Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Программа и задания курса
“Пакеты математических программ”

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2007

С о с т а в и т е л и:
д-р физ.-мат. наук С.М.Бауэр,
канд. физ.-мат. наук А.Л.Смирнов

Р е ц е н з е н т ы:
д-р физ.-мат. наук, проф. *П.Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С.Б. Филиппов* (СПбГУ)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

В учебно-методическом пособии представлены программа курса Пакеты математических программ и задания, которые студенты выполняют в пакетах Математика или Maple.

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Программа и задания курса
"Пакеты математических программ"

Количество часов: лекции 60 часов,
практические занятия: 60 часов

Л Е К Ц И И

11 семестр (32 ч)

I. Устойчивость и колебания механических систем с n степенями свободы (20 ч)

1. Вывод уравнений Эйлера–Лагранжа (нелинеаризованных) по заданным кинетической и потенциальной энергии и неконсервативным обобщенным силам. (2 ч)

2. Стационарные решения механической системы (как частный случай рассматриваются и положения равновесия). Линеаризация системы в окрестности стационарных решений. Преобразование к каноническим переменным и к системе уравнений 1-го порядка. Построение областей устойчивости. Критерий Гурвица. (2 ч)

3. Численное интегрирование уравнений движения в окрестности стационарных решений. Сравнение результатов интегрирования исходной системы и линеаризованной. Построение графиков решений. (4 ч)

4. Фазовое пространство, сечения фазового пространства. Цилиндрическое фазовое пространство, траектории в конфигурационном пространстве. Движение изображающей точки по тору. Фазовые портреты систем в пространствах 2D и 3D. Метод Пуанкаре. Форма Жордана. Каноническая форма (Смита). (6 ч)

5. Устойчивость решений уравнений типа Матье–Хилла (неавтономных). Задачи на собственные значения. Метод Якоби, метод итераций в подпространстве Ланцоша. LQ и QR декомпозиция. (6 ч)

II. Устойчивость и колебания упругих систем (12 ч)

1. Получение уравнений Эйлера–Лагранжа для механической системы с непрерывно распределенными параметрами по заданным кинетической и потенциальной энергии и неконсервативным обобщенным силам. Линеаризация уравнений Эйлера–Лагранжа в окрестности положений равновесия. (4 ч)

2. Решение граничных задач. Численное интегрирование линейных и нелинейных уравнений Эйлера–Лагранжа при заданных граничных условиях. Построение графиков решений. Анимация движений. (8 ч)

12 семестр (28 ч)

III. Асимптотические методы в механике (22 ч)

1. Определение корней алгебраического уравнения методом Ньютона. (2 ч)

2. Самосопряженное и несамосопряженное возмущение простых собственных чисел матрицы. Самосопряженное возмущение кратных собственных чисел матрицы. (2 ч)

3. Решение трансцендентных уравнений. (2 ч)

4. Асимптотические оценки интегралов. Метод Лапласа. (2 ч)

5. Асимптотические оценки интегралов. Методы стационарной фазы и перевала. (2 ч)

6. Регулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши. (4 ч)

7. Регулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения. Краевые задачи. (4 ч)

8. Сингулярно возмущенные системы. (4 ч)

IV. Вычислительная геометрия (6 ч)

1. Выпуклые оболочки. Диаграмма Вороного. Триангуляция Делоне. Метод Ньютона в пространствах 2D и 3D для построения асимптотических разложений корней полинома.

Визуализация: Изображение поверхностей 2-го порядка. Параметризация поверхностей. Локсодромии на поверхностях.

П Р А К Т И Ч Е С К И Е   Р А Б О Т Ы

I. Устойчивость и колебания механических систем с n степенями свободы

1. Фазовое пространство, сечения фазового пространства, цилиндрическое фазовое пространство, траектории в конфигурационном пространстве. Движение изображающей точки по тору. Фазовые портреты систем в пространствах 2D и 3D.

Ввести: координаты $x_i(t) = \sin[\cos](p_i t) \exp(k_i t)$.

З а д а н и е

1) Построить траектории (фигуры Лиссажу).

2) Построить графики функций (биения).

3) Построить фазовые кривые в цилиндрическом фазовом пространстве.

4) Построить обмотку тора при рациональном и иррациональном соотношении частот p_i и при $p_i \sim p_j$.

