом, при использовании сопряженных функций задача кручения превращается в граничную задачу типа Дирихле.

Проверим условия совместности. Так как $\Theta = \sigma_{ii} = 0$ и объемные силы отсутствуют ($f_i = 0$), условия (3.7.21) принимают вид

$$\nabla^2 \sigma_{12} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{13} = 0. \quad (46)$$

Подставляя соотношение (31) в уравнения (46), получаем, к примеру:

$$\nabla^2 \mu \bar{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \mu \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla^2 \Psi) = 0. \quad (47)$$

Таким образом, первое равенство (46) выполняется. Аналогично показывается выполнение второго равенства (46). Значит, удовлетворяются и уравнения совместности.

Рассмотрим некоторые свойства полученного решения. Сначала покажем, что кривые

$$\Psi(x_2, x_3) = \text{const} \quad (48)$$

имеют интересную физическую интерпретацию. Из выражения (48) следует, что

$$\frac{d\Psi}{dS} = \frac{d\Psi}{dx_2} \frac{dx_2}{dS} + \frac{d\Psi}{dx_3} \frac{dx_3}{dS} = 0. \quad (49)$$

Справедливы равенства (см. рис. 5)

$$\frac{dx_2}{dS} = -n_3, \quad \frac{dx_3}{dS} = n_2. \quad (50)$$

Из выражений (49), (50) и (31) следует, что

$$\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0. \quad (51)$$

Из формулы (51) можно сделать вывод, что вектор напряжений направлен по касательной к кривой $\Psi = \text{const}$. Кривые $\Psi = \text{const}$ называются *кривыми касательного напряжения*. Так как на границе C имеем $\Psi = 0$, то C также является кривой касательного напряжения. Вектор напряжения для единичной нормали в случае $\Psi = \text{const}$ имеет вид

$$\mathbf{p}_\Psi = \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3. \quad (52)$$

Используя (31), найдем его модуль:

$$|\mathbf{p}_\Psi| = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \mu \bar{\theta} \sqrt{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\right)^2}. \quad (53)$$

Так как обе компоненты тензора напряжений σ_{12} и σ_{13} являются гармоническими функциями (см. (46)), то и σ_{12} , и σ_{13} достигают своего максимума на границе C поперечного сечения A (см. [39]). Показать, что максимум величины $|\mathbf{p}_\Psi| = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}$ достигается на границе C сечения A , можно методом от противного. Предположим, что существует такая точка $M \in A$, лежащая строго внутри области A , что

$|\mathbf{p}_\Psi|$ достигает максимума в этой точке. Выберем новую систему координат, в которой одна из осей параллельна вектору \bar{x}_1 , другая параллельна \mathbf{p}_Ψ в точке M , а третья ортогональна первым двум. В этой системе координат только одна компонента вектора \mathbf{p}_Ψ , равная σ'_{12} , отличается от нуля в точке M . В силу того, что σ'_{12} является гармонической функцией (должна удовлетворять уравнениям совместности), она достигает максимума на границе C , а не внутри области A , что противоречит нашему предположению⁴. Перейдем к стержням с многосвязными поперечными сечениями. Рассмотрим тело, ограниченное несколькими цилиндрическими поверхностями с параллельными образующими. На рис. 6 показано поперечное сечение подобного стержня. В этом случае вместо равенства (35) имеем

$$\Psi = a_i \quad \text{на } C_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (54)$$

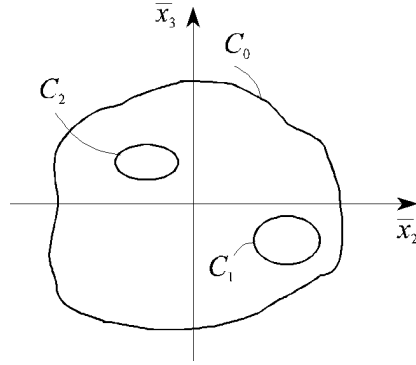


Рис. 6

Компоненты главного вектора силы на основаниях стержня таковы (см. (38)):

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_A \int \sigma_{12} dA = \mu \bar{\theta} \int_A \int \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} dA = -\mu \bar{\theta} \oint_C \Psi dx_2 = \mu \bar{\theta} \oint_C \Psi n_3 dS, \\ Q_3 &= \int_A \int \sigma_{13} dA = -\mu \bar{\theta} \int_A \int \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dA = -\mu \bar{\theta} \oint_C \Psi dx_3 = -\mu \bar{\theta} \oint_C \Psi n_2 dS, \end{aligned} \quad (55)$$

⁴ Первое доказательство того, что максимальные касательные напряжения находятся на границе поперечного сечения, было дано Pólya [79].

где C обозначает контур $C = C_0 + C_1 + \dots + C_n$. Из выражений (55) следует, что

$$\begin{aligned} Q_2 &= \mu\bar{\theta} \sum_{i=0}^n \oint_{C_i} \Psi n_3 dS = \mu\bar{\theta} \sum_{i=0}^n a_i \oint_{C_i} n_3 dS, \\ Q_3 &= -\mu\bar{\theta} \sum_{i=0}^n \oint_{C_i} \Psi n_2 dS = -\mu\bar{\theta} \sum_{i=0}^n a_i \oint_{C_i} n_2 dS. \end{aligned} \quad (56)$$

Однако

$$\oint_{C_i} n_3 dS = - \oint_{C_i} dx_2 = 0; \quad \oint_{C_i} n_2 dS = \oint_{C_i} dx_3 = 0, \quad (57)$$

откуда

$$Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0. \quad (58)$$

Главный момент находим следующим образом:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \int (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{12}x_3) dA = -\mu\bar{\theta} \int_A \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} x_3 \right) dx_2 dx_3 = \\ &= -\mu\bar{\theta} \int_A \int \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (\Psi x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\Psi x_3) \right) dx_2 dx_3 + 2\mu\bar{\theta} \int_A \int \Psi dx_2 dx_3 = \\ &= -\mu\bar{\theta} \left[\sum_{i=0}^n \oint_{C_i} \Psi (x_2 n_2 + x_3 n_3) dS \right] + 2\mu\bar{\theta} \int_A \int \Psi dA. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя равенства (54) в выражение (59) и учитывая, что внешний контур проходится в направлении против часовой стрелки, а все внутренние контуры — по часовой стрелке, получаем

$$M = 2\mu\bar{\theta} \left[\sum_{i=1}^n a_i A_i - a_0 A_0 \right] + 2\mu\bar{\theta} \int_A \int \Psi dA, \quad (60)$$

где A_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ — площади областей с границами C_i . И наконец, приведем так называемую *циркуляционную теорему*. А именно рассмотрим замкнутую кривую Ψ внутри области A . Пусть \mathbf{n} — орт, направленный по нормали, а \mathbf{t} — орт, направленный по касательной к кривой Ψ . Интеграл вектора напряжения \mathbf{p}_n , взятый по Ψ :

$$\Gamma = \oint_{\Psi} [\sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3] \cdot \mathbf{t} dS, \quad (61)$$

называется *циркуляцией* \mathbf{p}_n . Орт \mathbf{t} определяется так: $\mathbf{t} = t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3$, где

$$t_2 = \cos \angle(\mathbf{t}, \bar{x}_2), \quad t_3 = \cos \angle(\mathbf{t}, \bar{x}_3). \quad (62)$$

Таким образом (см. рис. 5)

$$t_2 = \frac{dx_2}{dS}, \quad t_3 = \frac{dx_3}{dS}. \quad (63)$$

Подставляя выражения (5) и (63) в формулу (61), получаем

$$\Gamma = \oint_{\psi} \left[\mu \left(-\bar{\theta}x_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_2 + \mu \left(\bar{\theta}x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) dx_3 \right], \quad (64)$$

или

$$\Gamma = \mu \bar{\theta} \oint_{\psi} [-x_3 dx_2 + x_2 dx_3] + \mu \oint_{\psi} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \right]. \quad (65)$$

Второй член в правой части равенства (65) равен нулю, если u_1 является однозначной функцией. Первый член имеет вид

$$\mu \bar{\theta} \oint_{\psi} [-x_3 dx_2 + x_2 dx_3] = 2\mu \bar{\theta} A_{\psi}, \quad (66)$$

где A_{ψ} — площадь области, ограниченная кривой Ψ . Таким образом, равенство (65) принимает вид

$$\Gamma = 2\mu \bar{\theta} A_{\psi}. \quad (67)$$

Выражение (67) представляет собой **теорему Бредта**: циркуляция напряжения сдвига $\tau = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{t}$ вдоль любого замкнутого контура, находящегося полностью внутри поперечного сечения подвергающегося кручению стержня, равна площади области внутри контура, умноженной на $2\bar{\theta}\mu$. Обратимся к решению задач на кручение в случае некоторых специфических поперечных сечений.

а) *Стержень с круговым поперечным сечением*

Рассмотрим стержень с круговым поперечным сечением R . Тогда имеем (рис. 7)

$$x_3 n_2 - x_2 n_3 = 0, \quad (68)$$

и решение граничной задачи (9), (14) принимает вид

$$\Phi = 0. \quad (69)$$

Из решения (69) можно сделать вывод, что при кручении стержня с круговым поперечным сечением не происходит искривления поперечного сечения, т. е. оно остается плоским. При элементарном подходе к проблеме (сопротивление материалов) это утверждение рассматривается как гипотеза (*гипотеза Бернулли*). Из выражения (19) следует, что

$$M = \mu \bar{\theta} J_0, \quad (70)$$

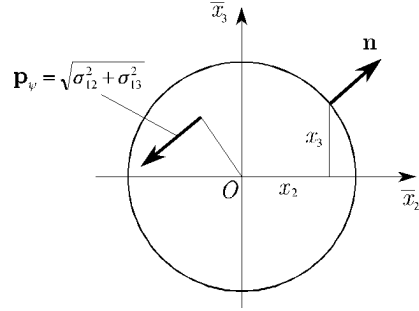


Рис. 7

где $J_0 = \pi R^4/2$, тогда как равенство (5) приводит к соотношениям

$$\sigma_{12} = -\mu\bar{\theta}x_3, \quad \sigma_{13} = \mu\bar{\theta}x_2. \quad (71)$$

Напряжение сдвига, определяемое при помощи выражений (71), принимает вид

$$|\mathbf{p}_\psi| = p_\psi = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \mu\bar{\theta}\rho, \quad (72)$$

где $\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Уравнение (72) есть не что иное, как хорошо известное соотношение при элементарном подходе к задаче кручения. Интересное свойство уравнения (72) состоит в том, что при $\rho = R$ мы получаем $p_\psi = \text{const}$. Рассматривая уравнение (33) при условии

$$\Psi = 0, \quad \mu\bar{\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \mu\bar{\theta}\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} = \text{const} \quad \text{на } C, \quad (73)$$

Serrin [85] показал, что *только то поперечное сечение, для которого при кручении напряжение сдвига на границе C остается постоянным, является круговым поперечным сечением.*

б) *Стержень с эллиптическим поперечным сечением*

Предположим, что поперечное сечение стержня представляет собой эллипс, задаваемый выражением

$$f(x_2, x_3) = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (74)$$

где a и b — постоянные. Используем метод функции напряжений Прандтля. Положим, что $\Psi = Hf$, где $H = \text{const}$ определяется из граничных условий $\Psi = 0$ на C . В силу этого Ψ принимает вид

$$\Psi = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - 1 \right). \quad (75)$$

Подставляя выражение (75) в (37), получаем

$$M = 2\mu\bar{\theta} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \iint_A \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2}\right) dA. \quad (76)$$

Поскольку площадь поперечного сечения определяется формулой $A = \pi ab$ и

$$I_2 = \iint_A x_3^2 dA = \frac{1}{4}\pi ab^3, \quad I_3 = \iint_A x_2^2 dA = \frac{1}{4}\pi a^3b, \quad (77)$$

где I_2 и I_3 — осевые моменты инерции, имеем

$$M = \mu\bar{\theta} \frac{a^3b^3}{a^2+b^2} \pi. \quad (78)$$

Крутильная жесткость (см. (20)) такова:

$$D = \mu \frac{a^3b^3}{a^2+b^2} \pi. \quad (79)$$

Если найти M по формуле (78) и подставить результат в выражение (75), то функцию напряжений Прандтля можно будет записать в виде

$$\Psi = \frac{M}{\pi ab} \left(1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2}\right) \frac{1}{\mu\bar{\theta}}. \quad (80)$$

Отметим, что кривые $\Psi = \text{const}$ являются эллипсами. Из выражений (80) и (31) получаем

$$\sigma_{12} = -\frac{2Mx_3}{\pi ab^3}, \quad \sigma_{13} = \frac{2Mx_2}{\pi a^3b}. \quad (81)$$

Как видно из равенств (81), отношение σ_{13}/σ_{12} пропорционально x_2/x_3 . Таким образом, отношение σ_{13}/σ_{12} постоянно вдоль всей линии \overline{OK} (рис. 8).

Теперь определим компоненты вектора перемещения. Используя (3) с $\bar{\theta}$, определяемой из равенства (78), имеем

$$u_2 = -\frac{M(a^2+b^2)}{\mu\pi a^3b^3} x_1 x_3, \quad u_3 = \frac{M(a^2+b^2)}{\mu\pi a^3b^3} x_1 x_2. \quad (82)$$

Используя равенства (5) и (81) с $\bar{\theta}$ из формулы (78), получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \bar{\theta} x_3, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \bar{\theta} x_2. \quad (83)$$

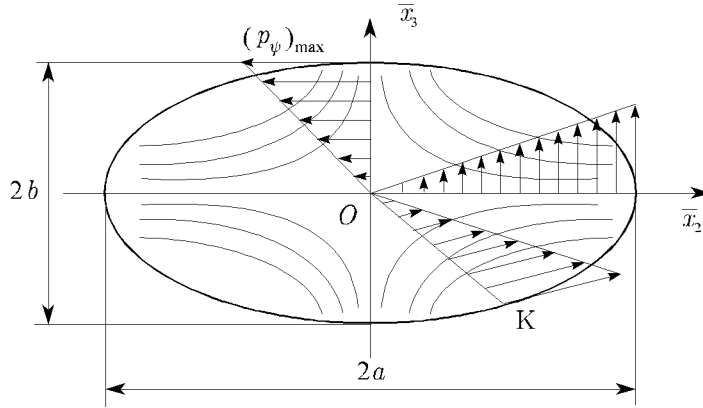


Рис. 8

Допустим, что точка 0 зафиксирована. Интегрируя выражение (83), в конечном итоге получаем

$$u_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \bar{\theta} x_2 x_3 = \frac{M(b^2 - a^2)}{\mu \pi a^3 b^3} x_2 x_3. \quad (84)$$

Как видно из равенства (84), плоские в недеформированном состоянии поперечные сечения перестают быть плоскими в деформированном состоянии. Контурные линии $u_1 = \text{const}$, изображенные на рис. 8, являются гиперболами, а напряжение сдвига выражается формулой (см. (31) и (80))

$$p_\psi = \frac{2\mu\bar{\theta}}{a^2 + b^2} \sqrt{a^4 x_3^2 + b^4 x_2^2}. \quad (85)$$

Предположим, что $a > b$. В этом случае максимальное значение p_ψ выразится следующим образом:

$$(p_\psi)_{\max} = \frac{2\mu\bar{\theta}a^2b}{a^2 + b^2}, \quad (86)$$

в точке с координатами $x_2 = 0, x_3 = b$.

в) *Стержень с поперечным сечением в форме узкого прямоугольника*

Предположим, что поперечное сечение стержня представляет собой прямоугольник, изображенный на рис. 9. Пусть $a \gg b$. Представим приближенное решение, записав функцию напряжений Прандтля в виде

$$\Psi = b^2 - x_2^2. \quad (87)$$

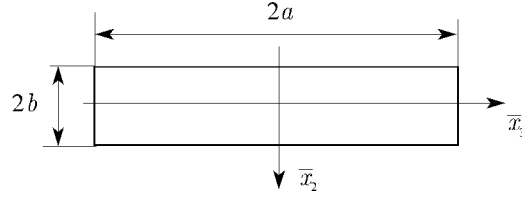


Рис. 9

Эта функция удовлетворяет уравнению (33) и граничному условию $\Psi = 0$ на части границы $x_2 = \pm b$. На части границы $x_3 = \pm a$ граничное условие $\Psi = 0$ не удовлетворяется. Таким образом, в силу неполного удовлетворения граничными условиями функция (87) является приближенным решением задачи кручения. Используя функцию (87), находим напряжения

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 2\mu\bar{\theta}x_2 \quad (88)$$

и момент (37)

$$M = \frac{16}{3}\mu\bar{\theta}ab^3. \quad (89)$$

Максимальное напряжение сдвига в данном случае таково:

$$(\sigma_{13})_{\max} = 2\mu\bar{\theta}b = \frac{3M}{8ab^2}. \quad (90)$$

г) *Стержень с прямоугольным поперечным сечением*

В этом случае величина a незначительно больше b . Берем функцию напряжений Прандтля в виде

$$\Psi = b^2 - x_2^2 + T(x_2, x_3). \quad (91)$$

Подставляя эту функцию в выражения (33) и (35), получаем, что функция T удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 T = 0 \quad (92)$$

с граничными условиями

$$T = 0 \text{ при } x_2 = \pm b; \quad T = x_2^2 - b^2 \text{ при } x_3 = \pm a. \quad (93)$$

Функцию T будем искать в виде

$$T = f(x_2)g(x_3). \quad (94)$$

Из уравнения (92) следует, что

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_2^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_3^2}, \quad (95)$$

или

$$f = C_1 \cos(\lambda x_2) + C_2 \sin(\lambda x_2), \quad g = C_3 \operatorname{ch}(\lambda x_3) + C_4 \operatorname{sh}(\lambda x_3), \quad (96)$$

где λ и C_i , $i = 1, \dots, 4$, — постоянные. Из первого граничного условия (93) имеем

$$\cos(\lambda b) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi n}{2b}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (97)$$

Вследствие симметрии примем, что T является четной функцией переменной x_3 . Это означает, что $C_4 = 0$. Таким образом, T принимает вид

$$T = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi x_3}{2b}\right), \quad (98)$$

где A_n , $n = 1, 3, 5, \dots$, — постоянные. Из второго граничного условия (93) следует, что

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) = x_2^2 - b^2. \quad (99)$$

Разложим функцию $x_2^2 - b^2$ в ряд Фурье. Это четная функция, имеющая члены только с косинусами. Для получения коэффициентов разложения умножим выражение (99) на $(m\pi x_2/2b)$ и проинтегрируем от $x_2 = -b$ до $x_2 = b$. В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \int_{-b}^b A_n \cos\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{2b}\right) dx_2 = \\ = \int_{-b}^b (x_2^2 - b^2) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{2b}\right) dx_2. \end{aligned} \quad (100)$$

Левая сторона равенства (100) отлична от нуля только тогда, когда $m = n$, следовательно:

$$A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b (x_2^2 - b^2) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) dx_2. \quad (101)$$

Из выражения (101) получаем коэффициенты Фурье в виде

$$A_n = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{\pi^3 n^3} \frac{32b^2}{\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (102)$$

где использовано равенство $\sin(n\pi/2) = -(-1)^{(n+1)/2}$ при $n = 1, 3, 5, \dots$. Из выражений (1), (98) и (102) можно получить функцию напряжений

Прандтля в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= b^2 - x_2^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2} \cos\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi x_3}{2b}\right)}{n^3 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)} = \\
 &= b^2 - x_2^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{m=0,1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)^3} \times \\
 &\quad \times \frac{\cos\left(\frac{(2m+1)\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{(2m+1)\pi x_3}{2b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{(2m+1)\pi a}{2b}\right)}. \quad (103)
 \end{aligned}$$

Применяя выражения (31) и (103), получаем напряжения

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12} &= \mu\bar{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \frac{16\mu\bar{\theta} b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2} \cos\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi x_3}{2b}\right)}{n^2 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}, \\
 \sigma_{13} &= -\mu\bar{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \\
 &= \mu\bar{\theta} \left[2x_2 - \frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2} \sin\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi x_3}{2b}\right)}{n^2 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)} \right]. \quad (104)
 \end{aligned}$$

Максимальное значение напряжения сдвига в случае, когда $a > b$, достигается в середине более длинной стороны прямоугольника, а именно при $x_3 = 0$, $x_2 = b$. Таким образом, из равенств (104) имеем

$$|\sigma_{13}|_{\max} = 2\mu\bar{\theta}b \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)} \right]. \quad (105)$$

Подставляя выражение (104) в формулу (37), получаем

$$M = \frac{1}{3} \mu\bar{\theta} (2a)(2b)^3 \left[1 - \frac{192b}{\pi^5 a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)}{n^5} \right]. \quad (106)$$

В случае узкого прямоугольника ($a \gg b$) из уравнения (106) имеем

$$M = \frac{1}{3} \mu\bar{\theta} (2a)(2b)^3 \left[1 - 0.63 \frac{b}{a} \right]. \quad (107)$$

Это улучшенный результат, соответствующий выражению (89). И наконец, компоненту вектора перемещения u_1 находим из равенств (104) и (5):

$$u_1 = \bar{\theta} \left[x_2 x_3 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{i=\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2} \sin\left(\frac{n\pi x_2}{2b}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi x_3}{2b}\right)}{n^3 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi a}{2b}\right)} \right]. \quad (108)$$

д) *Полый стержень с эллиптическим поперечным сечением*

Рассмотрим стержень, ограниченный двумя *подобными* эллиптическими цилиндрами. Граница внешнего цилиндра задается выражением

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1. \quad (109)$$

Границу внутреннего цилиндра задаем следующим образом:

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = (1-k)^2, \quad 0 < k < 1. \quad (110)$$

Функцию напряжений Прандтля берем в форме (75), т. е. принимаем

$$\Psi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - 1 \right). \quad (111)$$

Функция (111) удовлетворяет соотношениям (33) и (54) на границе C_0 , т. е. на внешней границе, заданной выражением (109). Необходимо также удовлетворить граничному условию на внутренней границе:

$$\Psi = a_1 \quad \text{на } C_1, \quad (112)$$

где C_1 задано выражением (110). В данном случае это нетрудно в силу того, что линии $\Psi = \text{const}$ при Ψ , заданном формулой (111), являются эллипсами. Таким образом, на границе C_1 значение Ψ таково:

$$\Psi = a_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} [1 - (1-k)^2]. \quad (113)$$

Следовательно, функция (111) и для полого цилиндра является функцией Прандтля. Главный момент может быть определен по формуле (60) при учете выражений (111) и (113).

е) *Стержень с поперечным сечением в форме полукольца*

Рассмотрим стержень с поперечным сечением, изображенным на рис. 10.

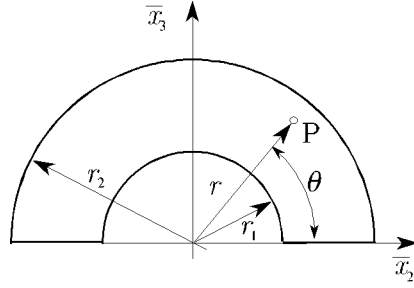


Рис. 10

Запишем дифференциальное уравнение для функции напряжений Прандтля в цилиндрической системе координат в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -2. \quad (114)$$

Разложив правую часть уравнения (114) в ряд Фурье при $\theta \in [0, \pi]$, получим

$$2 = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\theta. \quad (115)$$

Представим решение уравнения (114) в виде

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \sin(2n+1)\theta, \quad (116)$$

где f_n — функции, подлежащие определению. Подставляя выражения (115) и (116) в уравнение (114), имеем

$$\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} - \frac{(2n+1)^2}{r^2} f_n = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{2n+1}. \quad (117)$$

Запишем решение этого уравнения:

$$f_n = A_n r^{2n+1} + B_n r^{-2n-1} + \frac{8r^2}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad (118)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Функция (116) удовлетворяет граничному условию $\Psi = 0$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Для удовлетворения условия $\Psi = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_2$ потребуем, чтобы

$$f_n(r_1) = f_n(r_2) = 0. \quad (119)$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (118), получаем

$$f_n = \frac{8r_2^2}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)} [\rho^2 - a_n \rho^{2n+1} - b_n \rho^{-2n-1}], \quad (120)$$

где

$$\rho = \frac{r}{r_2}, \quad k = \frac{r_1}{r_2}, \quad a_n = \frac{1 - k^{2n+3}}{1 - k^{4n+2}}, \quad b_n = k^{2n+3} \frac{1 - k^{2n-1}}{1 - k^{4n+2}}. \quad (121)$$

При наличии выражений (120) и (116) ненулевые компоненты тензора напряжений в произвольной точке P можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu \bar{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \mu \bar{\theta} r_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)} (2n+1) \times \\ &\quad \times [\rho - a_n \rho^{2n} - b_n \rho^{-2(n+1)}] \cos(2n+1)\theta, \\ \sigma_{\theta z} &= \mu \bar{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\mu \bar{\theta} r_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)(2n+1)(2n+3)} (2n+1) \times \\ &\quad \times \left[\frac{2}{2n+1} \rho - a_n \rho^{2n} + b_n \rho^{-2(n+1)} \right] \sin(2n+1)\theta. \end{aligned} \quad (122)$$

Напряжение сдвига достигает максимального значения в точке $r = r_2$ (т. е. $\rho = 1$) и $\theta = \pi/2$.

ж) Призматический прямоугольный стержень с трещиной

Рассмотрим стержень с поперечным сечением, изображенным на рис. 11. Он имеет прямоугольную трещину вдоль линии $3' - 2'$. Длина трещины h . Мы ищем решение уравнения (5.5.33), а именно

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = -2, \quad (123)$$

в области, показанной на рис. 11.

Пусть Ψ_1 является значением Ψ в части области 1-1-2-2. Представим Ψ_1 в форме (см. (5.5.91))

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= a^2 - x_3^2 + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi x_2}{2a} \right) + B_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi x_2}{2a} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi x_3}{2a} \right) = \\ &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{32a^2}{n^3\pi^3} (-1)^{(n-1)/2} + A_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi x_2}{2a} \right) + \right. \\ &\quad \left. + B_n \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi x_2}{2a} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi x_3}{2a} \right), \end{aligned} \quad (124)$$

где, как и в параграфе 5.5, использовано разложение в ряд Фурье функции $a^2 - x_3^2$. Функция (124) удовлетворяет уравнению (123) в 1-1-2-2 и граничному условию $\Psi_1 = 0$ на краю 1-2, т. е. $x_3 = \pm a$. Для того чтобы

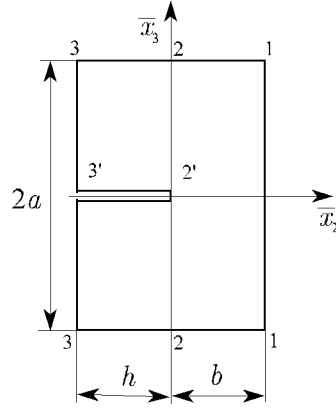


Рис. 11

удовлетворить граничному условию на линии 1-1, т. е. для $x_2 = b$, запишем равенство

$$\frac{32a^2}{n^3\pi^3}(-1)^{(n-1)/2} + A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{2a}\right) = 0. \quad (125)$$

Решая (125) относительно A_n , получаем

$$A_n = -\frac{32a^2}{n^3\pi^3}(-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)} - B_n \operatorname{th}\left(\frac{n\pi b}{2a}\right). \quad (126)$$

Пусть Ψ_2 является значением Ψ на части области 2-2'-3'-3. Зададим Ψ_2 в виде

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= (ax_3 - x_3^2) + \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left(C_m \operatorname{ch}\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + D_m \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a}\right) = \\ &= \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left(\frac{4a^2}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] + C_m \operatorname{ch}\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + D_m \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a}\right), \end{aligned} \quad (127)$$

где использовано разложение в ряд Фурье по синусам для функции $(x_2 a - x_3^2)$. Функция (127) удовлетворяет уравнению (123) и граничному условию $\Psi_2 = 0$ на краях 2-3 и 2'-3'. На краю 3-3 должно выполняться

условие $\Psi_2 = 0$ при $x_2 = -h$. Таким образом,

$$\frac{4a^2}{m^3\pi^3}[1 - (-1)^m] + C_m \operatorname{ch}\left(\frac{m\pi h}{a}\right) - D_m \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi h}{a}\right) = 0, \quad (128)$$

или

$$C_m = -\frac{4a^2}{m^3\pi^3}[1 - (-1)^m] \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{m\pi h}{a}\right)} + D_m \operatorname{th}\left(\frac{m\pi h}{a}\right). \quad (129)$$

Перейдем теперь к условиям сопряжения на линии 2-2'-2. Должны выполняться соотношения

$$\Psi_1(0, x_3) = \Psi_2(0, x_3), \quad \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=0}. \quad (130)$$

Чтобы удовлетворить первое равенство (130), мы, во-первых, должны разложить функцию

$$f(x_3) = \begin{cases} \sin \frac{m\pi x_3}{a}, & -a < x_3 < 0, \\ -\sin \frac{m\pi x_3}{a}, & 0 < x_3 < a, \end{cases} \quad (131)$$

в ряд Фурье по косинусам следующим образом:

$$f_1(x_3) = -(-1)^m \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2} \cos\left(\frac{n\pi x_3}{2a}\right). \quad (132)$$

После подстановки (132) в формулу (127) первое условие (130) превратится в

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{32a^2}{n^3\pi^3} (-1)^{(n-1)/2} + A_n \right) \cos\left(\frac{n\pi x_3}{2a}\right) = \\ & = - \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left(\frac{4a^2}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] + C_m \right) (-1)^m \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi x_3}{2a}\right)}{m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (133)$$

или

$$\begin{aligned} A_n = \frac{32a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right]} - \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \right\} - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2} C_m. \end{aligned} \quad (134)$$

Для получения равенства производных в (130) вычислим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi}{2a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_3}{2a}\right), \\ \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} &= \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left(D_m \frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a}\right). \end{aligned} \quad (135)$$

Теперь разложим функцию

$$f_2(x_3) = \begin{cases} -\cos \frac{n\pi x_3}{2a}, & -a < x_3 < 0, \\ \cos \frac{n\pi x_3}{2a}, & 0 < x_3 < a, \end{cases} \quad (136)$$

в ряд Фурье по синусам, получим

$$f_2(x_3) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a}\right). \quad (137)$$

Окончательно, подставляя разложение (137) в равенства (135) и (130), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi}{2a}\right) \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a}\right) \right] &= \\ = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left(D_m \frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_3}{a}\right). \end{aligned} \quad (138)$$

Решая (138) относительно D_m , находим

$$D_m = -\frac{(-1)^m}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n}{m^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2} B_n. \quad (139)$$

Подставляя это выражение в формулу (129) и полученный таким образом результат — в (134), из условия (126) имеем

$$\begin{aligned}
 & B_n + \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi b}{2a} \right) \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} i B_i \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{m \operatorname{th} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)}{\left[m^2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right] \left[m^2 - \left(\frac{i}{2} \right)^2 \right]} = \\
 & = -\frac{32a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{1}{2\pi} \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi b}{2a} \right) \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[m^2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right]} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(-1)^{(n-1)/2} \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi b}{2a} \right) - 1}{n^3 \operatorname{sh} \left(\frac{n\pi b}{2a} \right)} \right\}. \tag{140}
 \end{aligned}$$

С учетом B_n из соотношения (140) получаем решения Ψ_1 и Ψ_2 . После чего главный момент примет вид (см. (37))

$$M = 2G\bar{\theta} \left[\int_{-a}^a \left(\int_0^b \Psi_1 dx_2 \right) dx_3 + 2 \int_0^a \left(\int_0^b \Psi_2 dx_2 \right) dx_3 \right]. \tag{141}$$

Базилевич [46] вычислил первые пять членов в формуле (140) для случая, когда $a = b = h = 4$. Он обнаружил, что для поперечного сечения без трещины формула (106) приводится к $M_{wc} = 596\mu\bar{\theta}$, в то время как согласно (141) момент равен $M = 349\mu\bar{\theta}$. Это отношение

$$\frac{M}{M_{wc}} = 0.59 \tag{142}$$

характеризует уменьшение момента из-за наличия трещины.

5.6 Кручение стержня с переменным круговым поперечным сечением

Рассмотрим стержень с переменным поперечным сечением, нагруженный двумя моментами, действующими на его концах (рис. 12). Основываясь на свойствах решения для стержня с постоянным поперечным сечением, предположим, что в цилиндрической системе координат (r, θ, z) для компонент вектора перемещений

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = u_\theta(r, z). \tag{1}$$

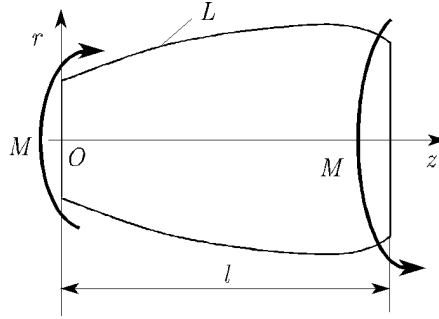


Рис. 12

Из равенств (1) получим компоненты тензора деформаций в виде

$$E_{rr} = E_{\theta\theta} = E_{zz} = E_{rz} = 0, \quad E_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad E_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad (2)$$

и, таким образом,

$$\vartheta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (3)$$

Тензор напряжений имеет вид (см. (3.6.1))

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{\theta z} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \quad (4)$$

В силу равенств (4) уравнения равновесия (1.5.6) таковы:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = 0, \quad (5)$$

или

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right] = 0. \quad (7)$$

Из равенств (7) мы делаем вывод о том, что существует функция F такая, что

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\theta}{r} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right), \quad (8)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (9)$$

Дифференцируя первое соотношение (9) по r , а второе — по z и складывая результаты, получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0. \quad (10)$$

Используя соотношения (8) и (4), можно выразить компоненты тензора напряжений через F следующим образом:

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (11)$$

Вектор напряжений на боковой поверхности равен нулю (заметим, что $n_\theta = 0$), так что

$$\sigma_{\theta z} n_z + \sigma_{r\theta} n_r = 0 \quad \text{на } L. \quad (12)$$

Поскольку $n_z = -dr/dS$ и $n_r = dz/dS$, где S — длина дуги кривой L , то, подставляя соотношения (11) в равенство (12), получаем

$$\frac{dF}{dS} = 0 \quad \text{на } L. \quad (13)$$

Следовательно, F определяется из решения уравнения (10) при условии (13). Главный момент в любом поперечном сечении радиуса a определяется формулой

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{\theta z} r^2 dr d\theta = 2\pi \int_0^a \sigma_{\theta z} r^2 dr = 2\pi\mu \int_0^a \frac{\partial F}{\partial r} dr = \\ &= 2\pi\mu [F(a, z) - F(0, z)]. \end{aligned} \quad (14)$$

В качестве примера рассмотрим случай конического стержня (рис. 13). Запишем решение уравнения (10):

$$F(r, z) = c \left\{ \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \left[\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]^3 \right\}, \quad (15)$$

где c — постоянная.

На линии L определяемой уравнением

$$r = \operatorname{tg} \alpha z, \quad (16)$$

имеем $F(r, z) = \text{const}$, таким образом, граничное условие (13) удовлетворяется. Ненулевые компоненты тензора напряжений получаются из соотношений (11):

$$\sigma_{\theta z} = -c \frac{\mu r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \sigma_{r\theta} = -c \frac{\mu r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (17)$$

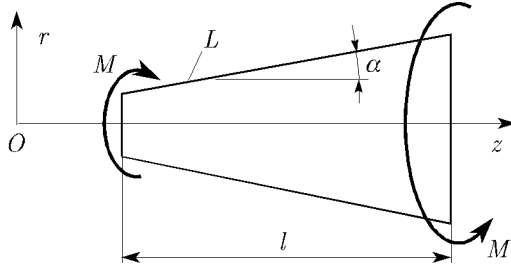


Рис. 13

Постоянная c в формуле (15) находится из равенства (14) и равна

$$c = \frac{3M}{2\pi\mu(2 - 3\cos\alpha + \cos^2\alpha)}. \quad (18)$$

5.7 Изгиб моментом (чистый изгиб)

В этом параграфе мы рассматриваем изгиб моментом призматического стержня с произвольным поперечным сечением. Предположим, что стержень нагружен системой сил и моментов, действующих на его концах, эквивалентных моменту $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2$, и что боковая поверхность стержня свободна от напряжений. Выражение для \mathbf{M} показывает, что нет вращательной компоненты (M_3) внешней нагрузки (рис. 14). Ось \bar{x}_3 проходит через центры поперечного сечения и лежит в плоскости Π .

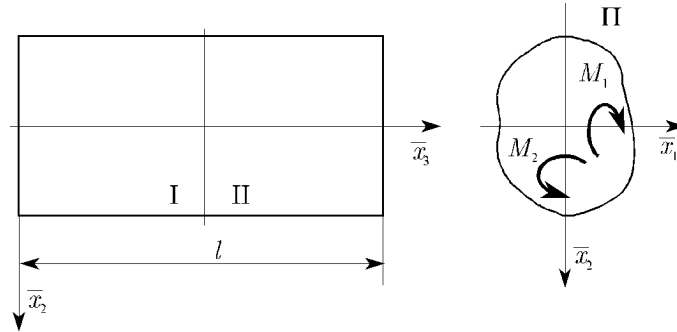


Рис. 14

Предположим, что компоненты тензора напряжений в произвольной точке поперечного сечения равны

$$\sigma_{33} = ax_1 + bx_2, \quad \sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad (1)$$

где a и b — постоянные. Если разрезать стержень по сечению x_3 (см. рис. 14) и рассмотреть равновесие части I (т. е. части $[0, x_3]$), то получим (рис. 15)

$$M_1 = \int_A \int \sigma_{33} x_2 dA, \quad M_2 = \int_A \int \sigma_{33} x_1 dA, \quad \int_A \int \sigma_{33} dA = 0. \quad (2)$$

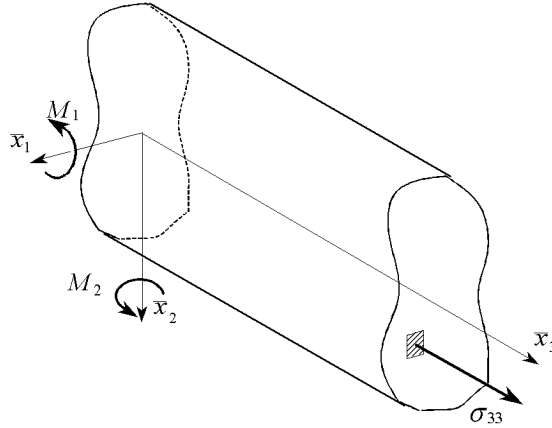


Рис. 15

Подставляя (1) в (2), имеем

$$aJ_{12} + bJ_{11} = M_1, \quad aJ_{22} + bJ_{12} = M_2,$$

$$a \int_A \int x_1 dA + b \int_A \int x_2 dA = 0, \quad (3)$$

где

$$J_{11} = \int_A \int x_2^2 dA, \quad J_{22} = \int_A \int x_1^2 dA, \quad J_{12} = \int_A \int x_1 x_2 dA \quad (4)$$

являются моментами инерции поперечного сечения A . Третье условие (3) всегда удовлетворяется, поскольку \bar{x}_1 и \bar{x}_2 — оси, проходящие через центр поперечного сечения. Из (3) следует, что

$$a = \frac{M_2 J_{11} - M_1 J_{12}}{J_{11} J_{22} - J_{12}^2}, \quad b = \frac{M_1 J_{22} - M_2 J_{12}}{J_{11} J_{22} - J_{12}^2}. \quad (5)$$

С учетом (5) распределение напряжения, которое удовлетворяет граничным условиям при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$, запишется в виде

$$\sigma_{33} = \frac{M_2 J_{11} - M_1 J_{12}}{J_{11} J_{22} - J_{12}^2} x_1 + \frac{M_1 J_{22} - M_2 J_{12}}{J_{11} J_{22} - J_{12}^2} x_2. \quad (6)$$

Тензор напряжений с компонентами (1) удовлетворяет уравнениям равновесия (4.1.1) и условиям совместности (4.1.20). Поскольку стержень является призматическим, то (см. рис. 2)

$$\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2. \quad (7)$$

Следовательно, для вектора напряжений в произвольной точке боковой поверхности стержня

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Теперь определим компоненты вектора перемещения. Для упрощения анализа предположим, что оси \bar{x}_1 и \bar{x}_2 являются главными осями поперечного сечения, при этом $J_{12} = 0$, и что $M_1 = 0$, $M_2 = M_s$. Тогда равенство (6) превращается в

$$\sigma_{33} = \frac{M_s}{J_{22}} x_1. \quad (9)$$

Учитывая соотношение (9) и (3.4.14), получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\nu \frac{M_s}{E J_{22}} x_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu \frac{M_s}{E J_{22}} x_2, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{M_s}{E J_{22}} x_1, \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0. \quad (11)$$

Интегрируя третье уравнение (10), имеем

$$u_3 = \frac{M_s}{E J_{22}} x_1 x_3 + w_0(x_1, x_2), \quad (12)$$

где w_0 — произвольная функция. Из равенств (11) и (12) получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{M_s}{E J_{22}} x_3 - \frac{\partial w_0}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial w_0}{\partial x_2}. \quad (13)$$

Интегрирование равенства (13) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{M_s}{E J_{22}} \frac{x_3^2}{2} - \frac{\partial w_0}{\partial x_1} x_3 + u_0(x_1, x_2), \\ u_2 &= -\frac{\partial w_0}{\partial x_2} x_3 + v_0(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (14) в (10) получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} x_3 + \frac{\partial u_0}{\partial x_1} &= -\frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1, \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} x_3 + \frac{\partial v_0}{\partial x_2} &= -\frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формул (15) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1 &= 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x_2} + \frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрирование уравнений (16) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\nu M_s}{E J_{22}} \frac{x_1^2}{2} + \varphi_1(x_2), \\ v_0 &= -\frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1 x_2 + \varphi_2(x_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя их в соотношения (14), получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu M_s}{E J_{22}} \frac{x_3^2}{2} - \frac{\partial w_0}{\partial x_1} x_3 - \frac{\nu M_s}{E J_{22}} \frac{x_1^2}{2} + \varphi_1(x_2), \\ u_2 &= -\frac{\partial w_0}{\partial x_2} x_3 - \frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1 x_2 + \varphi_2(x_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Наконец, подставляя равенства (18) в (11), имеем

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} x_3 + \frac{d\varphi_1}{dx_2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} x_3 - \frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_2 + \frac{d\varphi_2}{dx_1} = 0. \quad (19)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dx_2} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} - \frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_2 = 0. \quad (20)$$

Решая уравнение (20) и подставляя результат в формулы (12) и (18), получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{M_s}{2E J_{22}} (\nu x_1^2 + x_3^2 - \nu x_2^2) - c_2 x_3 + c_4 x_2 + c_6, \\ u_2 &= -\frac{\nu M_s}{E J_{22}} x_1 x_2 - c_1 x_3 - c_4 x_1 + c_5, \\ u_3 &= \frac{M_s}{E J_{22}} x_1 x_3 + c_1 x_2 + c_2 x_1 + c_3, \end{aligned} \quad (21)$$

где c_i , $i = 1, \dots, 6$, — постоянные. Если мы предположим, что точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ неподвижна и стержень заделан на конце $x_3 = 0$, то мы получим в качестве граничных условий следующие выражения:

$$u_i(0, 0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = x_2 = x_3 = 0. \quad (22)$$

Подставляя равенства (21) в уравнения (22), получаем, что $c_i = 0$, $i = 1, \dots, 6$, и, значит, при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{M_s}{2EJ_{22}}(\nu x_1^2 + x_3^2 - \nu x_2^2), \\ u_2 &= -\frac{\nu M_s}{EJ_{22}}x_1x_2, \quad u_3 = \frac{M_s}{EJ_{22}}x_1x_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Ось стержня в недеформированном состоянии определяется равенством $x_1 = x_2 = 0$. В деформированном состоянии она становится кривой, описываемой равенствами

$$u_1 = -\frac{M_s}{2EJ_{22}}x_3^2, \quad u_2 = u_3 = 0. \quad (24)$$

Кривизна этой кривой определяется из формулы (24) с использованием выражения

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 u_1}{dx_3^2}}{\left[1 + \left(\frac{du_1}{dx_3}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{\frac{M_s}{EJ_{22}}}{\left[1 + \left(\frac{M_s x_3}{EJ_{22}}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (25)$$

Если мы предположим, что $M_s x_3/EJ_{22} \ll 1$, то (25) превращается в

$$\kappa = \frac{1}{R} = -\frac{M_s}{EJ_{22}}. \quad (26)$$

Уравнение (26) известно как основное уравнение состояния теории стержней *Бернулли-Эйлера* (см. [43]). Оно может быть сформулировано следующим образом: *кривизна оси стержня пропорциональна изгибающему моменту, действующему на стержень*. Анализ, приведенный здесь, показывает, что уравнение состояния (26) обосновано с точки зрения теории упругости.

5.8 Изгиб стержня силой на конце

Рассмотрим призматический стержень, один конец которого заделан, а второй свободен. Предположим, что свободный конец стержня нагружен сосредоточенной силой \mathbf{F} (или системой сил, главный вектор которых равен \mathbf{F}) и что объемные силы равны нулю (рис. 16). Пусть система координат \bar{x}_i ориентирована так, что ось \bar{x}_3 совпадает с осью стержня, соединяющей центры поперечных сечений.

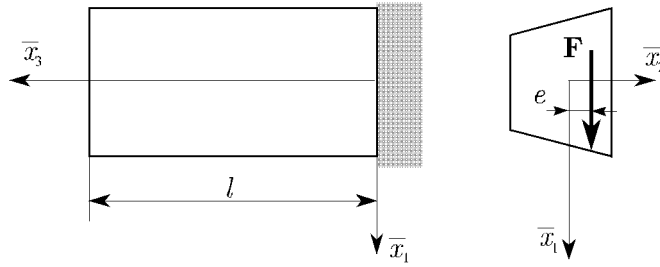


Рис. 16

Для простоты положим, что поперечное сечение симметрично по отношению к оси \bar{x}_2 ⁵. Линия действия силы \mathbf{F} параллельна оси \bar{x}_1 , но расположена на расстоянии e от нее (эксцентриситет). В поперечном сечении стержня, на расстоянии x_3 от свободного конца изгибающий момент задается в виде

$$M_2 = F(l - x_3). \quad (1)$$

Мы полагаем, что компонента напряжения σ_{33} в случае чистого изгиба равна (см. (5.7.9) при $J_{22} = J$)

$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{J} x_1 = -\frac{F(l - x_3)}{J} x_1. \quad (2)$$

Мы также положим, что

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0. \quad (3)$$

Тогда уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{F x_1}{J} = 0. \quad (4)$$

Из этих уравнений следует, что напряжения σ_{13} и σ_{23} одинаковы во всех поперечных сечениях. В силу равенств (3) уравнения совместности сводятся к следующим:

$$\nabla^2 \sigma_{13} + \frac{F}{(1 + \nu)J} = 0; \quad \nabla^2 \sigma_{23} = 0, \quad (5)$$

где использовано равенство $\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{33}$. Поскольку стержень призматический и боковая поверхность S_L свободна от напряжения, мы имеем граничные условия

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{0} \quad \text{на } S_L, \quad (6)$$

⁵ Если мы опустим это предположение, то анализ несколько изменится. Например, вместо (5.8.2) мы имели бы выражение типа (5.7.1).

или

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{на } S_L. \quad (7)$$

Из соотношения (7) получаем

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \quad \text{на } S_L. \quad (8)$$

Третье уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \sigma_{13} + \frac{F}{2J} [x_1^2 - f(x_2)] \right\} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad (9)$$

где f — произвольная функция. Для того чтобы решить уравнение (9), введем функцию напряжений $B = B(x_1, x_2)$ по следующим формулам:

$$\sigma_{13} = \frac{\partial B}{\partial x_2} - \frac{F}{2J} [x_1^2 - f(x_2)], \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial B}{\partial x_1}. \quad (10)$$

С учетом (10) условие (9) выполняется тождественно и равенства (5) приводятся к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 B = \frac{F}{2J} \left(\frac{2\nu}{1+\nu} - \frac{d^2 f}{dx_2^2} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 B = 0. \quad (11)$$

Из равенства (11) следует, что $\nabla^2 B$ не зависит от x_1 . Тогда, интегрируя первое уравнение (11), получаем

$$\nabla^2 B = \frac{F}{2J} \left(\frac{2\nu}{1+\nu} x_2 - \frac{df}{dx_2} \right) + c_1, \quad (12)$$

где c_1 — постоянная. Постоянная c_1 допускает интересную физическую интерпретацию. Рассмотрим компоненту \bar{x}_3 вектора вращения (см. (2.4.15))

$$w_3 = -\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (13)$$

Изменение w_3 вдоль оси стержня определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_3}{\partial x_3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \\ &= \frac{\partial E_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_{31}}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из последнего равенства по закону Гука (3.3.43) получаем

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \right]. \quad (15)$$

Подставляя равенство (10) в формулу (15), имеем

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{1}{2\mu} \left[-\nabla^2 B + \frac{F x_1^2}{2J} - \frac{F}{2J} \frac{df}{dx_2} \right]. \quad (16)$$

Окончательно при подстановке (12) уравнение (16) принимает вид

$$-\frac{\partial w_3}{\partial x_3} = \frac{\nu F}{EJ} x_2 + \frac{c_1}{2\mu}. \quad (17)$$

На оси стержня имеем $x_2 = 0$, следовательно, соотношения (17) можно интерпретировать следующим образом: *постоянная c_1 в (12) связана с местным вращением поперечного сечения вокруг оси \bar{x}_3 по отношению к центру поперечного сечения*. Следовательно, используя обозначения параграфа 5.5 (особенно (5.5.1)), имеем

$$c_1 = -2\mu\bar{\theta}. \quad (18)$$

Уравнение (12) теперь может быть записано в виде

$$\nabla^2 B = \frac{F}{2J} \left(\frac{2\nu}{1+\nu} x_2 - \frac{df}{dx_2} \right) - 2\mu\bar{\theta}. \quad (19)$$

Граничные условия, соответствующие (19), следуют из соотношений (7) и (10), т. е. мы получим

$$\left\{ \frac{\partial B}{\partial x_2} - \frac{F}{2J} [x_1^2 - f(x_2)] \right\} n_1 + \left(-\frac{\partial B}{\partial x_1} \right) n_2 = 0. \quad (20)$$

Используя выражения

$$n_1 = \frac{dx_2}{dS}, \quad n_2 = -\frac{dx_1}{dS}, \quad (21)$$

где S — длина дуги контура C поперечного сечения, получаем

$$\frac{dB}{dS} = \frac{F}{2J} [x_1^2 - f(x_2)] \frac{dx_2}{dS} \quad \text{на } C. \quad (22)$$

Как можно видеть, задача изгиба сводится к решению граничной задачи (19) и (22). Функция $f(x_2)$ произвольна и должна быть выбрана так, чтобы правая часть выражения (22) упрощалась, например, была бы равна нулю. В общем случае изгиб приводит к кручению стержня, так как постоянная c_1 (или угол $\bar{\theta}$) не равна нулю.

Теперь перейдем к задаче определения важной точки поперечного сечения, называемой *центром изгиба*. Если сила \mathbf{F} проходит через эту точку и имеет линию действия параллельную главной оси поперечного сечения, то имеем $\bar{\theta} = 0$ (или $c_1 = 0$ в (12)). Обозначим координаты центра изгиба (x_{1cf}, x_{2cf}, l) . Положение этой точки определяется из условия равенства нулю момента сил, возникающих из напряжений сдвига σ_{13} и σ_{23} , относительно центра изгиба. Таким образом, координаты (x_{1cf}, x_{2cf}) должны удовлетворять уравнению

$$\iint_A [\sigma_{13}(x_2 - x_{2cf}) - \sigma_{23}(x_1 - x_{1cf})] dA = 0. \quad (23)$$

Мы можем записать это условие в виде

$$M + x_{1cf}Q_2 - x_{2cf}Q_1 = 0, \quad (24)$$

где величины

$$M = \iint_A [\sigma_{13}x_2 - \sigma_{23}x_1] dA, \quad Q_1 = \iint_A \sigma_{13} dA, \quad Q_2 = \iint_A \sigma_{23} dA, \quad (25)$$

являются изгибающим моментом и компонентами главного вектора силы в произвольном поперечном сечении.

Если стержень нагружен единственной силой с линией действия параллельной главной оси поперечного сечения (как показано на рис. 17 параллельной оси симметрии), то $x_{1cf} = 0$ и

$$Q_2 = 0, \quad Q_1 = F. \quad (26)$$

Из условия (24) следует, что

$$x_{2cf} = \frac{M}{F}. \quad (27)$$

Момент M мы определим из соотношений (25) и (10). Таким образом, подставляя (10) в (25), получаем

$$M = - \iint_A \left(x_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} \right) dA + \frac{F}{2J} \iint_A [x_1^2 - f(x_2)] x_2 dA. \quad (28)$$

Преобразуя первый член в правой части (28) и используя теорему Гаусса заключаем, что (см. (5.5.36))

$$M = 2 \iint_A B(x_1, x_2) dA + \frac{F}{2J} \iint_A [x_1^2 - f(x_2)] x_2 dA. \quad (29)$$

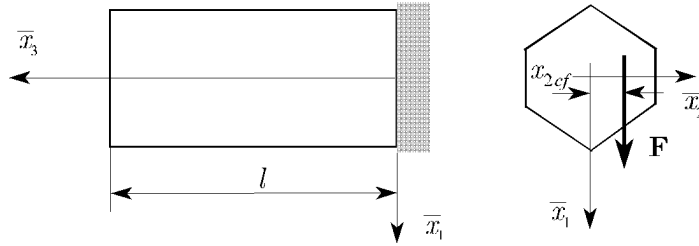


Рис. 17

Из равенств (29) и (27) определяется центр изгиба. Заметим, что мы должны решить проблему изгиба (определить B и f) прежде, чем мы определим x_{2cf} .

Теперь мы найдем решения для нескольких конкретных задач изгиба.

а) Стержень с эллиптическим поперечным сечением

Рассмотрим призматический стержень с эллиптическим поперечным сечением, нагруженный силой \mathbf{F} , проходящей через центр поперечного сечения ($e = 0$), контур которого C задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (30)$$

Предположим, что функция $f(x_2)$ такова:

$$f(x_2) = a^2 \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2} \right). \quad (31)$$

Тогда из (22) следует, что

$$B = 0 \quad \text{на } C. \quad (32)$$

Подставляя выражение (31) в формулу (19), получаем при $\bar{\theta} = 0$

$$\nabla^2 B = \frac{F}{J} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} + \frac{a^2}{b^2} \right) x_2. \quad (33)$$

Будем искать решение уравнения (33) в форме

$$B = m \frac{F a^2}{J} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right) x_2, \quad (34)$$

где m — постоянная. Подставляя формулу (34) в равенство (33), находим, что

$$m = \frac{\nu b^2 + (1 + \nu) a^2}{2(1 + \nu)(b^2 + 3a^2)}. \quad (35)$$

Следовательно, для функции B получаем выражение

$$B = \frac{\nu b^2 + (1 + \nu)a^2}{2(1 + \nu)(b^2 + 3a^2)} \frac{F a^2}{J} \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right) x_2. \quad (36)$$

Из (10) определим напряжения сдвига

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{b^2 + 2(1 + \nu)a^2}{2(1 + \nu)(b^2 + 3a^2)} \frac{F}{J} \left(a^2 - x_1^2 - \frac{(1 - 2\nu)a^2 x_2^2}{2(1 + \nu)(a^2 + b^2)} \right), \\ \sigma_{23} &= -\frac{\nu b^2 + (1 + \nu)a^2}{(1 + \nu)(b^2 + 3a^2)} \frac{F}{J} x_1 x_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Отметим, что в равенствах (37) мы обозначаем через J главный момент инерции для эллиптического поперечного сечения: $J = \pi a^3 b / 4$.

