

С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов,
П. Е. Товстик, С. Б. Филиппов

Асимптотические методы в механике твердого тела



Москва ♦ Ижевск

2007

УДК 534.1
ББК 22.25

Интернет-магазин

MAFFESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 07-01-07032.

Рецензенты:

д-р. физ.-мат. наук, проф. Баранцев Рэм Георгиевич,
д-р. физ.-мат. наук, проф. Косович Леонид Юрьевич

Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б.

Асимптотические методы в механике твердого тела. — Москва-Ижевск:
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных
исследований, 2007. — 360 с.

В книге рассматриваются основные асимптотические методы, используемые
в теоретической механике и механике деформируемого твердого тела. Особое
внимание уделено механике тонкостенных конструкций. Изложение иллюстри-
руется большим числом примеров и задач, сводящихся к решению алгебраиче-
ских, трансцендентных, а также обыкновенных дифференциальных уравнений.
Наряду с регулярно возмущенными уравнениями, приводятся решения сингу-
лярно возмущенных систем уравнений, линейных и нелинейных краевых задач
на собственные значения.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специа-
лизирующихся в области механики.

ISBN 978-5-93972-475-2

ББК 22.25

© Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б., 2007

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

ГЛАВА 1. Асимптотические оценки	10
1.1. Оценки функций	10
1.1.1. Основные определения	10
1.1.2. Действия с символами	12
1.1.3. Упражнения	14
1.2. Асимптотические ряды	14
1.2.1. Определения	14
1.2.2. Свойства асимптотических рядов	16
1.2.3. Упражнения	18
1.3. Диаграмма Ньютона	19
1.3.1. Введение	19
1.3.2. Постановка задачи	19
1.3.3. Многогранник Ньютона	25
1.3.4. Упражнения	27
1.4. Показатель изменяемости функции	27
1.4.1. Определения	27
1.4.2. Дополнительные определения	29
1.4.3. Упражнения	30
1.5. Асимптотическое решение трансцендентных уравнений	30
1.5.1. Упражнения	36
1.6. Решение систем линейных алгебраических уравнений	36
1.6.1. Простейший случай	36
1.6.2. Случай $\det A_0 = 0, r = 1$	37
1.6.3. Случай $\det A_0 = 0, r > 1$	39
1.6.4. Упражнения	40
1.7. Задачи на собственные значения	41
1.7.1. Кратные собственные значения	42
1.7.2. Обобщенная задача на собственные значения	43
1.7.3. Спектр пучка операторов	44
1.7.4. Упражнения	46
1.8. Ответы и решения	47

ГЛАВА 2. Асимптотические оценки интегралов	61
2.1. Разложение подынтегральной функции в ряд	61
2.1.1. Упражнения	64
2.2. Интегрирование по частям	65
2.2.1. Упражнения	68
2.3. Метод Лапласа	69
2.3.1. Упражнения	75
2.4. Метод стационарной фазы	76
2.4.1. Интегралы в отсутствии стационарных точек	76
2.4.2. Лемма Эрдейи	79
2.4.3. Интегралы при наличии стационарных точек	80
2.4.4. Полные асимптотические разложения	85
2.4.5. Упражнения	86
2.5. Метод перевала	86
2.5.1. Описание метода	86
2.5.2. Асимптотика функций Эйри	88
2.5.3. Упражнения	91
2.6. Ответы и решения	91
ГЛАВА 3. Регулярное возмущение решений обыкновенных дифференциальных уравнений	105
3.1. Введение	105
3.2. Задачи Коши	107
3.2.1. Движение материальной точки в поле силы тяжести	107
3.2.2. Уравнение Дюффинга	109
3.2.3. Упражнения	112
3.3. Периодические решения	113
3.3.1. Решение неавтономных квазилинейных уравнений в нерезонансном случае	114
3.3.2. Решение неавтономных квазилинейных уравнений в резонансном случае	116
3.3.3. Метод Пуанкаре	120
3.3.4. Упражнения	126
3.4. Переходные режимы	127
3.4.1. Метод Ван-дер-Поля	128
3.4.2. Устойчивость стационарных решений	131
3.4.3. Метод многих масштабов	135
3.4.4. Упражнения	139
3.5. Краевые задачи	140
3.5.1. Неоднородные краевые задачи	140