Рекомендованная литература: [8,9,11].

2. Ввести: Функции потенциальной и кинетической T энергий и Q — непотенциальные силы.

З а д а н и е

1) Вывести уравнения Лагранжа.

2) Вывести уравнения Гамильтона.

3) Получить первые интегралы.

Вывод уравнений Эйлера–Лагранжа и Гамильтона (нелинеаризованные) по заданным кинетической и потенциальной энергии и непотенциальным обобщенным силам. Определение первых интегралов.

Рекомендованная литература: [8].

3. Положения равновесия. Стационарные решения. Уравнения в вариациях.

Ввести: Полученные в работе 2 уравнения Лагранжа.

З а д а н и е

1) Найти положения равновесия.

2) Построить стационарные решения.

3) Получить линеаризованное уравнение Лагранжа в окрестности положения равновесия.

4) Получить линеаризованное уравнение Рауса в окрестности стационарного решения.

5) Построить 2 первых члена уравнение Лагранжа в окрестности положения равновесия.

6) Построить 2 первых члена уравнение Рауса в окрестности стационарного решения.

Рекомендованная литература: [5-7].

4. Преобразование к каноническим переменным и к системе уравнений 1-го порядка.

Ввести: Линеаризованное уравнение Лагранжа (Рауса).

З а д а н и е

1) Получить уравнение в нормальных координатах (канонических переменных).

2) Найти собственные числа.

3) Построить эквивалентную систему уравнений 1-го порядка.

Рекомендованная литература: [6-8].

5. Задачи на собственные значения.

Метод Якоби, итераций в подпространстве Ланцоша. LQ и QR декомпозиция.

Устойчивость движения. Критерий Гурвица. Критерии для биквадратного и бикубического уравнений.

Ввести: Линеаризованное уравнение в вариациях.

З а д а н и е

1) Построить матрицу Гурвица. Получить неравенства Гурвица.

2) Области устойчивости в пространстве 2D(3D) параметров [2(3) параметра], например, c_i, l_i:

Рекомендованная литература: [5,7].

6. Исследование устойчивости решений автономных систем с кратными нулевыми корнями.

Ввести: Линейное уравнение $Y' = A \cdot Y$.

З а д а н и е

1) Представить уравнение в канонической форме (матрица Жордана, преобразование переменных).

2) Исследовать устойчивость решения.

3) Построить аналитическое решение уравнения.

Рекомендованная литература: [5-7].

7. Численное интегрирование уравнений движения в окрестности стационарных решений.

Сравнение результатов интегрирования исходной системы и линеаризованной. Построение фазовых портретов систем.

Ввести:

Линеаризованные и нелинеаризованные уравнения движения. Начальные условия (несколько) в окрестности положения равновесия (стационарного решения).

З а д а н и е

Получить траектории, фазовые кривые и графики решений линеаризованной и нелинеаризованной систем в области устойчивости, неустойчивости и вблизи границы областей (изменение характера решений при пересечении границы) при малом возмущении.

8. Метод Пуанкаре. Уравнения с малой нелинейностью. (Ван-дер-Поль, Дуффинг и пр.)

Ввести: заданное уравнение с малой нелинейностью (варианты 1-11)

З а д а н и е

1) Получить аналитическое выражение(первое приближение) для предельного цикла, если он есть, и частоты по методу Пуанкаре (интегралы и корни получившегося уравнения) (см. [14]). Если предельного цикла нет, то только поправка к частоте и форме колебаний.

2) Численно проинтегрировать уравнение и нарисовать фазовые кривые для 100 случайных начальных условий. Если нет предельного цикла, то провести сравнение линейного и нелинейного приближений.

3) Построить фазовые кривые для фиксированного начального условия при изменении малого параметра (см. уравнение Ван-дер-Поля). Деформация предельного цикла.

Предельные циклы: $\epsilon, \mu \ll 1$, $p, q, q_0 > 0$

$$\phi(\dot{x}) = \begin{cases} \omega_0^2, & \dot{x} > b, \\ 0, & \dot{x} < b, \end{cases}$$

$$f_0 = \begin{cases} -b, & \dot{x} > 0, \\ b, & \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Варианты задания:

1. $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^4)\dot{x}$.