В частном случае кругового поперечного сечения имеем $a = b = R$ и для напряжений (37) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{3 + 2\nu}{8(1 + \nu)} \frac{F}{J} \left(R^2 - x_1^2 - \frac{(1 - 2\nu)x_2^2}{3 + 2\nu} \right), \\ \sigma_{23} &= -\frac{1 + 2\nu}{4(1 + \nu)} \frac{F}{J} x_1 x_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Далее определим компоненты вектора перемещений, соответствующие круговому поперечному сечению. Используя закона Гука и равенства (2), (3) и (38), получаем компоненты тензора деформаций

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\nu F}{EJ} (l - x_3) x_1, & E_{22} &= \frac{\nu F}{EJ} (l - x_3) x_1, \\ E_{33} &= -\frac{F}{EJ} (l - x_3) x_1, & E_{12} &= 0, \\ E_{13} &= \frac{3 + 2\nu}{8} \frac{F}{EJ} \left(R^2 - x_1^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} x_2^2 \right), & E_{23} &= -\frac{1 + 2\nu}{4} \frac{F}{EJ} x_1 x_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Запишем граничные условия, соответствующие стержню с фиксированной точкой ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) и с вектором вращения в этой точке равным нулю, в виде

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad w_1 = w_2 = w_3 = 0 \quad (40)$$

при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Из равенств (39), (4.1.3), и (40) получаются следующие компоненты вектора перемещений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{F}{2EJ} \left[\nu(x_1^2 - x_2^2)(l - x_3) + lx_3^2 - \frac{1}{3}x_3^2 \right], \\ u_2 &= \frac{F}{EJ} \nu(l - x_3) x_1 x_2, \\ u_3 &= -\frac{F}{EJ} \left[x_1(lx_3 - \frac{1}{2}x_3^2) + \frac{1}{4}(x_1^3 + x_2^2 x_1) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что при $x_1 = x_2 = 0, x_3 = l$ значение u_1 таково:

$$u_1(0, 0, l) = \frac{Fl^3}{3EJ}, \quad (42)$$

что является результатом элементарной теории изгиба.

б) Стержень с прямоугольным поперечным сечением

Рассмотрим стержень, закрепленный на одном конце и нагруженный на другом конце, с прямоугольным поперечным сечением $x_2 \in [-a, a], x_3 \in [-b, b]$, показанным на рис. 18. Предположим, что линия действия силы проходит через центр, так что $e = 0$. Контур поперечного сечения C в этом случае задается как (рис. 18)

$$(x_1^2 - a^2)(x_2^2 - b^2) = 0 \quad \text{на } C. \quad (43)$$

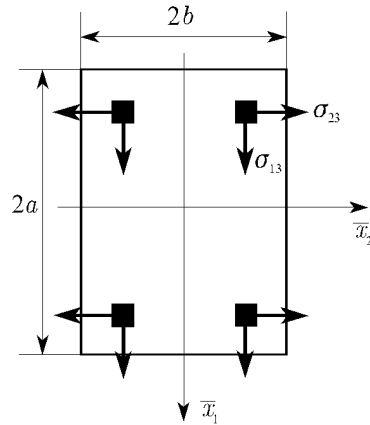


Рис. 18

В этом случае, поскольку сила приложена в центре, заключаем, что σ_{13} — четная, а σ_{23} — нечетная функция от x_2 . На основе этого и выражений (10) приходим к тому, что B должна быть нечетной функцией от x_2 и четной функцией от x_1 . Далее предположим, что для функции f в уравнениях (19) и (20)

$$f(x_2) = a^2. \quad (44)$$

Таким образом, уравнение (19) записывается в виде (при $\bar{\theta} = 0$)

$$\nabla^2 B = \frac{F}{J} \frac{\nu}{1 + \nu} x_2. \quad (45)$$

Граничные условия, соответствующие уравнению (45), получаются из условия (22):

$$\frac{dB}{dS} = 0, \quad \text{на } x_2 = \pm b, \quad (46)$$

поскольку $dx_2/dS = 0$ при $x_2 = \pm b$. Также

$$\frac{dB}{dS} = 0 \quad \text{на } x_1 = \pm a, \quad (47)$$

так как $dB/dS = (F/2J)[x_1^2 - a^2] = 0$ при $x_1 = \pm a$. Запишем функцию B в виде

$$B = B_1(x_2) + B_2(x_1, x_2), \quad (48)$$

где B_2 — гармоническая функция ($\nabla^2 B_2 = 0$). Тогда из равенства (45) получим

$$\frac{d^2 B_1}{dx_2^2} = \frac{\nu F}{(1 + \nu)J} x_2, \quad (49)$$

с граничными условиями

$$B_1(b) = B_1(-b) = 0. \quad (50)$$

Решением задачи (49) и (50) будет

$$B_1 = \frac{\nu F}{6(1 + \nu)J} (x_2^3 - b^2 x_2). \quad (51)$$

Для функции B_2 имеем

$$\nabla^2 B_2 = 0 \quad (52)$$

с граничными условиями

$$B_2(x_1, \pm b) = 0, \quad B_2(\pm a, x_2) = -B_1(x_2). \quad (53)$$

Разделяя переменные в уравнении (52), получаем

$$B_2 = A \operatorname{ch}(k x_1) \sin(k x_2), \quad (54)$$

где A и k — постоянные. Заметим, что B_2 — четная функция по отношению к x_1 и нечетная по x_2 . Из первого условия (53) следует, что

$$\sin(kb) = 0 \Rightarrow k = n\pi/b, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

Следовательно, решение уравнения (52) таково:

$$B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right), \quad (56)$$

где A_n — постоянные, подлежащие определению. Второе условие (53) приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \left(\frac{n\pi a}{b} \right) \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) = \frac{\nu F}{6(1+\nu)} (b^2 x_2 - x_2^3). \quad (57)$$

Умножая (57) на $\sin(m\pi x_2/b)$ и интегрируя результат на отрезке $[-b, b]$, получаем

$$A_n = -\frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(n\pi a/b)} \frac{4\nu F b^3}{n^3 \pi^3 (1+\nu) J}. \quad (58)$$

Окончательно из соотношений (48), (51), (56) и (58) определим функцию B как

$$B = \frac{\nu F}{6(1+\nu)J} \left[x_2^3 - b^2 x_2 - \frac{12b^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\operatorname{ch}(n\pi x_1/b)}{\operatorname{ch}(n\pi a/b)} \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \right]. \quad (59)$$

Используя формулы (59) и (10), получим напряжения сдвига

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{F}{2J} (a^2 - x_1^2) + \\ &+ \frac{\nu F}{6(1+\nu)J} \left[3x_2^3 - b^2 - \frac{12b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{ch}(n\pi x_1/b)}{\operatorname{ch}(n\pi a/b)} \cos \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right) \right], \\ \sigma_{23} &= \frac{2\nu F b^2}{\pi^2 (1+\nu) J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{sh}(n\pi x_1/b)}{\operatorname{ch}(n\pi a/b)} \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

В формуле (60) осевой момент инерции равен

$$J = \frac{(2a)^3(2b)}{12} = \frac{4}{3} a^3 b. \quad (61)$$

При элементарном (сопротивление материалов) подходе формулы для напряжений сдвига получаются такими:

$$\sigma_{13} = \frac{F}{2J} (a^2 - x_1^2) = \frac{3F}{8a^3 b} (a^2 - x_1^2), \quad \sigma_{23} = 0. \quad (62)$$

Выражения (62) могут быть получены из равенств (60), если мы пренебрежем членами под знаком суммы.

5.9 Элементарные сингулярные решения

Найдем теперь решения уравнений равновесия для трехмерного упругого тела, которые названы Буссинеском *элементарными решениями первого и второго рода*. Эти решения важны при изучении контактных напряжений.

а) Элементарные решения первого рода

Рассмотрим решение уравнений равновесия в форме Папковича-Нейбера. Тогда в равенстве (4.5.17) мы полагаем, в частном случае, следующее:

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = \frac{C}{r}; \quad A = -1, \quad B = 4(1 - \nu), \quad (1)$$

где C — постоянная и $r = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}$. Уравнение (4.5.17) принимает вид

$$u_i = 4(1 - \nu) \frac{C}{r} \delta_{3i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_3 \frac{C}{r} \right]. \quad (2)$$

Докажем, во-первых, что функция ϕ_3 гармоническая. Вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_i}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3x_j}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{x_i x_j}{r^5}, \quad (3)$$

так что

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{3}{r^3} + 3x_i x_i \frac{1}{r^5} = 0. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) в соотношение (2), получим

$$u_1 = C \frac{x_1 x_3}{r^3}, \quad u_2 = C \frac{x_2 x_3}{r^3}, \quad u_3 = \frac{C}{r} \left[3 - 4\nu + \frac{x_3^2}{r^2} \right]. \quad (5)$$

Компоненты вектора перемещений задаются формулой (5), и тензор деформаций может быть легко вычислен, причем его компоненты равны

$$E_{11} = C \frac{x_3}{r^3} \left[1 - 3\frac{x_1^2}{r^2} \right], \quad E_{22} = C \frac{x_3}{r^3} \left[1 - 3\frac{x_2^2}{r^2} \right], \quad E_{33} = C \frac{x_3}{r^3} \left[4\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} \right],$$

$$E_{12} = -3C \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}, \quad E_{13} = C \frac{x_1}{r^3} \left[2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} \right], \quad E_{23} = C \frac{x_2}{r^3} \left[2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} \right]. \quad (6)$$

Из выражений (6) находим

$$\vartheta = E_{11} + E_{22} + E_{33} = -2C \frac{x_3}{r^3} (1 - 2\nu). \quad (7)$$

Используя формулы (6) и (7), закон Гука (3.3.44) и задачу 3 главы 3, получаем компоненты тензора напряжений в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu C \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3\frac{x_1^2}{r^2}\right), & \sigma_{22} &= 2\mu C \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3\frac{x_2^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{33} &= 2\mu C \frac{x_3}{r^3} \left(2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2}\right), & \sigma_{12} &= -6\mu C \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu C \frac{x_2}{r^3} \left(2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2}\right), & \sigma_{13} &= 2\mu C \frac{x_1}{r^3} \left(2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2}\right).\end{aligned}\quad (8)$$

Как можно видеть из формул (5) и (8), компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений неограниченно возрастают в начале системы координат, т. е. при $r \rightarrow 0$. Следовательно, поля перемещений и напряжений имеют смысл только, если мы исключим точку $r = 0$. Чтобы сделать решение регулярным, мы полагаем, что существует сферическая полость малого радиуса r_0 в начале системы координат. Единичная нормаль на поверхности этой полости задается равенством

$$n_i = -\frac{x_i}{r_0}. \quad (9)$$

Для вектора напряжений $\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, т. е. для его компонент имеем

$$p_1 = 6C\mu \frac{x_1 x_3}{r_0^4}, \quad p_2 = 6C\mu \frac{x_2 x_3}{r_0^4}, \quad p_3 = 6C\mu \frac{x_3^2}{r_0^4} + 2(1 - 2\nu) \frac{C\mu}{r_0^2}. \quad (10)$$

Из соотношений (10) получим компоненты главного вектора поверхностных сил, действующих на сферической полости, в виде

$$\begin{aligned}F_1 &= \iint_S p_1 dA = \frac{6C\mu}{r_0^4} \iint_S x_1 x_3 dA, & F_2 &= \iint_S p_2 dA = \frac{6C\mu}{r_0^4} \iint_S x_2 x_3 dA, \\ F_3 &= \iint_S p_3 dA = \frac{6C\mu}{r_0^4} \iint_S x_3^2 dA + 2(1 - 2\nu) \frac{C\mu}{r_0^2} \iint_S dA.\end{aligned}\quad (11)$$

В силу симметрии имеем

$$\iint_S x_1 x_3 dA = 0, \quad \iint_S x_2 x_3 dA = 0, \quad \iint_S x_1^2 dA = \iint_S x_2^2 dA = \iint_S x_3^2 dA. \quad (12)$$

Использование формул (12) приводит к равенствам

$$\iint_S x_1^2 dA = \frac{1}{3} \iint_S [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] dA = \frac{1}{3} \iint_S r_0^2 dA = \frac{4\pi}{3} r_0^4. \quad (13)$$

Следовательно, для компонент главного вектора силы получаем

$$F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = F = 16\pi C\mu(1 - \nu). \quad (14)$$

Отсюда выразим C через F следующим образом:

$$C = \frac{F}{16\pi\mu(1 - \nu)}. \quad (15)$$

Теперь компоненты тензора напряжений (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{F x_3}{8\pi(1 - \nu)r^3} \left(1 - 2\nu - 3\frac{x_1^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{F x_3}{8\pi(1 - \nu)r^3} \left(1 - 2\nu - 3\frac{x_2^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{F x_3}{8\pi(1 - \nu)r^3} \left(2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{12} &= -\frac{3F}{8\pi(1 - \nu)} \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}, \\ \sigma_{23} &= \frac{F x_2}{8\pi(1 - \nu)r^3} \left(2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{F x_1}{8\pi(1 - \nu)r^3} \left(2\nu - 1 - 3\frac{x_3^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Поле напряжений (16) соответствует бесконечному упругому телу, нагруженному в начале системы координат сосредоточенной силой, направленной вдоль оси \bar{x}_3 , т. е. $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_3$. Оно называется *элементарным решением первого рода*. Это решение может быть получено из частного решения Кельвина неоднородного уравнения Ламе.

б) Элементарные решения второго рода

Рассмотрим поле деформаций в теле, когда решение взято в форме Папковича–Нейбера (4.5.17) при $A = 1$ и

$$\phi_0 = b \ln(r + x_3), \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = 0, \quad (17)$$

где b — произвольная постоянная. Докажем, во-первых, что функция ϕ_0 гармоническая. Для этого мы вычислим

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x_1} = \frac{b x_1}{r(r + x_3)}, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial x_2} = \frac{b x_2}{r(r + x_3)}, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3} = \frac{b}{r}. \quad (18)$$

Также

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_1^2} &= \frac{b}{r^2(r + x_3)} - b x_1 \frac{2x_1 + \frac{x_1 x_3}{r}}{r^2(r + x_3)^2}, \\ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_2^2} &= \frac{b}{r^2(r + x_3)} - b x_2 \frac{2x_2 + \frac{x_2 x_3}{r}}{r^2(r + x_3)^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2} = -\frac{b}{r^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из формул (19) следует, что $\nabla^2 \phi_0 = 0$. Теперь, используя соотношения (17) и (4.5.17), получим

$$u_1 = \frac{bx_1}{r(r+x_3)}, \quad u_2 = \frac{bx_2}{r(r+x_3)}, \quad u_3 = \frac{b}{r}. \quad (20)$$

Тензор деформаций в данном случае имеет компоненты

$$\begin{aligned} E_{11} &= b \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_1^2}{r^2(r+x_3)^2} \right], & E_{22} &= b \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_2^2}{r^2(r+x_3)^2} \right], \\ E_{33} &= -b \frac{x_3}{r^3}, & E_{12} &= -b \frac{x_1 x_2 (2r+x_3)}{r^3(r+x_3)^2}, & E_{13} &= -b \frac{x_1}{r^3}, & E_{23} &= -b \frac{x_2}{r^3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что

$$\vartheta = E_{11} + E_{22} + E_{33} = \nabla^2 \phi_0 = 0, \quad (22)$$

и закон Гука дает

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu b \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_1^2}{r^2(r+x_3)^2} \right], \\ \sigma_{22} &= 2\mu b \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_2^2}{r^2(r+x_3)^2} \right], \\ \sigma_{33} &= -2\mu b \frac{x_3}{r^3}, & \sigma_{12} &= -2\mu b \frac{x_1 x_2 (2r+x_3)}{r^3(r+x_3)^2}, \\ \sigma_{13} &= -2\mu b \frac{x_1}{r^3}, & \sigma_{23} &= -2\mu b \frac{x_2}{r^3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Функции (20) удовлетворяют уравнениям Ламе во всех точках упругого тела за исключением точки $(0,0,0)$ и точек на отрицательной полуоси \bar{x}_3 . Буссинек назвал соотношения (20), (23) *элементарными решениями второго рода*. На сфере радиусом r_0 вектор напряжений имеет компоненты, задаваемые в виде

$$p_1 = 2b\mu \frac{x_1}{r_0^2(r_0+x_3)}, \quad p_2 = 2b\mu \frac{x_2}{r_0^2(r_0+x_3)}, \quad p_3 = 2b\mu \frac{1}{r_0^2}. \quad (24)$$

5.10 Задача Буссинеска

Рассмотрим полупространство $x_3 > 0$, занятое упругой средой. Предположим, что в начале координат в положительном направлении оси x_3 действует сосредоточенная сила \mathbf{F} (рис. 19). Мы хотим определить поля напряжений и перемещений, что составляет *задачу Буссинеска*. Поскольку точка O , в которой приложена сила, является особой

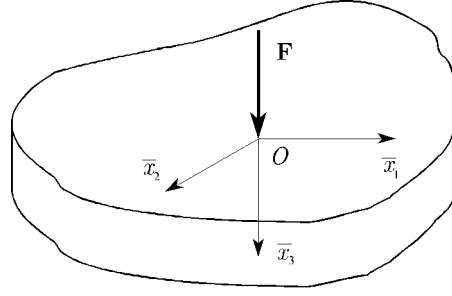


Рис. 19

точкой (см. параграф 5.1), удалим часть пространства в форме полусферы радиусом r_0 . Теперь рассмотрим полубесконечную область, ограниченную полусферой и плоскостью $x_3 = 0$.

Определим поля напряжений и перемещений, используя суперпозицию элементарных решений первого и второго рода. Положим, что сила \mathbf{F} является главным вектором распределенных напряжений, действующих на полусфере. Вектор напряжений $\bar{\mathbf{p}}$, действующий на полусфере радиусом r_0 , задается равенством (5.9.10), т. е.

$$\bar{p}_1 = 6C\mu \frac{x_1 x_3}{r_0^4}, \quad \bar{p}_2 = 6C\mu \frac{x_2 x_3}{r_0^4}, \quad \bar{p}_3 = 6C\mu \frac{x_3^2}{r_0^4} + 2(1-2\nu) \frac{C\mu}{r_0^2}, \quad (1)$$

и компоненты вектора напряжений на плоскости $x_3 = 0$ находятся из (5.9.8) и записываются как

$$\bar{\sigma}_{13} = -2\mu C \frac{x_1}{r_0^3} (1-2\nu), \quad \bar{\sigma}_{23} = -2\mu C \frac{x_2}{r_0^3} (1-2\nu), \quad \bar{\sigma}_{33} = 0. \quad (2)$$

Теперь предположим, что вектор напряжений $\bar{\mathbf{p}}$ элементарного решения второго рода также действует на поверхности полусферы, т. е. (см. (5.9.24))

$$\bar{\bar{p}}_1 = 2b\mu \frac{x_1}{r_0^2(r_0 + x_3)}, \quad \bar{\bar{p}}_2 = 2b\mu \frac{x_2}{r_0^2(r_0 + x_3)}, \quad \bar{\bar{p}}_3 = 2b\mu \frac{1}{r_0^2}. \quad (3)$$

Вектор напряжений на плоскости $x_3 = 0$ в этом случае таков (см. (5.9.23)):

$$\bar{\bar{\sigma}}_{13} = -2\mu b \frac{x_1}{r_0^3}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{23} = -2\mu b \frac{x_2}{r_0^3}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{33} = 0. \quad (4)$$

Если потребовать, чтобы плоскость $x_3 = 0$ была бы свободной от напряжений, то

$$\sigma_{13} = \bar{\sigma}_{13} + \bar{\bar{\sigma}}_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = \bar{\sigma}_{23} + \bar{\bar{\sigma}}_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = \bar{\sigma}_{33} + \bar{\bar{\sigma}}_{33} = 0. \quad (5)$$

Подставляя равенства (2) и (4) в соотношение (5), заключаем, что

$$b = -C(1 - 2\nu). \quad (6)$$

Далее определим главный вектор \mathbf{F} для напряжений, действующих на полусфере. В силу симметрии имеем

$$F_3 = F = \iint_{S/2} (\bar{p}_3 + \bar{p}_3) dA, \quad (7)$$

где $S/2$ — площадь полусферы. Поскольку

$$\bar{p}_3 + \bar{p}_3 = 6C\mu \frac{x_3^2}{r_0^4}, \quad (8)$$

то из соотношения (7) получим

$$F = \frac{6C\mu}{r_0^4} \iint_{S/2} x_3^2 dA = \frac{1}{2} \frac{6C\mu}{r_0^4} \iint_S x_3^2 dA = 4\pi C\mu, \quad (9)$$

где использовано равенство (5.9.13). Из формулы (9) определяем C , а из формулы (6) находим значение b . Затем, складывая равенства (5.9.5) и (5.9.20), имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{F}{4\pi\mu} \left[\frac{x_1 x_3}{r^3} - (1 - 2\nu) \frac{x_1}{r(r + x_3)} \right], \\ u_2 &= \frac{F}{4\pi\mu} \left[\frac{x_2 x_3}{r^3} - (1 - 2\nu) \frac{x_2}{r(r + x_3)} \right], \\ u_3 &= \frac{F}{4\pi\mu} \left[\frac{2(1 - \nu)}{r} + \frac{x_3^2}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Компоненты тензора напряжений для поля перемещений (10) таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_1^2}{r^2} \right) - (1 - 2\nu) \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r + x_3)} - \frac{x_1^2}{r^2(r + x_3)^2} \right] \right\}, \\ \sigma_{22} &= \frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{x_3}{r^3} \left(1 - 2\nu - 3 \frac{x_2^2}{r^2} \right) - (1 - 2\nu) \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r + x_3)} - \frac{x_2^2}{r^2(r + x_3)^2} \right] \right\}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{3F}{2\pi} \frac{x_3^3}{r^5}, \quad \sigma_{12} = \frac{F}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \frac{x_1 x_2 (2r + x_3)}{r^3(r + x_3)^2} - 3 \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5} \right], \\ \sigma_{13} &= -\frac{3F}{2\pi} \frac{x_1 x_3^2}{r^5}, \quad \sigma_{23} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{x_2 x_3^2}{r^5}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что в решении (10)–(11) поле перемещений стремится к нулю как $1/r$, а поле напряжений как $1/r^2$ при $r \rightarrow \infty$. На плоскости $x_3 = 0$

вектор перемещений имеет компоненты

$$u_1 = -\frac{F}{4\pi\mu}(1-2\nu)\frac{x_1}{r^2}, \quad u_2 = -\frac{F}{4\pi\mu}(1-2\nu)\frac{x_2}{r^2}, \quad u_3 = \frac{F}{2\pi\mu}\frac{(1-\nu)}{r}. \quad (12)$$

Исследуем теперь свойства решения задачи Буссинеска. Во-первых, рассмотрим точку K на плоскости $x_3 = \text{const} \neq 0$ с координатами (x_1, x_2, x_3) . Пусть R — расстояние между точкой на оси \bar{x}_3 с координатами $(0, 0, x_3)$ и K , т. е.

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (13)$$

Величина напряжения сдвига в точке K для плоскости $x_3 = \text{const}$ такова:

$$\tau_3 = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{3F}{2\pi} \frac{R x_3^2}{r_0^5}. \quad (14)$$

Во-вторых, заметим, что из равенств (10) следует, что перемещение точки K_1 в плоскости $x_3 = 0$, т. е. на расстоянии r от начала координат, равно

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{F}{4\pi r} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{F}{2\pi r}. \quad (15)$$

Перемещение (15) имеет направление вектора, соединяющего точки O и K_1 , и направлено к O . Заметим также, что третья компонента (12) может быть записана в виде

$$u_3 = \frac{F}{\pi E} \frac{(1-\nu^2)}{r}. \quad (16)$$

Уравнение (16) называется *уравнением Буссинеска*. Из него следует, что в плоскости $x_3 = 0$

$$u_3 r = \text{const}. \quad (17)$$

Теперь рассмотрим обобщение задачи Буссинеска. А именно рассмотрим случай непрерывно распределенных нормальных нагрузок на части Ω плоскости $x_3 = 0$ (рис. 20). Сила dF , действующая на части границы $d\Omega$, задается следующим равенством:

$$dF = q(\xi, \eta) d\Omega, \quad (18)$$

где $q(\xi, \eta)$ — заданная величина нагрузки на единицу площади.

Вектор перемещений в этом случае может быть получен в результате суперпозиции полей перемещений соответствующих dF . Для этого заменим x_1, x_2 и r на

$$\hat{x}_1 = x_1 - \xi, \quad \hat{x}_2 = x_2 - \eta, \quad \hat{r} = [(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + x_3^2]^{1/2} \quad (19)$$

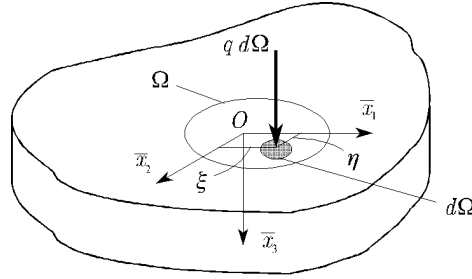


Рис. 20

соответственно и проинтегрируем по Ω . Результирующее поле перемещений получается в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left[\frac{\hat{x}_1 x_3}{\hat{r}^3} - (1-2\nu) \frac{\hat{x}_1}{\hat{r}(\hat{r} + x_3)} \right] q(\xi, \eta) d\Omega, \\ u_2 &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left[\frac{\hat{x}_2 x_3}{\hat{r}^3} - (1-2\nu) \frac{\hat{x}_2}{\hat{r}(\hat{r} + x_3)} \right] q(\xi, \eta) d\Omega, \\ u_3 &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left[\frac{2(1-\nu)}{\hat{r}} + \frac{x_3^2}{\hat{r}^3} \right] q(\xi, \eta) d\Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

где x_1, x_2 — координаты точки, в которой вектор перемещений имеет компоненты u_i и \hat{x}_1, \hat{x}_2 и \hat{r} , задаваемые формулами (19). Из третьей формулы (20) следует, что на плоскости $x_3 = 0$

$$u_3 = \frac{(1-\nu)}{2\pi\mu} \iint_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{[(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2]^{1/2}}. \quad (21)$$

Позднее мы используем выражение (21).

5.11 Тангенциальная сила на упругом полупространстве

Рассмотрим упругое полупространство $x_3 > 0$, показанное на рис. 21. На граничной плоскости $x_3 = 0$ задана единственная сосредоточенная сила \mathbf{F} с осью действия, лежащей в граничной плоскости. Задача определения полей напряжений и перемещений в этом случае известна как *задача Черрути*. При построении решения задачи предположим, что поле перемещений является комбинацией вектора Галеркина (4.5.9) и потенциала перемещений Ламе (4.5.14). Таким образом,

положим, что потенциал Ламе (см. (4.5.14)) записывается как

$$\phi = A \frac{x_1}{r + x_3}, \quad (1)$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, и что компоненты вектора Галеркина равны

$$H_1 = Br, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = C \ln[x_1(r + x_3)], \quad (2)$$

где A , B и C — постоянные.

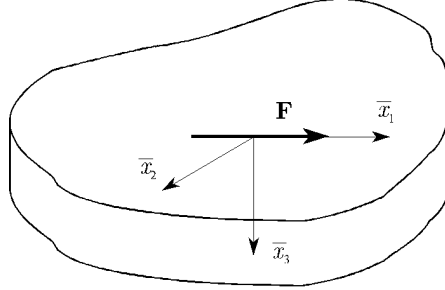


Рис. 21

Поле перемещений, соответствующее формулам (1) и (2), имеет вид

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + 2(1-\nu)\nabla^2 H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right], \\ 2\mu u_2 &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + 2(1-\nu)\nabla^2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right], \\ 2\mu u_3 &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + 2(1-\nu)\nabla^2 H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты тензора деформаций могут быть определены для обоих полей перемещений (1) и (2). Затем следует определить тензор напряжений как сумму тензоров напряжений, соответствующих (1) и (2). После вычислений получим, что (см. [40])

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \nabla^2 \phi \right) \delta_{ij} \quad (5)$$

является частью тензора напряжений, соответствующей потенциалу перемещений (1), и

$$\bar{\bar{\sigma}}_{ij} = \nu \frac{\partial^2(\operatorname{div} \mathbf{H})}{\partial x_m \partial x_m} \delta_{ij} - \frac{\partial^2(\operatorname{div} \mathbf{H})}{\partial x_i \partial x_j} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j} + \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \right)}{\partial x_k \partial x_k} \quad (6)$$

является частью тензора напряжений, соответствующей потенциалу перемещений (2). Для задачи, изображенной на рис. 21, граничные условия задаются в виде

$$\sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad \text{для } x_3 = 0. \quad (7)$$

Из условий (7) следует, что (см. [40])

$$A = \frac{F(1-2\nu)}{2\pi}, \quad B = \frac{F}{4\pi(1-\nu)}, \quad C = \frac{F(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}. \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в формулы (3) и (4), получаем компоненты тензоров перемещений и напряжений соответственно в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3} + (1-2\nu) \left[\frac{1}{r+x_3} - \frac{x_1^2}{r(r+x_3)^2} \right] \right\}, \\ u_2 &= \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{x_1x_2}{r^3} - (1-2\nu) \frac{x_1x_2}{r(r+x_3)^2} \right\}, \\ u_3 &= \frac{F}{4\pi\mu} \left\{ \frac{x_1x_3}{r^3} + (1-2\nu) \frac{x_1}{r(r+x_3)} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ и

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{Fx_1}{2\pi r^3} \left[-\frac{3x_1^2}{r^2} + \frac{1-2\nu}{(r+x_3)^2} \left(r^2 - \frac{2rx_2^2}{r+x_3} - x_2^2 \right) \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{Fx_1}{2\pi r^3} \left[-\frac{3x_2^2}{r^2} + \frac{1-2\nu}{(r+x_3)^2} \left(3r^2 - \frac{2rx_1^2}{r+x_3} - x_1^2 \right) \right], \\ \sigma_{33} &= -\frac{3Fx_1x_3^2}{2\pi r^5}, \quad \sigma_{13} = -\frac{3Fx_1^2x_3}{2\pi r^5}, \quad \sigma_{23} = -\frac{3Fx_1x_2x_3}{2\pi r^5}, \\ \sigma_{12} &= \frac{Fx_2}{2\pi r^3} \left[-\frac{3x_1^2}{r^2} - \frac{1-2\nu}{(r+x_3)^2} \left(r^2 - \frac{2rx_1^2}{r+x_3} - x_1^2 \right) \right], \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) &= -\frac{F}{\pi}(1+\nu)\frac{x_1}{r^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь вновь решение (9)–(10) имеет особенность при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Заметим, что как задача Буссинеска, так и задача Черрути принадлежат к классу задач определения состояния равновесия бесконечного упругого тела, ограниченного плоскостью, на которой задана поверхностная сила (см. [26]). Задачи, в которых на граничной плоскости задан вектор перемещения, рассмотрены Лявом [26].

5.12 Равновесие кругового конуса

Метод разделения переменных может быть успешно использован для получения решения уравнений равновесия для случая, когда упругое тело является круговым конусом. Предположим, что конус задается в сферической системе координат соотношениями $0 < \rho < \infty$,

$0 \leq \varphi \leq \alpha$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Предположим, что компоненты перемещения пропорциональны $1/\rho$ и что u_θ и u_φ пропорциональны $\cos n\theta$, а u_ρ пропорционально $\sin n\theta$, причем n — целое число. Если u_ρ , u_φ и u_θ представлены в форме

$$\begin{aligned} u_\rho &= \frac{\cos n\theta}{\rho} \left[-\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\rho^2 \Delta}{\cos n\theta} + C \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + D \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right], \\ u_\varphi &= \frac{\cos n\theta}{\rho \sin \varphi} \left[-\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho^2 \Delta}{\cos n\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi \left(C \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + D \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right) + G \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + H \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right], \quad (1) \\ u_\theta &= \frac{\sin n\theta}{\rho \sin \varphi} \left[n \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} \frac{\rho^2 \Delta}{\cos n\theta} \right. \\ &\quad \left. - \cos \varphi \left(C \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} - D \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right) - G \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + H \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right], \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\cos n\theta}{\rho^2} \left[A(n + \cos \varphi) \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + B(n - \cos \varphi) \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right], \quad (2)$$

и A , B , C , D , G и H — постоянные, то удовлетворяются уравнения равновесия (4.3.11) при нулевых объемных силах, т. е.

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \rho \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \theta} \right] &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \omega_\varphi) - \frac{\partial \omega_\rho}{\partial \varphi} \right] &= 0, \quad (3) \\ (\lambda + 2\mu) \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \omega_\theta \sin \varphi) \right] &= 0 \end{aligned}$$

(см. [26, 31]).

Заметив, что в случае осевой симметрии компоненты вектора перемещения не зависят от θ и $u_\theta = 0$, в результате получим (см. (4.3.13))

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} + 2\mu \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega_\theta \sin \varphi) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - 2\mu \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \omega_\theta \sin \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\vartheta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \sin \varphi), \quad \omega_\theta = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\varphi) \right]. \quad (5)$$

Уравнения (4) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} + \frac{K}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega \sin \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - K \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = 0, \quad (6)$$

где

$$K = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \omega = \rho\omega_\theta. \quad (7)$$

Общее решение системы (6) может быть записано через полиномы Лежандра (подробности см. в [32]).

Мы выпишем несколько частных решений системы (3) и (4).

а) Пусть постоянные в потенциалах (1) и (2) таковы: $n = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $G = 0$, $H = 0$, $A = -B = -F_3/[8\pi(\lambda + 2\mu)]$. Используя это, получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{F_3 \cos \varphi}{4\rho^2 \pi(\lambda + 2\mu)}, & u_\rho &= \frac{F_3 \cos \varphi}{4\pi\mu \rho}, \\ u_\varphi &= -\frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{F_3 \sin \varphi}{4\pi\mu \rho}, & u_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поле напряжений, соответствующее формулам (8), таково:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= -\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_3 \cos \varphi}{4\pi \rho^2}, & \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_3 \cos \varphi}{4\pi \rho^2}, \\ \sigma_{\rho\varphi} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_3 \sin \varphi}{4\pi \rho^2}, & \sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\theta\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Поле напряжений (9) соответствует сосредоточенной силе F_3 , действующей параллельно направлению \bar{x}_3 в неограниченной упругой среде. Формулы (8) и (9) представляют решение так называемой *задачи Кельвина* (см. параграф 5.9).

б) Для случая $n = 1$, $A = B = -F_1/[8\pi(\lambda + 2\mu)]$, $C = 0$, $D = 0$, $G = 0$ и $H = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{F_1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\rho^2}, & u_\rho &= \frac{F_1 \sin \varphi \cos \theta}{4\pi\mu \rho}, \\ u_\varphi &= \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{F_1 \cos \varphi \cos \theta}{4\pi\mu \rho}, & u_\theta &= -\frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{F_1 \sin \theta}{4\pi\mu \rho}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поле напряжений определяется из закона Гука и соотношений (10) и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= -\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_1 \sin \varphi \cos \theta}{4\pi \rho^2}, & \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_1 \sin \varphi \cos \theta}{4\pi \rho^2}, \\ \sigma_{\rho\varphi} &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_1 \cos \varphi \cos \theta}{4\pi \rho^2}, & \sigma_{\rho\theta} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{F_1 \cos \varphi \cos \theta}{4\pi \rho^2}, & \sigma_{\theta\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Поле напряжений (11) соответствует сосредоточенной силе F_1 , приложенной в начале координатной системы с линией действия, направленной вдоль оси \bar{x}_1 .

б) Рассмотрим задачу о нахождении осесимметричного решения уравнений (3), т. е. решение задачи (4). Если мы предположим, что решение таково, что вектор перемещения имеет компоненты, которые пропорциональны $(1/\rho)$, то получим

$$u_\rho = \frac{F_3}{\rho}, \quad u_\varphi = -\frac{F_3}{\rho} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad u_\theta = 0. \quad (12)$$

Поле напряжений, соответствующее перемещениям (12), таково:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= -2\mu \frac{F_3}{\rho^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{F_3}{\rho^2} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \frac{F_3}{\rho^2} \frac{1}{1 + \cos \varphi}, \\ \sigma_{\rho\varphi} &= 2\mu \frac{F_3}{\rho^2} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad \sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

в) Рассмотрим теперь поле перемещений

$$u_\rho = 0, \quad u_\varphi = -\frac{F_4}{\rho} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad u_\theta = \frac{F_4}{\rho} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \varphi}. \quad (14)$$

Поле напряжений, соответствующее перемещениям (14), таково:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{\theta\theta} = -2\mu \frac{F_4 (1 - \cos \varphi) \cos \theta}{\rho^2 (1 + \cos \varphi) \sin \theta}, \\ \sigma_{\varphi\theta} &= 2\mu \frac{F_4 (1 - \cos \varphi) \sin \theta}{\rho^2 (1 + \cos \varphi) \sin \varphi}, \quad \sigma_{\rho\theta} = -2\mu \frac{F_4 \sin \theta}{\rho^2 (1 + \cos \varphi)}, \\ \sigma_{\rho\varphi} &= 2\mu \frac{F_4 \cos \theta}{\rho^2 (1 + \cos \varphi)}. \end{aligned} \quad (15)$$

г) Рассмотрим поле перемещений, полученное из (1) при $n = 1$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ и $G = -H \neq 0$. В этом случае имеем

$$u_\rho = \frac{F_5 \sin \varphi \cos \theta}{\rho (1 + \cos \varphi)}, \quad u_\varphi = \frac{F_5}{\rho} \cos \theta, \quad u_\theta = -\frac{F_5}{\rho} \sin \theta. \quad (16)$$

Поле напряжений, соответствующее перемещениям (16), таково:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= -\sigma_{\varphi\varphi} = -2\mu \frac{F_5 \sin \varphi \cos \theta}{\rho^2 (1 + \cos \varphi)}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \\ \sigma_{\varphi\theta} &= -\mu \frac{F_5 \sin \varphi \sin \theta}{\rho^2 (1 + \cos \varphi)}, \quad \sigma_{\rho\theta} = \mu \frac{F_5}{\rho^2} \left(2 - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \sin \theta, \\ \sigma_{\rho\varphi} &= -\mu \frac{F_5}{\rho^2} \left(2 - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Вышеприведенные решения могут быть использованы для получения новых решений. Например, рассмотрим конус нагруженный в вершине, как показано на рис. 22.

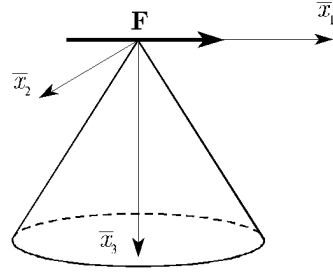


Рис. 22

Предположим, что поверхность конуса определяется соотношением $\varphi = \alpha$. Тогда, суммируя б), в) и д), запишем поле перемещений в виде

$$\begin{aligned} u_\rho &= \frac{F_1 \sin \varphi \cos \theta}{4\pi\mu \rho} + \frac{F_5 \sin \varphi \cos \theta}{\rho (1 + \cos \varphi)}, \\ u_\varphi &= \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{F_1 \cos \varphi \cos \theta}{4\pi\mu \rho} - \frac{F_4 \cos \varphi}{\rho (1 + \cos \varphi)} + \frac{F_5}{\rho} \cos \theta, \\ u_\theta &= -\frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{F_1 \sin \theta}{4\pi\mu \rho} + \frac{F_4 \sin \varphi}{\rho (1 + \cos \varphi)} - \frac{F_5}{\rho} \sin \theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Граничные условия на поверхности конуса, соответствующие поверхности свободной от напряжений, таковы:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\rho} = \sigma_{\varphi\theta} = 0. \quad (19)$$

Подставляя выражения (11), (15) и (17) в (19), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений для F_1 , F_4 и F_5 . Из этой системы следует, что

$$\begin{aligned} 2F_4 \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - F_5 \sin \alpha &= 0, \\ 2F_4 - F_5(1 + 2 \cos \alpha) - \frac{F_1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}(1 + \cos \alpha) \cos \alpha &= 0, \\ -2F_4 \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + 2F_5 \sin \alpha + \frac{F_1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}(1 + \cos \alpha) \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решая систему (20), получаем

$$F_4 = -\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{8\pi(\lambda + 2\mu)} F_1, \quad F_5 = -\frac{(1 + \cos \alpha)}{4\pi(\lambda + 2\mu)} F_1. \quad (21)$$

Постоянная F_1 должна быть связана с силой $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_1$. Определяя главный вектор сил, действующих на части конуса с центром в вершине конуса и находящихся внутри конуса, заключаем, что этот вектор должен быть равен F . Из этого следует, что

$$F_1 = \frac{4F(\lambda + 2\mu)}{[(2 + \cos \alpha)\lambda + 2\mu](1 - \cos \alpha)^2}. \quad (22)$$

Соотношения (18), (21) и (22) определяют поле перемещений для задачи, изображенной на рис. 22. Отметим, что для случая, когда $\alpha = \pi/2$, результаты соответствуют полученным в параграфе 5.11.

5.13 Температурные напряжения в сфере и цилиндре

В этом параграфе мы получим решения двух задач для случая, когда уравнения теплопроводности и уравнения движения являются несвязанными. Эта теория известна как *теория температурных напряжений*.

Предположим, что пустотелая сфера с внешним радиусом R_0 и внутренним радиусом R_i имеет симметрично распределенное температурное поле $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\rho)$, не зависящее от времени. Далее предположим, что внутренняя и внешняя поверхности сферы свободны от напряжений и что на внешней поверхности сферы поддерживается постоянная температура T_0 , а на внутренней поверхности поддерживается постоянная температура T_i . Мы хотим определить поле напряжений в сферическом слое. Начнем с первых уравнений (4.3.19) и (4.3.12), т. е.

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\rho \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\omega_\theta \sin \varphi) \right] + \\ & + \rho \sin \varphi \left[\left(f_\rho - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} \right) - \gamma \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \rho} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$\vartheta = E_{\rho\rho} + E_{\varphi\varphi} + E_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(u_\varphi \sin \varphi) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]. \quad (2)$$

Предполагая, что деформация радиально симметрична, т. е. $u_\rho \neq 0$, $u_\theta = 0$ и $u_\varphi = 0$, и что все переменные зависят только от ρ (все переменные также не зависят от времени), получаем

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho}(\rho^2 u) \right] = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{dT}{d\rho}, \quad (3)$$

где использованы обозначения $\bar{\theta} = T$ и $u_\rho = u$. Заметим, что коэффициент в правой части уравнения (3) может быть записан в виде $\gamma/(\lambda + 2\mu) = \alpha_i(1 + \nu)/(1 - \nu)$, где α — коэффициент линейного расширения (см. (3.5.13)). Интегрируя уравнение (3), находим

$$u = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\rho^2} \int_{R_i}^{\rho} T(m) m^2 dm + C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho^2}, \quad R_i < \rho < R_0, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые будут определены из граничных условий. Чтобы найти C_1 и C_2 , запишем соотношения напряжения–деформации (3.5.9) в цилиндрической системе координат (см. соотношения (3.6.2) и пояснения после них):

$$\begin{aligned} \vartheta &= 2\frac{u}{\rho} + \frac{du}{d\rho}, & \sigma_{\rho\rho} &= (\lambda\vartheta - \gamma T) + 2\mu\frac{du}{d\rho}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda\vartheta - \gamma T) + 2\mu\frac{u}{\rho}, & \sigma_{\theta\theta} &= (\lambda\vartheta - \gamma T) + 2\mu\frac{u}{\rho}, \\ & & \sigma_{\rho\varphi} &= \sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\theta\rho} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя формулы (4) в (5), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= -\frac{4\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\rho^3} \int_{R_i}^{\rho} T(m)m^2 dm + C_1(3\lambda + 2\mu) - \frac{4\mu}{\rho^3} C_2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\rho^3} \int_{R_i}^{\rho} T(m)m^2 dm + C_1(3\lambda + 2\mu) + \\ &+ C_2 \frac{2\mu}{\rho^3} - \gamma \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - 1 \right) T(\rho). \end{aligned} \quad (6)$$

Из того условия, что внутренняя и внешняя поверхности свободны от напряжений, имеем

$$\sigma_{\rho\rho}(R_i) = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}(R_0) = 0. \quad (7)$$

Подстановка первого соотношения (6) в условие (7) приводит к равенствам

$$C_1 = \frac{4\mu\gamma R_0^3 \int_{R_i}^{R_0} T(m)m^2 dm}{(3\lambda + 2\mu)(\lambda + 2\mu)[R_0^3 - R_i^3]}, \quad C_2 = \frac{\gamma R_0^3 R_i^3 \int_{R_i}^{R_0} T(m)m^2 dm}{(\lambda + 2\mu)[R_0^3 - R_i^3]}. \quad (8)$$

Поле напряжений в сфере определяется из соотношений (6) и (8). В обоих уравнениях должно быть использовано температурное поле, которое получается из *установившегося* решения уравнения теплопереноса. Таким образом, нам следует определить температуру T из уравнения

$$\nabla^2 T = 0, \quad (9)$$

при $T = T_i$ и $T = T_0$ на внутренней и внешней поверхности сферы. В предположении, что $T = T(\rho)$, уравнение (9) принимает вид

$$\frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \frac{dT(\rho)}{d\rho} \right] = 0, \quad R_i < \rho < R_0, \quad (10)$$

причем

$$T(R_i) = T_i, \quad T(R_0) = T_0. \quad (11)$$

Из краевой задачи (10)–(11) получим температурное поле в виде

$$T(\rho) = \frac{1}{1 - R_i/R_0} \left[\frac{R_i}{R_0} T_i \left(\frac{R_0}{\rho} - 1 \right) + T_0 \left(1 - \frac{R_i}{\rho} \right) \right]. \quad (12)$$

Температура, задаваемая соотношением (12), должна быть использована в формулах (8).

Теперь рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом R_i и внешним радиусом R_0 . Положим, что цилиндр достаточно длинен, так, что температурное поле не зависит от осевой координаты z . Далее положим, что температурное поле является осесимметричным, т. е. $T = T(r)$. Уравнения (4.3.2) и (4.3.18) для случая плоского напряженного состояния (см. параграф 2.8) превращаются в равенство

$$(\lambda + 2\mu)r \frac{d\vartheta}{dr} = r\gamma \frac{dT}{dr}, \quad (13)$$

где

$$\vartheta = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru_r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru). \quad (14)$$

Из соотношений (13) и (14) находим

$$u = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \int_{R_i}^r T(m) m dm + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (15)$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Используя закон Гука в цилиндрической системе координат (3.6.1), получаем

$$\begin{aligned} \vartheta = E_{rr} + E_{\theta\theta} + E_{zz} &= \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{u}{r} + \frac{du}{dr}, \\ \sigma_{rr} &= \lambda\vartheta - \gamma T + 2\mu \frac{du_r}{dr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\vartheta - \gamma T + 2\mu \frac{u}{r}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\vartheta - \gamma T. \end{aligned} \quad (16)$$

Из формул (15) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{2\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r T(m) m dm + 2C_1(\lambda + \mu) - 2\mu \frac{C_2}{r^2}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r T(m) m dm - \frac{2\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} T(r) + 2C_1(\lambda + \mu) + 2\mu \frac{C_2}{r^2}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{2\mu\gamma}{\lambda + 2\mu} T(r) + 2\lambda C_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Для того чтобы деформированное состояние было плоским ($u_z = 0$), распределение напряжений σ_{zz} на концах цилиндра должно удовлетворять определенному условию. Поскольку σ_{zz} зависит от r , это условие

должно удовлетворяться в среднем. То есть мы должны приложить осевую силу

$$F_a = 2\pi \int_{R_i}^{R_0} \sigma_{zz}(r) r dr. \quad (18)$$

Затем согласно принципу Сен-Венана мы получим напряженное состояние в цилиндре, описанное соотношением (17). Температурное поле в формуле (17) определяется из установившегося решения уравнения теплопроводности, которое в цилиндрической системе координат в указанных предположениях (радиальная симметрия) запишется как

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0, \quad R_i < r < R_0, \quad (19)$$

при условиях

$$T(R_i) = T_i, \quad T(R_0) = T_0. \quad (20)$$

Решение задачи (19) и (20) таково:

$$T = T_i + (T_0 - T_i) \frac{\ln(r/R_i)}{\ln(R_0/R_i)}. \quad (21)$$

С учетом решения (21) поле напряжений получается по формулам (17).

Отметим, что выражения (6) и (17) иногда используются в случаях, когда температурные поля не удовлетворяют стационарным уравнениям теплопроводности точно, а только в некотором приближенном смысле. Например, если температура меняется “медленно”, то равенства (6) и (17) могут быть использованы для оценки напряжений.

5.14 Плоские гармонические волны в упругом и термоупругом теле

В этом параграфе мы рассматриваем динамические задачи линейной теории упругости и термоупругости. Мы рассматриваем *плоские волны*, распространяющиеся в направлении оси \bar{x}_1 . Говорится, что движение тела является плоской волной, распространяющейся в направлении \bar{x}_1 , если в любой точке произвольной плоскости, перпендикулярной оси \bar{x}_1 , компоненты вектора перемещения и температура (в случае термоупругости) одни и те же. Таким образом, поле перемещений и температура зависят от расстояния точки от фиксированной плоскости и времени.

Рассмотрим сначала задачу о распространении волны в упругом материале. Если область, занимаемая упругим телом, так велика, что

можно пренебречь влиянием границы, то возможно представить возмущение как сумму двух волн. Чтобы показать это, рассмотрим уравнение движения (4.1.6) для случая, когда не существует объемных сил, т. е.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j - \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Предположим, что \mathbf{u} представлено в виде суммы двух векторных полей, одного соленоидального \mathbf{u}_1 ($\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0$) и другого безвихревого \mathbf{u}_2 ($\operatorname{curl} \mathbf{u}_2 = \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0$). Мы использовали такое разложение выше (см. (4.5.1)). Таким образом, рассмотрим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \nabla \times \Psi + \operatorname{grad} \varphi. \quad (2)$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \vartheta = 0$, то из уравнения (1) получим

$$\mu \nabla^2 u_{1i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Уравнение (3) — это *волновое* уравнение. Скорость распространения волны задается формулой

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (4)$$

Волны, распространяющиеся со скоростью (4), называются *волнами сдвига*, сохраняющими объем (поскольку $e_v = \vartheta = 0$, см. (2.9.15)). Далее, если мы используем \mathbf{u}_2 в уравнении (1), то получим

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 u_{2i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) — это опять волновое уравнение, и соответствующая скорость волны равна

$$c_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}. \quad (6)$$

Волны, описываемые уравнением (5), являются *безвихревыми волнами расширения*. Таким образом, в бесконечной упругой среде возмущения передаются со скоростями, задаваемыми формулами (4) и (6). Волны, описываемые уравнениями (3) и (5), не являются обязательно плоскими.

Теперь перейдем к задаче о плоских волнах. Когда плоские волны распространяются в направлении оси \bar{x}_1 , компоненты вектора перемещения должны иметь вид

$$u_i = F_i(x_1 - ct), \quad (7)$$

где F_i — произвольные функции и c — скорость плоской волны. Подставляя решение (7) в уравнение (1), получаем

$$(\rho_0 c^2 - \mu)(\rho_0 c^2 - \lambda - 2\mu) = 0. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что *плоские волны могут распространяться со скоростями либо волн сдвига, либо волн расширения.*

Рассмотрим теперь задачу о термоупругих волнах. Мы ищем решение уравнения (4.1.24), которое при нулевых объемных силах ($\mathbf{f} = 0$) и при условии, что скорость теплообразования в единичном объеме равна нулю ($q = 0$), принимает вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \mu \nabla^2 u_j - \gamma \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\vartheta = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3$. Плоская термоупругая волна, распространяющаяся в направлении \bar{x}_1 , является движением, при котором компоненты вектора перемещения и разности температур зависят от x_1 и времени t , т. е. $u_i = u_i(x_1, t)$, $T = T(x_1, t)$. При этом предположении соотношения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x_1} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим теперь *поперечные* волны ($u_1 = 0$)

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad u_2 = \operatorname{Re}[u_2^*(x_1, \omega) e^{i\omega t}], \\ u_3 &= \operatorname{Re}[u_3^*(x_1, \omega) e^{i\omega t}], \quad T = \operatorname{Re}[T^*(x_1, \omega) e^{i\omega t}], \end{aligned} \quad (11)$$

где ω — заданная частота, $\operatorname{Re}(\cdot)$ обозначает вещественную часть (\cdot) и $i = \sqrt{-1}$. Легко видеть, что для поля перемещений (11) имеем

$$\vartheta = 0, \quad (12)$$

так, что поперечные волны являются волнами сдвига, сохраняющими объем. Подставляя равенство (12) в уравнение (10), получаем

$$\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (13)$$

Следовательно, уравнения движения и теплопроводности разделяются. Подставляя формулы (11) в уравнение (13), находим следующие решения:

$$\begin{aligned} u_2 &= B_+ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_1} \right) \right] + B_- \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_1} \right) \right], \\ u_3 &= C_+ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_1} \right) \right] + C_- \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_1} \right) \right], \\ T &= T_+^0 \exp \left[-x_1 \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} - i\omega \left(t - \frac{x_1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right) \right] + \\ &\quad + T_-^0 \exp \left[-x_1 \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} - i\omega \left(t + \frac{x_1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $c_1 = \sqrt{\mu/\rho_0}$ и B_+ , B_- , C_+ , C_- , T_+^0 и T_-^0 — амплитуды волн, распространяющихся в направлениях $+\bar{x}_1$ и $-\bar{x}_1$ с частотой ω . Из соотношений (12) и (13) заключаем, что *поперечные волны, описываемые формулами (14), в термоупругом теле не вызывают изменения температуры*. Эти волны не являются ни дисперсными, ни затухающими. Решение уравнения теплопроводности в (14) показывает, что *температурные волны являются затухающими и амплитуда убывает с расстоянием*.

Далее мы рассматриваем продольные волны ($u_2 = u_3 = 0$)

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re}[u_1^*(x_1, \omega)e^{i\omega t}], \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \\ T &= \operatorname{Re}[T^*(x_1, \omega)e^{i\omega t}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из соотношений (15) заключаем, что $\vartheta \neq 0$, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Подставляя (15) в уравнения (10), находим

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^2} - \gamma \frac{\partial T^*}{\partial x_1} &= -\rho_0 \omega^2 u_1^*, \\ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} - i\eta\omega \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} &= -i\omega \frac{1}{\kappa} T^*. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть

$$U_1^* = u^0 \exp[ikx_1], \quad T^* = T^0 \exp[ikx_1], \quad (17)$$

где u^0 и T^0 — постоянные. Подставляя решение (17) в уравнение (16), мы получим два соотношения

$$\frac{u^0}{T^0} = \frac{mik}{s^2 - k^2}, \quad \frac{u^0}{T^0} = -\frac{\eta kqi}{q - k^2}, \quad (18)$$

где

$$s^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{(\lambda + 2\mu)}, \quad m = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu}, \quad q = \frac{i\omega}{k}. \quad (19)$$

Из соотношений (18) получаем условие, которому k должно удовлетворять:

$$k^4 - k^2[s^2 + q(1+r)] + qs^2 = 0, \quad (20)$$

где

$$r = \eta m \kappa. \quad (21)$$

Корни уравнения (20) таковы:

$$k_{1,2}^2 = \frac{s^2 + q(1+r) \pm \sqrt{[s^2 + q(1+r)]^2 - 4qs^2}}{2}. \quad (22)$$

С учетом формул (22) решение связанных уравнений записывается в виде (см. (15) и (17))

$$\begin{aligned} u_1 &= u_+^0 \exp[-i\omega t + ik_1 x_1] + u_-^0 \exp[-i\omega t - ik_1 x_1] + \\ &+ \frac{mik_2}{s^2 - k_2^2} \{T_+^0 \exp[-i\omega t + ik_2 x_1] + T_-^0 \exp[-i\omega t - ik_2 x_1]\}, \\ T &= T_+^0 \exp[-i\omega t + ik_2 x_1] + T_-^0 \exp[-i\omega t - ik_2 x_1] + \\ &+ \frac{\eta \kappa q i k_1}{k_1^2 - q} \{u_+^0 \exp[-i\omega t + ik_1 x_2] + u_-^0 \exp[-i\omega t - ik_1 x_1]\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где u_+^0, \dots, T_-^0 — амплитуды волн, распространяющихся в направлениях $+\bar{x}_1$ и $-\bar{x}_1$ с частотой ω .

Теперь рассмотрим корни k_1 и k_2 уравнения (20). Во-первых, преобразуем уравнение (20) к форме (см. [30])

$$(\xi^2 - \chi^2)(i\xi^2 + \chi) + r\xi^2 = 0, \quad (24)$$

где

$$\xi = \frac{c_2}{\omega^*} k, \quad \omega^* = \frac{c_1^2}{\kappa}, \quad \chi = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad (25)$$

и, как и ранее,

$$c_1^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}. \quad (26)$$

Постоянная ω^* называется *характеристической частотой* и является свойством материала. В введенных обозначениях решение уравнения

(24) записывается как

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\chi} \left[\sqrt{\chi + \sqrt{2\chi} + i(1+r + \sqrt{2\chi})} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\chi - \sqrt{2\chi} + i(1+r - \sqrt{2\chi})} \right], \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\chi} \left[\sqrt{\chi + \sqrt{2\chi} + i(1+r + \sqrt{2\chi})} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\chi - \sqrt{2\chi} + i(1+r - \sqrt{2\chi})} \right].\end{aligned}\quad (27)$$

Значения ξ_1 и ξ_2 зависят от двух параметров r и χ . Параметр r зависит от материала и χ зависит от частоты ω . В заключение мы можем сказать на основе (23), что в случае продольных термоупругих волн имеются *модифицированные упругие волны и модифицированные тепловые волны*. Как упругие, так и тепловые волны являются затухающими и дисперсными.