3.5.2. Краевые задачи на собственные значения	144
3.5.3. Краевые задачи для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами	148
3.5.4. Упражнения	152
3.6. Ответы и решения	155
ГЛАВА 4. Сингулярно возмущенные линейные системы	173
4.1. Интегралы линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производных	173
4.1.1. Случай простых корней характеристического уравнения	174
4.1.2. Случай нулевого кратного корня	177
4.1.3. Асимптотические решения уравнений, не содержащих параметров	179
4.1.4. Асимптотические решения неоднородных уравнений	181
4.1.5. Упражнения	182
4.2. Интегралы системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных	183
4.2.1. Случай простых корней характеристического уравнения	184
4.2.2. Случай кратного нулевого корня	187
4.2.3. Асимптотические решения систем уравнений, не содержащих параметров	189
4.2.4. Асимптотические решения неоднородных уравнений	190
4.2.5. Уравнения теории оболочек	190
4.2.6. Случай $t \sim \mu^{-1}$, $\Lambda \sim 1$	192
4.2.7. Случай $t \sim \mu^{-1/2}$, $\Lambda \sim 1$	193
4.2.8. Низкочастотные колебания оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны	195
4.2.9. Низкочастотные колебания оболочки вращения отрицательной гауссовой кривизны	196
4.2.10. Упражнения	197
4.3. Неоднородные краевые задачи	198
4.3.1. Постановка краевых задач	198
4.3.2. Характер поведения интегралов	199
4.3.3. Простейший случай	200
4.3.4. Прогиб балки, лежащей на упругом основании	203
4.3.5. Регулярное вырождение	207
4.3.6. Неабсолютно гибкая струна	209
4.3.7. Осесимметричная деформация оболочки вращения	211

4.3.8.	Деформация оболочки под действием внешнего давления	215
4.3.9.	Деформация оболочки под действием продольной силы	216
4.3.10.	Упражнения	218
4.4.	Построение спектра	219
4.4.1.	Асимптотика решений краевых задач на собственные значения	219
4.4.2.	Колебания неабсолютно гибкой струны	222
4.4.3.	Колебания струны с переменной плотностью	224
4.4.4.	Колебания балки с переменным поперечным сечением	226
4.4.5.	Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки	227
4.4.6.	Упражнения	232
4.5.	Собственные функции, локализованные в окрестности одного из концов промежутка	233
4.5.1.	Колебания прямоугольной пластины	233
4.5.2.	Колебания и устойчивость оболочек	235
4.5.3.	Колебания цилиндрической панели	237
4.5.4.	Устойчивость цилиндрической панели	239
4.5.5.	Упражнения	241
4.6.	Ответы и решения	242
Глава 5. Сингулярно возмущенные линейные системы при наличии точек поворота		
5.1.	Свойства функций Эйри	264
5.1.1.	Упражнения	265
5.2.	Асимптотическое интегрирование уравнения второго порядка при наличии точек поворота	266
5.2.1.	Асимптотические разложения решений	267
5.2.2.	Точки поворота на концах промежутка интегрирования	269
5.2.3.	Точки поворота внутри промежутка интегрирования	271
5.2.4.	Колебания струны на упругом основании	272
5.2.5.	Асимптотические разложения функций Бесселя	275
5.2.6.	Упражнения	277
5.3.	Асимптотическое интегрирование систем линейных уравнений при наличии точек поворота	279
5.3.1.	Теорема о расщеплении	279
5.3.2.	Колебания круглой пластины	282

5.3.3.	Колебания оболочки вращения	284
5.3.4.	Упражнения	287
5.4.	Локализованные собственные функции	288
5.4.1.	Условия существования локализованных решений	289
5.4.2.	Алгоритм построения локализованных решений	290
5.4.3.	Колебания вытянутого эллипсоида вращения	292
5.4.4.	Устойчивость цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии	295
5.4.5.	Упражнения	297
5.5.	Ответы и решения	300
Глава 6. Асимптотическое интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений		
6.1.	Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром	323
6.1.1.	Постановка задачи	323
6.1.2.	Построение формального асимптотического решения	325
6.1.3.	Упражнения	331
6.2.	Вырождение нелинейных краевых задач с малым параметром	332
6.2.1.	Введение	332
6.2.2.	Упражнения	338
6.3.	О ветвлении решений нелинейных уравнений	338
6.3.1.	Постановка задачи	339
6.3.2.	Решение нелинейной задачи	340
6.3.3.	Упражнения	342
6.4.	Ответы и решения	342
Литература		
		353

Предисловие

Асимптотические методы, основанные на разложении решений в ряд по малым или большим значениям параметров или координат, занимают одно из ведущих мест среди приближенных аналитических методов.