2. $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x} - \epsilon x^2$.

3. $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^6)\dot{x}$.

4. $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \epsilon x^5$.

5. $\ddot{x} + p\dot{x} - qx + q_0 x^3 = 0$.

6. $\ddot{x} + p\dot{x} + qx - sign(x) = 0$.

7. $\ddot{x} + sign(x) + \epsilon\dot{x} = \mu$.

8. $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \phi(\dot{x})$.

9. $\ddot{x} + x = f_0$.

10. $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^8)\dot{x}$.

11. $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^4)\dot{x} + \epsilon x^3$.

9. Метод Пуанкаре–Ляпунова. Консервативная система уравнений с малой нелинейностью.

Ввести: систему уравнений для исходной задачи с учетом малой нелинейности.

З а д а н и е

Получить уравнения малых колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия (стационарного решения) системы, поправку к частоте колебаний при учете малой нелинейности.

Рекомендованная литература: [12,15].

10. Ввести:

Уравнение для неавтономной системы вида $x'(t) = P(t, a) * x$.

З а д а н и е

1) Написать программу, считающую матрицу A (матрица монодромии) и ее собственные числа (мультипликаторы).

2) Найти области для параметра a, в которых движение является:

а) устойчивым и

б) неустойчивым.

Изобразить графики решений.

11. Ввести: $T(t)$, (t), Q исходной задачи (Работа 2). Считать, что какой-то параметр зависит от времени. Например, $l = l(t)$.

З а д а н и е

1) Выполнить работы 2, 3, 4, получив уравнение для неавтономной системы вида $x'(t) = P(t) * x$, написать программу, вычисляющую матрицу A (матрица монодромии) и ее собственные числа (мультипликаторы).

2) Найти соотношения параметров, при которых движение является:

а) устойчивым и

б) неустойчивым.

Изобразить графики решений.

II. Колебания упругих систем

12. Получение уравнений Эйлера–Лагранжа для механической системы с непрерывно распределенными параметрами по заданным кинетической и потенциальной энергии и непотенциальным обобщенным силам.

Ввести: упругий потенциал для тела (стержни, балки, пластины, мембраны, оболочки).

З а д а н и е

1) Получить уравнения Эйлера–Лагранжа.

2) Провести линеаризацию уравнений Эйлера–Лагранжа в окрестности положений равновесия.

Рекомендованная литература: [5-7].

Варианты заданий:

1. Продольные колебания стержня.
2. Поперечные колебания струны.
3. Поперечные колебания стержня.
4. Крутильные колебания стержня.
5. Поперечные колебания круговой мембраны.
6. Поперечные колебания прямоугольной мембраны.
7. Продольные колебания прямоугольной мембраны.
8. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки.
9. Безмоментные колебания круговой цилиндрической оболочки.

13. Решение линейной краевой задачи. Разделение переменных.

Ввести: Линеаризованные одномерные уравнения движения. Использовать разделение переменных:

- для прямоугольных мембран/пластин
$W(x, y, t) = W(x)\sin(m\pi y/l)\sin(\omega t)$ (l — ширина по оси y);
- для балок/стержней/струн $W(x, t) = W(x)\sin(\omega t)$;
- для круглых мембран/пластин $W(r, \varphi, t) = W(r)\sin(m\pi\varphi)\sin(\omega t)$;

З а д а н и е

1) Построить аналитическое решение ($p = p(w)$, $P(p, w) = 0$). Найти корни частотного уравнения. Построить графики собственных форм.

2) Найти решение методом прогонки ($W(x, y) = W(x)\sin(py)$; $W(r, \varphi) = W(r)\sin(mpj)$.)

3. Провести сравнение решений.

14. Решение линейной и нелинейной краевой задачи для уравнения в частных производных.

Ввести: Уравнения, начальные и граничные условия
$W[x, 0] = W_1(x)$; $W'[x, 0] = 0$; $W[0, t] = 0$, $W''[0, t] = 0$, $W[1, t] = 0$, $W''[1, t] = 0$.

З а д а н и е

1) Провести сравнение точного решения $W(x) = W_1(x)\sin(w_1 t)$, решение линейного уравнения в частных производных (PDE), решение нелинейного уравнения в частных производных.

2) Построить траектории в конфигурационном пространстве, фазовые кривые.