В завершение рассмотрим задачу о распространении волн в упругом полупространстве. А именно рассмотрим полубесконечное упругое тело, занимающее часть $x_2 \geq 0$ пространства. Положим, что волны распространяются в направлении оси \bar{x}_1 и что компонента вектора перемещения $u_3 = 0$. Тогда соотношения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (28)$$

где предполагается, что $u_i = u_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$. Граничные условия берутся в виде, который соответствует свободной от напряжений плоскости $x_2 = 0$, т. е.

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{при } x_2 = 0. \quad (29)$$

Частное решение системы (28)–(29) было получено Рэлеем в 1887 г. Оно соответствует типу волн, наблюдаемых при землетрясениях. Представим решение системы (28)–(29) в виде

$$u_1 = \hat{u}_1 + \bar{u}_1, \quad u_2 = \hat{u}_2 + \bar{u}_2, \quad (30)$$

где \hat{u}_i и \bar{u}_i , $i = 1, 2$, — решения (3) и (5) соответственно:

$$\mu \nabla^2 \hat{u}_i = \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2}, \quad (\lambda + \mu) \nabla^2 \bar{u}_i = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2}. \quad (31)$$

Из уравнений (31) заключаем, что волны \hat{u}_i и \bar{u}_i распространяются со скоростями $c_1 = \sqrt{\mu/\rho_0}$ и $c_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$ соответственно. Рассматриваем те решения (30), которые экспоненциально убывают с увеличением x_2 так, что

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= C_1 \exp[-ax_2 + i(sx_1 - \omega t)], \\ \hat{u}_2 &= C_2 \exp[-ax_2 + i(sx_1 - \omega t)], \\ \bar{u}_1 &= D_1 \exp[-bx_2 + i(sx_1 - \omega t)], \\ \bar{u}_2 &= D_2 \exp[-bx_2 + i(sx_1 - \omega t)],\end{aligned}\quad (32)$$

где $C_1, C_2, D_1, D_2, a, b, s$ и ω — постоянные. Частота ω и постоянная s определяют скорость распространения волны

$$c_3 = \frac{\omega}{s}. \quad (33)$$

Подставляя (32) в (31), получаем

$$a^2 - s^2 + k^2 = 0, \quad b^2 - s^2 + h^2 = 0, \quad (34)$$

где

$$k^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu}, \quad h^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\lambda + 2\mu}. \quad (35)$$

Поскольку решению \hat{u}_i соответствует волна сдвига, первый инвариант тензора напряжений, вычисленный для \hat{u}_i , должен быть равен нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} = 0. \quad (36)$$

Условие (36) приводит к соотношению

$$C_2 a i = -C_1 s. \quad (37)$$

Аналогично, поскольку \bar{u}_i соответствует волне расширения, имеем

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = 0 \quad (38)$$

или

$$D_2 i s = -D_1 b. \quad (39)$$

Таким образом, существуют только две независимые постоянные и решения (32) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= C a \exp[-ax_2] \sin(sx_1 - \omega t), \\ \hat{u}_2 &= C s \exp[-ax_2] \cos(sx_1 - \omega t), \\ \bar{u}_1 &= D s \exp[-bx_2] \sin(sx_1 - \omega t), \\ \bar{u}_2 &= D b \exp[-bx_2] \cos(sx_1 - \omega t),\end{aligned}\quad (40)$$

где C и D — произвольные постоянные.

Граничные условия отражают тот факт, что плоскость $x_2 = 0$ является свободной от напряжений. Из условий (29) следует, что

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \quad \text{для } x_2 = 0. \quad (41)$$

Из закона Гука и формул (40)–(41) получаем

$$\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \quad (42)$$

Подставляя формулы (30) и (40) в соотношение (42), находим

$$2\mu saC + [2\mu b^2 + \lambda(b^2 - s^2)]D = 0, \quad (a^2 + s^2)C + 2sbD = 0. \quad (43)$$

Нетривиальное решение системы (43) существует, если

$$[\lambda(b^2 - s^2) + 2\mu b^2](a^2 + s^2) - 4\mu abs^2 = 0. \quad (44)$$

Однако из (34) имеем

$$a^2 = s^2 - k^2, \quad b^2 = s^2 - h^2. \quad (45)$$

Окончательно, подставляя формулы (45) в уравнение (44), получаем

$$\left(2 - \frac{c_3^2}{c_1^2} \right)^4 - 16 \left(1 - \frac{c_3^2}{c_2^2} \right) \left(1 - \frac{c_3^2}{c_1^2} \right) = 0, \quad (46)$$

где мы использовали формулы (26) и (33). Волновое движение (40) описывает так называемую *поверхностную волну* или *волну Рэлея*. Скорость поверхностных волн определяются из решения (46). Частными случаями поверхностной волны являются следующие.

a) Несжимаемый упругий материал

В случае $\nu = 1/2$ или $\lambda \rightarrow \infty$ (см. результаты решения задачи 3 главы 3). Следовательно, $c_2 \rightarrow \infty$ и уравнение (46) принимает вид

$$\left(2 - \frac{c_3^2}{c_1^2} \right)^4 - 16 \left(1 - \frac{c_3^2}{c_1^2} \right) = 0. \quad (47)$$

Из уравнения (47) получим

$$\left(\frac{c_3^2}{c_1^2} \right)^2 \left[\left(\frac{c_3^2}{c_1^2} \right)^6 - 8 \left(\frac{c_3^2}{c_1^2} \right)^4 + 24 \left(\frac{c_3^2}{c_1^2} \right)^2 - 16 \right] = 0. \quad (48)$$

Вещественное ненулевое решение уравнения (48) таково:

$$\frac{c_3^2}{c_1^2} = 0.91262, \quad (49)$$

так что

$$c_3 = 0.955 \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (50)$$

б) коэффициент Пуассона равен $\nu = 1/4$ (одноконстантная упругость)

В этот случае имеем $\lambda = \mu$, т. е.

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{3}. \quad (51)$$

Далее запишем уравнение (46) в форме

$$\left(2 - \frac{c_3^2}{c_1^2}\right)^4 - 16 \left(1 - \frac{c_3^2 c_1^2}{c_2^2}\right) \left(1 - \frac{c_3^2}{c_1^2}\right) = 0. \quad (52)$$

Затем подстановка соотношения (51) в уравнение (52) дает

$$3 \left(\frac{c_3^2}{c_1^2}\right)^6 - 24 \left(\frac{c_3^2}{c_1^2}\right)^4 + 56 \left(\frac{c_3^2}{c_1^2}\right)^2 - 32 = 0. \quad (53)$$

Существуют три вещественных корня (53). Они должны дать вещественные значения a и b в условиях (34). Из этих условий следует, что

$$\frac{c_3^2}{c_1^2} = 2 - 2\sqrt{3} \quad (54)$$

или

$$c_3 = 0.9194 \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (55)$$

Исследуя численно зависимость корней уравнения (46) от коэффициента Пуассона, заключаем, что

$$c_3 = z \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \quad (56)$$

при $z \in [0.874, 0.956]$, когда $\nu \in [0, 1/2]$.

Теперь замечание о сферических волнах. Предположим, что начальное распределение в бесконечном *упругом* пространстве сферически симметрично относительно начала координат, следовательно, вектор перемещения задается в виде

$$u_\varphi = u = \varphi(\rho, t), \quad u_\rho = 0, \quad u_\theta = 0. \quad (57)$$

Подставляя формулы (57) в уравнения (4.3.13) и (4.3.14), получим

$$\vartheta = 0, \quad \omega_\theta = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\varphi), \quad (58)$$

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho\varphi) = \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (59)$$

Решение Д'Аламбера уравнения (58) таково:

$$\varphi = \frac{f_1(\rho - c_1 t)}{\rho} + \frac{f_2(\rho + c_1 t)}{\rho}, \quad (60)$$

где $c_1 = \sqrt{\mu/\rho_0}$ и f_1 и f_2 — произвольные функции. Решение (60) представляет две волны: одну — исходящую из источника $\rho = 0$ со скоростью c_1 и другую — приходящую к точке $\rho = 0$ с той же скоростью.

Задачи

1. Рассмотрим призматический стержень с поперечным сечением, показанным на рис. 23.

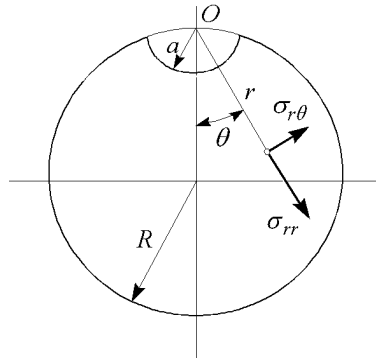


Рис. 23

Стержень нагружен на концах двумя моментами M . Определить поле напряжений.

- a) Во-первых, покажем, что функция напряжений Прандтля Ψ может быть записана в форме

$$\Psi = C \left(r^2 - a^2 - 2Rr \cos \theta + \frac{2Ra^2}{r} \cos \theta \right), \quad (a)$$

где C — постоянная. В декартовой системе координат имеем

$$x_2 = r \cos \theta, \quad x_3 = r \sin \theta, \quad r^2 = x_2^2 + x_3^2, \quad (б)$$

следовательно, формула (а) принимает вид

$$\Psi = C \left(x_2^2 + x_3^2 - a^2 - 2Rx_2 + \frac{2Ra^2x_2}{x_2^2 + x_3^2} \right). \quad (в)$$

Подставляя выражение (а) в уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -2, \quad (г)$$

покажем, что $C = -1/2$. Следовательно, для функции напряжений Прандтля получаем

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \left(x_2^2 + x_3^2 - a^2 - 2Rx_2 + \frac{2Ra^2x_2}{x_2^2 + x_3^2} \right) + \\ &= \frac{1}{2} \left(a^2 - r^2 + 2Rr \cos \theta - \frac{2Ra^2}{r} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (д)$$

- б) Из вида функции (д) определяем ненулевые компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr} &= \bar{\theta} \mu \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\bar{\theta} \mu R \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \sin \theta, \\ \sigma_{z\theta} &= -\bar{\theta} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \bar{\theta} \mu \left[r - R \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (е)$$

- в) Покажем, что максимальное значение напряжений сдвига вычисляется как

$$\max \left| \sqrt{(\sigma_{zr})^2 + (\sigma_{z\theta})^2} \right| = \max p_{\Psi} = \left| \sigma_{z\theta} \right|_{\substack{r=a \\ \theta=0}} = \mu \bar{\theta} (2R - a). \quad (ж)$$

Заметим, что в пределе, когда $a \rightarrow 0$, получим

$$\max \left| \sqrt{(\sigma_{zr})^2 + (\sigma_{z\theta})^2} \right| = 2\mu \bar{\theta} R. \quad (з)$$

Из формулы (з) заключаем, что максимальное напряжение сдвига в пределе при $a \rightarrow 0$ в два раза больше, чем значение максимального напряжения для случая идеально круглого стержня (см. (5.5.86) при $a = b = R$). Следовательно, имеет место концентрация напряжений с множителем k , равным двум.

- з) Показать, что момент, определенный по формуле (5.5.37), равен

$$M = 2\mu\bar{\theta} \int \int_A \Psi dA = 2\mu\bar{\theta}DR^4, \quad (u)$$

где

$$D = \frac{1}{24}(\sin 4\alpha + 8 \sin 2\alpha + 12)\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 (\sin 2\alpha + 2\alpha) + \frac{4}{3} \left(\frac{a}{R}\right)^3 \sin \alpha - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{R}\right)^4 \alpha, \quad (к)$$

и $\cos \alpha = (a/2R)$.

2. Для призматического стержня с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника, показанного на рис. 24, определить функцию напряжений Прандтля и соответствующее поле напряжений, если на концах стержня действуют крутящие моменты.

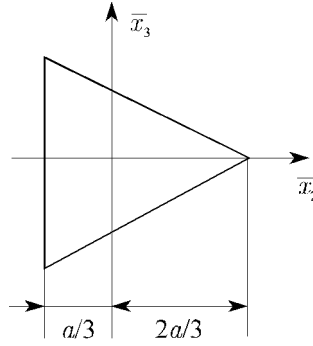


Рис. 24

- а) Показать, что функция

$$\Psi = C \left[x_2^2 + x_3^2 - \frac{(x_2^3 - 3x_2x_3^2)}{a} - \frac{4a^2}{27} \right], \quad (a)$$

где C — постоянная, удовлетворяет граничным условиям. Затем, подставляя формулу (а) в уравнение $\nabla^2\Psi = -2$, показать, что $C = -1/2$ и

$$\Psi = -\frac{1}{2} \left[x_2^2 + x_3^2 - \frac{(x_2^3 - 3x_2x_3^2)}{a} - \frac{4a^2}{27} \right]. \quad (б)$$

- б) Показать, что компоненты напряжения сдвига и компонента u_1 вектора перемещения равны

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= -\mu\bar{\theta}\left(x_2 + \frac{3x_1x_2}{a}\right), & \sigma_{13} &= \mu\bar{\theta}\left(x_2 + \frac{3}{2a}(x_2^2 - x_3^2)\right), \\ u_1 &= \frac{\bar{\theta}}{2a}(3x_2x_3^2 - x_2^3).\end{aligned}\quad (6)$$

- в) Наконец, показать, что максимальное значение напряжения сдвига достигается в средней точке стороны и имеет значение

$$\max|\sqrt{(\sigma_{12})^2 + (\sigma_{13})^2}| = \max p_{\Psi} = \frac{1}{2}\mu\bar{\theta}a. \quad (7)$$

3. Определить деформацию упругой сферы радиусом a , если объемная сила в сферической системе координат задается в виде

$$f_r = -\rho_0g\frac{\rho}{a}, \quad f_\theta = 0, \quad f_\varphi = 0, \quad (8)$$

где ρ_0 — массовая плотность сферы и g — ускорение свободного падения на поверхности сферы, т. е.:

- а) показать, что уравнения равновесия сводятся к одному уравнению в следующей форме:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{2u_\rho}{\rho}\right) - \frac{\rho_0g}{a(\lambda + 2\mu)}\rho = 0, \quad (9)$$

а решение уравнения (9) имеет вид

$$u_\rho = C\rho + \frac{\rho_0g}{10a(\lambda + 2\mu)}\rho^3, \quad (10)$$

где $C = \text{const}$;

- б) используя условие того, что поверхность $\rho = a$ свободна от напряжения (см. (3.6.2)), т. е. $\sigma_{\rho\rho} = 0$, доказать, что решение (10) принимает вид

$$u_\rho = -\frac{1}{10}\frac{\rho_0ga}{\lambda + 2\mu}\rho\left[\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} - \frac{\rho^2}{a^2}\right]. \quad (11)$$

Заметим, что внутри сферы радиусом

$$\rho = a\sqrt{\frac{3-\nu}{3+3\nu}} \quad (12)$$

радиальная компонента тензора деформации $E_{\rho\rho}$ отрицательна (соответствует сжатию), в то время как вне сферы $E_{\rho\rho}$ она положительна (соответствует расширению).

4. Решить систему (5.12.6)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} + \frac{K}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega \sin \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - K \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = 0. \quad (a)$$

Исходить из допущения о том, что существует функция $\Phi(\varphi, \rho)$, такая, что

$$\vartheta = K \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \omega = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (б)$$

a) Подставляя формулу (б) в уравнение (a), показать, что функция Φ должна определяться из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0, \quad (в)$$

и с учетом $\Phi = R(\rho)F(\varphi)$ получить

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \frac{k(k+1)}{\rho^2} R = 0, \quad \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dF}{d\varphi} + k(k+1)F = 0, \quad (г)$$

где k — произвольное целое число.

б) Показать, что решения уравнений (д) таковы:

$$R_k = C_k \rho^{k+1} + D_k \rho^{-k}, \quad F_k = E_k P_k(s) + G_k Q_k(s), \quad (д)$$

где C_k, D_k, E_k и G_k — постоянные, $s = \cos \varphi$ и P_k и Q_k — полиномы Лежандра (см. [24]). Следовательно, общее решение уравнения (e) таково:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} R_k F_k. \quad (e)$$

5. Рассмотреть радиальные колебания сферы радиусом R . Представить поле перемещений в следующей форме:

$$u_\rho = \rho f(\rho) \cos(\omega t + \alpha), \quad u_\theta = u_\varphi = 0, \quad (a)$$

где ω и α — постоянные и $f(\rho)$ — функция, подлежащая определению. Тогда

a) Использовать первое уравнение (4.3.11), чтобы показать, что f удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho} \frac{df}{d\rho} + k^2 f = 0, \quad k^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{\lambda + 2\mu}. \quad (б)$$

- б) Затем показать, что решение (б), конечное в точке $\rho = 0$, таково:

$$f = \frac{C}{\rho^3}(k\rho \cos k\rho - \sin k\rho). \quad (6)$$

Используя закон Гука в форме (3.6.2), показать, что

$$\sigma_{\rho\rho} = \left[(3\lambda + 2\mu)f + (\lambda + 2\mu)\rho \frac{df}{d\rho} \right] \cos(\omega t + \alpha). \quad (7)$$

- в) Затем использовать граничные условия

$$\sigma_{\rho\rho}(t, \rho = R) = 0 \quad (8)$$

для получения частотного уравнения

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)[(2 - k^2 R^2) \sin kR - 2kR \cos kR] + \\ + 2\lambda(kR \cos kR - \sin kR) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение 9 служит для определения волнового числа k и по второй формуле б — частоты ω .

6. Используя формулы (5.11.9), показать, что поле перемещений в упругом полупространстве, нагруженном распределенными тангенциальными силами, как показано на рис. 25, таково:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\hat{r}} + \frac{\hat{x}_1^2}{\hat{r}^3} + (1 - 2\nu) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{\hat{r} + x_3} - \frac{\hat{x}_1^2}{\hat{r}(\hat{r} + x_3)^2} \right] \right\} q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ u_2 &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\hat{x}_1 \hat{x}_2}{\hat{r}^3} - (1 - 2\nu) \frac{\hat{x}_1 \hat{x}_2}{\hat{r}(\hat{r} + x_3)^2} \right\} d\xi d\eta, \\ u_3 &= \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\hat{x}_1 x_3}{\hat{r}^3} + (1 - 2\nu) \frac{\hat{x}_1}{\hat{r}(\hat{r} + x_3)} \right\} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 = x_1 - \xi, \quad \hat{x}_2 = x_2 - \eta, \\ \hat{r} = [(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + x_3^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать (см. [13]), что для случая, когда Ω — круг радиусом a и когда мы полагаем

$$q(\xi, \eta) = q_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (r/a)^2}}, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad (12)$$

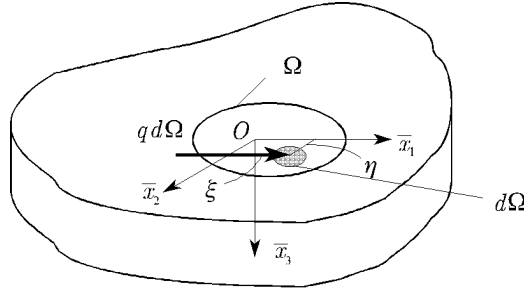


Рис. 25

уравнения (а) при $x_3 = 0$ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\pi(2-\nu)}{4\mu} q_0 a, & u_2 &= 0, \\ u_3 &= -\frac{(1-2\nu)q_0 a}{2\mu} \left[\frac{a}{r} - \frac{(s^2-r^2)^{1/2}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (e)$$

7. Показать, что компоненты вектора перемещения для задачи Кельвина (5.12.8), (5.12.9) задаются в декартовой системе координат равенствами

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\lambda + \mu)F_3}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{x_1 x_3}{r^3}, \\ u_2 &= \frac{(\lambda + \mu)F_3}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{x_2 x_3}{r^3}, \\ u_3 &= \frac{(\lambda + \mu)F_3}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right), \end{aligned} \quad (a)$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Выражения (а) согласуются с формулами (5.9.5). Следовательно, поле напряжений (5.12.9) задается в декартовой системе координат равенствами (5.9.16).

Глава 6

Плоские деформированное и напряженное состояния

6.1 Введение

Вообще говоря, решение трехмерной задачи теории упругости получить сложно. Вот почему важно рассмотреть более простой случай, в котором используемые переменные (напряжения, деформации и т. д.) зависят только от двух пространственных координат. К этому классу задач принадлежат задача о плоской деформации и так называемая обобщенная задача о плоском напряжении, которые здесь рассматриваются. Важной характеристикой этих упрощенных случаев является то, что они могут быть решены в одной и той же математической формулировке. Единственное отличие — значения определенных констант в решении. Мы рассматриваем как статические, так и динамические задачи.

Более подробно рассмотрим плоское деформированное, плоское напряженное и обобщенное плоское напряженное состояния. Первый случай — плоское деформированное состояние — физически соответствует случаю длинного призматического стержня с закрепленными концами, который нагружен на его боковой поверхности. Предположим, что x_3 ориентирована вдоль оси стержня (см. рис. 7 главы 2). Мы полагаем, что вектор напряжений $\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3$ на поверхности стержня *не зависит* от координаты x_3 . Плоское напряженное состояние соответствует случаю, когда концы стержня закреплены особым образом. Тогда тензор деформаций имеет форму, исследованную в параграфе 2.8.

Плоская напряженная и обобщенная плоская напряженная задачи соответствуют случаю упругого тела малой толщины (пластина), которая нагружена силами, линии действия которых параллельны срединной плоскости пластин (с введенными на ней координатами x_1 и x_2), а нормальные нагрузки и напряжения в направлении, ортогональном пластине (координата x_3), равны нулю (рис. 1).

а) Плоское деформированное состояние

Как мы видели в параграфе 2.8, в случае плоской деформации для компонент вектора перемещений

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0 \quad \text{или} \quad u_3 = \text{const.} \quad (1)$$

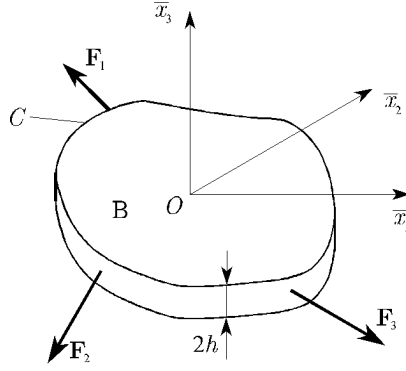


Рис. 1

Тензор деформаций, соответствующий формулам (1), имеет вид

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (3)$$

Все компоненты E_{ij} , $i, j = 1, 2$, зависят только от x_1 и x_2 . Компоненты тензора напряжений определяются из соотношений (3.3.43)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \vartheta_1 + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \sigma_{22} &= \lambda \vartheta_1 + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{33} &= \lambda \vartheta_1, & \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (5)$$

Так как величины E_{ij} зависят от x_1 и x_2 , то компоненты тензора напряжений также зависят от x_1 и x_2 и не зависят от x_3 . Используя это, запишем уравнения равновесия (1.3.4) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0. \quad (6)$$

Третье уравнение системы (1.3.4) тождественно удовлетворяется, поскольку мы *предположили*, что компонента объемных сил $f_3 = 0$. Из уравнений (6) мы заключаем, что величины f_1 и f_2 не должны зависеть от x_3 .

В этом случае уравнения Ляме для динамических задач таковы (см. (4.1.6)):

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 + \left(f_1 - \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + \left(f_2 - \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, поскольку все переменные не зависят от x_3 ; т. е. $\Delta(\cdot) = [\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2](\cdot)$. Возьмем уравнения совместности в виде (2.7.14). Для тензора деформаций (2) они сводятся к единственному уравнению

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (8)$$

Если вместо уравнений Ляме (7) мы используем уравнения равновесия в форме (6), то должны быть использованы условия совместности Бельтрами–Мичелла. Тогда уравнение (3.7.14) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2} = - \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right). \quad (9)$$

Чтобы упростить уравнение (9), мы определим компоненту σ_{33} из закона Гука (3.4.43) с дополнительным условием $E_{33} = 0$. Результатом будет соотношение

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (10)$$

Таким образом, в случае плоской деформации число *независимых* компонент тензора напряжений равно трем, и σ_{33} не зависит от x_3 . Используя значение σ_{33} , задаваемое формулой (10), найдем первый инвариант тензора напряжений $\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$:

$$\Theta = (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (11)$$

После использования формулы (11) уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = - \frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right). \quad (12)$$

Уравнение (12) может быть получено непосредственно из уравнения (8), как это было показано Тимошенко и Гудьером в [37].

Система уравнений (4), (6), (8) и (12) образует замкнутую систему уравнений, описывающую плоское деформированное состояние. К этим уравнениям следует добавить граничные условия, которые могут иметь различную форму. Для первой граничной задачи (см. главу 4) на границе задается вектор напряжений, т. е.

$$\bar{p}_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \quad \bar{p}_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2, \quad \bar{p}_3 = 0, \quad (13)$$

где \bar{p}_1 и \bar{p}_2 — известные функции, определяемые для точек (x_1, x_2) , лежащих на границе C поперечного сечения, и \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль на границе. В случае когда решается система (6), граничные условия (13) должны быть использованы непосредственно. Когда используются уравнения Ламе, необходимо подставить формулы (4) в условия (13). Третье условие (13) для смешанной граничной задачи, когда длина стержня конечна, заменяются на условие

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3(x_1, x_2, l) = 0, \quad (14)$$

где l — длина стержня. Таким образом, задача плоской деформации описывается системой (4), (6), (8) и соответствующими граничными условиями, задаваемыми формулами (6) и (13). В случае динамических задач следует также задать начальные условия.

б) Плоское напряженное состояние

Как было отмечено в параграфе 1.12, плоское напряженное состояние характеризуется тем, что вектор напряжений на плоскостях, параллельных основаниям пластины, равен нулю на всей пластине:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \quad (15)$$

После использования условий (15) уравнения равновесия принимают форму (6). Однако в общем случае ненулевые компоненты тензора напряжений σ_{11} , σ_{12} , и σ_{22} являются функциями x_1 , x_2 и x_3 . Следовательно, плоское напряженное состояние является задачей *трехмерной теории упругости*.

Закон Гука в случае плоского напряженного состояния приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\vartheta + 2\mu E_{11}, & \sigma_{22} &= \lambda\vartheta + 2\mu E_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\vartheta + 2\mu E_{33}, & \sigma_{12} &= 2\mu E_{12}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя условие $\sigma_{33} = 0$ и решая третье соотношение (16) относительно E_{33} , получаем

$$E_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(E_{11} + E_{22}), \quad (17)$$

так что

$$\vartheta = E_{11} + E_{22} + E_{33} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(E_{11} + E_{22}) = p \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \vartheta_1, \quad (18)$$

где ϑ_1 задается формулой (5). Подставляя это значение в закон Гука

(16), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\vartheta_1 + 2\mu E_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(E_{11} + \nu E_{22}), \\ \sigma_{22} &= \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\vartheta_1 + 2\mu E_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(E_{22} + \nu E_{11}), \\ \sigma_{12} &= 2\mu E_{12} = \frac{E}{1+\nu}E_{12}.\end{aligned}\quad (19)$$

Из соотношений (4) и (19) мы заключаем, что выражения для первых трех компонент тензора напряжений для плоского деформированного состояния и для плоского напряженного состояния имеют одинаковый вид. Необходимо только заменить константы λ , μ и ν на λ^* , μ^* и ν^* следующим образом:

$$\lambda \rightarrow \lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}, \quad \mu \rightarrow \mu^* = \mu, \quad \nu \rightarrow \nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}. \quad (20)$$

Например, уравнения Ламе равновесия тела в плоском напряженном состоянии таковы (см. (7)):

$$(\lambda^* + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 + f_1 = 0, \quad (\lambda^* + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 + f_2 = 0, \quad (21)$$

а уравнения равновесия в терминах напряжений таковы:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0, \quad f_3 = 0. \quad (22)$$

Однако как компоненты вектора перемещений, так и компоненты тензора напряжений в общем случае зависят от x_1 , x_2 и x_3 . Вот почему задача о плоском напряженном состоянии является трехмерной задачей теории упругости. В уравнении Ламе (21) оператор Δ является трехмерным оператором Лапласа, т. е. $\Delta(\cdot) = [\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2](\cdot)$.

Есть один особый случай, в котором зависимость от переменной x_3 может быть исключена. Он называется “задачей об обобщенном плоском напряженном состоянии” (см. [26]). Рассмотрим пластину, показанную на рис. 1. Предположим, что внешние силы распределены симметрично по отношению к срединной плоскости $x_3 = 0$. Граничные условия на верхнем и нижнем основаниях $x_3 = \pm h$ таковы:

$$\sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad \text{для } x_3 = \pm h. \quad (23)$$

Третье уравнение равновесия (1.3.4) для пластины как для трехмерного тела записывается в виде

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad (24)$$

где использовано предположение $f_3 = 0$. В силу условий (23) уравнение (24) дает

$$\left. \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (25)$$

Если разложить напряжение σ_{33} в ряд Тейлора по x_3 , то в силу уравнения (25) мы получим

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, h)(x_3 - h)^2. \quad (26)$$

Следовательно, если мы предположим, что толщина пластины мала, то

$$\sigma_{33} = 0 \quad (27)$$

в каждой точке пластины. В силу симметрии нагружения, функции u_3 , σ_{13} и σ_{23} являются нечетными функциями переменной x_3 , так что выполнены равенства $u_3(x_1, x_2, x_3) = -u_3(x_1, x_2, -x_3)$, $\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{13}(x_1, x_2, -x_3)$, и $\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_{23}(x_1, x_2, -x_3)$. Для исключения зависимости от x_3 мы введем средние значения переменных с помощью соотношений

$$u_i^m = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i dx_3, \quad \sigma_{ij}^m = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad f_i^m = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_i dx_3 \quad (28)$$

для $i, j = 1, 2, 3$. Легко видеть, что $u_3(x_1, x_2, x_3) = -u_3(x_1, x_2, -x_3)$, так что $u_3^m = 0$. Аналогично мы приходим к выводу, что $\sigma_{13}^m = \sigma_{23}^m = 0$. Умножая уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

на $dx_3/2h$ и интегрируя на отрезке $[-h, h]$, мы получаем

$$\frac{\partial \sigma_{11}^m}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x_2} + f_1^m = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^m}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^m}{\partial x_2} + f_2^m = 0. \quad (30)$$

Из равенства (27) и закона Гука получаются соотношения (17) и (19). Вычисляя средние значения величин (19), мы приходим к соотноше-

ниям

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\vartheta_1^m + 2\mu E_{11}^m = \frac{E}{1-(\nu^*)^2} \left(\frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\vartheta_1^m + 2\mu E_{22}^m = \frac{E}{1-(\nu^*)^2} \left(\frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{12} &= 2\mu E_{12}^m = \frac{E}{1+\nu^*} \left(\frac{\partial u_1^m}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^m}{\partial x_1} \right).\end{aligned}\quad (31)$$

Сравнивая формулы (30) и (31) с формулами (4) и (6), мы приходим к выводу, что средние (осредненные по толщине пластины) компоненты вектора перемещений и средние значения компонент тензора напряжений удовлетворяют тем же уравнениям, что и соответствующие компоненты для плоского деформированного состояния, если мы заменим значения констант согласно формулам (20).

6.2 Метод функции напряжений для решения плоских задач

Как мы видели в предыдущем параграфе, дифференциальные уравнения равновесия и закон Гука для плоской деформации (и обобщенного плоского напряжения) имеют форму

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 &= 0, \\ \sigma_{11} &= \lambda \vartheta_1 + 2\mu E_{11} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \sigma_{22} &= \lambda \vartheta_1 + 2\mu E_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu E_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

Мы положим, что B — это поперечное сечение тела (срединная плоскость на рис. 1) с границей C . (6.1.8) и (6.1.12) — уравнения совместности. Граничные условия для первой граничной задачи могут быть записаны в форме

$$(\mathbf{p}_n)_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = \bar{p}_1, \quad (\mathbf{p}_n)_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 = \bar{p}_2, \quad (2)$$

где \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль на той части контура C , где задан вектор напряжений.

Существует много методов решить систему (1) и (2). Наиболее эффективным методом является использование функции напряжений Эйри. Предположим, что объемные силы являются потенциальными,

т. е. существует скалярная функция $V = V(x_i)$, такая, что объемные силы задаются в виде

$$f_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad f_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}. \quad (3)$$

Далее предположим, что существует скалярная функция $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$, такая, что компоненты напряжения могут быть записаны в виде

$$\sigma_{11} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = V + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (4)$$

Подставляя решение (4) в систему (1), мы заключаем, что первые два уравнения (1) выполнены тождественно. Уравнение совместности (6.1.12) принимает вид

$$\Delta \Delta \Phi = \nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right), \quad (5)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа. В случае плоского напряженного состояния коэффициент $(1-2\nu)/(1-\nu)$ в левой части уравнения (5) изменится в соответствии с (6.1.20), превратившись в $(1-\nu)$. Так как компоненты единичного вектора \mathbf{n} равны

$$n_1 = \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_1) = \frac{dx_2}{dS}, \quad n_2 = \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_2) = -\frac{dx_1}{dS}, \quad (6)$$

то условия (2) могут быть преобразованы с использованием формул (6) и (4). Если далее предположить, что $V = 0$, то условие (2) превратится в следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} dx_2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 &= \bar{p}_1 dS, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 &= -\bar{p}_2 dS. \end{aligned} \quad (7)$$

Из формул (7) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right] dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right] dx_2 &= d \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right] = \bar{p}_1 dS, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right] dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right] dx_2 &= d \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right] = -\bar{p}_2 dS. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрирование соотношений (8) вдоль контура C приводит к равенствам

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\int_0^S \bar{p}_2(u) du = \psi_1(S) + C_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \int_0^S \bar{p}_1(u) du = \psi_2(S) + C_2, \quad (9)$$

где $\psi_1(S)$ и $\psi_2(S)$ — известные функции, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Первая граничная задача для плоских задач в односвязных областях и с нулевыми объемными силами ($V = 0$) может быть сформулирована следующим образом: *найти Φ , удовлетворяющую уравнениям (5) с $V = 0$ в V и граничным условиям (9) на C .*

Если компоненты перемещения заданы на части (или на всем) контура C , то следует использовать закон Гука в форме, разрешенной относительно компонент тензора деформаций. Из формул (6.1.4) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\mu}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\mu}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{\sigma_{12}}{\mu}.\end{aligned}\quad (10)$$

После использования формул (4) система (10) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \nu \Delta \Phi \right] = \frac{1}{2\mu} \left[(1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right], \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \nu \Delta \Phi \right] = \frac{1}{2\mu} \left[(1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right], \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}.\end{aligned}\quad (11)$$

Интегрируя первые два выражения (11), получаем

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{2\mu} \int \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] \Phi(x_1, x_2) dx_1 + \xi_1(x_1), \\ u_2 &= \frac{1}{2\mu} \int \left[(1 - \nu) \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \Phi(x_1, x_2) dx_2 + \xi_2(x_2).\end{aligned}\quad (12)$$

В формулах (12) ξ_1 и ξ_2 — произвольные функции, которые определяются из граничных условий, наложенных на u_1 и u_2 , и из третьего условия (11).

Таким образом, вторая граничная задача для плоского состояния записывается так: *найти Φ , удовлетворяющую уравнениям (5) с $V = 0$ в V и граничным условиям (12) на части контура C , где задан вектор перемещений.*

Известно много решений бигармонического уравнения (уравнение (5) с $V \equiv 0$)

$$\Delta \Delta \Phi = \nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (13)$$

в декартовой системе координат \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Перечислим некоторые элементарные решения, которые могут быть легко проверены.

а) Полином второго порядка

$$\Phi = a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2, \quad (14)$$

удовлетворяет уравнению (13) для всех значений постоянных a_2, b_2 и c_2 .

б) Полином третьего порядка

$$\Phi = a_3 x_1^3 + b_3 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + d_3 x_2^3, \quad (15)$$

удовлетворяет уравнению (13) для всех значений постоянных a_3, b_3, c_3 и d_3 .

в) Полином четвертого порядка

$$\Phi = a_4 x_1^4 + b_4 x_1^3 x_2 + c_4 x_1^2 x_2^2 + d_4 x_1 x_2^3 + e_4 x_2^4, \quad (16)$$

удовлетворяет уравнению (13), если

$$e_4 = -a_4 - \frac{1}{3}c_4. \quad (17)$$

г) Полином пятого порядка

$$\Phi = a_5 x_1^5 + b_5 x_1^4 x_2 + c_5 x_1^3 x_2^2 + d_5 x_1^2 x_2^3 + e_5 x_1 x_2^4 + f_5 x_2^5, \quad (18)$$

удовлетворяет уравнению (13), если

$$e_5 = -5a_5 - c_5, \quad f_5 = -\frac{1}{5}(b_5 + d_5). \quad (19)$$

д) Тригонометрические и гиперболические функции

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda x_1 \operatorname{ch} \lambda x_2, & \quad \cos \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_1, \\ x_2 \cos \lambda x_2 \operatorname{ch} \lambda x_1, & \quad x_1 \cos \lambda x_1 \operatorname{ch} \lambda x_2, \end{aligned} \quad (20)$$

при $\lambda = \text{const}$ удовлетворяют (13).

е) Линейная комбинация функций (14)–(20) является решением уравнения (13). Также каждая потенциальная функция является решением уравнения (13).

ж) Решение уравнения (13) может быть получено при использовании метода разделения переменных, т. е.

$$\Phi = f(x_1)g(x_2). \quad (21)$$

Представление (21) приводит бесконечной последовательности решений типа (20), которая задается как

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} [(A_n + B_n x_2) \operatorname{ch}(k_n x_2) + (C_n + D_n x_2) \operatorname{ch}(k_n x_2)]$$

$$\times [C_{1n} \cos(k_n x_1) + C_{2n} \sin(k_n x_1)], \quad (22)$$

где $A_n, B_n, k_n, C_n, D_n, C_{1n}$ и C_{2n} — постоянные, которые должны быть определены из граничных условий.

Перейдем теперь к задаче (13) в цилиндрической системе координат. Используя оператор

$$\Delta(\cdot) = \nabla^2(\cdot) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\cdot), \quad (23)$$

мы получим

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Phi = \nabla^4 \Phi = & \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\ & + \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Компоненты тензора напряжений таковы:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]. \quad (25)$$

Для случая осевой симметрии имеем $\Phi = \Phi(r)$, так что

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (26)$$

и

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2 \Phi}{dr^2}, \quad \sigma_{r\theta} = 0. \quad (27)$$

Перечислим теперь некоторые решения уравнений (24) и (26).

з) Функция

$$\Phi = Cr^2 \cos(2\theta), \quad (28)$$

где C — постоянная, является решением уравнения (24). Соответствующие компоненты напряжения задаются формулами (27).

у) Функция

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r + C_4, \quad (29)$$

где $C_i, i = 1, 2, 3, 4$, — постоянные, является решением уравнения (26).

к) Функция

$$\Phi = C_1 \cos(2\theta) + C_2 \sin(2\theta), \quad (30)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, является решением уравнения (24).

л) Общий класс решений уравнения (24) может быть получен в терминах гармонических функций ψ ($\Delta\psi = 0$) с использованием подстановки:

$$\Phi = r\psi \cos \theta, \quad \Phi = r\psi \sin \theta, \quad \Phi = r^2\psi. \quad (31)$$

Из (31) следует, что решение уравнения (24) таково:

$$\begin{aligned}
\Phi = & A_0 + B_0\theta + A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + Dr\theta(K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta) + \\
& + (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 \frac{1}{r} + D_1 r \ln r)(\bar{K}_1 \cos \theta + \bar{K}_2 \sin \theta) - \\
& - \frac{2D_1}{1-\nu} r\theta(\hat{K}_1 \cos \theta + \hat{K}_2 \sin \theta) + \\
& + \sum_{m=2,3}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{m+2} + C_m r^{-m} + D_m r^{-m+2}) \times \\
& \times (K_{1m} \cos m\theta + D_{2m} \sin m\theta) + \\
& + \sum_{m=2,3}^{\infty} r^m [A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta + C_m \cos(m-2)\theta + D_m \sin(m-2)\theta],
\end{aligned} \tag{32}$$

где $A_0, B_0, A, B, C, D, K_1, K_2, \bar{K}_1, \dots, D_{2m}$ — постоянные. Члены с A_0 и B_0 не влияют на компоненты напряжения и могут быть опущены. Член с коэффициентом D_1 важен для плоского напряженного состояния (для обеспечения единственности компонент вектора перемещения).

Задача определения функции Φ , которая удовлетворяет заданным граничным условиям, не проста. Метод, который в принципе дает решение уравнения (13) при произвольно заданных граничных условиях, основанный на представлении решения бигармонического уравнения посредством комплексной переменной, рассматривается в параграфе 6.4. В следующем параграфе приведены некоторые решения плоской задачи, полученные разнообразными более или менее элементарными методами.

6.3 Некоторые решения плоских задач

В этом параграфе приведены решения плоских задач, полученные при решении соответствующих уравнений в декартовых и полярных координатах.

1. Декартова система координат

1.1 Консоль, нагруженная на свободном конце сосредоточенной силой

Рассмотрим консоль, показанную на рис. 2. Пусть l — длина консоли, h — ее высота и δ — толщина. Конец $x_1 = l$ заделан, а на свободном конце $x_1 = 0$ приложена сосредоточенная сила \mathbf{F} .

Предположим, что функция Φ задается в форме линейной комбинации элементарных решений (14) и (16)

$$\Phi = b_2 x_1 x_2 + d_4 x_1 x_2^3. \tag{1}$$

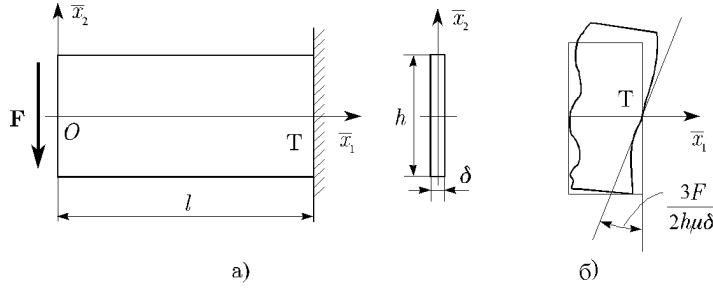


Рис. 2

В формуле (1) b_2 и d_4 — постоянные. Используя формулу (1) и условие $V = 0$, получаем из (6.1.4)

$$\sigma_{11} = 6d_4x_1x_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -b_2 - 3d_4x_2^2. \quad (2)$$

На верхней и нижней гранях (т. е. $x_2 = \pm h/2$) $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_2$ — вектор единичной нормали, таким образом, вектор напряжения равен

$$\mathbf{p}_2 = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}_{-2} = -\sigma_{12}\mathbf{e}_1 - \sigma_{22}\mathbf{e}_2. \quad (3)$$

Из формул (3) и того факта, что верхняя и нижняя грань консоли свободны от напряжений, следует, что

$$\sigma_{12} = \pm \left(b_2 + \frac{3}{4}d_4h^2 \right) = 0, \quad \sigma_{22} = 0. \quad (4)$$

Второе условие (4) тождественно выполняется (см. (2)) и, используя первую формулу (4), мы определяем постоянную:

$$b_2 = -\frac{3}{4}d_4h^2. \quad (5)$$

На свободном конце имеем $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$, поэтому

$$\mathbf{p}_{-1} = -\sigma_{11}\mathbf{e}_1 - \sigma_{12}\mathbf{e}_2. \quad (6)$$

Вычисляя величину \mathbf{p}_{-1} при $x_1 = 0$, получаем

$$\mathbf{p}_{-1} = (b_2 + 3d_4x_2^2)\mathbf{e}_2, \quad (7)$$

так что

$$\delta \int_{-h/2}^{h/2} (b_2 + 3d_4x_2^2) dx_2 = -F, \quad (8)$$

где δ — толщина консоли и $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_2$. Из соотношений (5) и (8) определяются постоянные d_4 и b_2 :

$$d_4 = \frac{2F}{h^3\delta}, \quad b_2 = -\frac{3F}{2h\delta}. \quad (9)$$

Подставляя постоянные (9) в формулы (8) и (2), запишем компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{I}x_1x_2, \quad \sigma_{12} = \frac{F}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right), \quad \sigma_{22} = 0, \quad (10)$$

где $I = \delta h^3/12$ — осевой момент инерции поперечного сечения. Выражение (10) совпадает с решением, полученным элементарными методами (гипотеза плоского поперечного сечения Бернулли).

Найдем компоненты вектора перемещения. Из формул (3.4.14) следует, что

$$E_{11} = \frac{F}{EI}x_1x_2, \quad E_{22} = -\frac{\nu F}{EI}x_1x_2, \quad E_{12} = \frac{(1+\nu)F}{2EI} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right). \quad (11)$$

Используя формулы (11) и (2.9.1), получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{F}{EI}x_1x_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu F}{EI}x_1x_2, \quad (12)$$

или, интегрируя, имеем

$$u_1 = \frac{F}{EI} \left[\frac{1}{2}x_1^2x_2 + f(x_2) \right], \quad u_2 = -\frac{\nu F}{EI} \left[\frac{1}{2}x_1x_2^2 + \phi(x_1) \right], \quad (13)$$

где f и ϕ — произвольные функции x_2 и x_1 соответственно. Если подставить формулы (13) в третье уравнение (6.2.11) (см. комментарии после (6.2.12)), то получим

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{df}{dx_2} - \nu \left(\frac{x_2^2}{2} + \frac{d\phi}{dx_1} \right) = (1+\nu) \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right), \quad (14)$$

или

$$\left[\frac{df}{dx_2} + \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)x_2^2 \right] + \left[\frac{x_1^2}{2} - \nu \frac{d\phi}{dx_1} \right] = \frac{1}{4}(1+\nu)h^2. \quad (15)$$

Решая уравнение (15), находим

$$\frac{df}{dx_2} + \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)x_2^2 = C, \quad \frac{(1+\nu)h^2}{4} - \left[\frac{x_1^2}{2} - \nu \frac{d\phi}{dx_1} \right] = C, \quad (16)$$

где C — постоянная. Интегрируя уравнения (16), мы окончательно получаем f и ϕ в форме

$$f = Cx_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) + D, \quad \phi = \frac{1}{\nu} \left[Cx_1 + \frac{x_1^3}{5} - \frac{1}{4}(1+\nu)h^2x_1 + K \right], \quad (17)$$

где D и K — постоянные. Подставив формулы (17), запишем выражения для компонент вектора перемещения (13):

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{F}{EI} \left[\frac{1}{2} x_1^2 x_2 + C x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) + D \right], \\ u_2 &= -\frac{F}{EI} \left[\frac{\nu}{2} x_1 x_2^2 + \frac{x_1^3}{6} + x_1 \left(C - \frac{1 + \nu}{4} h^2 \right) + K \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Постоянные C , D и K определим из граничных условий при $x_1 = l$. Предположим, что точка T (центр поперечного сечения на правом конце) фиксирована, т. е.

$$u_1(l, 0) = 0, \quad u_2(l, 0) = 0, \quad (19)$$

и что элемент оси \bar{x}_1 фиксирован (касательная к линии, которая в недеформированном состоянии совпадает с осью \bar{x}_1 , является касательной к той же линии в деформированном состоянии), т. е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad \text{при } x_1 = l, \quad x_2 = 0. \quad (20)$$

Подставляя решения (18) в граничные условия (19) и (20), имеем

$$D = 0, \quad C = \frac{(1 + \nu)h^2}{4} - \frac{l^2}{2}, \quad K = \frac{l^3}{3}. \quad (21)$$

Окончательно, подставляя формулы (21) в решения (18) получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{F}{EI} \left[\frac{x_1^2 x_2}{2} + x_2 \left(\frac{1 + \nu}{4} h^2 - \frac{l^2}{2} \right) - x_2^3 \frac{1 + \nu/2}{3} \right], \\ u_2 &= -\frac{F}{EI} \left[\frac{\nu x_1 x_2^2}{2} + \frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1 l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Чтобы исследовать деформацию более детально, зафиксируем поперечное сечение консоли в $x_1 = a$. После приложения силы точка, координаты которой были $\{x_1 = a, x_2\}$, имеет координату \bar{x}_1 , задаваемую как $x_1 + u_1$, т. е.

$$x_1 = a + \frac{F}{EI} \left[\frac{a^2 x_2}{2} + x_2 \left(\frac{1 + \nu}{4} h^2 - \frac{l^2}{2} \right) - x_2^3 \frac{1 + \nu/2}{3} \right]. \quad (23)$$

Так как x_1 зависит от x_2^3 , то очевидно, что поперечное сечение, будучи плоским в недеформированном состоянии, не остается плоским в деформированном состоянии, т. е. гипотеза Бернулли не выполняется. Вертикальное перемещение свободного конца получается из формулы для u_2 (при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$)

$$u_2(0, 0) = -\frac{Fl^3}{3EI}. \quad (24)$$

Выражение (24) согласуется с результатом, полученным при элементарном рассмотрении с использованием гипотезы Бернулли. В поперечном сечении, где консоль заделана, компонента вектора перемещений u_1 определяется по формуле

$$u_1(l, x_2) = \frac{F}{EI} \left[\frac{1+\nu}{4} h^2 x_2 - x_2^3 \frac{1+\nu/2}{3} \right], \quad (25)$$

и наклон оси равен

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|_{x_1=l, x_2=0} = \frac{Fh^2}{4EI} (1+\nu) = \frac{3F}{2h\mu}. \quad (26)$$

На рис. 2,б графически показано поперечное сечение в точке, где консоль заделана.

Для случая когда граничные условия при $x_2 = l$ берутся в форме (19) и

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при } x_1 = l, \quad x_2 = 0, \quad (27)$$

вместо формул (22) мы получим

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{F}{EI} \left[\frac{x_1^2 x_2}{2} - x_2 \frac{l^2}{2} - x_2^3 \frac{1+\nu/2}{3} \right], \\ u_2 &= -\frac{F}{EI} \left[\frac{\nu x_1 x_2^2}{2} + \frac{x_1^3}{6} - \frac{x_1 l^2}{2} + \frac{l^3}{3} + \frac{h^2(1+\nu)}{4} (l - x_1) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь вертикальное перемещение на свободном конце равно

$$u_2(0, 0) = -\frac{Fl^3}{3EI} - \frac{Flh^2}{8\mu I}. \quad (29)$$

Выражение (29) представляет собой результат, известный из теории сопротивления материалов.

Аналогичные результаты могут быть получены для случая консоли, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой по верхней грани. В этом случае граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} p_1 = \pm \sigma_{12} = 0, \quad x_2 = \pm h, \\ p_2 = \sigma_{22} = -q, \quad x_2 = \frac{h}{2}, \quad p_2 = \sigma_{22} = 0, \quad x_2 = -\frac{h}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

где q — интенсивность распределенных нагрузок на верхней грани консоли. Функция напряжений в этом случае может быть взята в форме (14), (15) и (18), т. е.

$$\Phi = a_2 x_1^2 + b_3 x_1^2 x_2 + d_3 x_2^3 + d_5 \left(x_1^2 x_2^3 - \frac{1}{5} x_2^5 \right). \quad (31)$$

Постоянные a_2, \dots, d_5 могут быть определены из граничных условий (см. задачу 8 в конце этого параграфа).

1.2 Полуплоскость, нагруженная распределенной нагрузкой

Рассмотрим полуплоскость $x_1 > 0$, нагруженную распределенной нагрузкой интенсивности $p(x_2)$ на единицу длины плоской границы (рис. 3).

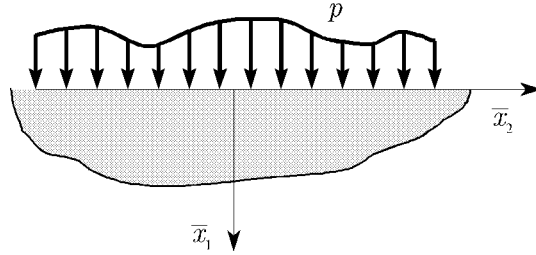


Рис. 3

Мы используем метод преобразования Фурье (см. (4.5.8)), чтобы решить бигармоническое уравнение (6.2.13), т. е.

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^4} = 0. \tag{32}$$

Обозначим через $\bar{f}(\xi)$ преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда

$$\bar{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\xi x) dx, \tag{33}$$

где $i^2 = -1$. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле¹, то в точке, где функция непрерывна, имеется обратное преобразование

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) \exp(-i\xi x) d\xi \tag{34}$$

для $-\infty < x < \infty$. Также если $d^k f(x)/dx^k \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ при $k = 0, 1, \dots, r - 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f(x)}{dx^r} \exp(i\xi x) dx = (-i\xi)^r \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\xi x) dx. \tag{35}$$

Умножая уравнение (32) на $[\exp(i\xi x_2)]/\sqrt{2\pi}$ и интегрируя по x_2 , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^4} \right) \exp(i\xi x_2) dx_2 = 0. \tag{36}$$

¹ Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $(0, a)$, если она имеет не более, чем конечное число разрывов и конечное число максимумов и минимумов на интервале $(0, a)$.

С использованием формул (35) уравнение (36) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{d^4}{dx_1^4} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \exp(i\xi x_2) dx_2 + 2(-i\xi)^2 \frac{d^2}{dx_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \exp(i\xi x_2) dx_2 + (-i\xi)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \exp(i\xi x_2) dx_2 \right] = 0 \quad (37)$$

или

$$\frac{d^4 \bar{\Phi}}{dx_1^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dx_1^2} + \xi^4 \bar{\Phi} = 0, \quad (38)$$

где $\bar{\Phi}$ — преобразование Фурье для Φ по отношению к переменной x_2 . Из определения (6.2.4) получим преобразования Фурье для компонент напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \exp(i\xi x_2) dx_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 \bar{\Phi}, \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \exp(i\xi x_2) dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dx_1^2}, \\ \bar{\sigma}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \exp(i\xi x_2) dx_2 = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\bar{\Phi}}{dx_1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее решим уравнение (38). Корни характеристического уравнения таковы:

$$r_1 = r_2 = |\xi|, \quad r_3 = r_4 = -|\xi|. \quad (40)$$

Следовательно, решение уравнения (38) запишется в виде

$$\bar{\Phi} = (A + Bx_1) \exp(-|\xi|x_1) + (C + Dx_1) \exp(|\xi|x_1), \quad (41)$$

где A , B , C и D — постоянные. Поскольку мы потребовали, чтобы функция (41) была ограничена при $x_1 \rightarrow \infty$, то

$$C = D = 0, \quad (42)$$

так что решение (41) представляется в виде

$$\bar{\Phi} = (A + Bx_1) \exp(-|\xi|x_1). \quad (43)$$

Теперь определим постоянные A и B из граничных условий. Из формул (34) и (39) следует, что

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{11}(x_1, \xi) \exp(-i\xi x_2) d\xi = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \bar{\Phi} \exp(-i\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{22}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{22}(x_1, \xi) \exp(-i\xi x_2) d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dx_1^2} \exp(-i\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{12}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{12}(x_1, \xi) \exp(-i\xi x_2) d\xi = \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{\Phi}}{dx_1} \exp(-i\xi x_2) d\xi.
\end{aligned} \tag{44}$$

Так как на границе $x_1 = 0$ компоненты тензора напряжения известны, получаем

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}(0, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{11}(0, x_2) \exp(i\xi x_2) dx_2 = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) \exp(i\xi x_2) dx_2 = -\bar{p}(\xi), \\
\bar{\sigma}_{12}(0, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{12}(0, x_2) \exp(i\xi x_2) dx_2 = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Подставляя формулы (39) и (43) в равенства (45), получаем

$$\begin{aligned}
-\bar{p}(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 (A + Bx_1) \exp(-|\xi|x_1) \right]_{x_1=0}, \\
0 &= \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \{ [-|\xi|(A + Bx_1) + B] \exp(-|\xi|x_1) \}_{x_1=0}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Из системы (46) следует, что

$$A = \frac{\sqrt{2\pi}}{\xi^2} \bar{p}(\xi), \quad B = \frac{\sqrt{2\pi}}{\xi^2} |\xi| \bar{p}(\xi). \tag{47}$$

Теперь постоянные A и B задаются формулами (47) и функция $\bar{\Phi}$ определена, а напряжения (44) записываются в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) [1 + |\xi|x_1] \exp(-|\xi|x_1 - i\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{22} &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) [1 + |\xi|x_1] \exp(-|\xi|x_1 - i\xi x_2) d\xi, \\
\sigma_{12} &= \frac{-ix_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \exp(-|\xi|x_1 - i\xi x_2) d\xi.
\end{aligned} \tag{48}$$

Система (48) определяет поле напряжений для произвольной $p(x_2)$. В качестве примера рассмотрим распределенную нагрузку, показанную на рис. 4, т. е.

$$p(x_2) = \begin{cases} p_0 & \text{при } -a \leq x_2 \leq a, \\ 0 & \text{при } |x_2| > a. \end{cases} \quad (49)$$

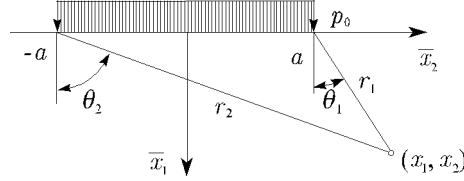


Рис. 4

Теперь по первой формуле (45) получаем

$$\bar{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a p_0 \exp(i\xi x_2) dx_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} p_0 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}. \quad (50)$$

Подставляя формулу (50) в выражение (48), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{-2p_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1 + \xi x_1}{\xi} \exp(-\xi x_1) \sin(a\xi) \cos(x_2 \xi) d\xi = \\ &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + \sin(2\theta_1) - \sin(2\theta_2)], \\ \sigma_{22} &= \frac{-2p_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - \xi x_1}{\xi} \exp(-\xi x_1) \sin(a\xi) \cos(x_2 \xi) d\xi = \\ &= \frac{p_0}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - \sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)], \\ \sigma_{12} &= \frac{-2p_0 x_1}{\pi} \int_0^\infty \exp(\xi x_1) \xi \sin(a\xi) \cos(\xi x_2) d\xi = \\ &= \frac{p_0}{2\pi} [\cos(2\theta_2) - \cos(2\theta_1)], \end{aligned} \quad (51)$$

где введены следующие обозначения:

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_2 - a}{x_1}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{x_2 + a}{x_1}. \quad (52)$$

Геометрический смысл углов θ_1 и θ_2 показан на рис. 4.