Существует много учебников и монографий по теории и применению асимптотических методов. Из отечественных авторов можно отметить книги Андрианова И. В., Нерубайло Б. В. и Образцова И. Ф., Аргатова И. И. [1], Баранцева Р. Г., Боголюбова Н. Н., Митропольского Ю. А. [2], Вайнберга Б. Р. и Треногина В. А. [6], Васильевой А. Б. и Бутузова В. Ф. [7], Гольденвейзера А. Л., Лидского В. Б., Ефграфова М. А. [10], Ломова С. А. [12], Маслова В. П. [13–15], Назарова С. А. [19], Федорюка М. Ф. [22–24], Холшевникова К. В. [27]. На русский язык переведены монографии зарубежных авторов Де Брейна Н. Г. [3], Вазова В. [4], Коула Р. Г. [11], Найфе А. [17, 18], Олвера Ф. [20], Хединга Дж. [26]. Ряд монографий по асимптотическим методам, на которые в тексте книги ссылок нет, приведен в списке дополнительной литературы. Обширная библиография по применению асимптотических методов в механике тонкостенных конструкций содержится в учебном пособии Товстика П. Е., Бауэр С. М., Смирнова А. Л., Филиппова С. Б. «Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций», изданном в Санкт-Петербургском государственном университете в 1995 г. Современное состояние асимптотического анализа математических моделей представлено в монографии Андрианова И. В., Баранцева Р. Г., Маневича Л. И. «Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте», изданной в 2004 году в серии «Синергетика: от прошлого к будущему».

В зависимости от решаемых задач структура асимптотических разложений оказывается различной. В данной монографии рассмотрены асимптотические методы, используемые в механике твердого тела. Основное внимание уделено построению решений сингулярно возмущенных систем уравнений и краевых задач, которые являются характерными для механики тонкостенных конструкций. Приведено большое число примеров. Книга является расширенным и существенно переработанным

вариантом учебного пособия тех же авторов «Асимптотические методы в примерах и задачах», Изд. СПбГУ, 1997 г.

В первой главе рассматриваются асимптотические оценки функций, решение алгебраических и трансцендентных уравнений, а также систем линейных алгебраических уравнений. Вторая глава посвящена асимптотическим методам вычисления интегралов. В третьей главе приведены задачи, сводящиеся к построению решений регулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. В четвертой главе в отсутствие точек поворота, а в пятой — при их наличии обсуждаются методы асимптотического решения линейных сингулярно возмущенных краевых задач и задач на собственные значения. В качестве примеров рассматриваются одномерные задачи равновесия, динамики и устойчивости твердых и упругих тел. Шестая глава посвящена асимптотическому интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений. Обсуждаются вопросы, связанные с сингулярными возмущениями и ветвлением решений.

Основу книги составили лекции по спецкурсу «Асимптотические методы в механике», который читается для студентов кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета.

Авторы благодарят В. И. Сергееву за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-00257).

ГЛАВА 1

Асимптотические оценки

В данной главе рассматриваются асимптотические оценки функций, решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

1.1. Оценки функций

1.1.1. Основные определения

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ определены на некотором множестве S комплексных или вещественных чисел, и пусть a — предельная точка S . *Предельной точкой множества* называется точка, в любой окрестности которой содержится по крайней мере одна точка данного множества, отличная от нее самой. Пусть $z \in S$. Напомним определение некоторых символов, используемых для сравнения функции $f(z)$ с известной (как правило, более простой) функцией $g(z)$.

Обозначение $f(z) = O(g(z))$ при $z \rightarrow a$ применяем, если существуют окрестность U точки a и постоянная C (зависящая от U) такие, что

$$|f(z)| \leq C|g(z)| \quad \text{при } z \in U \cap S. \quad (1.1)$$

Обозначение $f(z) = O(g(z))$ используем также и в случае, если существует постоянная C такая, что неравенство (1.1) справедливо для всех z . При этом ясно, что, если данное неравенство выполняется для некоторого C , то оно также выполняется и для любого большего значения. Наименьшую верхнюю грань значений отношения $|f(z)|/|g(z)|$ при $z \in U$ называют точной верхней границей или граничной постоянной:

$$C_{\min}(U) = \sup_{z \in U} \frac{|f(z)|}{|g(z)|}.$$

Приведем несколько примеров, в которых $S = R = U$ — множество вещественных чисел:

$$\begin{aligned} \sin x &= O(x), \quad x \in R; \quad C_{\min} = 1; \quad \sin x = O(1), \quad x \in R; \quad C_{\min} = 1; \\ (x+1)^2 &= O(x^2), \quad x \in [1, \infty), \quad C_{\min} = 4. \end{aligned}$$