3) Исследовать резонансный случай.

Анимация движений.

III. Алгоритмы асимптотического анализа

15. Определение корней алгебраического уравнения методом Ньютона.

Ввести: Уравнение (см. варианты).

З а д а н и е

Используя диаграмму Ньютона, определить первые и вторые члены корней уравнения.

Варианты:

1. $x^3 - 3x\mu + \mu^3 = 0$.
2. $\mu^4 x^4 - x^2 + x - \mu = 0$.

3. $\mu^{-3}x^3 + \mu^{-1}x^2 - \mu^{-2}x + 1 = 0.$
4. $\mu^5 x^5 - \mu^2 x^3 + x - \mu^3 = 0.$
5. Найти главные члены корней уравнения при $\mu \ll 1$

$$\mu^4 x^4 + \lambda^2 \mu^2 x^4 + \mu\lambda x^2 + \lambda = 0.$$

16. Самосопряженное и несамосопряженное возмущение простых собственных чисел матрицы.

Ввести: Матрицу $A(\mu)$ (см. варианты)

З а д а н и е

Получить с точностью $O(\mu)$ собственные числа и собственные векторы матрицы $A(\mu)$.

Варианты:

1.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1+\mu \\ 1 & \mu & -1 \\ 1+\mu & -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+2\mu & 3\mu & 0 \\ \mu & 1+4\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\mu \end{pmatrix}.$$

3.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+\mu & 0 & \mu \\ 0 & 1+\mu & \mu^2 \\ -\mu & 0 & 1+3\mu \end{pmatrix}.$$

4.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left(\lambda\mu\boldsymbol{A}_1 + \lambda^2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x},$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu^2 \\ 0 & 4+\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \left(\lambda\mu\boldsymbol{A}_1 + \lambda^2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x},$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mu^2 \\ 0 & 4+\mu^2 & 0 \\ \mu^2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Решение трансцендентных уравнений.

З а д а н и е

1. Построить первые три члена асимптотических разложений корней уравнения $xe^{1/x} = e^u$, где u — большое положительное число.

2. Задача об устойчивости стержня при воздействии распределенной силы, один конец которого жестко защемлен, а другой свободен, сводится к уравнению $\cos x \cosh x = -1$. Построить первые два члена асимптотических разложений больших положительных корней этого уравнения.

Построить первые три члена асимптотических разложений больших положительных корней уравнения:

3. $x \sin x = 1$.

4. $x \tan x = 1$.

5. $\tan x = x^k$, где k — положительное целое число.

6. $x + \tanh x = u$, где u — большое положительное число.

7. Построить первые три члена в разложении для корня уравнения $x \tan x = u$, находящегося в интервале $(0, \pi/2)$, если u — большое положительное число.

8. Построить первые два члена в разложении для корня уравнения $x \ln x = u$, где u — большое положительное число.

9. Построить асимптотическое решение уравнения $\cos z + z = 0$ в комплексной области при больших $|z|$.

18. Регулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши.

1. Движение материальной точки массой m, брошенной с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ под углом α к горизонту, описывается уравнениями

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{P} - \nu \boldsymbol{v} f(v), \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

($\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ — сила веса, $\boldsymbol{R} = \nu \boldsymbol{v} f(v)$ — сила сопротивления воздуха). После проецирования на оси координат Ox и Oy и перехода к безразмерным переменным по формулам

$$t = T\tau, \quad x = L\xi, \quad y = L\eta, \quad u = \frac{T}{L}v_x, \quad w = \frac{T}{L}v_y,$$

где T и L — некоторые характерные масштабы времени и длины, система уравнений и начальные условия имеют вид

$$\frac{du}{d\tau} = -\varepsilon u f, \quad \frac{dw}{d\tau} = -a - \varepsilon w f, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = u, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = w, \tag{1}$$

$$u = v_* \cos\alpha, \quad w = v_* \sin\alpha, \quad \xi = \eta = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\nu T}{m}, \quad a = \frac{gT^2}{L}, \quad v_* = \frac{Tv_0}{L}$$

— безразмерные параметры.

З а д а н и е

1) В случае $f(v) \equiv 1$ найти продолжительность и дальность полета материальной точки с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$. Определить угол α_*, для которого дальность полета будет наибольшей.