В качестве примера рассмотрим полуплоскость, нагруженную сосредоточенной силой. Тогда (см. [5])

$$p(x_2) = -F \delta(x_2), \quad (53)$$

где $\delta(x_2)$ — δ -функция Дирака (см. параграф 5.1) и F — величина сосредоточенной силы. Подстановка выражения (53) в формулу (45) дает

$$\bar{p}(\xi) = \frac{F}{\sqrt{2\pi}}. \quad (54)$$

Подставляя это значение в формулы (48), перепишем их в виде

$$\sigma_{11} = \frac{-2Fx_1^3}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{-2Fx_1x_2^2}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{-2Fx_1^2x_2}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (55)$$

Заметим, что решение (55) имеет особенность в точке $x_1 = x_2 = 0$. Следовательно, оно справедливо только вне полукруга малого радиуса $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. На границе этого круга необходимо приложить распределенные силы с величиной главного вектора F . Радиус r может быть произвольно малым. Тогда, согласно принципу Сен-Венана, выражения (55) являются решением для сосредоточенной силы. Используя закон Гука и формулы (55), мы можем определить вектор перемещения. Оставляем эту задачу в качестве упражнения.

Обобщение, в котором сила не перпендикулярна свободной поверхности, дано Лявом [26] и Ландау и Лифшицем [23].

1.3 Движущаяся сосредоточенная сила

Теперь рассмотрим задачу о движущейся сосредоточенной силе, действующей на плоской границе. Пусть v — скорость силы относительно неподвижной системы координат. Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ сила приложена в точке $x_2 = \xi$. Тогда граничные условия записываются в виде (см. (30) и (53))

$$\sigma_{11}(x_2) = -F\delta(x_2 - b - vt) \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0. \quad (56)$$

Также потребуем, чтобы $\sigma_{ij} \rightarrow 0$ при $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ (как и в случае решения (55)). Используем динамическую форму уравнений Ламе (см. (4.1.6) и (6.1.7)). В рассматриваемом случае (нет объемных сил) получаем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 - \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 - \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0. \quad (57)$$

Подставляя формулы (3.4.5) в систему (57), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + (1 - 2\nu) \Delta u_1 - \frac{(1 - 2\nu) \rho_0}{\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} + (1 - 2\nu) \Delta u_2 - \frac{(1 - 2\nu) \rho_0}{\mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (58)$$

где, как обычно, мы обозначаем через μ модуль сдвига и через ν коэффициент Пуассона. Решение системы (58) ищется в форме ([4], с. 286):

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (59)$$

где $\varphi = \varphi(x_1, x_2, t)$ и $\psi = \psi(x_1, x_2, t)$ — искомые функции. Заметим, что из формул (59) следует, что

$$\Delta\varphi = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \Delta\psi = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (60)$$

Подставляя формулы (59) в систему (58), получаем

$$c_1^2 \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (61)$$

где (см. (5.14.4), (5.14.6))

$$c_1^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_2^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}. \quad (62)$$

Постоянные c_1 и c_2 используются для обозначения скоростей волн сдвига и волн расширения соответственно.

Теперь рассмотрим задачу (61) в движущейся системе координат, т. е. введем преобразование координат по формулам

$$\hat{x}_1 = x_1, \quad \hat{x}_2 = x_2 - vt. \quad (63)$$

Тогда сила приложена в фиксированной точке $\hat{x}_2 = b$. Заметим, что, принимая во внимание (63), имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}_2^2}. \quad (64)$$

После использования (64) система (61) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}_1^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}_1^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}_2^2} = 0, \quad (65)$$

где

$$\beta^2 = 1 - \frac{v^2}{c_2^2}, \quad \gamma^2 = 1 - \frac{v^2}{c_1^2}. \quad (66)$$

Граничные условия, соответствующие системе (65), получаются из условий (56):

$$\begin{aligned} \mu \left[(1 + \gamma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} \right] &= -F \delta(\hat{x}_2 - b), \\ (1 + \gamma^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{x}_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} &= 0 \quad \text{при } \hat{x}_1 = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Также $\varphi \rightarrow 0$ и $\psi \rightarrow 0$ при $(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Мы решаем краевую задачу (65), (67) при условии, что $\beta^2 > 0$ и $\gamma^2 > 0$, т. е. для

$$v < c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (68)$$

После применения преобразования Фурье (33) по отношению к \hat{x}_2 система (65), (67) принимает вид

$$\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\hat{x}_1^2} - \beta^2\xi^2\bar{\varphi} = 0, \quad \frac{d^2\bar{\psi}}{d\hat{x}_1^2} - \gamma^2\xi^2\bar{\psi} = 0, \quad (69)$$

и при $\hat{x}_1 = 0$

$$\begin{aligned} \xi^2(1 + \gamma^2)\bar{\varphi} + 2i\xi\frac{d\bar{\psi}}{d\hat{x}_2} &= \frac{F}{\mu}\exp(ib\xi), \\ -\xi^2(1 + \gamma^2)\bar{\psi} + 2i\xi\frac{d\bar{\varphi}}{d\hat{x}_2} &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Решения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ должны стремиться к нулю при $\hat{x}_1 \rightarrow \infty$. Легко видеть, решение системы (69), удовлетворяющее условиям (70), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\hat{x}_1, \xi) &= \frac{-F(1 + \gamma^2)}{4\mu\gamma\beta(1 - B)\xi^2}\exp(ib\xi - |\xi|\beta\hat{x}_1), \\ \bar{\psi}(\hat{x}_1, \xi) &= -\frac{2iF\beta\text{sign}(\xi)}{4\mu\gamma\beta(1 - B)\xi^2}\exp(ib\xi - |\xi|\beta\hat{x}_1), \end{aligned} \quad (71)$$

где $B = (1 + \gamma^2)^2 / (4\beta\gamma)$. Вычисляя обратное преобразование Фурье для функций (71) и используя формулы (59), можно вычислить компоненты вектора перемещения. Например, на границе плоскости $x_1 = 0$ имеем

$$u_1(0, \hat{x}_2) = \frac{F(1 - \gamma^2)}{4\pi\mu\gamma(1 - B)}[-\ln|b - \hat{x}_2| + d], \quad (72)$$

где d — произвольная постоянная (соответствующая перемещению на бесконечности).

Заметим, что при $B \rightarrow 1$ в формуле (72) будет $u_1(0, \hat{x}_2) \rightarrow \infty$. Рассмотрим этот случай отдельно. При $B = 1$ имеем $(1 + \gamma^2)^2 = 4\beta\gamma$. Из этого соотношения следует, что

$$\left(2 - \frac{v^2}{c_1^2}\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{v^2}{c_2^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c_1^2}\right). \quad (73)$$

Сравнивая соотношение (73) с уравнением, определяющим скорость волн Рэлея (5.14.46), приходим к выводу, что $u_1(0, \hat{x}_2) \rightarrow \infty$, когда скорость v движущейся силы достигает скорости волн Рэлея c_3 . Также заметим, что для случая, когда $c_2 > v > c_3$, перемещение (72) происходит в направлении, противоположном направлению силы F . Для случая, когда $v = 0$, выражение (72) принимает вид

$$u_1(0, \hat{x}_2) = \frac{F}{\pi\mu}[-\ln|b - \hat{x}_2| + d]. \quad (74)$$

Выражение (74) не дает нулевого перемещения на бесконечных расстояниях. Следовательно, существует трудность при применении результата (74) к *бесконечной* пластине (см. [26]).

2. Плоские задачи в цилиндрической системе координат

2.1 Круговой сегмент под действием момента

В качестве первого примера рассмотрим круговой сегмент, показанный на рис. 5.

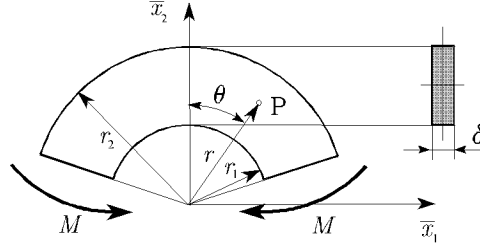


Рис. 5

Предположим, что δ — толщина сегмента. Запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = r_1, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = r_2, \\ \delta \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\theta} dr = 0, \quad \delta \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\theta} r dr = M. \end{aligned} \quad (75)$$

В качестве функции напряжений используем функцию (6.2.29). Компоненты тензора напряжений задаются формулами (6.2.27). Следовательно, имеем

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_2 + 2C_3 \ln r + C_3, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_2 + 2C_3 \ln r + 3C_3. \quad (76)$$

Подставляя выражения (76) в первые две формулы (75), получаем

$$\frac{C_1}{r_1^2} + 2C_2 + 2C_3 \ln r_1 + C_3 = 0, \quad \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_2 + 2C_3 \ln r_2 + C_3 = 0. \quad (77)$$

Соотношения (76) и третье из (75) приводят к равенству

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\theta} dr &= \left[C_3(1 + 2 \ln r_2) + 2C_2 + \frac{C_1}{r_2^2} \right] r_2 - \\ &- \left[C_3(1 + 2 \ln r_1) + 2C_2 + \frac{C_1}{r_1^2} \right] r_1 = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Наконец, подставляя формулы (76) в четвертое соотношение (75), получаем

$$\frac{M}{\delta} = -C_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2(r_2^2 - r_1^2) + C_3[r_2^2(1 + \ln r_2) - r_1^2(1 + \ln r_1)]. \quad (79)$$

Заметим, что в случае, если выполнены равенства (77), то равенство (78) также выполняется. Следовательно, можно определить постоянные C_1 , C_2 и C_3 из уравнений (77) и (79). Результат будет таков:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4M}{K} r_1^2 r_2^2 \ln \frac{r_2}{r_1}, & C_3 &= \frac{2M}{K} (r_2^2 - r_1^2), \\ C_2 &= -\frac{M}{K} [r_2^2 - r_1^2 + 2(r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1)], \end{aligned} \quad (80)$$

где K задается формулой

$$K = \left[(r_2^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \delta. \quad (81)$$

На рис. 6 показано распределение напряжений по сегменту. При этом

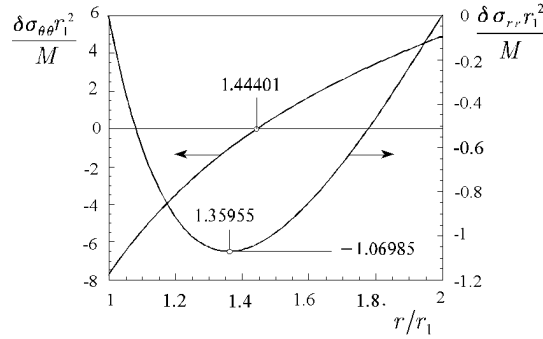


Рис. 6

мы взяли $r_2 = 2r_1$ и $\delta = 1$. На рисунке показана точка, в которой $\sigma_{\theta\theta} = 0$. Она соответствует $r = r^* = 1.44401r_1$. Этот радиус определяет “нейтральную линию” поперечного сечения.

2.2 Упругий диск, нагруженный моментом

Рассмотрим диск, показанный на рис. 7.

Диск нагружен сосредоточенным моментом M на своей оси. На внешнем крае диска приложены тангенциальные напряжения, так что

$$\sigma_{rr} = 0. \quad (82)$$

Для определения напряжений мы задаем функцию напряжений в виде (6.2.32):

$$\Phi = C_1 \theta. \quad (83)$$

Из формул (6.2.25) и (83) получаем

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2}. \quad (84)$$

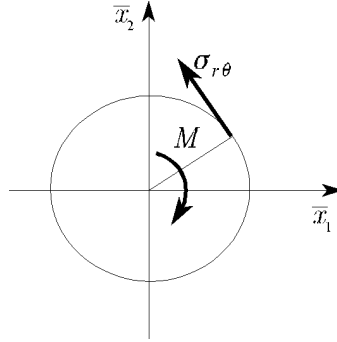


Рис. 7

Постоянная C_1 определяется из общих условий равновесия

$$M = [\sigma_{r\theta} 2\pi r] r \delta = 2\pi \delta C_1, \quad (85)$$

где δ — толщина пластины. Из формул (84) и (85) следует, что

$$C_1 = \frac{M}{2\pi\delta}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{M}{2\pi\delta r^2}. \quad (86)$$

2.3 Бесконечная пластина с круговым отверстием (задача Кирша)

Рассмотрим бесконечную тонкую пластину с круговым отверстием радиусом $r = a$. Предположим, что в центре отверстия задана система координат с осями \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Предположим, что на большом расстоянии от отверстия (т. е. $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$) напряженное состояние соответствует однородному растяжению в направлении \bar{x}_1 . Таким образом, мы полагаем, что в системе \bar{x}_1, \bar{x}_2 тензор напряжений имеет вид

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

при $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$.

Поле напряжений (87) соответствует функции напряжений Φ_0 , задаваемой равенством

$$\Phi_0 = \frac{\sigma_0}{2} x_2^2 = \frac{\sigma_0}{2} (r \sin \theta)^2 = \frac{\sigma_0 r^2}{4} - \frac{\sigma_0 r^2}{4} \cos(2\theta). \quad (88)$$

Мы хотим найти функцию напряжений Φ такую, что на окружности радиусом $r = a$ она удовлетворяла (см. (6.2.25)) условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0, \\ \sigma_{r\theta}(a, \theta) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] = 0, \end{aligned} \quad (89)$$

и

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2} \cos(2\theta), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right] = -\frac{\sigma_0}{2} \sin(2\theta),\end{aligned}\tag{90}$$

где Φ_0 задается равенством (88). Пусть

$$\Phi = \Phi_1(r) + f(r) \cos(2\theta).\tag{91}$$

Первую функцию Φ_1 мы берем в форме (6.2.29), т. е.

$$\Phi_1 = C_1 \ln r + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r + C_4.\tag{92}$$

Подставляя $f(r) \cos 2\theta$ в формулу (6.2.24), получаем

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{df}{dr} = 0.\tag{93}$$

Дифференциальное уравнение (93) — это уравнение типа Эйлера, и его общее решение записывается в виде

$$f = B_1 r^2 + B_2 r^4 + \frac{B_3}{r^2} + B_4.\tag{94}$$

Следовательно, используя формулы (91), (92) и (94), можно записать функцию Φ в виде

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2 r^2 + C_3 r^2 \ln r + C_4 + (B_1 r^2 + B_2 r^4 + \frac{B_3}{r^2} + B_4) \cos(2\theta).\tag{95}$$

Поле напряжений, соответствующее форме (95), имеет члены, которые бесконечно растут при $r \rightarrow \infty$, если C_3 и B_2 отличны от нуля. Кроме того, член C_4 не влияет на напряжения. Следовательно, мы полагаем эти постоянные равными нулю. Тогда из первого соотношения (90) следует, что

$$C_2 = -B_1 = \frac{\sigma_0}{4}.\tag{96}$$

Используя эти значения, получаем

$$\Phi = C_1 \ln r + \frac{\sigma_0}{4} r^2 + \left(-\frac{\sigma_0}{4} r^2 + \frac{B_3}{r^2} + B_4 \right) \cos(2\theta).\tag{97}$$

Граничные условия (89), будучи использованы для функции (95), приводят к значениям

$$C_1 = \frac{\sigma_0}{2} a^2, \quad B_3 = -\frac{\sigma_0}{4} a^2, \quad B_4 = \frac{\sigma_0}{2} a^2.\tag{98}$$

Таким образом, функция напряжений записывается в виде

$$\Phi = \frac{\sigma_0}{2} a^2 \ln r + \frac{\sigma_0}{4} r^2 + \left(-\frac{\sigma_0}{4} r^2 - \frac{\sigma_0}{4} a^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma_0}{2} a^2 \right) \cos(2\theta). \quad (99)$$

Используя формулу (99), запишем компоненты тензора напряжений (6.2.25) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_0}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_0}{2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\sigma_0}{2} \left[\left(1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin(2\theta) \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

Из второй формулы (100) следует, что максимальное напряжение достигается в точке $(r = a, \theta = \pi/2)$ и имеет значение

$$\sigma_{\theta\theta}(a, \pi/2) = 3\sigma_0. \quad (101)$$

Таким образом, множитель концентрации напряжений вследствие наличия отверстия равен

$$k = 3. \quad (102)$$

Отметим, что с помощью аналогичных аргументов можно показать, что для неограниченной пластины с отверстием в случае равномерного растяжения на бесконечности, определяемого тензором

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad (103)$$

множитель концентрации напряжений равен

$$k = 2, \quad (104)$$

в то время как для случая растяжения в одном и сжатия в другом направлении

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix} \quad (105)$$

фактор концентрации напряжений равен

$$k = 4. \quad (106)$$

6.4 Метод комплексной переменной для плоских задач

Как было указано в параграфе 6.2 для случая, когда объемные силы равны нулю, решение плоской задачи известно, если известна функция напряжений Φ , удовлетворяющая уравнению

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (1)$$

(см. (6.2.13)). Опишем порядок нахождения решения уравнения (1) посредством использования метода комплексной переменной. Пусть $z = x_1 + ix_2$ — комплексная переменная ($i = \sqrt{-1}$) и $\bar{z} = x_1 - ix_2$ — ее комплексное сопряжение. Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2i}(z + \bar{z}), & x_2 &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\cdot) &= \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right](\cdot), & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\cdot) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right](\cdot), \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\cdot) &= i \left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right](\cdot), & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\cdot) &= \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right](\cdot), \\ \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)(\cdot), & \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\cdot) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)(\cdot). \end{aligned} \quad (2)$$

Из формул (2) следует, что оператор Лапласа может быть записан в виде

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\cdot) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\cdot) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\cdot). \quad (3)$$

В параграфе 4.1 было показано (см. (4.1.13)), что при нулевых объемных силах первый инвариант тензора деформаций является гармонической функцией:

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x_2^2} = \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (4)$$

где использовано равенство (6.1.5). Если посредством формул (2) функцию ϑ выразить через z и \bar{z} , то уравнение (4) превратится в следующее:

$$\Delta \vartheta_1 = \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 4 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), получаем

$$\vartheta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right], \quad (6)$$

где φ — произвольная аналитическая функция от z и $\bar{\varphi}$ — ее комплексное сопряжение. Множитель $1/(\lambda + \mu)$ перед правой частью выбран для удобства. Также если $\varphi(z) = u + iv$ является функцией от z , то²

$$\varphi' = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + i \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \quad (7)$$

Перейдем теперь к уравнениям Ламе (6.1.21), которые при отсутствии объемных сил запишутся в виде

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + \mu \Delta u_1 = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} + \mu \Delta u_2 = 0. \quad (8)$$

Умножая второе уравнение (8) на мнимую единицу i и складывая с первым уравнением (8), получаем

$$\mu \Delta(u_1 + iu_2) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (9)$$

Из соотношений (2) следует, что

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} \right) = 2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \bar{z}}. \quad (10)$$

Так что используя уравнение (5), мы преобразуем уравнение (9) к виду

$$2\mu \frac{\partial^2(u_1 + iu_2)}{\partial z \partial \bar{z}} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (11), находим, что

$$2\mu \frac{\partial(u_1 + iu_2)}{\partial z} + (\lambda + \mu) \vartheta_1 = \varphi_1(z), \quad (12)$$

где φ_1 — произвольная аналитическая функция. Вычисляя комплексное сопряжение соотношения (12), получаем

$$2\mu \frac{\partial(u_1 - iu_2)}{\partial \bar{z}} + (\lambda + \mu) \vartheta_1 = \overline{\varphi_1(z)}. \quad (13)$$

Для любой аналитической функции $f(z) = u + iv$ имеем

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} + \frac{\partial(u - iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (14)$$

Тогда, складывая соотношения (12) и (13) и используя формулы (14) и (6), получаем

$$2(\lambda + 2\mu) \vartheta_1 = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} [\varphi' + \bar{\varphi}'] = \varphi_1 + \bar{\varphi}_1. \quad (15)$$

² Функции u и v удовлетворяют условиям Коши-Римана $(\partial u / \partial x_1) = (\partial v / \partial x_2)$, $(\partial u / \partial x_2) = -(\partial v / \partial x_1)$.

Из равенства (15) следует, что функции φ' и φ_1 связаны следующим образом:

$$\varphi_1(z) = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varphi'(z) + ic, \quad (16)$$

где c — произвольная вещественная постоянная. Окончательно, используя формулы (6), (12) и (16), находим

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + icz, \quad (17)$$

где

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu \quad (18)$$

и ψ — произвольная аналитическая функция. Член icz в (17) соответствует перемещению твердого тела и может быть отброшен. Таким образом, из соотношения (17) получаем

$$u_1 + iu_2 = \frac{1}{2\mu} [\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(\bar{z})}]. \quad (19)$$

Формула (19) была получена Колосовым в его диссертации в 1909 году (см. [20])³. Для случая обобщенного плоского напряженного состояния формула (19) превращается в равенство

$$u_1 + iu_2 = \frac{1}{2\mu} [\kappa^*\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(\bar{z})}], \quad (20)$$

где

$$\kappa^* = \frac{\lambda^* + 3\mu}{\lambda^* + \mu} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}. \quad (21)$$

Перейдем теперь к задаче определения напряжений. Из условия совместности (6.1.12) имеем

$$\Delta\Theta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (22)$$

Используя выражение (3), перепишем уравнение (22) в виде

$$\Delta\Theta = 4 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad (23)$$

так что

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\psi_1(z) + \overline{\psi_1(\bar{z})}], \quad (24)$$

³ Интересно, что Ляв в первом издании своей книги дал формулы для общего представления перемещения в терминах двух аналитических функций. Мухелишвили [29] замечает: “Ляву осталось только сделать очень маленький шаг для того, чтоб вывести простую формулу Колосова”.

где ψ_1 — аналитическая функция. Однако из закона Гука (см. (6.1.4)) следует, что

$$\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)\vartheta_1. \quad (25)$$

Из соотношений (6), (24) и (25) мы получим, что $\psi_1(z) = \varphi'(z)$. Следовательно,

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\operatorname{Re}(\varphi'(z)), \quad (26)$$

где $\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$ обозначает вещественную часть $\varphi'(z)$. Запишем теперь уравнения равновесия (6.1.6) в комплексной форме. Рассмотрим уравнения равновесия с нулевыми объемными силами

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (27)$$

Умножим второе уравнение (27) на i и вычтем результат из первого уравнения (27). Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} - i\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} - i\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = \\ & = \frac{\partial}{\partial z}[\sigma_{11} - i\sigma_{12} + i\sigma_{12} + \sigma_{22}] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\sigma_{11} - i\sigma_{12} + i\sigma_{12} - \sigma_{22}] = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z}[\sigma_{11} + \sigma_{22}] = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}]. \quad (29)$$

Из соотношений (26) и (29) получим

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (30)$$

где $\psi'(z)$ — аналитическая функция, определяемая равенством (19). Используя соотношения (20), (26) и (30), мы видим, что в плоских задачах две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ полностью определяют напряжения и перемещение.

Выведем теперь представление в виде комплексной функции для решения бигармонического уравнения (6.2.5) с нулевыми объемными силами, а именно из (6.2.4) следует, что

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}. \quad (31)$$

Используя формулы (2) и (3), имеем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta\Phi = 4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}}, \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 4\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \quad (32)$$

Из соотношений (32), (26) и (30) получим

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}, \quad 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \overline{z\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \quad (33)$$

Уравнения (33) приводят к равенствам

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{g_1(z)}, \quad 2\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + g_2(z). \quad (34)$$

Сравнивая два равенства (34), находим, что

$$\varphi(z) - g_2(z) = \overline{\psi(z)} - \overline{g_1(z)}, \quad (35)$$

так что

$$\overline{g_1(z)} = \overline{\psi(z)} + c, \quad g_2(z) = \varphi(z) + c, \quad (36)$$

где c — комплексная постоянная. Окончательно, используя формулы (36) и (34), получаем

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + c, \quad (37)$$

или

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \int \overline{\psi(z)}d\bar{z} + \chi(z) + c\bar{z} \right], \quad (38)$$

где $\chi(z)$ — другая аналитическая функция. Поскольку функция Φ и ее вторые производные вещественны, то

$$\overline{\chi(z)} = \int \overline{\psi(z)}d\bar{z} + cz + c_0, \quad (39)$$

где c_0 — произвольная комплексная постоянная. Без потери общности положим $c = c_0 = 0$. Тогда из соотношений (38) и (39) имеем

$$\Phi = \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}] = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)). \quad (40)$$

Используя формулы (40) и (32), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\operatorname{Re}(\varphi'(z)), \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (41)$$

в согласии с формулами (26) и (30). Выражение (40) — это форма Гурса решения бигармонического уравнения. Другой способ получения формулы (40) дан Мусхелишвили [29].

Перейдем теперь к задаче определения функций φ и ψ в формулах (20), (26) и (30). Рассмотрим первую и вторую граничные задачи (см. параграф 4.2).

Вторая основная граничная задача: задан вектор перемещения $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ на кривой C , т. е. на границе области V , определить две аналитические функции φ и ψ , удовлетворяющие соотношению

$$\hat{u}_1 + i\hat{u}_2 = \frac{1}{2\mu} [\kappa^*\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z)] \quad \text{на } C, \quad (42)$$

где \hat{u}_1 и \hat{u}_2 — известные функции точки на C .

Первая основная граничная задача: заданы компоненты вектора напряжений на кривой C , представляющей границу области V :

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = \hat{p}_1, \quad \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 = \hat{p}_2, \quad (43)$$

где \hat{p}_1 и \hat{p}_2 — известные функции на C . Мы определяем *комплексный вектор напряжения*

$$\mathbf{p}_n = \hat{p}_1 + i\hat{p}_2. \quad (44)$$

Тогда, используя соотношения $n_1 = dx_2/dS$, $n_2 = -dx_1/dS$ (см. (6.2.6)) и (6.2.4), получаем из равенств (43) и (44)

$$\mathbf{p}_n = \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{dx_2}{dS} - i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dS} = -i \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right). \quad (45)$$

Из формулы (45) следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = i \int_0^S \mathbf{p}_n dS + A, \quad (46)$$

где A — (комплексная) постоянная. Поскольку \mathbf{p}_n — известная функция, мы можем вычислить

$$i \int_0^S \mathbf{p}_n dS = f(z) = f_1(z) + if_2(z), \quad (47)$$

так что соотношения (40) и (47) приводят к равенству

$$f(z) + A = f_1(z) + if_2(z) + A = \varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (48)$$

где использовано обозначение (см. (39))

$$\chi'(z) = \psi(z). \quad (49)$$

Следовательно, решение *первой основной граничной задачи сводится к нижеследующей:* задана функция $f(z)$, найти две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, которые удовлетворяют соотношению (48).

Важным вопросом, касающимся результатов, приведенных выше, является единственность решений $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ уравнений (42) или (48). Этот вопрос обсужден для конечных и бесконечных, односвязных и многосвязных областей, например, в книгах Мусхелишвили [29], Каландии [16] и Партона и Перлина [31].

Мы найдем решения уравнений (42) и (48) для случая круговой области и для полуплоскости. Решение для круговой области особенно важно, так как посредством конформного отображения заданная физическая область может быть преобразована к единичному кругу.

а) Предположим что область V является единичным кругом

$$|z| \leq 1. \quad (50)$$

В первой основной граничной задаче мы ищем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в области $|z| < 1$ и удовлетворяющие уравнению

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f(z) \quad (51)$$

на $|z| = 1$. В уравнении (51) мы полагаем постоянную $A = 0$. Если $f(z)$ задана, то решение уравнения (51) может быть записано в форме (см. [22]):

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{z}{4\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta, \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{4\pi i z} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta - \frac{\varphi'(z)}{z}, \end{aligned} \quad (52)$$

где C — единичная окружность.

В случае второй граничной задачи запишем уравнение (42) в форме

$$\kappa^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) = 2\mu g(z), \quad (53)$$

где $g(z) = \hat{u}_1 + i\hat{u}_2$. Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитичные в области $|z| < 1$ и удовлетворяющие уравнению (53) при $|z| = 1$, могут быть выражены в виде

$$\varphi(z) = \frac{\mu}{\kappa^* \pi i} \int_C \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{c}_1}{\kappa^*} z, \quad \psi(z) = -\frac{\mu}{\pi i} \int_C \frac{\overline{g(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} - \frac{\varphi'(z)}{z} + \frac{c_1}{z}, \quad (54)$$

где

$$c_1 = \frac{\mu}{\pi i [(\kappa^*)^2 - 1]} \left\{ \kappa^* \int_C \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta^2} + \int_C \overline{g(\zeta)} d\zeta \right\}. \quad (55)$$

б) Предположим, что V — полуплоскость

$$x_2 \leq 0. \quad (56)$$

В случае первой основной граничной задачи имеем

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iT(t)}{t - z} dt, \quad (57)$$

где

$$P(t) = -\sigma_{22}(t, 0), \quad T(t) = \sigma_{12}(t, 0). \quad (58)$$

Определив φ по формуле (57), получим функцию ψ из соотношения

$$\psi'(z) = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(\bar{z})} - z\varphi''(z). \quad (59)$$

В рассматриваемом случае определенные ограничения должны быть наложены на функции $P(t)$ и $T(t)$ так, чтобы выражение (57) удовлетворяло соотношению

$$\varphi'(z) = -\frac{X + iY}{2\pi} \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad (60)$$

где $o(1/z)$ обозначает члены, которые удовлетворяют условию $\lim_{r \rightarrow \infty} [o(1/z)/(1/z)] = 0$. Напряжения определяются через функцию φ следующим образом:

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \varphi'(z) - \varphi'(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)}. \quad (61)$$

В случае второй граничной задачи заметим сначала, что комплексное перемещение может быть записано в форме

$$2\mu(\hat{u}_1 + i\hat{u}_2) = \kappa^* \varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + c, \quad (62)$$

где c — постоянная. Далее определим функцию χ по формуле

$$\chi(z) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(t) + ig_2(t)}{t - z} dt, \quad (63)$$

где

$$g_1(x_1) = \frac{d\hat{u}_1}{dx_1}, \quad g_2(x_1) = \frac{d\hat{u}_2}{dx_1}. \quad (64)$$

Используя функцию $\chi(z)$, заданную формулой (63), определим функцию $\varphi'(z)$ ([22], с. 332):

$$\varphi'(z) = \begin{cases} \chi(z), & \text{если } \text{Im } z > 0, \\ -\frac{1}{\kappa^*} \chi(z), & \text{если } \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (65)$$

Метод конформного отображения часто используется в связи с методом комплексной переменной, а именно используем аналитическую функцию

$$z = \omega(\zeta) \quad (66)$$

для отображения конечной или бесконечной односвязной области на плоскости переменной z , ограниченной простым контуром, взаимно однозначным способом на единичный круг $|\zeta| < 1$ плоскости ζ . Существование функции ω гарантируется *теоремой Римана об отображении*. Тот факт, что $\omega(\zeta)$ аналитична, влечет за собой то, что отображение (66) конформно, т. е. *углы как по величине, так и по направлению отсчета между прямыми на плоскости z и соответствующими прямыми на плоскости ζ равны*. Если область на z плоскости конечна,

то можно взять $\omega(0) = 0$. Для бесконечных областей на плоскости z принимаем $\omega(0) = \infty$.

Пусть r, θ — цилиндрические координаты на плоскости ζ . Если \mathbf{a} — произвольный вектор, определенный в точке z , то в системе координат с осями \bar{x}_1, \bar{x}_2 он имеет компоненты a_1 и a_2 . На плоскости ζ координатные линии $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ взаимно ортогональны. Пусть единичные векторы, направленные вдоль координатных линий $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, обозначены \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ соответственно. Вектор \mathbf{a} может быть представлен как

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (67)$$

Компоненты a_1, a_2, a_r и a_θ связаны соотношениями

$$a_r + ia_\theta = (a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha) + i(-a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha), \quad (68)$$

или

$$a_r + ia_\theta = \exp(-i\alpha)(a_1 + ia_2), \quad (69)$$

где α — угол между единичными векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_r , причем направление от \mathbf{e}_1 к \mathbf{e}_r считается положительным. Далее, найдем угол α в формуле (69). Для этого рассмотрим изменение z в направлении \mathbf{e}_r . Тогда z превращается в $z + dz$, причем dz задается равенством

$$dz = |dz| \exp(i\alpha). \quad (70)$$

Поскольку точка $\zeta = r \exp(i\theta)$, которая соответствует z , перемещается в радиальном направлении (\mathbf{e}_r), то мы имеем

$$d\zeta = |d\zeta| \exp(i\theta). \quad (71)$$

Однако из формулы (66) получаем $dz = \omega'(\zeta)d\zeta$, поэтому

$$\exp(i\alpha) = \frac{dz}{|dz|} = \exp(i\theta) \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}. \quad (72)$$

Из равенства (72) следует, что

$$\exp(-i\alpha) = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}. \quad (73)$$

С учетом равенства (73) уравнение (69), будучи примененным к вектору перемещения \mathbf{u} , дает

$$u_r + iu_\theta = \frac{\bar{\zeta}}{r} \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} (u_1 + iu_2). \quad (74)$$

Может быть легко показано, что для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= \exp(2i\alpha)(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}). \end{aligned} \quad (75)$$

Из равенства (72) имеем

$$\exp(2i\alpha) = \frac{\zeta^2 (\omega'(\zeta))^2}{r^2 |\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{r^2 \overline{\omega'(\zeta)}}. \quad (76)$$

Пусть для произвольных аналитических функций φ и ψ

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\zeta), \quad \psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi_1(\zeta). \quad (77)$$

Тогда из соотношений (75), (76), (41), (66) и (77) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}], \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= \frac{2\zeta^2}{r^2 \overline{\omega'(\zeta)}} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta)], \end{aligned} \quad (78)$$

где $\Phi_1(\zeta) = \varphi'(z(\zeta))$ и $\Psi_1(\zeta) = \psi'(z(\zeta))$. При этом граничные условия для первой и второй граничных задач (48) и (42) превращаются в условия

$$\begin{aligned} f_1(z(\zeta)) + if_2(z(\zeta)) + A &= \varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)}, \\ 2\mu(\dot{u}_1 + i\dot{u}_2) &= \left[\kappa^* \varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Уравнения (79) должны быть удовлетворены на границе $|\zeta| = 1$ на плоскости ζ .

Теперь мы рассмотрим некоторые конкретные задачи и их решения, полученные с помощью метода комплексной переменной.

а) *Предположим, что функции φ и ψ имеют форму*

$$\varphi(z) = Ci^2 z^2, \quad \psi(z) = -Ciz^2. \quad (80)$$

Используя формулы (26) и (30), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[2Ciz - 2Ci\bar{z}] = -8Cx_2, \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}2Ci - 2Ciz] = 4Ci(\bar{z} - z) = 8Cx_2. \end{aligned} \quad (81)$$

Из соотношений (80) и (81) следует, что

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{11} = -8Cx_2, \quad \sigma_{22} = 0. \quad (82)$$

Распределение напряжений (82) соответствует чистому изгибу. Используя формулы (19), получаем

$$u_1 = -8\frac{C}{E}(1-\nu^2)x_1x_2, \quad u_2 = 4\frac{C}{E}(1+\nu)[(1-\nu)x_1^2 + \nu x_2^2]. \quad (83)$$

В элементарной теории изгиба при действии постоянного изгибающего момента M_0 имеем

$$\sigma_{11} = \frac{M_0}{J} x_2, \quad (84)$$

где J — осевой момент инерции. Сравнивая формулы (84) и (82), приходим к выводу, что $8C = -M_0/J$. Подставляя это значение в формулу (83), получаем

$$u_2 = -\frac{M_0}{EJ}(1-\nu^2) \left[\frac{x_1^2}{2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{x_2^2}{2} \right]. \quad (85)$$

Заметим, что в пределе, когда $\nu \rightarrow 0$, из формулы (85) мы получим

$$EJ \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} = -M_0. \quad (86)$$

б) *Рассмотрим теперь задачу б) из параграфа 6.3, показанную на рис. 4.*

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x_2) &= -p & -a \leq x_2 \leq a, \\ \sigma_{12} &= 0 & -a \leq x_2 \leq a. \end{aligned} \quad (87)$$

Из соотношений (57) и (59) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= -\frac{p}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{t-z} = \frac{p}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z+a}, \\ \psi'(z) &= -\frac{zp}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{dt}{(t-z)^2} = -\frac{paz}{\pi i(z^2-a^2)}. \end{aligned} \quad (88)$$

Подставляя формулы (88) в соотношение (41), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\operatorname{Re}(\varphi'(z)) = -\frac{2p}{\pi}(\theta_2 - \theta_1), \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = \frac{2pa}{\pi i} \frac{\bar{z}-z}{z^2-a^2}, \end{aligned} \quad (89)$$

где θ_1 и θ_2 показаны на рис. 4. Из формул (89) следует, что поле напряжений имеет то же значение, что и было определено ранее.

в) *Бесконечная пластина с эллиптическим отверстием.*

Рассмотрим пластину с эллиптическим отверстием, показанную на рис. 8.

Предположим, что эллипс определен уравнением на плоскости z

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad (90)$$

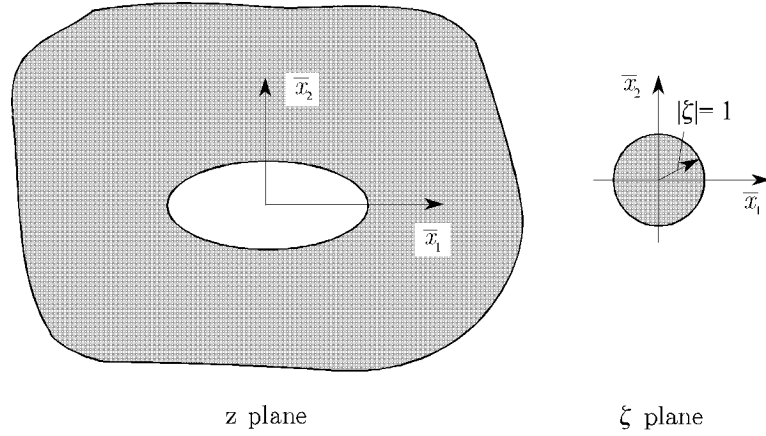


Рис. 8

где a и b — полуоси эллипса. Функция

$$z(\zeta) = \omega(\zeta) = A \left(\frac{1}{\zeta} + c\zeta \right), \quad (91)$$

где

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad c = \frac{a-b}{a+b}, \quad (92)$$

отображает внешность эллипса на плоскости z на единичный круг на плоскости ζ (см. рис. 8).

Предположим, что пластина нагружена так, что в точках на большом расстоянии от отверстия поле напряжений является одноосным:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma, \quad \sigma_{12} = 0, \quad (93)$$

и что отверстие свободно от напряжений. Рассмотрим функции

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\sigma A}{4} \left(\frac{1}{\zeta} - (1+c)\zeta \right), \quad \psi_1(\zeta) = \frac{\sigma A}{2} \left[\frac{1}{\zeta} - \frac{(1+c+c^2)\zeta + \zeta^3}{1-c\zeta^2} \right]. \quad (94)$$

Используя функцию

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{\sigma}{4} \frac{1 + (2+c)\zeta^2}{1 - c\zeta^2} \quad (95)$$

в выражении (78), получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = 2[\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}], \quad \sigma_{rr} = 0, \quad (96)$$

на $|\zeta| = 1$, т. е. на $\zeta = \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Подстановка $\zeta = \exp(i\theta)$ в формуле (96) приводит к выражению

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma \frac{1 - (2+c)c + 2\cos(2\theta)}{1 + c^2 - 2c\cos(2\theta)}. \quad (97)$$

Максимальное значение $\sigma_{\theta\theta}$ равно

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \sigma \left(1 + 2 \frac{1+c}{1-c} \right) = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad (98)$$

при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Минимальное значение $\sigma_{\theta\theta}$ равно

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\min} = -\sigma \quad (99)$$

при $\theta = \pi/2$ и $\theta = -\pi/2$. Решение (97) было получено Колосовым. Оно может быть использовано для изучения основной задачи механики трещин, так называемой *задачи Гриффита о трещине* (см. [56]).

В качестве модели трещины мы рассматриваем эллиптическое отверстие, у которого ось b мала (рис. 9).

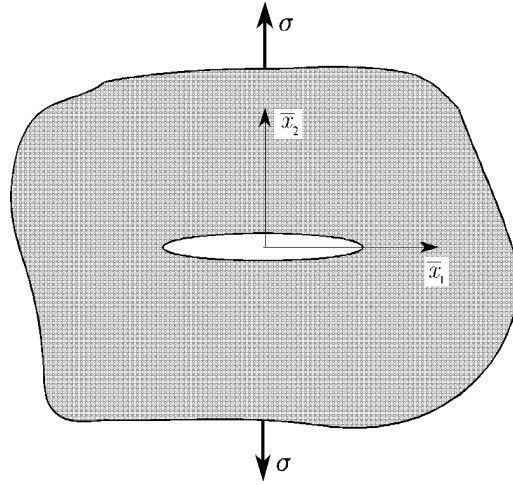


Рис. 9

Функция (91) в этом случае принимает вид ($c = 1$, $A = a/2$)

$$z(\zeta) = \omega(\zeta) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right). \quad (100)$$

При этом имеем для функций (94) выражение

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\sigma a}{8} \left(\frac{1}{\zeta} - 3\zeta \right), \quad \psi_1(\zeta) = \frac{\sigma a}{4} \frac{1 - 4\zeta^2 - \zeta^4}{\zeta(1 - \zeta^2)}. \quad (101)$$

Чтобы найти напряжения на плоскости z , решаем уравнение (100) относительно ζ и получаем

$$\zeta = \frac{z}{a} - \sqrt{\left(\frac{z}{a} \right)^2 - 1}. \quad (102)$$

Подстановка формулы (102) в функции (101) приводит к выражениям

$$\varphi(z) = \frac{\sigma a}{4} \left[2\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1} - \frac{z}{a} \right], \quad \psi(z) = -\frac{\sigma a}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1}} - \frac{z}{a} \right]. \quad (103)$$

Используя формулы (103) и (26), можно найти компоненты тензора напряжений (30). Вдоль оси \bar{x}_1 (т. е. $x_2 = 0$, $z = \bar{z} = x_1$) имеем

$$\sigma_{11} = \begin{cases} \sigma \left[\frac{\frac{x_1}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1}} - 1 \right] & \text{при } x_1 > a, \\ 0 & \text{при } x_1 < a; \end{cases} \quad (104)$$

$$\sigma_{22} = \begin{cases} \sigma \left[\frac{\frac{x_1}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1}} \right] & \text{при } x_1 > a, \\ 0 & \text{при } x_1 < a. \end{cases}$$

Заметим, что напряжения (104) становятся бесконечными на конце трещины. Это является следствием неограниченности кривизны в этой точке. Существуют модели трещин, где эта особенность отсутствует.

Для того чтобы найти поле перемещений, соответствующее формулам (103), используем уравнение (20)

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(\bar{z})}. \quad (105)$$

Поскольку поверхность трещины свободна от напряжений ($\mathbf{p}_n = 0$ в формуле (47)), из уравнения (48) имеем

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(\bar{z})} = 0 \quad (106)$$

при $x_1 = 0$, $-a < x_1 < a$. Вычисляя функции (105) на границе трещины и складывая результат с функциями (106), получаем

$$2\mu(u_1 + iu_2) = (\kappa^* + 1)\varphi(z) \quad \text{при } -a < x_1 < a. \quad (107)$$

Интересно определить компоненту вектора перемещения в направлении \bar{x}_2 . Из (107) следует, что

$$2\mu u_2 = (\kappa^* + 1)\text{Im}[\varphi(z)]. \quad (108)$$

Здесь $\text{Im}[\varphi(z)]$ — мнимая часть функции $\varphi(z)$. Для трещины Гриффита получаем перемещение, подставляя функции (103) в формулу (108):

$$u_2 = \frac{1 + \kappa^*}{4\mu} \sigma \sqrt{a^2 - x_1^2}. \quad (109)$$

Отсюда следует, что компонента перемещений u_2 в вершине трещины равна нулю.

Задачи

1. Показать, что закон Гука в терминах компонент тензора деформаций для плоского напряженного состояния может быть записан в декартовой и цилиндрической системах координат в виде

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), & E_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), & E_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \\ E_{rr} &= \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}), & E_{\theta\theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}), & E_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (a)$$

Для плоского деформированного состояния необходимо заменить E и ν на E_1 и ν_1 , определенные по формулам

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (б)$$

2. Рассмотрим бесконечный клин, показанный на рис. 10. Клин нагружен сосредоточенной силой F . Показать, что функция

$$\Phi = r[(A + B\theta) \cos \theta + (C + D\theta) \sin \theta],$$

где A, B, C и D постоянны, является решением бигармонического уравнения (6.2.24).

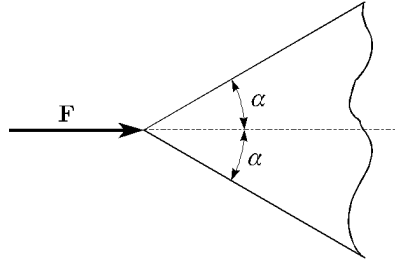


Рис. 10

Определить постоянные так, чтобы грани клина были бы свободны от напряжений, т. е. показать, что

$$A = 0, \quad C = 0, \quad B = 0, \quad D = -\frac{F}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad \sigma_{rr} = \frac{2D \cos \theta}{r}.$$

3. Тонкая консоль, показанная на рис. 11, нагружена по верхней грани касательным усилием $\sigma_{12} = \tau_0 = \text{const}$.

Показать, что функция

$$\Phi = \frac{\tau_0}{4} \left(x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2^2}{h} - \frac{x_1 x_2^3}{h^2} + \frac{L x_2^2}{h} + \frac{L x_2^3}{h^2} \right)$$

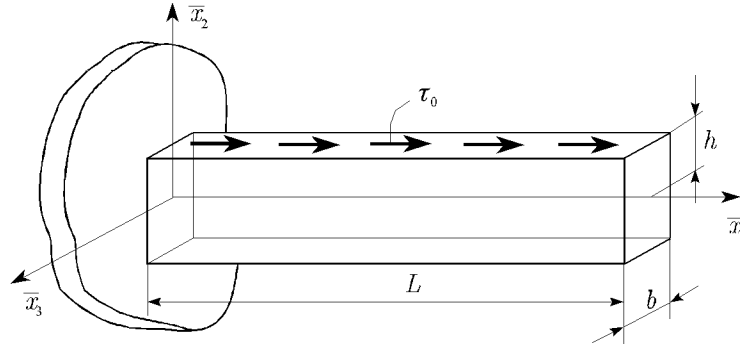


Рис. 11

удовлетворяет уравнению (6.2.13). Все ли граничные условия выполняются?

4. Тонкая прямоугольная упругая пластина со сторонами a и b вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, которая совпадает со стороной длины b . Показать, что функция напряжений Эйри является решением уравнения

$$\Delta\Delta\Phi = (1 - \nu)\rho_0\omega^2,$$

где ρ_0 — плотность пластины.

5. Показать, что функция

$$\Phi = C_1\theta + C_2 + C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta,$$

где $C_i, i = 1, 2, 3, 4$, — постоянные, удовлетворяет бигармоническому уравнению в полярных координатах (6.2.24).

6. Используя уравнение (6.3.55) и закон Гука (6.1.4), показать, что компоненты вектора перемещения для полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой, равны (см. [26]):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{F(\lambda + 2\mu)}{2\pi(\lambda + \mu)} \ln r - \frac{F}{2\pi\mu} \frac{x_2^2}{r^2}, \\ u_2 &= -\frac{F}{2\pi(\lambda + \mu)} \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{F}{2\pi\mu} \frac{x_1 x_2}{r^2}. \end{aligned}$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ и θ_1 — угол между радиус-вектором точки с координатами (x_1, x_2) и осью \bar{x}_1 (см. рис. 4).

7. Тонкий круглый диск радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, которая проходит через его центр и

ортогональна плоскости диска, ω . Используя уравнения для плоского напряжения (частный случай (1.5.6))

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r} + f_\theta &= 0,\end{aligned}$$

и результаты решения задачи 1, показать, что радиальные компоненты тензора напряжений равны

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{3 + \nu}{8} \rho_0 \omega^2 R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{3 + \nu}{8} \rho_0 \omega^2 R^2 \left[1 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

и что максимальные значения напряжений достигаются в центре $r = 0$ и равны

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{3 + \mu}{8} \rho_0 \omega^2 R^2.$$

8. Показать, что формулы (6.3.31) после подстановки (6.3.30) дают следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{q}{2I} x_1^2 x_2 - \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3} x_2^3 - \frac{h^2}{10} x_2 \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} x_2^3 - \frac{h^2}{4} x_2 - \frac{h^3}{12} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) x_1,\end{aligned}$$

где $I = \delta h^3 / 12$.

9. Рассмотрим полуплоскость, показанную на рис. 3. Предположим, что полуплоскость нагружена сосредоточенной силой $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_2$ в точке $(0, 0)$. Следуя той же процедуре, что и в задаче б) параграфа 6.3, показать, что

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x_2 x_1^2}{(x_2^2 + x_1^2)^2}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x_2^3}{(x_2^2 + x_1^2)^2}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.\end{aligned}$$

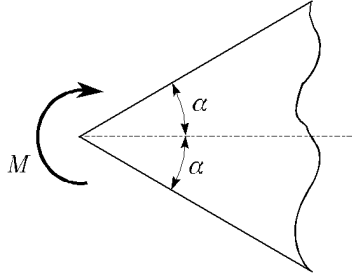


Рис. 12

10. Рассмотрим клин, показанный на рис. 12, который нагружен сосредоточенным моментом, действующим в плоскости клина в его вершине.

Показать, что

$$\Phi = A\theta + D \sin 2\theta,$$

где A и D — постоянные в решении уравнения (6.2.24). Кроме того, используя формулы (6.2.25), найти компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = -\frac{4D}{r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{A}{r^2} + \frac{2D}{r^2} \cos 2\theta.$$

Используя граничные условия

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) \Big|_{\theta=\pm\alpha} = 0,$$

показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2M \sin 2\theta}{r^2(2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) \cos 2\alpha}, & \sigma_{\theta\theta} &= 0, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{M}{r^2(2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Глава 7

Энергетический метод в теории упругости

7.1 Введение

Обычно в физике и, в частности, в механике концепция работы и энергии играет важную роль, которая может быть прослежена даже в работах Аристотеля. Работа и энергия являются инвариантными величинами, поскольку не зависят от выбора координатной системы. Кроме того, многие фундаментальные законы механики могут быть выражены двумя способами: первый — через требование того, чтобы было выполнено определенное дифференциальное уравнение (например, в состоянии равновесия упругого тела выполняется дифференциальное уравнение (1.3.10)) или чтобы определенная величина в заданном состоянии (движения или равновесия) была минимальной. Вторым подходом является то, что называется *вариационными методами* механики. В таком методе работа и энергия имеют фундаментальное значение.

В вариационном методе формулируются два типа *вариационных принципов*: *интегральный* и *дифференциальный*. В обоих случаях они выражают математическое требование о том, что определенная величина является минимальной или максимальной (иногда только стационарной) в течение процесса (движения или равновесия).

Существует взгляд, сформулированный Лейбницем, что все процессы в природе (и, следовательно, механические процессы как частный случай) являются, в определенном смысле, оптимальными¹. Такой подход существует во всех областях физики².

Если вариационная формулировка для данной проблемы известна,

¹ В основном это исходит от Лейбница: “Aus der höchsten Vollkommenheit Gottes folgt, daß er bei der Hervorbringung des Universums den bestmöglichen Plan gewählt hat, gemäß dem sich die größte Mannigfaltigkeit mit der größten Ordnung vereinigt...” (Leibniz G.W. *Die Vernunftprinzipien der Natur* (1714), Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, Übersetzt von A. Buchenau, Band II. Leipzig: Verlag von Felix Meiner, 1904/1906, P. 428-432).

² “Часто в теоретической физике теория рассматривается как законченная, только если известен ее вариационный принцип в смысле Гамильтона.” (Anthony K.-H. *A new approach to thermodynamics of irreversible processes by means of Lagrange-formalism*. В: *Disequilibrium and Self Organisation*/ Ed. C.W. Kilmister. D. Reidel Publishing Company, 1986, P. 75-92).

она может быть использована в нескольких направлениях (см., например, [91]).

1. Могут быть получены дифференциальные уравнения процесса вместе с соответствующими граничными условиями.
2. Вариационный принцип может быть использован для изучения законов сохранения (нахождения первых интегралов дифференциальных уравнений, описывающих процесс) посредством использования теоремы Нётер.
3. Могут быть получены приближенные решения дифференциальных уравнений процесса (метод Ритца).

Таким образом, существует постоянный интерес к формулировке вариационных принципов для задач теории упругости.

7.2 Работа и внутренняя энергия

Первый закон термодинамики гласит, что изменение общей энергии термоупругого тела равно работе внешних сил плюс изменение количества тепла. Далее мы рассматриваем только упругие тела. Таким образом, в течение деформационного процесса отсутствует изменение тепла. Мы начнем с задачи определения работы внешних сил.

Рассмотрим упругое тело B , показанное на рис. 1. Предположим, что тело нагружено системой сил Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Мы предполагаем, что Q_i — так называемые *обобщенные силы*. Под обобщенными силами мы имеем в виду силы и моменты.

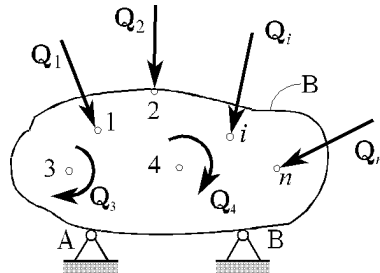


Рис. 1

В точке приложения силы Q_i мы определяем *обобщенное перемещение* q_i . Оно представляет собой перемещение точки приложения силы Q_i в направлении действия силы. В случае, когда Q_i является моментом, q_i представляет собой угол поворота вокруг вектора момента. Перед тем как мы определим работу для случая, изображенного на

рис. 1, мы рассмотрим тело, нагруженное *единственной* обобщенной силой \mathbf{Q} (рис. 2).

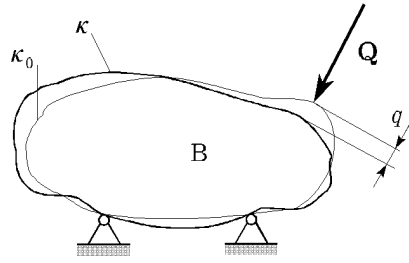


Рис. 2

Проблема определения работы поверхностных сил для общего случая, показанного на рис. 1, рассмотрена в параграфе 7.4. Если приложена единственная сила \mathbf{Q} , то тело деформируется из состояния κ_0 в состояние κ . Предположим, что обобщенное перемещение, соответствующее силе \mathbf{Q} , равно q . Будем полагать в дальнейшем, что зависимость $Q = |\mathbf{Q}|$ от q такова, как это показано на рис. 3.

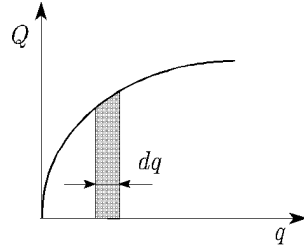


Рис. 3

Тогда если q возрастает до $q + dq$, то работа, произведенная силой \mathbf{Q} , определяется равенством

$$dW = Qdq. \quad (1)$$

Изменение общей механической энергии (потенциальной и кинетической) тела равно работе внешних сил и изменению количества тепловой энергии (тепла) тела. Если изменение тепловой энергии равно нулю, то мы имеем

$$dE_k + dU = dW, \quad (2)$$

где dE_k — изменение кинетической энергии, dU — изменение потенциальной энергии, и dW — работа внешних сил. Если изменение кинетической энергии равно нулю, то

$$dU = dW. \quad (3)$$

Тогда полная потенциальная энергия тела, называемая также *энергией деформаций*, такова:

$$U = \int_0^q Q(\lambda) d\lambda, \quad (4)$$

где мы предположили, что $U = 0$ в начальном состоянии $q = 0$.