2) Найти точное решение системы (1), (2) при $f(v) \equiv 1$ и его с асимптотическое разложение

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots \tag{3}$$

Формулы для w, ξ, η получаются заменой u в (3) на соответствующую переменную.

Сравнить точное и асимптотическое решения.

2. Построить первое приближение для решений u и v системы (1,2) в случае, когда $f(v) = \sqrt{u^2 + w^2}$ (сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости). Сравнить численное решение системы (1,2) с нулевым и первым приближением при разных значениях ε.

3. Найти двучленное асимптотическое представление решений системы дифференциальных уравнений

$$t\dot{x} = x + \varepsilon y, \quad t\dot{y} = (2 - x)y$$

с начальными условиями

$$x(1) = 1, \quad y(1) = e^{-1}.$$

Сравнить полученное решение с численным решением системы.

4. Найти двучленное асимптотическое представление решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \dot{x}^2 x$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Сравнить полученное приближенное решение с численным решением.

5. Система безразмерных уравнений

$$\ddot{x} = -\varepsilon \dot{y} \sin\varphi, \quad \ddot{y} = \varepsilon(\dot{x}\sin\varphi - \dot{z}\cos\varphi), \quad \ddot{z} = 2 + \varepsilon \dot{y}\cos\varphi$$

с нулевыми начальными данными описывает падение материальной точки на поверхность Земли с высоты h с учетом силы инерции Кориолиса. Здесь x — отклонение от вертикали к югу, y — отклонение к западу, φ — широта ($\varphi < 0$ в южном полушарии). Окончанию движения соответствует значение $z = 1$. Предполагается, что параметр

$$\varepsilon = \omega\sqrt{2h/g},$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, g — ускорение свободного падения, является малой величиной.

Найти первое приближение для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Построить точное решение системы уравнений и сравнить его с приближенным.

19. Регулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения. Краевые задачи.

1. Найти двучленное асимптотическое приближение для перемещений горизонтально расположенной балки, один конец которой жестко защемлен, а к другому концу $x = l$ приложена сила P, направленная вертикально вниз. Весом балки пренебречь.

2. Пусть концы балки, описанной в задаче 1, шарнирно оперты. Найти два первых члена асимптотического разложения для функции $w(x)$.

3. Поперечные колебания балки прямоугольного поперечного сечения, высота которого b_0 постоянна, а ширина описывается по линейному закону $a = a_0(1 - \varepsilon\frac{x}{l})$ уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\beta\frac{d^2 w}{dx^2}\right) = \Lambda\beta w,$$

где

$$\beta = 1 - \varepsilon\frac{x}{l}, \quad \Lambda = \frac{\rho S_0 \omega^2}{EJ_0}, \quad S_0 = a_0 b_0.$$

Предполагая, что на краях балки выполнены условия шарнирного опирания, найти Λ_0 и Λ_1 для наменьшего собственного значения краевой задачи.

4. Свободные колебания прямоугольной мембраны описываются уравнением

$$T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\rho\omega^2 w=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a, \quad 0\leqslant y\leqslant b,$$

где $w(x,y)$ — прогиб мембраны, a, b — длины ее сторон, ω — частота колебаний, T — растягивающее напряжение, ρ — плотность материала.

Граничные условия имеют вид:

$$w=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=a, \quad y=0, \quad y=b.$$

Предполагая, что $c=\rho/T=c_0[1+\varepsilon g(x)]$, где ε — малый параметр, найти первые два члена асимптотических разложений для частот колебаний мембраны.

5. Безразмерная система уравнений

$$\begin{aligned} u''+\left(\frac{B'}{B}u\right)'-\frac{\nu}{R_2}w'-\left(\frac{1}{R_2}\right)'w &= -\Lambda u, \\ \frac{\nu}{R_2}u'+\frac{B'}{R_2B}u-\frac{w}{R_2^2} &= -\Lambda w \end{aligned}$$

описывает осесимметричные безмоментные колебания усеченной конической оболочки. Штрихом обозначена производная по безразмерной длине образующей конуса s, u и w — проекции перемещений точек срединной поверхности оболочки, $B(s)=1-s\sin\beta$ — расстояние от оси симметрии оболочки до срединной поверхности, $R_2(s)=B(s)\cos^{-1}\beta$ — радиус кривизны, 2β — угол при вершине конуса, ν — коэффициент Пуассона, Λ — искомый спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты.

В случае жесткой заделки краев оболочки граничные условия для безмоментной системы имеют вид $u(0)=u(l)=0$. Рассмотреть случай $\beta\ll 1$ и найти два первых члена асимптотического разложения по степеням β для наименьшего собственного значения Λ.

6. Найти двучленное асимптотическое разложение по степеням параметра $n^{-2}\ll 1$ для функции $u(x)$, удовлетворяющей уравне-

нию
$$-\frac{d^2u}{dx^2}+cu\sum_{i=1}^{n-1}\delta\left(x-\frac{i}{n}\right)=\sin\pi x,$$
где $c\sim 1/n$, и граничным условиям $u(0)=u(1)=0$.

Функция $u(x)$ описывает прогиб подкрепленной пружинами струны под действием распределенной нагрузки.

7. Найти два первых члена асимптотического разложения по степеням параметра $n^{-4}\ll 1$ для собственного значения Λ краевой задачи
$$\frac{d^4u}{dx^4}+cu\sum_{i=1}^{n-1}\delta\left(x-\frac{i}{n}\right)=\Lambda u,$$
$$u=\frac{d^2u}{dx^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=1,$$
описывающей свободные колебания шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами. При построении асимптотического разложения считать, что $cn\sim 1$.

20. Асимптотические оценки интегралов. Метод Лапласа.

З а д а н и е

1. Найти два первых члена асимптотического разложения функции
$$F(\lambda)=\int_0^{\pi^2/4}\exp(\lambda\cos\sqrt{x})dx.$$

Найти первый член асимптотического разложения функций:

2. $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^1\exp(-1/x-\lambda x)dx.$

3. $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^\infty\exp(-\alpha x^{-\alpha}-\lambda x)dx, \quad \alpha>0.$

4. $F(\lambda)=\displaystyle\int_{-1}^1(1-x^2)^\lambda x^2dx.$

5. $F(\lambda)=\displaystyle\int_{-1}^1(1-x^2)^\lambda dx.$

6. $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^\lambda xdx.$

7. $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^\pi x^\lambda\sin xdx, \quad \lambda\in N.$

8. $F_\nu(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda \cosh x)\cosh(\nu x)dx.$

21. Асимптотические оценки интегралов. Методы стационарной фазы и перевала.

З а д а н и е

Найти первый член асимптотического разложения и оценку Остатка:

1. Для функции Бесселя большого вещественного индекса ν при фиксированном аргументе $t > 0$

$$J_\nu(\nu t) = \pi^{-1}\int_0^\pi \cos(\nu(x - t\sin x))dx -$$
$$-\pi^{-1}\sin\nu\pi \int_0^\infty \exp(-\nu(x + t\sinh x))dx.$$

2. Для интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^1 \exp(i\lambda x^3)dx.$$

3. Для интеграла

$$F_n(\lambda) = \int_0^1 \exp(i\lambda x^n)dx.$$

4. Для функций Эйри при $\eta \to -\infty$.

Найти первый член асимптотического разложения при $\lambda \to \infty$ для интегралов:

5. $F(\lambda) = \int_0^\infty \exp(\lambda(x + ix - x^3))dx.$

6. $F(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty \exp(i\lambda x)(1 + x^2)^{-\lambda}dx.$

7. $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda(3z - z^3)).$

22. Сингулярно возмущенные системы. Часть 1.

З а д а н и е

1. Построить асимптотическое разложение решений уравнения

$$\mu^2\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - \mu^2 r(x)y + \rho(x)y = 0, \quad p(x), \rho(x) > 0,$$

причем функции $p(x),\ r(x),\ \rho(x)$ голоморфны. К этому уравнению сводится исследование асимптотики решений в задаче Штурма–Лиувилля. Рассмотреть частный случай $p = \rho = 1 + \alpha x,\ r = 0$, соответствующий продольным колебаниям стержня, толщина которого меняется по линейному закону.

2. Построить асимптотическое разложение решений уравнения

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - c(x) y = 0, \quad c(x) > 0,$$

для голоморфной $c(x)$.