Далее мы определяем *дополнительную энергию* при помощи равенства³

$$dU_c = q dQ = dW_c, \quad (5)$$

так, что

$$U_c = \int_0^Q q(\lambda) d\lambda. \quad (6)$$

На рис. 4 показан геометрический смысл U и U_c . Из рис. 4 мы заключаем, что

$$U_c = Qq - U. \quad (7)$$

Переход от U к U_c может рассматриваться как *преобразование Лежандра* (иногда называемое *преобразованием Фридриха*). Оно играет важную роль в механике (см., например, [77]).

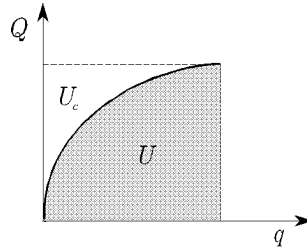


Рис. 4

Теперь мы переходим к задаче определения dU для линейно упругого тела в объеме V , т. е. трехмерного напряженного состояния. Мы записываем

$$dU = \int_V u dV, \quad (8)$$

где следует определить u .

Рассмотрим тело V в деформированном состоянии. Пусть \mathbf{u} является вектором перемещения произвольной точки и пусть σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в этой точке, выраженные в фиксированной декартовой системе координат \bar{x}_i . Рассмотрим элементарный параллелепипед со сторонами dx_i , $i = 1, 2, 3$. Если тело получает приращение деформации, то вектор перемещения в новом положении равновесия будет равен $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$. Мы полагаем, что $\delta\mathbf{u}$ мало. Тензор деформаций

³ Величина $dW_c = qdQ$ называется псевдорботой.

изменится с E_{ij} в начальном состоянии на $E_{ij} + \bar{E}_{ij}$ в новом состоянии. Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(E_{ij})$ также изменятся так, что в новом равновесном положении мы будем иметь $\sigma_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}$. Используя тот факт, что $\bar{\mathbf{u}}$ мало, получаем

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_{mk}} \bar{E}_{mk}. \quad (9)$$

На рис. 5,а показан элементарный параллелепипед и на рис. 5,б — зависимость одной компоненты тензора напряжений (σ_{22}) от одной компоненты тензора деформаций (E_{22}). Заметим, что это соотношение не предполагается обязательно линейным. Таким образом, последующие результаты будут справедливыми для физически нелинейных упругих материалов.

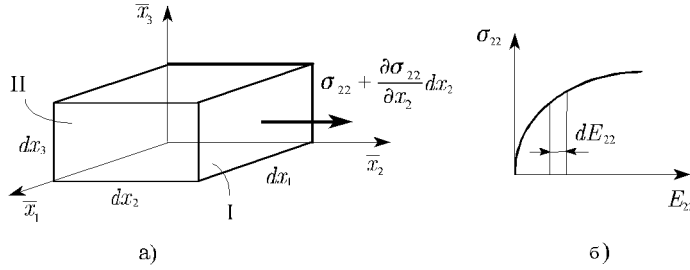


Рис. 5

Далее мы определяем работу сил, действующих на гранях параллелепипеда. Сила с интенсивностью $[\sigma_{22} + (\partial \sigma_{22} / \partial x_2) dx_2] dx_1 dx_3$ действует на грани I. Перемещением ее точки приложения является $[\bar{u}_2 + (\partial \bar{u}_2 / \partial x_2) dx_2] dx_2$. Следовательно, работа выражается формулой

$$A_1 = \left\{ \left[\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right] dx_1 dx_3 \right\} \left(\bar{u}_2 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} dx_2 \right). \quad (10)$$

На грани II сила равна $\sigma_{22} dx_1 dx_3$, а перемещение — \bar{u}_2 , так что работа

$$A_2 = -\sigma_{22} \bar{u}_2 dx_1 dx_3. \quad (11)$$

Суммарная работа σ_{22} на гранях I и II равна

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22} \bar{u}_2) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (12)$$

Используя аналогичную процедуру, можно определить работу других компонент вектора напряжений (т. е. σ_{21} и σ_{23}) на гранях I и II. Таким образом, полная работа сил, действующих на гранях I и II, становится равной

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{22} \bar{u}_2 + \sigma_{12} \bar{u}_1 + \sigma_{23} \bar{u}_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (13)$$

Работу вектора напряжений на двух других парах граней следует сложить с работой (13) так, что работа всех поверхностных сил, действующих на гранях параллелепипеда, окажется равной

$$A_s = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} \bar{u}_j) dx_1 dx_2 dx_3 . \quad (14)$$

Работа объемных сил попросту равна

$$A_b = (f_i \bar{u}_i) dx_1 dx_2 dx_3 . \quad (15)$$

Таким образом, суммарная работа всех поверхностных и объемных сил равна

$$r = \left[\sigma_{ij} dE_{ij} + \bar{u}_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3, \quad (16)$$

где $dE_{ij} = \bar{E}_{ij}$ задается соотношением (9). Используя уравнения равновесия и равенство (3), мы получаем, что

$$dU = \int \int_V \int \sigma_{ij} dE_{ij} dV . \quad (17)$$

Следовательно, u в формуле (8) принимает вид $du = \sigma_{ij} dE_{ij}$.

Если мы хотим вычислить изменение энергии U между двумя состояниями с тензорами деформаций E_{ij}^0 и E_{ij}^1 , мы должны проинтегрировать соотношение (17). В общем случае этот интеграл будет зависеть от пути. Однако, если σ_{ij} , как в нашем случае, зависит только от E_{ij} и интегрирование не зависит от пути, функция U может быть определена как⁴

$$U = \int \int_V \int \left(\int_{E_{km}^0}^{E_{km}^1} \sigma_{ij}(E_{km}) dE_{ij} \right) dV . \quad (18)$$

Используя аналогичные аргументы, можно получить выражение для общей дополнительной энергии в форме

$$dU_c = \int \int_V \int E_{ij} d\sigma_{ij} dV, \quad (19)$$

или

$$U_c = \int \int_V \int \left(\int_{\sigma_{km}^0}^{\sigma_{km}^1} E_{ij}(\sigma_{km}) d\sigma_{ij} \right) dV, \quad (20)$$

где σ_{ij}^0 и σ_{ij}^1 — компоненты тензора напряжений в начальном и конечном положении.

⁴ На самом деле, существование U характеризует так называемую теорию упругости Грина. Теория упругости, определяемая уравнением (3.1.5), иногда называется теорией упругости Коши.

Теперь перейдем к линейно упругому телу. Предположим, что тело деформируется между состояниями E_{ij}^0 и E_{ij} . Пусть $t \in [0, 1]$ — вещественный параметр и пусть E_{ij}^t определяется как

$$E_{ij}^t = E_{ij}^0 + t(E_{ij} - E_{ij}^0). \quad (21)$$

Для линейно упругих материалов $\sigma_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$, и, используя это соотношение вместе с формулами (21) и (18), получаем

$$U = \frac{1}{2} \int \int_V \int \sigma_{ij} E_{ij} dV, \quad (22)$$

где мы предположили, что $E_{ij}^0 = 0$. Функция

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} E_{ij} \quad (23)$$

называется *плотностью энергии деформации или упругим потенциалом*. Упругий потенциал может быть получен двумя эквивалентными способами. Если мы используем закон Гука в форме (3.4.14), мы найдем

$$u = \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \sigma_{mn} \sigma_{mn} - \nu \Theta^2], \quad (24)$$

или

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)]. \quad (25)$$

Аналогично, если мы используем закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (26)$$

в соотношении (23), то получаем

$$u = \frac{1}{2} \lambda (E_{nn})^2 + \mu E_{ij} E_{ij}, \quad (27)$$

или

$$u = \frac{1}{2} \lambda (E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 + \mu (E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\mu (E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2). \quad (28)$$

Из формулы (28) следует, что u является *положительно определенной формой от компонент тензора деформаций E_{ij}* , поскольку как λ , так и μ *положительны*. Выражение (28) было использовано в главе 4 (см. (4.4.7)). Поскольку (26) является *линейным* соотношением между напряжениями и деформациями, то, следовательно, и функция (24) является также положительно определенной квадратичной формой от компонент тензора напряжений σ_{ij} . Вновь подчеркнем, что соотношение (18) справедливо для нелинейно упругих материалов, в то время как соотношение (23) — только для линейных материалов.

7.3 Теорема Бетти

Сформулируем теперь общий закон *взаимности*, который связывает два состояния равновесия упругого тела, соответствующие двум различным внешним нагрузкам.

Предположим, что упругое тело V с объемом V и граничной поверхностью S находится в равновесии в двух состояниях — I и II. Пусть

$$\sigma_{ij}^I, \quad E_{ij}^I, \quad u_i^I \quad (1)$$

являются соответственно полями напряжений, деформаций и перемещений, возникающими вследствие действия поверхностных сил p_i^I и объемных сил f_i^I . Аналогично, пусть

$$\sigma_{ij}^{II}, \quad E_{ij}^{II}, \quad u_i^{II} \quad (2)$$

являются соответственно полями напряжений, деформаций и перемещений, соответствующими поверхностным силам p_i^{II} и объемным силам f_i^{II} . Следовательно,

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl} E_{kl}^I, \quad \sigma_{ij}^{II} = C_{ijkl} E_{kl}^{II}, \quad (3)$$

и

$$\sigma_{ij}^I E_{ij}^{II} = C_{ijkl} E_{kl}^I E_{ij}^{II} = C_{klij} E_{kl}^I E_{ij}^{II} = \sigma_{kl}^{II} E_{kl}^I = \sigma_{ij}^{II} E_{ij}^I, \quad (4)$$

где использовано свойство симметрии тензора упругостей. Из соотношения (4) следует, что

$$\int \int_V \int \sigma_{ij}^I E_{ij}^{II} dV = \int \int_V \int \sigma_{ij}^{II} E_{ij}^I dV. \quad (5)$$

Выражение (5) является специальной формой теоремы Бетти. Мы запишем ее по-другому. Для этого преобразуем левую часть равенства (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \int_V \int \sigma_{ij}^I \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{II} x_j}{+} \frac{\partial u_j^{II}}{\partial x_i} \right) dV &= \int \int_V \int \sigma_{ij}^I \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_j} dV + \\ &= \int \int_V \int \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^I u_i^{II}) dV - \int \int_V \int \frac{\partial \sigma_{ij}^I}{\partial x_j} u_i^{II} dV, \end{aligned} \quad (6)$$

где использована симметрия тензора σ_{ij} . Если к равенству (6) применить теорему Гаусса и учесть уравнения равновесия (1.3.10), то мы получаем

$$\int \int_V \int \sigma_{ij}^I E_{ij}^{II} dV = \int \int_S p_i^I u_i^{II} dS + \int \int_V \int f_i^I u_i^{II} dV. \quad (7)$$

После использования той же процедуры для преобразования правой части соотношения (5) получаем

$$\int_S p_i^I u_i^{II} dS + \int_V \int f_i^I u_i^{II} dV = \int_S p_i^{II} u_i^I dS + \int_V \int f_i^{II} u_i^I dV. \quad (8)$$

Соотношение (8) представляет собой теорему Бетти: *работа внешних сил I на поле перемещений, соответствующем системе сил II, равна работе системы сил II на поле перемещений, соответствующем системе сил I.*

Важность теоремы Бетти заключается в том факте, что системы сил I и II могут быть выбраны произвольно. Например, предположим, что мы интересуемся перемещениями, соответствующими системе сил I. Мы можем выбрать очень простую форму для системы сил II (для которой мы знаем решение) и затем получить из формулы (8) интегральное представление для неизвестного поля перемещений. Такой метод используется в *методе граничного интеграла* для решения задач теории упругости.

Теорема Бетти может быть распространена на динамические задачи теории упругости, если добавить силу инерции $-\rho_0 \partial^2 u_i / \partial t^2$ к объемным силам f_i так, что

$$\begin{aligned} & \int_S p_i^I u_i^{II} dS + \int_V \int \left(f_i^I - \frac{\partial^2 u_i^I}{\partial t^2} \right) u_i^{II} dV = \\ & = \int_S p_i^{II} u_i^I dS + \int_V \int \left(f_i^{II} - \frac{\partial^2 u_i^{II}}{\partial t^2} \right) u_i^I dV. \end{aligned} \quad (9)$$

Если тело нагружено сосредоточенными силами, действующими на границе S , а объемные силы равны нулю, то из соотношения (8) следует, что

$$\sum_{i=1}^k Q_i^I q_i^{II} = \sum_{i=1}^k Q_i^{II} q_i^I, \quad (10)$$

где использованы свойства функции Дирака и обозначения рисунков 1 и 2. Выражение (10) имеет важное значение для строительной механики.

7.4 Теорема Максвелла

Для случая единственной сосредоточенной силы и линейной зависимости между силой и перемещением точки ее приложения работа определяется формулой (7.2.1). А именно, так как

$$W = \int_0^q Q(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

то для случая линейного закона “сила–перемещение”

$$Q = \Delta q, \quad (2)$$

где $\Delta = \text{const}$. Получаем

$$W = \frac{1}{2} \Delta q^2. \quad (3)$$

Для случая N сил, действующих на тело (см. рис. 1), имеем

$$dW = \sum_{i=1}^N Q_i dq_i. \quad (4)$$

Интегрирование выражения (4) не столь просто, как в случаях формул (1) или (2), так как каждое перемещение q_i зависит от всех сил Q_j . Мы запишем это как $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_N)$.

Чтобы определить W из соотношения (4), необходимо знать зависимость Q_i от q_1, q_2, \dots, q_N . Далее мы определяем эту зависимость. Пусть Δ_{mn} — перемещение точки n , вызванное единичной (обобщенной) силой, действующей в точке m . Тогда Δ_{nm} — обобщенное перемещение точки m , вызванное единичной силой, действующей в точке n . Из закона Бетти (7.3.10) получаем

$$\Delta_{nm} = \Delta_{mn} \quad (5)$$

Коэффициенты Δ_{mn} называются *коэффициентами податливости*. Соотношение (5) известно как *теорема Максвелла*, и она утверждает, что *коэффициенты податливости симметричны*. Это утверждение — прямое следствие теоремы Бетти.

Предположим, что существует *линейная* зависимость между (обобщенными) перемещениями и (обобщенными) силами. Из этого следует, что

$$q_n = \sum_{m=1}^N \Delta_{nm} Q_m = \Delta_{nm} Q_m. \quad (6)$$

Мы полагаем, что линейная система уравнений (6) может быть разрешена относительно Q_m таким образом, что

$$Q_n = \sum_{m=1}^N \alpha_{nm} q_m. \quad (7)$$

Величины α_{nm} называются *коэффициентами жесткости* или *коэффициентами влияния*. Вновь теорема Бетти (или утверждение о том, что матрица обратная к симметричной симметрична) приводит к тому, что $\alpha_{nm} = \alpha_{mn}$. Заметим, что соотношения (6) и (7) дают

$$\frac{\partial q_n}{\partial Q_m} = \Delta_{nm}, \quad \frac{\partial Q_n}{\partial q_m} = \alpha_{nm}. \quad (8)$$

Соотношения (6) и (7) могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{N1} & \dots & \Delta_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \dots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $[\Delta_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1}$.

Возвращаемся к задаче определения W в выражении (4). Предположим, что силы Q_i консервативны. Тогда их работа может зависеть только от конечного состояния системы, но не от пути, по которому конечное состояние достигнуто. Это означает, что при интегрировании (4) путь интегрирования не является важным. Предположим, что все перемещения пропорциональны одному общему параметру λ :

$$q_n = B_n \lambda, \quad (10)$$

где B_n — множители пропорциональности и $\lambda \in [0, 1]$ — вещественный параметр. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$Q_n = \sum_{m=1}^N \alpha_{nm} B_m \lambda. \quad (11)$$

С использованием формул (10) и (11) соотношение (4) преобразуем к виду

$$dW = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \alpha_{im} B_m \lambda B_i d\lambda, \quad (12)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \alpha_{im} B_i B_m. \quad (13)$$

Окончательно, если мы подставим формулы (7) и (10) в соотношение (13), мы получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i q_i. \quad (14)$$

В структурной механике соотношение (14) называется законом Клапейрона: *Работа, произведенная системой сил, действующих на линейно упругую конструкцию, равна половине произведения конечных амплитуд обобщенных сил и соответствующих перемещений.*

Мы используем соотношение (14) в связи с теоремой Кастильяно.

7.5 Принцип виртуальной работы

Принцип виртуальной работы принадлежит классу дифференциальных вариационных принципов и является основой всех вариационных принципов в теории упругости. В механике он был предложен Бернулли и теперь принимается как *аксиома*, которая справедлива для всех механических систем. Его четкая формулировка, данная Ж.Р. Д'Аламбером (см. [68]), гласит: *в состоянии равновесия механической системы работа всех внешних сил на виртуальных перемещениях (бесконечно малых перемещениях, удовлетворяющих всем кинематическим связям) равна нулю.*

Принцип виртуальной работы важен по следующим причинам ([71]):

- 1) принцип полезен с вычислительной точки зрения;
- 2) предполагается, что принцип остается справедливым при условиях, для которых дифференциальные уравнения не обязательно имеют смысл;
- 3) уравнения, выражающие математическую формулировку принципа виртуальной работы, совпадают со слабой формой дифференциальных уравнений, для которой существует много соответствующих математических теорем.

Принцип виртуальной работы используется в двух различных формах: *принцип виртуальных перемещений* и *принцип виртуальных сил*. Ниже мы анализируем оба принципа.

Далее определим понятие бесконечно малого изменения состояния для упругих тел. Рассмотрим упругое тело, которое находится в равновесии под действием объемных сил \mathbf{f} и поверхностных сил \mathbf{p}_n (рис. 6).

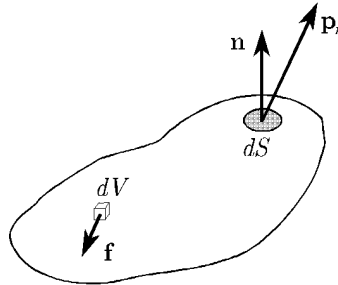


Рис. 6

Мы рассматриваем изменение состояния тела в предположении, что это изменение является *независимым* от \mathbf{f} и \mathbf{p}_n . Пусть $\delta\mathbf{u}$ — изменение вектора перемещения произвольной точки тела, которое мы называем *виртуальным перемещением*. Это поле перемещений предполагается мало зависящим от сил и, в принципе, может никогда не

быть действительным перемещением. Это векторное поле непрерывно дифференцируемо, не зависит от времени и достаточно мало, так что оно не влияет на равновесие сил \mathbf{f} и \mathbf{p}_n .

Поле перемещений $\delta \mathbf{u}$ имеет дополнительное важное свойство: это кинематически допустимое поле. Мы поясним это свойство $\delta \mathbf{u}$. В случае (см. параграф 4.2) *третьей (смешанной) фундаментальной граничной задачи*, в которой вектор напряжений задан на части границы S_p и вектор перемещения на части границы S_u ($S_p \cup S_u = S$), кинематическая допустимость означает, что $\delta \mathbf{u}(x_j) = 0$ для $x_j \in S_u$. Заметим, что мы можем считать $\delta \mathbf{u}$ векторным полем, полученным из \mathbf{u} посредством применения *оператора изохронного варьирования Лагранжа* $\delta(\cdot)$. Когда поле перемещений меняется на $\delta \mathbf{u}$, то тензор деформаций меняется на δE_{ij} , где

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1)$$

Записывая соотношения (1), мы использовали коммутативность (см. [91]) оператора вариаций $\delta(\cdot)$ и оператора частного дифференцирования $\partial/\partial x_i(\cdot)$

$$\delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Виртуальная работа сил \mathbf{f} и \mathbf{p}_n — это работа \mathbf{f} и \mathbf{p}_n на виртуальном перемещении $\delta \mathbf{u}$.

7.6 Принцип виртуальных перемещений

Рассмотрим часть упругого тела, показанного на рис. 7. В деформированном состоянии равновесия результирующая сила, действующая на элемент объема, должна быть равна нулю. Таким образом,

$$d\mathbf{R} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{p}_i) + \mathbf{f} \right] dV = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{p}_i — вектор напряжений на плоскости, нормаль которой — ось \bar{x}_i и dV — объем элемента. Так как

$$\mathbf{p}_i = \sigma_{i1}\mathbf{e}_1 + \sigma_{i2}\mathbf{e}_2 + \sigma_{i3}\mathbf{e}_3, \quad (2)$$

условие $d\mathbf{R} = 0$ приводит к уравнениям равновесия (1.3.10).

Предположим, что точка приложения силы $d\mathbf{R}$ приобретает виртуальное перемещение $\delta \mathbf{u}$. Тогда виртуальная работа записывается как

$$d\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) \delta u_i dV = 0. \quad (3)$$

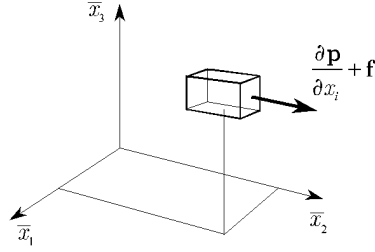


Рис. 7

Используя равенство

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) - \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}, \quad (4)$$

симметричность тензора напряжений и соотношение (7.5.2)

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \delta E_{ij}, \quad (5)$$

после интегрирования уравнения (3) по объему тела V получаем

$$\int \int_V \int \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) dV + \int \int_V \int \delta u_i dV = \int \int_V \int \sigma_{ij} \delta E_{ij} dV. \quad (6)$$

Первый член в левой части может быть преобразован с использованием теоремы Гаусса таким образом, что

$$\int \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \int \int_V \int f_i \delta u_i dV = \int \int_V \int \sigma_{ij} \delta E_{ij} dV. \quad (7)$$

Выражение в левой части — это виртуальная работа внешних сил \mathbf{p}_n и \mathbf{f} , в то время как выражение в правой части — виртуальная работа внутренних сил, т. е. напряжений. Полагая

$$\delta W^0 = \int \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \int \int_V \int f_i \delta u_i dV, \quad \delta W^i = \int \int_V \int \sigma_{ij} \delta E_{ij} dV, \quad (8)$$

можно переписать равенство (7) в виде

$$\delta W^0 = \delta W^i. \quad (9)$$

Если принцип виртуальной работы принимается как *аксиома*, тогда формула (9) является постулатом (вместо (1)). Соотношение (9) называется *принципом виртуальных перемещений* и формулируется следующим образом: *для тела в состоянии равновесия общая виртуальная работа внешних сил (поверхностных и объемных) равна общей*

виртуальной работе внутренних сил для любого поля кинематически допустимых виртуальных перемещений.

Будучи сформулированным в форме (9), принцип виртуальных перемещений справедлив для *всех материалов* (упругих, вязкоупругих, пластичных и т. д.). При рассмотрении упругих материалов виртуальная работа внутренних сил становится (см.(7.2.17)) виртуальным изменением потенциальной энергии тела, т. е.

$$\delta W^i = \delta U. \quad (10)$$

Принцип виртуальных перемещений может быть использован в динамических задачах, если мы заменим f_i на $f_i - \rho_0(\partial^2 u_i / \partial t^2)$. Тогда уравнение (9) остается тем же, а δW^0 принимает вид

$$\delta W^0 = \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \int \int_V \int \left(f_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV. \quad (11)$$

Для упругих материалов соотношение (11) превращается в равенство

$$\int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \int \int_V \int \left(f_i - \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV = \int \int_V \int \sigma_{ij} \delta E_{ij} dV. \quad (12)$$

7.7 Принцип виртуальных сил

Принцип виртуальных сил является дополнительным принципом к принципу виртуальных перемещений. Он также называется *принцип виртуальной дополнительной работы*. В этом принципе определяется виртуальная псевдоработа, которая производится виртуальными внутренними и внешними силами на действительных перемещениях, которые тело имеет в заданных состояниях равновесия. Виртуальные внутренние и внешние силы являются произвольными достаточно малыми полями, которые *не зависят от действительных поверхностных, объемных и внутренних сил (напряжений)*.

Начнем с уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на } S_p, \quad (1)$$

которые удовлетворяются в состоянии равновесия. Определим *виртуальные напряжения и виртуальные поверхностные и объемные силы* $\delta \sigma_{ij}$, δp_i , и δf_i . Поля $\delta \sigma_{ij}$, δp_i , и δf_i предполагаются непрерывно дифференцируемыми и *статически допустимыми*, т. е. поле удовлетворяет равенству $\delta \sigma_{ij} = \delta \sigma_{ji}$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \delta f_i &= 0, \\ \delta \sigma_{ij} n_j &= 0 \quad \text{на } S_p, \quad \delta \sigma_{ij} n_j = \delta p_i \quad \text{на } S_u. \end{aligned} \quad (2)$$

Для случая, когда заданными являются объемные силы, мы считаем $\delta f_i = 0$. Функции δp_i произвольны. Заметим, что компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют условиям совместности Бельтрами–Мичелла и что виртуальные напряжения $\delta\sigma_{ij}$ не удовлетворяют ни одному из таких условий. Вычисляя скалярное произведение уравнений (2) и вектора \mathbf{u} и интегрируя результат по объему V , получаем

$$\int \int_V \int \left(\frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \delta f_i \right) u_i dV = 0. \quad (3)$$

Однако

$$u_i \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i \delta \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij}, \quad (4)$$

так что, подставляя формулы (4) в уравнение (3), получаем

$$\int_S \int u_i \delta p_i dS - \int \int_V \int \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij} dV + \int \int_V \int u_i \delta f_i dV = 0. \quad (5)$$

Записывая формулу (5), мы использовали теорему Гаусса. В формуле (5) слагаемые

$$\delta W_c^0 = \int_S \int u_i \delta p_i dS + \int \int_V \int u_i \delta f_i dV \quad (6)$$

представляют виртуальную (псевдо) работу внешних сил. Заметим также, что в силу граничных условий (2)

$$\int_S \int u_i \delta p_i dS = \int_{S_u} \int u_i \delta p_i dS. \quad (7)$$

Поскольку компоненты виртуальных напряжений $\delta\sigma_{ij}$ симметричны, средний член в формуле (5) может быть преобразован следующим образом:

$$\delta W_c^i = \int \int_V \int \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij} dV = \int \int_V \int E_{ij} \delta \sigma_{ij} dV. \quad (8)$$

Выражение (8) представляет собой (псевдо) виртуальную работу внешних сил. С учетом формул (6) и (8) равенство (5) запишется в виде

$$\delta W_c^i = \delta W_c^0. \quad (9)$$

Соотношение (9) — математическое выражение *принципа виртуальных сил*. В нем утверждается, что *поле перемещений u_i и тензор деформаций E_{ij} , которые удовлетворяют граничным условиям и условиям совместности, соответствуют состоянию равновесия тела, если виртуальные дополнительные работы внутренних и внешних сил равны.*

Заметим, что в случае упругого тела виртуальная дополнительная работа задается формулой (7.2.19) и поэтому

$$\delta U_c = \delta W_c^o. \quad (10)$$

Подчеркнем важную особенность полученных здесь результатов. А именно, сравнивая формулы (7.2.3) и (7.6.10), мы приходим к выводу, что эти соотношения одинаковы. Однако существует фундаментальное различие между формулами (7.2.3) и (7.6.11). Условие (7.2.3) связывает изменение потенциальной энергии с работой внешних сил, произведенной между двумя состояниями равновесия тела. Следовательно, вектор $d\mathbf{u}$, связывающий эти два состояния равновесия, известен. Формула (7.6.10) не является соотношением, справедливым для двух состояний равновесия. Напротив, она *определяет* равновесное положение. Таким образом, вектор $\delta\mathbf{u}$ неизвестен. Мы только знаем, что он удовлетворяет условиям, сформулированным в параграфе 7.5. Значит, если соотношение (7.6.10) выполнено для произвольного $\delta\mathbf{u}$, то состояние есть состояние равновесия. Аналогичные рассуждения справедливы для равенств (7.2.5) и (7.7.10).

7.8 Теоремы о минимуме потенциальной и дополнительной энергии

На основе результатов, полученных выше, можно сформулировать два важных экстремальных принципа теории упругости.

а) Теорема о минимуме потенциальной энергии

Из уравнения (7.6.11) получаем

$$\delta_u(U - W^i) = 0, \quad (1)$$

где оператор $\delta_u(\cdot)$ обозначает вариацию поля перемещений \mathbf{u} , в то время, как \mathbf{p} и \mathbf{f} (будучи заданными) не подвергаются варьированию. С учетом (7.6.7) формула (1) принимает вид

$$\delta_u \left(U - \int_{S_p} p_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV \right) = 0. \quad (2)$$

Если определить *полную потенциальную энергию* (внутренних и внешних сил) как

$$\Pi = U - \int_{S_p} p_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV, \quad (3)$$

то соотношение (1) принимает вид

$$\delta_u \Pi = 0. \quad (4)$$

Равенство (4) утверждает, что функционал Π имеет стационарное значение в классе допустимых (виртуальных) перемещений δu_i . Условие (4) характеризует состояние равновесия упругого тела. При его использовании мы должны подставить уравнения состояния $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(E_{km})$. Таким образом, применяя (7.2.27), мы получаем

$$\begin{aligned} \Pi &= \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \lambda (E_{nn})^2 + \mu E_{ij} E_{ij} \right] dV - \int \int_{S_p} p_i u_i dS - \int \int_V \int f_i u_i dV = \\ &= \int \int_V \int \frac{1}{2} [\lambda (E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 + \mu (E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2)] dV = \\ &= 2\mu (E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2) dV - \int \int_{S_p} p_i u_i dS - \int \int_V \int f_i u_i dV. \end{aligned} \quad (5)$$

Функционал (5) имеет стационарное значение в состоянии равновесия. Далее мы покажем, что функционал Π принимает минимальное значение в положении равновесия. Поступим следующим образом. Пусть $\delta \mathbf{u}$ — допустимое (виртуальное) поле перемещений. Пусть E_{ij} — тензор деформаций в положении равновесия, а $E_{ij} + \delta E_{ij}$ — тензор деформаций в измененном состоянии. Полная потенциальная энергия Π (задаваемая равенством (5)) в измененном состоянии становится равной

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \lambda (E_{nn} + \delta E_{nn})(E_{nn} + \delta E_{nn}) + \mu (E_{ij} + \delta E_{ij}) \times \right. \\ &\times (E_{ij} + \delta E_{ij}) \left. \right] dV - \int \int_{S_p} p_i (u_i + \delta u_i) dS - \int \int_V \int f_i (u_i + \delta u_i) dV. \end{aligned} \quad (6)$$

Группируя члены, получим

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \lambda (E_{nn})^2 + \mu E_{ij} E_{ij} - f_i u_i \right] dV - \int \int_{S_p} p_i u_i dS + \\ &+ \int \int_V \int [(\lambda \delta_{mn} E_{rr} + 2\mu E_{mn}) \delta E_{mn} - f_i \delta u_i] dV - \int \int_{S_p} p_i \delta u_i dS + \\ &+ \int \int_V \int [2\mu \delta E_{mn} \delta E_{mn} + \lambda (\delta E_{rr})(\delta E_{rr})] dV. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя формулы (4), (5) и (7), находим

$$\bar{\Pi} = \Pi + \int \int_V \int [2\mu \delta E_{mn} \delta E_{mn} + \lambda (\delta E_{rr})^2] dV. \quad (8)$$

Так как выражение в квадратных скобках положительно определено ($\lambda > 0, \mu > 0$), то

$$\bar{\Pi} > \Pi. \quad (9)$$

В силу неравенства (9) можно сформулировать следующую *теорему о минимуме потенциальной энергии: из всех полей перемещений, удовлетворяющих граничным условиям, те, которые удовлетворяют условиям равновесия, имеют минимальную потенциальную энергию Π .*

б) *Теорема о минимуме дополнительной энергии*

Из уравнения (7.7.10) получаем

$$\delta_F(U_c - W_c^0) = 0. \quad (10)$$

В формуле (10) оператор $\delta_F(\cdot)$ обозначает вариацию поля сил σ_{ij} , p_i , и f_i , в то время как перемещения u_i остаются фиксированными. Если определить *полную дополнительную энергию* как

$$\Pi_c = U_c - \int_{S_u} \int u_i p_i dS - \int_V \int f_i u_i dV, \quad (11)$$

то равенство (10) принимает вид

$$\delta_F \Pi_c = 0. \quad (12)$$

Для линейно упругого тела с учетом соотношений (7.2.19) и (7.2.25) равенство (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \int_V \int \frac{1}{2E} [(1 + \nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu(\sigma_{rr})^2] dV - \\ &\quad - \int_{S_u} \int u_i p_i dS - \int_V \int f_i u_i dV = \\ &= \int_V \int \frac{1}{2E} [(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + \\ &\quad + 2(1 + \nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)] - \int_{S_u} \int u_i p_i dS - \int_V \int f_i u_i dV. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие (12) означает, что энергия Π_c , заданная с помощью соотношения (13), стационарна в состоянии равновесия. Пусть $\delta\sigma_{ij}$, δp_i , и δf_i — вариации поля сил. Определим далее $\bar{\Pi}_c = \Pi(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}, p_i + \delta p_i, f_i + \delta f_i)$ в следующем виде:

$$\bar{\Pi}_c = \int_V \int \frac{1}{2E} [(1 + \nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu(\sigma_{rr})^2] dV -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_u} \int u_i p_i dS - \int_V \int f_i u_i dV - \int_{S_u} \int u_i \delta p_i dS - \int_V \int \delta f_i u_i dV + \\
& + \int_V \int \frac{1}{E} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{mm}) \delta_{ij} \right] \delta \sigma_{ij} dV + \\
& + \int_V \int \frac{1}{2E} [(1+\nu) \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} - \nu (\delta \sigma_{rr})^2] dV. \quad (14)
\end{aligned}$$

Заметим, что третий и четвертый члены в формуле (14) это просто $\delta_F \Pi_c = 0$, так что

$$\bar{\Pi}_c - \Pi_c = \int_V \int \frac{1}{2E} [(1+\nu) \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} - \nu (\delta \sigma_{rr})^2] dV \geq 0. \quad (15)$$

Знак равенства в формуле (15) имеет место только при $\delta \sigma_{ij} = 0$. Поэтому можно сформулировать следующую *теорему о минимуме дополнительной энергии*: *дополнительная энергия Π_c имеет минимум, если тензор напряжений σ_{ij} удовлетворяет условиям равновесия и вариации поля сил $\delta \sigma_{ij}$, δp_i и δf_i удовлетворяют соотношению (7.7.2).*

Заметим, что условия (7.2.2) используются посредством $\delta_F \Pi_c = 0$ при выводе формулы (15).

Теперь рассмотрим два примера для вариационных принципов, сформулированных в этом параграфе. Рассмотрим плоское напряженное состояние (см. (6.1.15)). Тогда формула (13) запишется в виде

$$\begin{aligned}
\Pi_c = \frac{1}{2E} \int_V \int [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu \sigma_{11} \sigma_{22} + 2(1+\nu) \sigma_{12}^2] dV - \\
- \int_{S_u} \int u_i p_i dS - \int_V \int f_i u_i dV. \quad (16)
\end{aligned}$$

В качестве следующего примера рассмотрим пластину единичной толщины. Предположим, что объемная сила равна нулю и что вектор напряжений задан на границы пластины ($S = S_p$). Если определить функцию напряжений Φ формулой (6.2.4) при $V = 0$, то мы получим

$$\begin{aligned}
\Pi_c = \frac{1}{2E} \int_A \int \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \right. \\
\left. + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dA, \quad (17)
\end{aligned}$$

где A — площадь срединной плоскости B . Граничные условия на C таковы (см. (6.2.9)):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = - \int_0^S \bar{p}_2(u) du = \psi_1(S) + C_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \int_0^S \bar{p}_1(u) du = \psi_2(S) + C_2, \quad (18)$$

где C — граница области B (см. рис. 1 главы 6).

7.9 Теоремы Кастильяно

Теперь мы рассмотрим две важные теоремы строительной механики. Они следуют из результатов параграфа 7.8.

Рассмотрим выражение (7.8.5) для случая, когда объемные силы равны нулю и существуют только сосредоточенные силы, действующие на границе тела. Тогда полная потенциальная энергия равна

$$\Pi = \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \lambda (E_{nn})^2 + \mu E_{ij} E_{ij} \right] dV - \sum_{i=1}^N Q_i q_i, \quad (1)$$

где Q_i — обобщенные силы и q_i — обобщенные перемещения точек приложения сил Q_i . Мы полагаем, что деформации E_{ij} могут быть выражены через q_i , так что равенство (1) принимает вид

$$\Pi = U(q_i) - \sum_{i=1}^N Q_i q_i. \quad (2)$$

Условие минимума потенциальной энергии $\delta_u \Pi = 0$ (см. (7.8.4)) запишется в виде

$$\delta_u \Pi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (3)$$

Подставляя соотношение (2) в формулу (3) и учитывая произвольность δq_i , получаем

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (4)$$

Результат (4) известен как *первая теорема Кастильяно: в линейно упругих системах (обобщенная сила линейно зависит от обобщенного перемещения) частные производные потенциальной энергии внутренних сил (энергия напряжений) по отношению к обобщенным перемещениям равны обобщенным силам.*

Вновь предположим, что объемные силы равны нулю и что поверхностные силы являются сосредоточенными и действуют в $i = 1, 2, \dots, N$ точках. В этом случае выражение (7.8.13) принимает вид

$$\Pi_c = \int \int_V \int \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \nu (\sigma_{rr})^2] dV - \sum_{i=1}^N q_i Q_i. \quad (5)$$

Если выразить напряжения через обобщенные силы Q_i и подставить их в равенство (5), мы получаем

$$\Pi_c = U_c(Q_i) - \sum_{i=1}^N q_i Q_i. \quad (6)$$

Условие (7.8.12) того, что Π_c минимально, записывается в виде

$$\delta_F \Pi_c = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U_c}{\partial Q_i} - q_i \right) \delta Q_i = 0. \quad (7)$$

Поскольку δQ_i произвольны, отсюда следует, что

$$q_i = \frac{\partial U_c}{\partial Q_i}. \quad (8)$$

Выражение (8) является *второй теоремой Кастильяно: в линейной упругой системе частные производные энергии деформации по отношению к внешним обобщенным силам равны перемещениям, соответствующим этим силам.*

В случае, когда $q_i = 0$, выражение известно как закон Менабра (Menabrea).

7.10 Вариационные принципы Ху-Вашизу и Рейсснера

В процедурах метода конечных элементов используются другие вариационные принципы. Мы рассмотрим два таких принципа.

1. Вариационный принцип Ху-Вашизу

Обобщенный вариационный принцип, в котором три поля u_i , E_{ij} и σ_{ij} подвергаются варьированию, был сформулирован Вашизу [93]. Рассмотрим смешанную граничную задачу, когда вектор напряжений задан на части S_p границы, а перемещения заданы на части границы S_u (см. (4.2.5)):

$$(\mathbf{p}_n)_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i \quad \text{на } S_p, \quad u_i(x_i) = \hat{u}_i \quad \text{на } S_u. \quad (1)$$

Рассмотрим следующий функционал:

$$\begin{aligned} I_W(u_i, E_{ij}, \sigma_{ij}) = & \int \int_V \int [u(E_{ij}) - f_i u_i] dV - \\ & - \int \int_V \int \sigma_{ij} \left[E_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \\ & - \int \int_{S_p} \hat{p}_i u_i dS - \int \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \hat{u}_i) dS. \end{aligned} \quad (2)$$

В формуле (2) мы рассматриваем u_i , E_{ij} , и σ_{ij} как *независимые поля*. Следовательно, вариации δu_i , δE_{ij} , и $\delta \sigma_{ij}$ независимы. Кроме того, $u(E_{ij})$ задается формулой (7.2.27), т. е.

$$u = \frac{1}{2} \lambda (E_{nn})^2 + \mu E_{ij} E_{ij}. \quad (3)$$

Условие, что первая вариация функционала (2) равна нулю, записывается в виде

$$\begin{aligned}
\delta I_W = & \int \int_V \int \left[\frac{\partial u}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} - f_i \delta u_i \right] dV - \\
& - \int \int_V \int \delta \sigma_{ij} \left[E_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \\
& - \int \int_V \int \sigma_{ij} \left[\delta E_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \\
& - \int \int_{S_p} \hat{p}_i \delta u_i dS - \int \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (u_i - \hat{u}_i) dS = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Группируя члены в формуле (4), получаем

$$\begin{aligned}
& \int \int_V \int \left[\frac{\partial u}{\partial E_{ij}} - \sigma_{ij} \right] \delta E_{ij} dV - \int \int_V \int \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right] dV - \\
& - \int \int_V \int \delta \sigma_{ij} \left[E_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \\
& - \int \int_{S_p} (\hat{p}_i - p_i) \delta u_i dS - \int \int_{S_u} \delta p_i (u_i - \hat{u}_i) dS = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial E_{ij}} - \sigma_{ij} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad E_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \text{ в } V \tag{6}$$

и

$$\sigma_{ij} n_j - \hat{p}_i = 0 \text{ на } S_p, \quad u_i - \hat{u}_i = 0 \text{ на } S_u. \tag{7}$$

Из первой формулы (6) мы заключаем, что $\partial u / \partial E_{ij} = \sigma_{ij}$, а из равенств (3) следует, что первое соотношение (6) представляют собой закон Гука, второе — уравнения равновесия, а третье суть соотношения “деформации–перемещения”, в то время как формулы (7) дают граничные условия. На основе этого можно сформулировать следующую теорему: *функционал Ху-Вашизу (2) стационарен на решении смешанной граничной задачи линейной теории упругости.*

Заметим, что вариационный принцип $\delta I_W = 0$ — это просто *стационарный принцип* и что он не имеет экстремальных свойств.

2. Вариационный принцип Рейсснера

Рейсснер (1950) сформулировал вариационный принцип для двух независимых полей. Вновь рассматриваем смешанную граничную за-

дачу (1) и в связи с ней функционал

$$I_R(u_i, \sigma_{ij}) = \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - u_c(\sigma_{ij}) - f_i u_i \right] dV - \int \int_{S_p} \hat{p}_i u_i dS - \int \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \hat{u}_i) dS. \quad (8)$$

В формуле (8) u_c плотность дополнительной энергии задается соотношением (7.2.24), т. е.

$$u_c = \frac{1}{2E} [(1 + \nu) \sigma_{mn} \sigma_{mn} - \nu \Theta^2]. \quad (9)$$

Вычисляя первую вариацию функционала (9) и рассматривая δu_i и $\delta \sigma_{ij}$ независимыми, получаем

$$\delta I_R(u_i, \sigma_{ij}) = \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_c(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} - f_i \delta u_i \right] dV - \int \int_{S_p} \hat{p}_i \delta u_i dS - \int \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (u_i - \hat{u}_i) dS = 0. \quad (10)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \delta \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_c}{\partial \sigma_{ij}} = E_{ij} \quad (11)$$

как результат симметрии $\delta \sigma_{ij}$ и δE_{ij} и определения u_c . Использование соотношений (11) и теоремы Гаусса в формуле (10) дает

$$\frac{\partial u_c}{\partial \sigma_{ij}} - E_{ij} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{в } V \quad (12)$$

и

$$\sigma_{ij} n_j - \hat{p}_i = 0 \quad \text{на } S_p, \quad u_i - \hat{u}_i = 0 \quad \text{на } S_u. \quad (13)$$

На основании соотношений (12) мы можем сформулировать следующую теорему: *функционал Рейсснера (8) стационарен, т. е. $\delta I_R = 0$ на решении смешанной граничной задачи линейной теории упругости.*

Как вариационный принцип Ху-Вашизу, так и принцип Рейсснера имеют свои аналоги в нелинейной теории упругости (см. [25]).

3. Операторная форма вариационных принципов

Сделаем еще одно замечание относительно вариационных принципов, сформулированных в этой главе. Эти принципы при использовании в методе конечных элементов записываются в слегка отличной форме, которая следует из операторного представления основных уравнений теории упругости. Чтобы получить эту форму, мы, во-первых, запишем уравнения теории упругости в операторной форме.

Пусть $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{E} , \mathbf{u} и \mathbf{f} — векторы напряжений, деформаций, перемещения и объемных сил определяются как

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]^T, \quad \mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{23}, E_{13}]^T, \\ \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]^T, \quad (14)$$

где $[\cdot]^T$ обозначает транспонирование $[\cdot]$. Пусть \mathbf{C} — матрица упругости, определенная ранее в параграфе 3.3 (см. (3.3.42)). Для изотропных материалов она имеет форму

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Далее, мы вводим матричные операторы, определенные как

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_3 & D_2 \\ D_3 & 0 & D_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $D_i = \partial(\cdot)/\partial x_i$. Затем, пусть D_{ij} обозначает дифференциальный оператор

$$D_{ij}(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot). \quad (17)$$

Теперь условия совместности ((2.7.13) с (2.9.4)) могут быть записаны в компактной форме, если мы определим матричный дифференциальный оператор \mathbf{B} посредством формулы

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} D_{22} & D_{11} & 0 & -D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & D_{33} & D_{22} & 0 & -D_{23} & 0 \\ D_{33} & 0 & D_{11} & 0 & 0 & -D_{13} \\ D_{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}D_{13} & \frac{1}{2}D_{11} & -\frac{1}{2}D_{12} \\ 0 & D_{13} & 0 & -\frac{1}{2}D_{23} & -\frac{1}{2}D_{12} & \frac{1}{2}D_{11} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}D_{12} & \frac{1}{2}D_{33} & -\frac{1}{2}D_{12} & -\frac{1}{2}D_{23} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

С помощью формул (13)–(18) мы можем сформулировать основные уравнения теории упругости следующим образом:

1. Уравнения равновесия

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = 0 . \quad (19)$$

2. Соотношения “деформация–перемещение”

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{u} . \quad (20)$$

3. Закон Гука и обратный закон Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} .$$

4. Граничные условия

$$\mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{p}} \quad \text{на } S_p, \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{на } S_u . \quad (21)$$

5. Условия совместности

$$\mathbf{B} \mathbf{E} = 0 . \quad (22)$$

Заметим, что тензор деформаций, определяемый формулой (20), тождественно удовлетворяет условиям совместности (22), так как

$$\mathbf{B} \mathbf{A} = 0 . \quad (23)$$

В случае, когда объемные силы равны нулю, условия совместности Бельтрами–Митчелла (3.7.21) имеют форму

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} = 0 . \quad (24)$$

Вводя оператор \mathbf{L} по формуле

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{13} \end{bmatrix} , \quad (25)$$

запишем уравнение (23) в виде

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \mathbf{L} \Theta = 0 . \quad (26)$$

В обозначениях (13)–(26) вариационные принципы, определенные в этой главе, записываются в следующем виде.

1. Теорема о минимуме потенциальной энергии:

$$\delta_u \Pi = 0 , \quad (27)$$

где

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int \int_V \int (\mathbf{A}\mathbf{u})^T \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{u}) dV - \int \int_V \int \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int \int_{S_p} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}} dS . \quad (28)$$

2. Теорема о минимуме дополнительной энергии:

$$\delta_F \Pi_c = 0 , \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}, \mathbf{f}) = & -\frac{1}{2} \int \int_V \int \boldsymbol{\sigma}^T [\mathbf{C}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV - \\ & - \int \int_V \int \mathbf{f}^T \mathbf{u} dV + \int \int_{S_p} \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S)^T \boldsymbol{\sigma} dS . \end{aligned} \quad (30)$$

3. Вариационный принцип Ху-Вашизу:

$$\delta I_W = 0 , \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} I_W(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\sigma}) = & \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \right] dV - \int \int_V \int \boldsymbol{\sigma}^T [\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{u}] dV - \\ & - \int \int_{S_p} \mathbf{u} \hat{\mathbf{p}} dS - \int \int_{S_u} [\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}]^T (\mathbf{A}_S)^T \boldsymbol{\sigma} dS . \end{aligned} \quad (32)$$

4. Вариационный принцип Рейсснера:

$$\delta I_R = 0 , \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} I_R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = & \int \int_V \int [(\mathbf{A}\mathbf{u})\boldsymbol{\sigma}^T - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{f}\mathbf{u}^T] dV - \\ & - \int \int_{S_p} \hat{\mathbf{p}}\mathbf{u}^T dS - \int \int_{S_u} \mathbf{A}_S \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) dS . \end{aligned} \quad (34)$$

Детали относительно вариационных принципов, представленных здесь, и их возможных обобщений можно найти в [75, 76] и [33].

Задачи

1. Показать, что в случае кручения призматического стержня дополнительная энергия (7.8.13) имеет форму

$$П_c = \frac{1+\nu}{2E} \int \int_V (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) dV - \int_A \int (p_2 u_2 + p_3 u_3) dA,$$

где A — площадь поперечного сечения стержня. Кроме того, используя формулы (5.5.31), показать, что потенциальная энергия $П_c$ может быть записана в виде

$$П_c = \frac{\mu \bar{\theta}^2 l}{4} \int_A \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 + 2 \left(x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \right] dA,$$

где l — длина стержня.

2. Показать, что потенциальная энергия $П_c$, полученная в задаче 1, может быть записана как

$$П_c = \frac{\mu \bar{\theta}^2 l}{2} \int_A \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 - 4\Psi \right] dA. \quad (a)$$

Использовать метод Ритца (см. параграф 4.6) для получения аналитического приближения для функции напряжений в случае квадратного поперечного сечения (см. (5.5.9)). Принять аппроксимирующую функцию Ψ в виде

$$\Psi = c(x_2^2 - a^2)(x_3^2 - a^2), \quad (б)$$

где c — постоянная. Затем подставить формулу (б) в выражение a и минимизировать результат по c . Из условия $dП_c/dc = 0$ получить $c = 5/(8a^2)$. Приближенное значение для момента, которое дает формула (5.5.37), равно

$$M = 2\mu \bar{\theta} \int_A \int \Psi dA.$$

Учитывая выражение (б), получаем

$$M = \frac{20}{9} \mu \bar{\theta} a^4 = 0.1388(2a)^4 \mu \bar{\theta}. \quad (в)$$

Результат хорошо согласуется с точным решением ((5.5.106) при $a = b$). Показать, что более сложная аппроксимирующая функция

$$\Psi = (x_2^2 - a^2)(x_3^2 - a^2)[c_0 + c_1(x_1^2 + x_2^2)], \quad (г)$$

где c_0 и c_1 постоянны, и условия $dП_c/dc_0 = 0$, $dП_c/dc_1 = 0$ приводят к более точному решению.

3. Используя теорему Бетти (7.3.8) и две частные системы сил

$$f_i^I = 0, \quad \sigma_{ij}^I = \delta_{ij}, \quad p_i^I = n_i, \quad u_i^I;$$

$$f_i^{II} = f_i, \quad \sigma_{ij}^{II} = \sigma_{ij}, \quad p_i^{II} = p_i, \quad u_i^{II} = u_i,$$

показать, что

$$\int_S \int n_i u_i dS = \int_S \int p_i u_i^I dS + \int_V \int f_i u_i^I dV.$$

4. В задаче 3 использовать формулы (3.4.14) и показать, что для системы сил I имеем

$$E_{ij}^I = \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij}, \quad u_i^I = \frac{1-2\nu}{E} x_i.$$

Используя этот результат и теорему Гаусса, показать, что изменение объема ΔV упругого тела под действием поверхностных сил p_i и объемных сил f_i равно (см. [86]):

$$\Delta V = \int_V \int e_V dV = \frac{1-2\nu}{E} \left(\int_S \int p_i x_i dS + \int_V \int f_i x_i dV \right).$$

5. Два упругих стержня длины L поперечного сечения A , сделанные из материала с модулем упругости E , соединены шарнирами в точках B, C и D. В точке C приложена сосредоточенная сила F (рис. 8).

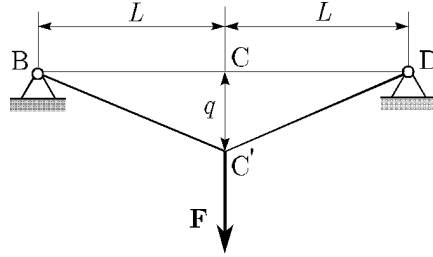


Рис. 8

Показать, что:

а) Энергия деформации системы (два стержня длины L) равна

$$U = 2 \frac{1}{2} \int_V \int \sigma \epsilon dV = \int_V \int \int \frac{F}{A} \frac{\Delta}{L} dV =$$

$$= \int_0^L \left[\int_A \int E \left(\frac{\Delta}{L} \right)^2 dA \right] dz = \frac{EA \Delta^2}{L}. \quad (a)$$

- б) Удлинение Δ стержня и вертикальный прогиб срединной точки C , обозначенный на рисунке через q , связаны соотношением

$$\Delta = \sqrt{L^2 + q^2} - L ,$$

так что

$$\Delta = \frac{q^2}{2L} + \dots \quad (б)$$

- в) Комбинируя формулы *а* и *б*, доказать, что

$$U = \frac{EAq^4}{4L^2} ,$$

и, таким образом, первая теорема Кастильяно (7.9.4) приводит к выражению

$$F = \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{EAq^3}{L^3} . \quad (б)$$

Результат *в* означает, что в упругой системе соотношение “сила–перемещение” может быть нелинейно даже в случае, когда связь “напряжение–деформация” (уравнения состояния) линейна.

6. Рассмотреть функционал (7.8.5) для случая, когда граница свободна от напряжений. Показать, что функционал может быть записан в форме

$$\begin{aligned} \Pi &= \int \int_V \int \left[\frac{1}{2} \lambda (E_{nn})^2 + \mu E_{ij} E_{ij} - f_i u_i \right] dV = \\ &= \int \int_V \int \left[\frac{\mu}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\lambda}{4} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + f_i u_i \right] dV = \\ &= \int \int_V \int L \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV. \end{aligned} \quad (а)$$

- а) Записать уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала (а), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 , \quad (б)$$

и показать, что уравнения (б) согласуются с уравнениями Ламе (4.1.8), т. е.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \nabla^2 u_i + f_i = 0 . \quad (в)$$

Глава 8

Элементарная теория пластин

8.1 Введение

Как мы заметили ранее, плоские задачи теории упругости описывают приближенно поведение тонкого упругого тела (см. параграф 6.1). Теория пластин является также приближением к трехмерным задачам теории упругости. Пластина представляет собой приближение трехмерного упругого тела, когда одно измерение тела намного меньше, чем два других. Плоскость, разделяющая толщину пластины пополам, называется *срединной плоскостью*. Тензор напряжений и вектор перемещений в теории пластин выражаются как функции точек срединной плоскости. На самом деле можно принять следующее определение: пластина — это упругое тело (неважно какой толщины), для которого тензор напряжений и вектор перемещений являются функциями точек, расположенных лишь на одной плоскости (называемой срединной плоскостью) тела.

Пластины имеют широкое применение в технике. Мы упомянем бетонные и железобетонные пластины в строительной механике, в судостроении, автомобилестроении и т. д.

В этой главе мы представляем сначала нелинейную теорию пластин, сформулированную фон Карманом [60]. Затем мы обсуждаем обобщение классической линейной теории пластин, которая включает в себя влияние сдвиговых напряжений на деформацию пластины. Рассматривая нагрузку, мы предполагаем, что пластина нагружена произвольной системой сил с ненулевыми компонентами как в направлении, перпендикулярном срединной плоскости, так и в направлении срединной плоскости.

8.2 Основные уравнения теории пластин фон Кармана

Рассмотрим тонкое тело (пластину), показанное на рис. 1. Пусть длины сторон пластины равны a и b , а ее толщина равна h . Считаем, что $h \ll a$ и $h \ll b$. Пусть оси прямоугольной декартовой системы координат \bar{x}_i ориентированы таким образом, что плоскость \bar{x}_1, \bar{x}_2 совпадает со срединной плоскостью пластины. Начало координат помещается в углу пластины так, что срединная плоскость определяется следующим образом: $0 \leq X_1 \leq a, 0 \leq X_2 \leq b$.

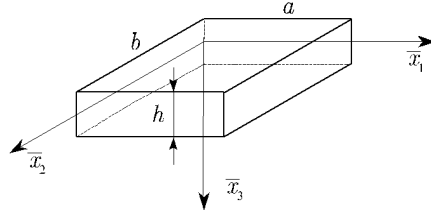


Рис. 1

Положим, что пластина нагружена силами и моментами на краях и равномерно распределенными силами на внешней поверхности $X_3 = -h/2$. Пусть u_i — компоненты вектора перемещений. Основным предположением теории пластин фон Кармана является то, что перемещения u_1 и u_2 малы по сравнению с перемещениями u_3 . Также частные производные от u_1 и u_2 по X_1 и X_2 малы по сравнению с частными производными от u_3 по X_1 и X_2 . Из этого предположения и из $x_1 = X_1 + u_1$, $x_2 = X_2 + u_2$ следует, что производные по X_1 и X_2 можно заменить на производные по x_1 и x_2 . Таким образом, тензор деформаций Лагранжа-Грина для точки срединной поверхности можно записать в виде (см. (2.2.16))

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, & \bar{E}_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2, \\ \bar{E}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

В формулах (1) мы пренебрегли всеми нелинейными членами, кроме членов, которые содержат перемещение u_3 и его производные. Из выражений (1) следует, что

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{E}_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}. \quad (2)$$

Левая часть в формуле (2) — уравнение совместности для линейного тензора деформаций (см. (2.7.13)). В правой части мы не получим нуль, так как \bar{E}_{ij} — компоненты нелинейного тензора деформаций. Далее анализ основывается на следующих предположениях (гипотезы Кирхгофа-Лява):

1) прямолинейный элемент, перпендикулярный к срединной плоскости до деформации, остается прямолинейным и перпендикулярным к срединной поверхности, в которую деформируется срединная плоскость. Также длина элемента до и после деформации остается неизменной;

2) точки, равноудаленные от срединной плоскости, не влияют друг на друга, т. е. нет компонент напряжения в направлении по нормали к ней.

Первая гипотеза эквивалентна гипотезе Бернулли–Мариотта в теории стержней. Она носит геометрический характер. Вторая гипотеза может быть выражена в виде

$$\sigma_{33} = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что условие (3) не удовлетворяется точно, если пластина нагружена распределенными силами, нормальными к срединной плоскости.

Из предположения, что пластина тонкая, следует, что компоненты вектора перемещений u_3 для двух произвольных точек N и M (рис. 2) одинаковы, т. е.

$$u_{3N} = u_{3M} = W(x_1, x_2). \quad (4)$$

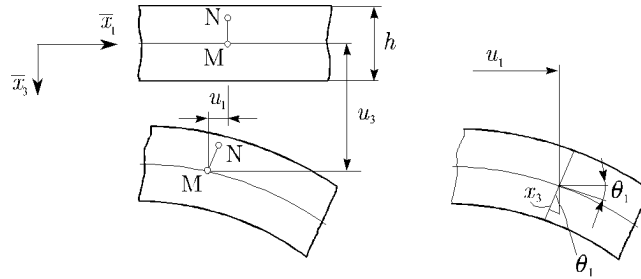


Рис. 2

Используя предположение (3) в законе Гука (см. (6.1.19)), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{E}_{11} + \nu\bar{E}_{22}), & \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{E}_{22} + \nu\bar{E}_{11}), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu}\bar{E}_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из рис. 3 следует, что частные производные $\partial W/\partial x_1$ и $\partial W/\partial x_2$ определяют два угла θ_1 и θ_2 через соотношения

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1} \approx \theta_1, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2} \approx \theta_2. \quad (6)$$

Компоненты вектора перемещения для точки N, находящейся на расстоянии $x_3 \in [-h/2, h/2]$ от срединной плоскости, можно получить как сумму вектора перемещений точки срединной плоскости и дополнительного вектора перемещения. Компоненты этого дополнительного вектора перемещения (см. рис. 3)

$$\bar{u}_1 = -\theta_1 x_3, \quad \bar{u}_2 = -\theta_2 x_3. \quad (7)$$

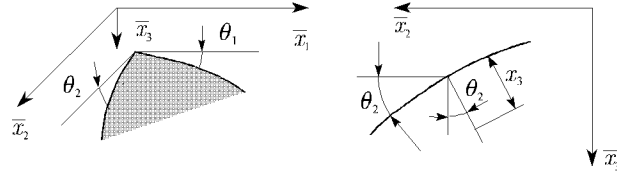


Рис. 3

Из формул (7) следует, что компонентами тензора деформаций в точке на расстоянии x_3 от срединной плоскости являются величины

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11}^z &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} x_3, & \bar{E}_{22}^z &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} x_3, \\ \bar{E}_{12}^z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} x_3, \end{aligned} \quad (8)$$

где $u_i = u_i(x_1, x_2, 0)$.

Найдем теперь главный вектор сил и главный момент сил, действующих в поперечном сечении при контактном взаимодействии. Используя обозначения из рис. 4, находим

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, & M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3, \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, & T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3, \\ T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3, & S_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3. \end{aligned} \quad (9)$$

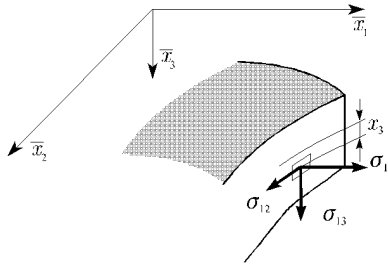


Рис. 4

Величины (9) определяют усилие \mathbf{F} и момент \mathbf{M} , отнесенные к единице длины срединной поверхности пластины (в деформированном или недеформированном состоянии, так как u_1 и u_2 малы). Моменты M_1 и M_2 — изгибающие моменты, а M_{12} — крутящий момент. Подставляя

соотношения (5) и (8) в формулы (9), получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right), & T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\bar{E}_{11} + \nu \bar{E}_{22}), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right), & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\bar{E}_{22} + \nu \bar{E}_{11}), \\ M_{12} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}, & S_{12} &= \frac{Eh}{1+\nu} \bar{E}_{12}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11)$$

— жесткость пластины. Из рис. 4 мы заключаем, что величины, определенные выражениями (10), положительны, когда они имеют направления, показанные на рис. 5. Мы также показали на рис. 5 поперечные или перерезывающие усилия:

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3. \quad (12)$$

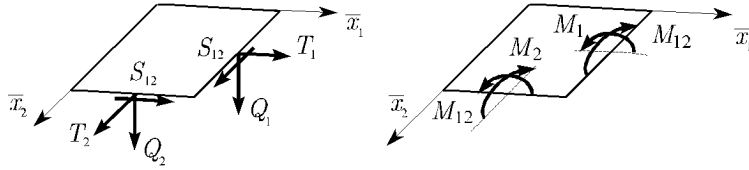


Рис. 5

Усилия Q_1 и Q_2 не являются переменными состояния (так как мы не задавали распределение σ_{13} и σ_{23} по толщине пластины). Усилия Q_1 и Q_2 должны определяться из уравнений равновесия. Возможно допустить некоторое распределение для σ_{13} и σ_{23} (например, параболическое, как в элементарной теории стержней) и затем определить усилия Q_1 и Q_2 через выражения типа (9). Однако в этом случае мы нарушили бы предположение (1) (т. е. эквивалент гипотезы о том, что плоское до деформации сечение остается плоским). Другая возможность заключается в том, чтобы опустить гипотезу 1. Тогда усилия Q_1 и Q_2 станут переменными состояния.

Проанализируем теперь условия равновесия для элемента пластины со сторонами (в недеформированном состоянии) dX_1 , dX_2 , показанного на рис. 6.

Так как мы взяли приближение $x_1 = X_1$ и $x_2 = X_2$, следовательно, $dX_1 = dx_1$, $dX_2 = dx_2$. Сумма проекций всех сил на направление \bar{x}_1

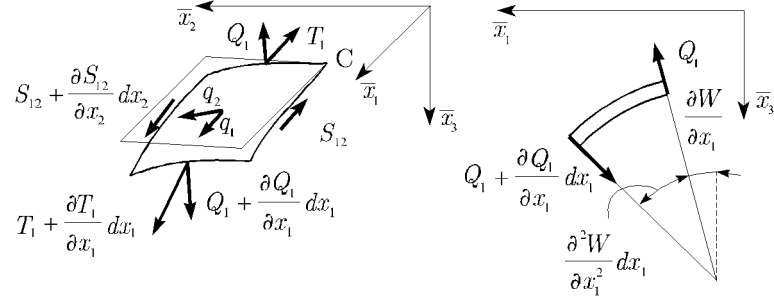


Рис. 6

равна

$$\begin{aligned}
 & \left(S_{12} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \cos \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right) - S_{12} dx_1 \cos \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) + \\
 & + \left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_1} dx_1 \right) \cos \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right) dx_2 - T_1 \cos \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dx_2 - \\
 & - Q_1 dx_2 \sin \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) - \left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \sin \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) + \\
 & + q_1 dx_1 dx_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично можно записать сумму сил на направление \bar{x}_2 . Разделив на $dx_1 dx_2$ и пренебрегая величинами высшего порядка, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} - Q_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + q_1 &= 0, \\
 \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} - Q_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \frac{\partial W}{\partial x_2} \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где q_1 и q_2 — компоненты распределенных сил в направлениях \bar{x}_1 и \bar{x}_2 .

Найдем теперь сумму проекций всех сил на направление \bar{x}_3 . Заметим, что в деформированном состоянии угол между силами $T_1 dx_2$ и $[T_1 + (\partial T_1 / \partial x_1) dx_1] dx_2$ равен $(\partial^2 W / \partial x_1^2) dx_1$. Проекция этих двух сил на направление \bar{x}_3 , включая члены второго порядка, представляется в виде $T_1 (\partial^2 W / \partial x_1^2) dx_1 dx_2 + (\partial T_1 / \partial x_1) (\partial W / \partial x_1) dx_1 dx_2$. Подобным образом силы $T_2 dx_1$ и $[T_2 + (\partial T_2 / \partial x_2) dx_2] dx_1$ имеют проекцию $T_2 (\partial^2 W / \partial x_2^2) dx_1 dx_2 + (\partial T_2 / \partial x_2) (\partial W / \partial x_2) dx_1 dx_2$ на ось \bar{x}_3 . Угол между силами $S_{12} dx_1$ и $S_{12} (\partial^2 W / \partial x_1 \partial x_2) dx_1 dx_2$ равен $(\partial^2 W / \partial x_1 \partial x_2) dx_2$, так что их суммарная проекция на ось \bar{x}_3 равна $S_{12} (\partial^2 W / \partial x_1 \partial x_2) dx_1 dx_2 + (\partial S_{12} / \partial x_1) (\partial W / \partial x_2) dx_1 dx_2$. Такую же проекцию имеют силы S_{12} , которые действуют на стороны длиной dx_2 . Наконец, силы $Q_1 dx_1$ и $[Q_1 + (\partial Q_1 / \partial x_1) dx_1] dx_1$ имеют проекцию $(\partial Q_1 / \partial x_1) dx_1 dx_2$, а проекция сил $Q_2 dx_1$ и $[Q_2 + (\partial Q_2 / \partial x_2) dx_2] dx_1$ равна $(\partial Q_2 / \partial x_2) dx_1 dx_2$. Прибавляя к

этим силам проекцию распределенных сил и пренебрегая членами высших порядков, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + T_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \\ + 2S_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial X_1 \partial X_2} + q_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial W}{\partial x_2} + q_3 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Сумма всех моментов приводит к уравнениям

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_2 = 0. \quad (16)$$

Здесь мы воспользовались соглашением о знаках, представленном на рис. 5.

Теперь мы имеем полную систему уравнений. А именно, уравнения равновесия (14)–(16) вместе с уравнениями состояния (10) и геометрическим условием (1) можно использовать для определения: компонент сил T_1 , T_2 , S_{12} , Q_1 , Q_2 и моментов M_1 , M_2 , M_{12} , компонент тензора деформаций \bar{E}_{11} , \bar{E}_{22} , \bar{E}_{12} и компонент вектора перемещений u_1 , u_2 , W . Компоненты тензора деформаций должны удовлетворять условию (2).

Продолжим решать упрощенную систему уравнений. Допустим, что $q_1 = q_2 = 0$. Далее, мы предположим, что величины $Q_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_1}$, $Q_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}$ и $\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \frac{\partial W}{\partial x_2}$ настолько малы, что мы можем ими пренебречь. Тогда уравнения (14) принимают вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = 0. \quad (17)$$

При введении “функции усилий” $\Phi(x_1, x_2)$ с помощью соотношений

$$T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad S_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (18)$$

уравнения (17) тождественно удовлетворяются. Затем разрешим формулы (10) относительно \bar{E}_{ij} и подставим результат в формулы (18). Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= \frac{1}{Eh} (T_1 - \nu T_2) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right), \\ \bar{E}_{22} &= \frac{1}{Eh} (T_2 - \nu T_1) = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right), \\ \bar{E}_{12} &= \frac{1 + \nu}{Eh} S_{12} = -\frac{1 + \nu}{Eh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом соотношений (19) уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}. \quad (20)$$

Остается удовлетворить уравнениям (15) и (16). Если мы определим Q_1 и Q_2 через производные от M_1 , M_2 и M_{12} и в результате подставим формулы (10), то получим

$$Q_1 = -D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right), \quad Q_2 = -D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right). \quad (21)$$

Наконец, подставляя формулы (21) и (18) в уравнение (15), получаем

$$D \nabla^4 W = q_3 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (22)$$

Уравнения (20) и (22) называются уравнениями фон Кармана. Они были выведены им в 1910 году. Вывод уравнений из трехмерной теории упругости с помощью асимптотического метода, так же как и доказательство существования решения, представлены в [36].

В уравнениях (20) и (22) бигармонический оператор равен

$$\nabla^4(\cdot) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}(\cdot) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(\cdot) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}(\cdot). \quad (23)$$

Часто в приложениях система (20), (22) используется в том случае, когда компонента вектора перемещений W мала и силы в плоскости пластины отсутствуют ($T_1 = T_2 = S_{12} = 0$). Решение уравнения (20) берется в виде $\Phi = 0$, и уравнение (22) принимает вид

$$\nabla^4 W = \frac{q_3}{D}. \quad (24)$$

Уравнение (24) — это уравнение, полученное Лагранжем и Софи Жермен в 1811 году (см. [38]).

8.3 Граничные условия

Граничные условия, соответствующие системе (8.2.20), (8.2.22), формулируются следующим образом.

1. Жестко заделанный край

Если край $x_1 = a$ жестко заделан, то мы имеем

$$W(a, x_2) = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial x_1} \right|_{x_1=a} = 0. \quad (1)$$

2. Свободно опертый край

При свободно опертом крае вертикальное перемещение W и момент M_1 должны быть равны нулю. Таким образом,

$$W(a, x_2) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right)_{x_1=a} = 0, \quad (2)$$

где мы воспользовались формулами (8.2.10). Однако условие $W = 0$ на крае $x_1 = a$ включает в себе соотношение $\partial^2 W / \partial x_2^2 = 0$. Тогда условия (2) принимают вид

$$W(a, x_2) = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=a} = 0. \quad (3)$$

Примеры жестко заделанных и свободно опертых пластин показаны на рис. 7.

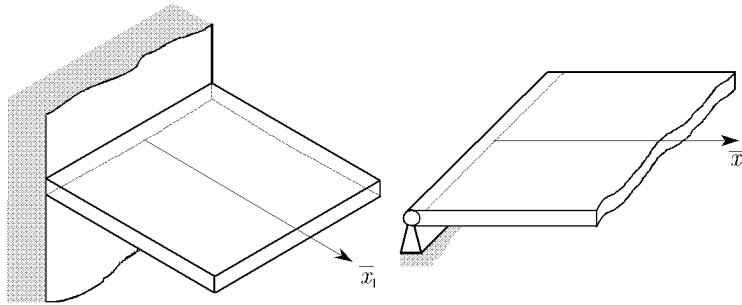


Рис. 7

3. Свободный край

Если край $x_1 = a$ свободен, то на этом крае должны выполняться условия

$$M_1(a, x_2) = M_{12}(a, x_2) = Q_1(a, x_2) = 0. \quad (4)$$

Покажем, что условия $M_{12} = 0$ и $Q_1 = 0$ не являются независимыми. Для этого рассмотрим часть края $x_1 = 0$. Пусть длина этой части равна $2dx_2$ (рис. 8).

Момент, действующий на часть края длиной dx_2 , равен $M_{12}dx_2$. Этот момент можно заменить двумя сосредоточенными силами величиной M_{12} . Расстояние между линиями действия этих сил равно dx_2 . Для соседнего элемента длиной dx_2 момент равен $(M_{12} + dM_{12})dx_2$. Этот момент также может быть заменен двумя сосредоточенными силами $(M_{12} + dM_{12})$, расстояние между которыми равно dx_2 . На рис. 8 векторы этих сил показаны штриховыми линиями. Складывая силы

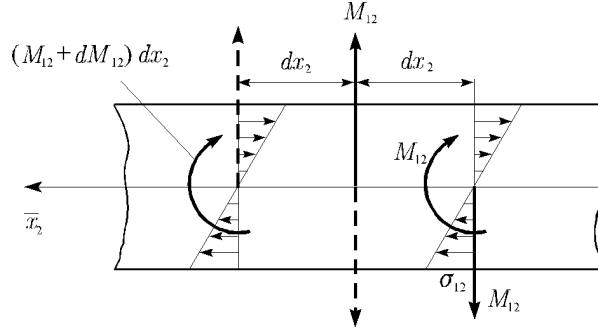


Рис. 8

M_{12} и $(M_{12} + dM_{12})$, мы приходим к выводу, что момент dM_{12} может быть представлен (является статическим эквивалентом) в виде силы

$$\bar{Q}_1 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}. \quad (5)$$

Согласно принципу Сен-Венана тот факт, что мы заменили момент M_{12} на силу \bar{Q}_1 , имеет только локальный эффект в окрестности края $x_1 = a$. Два последних условия (4) могут быть теперь записаны так:

$$(Q_1 + \bar{Q}_1)_{x_1=a} = 0, \quad (6)$$

или

$$\left(Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right)_{x_1=a} = 0. \quad (7)$$

Наконец, используя формулы (8.1.10) и (8.1.21), первое условие (4) и равенство (7) запишем в виде

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right]_{x_1=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right]_{x_1=a} = 0. \quad (8)$$

Условия (8) соответствуют свободному краю пластины. В форме (8) они были получены Кирхгофом в 1850 году.

8.4 Малые деформации: пример

Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами длиной a и b . Считаем, что пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой вида

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = q_0 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b), \quad (1)$$

где q_0 — постоянная. В изучении малых деформаций уравнением, подходящим для определения W , является уравнение (8.2.24). Следовательно,

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} = \frac{q_0}{D} \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b). \quad (2)$$

Граничные условия для свободно опертой пластины суть

$$\begin{aligned} W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a, \\ W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0 \text{ и } x_2 = b. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы ищем перемещение W в виде

$$W = C \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b), \quad (4)$$

где C — постоянная. Подставляя формулу (4) в уравнение (2), получаем

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C = \frac{q_0}{D}. \quad (5)$$

Решая относительно C и подставляя результат в формулу (4), получаем

$$W = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}. \quad (6)$$

Решение (6) может быть использовано для получения решения для свободно опертой пластины под действием нагрузки более общего вида. Допустим, что нагрузка q_3 задается в виде

$$q_3 = \hat{q}_3(x_1, x_2). \quad (7)$$

Разложим сначала функцию \hat{q}_3 в ряд Фурье:

$$\hat{q}_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi x_2}{b} \right). \quad (8)$$

Коэффициенты a_{mn} мы определим следующим образом. Сначала домножим равенство (8) на $\sin(k\pi x_2/b)$ и проинтегрируем по x_2 на промежутке от 0 до b . Получаем

$$\int_0^b \hat{q}_3(x_1, x_2) \sin \left(\frac{k\pi x_2}{b} \right) dx_2 = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} \sin \left(\frac{m\pi x_1}{a} \right). \quad (9)$$

При записи равенства (9) мы воспользовались соотношениями

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) dx_2 = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ b/2, & n = k. \end{cases} \quad (10)$$

Затем домножим равенство (9) на $\sin(m\pi x_1/a)$ и проинтегрируем по x_1 на промежутке от 0 до a . В результате получим

$$\int_0^a \int_0^b \hat{q}_3(x_1, x_2) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) dx_1 dx_2 = \frac{ab}{4} a_{km}. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что

$$a_{km} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \hat{q}_3(x_1, x_2) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_2}{b}\right) dx_1 dx_2. \quad (12)$$

Так как нагрузка (8) является суммой нагрузок типа (1) и так как (2) — линейное дифференциальное уравнение, следовательно, решение уравнения (8.2.24) при нагрузке q_3 , заданной выражением (8), имеет вид

$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (13)$$

где коэффициенты a_{mn} задаются выражением (12).

8.5 Влияние сдвиговых напряжений: теория Рейсснера–Миндлина

Мы изложим обобщение теории пластин, предложенной Рейсснером [82] и Миндлиным [72]. Теория основана на немного измененных предположениях, оговоренных в параграфе 8.2. А именно мы вводим следующее предположение (ср. с предположением 1 параграфа 8.2).

1. Линейный элемент, нормальный к срединной плоскости до деформации, преобразуется в линейный элемент той же длины, но необязательно нормальный к срединной поверхности.

Таким образом, в теории Рейсснера–Миндлина вращение линейного элемента, который в недеформированном состоянии ортогонален к срединной плоскости, не определяется формой срединной плоскости в деформированном состоянии. В классической теории мы использовали равенства $\partial W/\partial x_1 = \theta_1$ и $\partial W/\partial x_2 = \theta_2$ (см. (8.2.6), (8.2.7)). Здесь, вместо равенств (8.2.3), (8.2.7), мы предполагаем, что

$$\bar{u}_1 = \bar{\theta}_1 x_3, \quad \bar{u}_2 = \bar{\theta}_2 x_3, \quad \bar{u}_3 = W(x_1, x_2), \quad (1)$$

где $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}_2$ — углы поворота линейного элемента (изначально ортогонального к срединной плоскости), которые должны быть определены. Далее мы предполагаем, что срединная плоскость пластины не испытывает деформаций растяжения–сдвига, так что величины \bar{E}_{ij} , задаваемые выражениями (8.2.1), равны нулю. Тензор деформаций для точки на расстоянии x_3 от срединной плоскости имеет вид

$$\begin{aligned} E_{11}^z &= \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} x_3, & E_{22}^z &= \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_1} x_3, & E_{33}^z &= 0, & E_{12}^z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_1} \right) x_3, \\ E_{23}^z &= \frac{1}{2} \left(\bar{\theta}_2 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \right), & E_{13}^z &= \frac{1}{2} \left(\bar{\theta}_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что теперь формулы (2) задают тензор полной деформации (именно по этой причине мы опустили черту над E_{ij}). Используя закон Гука (6.1.19) и формулы (2), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} [E_{11} + \nu E_{22}] = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_2} \right] x_3, \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} [E_{22} + \nu E_{11}] = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right] x_3, \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_1} \right] x_3, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\bar{\theta}_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} \right], & \sigma_{23} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\bar{\theta}_2 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью выражений (3) мы можем посчитать усилия и моменты, определенные выражениями (8.2.9) и (8.2.12). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= D \left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_2} \right), & M_2 &= D \left(\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right), \\ M_{12} &= D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_1} \right), & T_1 &= T_2 = S_{12} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где D задается формулой (8.2.11). Для того чтобы определить перерезывающие силы Q_1 и Q_2 согласно (8.2.12), нам нужно найти распределение напряжений σ_{13} и σ_{23} по толщине пластины. Согласно формулам (3), эти компоненты напряжения не зависят от x_3 . В действительности это не так, так как условия $\sigma_{13} = \text{const}$ и $\sigma_{23} = \text{const}$ не удовлетворяются при $x_3 = \pm h/2$ (в самом деле, в плоскостях $x_3 = \pm h/2$ напряжений нет). Поэтому мы вводим *сдвиговую толщину* $h_s < h$ пластины. Тогда, подставляя напряжение (3) в формулы (8.2.12), получаем

$$Q_1 = \frac{E}{2(1+\nu)} h_s \left(\bar{\theta}_1 + \frac{\partial W}{\partial x_1} \right), \quad Q_2 = \frac{E}{2(1+\nu)} h_s \left(\bar{\theta}_2 + \frac{\partial W}{\partial x_2} \right). \quad (5)$$

Величина h_s учитывает неравномерность сдвиговых напряжений по толщине пластины. Часто она записывается в виде $h_s = kh$, где k — корректирующий множитель. Его значение было вычислено Рейсснером ($k = 5/6$) и Миндлиным ($k = \pi^2/12$).

Следующая процедура похожа на процедуру из параграфа 8.2. В данном случае уравнения равновесия (8.2.15), (8.2.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q_3 = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где мы воспользовались равенствами $T_1 = T_2 = S_{12} = 0$. Из системы (4)–(6) мы можем, в принципе, найти следующие восемь величин: пять усилий и моментов (M_{11} , M_{22} , M_{12} , Q_1 и Q_2) и три обобщенных перемещения ($\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ и W). Мы можем упростить систему (4)–(6). Например, из уравнений (6) имеем

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} = -q_3. \quad (7)$$

Пусть Φ и Ψ — функции, введенные в [70]:

$$\Phi = \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_2}, \quad \Psi = \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_2}. \quad (8)$$

Тогда система (7) с учетом формул (4) и (8) примет вид

$$D \nabla^2 \Phi = -q_3. \quad (9)$$

Также, подставляя формулы (4) в уравнения (6) и решая полученную систему относительно производных W , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} = -\bar{\theta}_1 + \frac{D}{\mu h_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = -\bar{\theta}_2 + \frac{D}{\mu h_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu = E/2(1+\nu)$ — константа Ламе (модуль сдвига). Дифференцируя первое уравнение (10) по x_1 , второе по x_2 и складывая результаты, имеем

$$\nabla^2 W = -\Phi + \frac{D}{\mu h_s} \nabla^2 \Phi. \quad (11)$$

Аналогично дифференцируя первое уравнение (10) по x_2 , второе по x_1 и вычитая результаты, получаем

$$\Psi - \frac{D}{\mu h_s} \frac{1-\nu}{2} \nabla^2 \Psi = 0. \quad (12)$$

Следовательно, теория пластин Рейсснера–Миндлина описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} D\nabla^2\Phi &= -q_3, & \nabla^2 W &= -\Phi + \frac{D}{\mu h_s} \nabla^2\Phi, \\ \Psi - \frac{D}{\mu h_s} \frac{1-\nu}{2} \nabla^2\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что в случае, когда модуль сдвига μ стремится к бесконечности, вместо системы (13) мы имеем

$$D\nabla^4\Phi = -q_3, \quad \nabla^2 W = -\Phi, \quad \Psi = 0. \quad (14)$$

Обратимся теперь к граничным условиям для пластин Рейсснера–Миндлина. Эти условия соответствуют системе (13) и записываются в следующем виде.

1. Заделанный край

Если край $x_1 = a$ жестко заделан, то перемещение и углы поворота равны нулю. Это так называемое условие *жесткой заделки*

$$W(a, x_2) = 0, \quad \bar{\theta}_1(a, x_2) = 0, \quad \bar{\theta}_2(a, x_2) = 0. \quad (15)$$

Есть другой способ, чтобы задать граничные условия, — так называемое условие *шарнирного опирания* или условие *Навье*, которое записывается в виде

$$W(a, x_2) = 0, \quad M_1(a, x_2) = 0, \quad \bar{\theta}_2(a, x_2) = 0. \quad (16)$$

2. Свободный край

При свободном крае $x_1 = a$ имеем условия

$$M_1(a, x_2) = 0, \quad M_{12}(a, x_2) = 0, \quad Q_1(a, x_2) = 0. \quad (17)$$

В условиях (15)–(17) следует использовать формулы (4) и (10).

Мы закончим анализ теории пластин Рейсснера–Миндлина следующими наблюдениями.

1) В случае, когда сдвиговая жесткость пластины велика (т. е. $\mu h_s \rightarrow \infty$), из выражения (10) получаем

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = -\bar{\theta}_1, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = -\bar{\theta}_2. \quad (18)$$

Заметим, что формулы (18) согласуются с формулами (8.2.7) и (8.5.1). Также уравнения (14) приводятся к виду

$$D\nabla^4 W = q_3. \quad (19)$$

Таким образом, теория Рейсснера–Миндлина сводится к случаю (8.2.24).

2) Так как система (13) является системой трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, мы можем указать на каждом крае *три* граничных условия. В классической теории соответствующим уравнением было уравнение (8.2.24), т. е. дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Поэтому на каждом крае было возможно указать только два граничных условия. В случае свободного края (см. параграф 8.3) мы были вынуждены заменять производную от пары M_{12} поперечной силой (\bar{Q}_1 в (8.3.5)). Это было возможно, так как поперечные силы не оказывают “сдвигового эффекта” ($\mu h_s \rightarrow \infty$). Здесь мы в такой замене не нуждаемся.

Продемонстрируем теперь конкретный пример теории Рейсснера–Миндлина. Рассмотрим пластину $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$ при $a \ll b$, как показано на рис. 9. Допустим, что пластина свободно оперта по всем сторонам и нагружена распределенными парами вдоль стороны $x_2 = 0$.

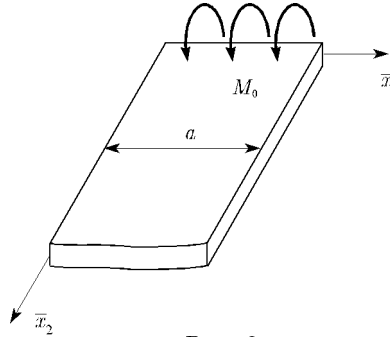


Рис. 9

Система (13) теперь принимает вид

$$D\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 W = -\Phi, \quad \Psi - \frac{1}{\kappa_s} \nabla^2 \Psi = 0, \quad (20)$$

где

$$\frac{1}{\kappa_s} = \frac{D}{\mu h_s} \frac{1-\nu}{2}. \quad (21)$$

Предположим, что решение системы (20) ищется в виде

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_2) \sin \alpha_n x_1, \\ W &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x_2) \sin \alpha_n x_1, \\ \Psi &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_2) \sin \alpha_n x_1,\end{aligned}\quad (22)$$

где $\alpha_n = n\pi/a$. Также в формулах (22) должны быть определены функции f_n , h_n , g_n . Подставляя решение (22) в систему (20), получаем

$$\begin{aligned}D \left(-\alpha_n^2 f_n + \frac{d^2 f_n}{dx_2^2} \right) &= 0, & -\alpha_n^2 h_n + \frac{d^2 h_n}{dx_2^2} &= f_n, \\ g_n - \frac{1}{\kappa_s} \left(-\alpha_n^2 g_n + \frac{d^2 g_n}{dx_2^2} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (23)$$

Решение системы (23), которое убывает с ростом x_2 , равно

$$\begin{aligned}f_n &= C_n \exp(-\alpha_n x_2), & h_n &= \left(A_n + \frac{C_n}{2\alpha_n} \right) \exp(-\alpha_n x_2), \\ g_n &= D_n \exp(-\lambda_n x_2),\end{aligned}\quad (24)$$

где

$$\lambda_n^2 = \kappa_s + \alpha_n^2. \quad (25)$$

Подставляя формулы (10) и (22) в выражение (4), получаем

$$\begin{aligned}M_{22} &= D \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) + \nu \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right) \right] = D \left[- \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{D}{\mu h_s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) + \left(\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right) \right\} + \frac{1}{k_s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right\} \Big] = \\ &= D \left[\left\{ -\alpha_n^2 A_n + \nu \alpha_n^2 A_n + \frac{C_n}{2\alpha_n} (2\alpha_n - \alpha_n^2 x_2 + \nu \alpha_n^2 x_2) \right\} \exp(-\alpha_n x_2) + \right. \\ &+ \left. \frac{D}{\mu h_s} (\alpha_n^2 - \nu \alpha_n^2) C_n \exp(-\alpha_n x_2) + \frac{1}{\kappa_s} \lambda_n \alpha_n (1 - \nu) D_n \exp(-\lambda_n x_2) \right] \sin \alpha_n x_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{1-\nu}{2} D \left[\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \right) \right] = \frac{1-\nu}{2} D \left[-2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \right. \\
&+ \frac{D}{\mu h_s} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right\} + \frac{1-\nu}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right) \right\} \Big] = \\
&= \frac{1-\nu}{2} D \left[\left\{ 2\alpha_n^2 A_n + \frac{C_n}{2\alpha_n} (\alpha_n - \alpha_n^2) \right\} \exp(-\alpha_n x_2) + \right. \\
&+ \left. \frac{D}{\mu h_s} (-2\alpha_n^2) C_n \exp(-\alpha_n x_2) + \frac{1-\nu}{2} (-\alpha_n^2 - \lambda_n^2) D_n \exp(-\lambda_n x_2) \right] \cos \alpha_n x_1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Теперь разложим распределенные моменты M_0 в ряд Фурье по синусам:

$$M_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \alpha_n x_1. \tag{27}$$

Граничные условия для пластины, показанной на рис. 9, суть

$$W(x_1, 0) = 0, \quad M_{22}(x_1, 0) = M_0, \quad M_{12}(x_1, 0) = 0. \tag{28}$$

Подставляя формулы (26) и (27) в граничные условия (28), получаем

$$\begin{aligned}
A_n &= 0, \quad \frac{M_n}{D} = C_n \left[1 + \frac{D}{\mu h_s} \alpha_n^2 (1-\nu) \right] + \frac{1}{\kappa_s} \lambda_n \alpha_n (1-\nu) D_n, \\
\frac{C_n}{2} + \frac{D}{\mu h_s} \left[-2\alpha_n^2 C_n + \frac{1-\nu}{2} (-\alpha_n^2 - \lambda_n^2) D_n \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

В работе [52] постоянные C_n и D_n определяются в частном случае, когда

$$h_s = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{\kappa_s} = \frac{1-\nu}{2} \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{6}{5h} \approx \frac{h^2}{10}. \tag{30}$$

Тогда

$$C_n = \frac{M_n}{D} \frac{1}{1 + 2 \frac{\alpha_n^2}{\kappa_s} - \frac{1}{\alpha_n^2 + \lambda_n^2} [(1-\nu) \alpha_n \lambda_n + \frac{2}{3} h^2 \alpha_n^3 \lambda_n]} = \frac{M_n}{D} \Lambda_n. \tag{31}$$

С учетом первой формулы (29) и (31) из выражений (22) получаем

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{2\alpha_n} [\Lambda_n \alpha_n x_2 \exp(-\alpha_n x_2)] \sin \frac{n\pi}{a} x_1. \tag{32}$$

Путем анализа численного значения W в одном частном случае в работе [70] было показано, что конечная сдвиговая жесткость увеличивает прогиб W по сравнению с классической теорией, описываемой уравнением (8.2.24).

Задачи

1. Покажите, что в случае осесимметричной деформации, т. е. когда $W(r, \theta) = W(r)$ и $\Phi(r, \theta) = \Phi(r)$, уравнения теории фон Кармана (8.2.20), (8.2.22) сводятся к виду

$$\frac{1}{Eh} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right] \right\} = -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \right],$$

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} = q_3 + \frac{d^2\Phi}{dr^2} \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d^2W}{dr^2}.$$

2. Для случая осесимметричной деформации из предыдущего примера покажите, что

$$T_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad T_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2}. \quad (a)$$

Затем, используя равенство

$$T_\theta = \frac{d}{dr}(rT_r), \quad (b)$$

покажите, что первое уравнение задачи 1 можно проинтегрировать так, что получится следующая система:

$$\frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 T_r) \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2, \quad (c)$$

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} = q_3 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r T_r \frac{dW}{dr} \right).$$

Наконец, покажите, что из условия (8.2.19), записанного в цилиндрической системе координат, мы имеем уравнение

$$\bar{E}_{\theta\theta} = \frac{1}{Eh} (T_\theta - \nu T_r), \quad (d)$$

которое вместе с формулами (2.6.6) приводит к выражению для радиальной компоненты вектора перемещений:

$$u = u_r = \frac{r}{Eh} (T_\theta - \nu T_r) = \frac{r}{Eh} \left[\frac{d}{dr} (r T_r) - \nu T_r \right]. \quad (e)$$

3. Покажите, что в цилиндрической системе координат уравнение (8.2.24) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial^4 \Phi} \partial \theta^4 + 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q_3}{D}. \quad (a)$$

В случае осесимметричной деформации уравнение (a) имеет вид

$$\frac{d^4 W}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dW}{dr} = \frac{q_3}{D}. \quad (б)$$

Покажите, что в случае, когда $q_3 = \text{const}$ и когда пластина свободно оперта:

$$W(R) = 0, \quad M_r(R) = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=R} = 0, \quad (в)$$

решение уравнения (б) равно

$$W = \frac{q_0 R^4}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - 2 \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right). \quad (г)$$

Глава 9

Давление между двумя контактирующими телами

9.1 Введение

В этой главе мы обсуждаем частную задачу теории упругости, так называемую контактную задачу. Предположим, что два упругих тела находятся в контакте в единственной точке. Если тела сжимаются с силой, скажем F , то контакт вследствие деформации будет не в единственной точке, а по малой площади поверхности каждого тела. Эта поверхность называется *поверхностью контакта*. Кривая, ограничивающая поверхность контакта, называется *контуром поверхности контакта*. Основная проблема механики контакта заключается в определении поверхности контакта для данной силы F и распределения напряжений внутри поверхности контакта.

Чтобы решить контактную задачу, основные положения классической контактной теории Герца [57] вводятся следующим образом (см. также [13]):

1) контактирующие тела — линейно упругие однородные, возможно с разными постоянными Ламе;

2) в ненагруженном состоянии тела контактируют в единственной точке O , которая лежит на гладкой части внешней поверхности обоих тел. Точка O — неособая точка обеих поверхностей, и имеется определенная касательная плоскость в точке O ;

3) тела сжимаются вдоль нормали к касательной плоскости O .

Мы рассмотрим как статические, так и динамические задачи. Динамическая задача изучает удар двух упругих тел. Удар, согласно как классической теории Герца, так и модифицированной теории, рассмотрен Кильчевским в [18].

9.2 Задача Герца и ее решение

Начнем с геометрического вступления. Рассмотрим два контактирующих тела B_1 и B_2 (рис. 1). Пусть Π есть касательная плоскость к поверхностям обоих тел в точке контакта в ненагруженном состоянии.

Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_3^{(1)}$ и $\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_3^{(2)}$ — две декартовы системы координат с началом в точке O и с осями \bar{x}_1, \bar{x}_1 в касательной плоскости Π , а $\bar{x}_3^{(1)}, \bar{x}_3^{(2)}$ — оси, совпадающие с внутренними нормальными к поверхностям тел B_1 и B_2 соответственно (см. рис. 1).

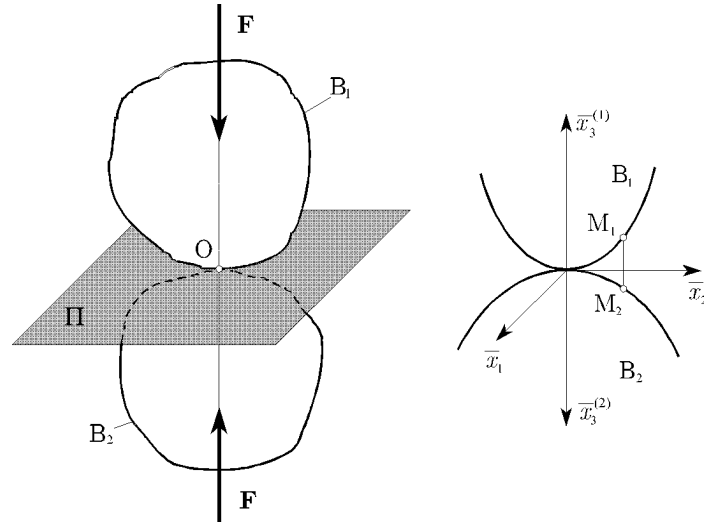


Рис. 1

Уравнения поверхностей тел B_1 и B_2 разложим в ряды Тейлора в точке контакта O . Результатом будут уравнения

$$\begin{aligned}
 x_3^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \right)_{(0,0)} x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right)_{(0,0)} x_2^2 + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{(0,0)} x_1 x_2, \\
 x_3^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \right)_{(0,0)} x_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right)_{(0,0)} x_2^2 + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{(0,0)} x_1 x_2.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Заметим, что мы всегда можем выбрать оси u_1 и v_1 в Π так, что

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2} [K_{11} u_1^2 + K_{12} v_1^2],
 \tag{2}$$

где K_{11} и K_{12} — главные кривизны поверхности B_1 , задаваемые как $K_{11} = (\partial^2 f_1 / \partial u_1^2)_{(0,0)}$ и $K_{12} = (\partial^2 f_1 / \partial v_1^2)_{(0,0)}$. Аналогично имеются оси u_2 и v_2 в Π , такие, что

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2} [K_{21} u_2^2 + K_{22} v_2^2],
 \tag{3}$$

где $K_{21} = (\partial^2 f_2 / \partial u_2^2)_{(0,0)}$ и $K_{22} = (\partial^2 f_2 / \partial v_2^2)_{(0,0)}$. Пусть Ψ есть угол между осями u_1 и u_2 . Мы введем новую координатную систему с осями u и v . Пусть Ψ_1 — угол между u и u_1 . Тогда $\Psi_2 = \Psi_1 - \Psi$ — угол между u и u_2 . В этих обозначениях координаты произвольной точки на плоскости Π связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= u \cos \Psi_1 - v \sin \Psi_1, & v_1 &= u \sin \Psi_1 + v \cos \Psi_1, \\ u_2 &= u \cos \Psi_2 - v \sin \Psi_2, & v_2 &= u \sin \Psi_2 + v \cos \Psi_2. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом формул (4) уравнения (2) и (3) принимают вид

$$\begin{aligned} x_3^{(1)} &= \frac{1}{2}[u^2(K_{11} \cos^2 \Psi_1 + K_{12} \sin^2 \Psi_1) + v^2(K_{11} \sin^2 \Psi_1 + K_{12} \cos^2 \Psi_1) \\ &\quad - uv(K_{11} - K_{12}) \sin 2\Psi_1], \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{2}[u^2(K_{21} \cos^2 \Psi_2 + K_{22} \sin^2 \Psi_2) + v^2(K_{21} \sin^2 \Psi_2 + K_{22} \cos^2 \Psi_2) \\ &\quad - uv(K_{21} - K_{22}) \sin 2\Psi_2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что расстояние между двумя произвольными точками M_1 и M_2 (см. рис. 1) в ненагруженном состоянии есть $x_3^{(1)} + x_3^{(2)}$. Ориентация осей u и v (т. е. углы Ψ_1 и $\Psi_2 = \Psi_1 - \Psi$) могут быть выбраны так, чтобы

$$(K_{11} - K_{12}) \sin 2\Psi_1 + (K_{21} - K_{22}) \sin 2\Psi_2 = 0. \quad (6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[K_{11} \cos^2 \Psi_1 + K_{12} \sin^2 \Psi_1 + K_{21} \cos^2 \Psi_2 + K_{22} \sin^2 \Psi_2], \\ B &= \frac{1}{2}[K_{11} \sin^2 \Psi_1 + K_{12} \cos^2 \Psi_1 + K_{21} \sin^2 \Psi_2 + K_{22} \cos^2 \Psi_2], \end{aligned} \quad (7)$$

и предположим, что равенство (6) выполняется. Тогда расстояние между точками M_1 и M_2 станет равным

$$x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = Au^2 + Bv^2. \quad (8)$$

Мы докажем далее, что $A \geq 0$ и $B \geq 0$. Чтобы сделать это, отметим, что из формул (7) следует, что

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2}[K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}], \\ B - A &= \frac{1}{2}[(K_{11} - K_{12})^2 + (K_{22} - K_{21})^2 + \\ &\quad + 2(K_{11} - K_{12})(K_{21} - K_{22}) \cos 2\Psi]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вводя угол τ по формуле

$$\cos \tau = \frac{B - A}{B + A}, \quad (10)$$

получаем

$$A = B \operatorname{tg}^2(\tau/2), \quad A + B = \frac{A}{\sin^2(\tau/2)}. \quad (11)$$

Из равенств (11) имеем

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}] \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right), \\ B &= \frac{1}{2}[K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}] \cos^2\left(\frac{\tau}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты A и B одного знака. Так как расстояние (8) положительно, то отсюда следует, что A и B тоже положительны. Из формул (8) заключаем, что *эквилибранные кривые точек контактирующих поверхностей, лежащих на одной и той же нормали к плоскости Π , являются концентрическими эллипсами.*

Предположим, что тела давят друг на друга с силой F , направленной вдоль нормали к плоскости Π , проходящей через точку O . Из-за деформации тела будут контактировать по малой поверхности, называемой поверхностью контакта. С достаточной точностью можно предположить, что тела придут в контакт в точках, *лежащих до деформации на одной и той же нормали к Π .* Из соотношения (8) заключаем, что поверхность контакта имеет эллиптическую форму.

Следующее предположение — о перемещениях тел в точках далеких от поверхности контакта, а именно мы пренебрегаем деформацией в таких точках. Тогда, в результате сжатия, любые две точки, лежащие на осях $\bar{x}_3^{(1)}$, $\bar{x}_3^{(2)}$ достаточно далеко от точки O , станут ближе друг к другу на величину α , равную сумме смещений точки O , рассматриваемой как точка, принадлежащая телам B_1 и B_2 :

$$\alpha = u_{30}^{(1)} + u_{30}^{(2)}, \quad (13)$$

где $u_{30}^{(1)} = u_3^{(1)}(0, 0)$, $u_{30}^{(2)} = u_3^{(2)}(0, 0)$. Пусть $u_3^{(1)}$ и $u_3^{(2)}$ являются компонентами вектора смещения вдоль осей $\bar{x}_3^{(1)}$, $\bar{x}_3^{(2)}$ соответственно двух произвольных точек (скажем M_1 и M_2), лежащих на одной нормали к Π . Расстояние между этими точками уменьшается на величину $\alpha - (\bar{u}_3^{(1)} + \bar{u}_3^{(2)})$. Следовательно, поверхность контакта, для которой начальное расстояние равно сближению, характеризуется соотношением

$$x_3^{(1)} + x_3^{(2)} = \alpha - (\bar{u}_3^{(1)} + \bar{u}_3^{(2)}). \quad (14)$$

С учетом формулы (8) соотношение (14) принимает вид

$$u_3^{(1)} + u_3^{(2)} = \alpha - Au^2 + Bv^2. \quad (15)$$

Точки вне поверхности контакта удовлетворяют неравенству

$$x_3^{(1)} + x_3^{(2)} > \alpha - (\bar{u}_3^{(1)} + \bar{u}_3^{(2)}). \quad (16)$$

Мы полагаем, что поверхность контакта мала по сравнению с размерами контактируемых тел, так что тела могут быть аппроксимированы упругими полупространствами. Также мы предполагаем отсутствие трения между контактирующими телами (тангенциальная компонента вектора напряжения на поверхности контакта равна нулю). Тогда можно использовать формулу (5.10.21) для определения компонент вектора смещения

$$\begin{aligned} u_3^{(1)} &= \frac{(1 - \nu_1)}{2\pi\mu_1} \iint_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{[(u - \xi)^2 + (v - \eta)^2]^{1/2}}, \\ u_3^{(2)} &= \frac{(1 - \nu_2)}{2\pi\mu_2} \iint_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{[(u - \xi)^2 + (v - \eta)^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя формулу (17) в равенство (14), получаем

$$\left[\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right] \iint_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{[(u - \xi)^2 + (v - \eta)^2]^{1/2}} = \alpha - Au^2 - Bv^2. \quad (18)$$

В формулах (17) и (18) величины μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 , E_1 и E_2 обозначают модули сдвига, коэффициенты Пуассона и модули упругости тел B_1 и B_2 соответственно. Решение задачи Герца сводится к нахождению распределения давления $q(\xi, \eta)$, постоянной α (сближение тел) и размера и формы поверхности контакта Ω , которая удовлетворяет уравнению (18), в котором постоянные A и B известны из геометрии контактирующих тел. Несобственный интеграл в уравнении (18) — это потенциал простого слоя, распределенный с плотностью $q(\xi, \eta)$ по поверхности контакта (см. [39])

$$u_0 = \iint_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{r}. \quad (19)$$

Из уравнения (18) мы заключаем, что интеграл (19) является квадратичной функцией u и v . Из этого заключения следует, что решение уравнения (18) связано с потенциалом внутри однородного эллипсоида. Известно, что этот потенциал есть квадратичная функция координат. Используя эту идею, Герц получил решение уравнения (18) из потенциала однородного эллипсоида, толщина которого в одном направлении стремится к нулю. На основе этой аналогии мы полагаем, что Ω является эллипсом с осями a и b и что

$$q(\xi, \eta) = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi ab} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}. \quad (20)$$

Уравнение (18) тогда принимает вид

$$(\beta_1 + \beta_2) \frac{3}{4} F \int_0^\infty \left(1 - \frac{u^2}{a^2 + \lambda} - \frac{v^2}{b^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda}} = \alpha - Au^2 - Bv^2. \quad (21)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad \beta_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}, \quad (22)$$

а λ_1 , μ_1 и λ_2 , μ_2 — постоянные Ламе тел V_1 и V_2 , соответственно. Так как соотношение (21) справедливо для всех u и v , мы можем использовать его для определения α . Таким образом, полагая $u = v = 0$ в выражении (21), получаем

$$\alpha = \frac{3}{4}(\beta_1 + \beta_2)F \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda}}. \quad (23)$$

Также из приравнивания коэффициентов при u и v в выражении (21) следует, что

$$A = \frac{3}{4}(\beta_1 + \beta_2)F \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda}}, \quad (24)$$

$$B = \frac{3}{4}(\beta_1 + \beta_2)F \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda}}.$$

Из формул (24) мы можем найти a и b при известных A и B . Если a и b известны, по формуле (23) можно найти “сближение” α контактирующих тел.

Вычисляя интегралы в формулах (23) и (24), получаем (см. подробно в [12] и [13])

$$\alpha = \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) \frac{F}{a} K(k), \quad A = \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) \frac{F}{a^3} \frac{K(k) - E(k)}{k^2}, \quad (25)$$

$$B = \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) \frac{F}{b^3} \frac{k_0[E(k) - K(k)k_0^2]}{k^2}.$$

где

$$k_0 = \frac{b}{a} < 1, \quad k = \sqrt{1 - k_0^2} \quad (26)$$

и $K(k)$ и $E(k)$ являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода соответственно (см. [24]):

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (27)$$

Из формул (25) после некоторых элементарных преобразований следует, что

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\kappa} F}, \quad b = n \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\kappa} F}, \quad \alpha = \frac{K(k)}{\pi m} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \beta_0^2 \kappa F^2}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \pi(\beta_1 + \beta_2), & \kappa &= 2(A + B) = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}, \\ m &= \sqrt[3]{\frac{2E(k)}{\pi(1-k^2)}}, & n &= m\sqrt{1-k^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Если главные радиусы кривизны R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} заданы, то главные кривизны K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} определяются как

$$K_{ij} = \pm 1/R_{ij}. \quad (30)$$

Знак “+” выбирается, если поверхность находится над своей касательной плоскостью, и “-”, если поверхность ниже своей касательной плоскости. Максимальное значение давления определяется из формул (20) при $\xi = \eta = 0$. Результатом будет уравнение

$$q_0 = (q(\xi, \eta))_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi ab} = \frac{1}{\pi mn} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\kappa}{\beta_0}\right)^2 F}. \quad (31)$$

Используя формулу (31), мы можем записать равенство (20) в виде

$$q(\xi, \eta) = q_0 \frac{\zeta}{c}, \quad (32)$$

где

$$\frac{\zeta}{c} = \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}. \quad (33)$$

9.3 Примеры контактных напряжений

В этом параграфе мы представим результаты некоторых конкретных случаев контакта между упругими телами.

1. Упругие сферы

Пусть контактирующими телами являются сферы радиусов R_1 и R_2 . Тогда

$$A = \frac{1}{R_1}, \quad B = \frac{1}{R_2}. \quad (1)$$

Из-за симметрии имеем $a = b$. Из формул (9.2.26) следует, что

$$k = 0, \quad (2)$$

так что из формул (9.2.27) следует, что

$$K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad E(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Средняя кривизна равна

$$\kappa = 2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]. \quad (4)$$

Подстановка формул (1) и (4) в соотношения (9.2.28) и (9.2.31) дает

$$a = b = \left(\frac{3}{4} \frac{\beta_0 F}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \right)^{1/3}, \quad (5)$$

и

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \beta_0^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) F^2}, \quad q_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{6 \frac{1}{\beta_0^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 F}. \quad (6)$$

В частном случае стальных сфер, сделанных из одного материала $E = E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, получаем

$$\begin{aligned} a = b &= 1.109 \sqrt[3]{\frac{F}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \\ \alpha &= 1.231 \sqrt[3]{\frac{F^2}{E^2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)}, \\ q_0 &= \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2} = 0.388 \sqrt[3]{F E^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим теперь, что сфера $R_1 = R$ находится в контакте с упругим полупространством. Тогда $R_2 = \infty$, так что

$$A = \frac{1}{R}, \quad B = 0. \quad (8)$$

В этом случае получаем

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \beta_0 F R}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \beta_0^2 \frac{F^2}{R}}, \quad q_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{6 \frac{1}{\beta_0^2} \frac{F}{R^2}}. \quad (9)$$

Если полупространство абсолютно твердое (т. е. $E_2 = \infty$), имеем (см. (9.2.22) и (9.2.29))

$$\beta_0 = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad (10)$$

где E — модуль упругости и ν — коэффициент Пуассона материала сферы.

2. Два круглых призматических цилиндра

Пусть два упругих цилиндра, показанных на рис. 2, находятся в контакте. Цилиндры наружены силой F . В этом случае

$$K_{11} = \frac{1}{R_1}, \quad K_{12} = 0, \quad K_{21} = \frac{1}{R_2}, \quad K_{22} = 0. \quad (11)$$

Мы полагаем, что поверхностью контакта является прямоугольник. Тогда в формулах параграфа 9.2 мы используем дополнительное условие $a/b \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$. При этом из формул (9.2.32), (9.2.33) получаем

$$q(\xi, \eta) = q_0 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}}. \quad (12)$$

Пусть p — сила отнесенная к единице длины поверхности контакта, измеряемой вдоль оси цилиндра (т. е. $p = F/l$) (см. рис. 2). Тогда

$$p = \int_{-b}^b q d\eta = q_0 \int_{-b}^b \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{b^2}} d\eta = \frac{\pi}{2} q_0 b, \quad (13)$$

$$q_0 = (q(\xi, \eta))_{\max} = \frac{2p}{\pi b}. \quad (14)$$

Силу F можно найти из формул (9.2.31) и (14) в виде

$$F = \frac{2}{3} \pi a b q_0 = \frac{4}{3} a p. \quad (15)$$

Остается определить величину b . Мы начнем с формул (15) и (9.2.28). Тогда

$$a = \sqrt[3]{\frac{2E(k)}{\pi(1-k^2)}} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\kappa} \frac{4}{3} a p}, \quad b = \sqrt{1-k^2} \sqrt[3]{\frac{2E(k)}{\pi(1-k^2)}} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\kappa} \frac{4}{3} a p}, \quad (16)$$

или

$$a = \sqrt{\frac{4E(k)\beta_0}{\pi(1-k^2)\kappa}}, \quad b = \sqrt{\frac{4E(k)\beta_0}{\pi\kappa}} p. \quad (17)$$

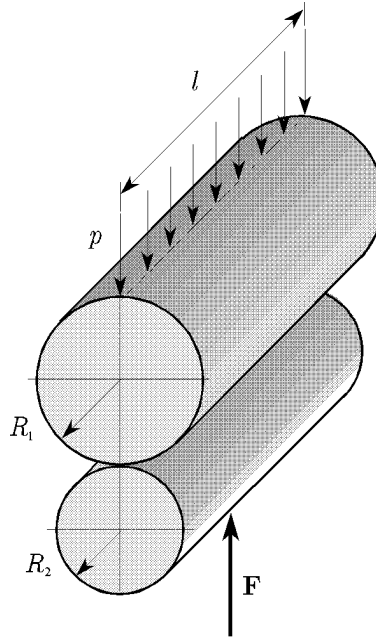


Рис. 2

Взяв предел при $k \rightarrow 1$ в первой формуле (17), получаем, что $a \rightarrow \infty$, а из второго равенства (17) следует, что

$$b = \sqrt{\frac{4\beta_0}{\pi\kappa}} p = \sqrt{\frac{4}{\pi} \beta_0 p \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (18)$$

Мы завершаем этот параграф комментарием о задаче определения напряжений в контактирующих телах в точках *далеких* от поверхности контакта Ω . Чтобы определить эти напряжения, мы можем использовать результаты параграфа 5.10. А именно в формулах (5.10.11) мы можем заменить силу F элементарной силой $dF = (qd\Omega)$ и затем проинтегрировать по поверхности контакта Ω , чтобы получить компоненты тензора напряжений. Такие результаты представлены, например, в [12].

9.4 Теория упругого удара

Мы рассмотрим задачу о двух упругих сферах,двигающихся навстречу друг другу со скоростью v_0 . Первоначальная теория удара была сформулирована Ньютоном. Он ввел понятия *совершенно упругого* и *несовершенно упругого* удара. Теория упругого удара Герца,

которую мы представляем, принадлежит к классу совершенно упругих ударов, так как отсутствует диссипация энергии во время удара.