3. Найти u_0 и $u_1^{(k)}$ для уравнения

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \rho(x) y = 0, \quad p(x), \rho(x) > 0,$$

при $p(x) = \rho(x) = 1 + \alpha x$. В этом случае уравнение описывает колебания балки, ширина которой меняется по линейному закону.

4. В условиях примера 3 найти u_0 и $u_1^{(k)}$ для балки, толщина которой меняется по линейному закону, т.е. $p(x) = (\rho(x))^3,\ \rho(x) = 1 + \alpha x$.

5. Найти два первых слагаемых асимптотических разложений решений уравнения

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + c(x) y = 0, \quad p(x), c(x) > 0,$$

описывающего прогиб балки на упругом основании.

6. Построить первые члены асимптотических разложений решений уравнения с постоянными коэффициентами

$$-\mu^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \Lambda y = 0,$$

описывающего колебания неабсолютно гибкой струны.

7. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Найти асимптотические разложения функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ при фиксированном ν и $x \to +\infty$. Для определения постоянных множителей воспользоваться интегральными представлениями:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos(\theta)) \cos(\nu\theta) d\theta - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\infty \exp(-x \cosh t - \nu t) dt,$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty \exp(-x\cosh t)\cosh(\nu t)dt,$$

и применить метод Лапласа

23. Сингулярно возмущенные системы. Часть 2.

З а д а н и е

1. Построить два первых члена асимптотики решений системы уравнений

$$\mu\frac{dy}{dx} = y\cos x + z\sin x, \quad \mu\frac{dz}{dx} = y\sin x + 3z\cos x$$

для $\lambda_1 = 2\cos x - 1$.

2. Малые колебания динамически симметричного волчка описываются системой уравнений

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - H\frac{dy_2}{dt} - k^2y_1 = 0, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + H\frac{dy_1}{dt} - k^2y_2 = 0,$$

где $y_1,\ y_2$ — малые отклонения оси волчка от вертикали, t — время, $H = C\omega/A, \quad k^2 = mgz_c/A$. Здесь C — момент инерции волчка относительно оси симметрии, A — момент его инерции относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку опоры, mg — вес волчка, z_c — расстояние между центром тяжести и точкой опоры, ω — угловая скорость вращения волчка.

В предположении, что $H \to \infty$, построить асимптотические разложения решений системы колебаний симметричного волчка и сравнить их с точным решением.

3. Вывести формулы

$$w_0 = \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2}\right)\left(b\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)^{-1/2},$$
$$\Phi_0 = -\left(k_2\lambda^2 - \frac{k_1r^2}{b^2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{-1}\left(b\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)^{-1/2}$$

для $w_0,\ \Phi_0$.

4. Устойчивость безмоментного осесимметричного напряженного состояния оболочки вращения описывается системой уравнений

$$\Delta\Delta w + \Lambda\Delta_t w - \Delta_k\Phi = 0, \quad \Delta\Delta\Phi + \Delta_k w = 0,$$

где $\Delta_t w = \mu^2\frac{1}{b}(bt_1w')' - \frac{t_2r^2}{b^2}w, \quad t_k = -\frac{T_k^0}{\Lambda Eh\mu^2},\ k = 1,2$. Здесь $T_k^0(s)$ — безмоментные начальные усилия, $\Lambda > 0$ — параметр нагружения.

Построить асимптотические разложения интегралов этой системы.

5. Вывести уравнения для определения функций w_0 и Φ_0 в асимптотических разложениях

$$w(s,\mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(s), \quad \Phi(s,\mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Phi_k(s).$$

6. Найти систему уравнений для определения главных членов рядов

$$w(s,\mu_1) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k w_k(s) \exp\left\{\frac{1}{\mu_1}\int_{s_0}^{s} q(s)\,ds\right\},$$
$$\Phi(s,\mu_1) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k \Phi_k(s) \exp\left\{\frac{1}{\mu_1}\int_{s_0}^{s} q(s)\,ds\right\}.$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Билет 1

1. Алгоритм вывода уравнений Эйлера–Лагранжа (нелинеаризованные) по заданным кинетической и потенциальной энергии и непотенциальным обобщенным силам.

2. Решение трансцендентных уравнений.

Билет 2

1. Алгоритм нахождения стационарных решений механической системы. Линеаризация системы в окрестности стационарных решений.

2. Асимптотические оценки интегралов. Метод Лапласа.

Билет 3

1. Алгоритм преобразование уравнений движения к каноническим переменным и к системе уравнений 1-го порядка.

2. Численное решение задачи на собственные значения. Метод прогонки.

Билет 4

1. Критерий Гурвица. Построение областей устойчивости.

2. Сингулярно возмущенные системы.

Билет 5

1. Численное интегрирование уравнений движения в окрестности стационарных решений.

2. Сравнение результатов интегрирования исходной системы и линеаризованной. Построение графиков решений.

Билет 6

1. Фазовое пространство, сечения фазового пространства цилиндрическое фазовое пространство, траектории в конфигурационном пространстве. Визуализация движение фазовой точки в пространствах 2D и 3D. Особые точки. Визуализация движение фазовой точки по тору.

2. Локсодромии на поверхностях.

Билет 7

1. Метод Пуанкаре. Уравнение Ван-дер-Поля.

2. Асимптотические оценки интегралов. Метод стационарной фазы.

Билет 8

1. Форма Жордана. Каноническая форма (Смита).

2. Метод Ньютона в 3D для построения асимптотических разложений корней полинома.

Билет 9

1. Устойчивости неавтономных систем. Устойчивость уравнений типа Матье–Хилла.

2. Определение собственных значений с использованием LU, Cholesky и QR декомпозиций.

Билет 10

1. Получение уравнений Эйлера–Лагранжа для механической системы с непрерывно распределенными параметрами по заданным кинетической и потенциальной энергии и непотенциальным обобщенным силам.

2. Самосопряженное возмущение кратных собственных чисел матрицы.

Билет 11

1. Решение граничных задач. Численное интегрирование линейных и нелинейных уравнений Эйлера–Лагранжа при заданных граничных условиях. Построение графиков решений. Анимация движений.

2. Методы Якоби и Ланцоша.

Билет 12

1. Алгоритм определения стационарных решений механической системы. Линеаризация системы в окрестности стационарных решений.

2. Определение корней алгебраических уравнений методом Ньютона.

Билет 13

1. Алгоритм преобразования к каноническим переменным и к системе уравнений 1-го порядка.

2. Самосопряженное возмущение кратных собственных чисел.

Билет 14

1. Численное интегрирование уравнений движения в окрестности стационарных решений. Сравнение результатов интегрирования исходной системы и линеаризованной.

2. Регулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши.

Билет 15

1. Метод Пуанкаре. Уравнение Ван-дер-Поля.

2. Регулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения. Краевые задачи.

Литература

1. Wolfram S. MATHEMATICA. A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley, 1991.

2. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. М.: Солон-Пресс, 2004.

3. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989.

4. Веретенников В.Г.и др. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ. М.: Высшая школа, 1990.

5. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1971.

6. Меркин Д.Р. , Бауэр С.М., Смирнов А.Л. Задачи по теории устойчивости. М.; Ижевск, 2002.

7. Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Смольников Б.А. Теория устойчивости в примерах и задачах. М.; Ижевск, 2007.

8. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

9. Арнольд В.И. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

10. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Наука, 1963.

11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

12. Задачи специального лабораторного вычислительного практикума по устойчивости и нелинейным колебаниям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

13. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.

14. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в теории тонкостенных конструкций. М.; Ижевск, 2007.

15. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004.

Учебное издание

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ
В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Программа и задания курса
"Пакеты математических программ"

Зав. редакцией Г.И. Чередниченко

Подписано в печать 28.03.2007. Ф-т 60 х 84/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,25.
Тираж 30 экз. Заказ N

Редакция оперативной подготовки изданий
Санкт-Петербургского государственного университета.
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типографии Издательства СПбГУ.
199061, Санкт-Петербург, Средний пр., 41.

Учебное издание

МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ
В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Программа и задания курса
"Пакеты математических программ"

Зав. редакцией Г.И.Чередниченко

Подписано в печать 28.03.2007. Ф-т 60 x 84/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,25.
Тираж 50 экз. Заказ N

Редакция оперативной подготовки изданий
Санкт-Петербургского государственного университета.
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типографии Издательства СПбГУ.
199061, Санкт-Петербург, Средний пр., 41.