Теория удара Герца — локальная теория, так как она учитывает только локальную деформацию тел. Она основана на результатах Герца о статической теории контактных напряжений, представленной в параграфе 9.2 с дополнительными ограничениями. Основное дополнительное ограничение касается относительной скорости v_0 сближающихся тел. Мы покажем ниже, что *контактное время* (т. е. временной интервал, в котором контактные силы между телами отличны от нуля) зависит от v_0 . Предполагается, что скорость v_0 настолько мала, что контактное время много больше периода свободных колебаний сталкивающихся тел.

Для получения дифференциальных уравнений, описывающих *относительное движение* сталкивающихся тел, предположим, что тела, двигающиеся навстречу друг другу, в момент времени $t_0 = 0$ соприкасаются. Мы полагаем далее, что относительная скорость тел v_0 имеет только компоненту вдоль общей нормали к поверхностям тел в точке удара. Если мы выберем систему координат как и в предыдущем параграфе, то

$$m_1 \frac{d^2 x_{3c}^{(1)}}{dt^2} = F, \quad m_2 \frac{d^2 x_{3c}^{(2)}}{dt^2} = F, \quad (1)$$

где m_1 и m_2 — массы сталкивающихся тел, $x_{3c}^{(1)}$ и $x_{3c}^{(2)}$ — координаты центров масс сталкивающихся тел, а F — компонента результирующей силы в направлении общей нормали в точке удара, которая совпадает с направлением осей $\bar{x}_3^{(1)}$ и $\bar{x}_3^{(2)}$. При записи уравнений (1) мы сделали дополнительное предположение о том, что эти уравнения справедливы, если все точки вне малой области имеют *одинаковую скорость*. Таким образом, деформация концентрируется в малой окрестности точки контакта (инерцией этой части пренебрегаем), а остальная часть тела движется как твердое тело (инерцией не пренебрегаем, но деформацией пренебрегаем).

Предположим, что в начальный момент, когда тела соприкасаются, расстояния между центрами масс тел и точкой контакта $x_{3c0}^{(1)}$ и $x_{3c0}^{(2)}$. Используя предположение параграфа 9.2, т. е. пренебрегая всеми деформациями тел, кроме локальных, получаем

$$x_{3c}^{(1)} + x_{3c}^{(2)} = x_{3c0}^{(1)} + x_{3c0}^{(2)} - \alpha, \quad (2)$$

где α — сближение тел. Из соотношений (2) и первого уравнения (1) находим

$$-m_1 \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 x_{3c}^{(2)}}{dt^2} \right) = F. \quad (3)$$

Далее уравнения (3) и второе из (1) дают

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -F. \quad (4)$$

Уравнение (4) разрешимо, если мы знаем зависимость F от α . Следуя анализу Герца (1892), мы полагаем, что во время соударения соотношение $F(\alpha)$ берется из статического анализа, представленного в параграфе 9.2. Таким образом, из соотношений (9.2.28) и (9.3.6) мы заключаем, что

$$\alpha = k F^{2/3}, \quad k = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \beta_0^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}, \quad (5)$$

где β_0 задается формулой (9.2.29). С использованием обозначения (5) и $k_1 = (m_1 + m_2)/(m_1 m_2)$ уравнение (4) приобретает вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k_1 k_2 \alpha^{3/2}, \quad (6)$$

где $k_2 = (k)^{-3/2}$. Из уравнения (6) и с использованием обозначения $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$ мы получаем

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - v_0^2) = -\frac{2}{5} k_1 k_2 \alpha^{5/2}. \quad (7)$$

Из интеграла (7) следует, что нет диссипации во время удара, так как в конце времени контакта (т. е. $t = t^*$) мы имеем $\alpha = 0$, и величина вектора относительной скорости $\dot{\alpha}^2(t^*) = v_0^2$, или $\dot{\alpha}(t^*) = -v_0$. Также из соотношения (7) значение α при $\dot{\alpha} = 0$ и соответствующая максимальная сила сжатия есть

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{5}{k_1 k_2} \right)^{2/5} \left(\frac{v_0}{2} \right)^{4/5}, \quad F_{\max} = k_2 \left(\frac{5}{4} \frac{v_0^2}{k_1 k_2} \right)^{3/5}. \quad (8)$$

Контактное время (т. е. продолжительность удара) равно

$$T_{\max} = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{5/2}}}. \quad (9)$$

Используя выражение (8) для получения v_0 через α_{\max} и полагая $\alpha = \xi \alpha_{\max}$, уравнение (9) запишем в виде

$$T_{\max} = 2 \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}}. \quad (10)$$

Теперь подставляя $u = \xi^{5/2}$, мы преобразуем интеграл в (10) к виду

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{u^{-3/5} du}{\sqrt{1 - u}} = \frac{2}{5} \frac{\Lambda\left(\frac{2}{5}\right) \Lambda\left(\frac{1}{2}\right)}{\Lambda\left(\frac{9}{10}\right)}, \quad (11)$$

где $\Lambda(x)$ есть гамма-функция. Так как $\Lambda(1/2) = \sqrt{\pi}$ (см. [1]), находим

$$T_{\max} = \frac{4}{5} \sqrt{\pi} \frac{\Lambda\left(\frac{2}{5}\right)}{\Lambda\left(\frac{9}{10}\right)} \frac{\alpha_{\max}}{v_0} = 2.9432 \frac{\alpha_{\max}}{v_0}. \quad (12)$$

Подставляя первое выражение (8) в формулу (12), мы, наконец, получаем контактное время:

$$T_{\max} = \frac{4}{5} \sqrt{\pi} \frac{\Lambda\left(\frac{2}{5}\right)}{\Lambda\left(\frac{9}{10}\right)} \frac{1}{v_0} \left(\frac{5}{k_1 k_2}\right)^{2/5} \left(\frac{v_0}{2}\right)^{4/5} = \psi v_0^{-(1/5)}. \quad (13)$$

Постоянную ψ можно определить экспериментально. Заметим, что контактное время изменяется обратно пропорционально корню пятой степени из скорости сближения тел перед ударом.

Мы сейчас оценим период свободных колебаний сталкивающихся тел τ_{\max} , чтобы получить ограничения на v_0 , которые гарантируют $\tau_{\max} \ll T_{\max}$. Это вытекает из результатов о свободных колебаниях сфер ([26]). Используя для сравнения скорость волн расширения (см. (5.14.6))

$$c_2 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad (14)$$

мы можем оценить наибольший период свободного колебания упругой сферы. Например, в частном случае, когда $\lambda = \mu$, имеем

$$\tau_{\max} \approx \frac{2}{0.8159} \frac{R}{c_2}, \quad (15)$$

где R — радиус сферы. Таким образом, результаты, полученные до сих пор, справедливы, когда время удара T_{\max} , задаваемое формулой (12), много больше периода свободных колебаний τ_{\max} , задаваемого формулой (15). Уравнение (4) можно преобразовать к универсальному виду, предложенному в [19]. Мы дважды интегрируем (4), чтобы получить

$$\alpha = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t \left[\int_0^u F(s) ds \right] du, \quad (16)$$

где $m = 1/k_1$. Затем мы вводим безразмерное время τ по формуле

$$\tau = t \frac{v_0^{1/5}}{m^{2/5} k^{3/5}}, \quad (17)$$

где k задается вторым выражением (5), и безразмерную силу

$$f(\tau) = \left(\frac{m v_0^2}{k} \right)^{-(3/5)} F(t). \quad (18)$$

Тогда первое соотношение (5) приобретает вид

$$\alpha = k \left(\frac{mv_0^2}{k} \right)^{2/5} f^{2/3}(\tau). \quad (19)$$

Подставляя формулы (17) и (19) в уравнение (16), получаем

$$f^{2/3}(\tau) + \int_0^\tau \left[\int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 - \tau = 0. \quad (20)$$

Интегральное уравнение (20) универсально в том смысле, что оно не содержит какого-либо физического или геометрического параметра. После подстановки

$$g = f^{2/3} \quad (21)$$

и дифференцирования уравнение (20) приобретает вид

$$\frac{d^2g}{d\tau^2} + g^{3/2} = 0. \quad (22)$$

Начальные условия, соответствующие уравнению (22), есть

$$g(0) = 0, \quad \left. \frac{dg}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 1. \quad (23)$$

Численным интегрированием задачи Коши (22)–(23) получаем *безразмерное время удара*

$$g(\tau^*) = 0, \quad \tau^* = 3.21805. \quad (24)$$

Приближенное решение уравнения (20) получено в [19] в виде

$$f(\tau) = -\frac{10\tau^{3/2}}{13.793 + 0.73\tau^{5/2}} \frac{-0.276 + -0.015\tau^{5/2}}{0.2 + 0.013\tau^{5/2}}. \quad (25)$$

Заметим, что безразмерное контактное время удара, полученное из выражения (25), есть $\tau^* = 3.217$.

Из формул (16) и (17) мы можем посчитать относительную скорость во время соударения

$$v = \frac{d\alpha}{dt} = v_0 \left[1 - \int_0^\tau f(\tau_1) d\tau_1 \right]. \quad (26)$$

Если мы определим *коэффициент восстановления* формулами

$$r = \frac{|v(0)|}{|v(\tau^*)|}, \quad (27)$$

тогда из формулы (7) имеем $|v(\tau^*)| = v_0$, так что

$$r = 1. \quad (28)$$

Подставляя значение (28) в формулу (26), мы заключаем, что

$$\int_0^{\tau^*} f(\tau) d\tau = 2. \quad (29)$$

Равенство (29) можно использовать для проверки численного интегрирования задачи (22)–(23). В нашем случае

$$\int_0^{3.21805} f(\tau) d\tau = 2.0. \quad (30)$$

Мы прокомментируем обобщенную теорию, которая позволяет проанализировать большие начальные скорости v_0 . Используя преобразование Лапласа (см. параграф 4.6), применяемое к уравнениям Ламе (4.3.1), Кильчевский [19] показал, как учесть силы инерции. Вилладжио [90] использовал решение для тяжелой сферы, поддерживаемой в равновесии вертикальной силой (полученное Бондаревой в [7]), чтобы оценить влияние удара на деформацию тела вне малой области. С использованием результатов Вилладжио [90] наше уравнение (22) приобретает вид

$$\frac{d^2 g}{d\tau^2} + \Phi(g)g^{3/2} = 0, \quad (31)$$

где для сферы радиусом R , сталкивающейся с твердой плоскостью, имеем

$$\begin{aligned} \Phi(g) = & \left[1 - \frac{2(1-2\nu)^2}{3(1-\nu)} \frac{1}{\pi} (\beta g)^{1/2} \left\{ \ln 2 - \frac{2}{3} + \ln(\beta g)^{1/2} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{\pi} (\beta g)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$k = \left(\frac{3}{4E^* R^{1/2}} \right)^{2/3}, \quad E^* = \frac{1}{\beta_0} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \beta = \frac{k^{3/5} (mv_0^2)^{2/5}}{R}. \quad (33)$$

Начальные условия для уравнений (32) задаются формулами (23). Путем численного решения задачи Коши (32), (23) для ряда значений β можно показать, что максимальная деформация сферы g_{\max} увеличивается с возрастанием β . Отметим также, что для сферы из несжимаемого материала (т. е. $\nu = 0.5$) уравнение (32) сводится к (22).

Контакт упругих тел с силами сцепления рассматривался в [13]. Используя модель Джонсона, Атанацкович и Спасич [45] рассмотрели задачу об упругом ударе с силами сцепления. В этом случае соответствующей задачей Коши вместо (22)–(23) становится задача (в безразмерной форме)

$$\frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = -P, \quad P = a^3 - \beta a^{3/2}, \quad \delta = a^2 - \frac{2}{3} \beta a^{1/2} \quad (34)$$

с условиями

$$\delta(0) = 0, \quad \frac{d\delta}{d\tau}(\tau = 0) = 1. \quad (35)$$

В уравнении (34) δ означает относительное смещение центров масс двух соударяющихся тел, оцениваемое по сравнению с их относительным положением в момент $\tau = 0$, P есть сила между телами, a — радиус контактного кружка и β — коэффициент, описывающий соотношение сил сцепления и упругих сил. Заметим, что при $\beta = 0$ уравнение (34) сводится уравнению (22). Также заметим, что в уравнении (34) параметр a нельзя исключить, поэтому мы не можем найти *однозначно* $a(\delta)$ и $P(\delta)$. Это приводит к различным траекториям сжатия и восстановления, обозначаемым 0–1–2–3 и 3–4–5–6, соответственно (рис. 3).

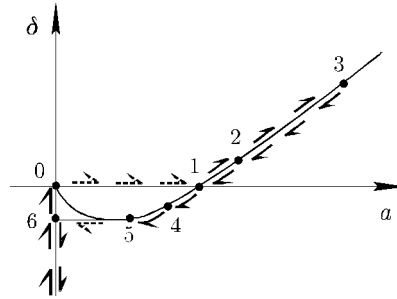


Рис. 3

Система (34), (35) может моделировать как отскок, когда тела разделяются после удара (в точке 5), так и захват, когда относительное движение тел прекращается (в точке 4). В таком случае тела будут оставаться в контакте и совершать колебательное движение после удара. Подробный численный анализ задачи (34), (35) см. в [45].

Задачи

1. На упругом полупространстве $x_3 \geq 0$ расположен твердый диск радиусом a . Сосредоточенная сила F приложена к диску (рис. 4). Предположим, что контакт между диском и полупространством гладкий, так что отсутствуют напряжения сдвига на поверхности контакта.

Определим результирующие напряжения в полупространстве.

- a) Используя уравнение (5.10.20), покажем, что компонента \bar{x}_3 вектора перемещения для точек под диском (т.е. при $x_3 = 0$)

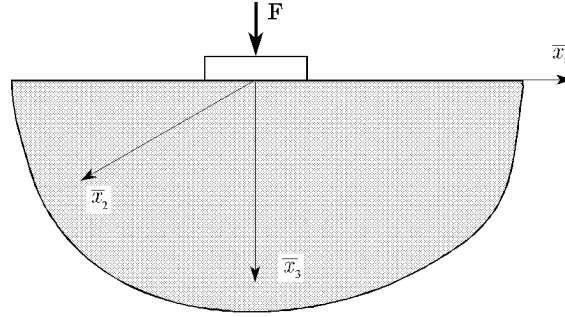


Рис. 4

равна

$$u_3(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Omega} \int \left[\frac{2(1-\nu)}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_2^2}} \right] q(\xi, \eta) d\Omega, \quad (a)$$

где $\Omega = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 = a^2\}$. В формуле (a) функция $q(\xi, \eta)$ удовлетворяет условию

$$q(\xi, \eta) = 0 \quad \text{при } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > a.$$

б) Обратим внимание на то, что $u_3(x_1, x_2, 0) = \text{const}$ из-за жесткости диска. К тому же, так как диск нагружен силой F , покажем, что

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, 0) &= \frac{(1-\nu^2)F}{\pi E} \int_{\Omega} \int \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}} = \text{const}, \\ F &= \int_{\Omega} \int q(\xi, \eta) d\Omega. \end{aligned} \quad (б)$$

в) Затем покажем, что функция

$$q(\xi, \eta) = \frac{q_0}{2\sqrt{1 - (r/a)^2}}, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad q_0 = \frac{F}{\pi a^2}, \quad (в)$$

является решением уравнения б. Отметим сингулярность напряжения на контуре диска. К тому же есть проскальзывание между диском и упругим полупространством. Случай граничных условий без проскальзывания (сцепляющие граничные условия) между диском и полуплоскостью рассматривается в [27].

2. Для случая, описанного в задаче 1, когда диск нагружен эксцентричной силой $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_3$ с точкой приложения $(x_1 = e, x_2 = 0)$,

$x_3 = 0$) при $e < a$, решение можно получить той же процедурой, что и в задаче 1. Таким образом, покажем, что

$$q(r, \vartheta) = \frac{1 + 3\frac{er}{a^2} \cos \vartheta}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} F, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x_2}{x_1},$$

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3(r, \vartheta) = \frac{(1 - \nu^2)F}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta) d\Omega}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}}, \quad (a)$$

где A и B — постоянные. Из первой и четвертой формул a следует, что

$$u_3(r, \vartheta) = \frac{(1 - \nu^2)F}{\pi E} \left[\frac{3}{2} \frac{er}{a^2} \cos \vartheta + 1 \right] \quad (б)$$

(см. [32]). Случай жесткого диска радиусом A , нагруженного двумя силами \mathbf{V} и \mathbf{H} , имеющими линии действия перпендикулярно и параллельно к средней плоскости диска, и двумя парами \mathbf{M}_2 и \mathbf{M}_3 с линиями действия, направленными вдоль осей \bar{x}_2 и \bar{x}_3 соответственно (рис. 5), рассмотрен в [2].

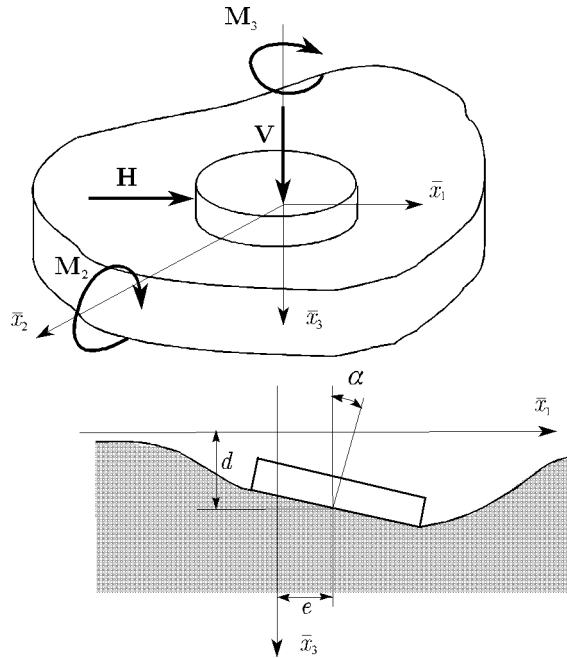


Рис. 5

При отсутствии проскальзывания между диском и упругим полупространством (сцепляющие граничные условия) для смещения

центра диска (e и d) и углов вращения вокруг оси \bar{x}_2 (α) и оси \bar{x}_3 (γ) справедливы формулы

$$\begin{aligned} d &= \frac{\kappa - 1}{16\pi\mu\beta a} V, & \gamma &= \frac{3}{16\mu a^3} M_3, \\ \alpha &= \frac{3(\kappa - 1)(M_2 + \beta a H)}{32\pi\mu\beta a^3(\beta^2 + 1)}, & e &= \alpha\beta a + \frac{4\pi\beta + \kappa - 1}{32\pi\mu\beta a} H, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\kappa = 4 - 4\nu$, $\beta = (\ln \kappa)/(2\pi)$, а ν — коэффициент Пуассона.

3. Получим оценку (9.4.15) для сферы радиусом R . Для этого покажем, что

а) уравнения Ламе (4.3.11) в сферической системе координат для *радиальных* колебаний сводятся к одному уравнению

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - \rho_0 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} = 0, \quad (a)$$

где $\vartheta = (\partial u_\rho / \partial \rho) + 2u_\rho / \rho$.

б) Ищем решение уравнения (а) в виде

$$u_\rho = CW(\rho) \cos(\omega t + \alpha), \quad (б)$$

где C , ω (частота) и α — постоянные. Подставив решение (б) в уравнение (а), покажем, что

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dW}{d\rho} + \left(h^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) W = 0, \quad (6)$$

где $h^2 = \rho_0 \omega^2 / (\lambda + 2\mu)$.

в) Покажем, что граничные условия, соответствующие уравнению (6), следуют из соотношений

$$\sigma_{\rho r}(R) = 0, \quad u_\rho(0) < \infty \quad (z)$$

и имеют вид

$$(\lambda + 2\mu) \frac{dW(R)}{d\rho} + 2\lambda \frac{W(R)}{R} = 0, \quad W(0) < \infty. \quad (d)$$

Решение уравнения (6), удовлетворяющее второму условию (d) есть

$$W(\rho) = C \frac{(h\rho) \cos h\rho - \sin h\rho}{(h\rho)^2}, \quad (e)$$

где C — произвольная постоянная.

г) Покажем, что первое условие (e) приводит к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} hR}{(hR)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} (hR)^2}. \quad (\text{ж})$$

У Лява [26] первые шесть корней уравнения (ж) найдены в частном случае, когда $\lambda = \mu$.

Глава 10

Устойчивость упругих тел

10.1 Введение

В этой главе кратко обсуждается задача определения устойчивости данного положения равновесия упругого тела. Сначала мы рассмотрим понятие устойчивости. Подчеркнем, что на устойчивость может быть исследована не механическая система (такая как упругое тело), а только определенные ее *положения* (движения или равновесия). Таким образом, когда мы говорим, что тело устойчиво, мы имеем в виду, что его определенное и четко указанное положение равновесия устойчиво. Английское слово *stable* (устойчивый) происходит от латинского *stabilis* — *стоять*. Чаще всего так называется такое свойство состояния (механической) системы, при котором она остается неизменна или мало изменяется в случае, когда подвержена возмущениям.

Упругое тело, находящееся в положении равновесия, можно рассматривать как *динамическую* и как *статическую* систему. Каждая динамическая система имеет в качестве независимой переменной время и множество зависимых переменных (векторы положений, скорости, напряжения, деформации и т. д.), значения которых заданы для каждого момента времени. Типы возмущений, которые может испытывать динамическая система, определяют два основных понятия устойчивости: *устойчивость* и *структурная устойчивость* (грубость).

В первом случае устойчивости (также называемой устойчивостью по Ляпунову) мы исследуем поведение определенного состояния тела в случае, когда тело подвержено изменению *начальных* условий. Таким образом, анализируются движение тела и влияние *начальных* условий на это движение. Во втором случае — случае структурной устойчивости мы исследуем поведение тела (основной системы), когда вводятся изменения *в системе* (например, дополнительная сила, изменение формы тела, изменение свойств и т. д.). Система с изменениями (в самой системе) образует *близкую* систему. Основная система, устойчивость которой исследуется, является структурно устойчивой, если близкие системы имеют качественно то же поведение, что и основная система. Конечно, мы должны определить, что подразумевать под *близкой* системой и под *качественно* одинаковым (см. [55]).

Существует три более или менее независимых подхода к задачам устойчивости упругих тел. В следующем разделе мы сформулируем определения устойчивости и затем применим их к конкретным задачам.

10.2 Определения устойчивости

Задачи устойчивости упругих тел принадлежат классу нелинейных задач механики. А именно существует большая разница в выводах, которые можно сделать путем линейного анализа по сравнению с нелинейным анализом устойчивости. Нелинейность в задаче может быть геометрической (нелинейная связь между компонентами деформаций и компонентами вектора перемещений), физической (из-за нелинейных уравнений состояния) или и той и другой. Анализ устойчивости упругих тел начался с известной работы Эйлера 1744 года. Эйлер использовал *статический* критерий, чтобы определить границу устойчивости для стержня, сжатого осевой нагрузкой, при нескольких видах граничных условий.

Следуя Кнопсу и Уилкесу [63] и Атанацковичу [43], мы даем следующие определения устойчивости и неустойчивости для энергетического метода, метода Эйлера и динамического метода.

1. *Устойчивость и неустойчивость согласно статическому критерию Эйлера (также называемому критерием смежного положения равновесия)*

Определение 1. Положение равновесия упругого тела называется *устойчивым*, если при данной нагрузке и данных граничных условиях не существует никаких других соседних (бесконечно близких) положений равновесия.

Определение 2. Положение равновесия упругого тела называется *неустойчивым*, если при данной нагрузке и данных граничных условиях существует, по крайней мере, еще одно соседнее положение равновесия.

Наименьшее значение параметра нагрузки, при котором существует смежное положение равновесия называется *критическим значением параметра*.

Из теоремы единственности (см. параграф 4.4, где рассматриваются линейные задачи) следует, что (для тех случаев граничных условий, которые там рассмотрены) существует единственное решение уравнений равновесия. Следовательно, невозможно существование смежных соседних положений, и поэтому все положения равновесия устойчивы. Таким образом, критерий Эйлера может дать нетривиальные результаты только в случае нелинейных упругостатических задач.

На самом деле вращение элемента тела (см. параграф 2.4) должно приниматься во внимание при записи уравнений равновесия, если нужно проанализировать устойчивость критерием Эйлера в случае материально линейного (подчиняющегося закону Гука) упругого тела. Поскольку, используя критерий Эйлера, мы исследуем условия, при которых уравнения равновесия имеют более, чем одно решение, то применяются методы теории бифуркации, чтобы определить критические

значения параметров. Допустим, что уравнения, описывающие равновесие, записываются в виде

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{G} — нелинейный оператор, отображающий банахово пространство Y в другое банахово пространство Z , \mathbf{y} — n -мерный вектор, описывающий состояние тела, зависящее от положения (т. е. $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$), а λ — m -мерный вектор, описывающий параметры (такие, как нагрузки). Положим далее, что положение, устойчивость которого мы исследуем, — это $\mathbf{y}_0 = 0$ и что

$$\mathbf{G}(0, \lambda) = 0, \quad (2)$$

т. е. $\mathbf{y}_0 = 0$ — положение равновесия для любого значения λ . Согласно эйлеровскому критерию устойчивости критическое значение $\lambda = \lambda_{cr}$ — это такое значение, что при $\lambda > \lambda_{cr}$ существует по крайней мере одно отличное от тривиального ($\mathbf{y}_0 = 0$) решение уравнений (1). Точка ($\mathbf{y}_0 = (0 \times \lambda_{cr}) \in Y \times R^m$) называется *точкой бифуркации* $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda)$ (см. [50]). Нашей целью является нахождение точки бифуркации $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda)$. Наименьшее значение λ , при котором существует бифуркация, — это λ_{cr} . Есть несколько процедур определения λ_{cr} . Запишем уравнение (1) в виде

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{y} + \mathbf{N}(\mathbf{y}, \lambda), \quad (3)$$

где $\mathbf{B}(\lambda)$ — производная Фреше \mathbf{G} в точке $\mathbf{y}_0 = 0$ (линеаризация $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda)$), а $\mathbf{N}(\mathbf{y}, \lambda)$ — нелинейная часть \mathbf{G} , удовлетворяющая условию $\mathbf{N}(\mathbf{y}, \lambda) = o(\|\mathbf{y}\|)$. Рассмотрим задачу

$$\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{y} = 0. \quad (4)$$

Предположим, что $\mathbf{B}(\lambda)$ — ограниченный линейный оператор. Положим далее, что λ_0 — собственное значение $\mathbf{B}(\lambda)$, т. е. существует нетривиальный вектор \mathbf{w}_0 , такой, что

$$\mathbf{B}(\lambda_0)\mathbf{w}_0 = 0. \quad (5)$$

Следующий важный результат доказан в [50]: *необходимым условием того, что $(0, \lambda_0)$ — точка бифуркации $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda)$, является то, что λ_0 — собственное число $\mathbf{B}(\lambda)$.*

В технических приложениях это условие обычно рассматривается как достаточное для того, чтобы наименьшее λ_0 , удовлетворяющее уравнению (5), считать равным λ_{cr} . Достаточное условие того, что точка $(0, \lambda_0)$ является точкой бифуркации оператора $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda)$, может быть сформулировано разными способами. Один из наиболее известных результатов представлен в следующей теореме Красносельского

[21]: если λ_0 — собственное число уравнения (5) нечетной алгебраической кратности, то точка $(0, \lambda_0)$ — точка бифуркации оператора $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \lambda)$.

Чтобы определить алгебраическую кратность собственного числа, заметим, что вектор \mathbf{w}_0 принадлежит нулевому пространству оператора $\mathbf{B}(\lambda_0)$, которое мы обозначим $N[\mathbf{B}(\lambda_0)]$. Размерность $N[\mathbf{B}(\lambda_0)]$ (обозначаемая $\dim N[\mathbf{B}(\lambda_0)]$) называется *геометрической кратностью* λ_0 . Часто случается, что для линейных операторов в банаховых пространствах существует целое число, при котором

$$\dim N[\mathbf{B}(\lambda_0)^r] < \infty. \quad (6)$$

Пусть r — такое число, что

$$\dim N[\mathbf{B}(\lambda_0)^{r+1}] = \dim N[\mathbf{B}(\lambda_0)^r] \quad (7)$$

для любого $r_1 \geq r$. Тогда r называется *алгебраической кратностью* λ_0 . Заметим, что то условие, что собственное число имеет нечетную алгебраическую кратность, можно заменить другими условиями (см. [42]).

2. Устойчивость согласно энергетическому методу

Определение 3. Положение равновесия упругого тела под действием консервативных нагрузок является устойчивым, если в этом положении полная потенциальная энергия внутренних сил (т.е. напряжений) и внешних сил (объемных и поверхностных) имеет слабый относительный минимум в классе возможных перемещений.

Определение 4. Положение равновесия упругого тела под действием консервативных нагрузок называется неустойчивым, если в этом положении полная потенциальная энергия не имеет минимума в классе возможных перемещений.

В определениях 3 и 4 возможные перемещения — это бесконечно малые перемещения, удовлетворяющие кинематическим связям¹. Важно заметить, что энергетический метод есть *статический* метод, так как он сравнивает значения полной энергии в двух положениях, которые связаны возможным перемещением. Он мотивирован теоремой Лагранжа–Дирихле для механических систем с конечным числом степеней свободы.

Сформулируем необходимое условие для того, чтобы функционал f имел слабый относительный минимум. Пусть $f : Y \rightarrow R$ — функционал, отображающий банахово пространство Y с нормой $\|\cdot\|$ во множество вещественных чисел R . Допустим, что f имеет вторую производную Гато $D^2 f(\mathbf{y}_0, \eta, \eta)$ в точке $\mathbf{y}_0 \in Y$ в направлении η , где $\eta = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$,

¹ Для определения возможных перемещений см. параграф 7.5.

$\mathbf{y} \in Y$. Тогда необходимым условием того, чтобы функционал f имел слабый относительный минимум в точке \mathbf{y}_0 , является неравенство

$$D^2 f(\mathbf{y}_0, \eta, \eta) \geq 0 \quad (8)$$

для всех $\eta \in B_\epsilon(0)$, где $B_\epsilon = \{\eta : \eta \in Y, \|\eta\| \leq \epsilon\}^2$. Достаточное условие существования минимума имеет вид

$$D^2 f(\mathbf{y}_0, \eta, \eta) \geq \gamma(\|\eta\|)\|\eta\|, \quad (9)$$

где $\gamma(\tau)$ — неотрицательная непрерывная функция на промежутке $(0, \infty)$, такая, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau) = +\infty. \quad (10)$$

Условие (10) часто бывает трудно проверить. Поэтому в технических приложениях критическое значение параметра определяется следующим образом. *Предполагается*, что положение устойчиво, пока выполняется неравенство (8).

Наименьшее значение параметра, при котором условие (8) нарушается, называется *критическим значением*.

3. Устойчивость согласно динамическому методу

Чтобы определить устойчивость согласно *динамическому методу*, нам нужно несколько предварительных понятий. Определим так называемую двухметрическую устойчивость по Ляпунову. Как видно из главы 4, краевые задачи упругости и термоупругости можно записать в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial t} = \bar{F}_i(\chi_k, \mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

В системе (11) n функций $\chi_i(\mathbf{x}, t)$ определены для каждого $\mathbf{x} \in B$, где B — это часть E^3 , занимаемая телом при всех значениях времени $t \in [t_0, \infty)$. Для любого фиксированного $t = t_1$ функции $\chi_i(\mathbf{x}, t)$ определяют положение тела и удовлетворяют определенной гладкости и граничным условиям. Скажем, что для фиксированного момента времени t функции $\chi_i(\mathbf{x}, t)$ принадлежат нормированному линейному пространству Y . В наших приложениях, Y — это определенное пространство Банаха или пространство Соболева. Начальные условия задаются в виде

$$q_i(\mathbf{x}) = \chi_i(\mathbf{x}, t_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

² Слабый минимум определен в вариационном исчислении. Он означает, что норма на Y такова, что “возмущенные” функции \mathbf{y} “близки” к \mathbf{y}_0 и что градиент \mathbf{y} “близок” к градиенту \mathbf{y}_0 . Это достигается выбором нормы на Y . Например, если $B_\epsilon = \{\eta : \eta \in Y, |\eta_i| + |\partial \eta_i / \partial x_j| \leq \epsilon\}$, то неравенство (8) — необходимое условие слабого минимума.

и налагаются на решение системы (11). Требуется, чтобы начальные условия принадлежали подмножеству \hat{Y} пространства Y , т. е. $\hat{Y} \subset Y$. Для системы (11)–(12) мы предполагаем, что решение существует для всех значений $t \in [t_0, \infty)$ и что функции $\chi_i(\mathbf{x}, t)$ принадлежат пространству Y при всех $t \in [t_0, \infty)$. Если существуют функции $\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, n$, такие, что

$$\bar{F}_i(\hat{\chi}_k(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

то мы называем $\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k(\mathbf{x})$ решением уравнения (11), соответствующим положению равновесия. Так как мы анализируем устойчивость положений равновесия, то в наших приложениях решения, характеризующие положения равновесия, будут существовать всегда. Допустим, что *начальные* условия тела подвергнуты возмущению. Пусть

$$u_i(S, t) = \chi_i(\mathbf{x}, t) - \chi_i(\mathbf{x}, t_0), \quad (14)$$

где $\chi_j(\mathbf{x}, t_0) = \hat{\chi}_j(\mathbf{x})$ — решение, соответствующее положению равновесия, устойчивость которого мы исследуем. Заметим, что в случае, когда нет возмущения в начальных условиях, мы имеем $\chi_i = \hat{\chi}_i$, так что

$$u_i(\mathbf{x}, t) \equiv 0. \quad (15)$$

В противном случае, каждое возмущение начальных условий χ_i определяет начальное условие для u_i . Подставляя формулу (14) в уравнение (11), получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = G_i(u_k, \mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

где $G_i = \bar{F}_i(u_k + \hat{\chi}_k, \mathbf{x}, t)$. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Назовем \mathbf{u} возмущением решения, характеризующего положение равновесия. Тогда систему (16) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t), \quad (17)$$

при $\mathbf{u} \in Y$. Здесь Y — нормированное векторное пространство. Начальное условие для \mathbf{u} (т. е. возмущение начальных условий χ_i) обозначим через

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (18)$$

В формуле (18) мы имеем $\mathbf{u} \in Y_0 \subset Y$. Для того чтобы определить расстояние между элементом \mathbf{u} и нулевым элементом $\mathbf{u} = 0$ пространства Y , мы вводим вещественный функционал (метрику) $\rho : Y \times [t_0, \infty) \rightarrow R$ со свойствами

$$\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) > 0 \quad \text{для } \mathbf{u} \neq 0, \quad \bar{\rho}(0, t) = 0. \quad (19)$$

В случае, когда функционал $\bar{\rho}$ явно не зависит от времени t , мы будем писать $\bar{\rho}(\mathbf{u})$. Функционал, удовлетворяющий условиям (19), называется *метрикой*. Заметим, что норма в нормированных векторных пространствах может быть использована в качестве функционала $\bar{\rho}$. Допустим, что даны две метрики $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$, причем $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_0(\mathbf{u})$ не зависит от t . Мы используем $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}, t)$ — чтобы измерить возмущение в начальный момент времени t_0 и $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ — чтобы измерить возмущение в любой момент времени $t \in [t_0, \infty)$. Ограничим функцию, описывающую начальное возмущение (возмущение начальных условий) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, требованием, чтобы выполнялось следующее неравенство: $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)) = \bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) < \delta$. Здесь δ — произвольное положительное число. Заметим, что $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$ можно использовать для определения окрестности $\mathbf{u}_0 = 0 \in \mathbf{Y}_0$ и $\mathbf{u} = 0 \in \mathbf{Y}$ соответственно. При данных d_0 и d_1 замкнутые шары с радиусом d_0 и d_1 и нулем в \mathbf{Y}_0 и \mathbf{Y} суть

$$B_0(0, d_0) = \{\mathbf{p} : \mathbf{p} \in \mathbf{Y}_0, \bar{\rho}_0(\mathbf{p}) \leq d_0\}, \quad (20)$$

$$B(0, d) = \{\mathbf{p} : \mathbf{p} \in \mathbf{Y}, \bar{\rho}(\mathbf{p}, t) \leq d \text{ для всех } t \geq t_0\}.$$

Метрики $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$ не выбираются полностью произвольно. А именно мы требуем, чтобы $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ была *непрерывна* по t и чтобы $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ была *непрерывна* по отношению к $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_0(\mathbf{u})$ для $t = t_0$ при $\bar{\rho}_0 = 0$. Второе требование формулируется следующим образом: при любом данном $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}(S, t_0), t_0) < \epsilon$, если $\mathbf{u}_0(S)$ удовлетворяет $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0(S, t_0)) < \delta(\epsilon, t_0)$. Например, если мы возьмем $\mathbf{u} = u$, $\mathbf{x} = S$, $t_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(u(S, t), t) &= \int_0^L u^2(S, t) dS, \\ \bar{\rho}_0(u(S, 0)) &= \int_0^L \left[u^2(S, 0) + \left(\frac{\partial u(S, 0)}{\partial S} \right)^2 \right] dS, \end{aligned} \quad (21)$$

то метрика $\bar{\rho}(u, t)$ непрерывна по отношению к $\bar{\rho}_0(u)$ в точке $t_0 = 0$ при $\delta(\epsilon, t_0) = \epsilon$ (заметим, что метрика $\bar{\rho}_0(u)$ не непрерывна по отношению к $\bar{\rho}(u, t)$ при $\bar{\rho}(u, t) = 0$). Условие непрерывности $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ по отношению к $\bar{\rho}_0(\mathbf{u})$ для $t = t_0$ при $\bar{\rho}_0 = 0$ вводится, чтобы избежать неустойчивости в начальный момент. Далее, мы предполагаем, что $t_0 \in [0, T]$. Сформулируем определение устойчивости по отношению к двум метрикам $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$.

Определение 5. Тривиальное решение $\mathbf{u}(S, t) \equiv 0$ системы (17)–(18) устойчиво по Ляпунову по отношению к двум метрикам $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon, t_0)$, что выполнение неравенства

$$\bar{\rho}_0(\mathbf{u}(S, t_0)) = \bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0(S)) < \delta(\epsilon, t_0), \quad (22)$$

влечет за собой выполнение неравенства

$$\bar{\rho}(\mathbf{u}(S, t), t) < \epsilon. \quad (23)$$

Вообще говоря, число $\delta(\epsilon, t_0)$ зависит от выбора начального момента времени $t_0 \in [0, T]$. Если $\delta(\epsilon, t_0)$ не зависит от t_0 , то система называется равномерно устойчивой.

Определение 6. Тривиальное решение $\mathbf{u}(S, t) \equiv 0$ системы (17)–(18) неустойчиво по Ляпунову по отношению к двум метрикам $\bar{\rho}_0(\mathbf{u})$ и $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ (напомним, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ должна быть непрерывной по времени t и непрерывной по отношению к $\bar{\rho}_0(\mathbf{u})$ для $t = t_0$ при $\bar{\rho}_0 = 0$), если существуют такие число $\epsilon > 0$ и начальный момент времени t_0 , что для любого числа δ (сколь угодно малого) существует по крайней мере одно такое $\bar{\mathbf{u}}_0$ при $\bar{\rho}_0(\bar{\mathbf{u}}_0) < \delta$, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t_1) \geq \epsilon$ для некоторого момента времени $t_1 \in [t_0, \infty)$, где \mathbf{u} — решение системы (17)–(18) при $\bar{\mathbf{u}}_0$ в качестве начального условия.

Определение 7. Тривиальное решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ системы (17)–(18) называется асимптотически устойчивым тогда и только тогда, если оно устойчиво по Ляпунову по отношению к двум метрикам $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ и если существует такое положительное вещественное число δ , зависящее от t_0 , что неравенство $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0) < \delta$ влечет за собой выполнение соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\rho}(\mathbf{u}, t) \rightarrow 0$, где \mathbf{u} — решение системы (17), (18) с \mathbf{u}_0 в качестве начального условия.

Заметим, что $\mathbf{u}(S, t) \equiv 0$ может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от выбора $\bar{\rho}_0(\mathbf{u})$ и $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$. Также мы можем использовать только одну метрику $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ и определить $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\mathbf{u}, t)_{t=0}$ как метрику для начального возмущения.

Дав три определения устойчивости, мы можем задать вопрос: все ли определения устойчивости совместимы? Является ли критическое значение параметра нагрузки одинаковым, когда оно определяется по энергетическому методу, методу Эйлера и по динамическому методу? Если критические значения одинаковы, возможно ли тогда оставить одно определение устойчивости и вывести два других как теоремы? С этих позиций динамический метод имеет все основания, чтобы быть взятым за определение устойчивости, а о ценности двух других методов можно судить по тем ограничениям, которые должны быть введены, чтобы вывести эти два метода из динамического. Обсудим теперь эти вопросы.

Если мы хотим сравнить метод Эйлера с двумя другими методами, то это сравнение можно провести только для класса задач, к которым все три метода применимы. Вообще говоря, метод Эйлера применим к тем задачам, в которых нагрузка является консервативной. Можно показать (см. [43]), что для неконсервативных нагрузок (колонна Бэка) метод Эйлера может давать ошибочные результаты. Интересно, что при некоторых неконсервативных нагрузках, таких, как в случае стержня Флюгера, метод Эйлера дает верный ответ для границы устойчивости. Другое ограничение метода Эйлера — это существование прощелкивания. Может случиться (и действительно случается у пологих оболочек), что *малое* возмущение переводит систему

из одного положения равновесия в другое, которое не является *близким* к начальному положению. Метод Эйлера не может обнаружить такую неустойчивость, так как он проверяет только смежные положения. Принимая все это во внимание, заключаем, что для консервативных систем (применим критерий Эйлера), когда полная потенциальная энергия не имеет изолированного минимума в положении равновесия, другое положение равновесия существует в окрестности этого положения равновесия, т. е. существует слабое решение линеаризованных уравнений равновесия [62]. Таким образом, неустойчивость по энергетическому методу влечет за собой неустойчивость по критерию Эйлера.

Перед тем, как сравнивать энергетический и динамический методы, заметим, что иногда определение устойчивости, связанное с энергией, формулируется следующим образом: положение равновесия устойчиво, если работа, совершенная нагрузками на возможном перемещении, совместимом с геометрическими граничными условиями, не превышает работу внутренних сил (увеличение потенциальной энергии внутренних сил). В противном случае положение называется неустойчивым. По такому определению устойчивость согласно энергетическому методу эквивалентна требованию, чтобы вторая вариация полной потенциальной энергии была неотрицательна для всех допустимых бесконечно малых деформациях. В нашем определении устойчивости согласно энергетическому методу мы требуем существование изолированного *минимума* полной потенциальной энергии. В этом случае положительная вторая вариация полной потенциальной энергии — единственное условие устойчивости. Так как связанное с энергией определение устойчивости, которое мы используем (изолированным минимумом) накладывает более строгие ограничения на полную потенциальную энергию, мы можем сравнить энергетический и динамический методы. Вообще говоря, доказана их эквивалентность при особом выборе метрик для начальных и последующих возмущений и при некоторых дополнительных ограничениях на полную потенциальную энергию. А именно эквивалентность следует, если мы возьмем более сильные достаточные условия для существования слабого изолированного минимума.

В заключение мы можем сказать, что методы Эйлера, энергетический и динамический иногда можно сравнивать, а иногда нет. Поэтому мы берем определения устойчивости во всех трех критериях как *независимые*. Методы Эйлера и энергетический являются статическими методами. Это значит, что, если положение равновесия устойчиво, в анализе согласно этим двум методам мы используем только свойства материала (уравнения состояния), которые определяют статическое поведение. Эти свойства изучены гораздо лучше, чем динамические. С другой стороны, когда мы используем динамический метод для анализа устойчивости, нам надо знать полную систему *динамиче-*

ских уравнений и уравнений состояния, чтобы исследовать устойчивость положения *равновесия*. Таким образом, мы пришли к заключению, что методы Эйлера и энергетический являются “естественными” методами для анализа устойчивости состояний равновесия (см. [92]).

10.3 Основные теоремы динамического критерия

Представим теперь основные теоремы о двухметрической устойчивости А.М. Ляпунова. Ляпунов предложил классификацию методов анализа устойчивости. В его классификации различаются два метода: первый и второй. Первый метод, называемый также *непрямой метод*, основан на анализе дифференциальных уравнений движения и свойств их *решений*. Вторым, или *прямой метод* основан на анализе дифференциальных уравнений движения без использования решений дифференциальных уравнений. В этой части мы продемонстрируем элементы второго метода Ляпунова. Для более подробного обсуждения см., например, [34, 15, 42, 62]. Тот факт, что при использовании второго метода Ляпунова нам не нужно знать решение уравнений (мы должны знать, что решение существует в определенном функциональном пространстве), делает этот метод очень привлекательным. Однако при применении его к практическим задачам мы часто сталкиваемся с математическими трудностями. Также не существует общего метода построения функционала Ляпунова, имеющего принципиальную важность для этой теории. Начнем с определений функционала Ляпунова.

Пусть $V(\mathbf{u}, t)$ — функционал $V: \mathbf{Y} \times [t_0, \infty) \rightarrow R$, который для фиксированного момента времени $t \in [t_0, \infty)$ отображает $\mathbf{u}(\cdot, t) \in \mathbf{Y}$ во множество вещественных чисел R . Положим далее, что функционал V удовлетворяет условию $V(0, t) = 0$. Пусть $B(0, d_1)$ — замкнутый шар радиусом d_1 в пространстве \mathbf{Y} . Тогда имеем следующие определения.

Определение 1. Функционал $V(\mathbf{u}, t)$ положительно (отрицательно) определен на замкнутом шаре $B(0, d_1)$ по отношению к метрике $\bar{\rho}$, если он удовлетворяет условию $V \geq 0$ ($V \leq 0$) для всех $t \in [t_0, \infty)$ и всех $\mathbf{u}(\cdot, t) \in B(0, d_1) \subset \mathbf{Y}$ и для произвольного $0 < \epsilon < d_1$ существует положительная константа $\delta(\epsilon)$, такая, что $V \geq \delta(\epsilon)$ ($-\delta(\epsilon) \geq V$) для всех $\mathbf{u}(\cdot, t) \in B(0, d_1) \subset \mathbf{Y}$, таких, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) \geq \epsilon$.

Замечание. Из определения следует, что свойство функционала быть положительно определенным зависит от пространства \mathbf{Y} . В приложении граничные условия и регулярность элементов пространства \mathbf{Y} будут решающими при установлении положительной определенности. В частности, мы можем выбрать $\delta(\epsilon) = \epsilon$ и $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) = \epsilon$, так что функционал V положительно определен по отношению к $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$, если $V(\mathbf{u}, t) \geq \bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$.

Определение 2. Функционал $V(\mathbf{u}, t)$ непрерывен по отношению к метрике $\bar{\rho}$ в момент времени $t = t_0 \in [0, T]$ и при $\bar{\rho}_0 = 0$, если для произвольного малого положительного числа $\epsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta(\epsilon)$, что $|V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0), t_0)| < \epsilon$ выполняется при любом $\bar{\rho}_0 < \delta(\epsilon)$.

Замечание. Если функционал V непрерывен по отношению к $\bar{\rho}_0$ при $t = t_0$ и $\bar{\rho}_0 = 0$ и если $|V| > \epsilon$ для некоторых $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \bar{\mathbf{p}}$, то $\bar{\rho}_0(\bar{\mathbf{p}}) \geq \delta(\epsilon)$. Чтобы доказать это, предположим, что $\bar{\rho}_0(\bar{\mathbf{p}}) < \delta(\epsilon)$. Тогда из непрерывности V следует, что $|V| < \epsilon$, что представляет противоречие.

Сформулируем теперь главные теоремы теории устойчивости (критерий устойчивости Мовчана–Ляпунова):

Теорема 1. Для того чтобы тривиальное решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ системы уравнений (10.2.17), (10.2.18) было устойчивым по Ляпунову по отношению к метрикам $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$, необходимо и достаточно, чтобы в достаточно малой окрестности $B(0, d_1)$ точки $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \in \mathbf{Y}$ существовал функционал $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$ со свойствами:

- 1) $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$ положительно определен по отношению к $\bar{\rho}$,
- 2) $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$ непрерывен по отношению к $\bar{\rho}_0$ при $t = t_0$ и $\bar{\rho}_0 = 0$,
- 3) $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$ не возрастает (как функция от t) на решениях системы (10.2.17), (10.2.18).

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть система (10.2.17), (10.2.18) устойчива по Ляпунову. Рассмотрим окрестность нуля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, состоящую из таких элементов $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{Y}$, для которых мы имеем $\bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t) < d_1$, если $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)) < d_0$ для некоторых значений d_1 и d_0 . Затем рассмотрим функционал

$$V(\mathbf{u}, t) = \sup_{\tau \in [t, \infty)} \bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \tau), \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

Функционал (1) удовлетворяет всем условиям, сформулированным в теореме 1. Чтобы увидеть это, заметим, что

$$V(\mathbf{u}, t) \geq \bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2)$$

так что, функционал V положительно определен (при $\delta = \epsilon$ в определении 1 этого раздела). Так как

$$V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1), t_1) \geq V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2), t_2), \quad \text{если } t_1 \leq t_2, \quad (3)$$

следовательно, функционал V не возрастает. Заметим, что в силу определения (1) неравенство (2) выполняется, даже если решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ неустойчивое. Чтобы показать, что функционал V непрерывен по отношению к метрике $\bar{\rho}_0$ при $t = t_0$ и $\bar{\rho}_0 = 0$, выберем $\epsilon < d_1$. Так как

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ устойчиво, то существует такое число $\delta(\epsilon)$, что из неравенства $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}) < \delta(\epsilon)$ следует неравенство $\rho(\mathbf{u}(S, t), t) < \epsilon$ для $t > t_0$. Поэтому

$$\sup_{\tau \in [t, \infty)} \bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \tau) = V(\mathbf{u}, t) < \epsilon < d_1, \quad (4)$$

т. е. функционал V непрерывен по отношению к метрике $\bar{\rho}_0$ при $t = t_0$ и $\bar{\rho}_0 = 0$.

Достаточность доказывается следующим образом. Допустим, что нам дан функционал V со свойствами, сформулированными в теореме 1. Для данного числа $\epsilon > 0$ мы должны найти такую величину $\delta(\epsilon)$, что из неравенства $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0) < \delta$ следует, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) < \epsilon$ для всех $t > t_0$. Так как функционал V положительно определен при заданном $\epsilon > 0$, мы можем найти такое $\epsilon_1(\epsilon) > 0$, что $V(\mathbf{u}, t) \geq \epsilon_1(\epsilon)$ для всех $t \geq t_0$, если $\rho(\mathbf{u}, t) \geq \epsilon > 0$. Так как функционал V непрерывен по отношению к метрике $\bar{\rho}_0$ при $t = t_0$ и $\bar{\rho}_0 = 0$, можно найти такое число $\delta_1(\epsilon_1) > 0$, что $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0), t_0) < \epsilon_1$, если метрика $\bar{\rho}_0$ удовлетворяет неравенству $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)) = \bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0) < \delta_1(\epsilon_1)$. Теперь используем тот факт, что метрика $\bar{\rho}$ непрерывна по отношению к метрике $\bar{\rho}_0$ при $t = t_0$. Следовательно, при данном $\epsilon > 0$ мы можем найти такую константу $\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$, что $\bar{\rho} < \epsilon$ при $t = t_0$, если $\bar{\rho}_0 < \delta_2(\epsilon)$. Пусть $\delta(\epsilon)$ равно меньшему из чисел δ_1 и δ_2 , т. е. $\delta(\epsilon) = \min[\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)]$. Тогда при данном $\epsilon > 0$ существуют величины $\epsilon_1(\epsilon)$ и $\delta(\epsilon)$, такие, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) < \epsilon$ и $V(\mathbf{u}, t) \leq \epsilon_1$ при $t = t_0$, если $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0) < \delta(\epsilon)$. Применим тот факт, что V не возрастает, чтобы показать, что неравенство $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) < \epsilon$ выполняется для всех $t > t_0$. Предположим теперь, что неравенство $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) < \epsilon$ не выполняется. Тогда существует момент времени $t_1 \in [t_0, \infty)$, такой, что $\bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1), t_1) = \epsilon$. Так как функционал V положительно определен по отношению к метрике $\bar{\rho}$, то, следовательно, $V(\mathbf{u}(S, t_1), t_1) \geq \epsilon_1(\epsilon)$. Это невозможно, так как функционал V не возрастает и $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0), t_0) < \epsilon_1$.

Критерием асимптотической устойчивости служит следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы решение системы (10.2.17)–(10.2.18) было асимптотически устойчиво по отношению к метрикам $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво по Ляпунову (см. теорему 1) и чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t) \rightarrow 0. \quad (5)$$

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Предположим, что решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. Покажем, что функционал $V(\mathbf{u}, t)$ удовлетворяет условию (5). Так как из асимптотической устойчивости следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\rho}(\mathbf{u}, t) = 0$, то для произвольного малого $\epsilon > 0$ существует такое $t_1 < \infty$, что для $t > t_1$ мы имеем неравенство $\bar{\rho} < \epsilon$. Следовательно, для функционала V , задаваемого выражением (1), имеем $V = \sup_{\tau \in [t, \infty)} \bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \tau) < \epsilon$ для $t > t_1$. Таким образом, $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0$.

Допустим, что функционал V , удовлетворяющий условию (5), существует и что решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Так как функционал V положительно определен по отношению к метрике $\bar{\rho}$, то для данного $\gamma > 0$ существует такое число $\delta_1(\gamma) > 0$, что $V \geq \delta_1$, если $\rho \geq \gamma$. Однако так как $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0$, то существует такое $\tilde{t} \in [t_0, \infty)$, что $V(\mathbf{u}, t) < \delta_1(\gamma)$ при $t > \tilde{t}$. Мы также потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) < \gamma$ при $t > \tilde{t}$. Чтобы это увидеть, предположим противное, т. е. что существует такая последовательность (скажем $\tilde{t} < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$), что $\bar{\rho}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i), t_i) > \gamma$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда, так как функционал V положительно определен, имеем $V(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i), t_i) > \delta_1(\gamma)$ при $i = 1, 2, \dots, k$, что противоречит. Следовательно, $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) < \gamma$ для $t > \tilde{t}$. Так как γ — произвольное число, то $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Общего способа построения функционала V не существует. Часто он является функционалом энергии системы или некоторой величиной, связанной с энергией (см. [15, 34, 62]).

Наконец, заметим, что две метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны (в действительности, полуэквивалентны), если существуют такие положительные константы c_1 и c_2 , что

$$c_1 \rho_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t) \leq \rho_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t) \leq c_2 \rho_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t). \quad (6)$$

Можно показать, что устойчивость (неустойчивость) по отношению к метрикам $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$ влечет за собой устойчивость (неустойчивость) относительно $\bar{\rho}_{10}$ и $\bar{\rho}_1$, если $\bar{\rho}_{10}$ эквивалентна $\bar{\rho}_0$ и если $\bar{\rho}_1$ эквивалентна $\bar{\rho}$.

10.4 Примеры

Рассмотрим несколько примеров анализа устойчивости.

1. Потеря устойчивости круглой пластины

Рассмотрим круглую пластину, показанную на рис. 1. Положим, что пластина имеет радиус R и нагружена таким образом, что вектор напряжений имеет радиальную компоненту интенсивностью $-T_0$. Пластина жестко закреплена по краям. Используя теорию пластин фон Кармана, мы исследуем устойчивость пластины по методу Эйлера. Допустим, что деформация осесимметрична и нет действующих объемных сил, т. е. $q_3 = 0$.

Дифференциальные уравнения этой задачи имеют вид (см. задачу 2 главы 8)

$$\begin{aligned} D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r T_r \frac{dW}{dr} \right), \\ \frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 T_r) \right] &= -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия, соответствующие пластине, показанной на рис. 1, суть

$$\begin{aligned} \frac{dT_r(0)}{dr} = 0, \quad \frac{dW(0)}{dr} = 0, \\ T_r(R) = -T_0, \quad \frac{dW}{dr} \Big|_{r=R} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

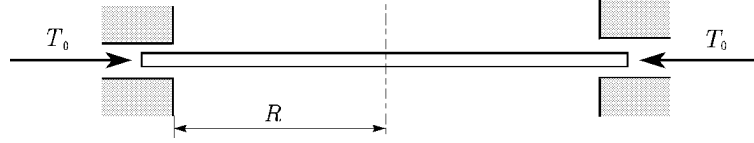


Рис. 1

Уравнения (1) учитывают симметрию задачи. Заметим, что

$$T_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (3)$$

так что система (1) принимает вид (см. [95])

$$\begin{aligned} D \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{d\Phi}{dr} \frac{dW}{dr}, \\ \frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 T_r) \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \xi = \frac{r}{R}, \quad \lambda^2 = \frac{R^2 T_0}{D} = \frac{12(1-\nu^2)R^2 T_0}{h^3 E}, \\ q(\xi) = \left(\frac{hE}{T_0} \right)^{1/2} \frac{1}{R\xi} \frac{dW(\xi R)}{d\xi}, \quad p(\xi) = 1 + \frac{1}{R^2 T_0} \frac{1}{\xi} \frac{d\Phi(\xi R)}{d\xi}. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом формул (5) система (4) примет вид

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dq}{d\xi} \right) + \lambda^2 (1-p)q = 0, \quad \frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dp}{d\xi} \right) = -\frac{1}{2} q^2 \quad (6)$$

при условии, что

$$\frac{dq(0)}{d\xi} = 0, \quad \frac{dp(0)}{d\xi} = 0, \quad q(1) = 0, \quad p(1) = 0. \quad (7)$$

Заметим, что

$$q^0 \equiv 0, \quad p^0 \equiv 0 \quad (8)$$

является решением (тривиальным) системы (6)–(7) для всех значений λ . Мы хотим найти те значения λ , для которых существуют нетривиальные решения, соответствующие изогнутым состояниям пластины. Линеаризация системы (6) вблизи решения (8) дает

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dq}{d\xi} \right) + \lambda^2 q = 0, \quad p = 0. \quad (9)$$

Нетривиальные решения линеаризованной задачи суть

$$\bar{q}_n = \frac{C}{\xi} J_1(\lambda_n \xi), \quad (10)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, C — произвольная постоянная, а λ_n — решения уравнения

$$J_1(\lambda_n) = 0. \quad (11)$$

Наименьшим корнем уравнения (11) является $\lambda_1 = 3.831706$, и соответствующая нагрузка равна

$$T_{0cr} = 14.68197 \frac{D}{R^2}. \quad (12)$$

Таким образом, точка ($q = 0$, $p = 0$, $\lambda_1 = 3.831706$) определяет точку бифуркации системы (9). Так как λ_1 — простое собственное число (геометрическая и алгебраическая кратности равны единице), следовательно, система (6) также имеет точку ($q = 0$, $p = 0$, $\lambda_1 = 3.831706$) как точку бифуркации, т. е. по критерию Эйлера существует потеря устойчивости при $\lambda > \lambda_1$.

2. Устойчивость упругого тела с заданным вектором перемещений и без объемных сил

Рассмотрим линейно-упругое однородное тело в положении равновесия. Рассмотрим соответствующую систему уравнений в виде (3.2.1), (3.3.47)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} E_{kl} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] E_{kl} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

Допустим, что заданы следующие граничные условия:

$$u_i = 0 \quad \text{на } S, \quad (14)$$

т. е. мы имеем дело со второй основной краевой задачей. Запишем систему (13) в виде (см. 4.1.6)

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (15)$$

и исследуем устойчивость тривиального состояния

$$u_i \equiv 0. \quad (16)$$

Пусть метрики $\bar{\rho}_0(\mathbf{u}_0)$ и $\bar{\rho}(\mathbf{u}, t)$ заданы в виде

$$\bar{\rho}_0 = \sup_{x \in V} |u_i(\mathbf{x}, t = 0)| + \sup_{x \in V} \left| \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t = 0)}{\partial x_j} \right| + \sup_{x \in V} \left| \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t = 0)}{\partial t} \right|,$$

$$\bar{\rho} = \int \int_V \int [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] dV. \quad (17)$$

В качестве функционала Ляпунова мы берем полную механическую энергию тела, т. е. сумму кинетической и потенциальной энергий (см. 7.8.5)):

$$V = \frac{1}{2} \int \int_V \int \left[\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda (E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 + \right. \\ \left. + \mu (E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\mu (E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2) \right] dV. \quad (18)$$

Заметим, что

$$\frac{dV}{dt} = \int \int_V \int \left[\left[\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \right] \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] dV. \quad (19)$$

Используя систему (15), приходим к выводу, что

$$\frac{dV}{dt} = 0. \quad (20)$$

Покажем теперь, что функционал V положительно определен по отношению к $\bar{\rho}$. Для этого мы должны доказать, что существует такое $c > 0$, что $V \geq c\bar{\rho}$. Это неравенство следует из неравенства

$$V \geq \frac{1}{2} \int \int_V \int [\lambda (E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 \mu (E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + \\ + 2\mu (E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2)] dV, \quad (21)$$

и оценка имеет вид

$$\frac{1}{2} \int \int_V \int [\lambda (E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 + \mu (E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + \\ + 2\mu (E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2)] dV \geq \gamma^2 \int \int_V \int [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] dV. \quad (22)$$

Значение γ^2 в (22) оценивается с помощью неравенства Фридриха (более или менее элементарные соображения даны в [31]. Объединяя соотношения (21) и (22), имеем

$$V \geq \gamma^2 \bar{\rho}(\mathbf{u}). \quad (23)$$

Остается показать, что функционал $V(\mathbf{u}, t)$ непрерывен по отношению к метрике $\bar{\rho}$ при $t = t_0 \in [0, T]$ и $\bar{\rho}_0 = 0$. Чтобы показать это, заметим, что

$$V = \frac{1}{2} \int \int \int_V [\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 + \mu(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\mu(E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2)] dV < C \bar{\rho}_0^2, \quad (24)$$

где C — постоянная, зависящая от ρ_0, λ, μ и V , где V — объем тела. Таким образом, все условия, сформулированные в теореме 1 параграфа 10.3, удовлетворены, и мы заключаем, что положение равновесия (16) устойчиво по Ляпунову по отношению к метрикам (17). Из неравенств (23) и (24) следует, что краевая задача (13)–(14) имеет единственное решение.

3. Устойчивость упругой пластины, шарнирно опертой по всем сторонам и подверженной равномерно распределенным тангенциальным сдвигающим силам, в среде с сопротивлением

Рассмотрим упругую пластину, изображенную на рис. 2. Предполагаем, что пластина шарнирно оперта по всем сторонам. Пластина нагружена равномерно распределенной тангенциальной нагрузкой интенсивностью q , и ее движение испытывает линейное вязкое сопротивление силы $\beta(\partial W/\partial t)$, где β — постоянная.

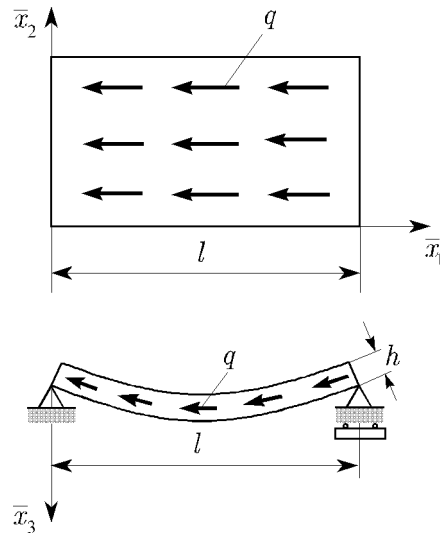


Рис. 2

Исследуем устойчивость тривиального положения равновесия пластины, при котором пластина плоская. Из уравнений (8.2.14)–(8.2.16) находим, что тривиальное положение равновесия имеет вид

$$W^0 = 0, \quad Q_1^0 = Q_2^0 = S_{12}^0 = T_2^0 = 0, \quad T_1^0 = -q(l - x_1). \quad (25)$$

Мы хотим исследовать устойчивость положения, при котором выполняются равенства (25).

Пусть возмущения переменных W, \dots, T_1 , обозначенные $\Delta W, \dots, \Delta T_1$, определены как $W = W_0 + \Delta W, \dots, T_1 = T_1^0 + \Delta T_1$. Тогда, используя равенства (25) и пренебрегая членами высших порядков в возмущениях, из системы (8.2.14)–(8.2.16) мы получаем

$$D\nabla^4 W + q(l - x_1) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} + \beta \frac{\partial W}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

при $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b$. При записи уравнения (26) мы взяли в качестве интенсивности распределенных сил (q_3 в уравнении (8.2.15)) силу инерции $\rho_0[\partial^2 W/\partial t^2]$ и силу вязкого трения $\beta[\partial W/\partial t]$. Также в уравнении (26) мы использовали W вместо ΔW . Граничные условия, соответствующие уравнениям (26), имеют вид

$$\begin{aligned} W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0, \quad \text{при } x_1 = 0 \quad \text{и } x_1 = a, \\ W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0, \quad \text{при } x_2 = 0 \quad \text{и } x_2 = b. \end{aligned} \quad (27)$$

Применим второй метод Ляпунова, чтобы оценить значение q , для которого положение (25) устойчиво. Для этого рассмотрим функционал V и метрики $\bar{\rho}_0$ и $\bar{\rho}$ (см. [63, 66])

$$\begin{aligned} V = \int_A \int \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{D}{2} \left[(\nabla^2 W)^2 - \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} dA + \\ + \int_A \int \left\{ \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dA, \\ \bar{\rho}_0 = \left[\sup_{x \in A} |W(\mathbf{x}, t = 0)|^2 + \sup_{x \in A} |\nabla^2 W(\mathbf{x}, t = 0)|^2 + \sup_{x \in V} \left| \frac{\partial W(\mathbf{x}, t = 0)}{\partial t} \right|^2 \right]^{1/2}, \\ \bar{\rho} = \left[\int_A \int W^2 dA \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (28)$$

где A — площадь срединной плоскости пластины. Дифференцируя различные члены в функционале (28), получаем (см. [66])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A \int \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dA &= \int_A \int \rho_0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dA, \\ \frac{d}{dt} \frac{D}{2} \int_A \int (\nabla^2 W)^2 dA &= D \int_A \int (\nabla^2 W) \left(\nabla^2 \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right) dA = \\ &= D \int_A \int (\nabla^4 W) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dA, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_A \int \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 dA &= \int_A \int \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA = \\
&= \frac{q}{D} \int_A \int \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right] dA - \\
&- \frac{q}{D} \int_A \int \left[(a - x_1) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \right] \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dA = \\
&= \frac{q}{D} \int_C (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_1) dS - \\
&- \frac{q}{D} \int_A \int \left[(a - x_1) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \right] \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dA = \\
&= -\frac{q}{D} \int_A \int \left[(a - x_1) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \right] \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dA, \\
&\quad \frac{d}{dt} \int_A \int \left\{ \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dA = \\
&= \int_A \int \left\{ \frac{\beta^2}{2\rho_0} W \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right\} dA,
\end{aligned} \tag{29}$$

где \mathbf{n} — единичный, нормальный к границе C вектор и где мы использовали граничные условия (27). Из соотношений (27) и (29) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= - \int_A \int \left\{ \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta D}{2\rho_0} (\nabla^2 W)^2 - \right. \\
&- \left. \frac{q\beta}{2\rho_0} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + q \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right\} dA.
\end{aligned} \tag{30}$$

Функционал (28) положительно определен по отношению к метрике $\bar{\rho}$, если выполняются два следующих неравенства:

$$\begin{aligned}
\int_A \int \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dA &> 0, \\
\int_A \int \left\{ (\nabla^2 W)^2 - \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dA &\geq c\bar{\rho}(W)
\end{aligned} \tag{31}$$

при $c > 0$. Первое неравенство (31) всегда удовлетворяется, так как подинтегральное выражение является положительно определенной формой W и $(\partial W/\partial t)$ с дискриминантом $\beta/16$. Теперь нам нужны несколько неравенств, чтобы оценить константу c во втором неравенстве (31). Сначала из неравенства Виртингера (или неравенства для

собственных чисел) и граничных условий $W = 0$ на границе пластины C мы имеем

$$\int_A \int_A W^2 dA \leq c_1 \int_A \int_A \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 \right] dA, \quad (32)$$

где $c_1 > 0^3$. Затем мы используем неравенство Пуанкаре (см. [35])

$$\int_A \int_A u^2 dA \leq c_3 \left\{ \left| \int_A \int_A u dA \right|^2 + \int_A \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dA \right\}, \quad (33)$$

примененное к $\partial W/\partial x_1$ и $\partial W/\partial x_2$. Из неравенства (33) получаем

$$\begin{aligned} & \int_A \int_A \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dA \\ & \leq c_3 \int_A \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right)^2 \right\} dA, \end{aligned} \quad (34)$$

где мы использовали тот факт, что

$$\begin{aligned} \int_A \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA &= \int_C W \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_1) dS = 0, \\ \int_A \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right) dA &= \int_C W \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_2) dS = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В равенствах (35) \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к границе C . Нам нужно теперь следующее тождество, которое является следствием граничных условий:

$$\begin{aligned} & \int_A \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right) \right] dA \\ &= \int_A \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right) \right] \right\} dA \\ &= \int_C \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right) \right] \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_1) \right. \\ & \quad \left. - \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right) \right] \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_2) \right\} dS = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

³ Существуют оценки для $(1/c_1)$. Например, $(\pi L/4A) < (1/c_1) < (\pi L/2A)$, где L — длина границы C и A — площадь области (см. [73]).

Следовательно,

$$\int_A \int \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dA = \int_A \int \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right) \right] dA. \quad (37)$$

Используя равенство (37), мы имеем

$$\begin{aligned} \int_A \int (\nabla^2 W)^2 dA &= \int_A \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right) \right\} dA = \\ &= \int_A \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} dA. \end{aligned} \quad (38)$$

Функционал V , заданный при помощи формулы (28), может быть оценен как

$$\begin{aligned} V &= \int_A \int \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{D}{2} \left[(\nabla^2 W)^2 - \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} dA \geq \\ &\geq \int_A \int \left\{ \frac{D}{2} \left[(\nabla^2 W)^2 - \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} dA \geq \\ &\geq \frac{D}{2} \left(\frac{1}{c_3} - \frac{qa}{D} \right) \int_A \int \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 \right] dA \geq \\ &\geq \frac{D}{2} \left(\frac{1}{c_3} - \frac{qa}{D} \right) \frac{1}{c_1} \int_A \int W^2 dA = \frac{D}{2} \left(\frac{1}{c_3} - \frac{qa}{D} \right) \frac{1}{c_1} \bar{\rho}(W). \end{aligned} \quad (39)$$

Следовательно, если

$$q < \frac{D}{c_3 a}, \quad (40)$$

то функционал V положительно определен по отношению к метрике $\bar{\rho}$. Покажем теперь, что функционал V непрерывен по отношению к метрике $\bar{\rho}_0$ при $t_0 = 0$ и $\bar{\rho}_0 = 0$. С учетом равенств (38) для функционала (28) получаем

$$\begin{aligned} V &= \int_A \int \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{D}{2} \left[(\nabla^2 W)^2 - \frac{q}{D} (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} dA + \\ &\quad + \int_A \int \left\{ \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dA \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \iint_A \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{D}{2} [(\nabla^2 W)^2] \right\} dA + \\
&\quad + \iint_A \left\{ \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dA \leq \\
&\leq \iint_A \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dA + \\
&\quad + \iint_A \left\{ \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 + \frac{\beta}{2} W \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dA. \tag{41}
\end{aligned}$$

Однако так как

$$\frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta}{2} W \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) + \frac{\beta^2}{4\rho_0} W^2 < \rho_0 \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta^2}{2\rho_0} W^2, \tag{42}$$

то мы получаем

$$\begin{aligned}
V &\leq \iint_A \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{\beta^2}{2\rho_0} W^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dA \\
&\leq (\bar{\rho}_0)^2 A c^*, \tag{43}
\end{aligned}$$

где $A = ab$ — площадь пластины и c^* — постоянная, зависящая от ρ_0 , β^2 и D . Остается теперь показать, что функционал V не возрастает. Из формул (28) имеем

$$\begin{aligned}
&-\iint_A \left\{ W \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(a - x_1) \frac{\partial W}{\partial x_1} \right] \right\} dA = \iint_A \left\{ (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dA + \\
&\quad + \int_C W (a - x_1) \cos \angle(\mathbf{n}, \bar{x}_1) dA = \iint_A \left\{ (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dA, \tag{44}
\end{aligned}$$

где мы использовали граничные условия. Пусть q_{cr} — значение отношения Рэлея для случая, когда распределенная нагрузка консервативна, т. е.

$$q_{cr} = \min \frac{\iint_A u (\nabla^2 u)^2 dA}{-\iint_A \left\{ u \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(a - x_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right] \right\} dA}, \tag{45}$$

где u — допустимая функция, удовлетворяющая граничным условиям (27) и определенным условиям регулярности. С учетом равенств (44) мы получаем

$$q_{cr} \leq \frac{\int \int_A W(\nabla^2 W)^2 dA}{\int \int_A \left\{ W(a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dA}. \quad (46)$$

Наконец, применим теорему о среднем значении для интегралов, которая гарантирует существование такой положительной константы m , что

$$\int \int_A \left\{ (a - x_1) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 \right\} dA = m \int \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 dA, \quad 0 \leq m \leq a. \quad (47)$$

Подставляя формулы (46), (47) в равенство (30), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq & - \int \int_A \left\{ \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\beta m}{2\rho_0} (q - q_{cr}) \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + q \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right\} dA. \end{aligned} \quad (48)$$

Подынтегральное выражение в формуле (48) является положительно определенной формой $(\partial W/\partial t)$ и $(\partial W/\partial x_1)$, если ее определитель положителен:

$$\frac{\beta}{2} \left[\frac{\beta m}{2\rho_0} (q_{cr} - q) \right] - \frac{q^2}{4} > 0. \quad (49)$$

Из неравенства (49) делаем вывод, что неравенство

$$\beta > q \left[\frac{\rho_0}{m(q_{cr} - q)} \right]^{1/2}, \quad (50)$$

влечет за собой $(dV/dt) < 0$. Следовательно, по теореме 1 параграфа 10.3 тривиальное положение равновесия пластины, описываемое формулами (25), устойчиво по Ляпунову по отношению к метрикам, заданным равенствами (28), если выполняются неравенства (41) и (50).

Существуют различные методы получения констант в неравенствах, используемых при оценке границы устойчивости (40). Например, в случае неравенств типа (32) см. [80, 94].

4. Устойчивость вращающейся упругой пластины, помещенной в жесткий цилиндр

Рассмотрим упругую пластину, показанную на рис. 3, прикрепленную к жесткой трубе, которая вращается вокруг своей геометрической оси с постоянной угловой скоростью ω .

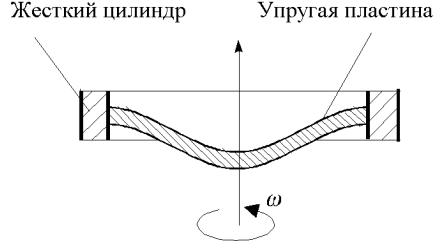


Рис. 3

Из результатов задачи 7 в главе 6 мы имеем, что соответствующие уравнения для поля напряжений в тривиальном положении, при котором пластина плоская, суть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{\theta r} + f_\theta &= 0, \\ E_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}), \quad E_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}), \quad E_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (51)$$

Граничные условия, соответствующие пластине, изображенной на рис. 3, имеют вид

$$u_r(0) = 0, \quad u_r(R) = 0. \quad (52)$$

Используя ту же самую процедуру, что и в задаче параграфа 5.3, мы получаем решение вида (5.3.6), которое должно удовлетворять граничным условиям (52). Опуская подробности, напишем решение для компоненты напряжения σ_{rr} в тривиальном положении:

$$\sigma_{rr}^0 = \rho_0 \omega^2 R^2 \left[\frac{1+\nu}{8} - \frac{3+\nu}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (53)$$

Дифференциальное уравнение заданного движения получается, если предположить, что W — функция от r и времени t . Тогда, используя уравнение (а) задачи 2 в главе 8, получаем

$$D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] \right\} = -\rho_0 h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h \sigma_{rr}^0 \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (54)$$

при условии, что

$$W(R, t) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r}(R, t) = 0. \quad (55)$$

При записи уравнения (54) мы воспользовались тем фактом, что $T_r = h\sigma_{rr}^0$ и что единственной распределенной силой является сила инерции, т. е. $q_3 = -\rho_0 h(\partial^2 W/\partial t^2)$. Введем теперь безразмерные величины

$$\lambda = \frac{\rho_0 \omega^2 R^4}{Eh^3}, \quad y = \frac{W}{R}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{D}{h\rho_0 R^4}}. \quad (56)$$

Подставляя формулы (53) и (56) в соотношения (54) и (55), получаем

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \right\} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - 12(1 - \nu^2) \lambda \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(\frac{1 + \nu}{8} - \frac{3 + \nu}{8} x^2 \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0 \quad (57)$$

и

$$y(1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, \tau) = 0. \quad (58)$$

Для решения краевой задачи (57) и (58) воспользуемся методом Галеркина (см. [91]). При этом мы предполагаем

$$y(x, \tau) = \sum_{i=0}^N C_i R_i(x) \exp(i\Omega\tau), \quad (59)$$

где C_i — постоянные, R_i — заданные функции, а частота Ω должна быть определена. Из формулы (59) следует, что при вещественных значениях Ω имеет место устойчивость. Возьмем R_i в виде

$$R_i = [1 - 2x^2 + x^4]x^{2i} \quad (60)$$

и $N = 5$ в формуле (59). Подставляя решение (59) в уравнение (57) и умножая результат на $xR_i(x)$, после интегрирования получаем

$$\sum_{i=0}^N C_i (A_{ij} - \Omega^2 B_{ij}) = 0, \quad (61)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR_i}{dx} \right) \right] \right\} - 12(1 - \nu^2) \lambda \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \left(\frac{1 + \nu}{8} - \frac{3 + \nu}{8} x^2 \right) \frac{dR_i}{dx} \right] \right\} R_j(x) dx, \quad (62)$$

$$B_{ij} = \int_0^1 R_i R_j x dx.$$

Нетривиальные постоянные C_i существуют, если выполняется следующее частотное уравнение:

$$\det |A_{ij} - \Omega^2 B_{ij}| = 0. \quad (63)$$

Из условия (63) численные значения Ω^2 определяются через λ (см. [69], где также рассматриваются различные граничные условия). В случае граничных условий (53) критическое значение λ (значение, при котором $\Omega = 0$) при $\nu = 0.3$ оказывается равным

$$\lambda_{cr} = 38.8533. \quad (64)$$

Сделаем замечание, касающееся анализа собственных форм, использованного в этом примере. Условие $\lambda < \lambda_{cr}$ гарантирует, что по первой форме колебаний пластина не будет колебаться с увеличивающейся амплитудой и что при $\lambda > \lambda_{cr}$ по крайней мере при одном начальном условии (соответствующем первой форме) пластина будет колебаться с увеличивающейся амплитудой и, следовательно, будет неустойчива. Остается, однако, показать, что *все* решения системы (57)–(58) могут быть получены в виде (59) и что ряд (59) сходится. В технических приложениях это обычно опускается и значение (64) берется в качестве критической безразмерной скорости вращения.

5. Устойчивость пластины со сдвиговыми напряжениями на ее сторонах

Рассмотрим пластину, показанную на рис. 4. Пластина нагружена сдвиговыми усилиями интенсивности τ (на единицу длины стороны пластины) по всем своим сторонам.

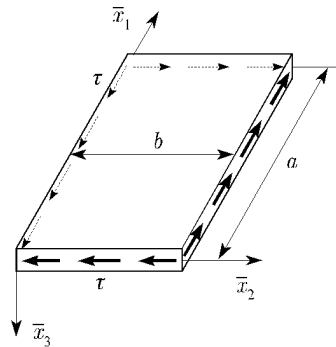


Рис. 4

Считаем далее, что пластина шарнирно оперта по всем сторонам, так что граничные условия имеют вид (см. (8.3.3)):

$$\begin{aligned} W(0, x_2) &= \frac{\partial^2 W(0, x_2)}{\partial x_1^2} = 0, \\ W(a, x_2) &= \frac{\partial^2 W(a, x_2)}{\partial x_1^2} = 0, \\ W(x_1, 0) &= \frac{\partial^2 W(x_1, 0)}{\partial x_2^2} = 0, \\ W(x_1, b) &= \frac{\partial^2 W(x_1, b)}{\partial x_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Воспользуемся энергетическим методом для анализа устойчивости. Потенциальная энергия внутренних сил равна (см. [11])

$$\Pi^i = \frac{1}{2}D \iint_A \{(\nabla^2 W)^2 - (1 - \nu)L(W, W)\} dA, \quad (66)$$

где A — поверхность пластины и

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}, \quad L(W, W) = 2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (67)$$

Работа внешних сил состоит из работы сдвиговых усилий τ на перемещениях границ пластины. Потенциальная энергия равна этой работе с отрицательным знаком. Можно показать, что (см. [11]) потенциальная энергия равна

$$\Pi^0 = -\tau \iint_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_2} \right\} dA. \quad (68)$$

Следовательно, для полной потенциальной энергии системы мы имеем

$$\Pi = \frac{1}{2}D \iint_A \left\{ (\nabla^2 W)^2 - (1 - \nu)L(W, W) - \tau \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_2} \right\} dA. \quad (69)$$

Используем метод Ритца (см. параграф 4.6), чтобы найти критическое значение τ . Для этого мы ищем решение W в виде

$$W = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (70)$$

где A_{mn} — постоянные. Функция (70) удовлетворяет граничным условиям (65). Подставляя формулу (70) в интеграл (69) и дифференцируя результат по A_{mn} (необходимое условие минимума Π), получаем

$$\begin{aligned} \pi^4 D \frac{ab}{4} A_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{32}{9} \tau A_{22} &= 0, \\ \frac{32}{9} \tau A_{11} - 4\pi^4 D ab A_{22} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 &= 0, \\ A_{12} = A_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Пусть

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \lambda = \frac{\pi^4 D}{32\alpha\tau b^2}. \quad (72)$$

С учетом замен (72) то условие, что уравнение (71) имеет нетривиальное решение, принимает вид

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{\alpha^2}(1 + \alpha^2)^2 & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{16\lambda}{\alpha^2}(1 + \alpha^2)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

Из уравнения (73) следует, что

$$\lambda = \pm \frac{\alpha^2}{9(1 + \alpha^2)^2}, \quad (74)$$

так что критическое сдвиговое усилие (на единицу длины стороны пластины) равно

$$\tau_{cr} = \frac{9\pi^4 D(1 + \alpha^2)^2}{32b\alpha^3 b^2}. \quad (75)$$

Мы завершаем этот пример двумя комментариями. Во-первых, значение (75) может быть уточнено, если использовать больше членов в разложении (70). Это приводит к более сложным системам, чем (71). Во-вторых, мы должны доказать, что $\Pi(A_{mn}, \lambda)$ имеет минимум при $\lambda = \lambda_{cr}$. Мы опускаем этот анализ.

Задачи

1. Для пластины, показанной на рис. 5, шарнирно опертой по всем сторонам, используйте теорию пластин фон Кармана, чтобы определить критическую нагрузку q согласно критерию Эйлера.

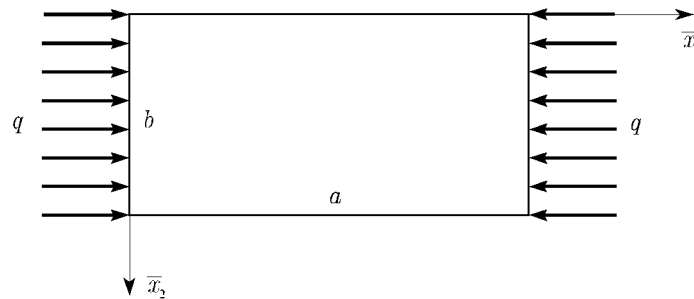


Рис. 5

а) Покажите, что уравнения (8.2.20), (8.2.22) для малых деформаций, наложенных на тривиальное положение, при котором пластина плоская и нагружена по краям нагрузкой q , дают

$$D\nabla^4 W + q \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0 \quad (a)$$

и что граничные условия для уравнения (а), суть

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \quad \text{и } x_1 = a,$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0 \quad \text{и } x_2 = b. \quad (б)$$

б) Предположим, что решение задачи (а), (б) имеет вид

$$W = C \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (6)$$

где C — постоянная, а m и n — целые числа. Используя уравнение (а), покажите, что

$$q = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2. \quad (2)$$

Критическая нагрузка тогда определяется следующим образом:

$$q_{cr} = \min_{m,n} \left[\frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \right]. \quad (d)$$

Полный бифуркационный анализ, показывающий, что уравнения пластин фон Кармана имеют точку бифуркации для сжимающей нагрузки (d), представлен в [50].

2. Рассмотрим положение равновесия

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (a)$$

упругого тела. Рассмотрим его устойчивость при волновом движении, распространяющемся в направлении \bar{x}_1 (см. (5.14.5)), так что ($u_1 = u$, $u_2 = u_3 = 0$)

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6)$$

при условии, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad S. \quad (6)$$

Используя полную энергию в качестве функционала Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \int \int_V \int \left[\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dV \quad (2)$$

и неравенство (см. [62])

$$\int \int_V \int u^2 dV \leq c \int \int_V \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dV, \quad (d)$$

где $c > 0$, покажите, что положение (а) устойчиво по отношению к метрикам

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 &= \sup_x \left| \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} \right| + \sup_x \left| \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} \right|, \\ \bar{\rho} &= \int \int_V \int \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dV. \end{aligned} \quad (e)$$

Литература

- [1] Абрамовиц М., Стегун И. А. 1979. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. М.: Наука.
- [2] Александров А. И., Соловьев Ю. И. 1978. *Трехмерные задачи теории упругости*. М.: Наука.
- [3] Александров В. М., Мхитарян С. М. 1983. *Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками*. М.: Наука.
- [4] Александров В. М., Коваленко Е. В. 1986. *Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями*. М.: Наука.
- [5] Амензаде Ю. А. 1979. *Теория упругости*. М.: Мир.
- [6] Белл Дж. Ф. 1973. *Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел*. Ч. 1. М.: Наука.
- [7] Бондарева В. Ф. 1970. Контактная задача для упругой сферы // ПММ. Т. 35. С. 37–45.
- [8] Бреббиа К. А., Уокер С. 1982. *Применение метода граничных элементов в технике*. М.: Мир.
- [9] Бюрен Ван. 1962. *Дефекты в кристаллах*. М.: Изд-во иностр. лит.
- [10] Владимиров В. С. 1979. *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Мир.
- [11] Вольмир А. С. 1967. *Устойчивость деформируемых систем*. М.: Наука.
- [12] Демидов С. П. 1979. *Теория упругости*. М.: Высшая школа.

- [13] Джонсон К. 1983. *Механика контактного взаимодействия*. М.: Мир.
- [14] Зенкевич О. К., Чанг И. К. 1974. *Метод конечных элементов в теории сооружений и механики сплошных сред*. М.: Недра.
- [15] Зубов В. И. 1984. *Устойчивость движения (Метод Ляпунова и его приложения)*. М.: Высшая школа.
- [16] Каландия А. И. 1973. *Математические методы двумерной упругости*. М.: Наука.
- [17] Кильчевский Н. А. 1963. *Основы аналитической механики оболочек*. Киев: Изд-во АН УССР.
- [18] Кильчевский Н. А. 1976. *Динамическое контактное сжатие*. Киев: Наукова думка.
- [19] Кильчевский Н. А. 1984. *Механика континуальных систем*. Киев: Наукова думка.
- [20] Колосов Г. В. 1935. *Применение комплексной переменной в теории упругости*. М.: ОНТИ.
- [21] Красносельский М. А. 1956. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*. М.: Гостехиздат.
- [22] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. 1987. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука.
- [23] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1987. *Теория упругости*. М.: Наука.
- [24] Лебедев Н. Н. 1963 *Специальные функции и их приложения*. М.; Л.: Физматгиз.
- [25] Лурье А. И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука.
- [26] Ляв А. 1935. *Математическая теория упругости*. М.: Глав. ред. общетехн. лит. и моногр.
- [27] Мосаковский В. И. 1954. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией, разделяющей граничные условия // ПММ, Т. 18, С. 187-196.
- [28] Мухелишвили Н. И. 1965. Приложения теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды // Труды международного симпозиума в Тбилиси в 1963 г. Т. 1, С. 56-75. М.: Наука.
- [29] Мухелишвили Н. И. 1966. *Некоторые основные задачи в математической теории упругости*. М.: Наука.

- [30] Новацкий В. 1970. *Динамические задачи термоупругости*. М.: Мир.
- [31] Партон В. З., Перлин П. И. 1984. *Математические методы в теории упругости*. М.: Мир.
- [32] Рекач В. Г. 1977. *Руководство к решению задач по теории упругости*. М.: Высшая школа.
- [33] Розин Л. А. 1978. *Вариационные формулировки задач для упругих тел*. Л.: Изд-во ЛГУ.
- [34] Сиразетдинов Т. К. 1987. *Устойчивость систем с распределенными параметрами*. Новосибирск: Наука.
- [35] Соболев С. Л. 1962. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Новосибирск: Изд-во Сибир. отд. АН СССР.
- [36] Сьярле Ф., Рабье П. 1983. *Уравнения Кармана*. М.: Мир.
- [37] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. 1979. *Теория упругости*. 2-е изд. М.: Наука.
- [38] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. 1966. *Теория пластин и оболочек*. М.: Наука.
- [39] Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1977. *Дифференциальные уравнения математической физики*. 5-е изд. М.: Наука.
- [40] Хан Х. Г. 1988. *Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения*. М.: Мир.
- [41] Almusallam A., Thaer S. E. 1995. Three-dimensional Mohr's circle for shear stress components // *J. of Eng. Mechanics (ASCE)*. Vol. 121. P. 477-481.
- [42] Antman C. C. 1995. *Nonlinear Problems of Elasticity*. N.Y.: Springer.
- [43] Atanackovic T. M. 1997. *Stability Theory of Elastic Rods*. Singapore: Scientific World.
- [44] Atanackovic T. M., Guran A., Spasic D. T. 1998. A variational principle for equation of Hertz's theory of impact *Proceedings of the First International Symposium on Impact and Friction of Solids, Structures and Intelligent Machines* / Ed. A.Guran. Ottawa: World Scientific.
- [45] Atanackovic T. M., Spasic D. T. 2000. On the impact of elastic bodies with adhesive forces // *Meccanica*. Vol. 34. P. 367-377.

- [46] Basilevish V. 1979. Torsion of a rectangular rod with crack // *Recueil des Travaux de l'Institut Mathématique. Nouvelle série*. Vol. 3. P. 15-20.
- [47] Biot M. A. 1965. *Mechanics of Incremental Deformations*. N.Y: John Wiley & Sons.
- [48] Bisplinghoff R. L., Marr J. W., Pian T. H. H. 1965. *Statics of Deformable Solids*. N.Y.: Dover.
- [49] Boulanger Ph., Hayes M. 1992. Shear, shear stress and shearing // *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 42. P. 1449-1457.
- [50] Chow S. N., Hale J. K. 1982. *Methods of Bifurcation Theory*. N.Y.: Springer.
- [51] Dacorogna B. 1989. *Direct methods in the Calculus of Variations*. Berlin: Springer-Verlag.
- [52] Eschenauer H., Schnell W. 1986. *Elastizitätstheorie I und II*. Zürich: Bibliographisches Institut.
- [53] Fishera G. 1972. Existence theorems in elasticity // *Handbuch der Physik*. Bd. VIa/2. Berlin: Springer-Verlag.
- [54] Finzi B. 1934. Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui // *Atti Accad. Lincei R. C.* P. 578-584; P. 620-623.
- [55] Golubitsky M., Schaeffer D. G. 1985. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Vol. I. N.Y.: Springer.
- [56] Griffith A. A. 1921. The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. Vol. A221. P. 163-198.
- [57] Hertz H. 1892. Über die Berührung fester elastischer Körper // *J. reine und angewandte Mathematik*. Vol. 92. P. 156-171.
- [58] Horgan C. O. 1989. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: An update // *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 42. P. 195-302.
- [59] Horgan C. O., Knowles J. K. 1983. Recent developments concerning Saint-Venant's principle // *Adv. Appl. Mech.* Eds. T.Y. Wu, J.W. Hutchinson. Vol. 22. P. 179-269. N.Y.: Academic Press.
- [60] Kármán Th. von. 1910. *Festigkeitsprobleme in Maschinenbau*. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Vol. IV/4C. Leipzig. P. 311-385.

- [61] Kirchhoff G. 1859. Über das Gleichgewicht und bewegung eines unendlich dünen elastischen Stabes // *J. reine und angewandte Mathematik (Crelles J.)*. Vol. 56. P. 285-313.
- [62] Knops R. J., Wilkes E. W. 1966. On Mochan's theorems for Stability of continuous systems // *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 4. P. 303-329.
- [63] Knops R. J., Payne L. E. 1971. *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*. Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol. 19. N.Y.: Springer-Verlag.
- [64] Knops R. J., Wilkes E. W. 1973. Theory of elastic stability // *Handbuch der Physik*. Bd. VIa/3. Berlin: Springer-Verlag.
- [65] Labisch F. K. 1992. On shearable nonlinearly elastic rings // *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 30. P. 101-117.
- [66] Leipholz H. H. E. 1987. *Stability Theory: An introduction to the Stability of Dynamic Systems and Rigid Bodies*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [67] Lighthill M. J. 1980. *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [68] Lindsay R. B. (ed.) 1975. *Energy: Historical Development of the Concept*. (Benchmark Papers on Energy). Stroudsburg, Pa.: Dowden, Hutchinson and Ross.
- [69] Maretic R. 1998. Vibration and stability of rotating plates with elastic edge supports // *J. Sound and Vibration*. Vol. 210. P. 291-294.
- [70] Marguerre K., Woernle H. -Th. 1975. *Elastische Platten*. Mannheim: Bibl. Inst.
- [71] Marsden E. J., Hughes J. R. 1983. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Engelwood Cliffs: Prentice-Hall.
- [72] Mindlin R. D. 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // *J. Appl. Mech., ASME*. Vol. 18. P. 31-38.
- [73] Mitrinovic D. S. 1970. *Analytic Inequalities*. N.Y.: Springer.
- [74] Müller I. 1994. *Grundzüge der Theormodynamik mit Histerischen Anmerkungen*. Berlin-Heidelberg: Springer.
- [75] Oden J. T., Reddy J. N. 1974. On dual-complementary variational principles in mathematical physics // *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 12. P. 1-29.

- [76] Oden J. T., Reddy J. N. 1983. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Berlin: Springer.
- [77] Pal A., Anisiu M.-C. 1995. On the Legendre transform and its applications // *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica*. Vol. XL. P. 75-99.
- [78] Parkus H. 1983. *Mechanik der festen Körper*. Wien: Springer.
- [79] Pólya G. 1930. Ligt die Stelle der größten Beanspruchung an der Oberfläche? // *ZAMM*. Vol. 10. P. 353-360.
- [80] Pólya G., Szegő G. 1951. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton, N. J.: Ann. of Math. Studies No 27.
- [81] Prandtl L. 1903. Zur torsion von prismatischen Stäben // *Phys. Zeitschrift*. Vol. 4. P. 758-770.
- [82] Reissner E. 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // *J. Appl. Mech., ASME*. Vol. 67. P. A69-A77.
- [83] Reissner E. 1950. On a variational theorem in elasticity // *J. Math. And Phys.* Vol. 29. P. 90-95.
- [84] Rothenburg L., Berlin Al., Bathurst R. J. 1991. Microstructure of isotropic materials with negative Poisson's ratio // *Nature*. Vol. 354. P. 470-472.
- [85] Serrin J. 1971. A symmetry problem in potential theory // *Arch. Rational Mech. Analysis*. Vol. 43, P. 304-318.
- [86] Sokolnikoff I. S. 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*. N.Y.: McGraw-Hill.
- [87] Toupin R. A. 1965. Saint-Venant's principle // *Arch. Ratl. Mech. Anal.* Vol. 18. P. 83-96.
- [88] Truesdell C., Toupin R. 1960. The classical field theories // *Handbuch der Physik*. Bd. III/1. Berlin: Springer-Verlag.
- [89] Truesdell C., Noll W. 1965. The nonlinear field theories of mechanics // *Handbuch der Physik*. Bd. III/3. Berlin: Springer-Verlag.
- [90] Villaggio P. 1996. The rebound of an elastic sphere against a rigid wall // *J. Appl. Mech. ASME*. Vol. 63. P. 259-263.
- [91] Vujanovic B. D., Jones S. E. 1989. *Variational Methods in Nonconservative Phenomena*. Boston: Academic Press.

- [92] Wang C. -C., Treusdell C. 1973. *Introduction to Rational Elasticity*. Leyden: Noordhoff.
- [93] Washizu K. 1968. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. N.Y.: Pergamon Press.
- [94] Weinstein A. 1937. Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques // *Mémorial Sci. Math.* Vol. 88.
- [95] Wolkowisky J. H. 1967. Existence of buckled states of circular plates // *Communications on Pure and Appl. Math.* Vol. 20. P. 549-560.

Предметный указатель

- аксиома 239, 241, 242, 245, 253,
 Больцмана 20 288, 291, 292, 305, 307,
 Эйлера–Коши 11 310, 314, 333, 338
 главная 73
- вектор
 Бюргерса 82
 Галеркина 7, 143–146, 153,
 213
 вращений 198
 перемещения 22, 58, 70, 71,
 74, 77, 78, 81–83, 85–87,
 92, 93, 108, 127, 129–134,
 143–145, 153, 162, 238,
 239, 243, 245, 247, 250,
 252–254, 259, 261, 271,
 275, 280, 282, 288, 296,
 297, 309, 350
 скорости 113, 131, 142, 346
- волна
 Рэлея 230, 261
 плоская 223–225
 поверхностная 230
 расширения 225, 260, 347
 сдвига 224, 225, 229, 260
 тепловая 228
- гипотеза
 Бернулли 177, 252–254
 Бернулли–Мариотта 317
 Кирхгофа–Лява 316
- давление
 на поверхности 335
- деформация 9, 10, 46, 59, 67, 83,
 90, 91, 98, 99, 102, 108,
 109, 111, 114, 115, 119,
 122, 125, 129, 138, 139,
 148, 151, 152, 220, 235,
- задача
 Буссинеска 209, 212, 215
 Гриффита о трещине 279,
 280
 Кельвина 217
 Кирша 264
 Черутти 213, 215
 граничная
 вторая основная 130, 138,
 247, 271, 273, 274, 276
 классификация 129–131
 первая основная 129, 241,
 245, 247, 271–273, 276
 третья основная 130, 138,
 297
- закон
 Билелло–Метцгера 121
 Британской Королевской Ко-
 миссии 121
 Гука 99, 121
 в сферической системе ко-
 ординат 115
 в цилиндрической системе
 координат 115, 281
 для изотропных матери-
 алов 107, 125, 128, 307,
 310
 обобщенный 100, 107, 110,
 119, 125, 153, 291
 Дюамеля–Неймана 125
 Клапейрона 295
 Лабиша 121
 Менабра 306

- Нельсона 121
 Ричардсона 121
 Стокса 121
 гиперболический 121
 кубический и биквадратно-
 параболический 121
 параболический 121
 термодинамики первый 114,
 140, 286
 экспоненциальный 121
- изгиб
 стержня
 моментом 192
 с эллиптическим попереч-
 ным сечением 201
 центр 200, 201
- интеграл
 Чезаро 81
 эллиптический 340
- клин
 нагруженный моментом 284
 нагруженный силой 281
- колонна Бэка 362
- консоль
 нагруженная на свободном
 конце 250
- контакт
 время 345, 346
- конус
 круговой 215
 нагруженный в вершине
 218
- коэффициент
 Пуассона 91, 108, 109, 111,
 122, 123, 231, 259, 339
 влияния 294
 восстановления 348
 жесткости 294
 податливости 294
- кручение
 стержня
 кругового поперечного се-
 чения 189
- произвольного поперечного
 сечения 165
- лемма Коши 12, 21
- материал
 Сетха 108
 изотропный 106, 107, 109,
 122, 309
 кубический 105, 106
 ортотропный 104, 105
 тетрагональный 105
- матрица
 ортогональная 27, 94, 100
- метод
 Галеркина 379
 Ляпунова
 второй 364, 372
 не прямой 364
 первый 364
 прямой 364
- Мора 87
 Папковича–Нейбера 7
 Ритца 150, 286, 312, 381
 взвешенных невязок 150
 комплексной переменной 7,
 148, 149, 266, 267, 274,
 276
 конформного отображения
 274
- минимум
 слабый относительный 358,
 359, 363
- модель
 Джонсона 349
 Фойгта 12
- модуль
 Юнга 99, 109
 объемного сжатия 110
 упругости 91, 108, 109, 122,
 123, 313, 339
 условный 123
- направление
 вектор 18

- главное 30–36, 39, 54, 56, 73, 74, 88, 92, 94, 122
- напряжение
вектор 11–13, 15–18, 22, 23, 26, 28–30, 33, 35, 37, 39, 44, 47, 48, 50, 54, 55, 68, 99, 123, 129–131, 136, 191, 209, 210, 241, 242, 245, 251, 289, 290, 297, 304, 306, 309, 341, 367
- главное 30
экстремальные свойства 35
- касательное 9, 13, 16, 30, 36, 37, 39–43, 45, 47–49, 53, 55, 130, 173, 174
- экстремальные свойства 39
- круги Мора 43, 45, 50
- матрица 20, 22, 27–30
- множитель концентрации 266
- нормальное 13, 30, 35–37, 41, 44, 47, 48, 50, 53, 122, 123
- объемное 43
- октаэдрическое 42, 43, 55
- неравенство
Виртингера 373
Пуанкаре 374
Фридриха 370
- оболочка
пологая 362
сферическая 163
- оператор
Лапласа 126, 127, 135, 146, 154, 241, 243, 267
упругости 154
- перемещение обобщенное 286, 287, 294, 305
- пластина
вращающаяся 282
граничные условия 324, 325, 329, 367
колебания 380
малая деформация 325
- теория фон Кармана 315, 367, 382, 383
- плоскость
октаэдрическая 41, 42
- плотность энергии деформаций 102, 110, 137, 291, 313
- поверхность
свободная 53, 259
- полуплоскость
нагруженная распределенной нагрузкой 255
- постоянная
Ламе 106, 108, 110, 113, 122, 328, 335, 340
- потенциал
Ламе 7, 144, 145, 214
простого слоя 339
упругий 291
- предел пропорциональности 99
- представление
Гурса 7
Лагранжа 58, 59, 85
Эйлера 58, 65, 85
- преобразование
Лапласа 349
Лежандра 103, 288
Фурье 7
матрицы напряжений 27
- принцип
Д'Аламбера 6, 296
Сен-Венана 7, 151, 152, 223, 259
Ху-Вашизу 306, 308, 311
Эйлера–Коши 6
вариационный Рейсснера 306–308, 311
виртуальной работы 296, 298
виртуальных перемещений 296–299
виртуальных сил 296, 299, 300
напряжений Коши 13
- производная
Гато 358
Фреше 357

- пространство
 Банаха 357–359
 Соболева 359
- работа
 виртуальная 296–298
 внешних сил 286, 287, 293,
 296, 298, 300, 301, 381
 внутренних сил 298, 300
 псевдо- 288, 299, 300
- решение
 Герца 8
 Гурса 271
 Д'Аламбера 232
 Кельвина 208
 Папковича–Нейбера 206, 208
 элементарное Буссинеска 155,
 205, 209
 элементарное сингулярное вто-
 рого рода 208
 элементарное сингулярное пер-
 вого рода 206
- сдвиг
 угол 65–70, 84, 90
- сила
 Ван-дер-Ваальса 9
 обобщенная 286, 287, 294, 295,
 305
 объемная 10, 12, 24, 46, 55,
 109, 117, 122, 125–127,
 129, 130, 133, 134, 137,
 139, 146, 148, 153, 163,
 172, 245, 246, 267, 268,
 290, 292, 293, 296, 298–
 300, 304, 305, 309, 310,
 313, 367, 369
 поверхностная 10, 12, 17, 18,
 52, 137, 138, 148, 151,
 287, 290, 292, 296, 298,
 299, 305, 313
- символ
 Кристоффеля
 второго рода 82
 первого рода 82
- Кронекера 27, 81
 Леви–Чивита 94, 147
- состояние
 напряженное
 линейное 54
 обобщенное плоское 239,
 243, 245, 269
 плоское 46, 47, 49, 52, 239,
 242, 243, 246, 250, 304
 напряженное линейное 54,
 99, 119, 288
 напряженное плоское 84, 91
- стержень Флюгера 362
- сфера
 колебания 236, 347
- тело
 деформируемое 9
 упругое 10, 12, 22, 23, 57,
 87, 97, 101, 103, 108, 109,
 111, 116, 122, 128, 138,
 139, 228, 286, 292, 296,
 315, 335
- тензор
 Коши–Грина
 левый 70
 правый 70
 Римана–Кристоффеля 81, 82
 Фигнера 70
 вращений 71, 95
 деформаций
 Кильчевского 70
 Лагранжа–Грина 61, 63,
 65–67, 70, 71, 81, 85, 86,
 93, 94, 316
 Рейсснера 70
 Эйлера–Альманси 65, 66,
 70, 85, 120
 в сферической системе ко-
 ординат 74, 235
 в цилиндрической системе
 координат 74
 линейных 67, 71, 316
 плоское состояние 83, 281

- условия совместности 300, 310
- метрический 60, 81, 82, 86
- напряжений
 - Коши 99, 119
 - Пиолы–Кирхгофа 99, 119, 120
- упругости 100, 101, 292
- теорема
 - Бетти 292–294, 313
 - Бредта 176
 - Гаусса, 21, 171, 172, 200, 292, 298, 300, 308, 313
 - Гельмгольца 73
 - Грина 168
 - Кастильяно 7, 295, 305, 306, 314
 - Клапейрона 137
 - Коши 11, 17, 18
 - Красносельского 358
 - Лагранжа–Дирихле 358
 - Максвелла 293, 294
 - Римана 81, 274
 - Стокса 80
 - о единственности решения 138
- теория
 - Герца 335
 - Рейсснера–Миндлина 7, 326, 328–330
 - молекулярная Коши–Пуассона 106, 109
 - упругости Грина 290
 - упругости Коши 290
 - фон Кармана 7
- точка бифуркации 357, 369, 383
- удельная теплоемкость 114
- удлинение
 - относительное 63–68, 70, 74, 83, 93, 99, 119, 120
- уравнение
 - Бельтрами–Мичелла 7, 116, 118, 128, 143, 146, 241, 300, 310
- Дюамеля–Неймана 112
- Коши–Римана 172, 267
- Ламе 126, 132, 134, 143, 208, 241–243, 268, 314, 349
 - в сферических координатах 132, 353
 - в цилиндрических координатах 132
- Пуассона 171
- Софи Жермен 322
- бигармоническое 144, 152, 282, 322
 - решение 148, 247, 255, 270, 271, 281, 322
- в сферической системе координат 23, 25
- в цилиндрической системе координат 23
- волновое 224
- движения 114, 224
- обобщенное теплопроводности 113, 114
- равновесия 11, 18, 19, 21, 22, 109, 110, 114, 116, 118, 122, 125, 137, 142, 143, 146, 147, 152, 240–243, 290, 292, 307, 310
- состояния 98, 111–113, 125, 128, 302, 314, 321
- частотное 379
- устойчивость
 - критерий
 - Мовчана–Ляпунова 365
 - Эйлера 356, 362, 363, 367, 369, 382
 - динамический 359, 362
 - статический 356
 - энергетический 358, 362, 381
- по Ляпунову 355
- структурная 355
- формула
 - Колосова 7, 269
 - Рэля 376

- Эйлера
 - для бесконечно малого поворота 73
- функционал
 - Ляпунова 364, 370, 383
- функция
 - Бесселя 149, 369
 - Лява 7, 144
 - Папковича–Нейбера 145
 - Эйри 7
- дельта- 155–157, 258, 293
- напряжений
 - Максвелла 147, 153
 - Прандтля 170, 172, 177–180, 182–184, 232–234
 - Финци 147
 - Эйри 147, 245, 282
 - для плоской задачи 245, 267, 304

Оглавление

От редакторов	3
Предисловие	5
Глава 1 Анализ напряжений	9
1.1 Введение	9
1.2 Вектор напряжений. Теорема Коши	11
1.3 Уравнения равновесия в терминах компонент напряжений	18
1.4 Основная лемма анализа напряжений	22
1.5 Уравнения равновесия в цилиндрической и сферической системах координат	23
1.6 Преобразование матрицы напряжений. Тензор напряжений	27
1.7 Экстремальные свойства главных напряжений	35
1.8 Инварианты тензора напряжений	38
1.9 Экстремальные значения касательных напряжений	39
1.10 Сферическая и девиаторная части тензора напряжений .	41
1.11 Круги напряжений Мора	43
1.12 Плоское напряженное состояние	46
1.13 Нормальное и касательное напряжения при плоском на- пряженном состоянии	47
1.14 Круги Мора при плоском напряженном состоянии	49
1.15 Напряжения на внешних поверхностях тела	52
1.16 Линейное напряженное состояние	54
Глава 2 Анализ деформаций	57
2.1 Введение	57
2.2 Меры деформации. Тензор деформаций	58
2.3 Удлинение и угол сдвига для произвольных направлений	67
2.4 Бесконечно малое вращение	70
2.5 Главные направления тензора деформаций	73
2.6 Тензор деформаций в цилиндрической и сферической си- стемах координат	74
2.7 Условия совместности линейного и нелинейного тензоров деформаций	78
2.8 Плоская деформация	83
2.9 Линейный тензор деформаций. Объемное расширение .	85
2.10 Измерение деформаций. Датчики деформаций	87

Глава 3 Закон Гука	97
3.1 Введение	97
3.2 Преобразование тензора упругости при повороте системы координат	100
3.3 Анизотропные, ортотропные и изотропные упругие тела	101
3.4 Постоянные Ламе. Модуль упругости. Коэффициент Пуассона	108
3.5 Влияние температуры на связь напряжений и деформаций	111
3.6 Закон Гука в цилиндрических и сферических системах координат	115
3.7 Условия совместности Бельтрами–Мичелла	116
3.8 Конечные деформации в линейном напряженном состоянии	119
Глава 4 Краевые задачи теории упругости	125
4.1 Введение	125
4.2 Классификация задач	128
4.3 Уравнения Ламе в цилиндрической и сферической системах координат	132
4.4 Единственность решения	136
4.5 Предположения о форме решения уравнений равновесия	142
4.6 Методы решения	148
4.7 Принцип Сен-Венана	151
Глава 5 Решение некоторых задач теории упругости	155
5.1 Введение	155
5.2 Тяжелый стержень	157
5.3 Вращающийся стержень	161
5.4 Сферическая оболочка под действием внутреннего и внешнего давления	163
5.5 Кручение призматического стержня с произвольным поперечным сечением	165
5.6 Кручение стержня с переменным круговым поперечным сечением	189
5.7 Изгиб моментом (чистый изгиб)	192
5.8 Изгиб стержня силой на конце	196
5.9 Элементарные сингулярные решения	205
5.10 Задача Буссинеска	209
5.11 Тангенциальная сила на упругом полупространстве	213
5.12 Равновесие кругового конуса	215
5.13 Температурные напряжения в сфере и цилиндре	220
5.14 Плоские гармонические волны в упругом и термоупругом теле	223

Глава 6 Плоские деформированное и напряженное состояние	239
6.1 Введение	239
6.2 Метод функции напряжений для решения плоских задач	245
6.3 Некоторые решения плоских задач	250
6.4 Метод комплексной переменной для плоских задач	267
Глава 7 Энергетический метод в теории упругости	285
7.1 Введение	285
7.2 Работа и внутренняя энергия	286
7.3 Теорема Бетти	292
7.4 Теорема Максвелла	293
7.5 Принцип виртуальной работы	296
7.6 Принцип виртуальных перемещений	297
7.7 Принцип виртуальных сил	299
7.8 Теоремы о минимуме потенциальной и дополнительной энергии	301
7.9 Теоремы Кастильяно	305
7.10 Вариационные принципы Ху-Вашизу и Рейсснера	306
Глава 8 Элементарная теория пластин	315
8.1 Введение	315
8.2 Основные уравнения теории пластин фон Кармана	315
8.3 Граничные условия	322
8.4 Малые деформации: пример	324
8.5 Влияние сдвиговых напряжений: теория Рейсснера–Миндлина	326
Глава 9 Давление между двумя контактирующими телами	335
9.1 Введение	335
9.2 Задача Герца и ее решение	335
9.3 Примеры контактных напряжений	341
9.4 Теория упругого удара	344
Глава 10 Устойчивость упругих тел	355
10.1 Введение	355
10.2 Определения устойчивости	356
10.3 Основные теоремы динамического критерия	364
10.4 Примеры	367
Литература	384
Предметный указатель	391

У ч е б н о е и з д а н и е

Теодор Атанацкович

Арде Гуран

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Зав. редакцией *Г.И. Чердниченко*

Оригинал-макет *А.Л. Смирнова*

Подписано в печать с оригинал-макета 21.04.2003.

Формат 60×100/16. Усл. печ. л. 27,78. Уч.-изд. л. 25.

Тираж 100 экз. Заказ N .

Редакция оперативной подготовки учебно-методических
и научных изданий С.-Петербургского государственного университета.
199034, С.-Петербург, Университетская наб. 7/9.

Отпечатано в Отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ.
198504, С.-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 26.