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ зависят еще от других переменных или параметров, а окрестность U и постоянная C в (1.1) не зависят от них, то соотношение (1.1) называется равномерным относительно параметров. Например, если u — параметр из интервала $[0, a]$, где a — положительная постоянная, то при $x \rightarrow \infty$

$$e^{(x-u)^2} = O(e^{x^2})$$

равномерно относительно u .

Обозначение $f(z) = o(g(z))$ при $z \rightarrow a$ используем, если

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 \quad \text{при } z \in S. \quad (1.2)$$

Например, при $S = R$

$$\begin{aligned} \ln x &= o(x^\alpha), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \\ x^\alpha &= o(e^x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \\ x^{\alpha_1} &= o(x^{\alpha_2}), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha_1 > \alpha_2. \end{aligned}$$

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ зависят от параметров, то соотношение (1.2) называется равномерным относительно параметров, если $f(z)/g(z)$ стремится к нулю равномерно по этим параметрам (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность U_a точки a , что неравенство

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < \varepsilon$$

справедливо для всех $z \in U_a \cap S$ и одновременно для всех значений параметров). Например, если u — параметр из интервала $[0, a]$, то $e^{-|z-u|} = o(|z|^{-b})$ при $|z| \rightarrow \infty$ равномерно по u . Здесь a и b — любые вещественные числа.

Таким образом, $f = O(g)$ означает, что порядок функции f не превосходит порядка функции g , а $f = o(g)$ — что порядок f меньше порядка g при $z \rightarrow a$.

Для функций f и g , порядки которых при $z \rightarrow a$ одинаковы, используем обозначение $f \sim g$ при $z \rightarrow a$. В этом случае одновременно $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $z \rightarrow a$. (Во многих работах символ « \sim » используется, лишь если функции f и g эквивалентны, т. е.

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Далее для $f \sim g$ выполнение последнего равенства не предполагается.)
Например, при $S = R$

$$\sin x \sim x \quad \text{и} \quad \sin x \sim 2x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\ln(1+x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0;$$

$$\sin x - x \sim x^3, \quad x \rightarrow 0.$$

Отношение « \sim », подобно соотношениям (1.1) и (1.2), может обладать свойствами равномерности (или неравномерности) относительно других переменных или параметров. Например, при малых ε соотношение

$$\frac{1}{1-x-\varepsilon} \sim \frac{1}{1-x}$$

неравномерно в окрестности точки $x = 1$ и равномерно в любой области, не содержащей эту окрестность, так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \approx 1$ второй и последующие члены разложения будут сравнимы по порядку с первым членом:

$$\frac{1}{1-x-\varepsilon} \sim \frac{1}{1-x} - \frac{\varepsilon}{(1-x)^2} + \dots$$

1.1.2. Действия с символами

Таким образом, обозначения $o(g(z))$ и $O(g(z))$ характеризуют классы функций f , удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.2). Отсюда ясны правила действий с этими символами:

$$o(g(z)) + o(g(z)) = o(g(z)), \quad o(g(z)) + O(g(z)) = O(g(z)),$$

$$o(g(z)) \cdot o(f(z)) = o(g(z) \cdot f(z)), \quad o(g(z)) \cdot O(f(z)) = o(g(z) \cdot f(z)),$$

$$O(o(g(z))) = o(g(z)), \quad o(O(g(z))) = o(g(z)),$$

$$o(o(g(z))) = o(g(z)), \quad o(g(z)) = O(g(z))$$

при $z \rightarrow a$ и $z \in S$. Отметим, что некоторые соотношения такого типа, например два последних, необратимы (в частности, равенство $O(g(z)) = o(g(z))$ неверно).

Докажем первую из этих формул. Остальные доказываются аналогично (докажите самостоятельно).

Пусть $f_1(z) = o(g(z))$ и $f_2(z) = o(g(z))$ при $z \rightarrow a$, тогда

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z) + f_2(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_1(z)}{g(z)} + \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{g(z)} = 0,$$

т. е. $f_1(z) + f_2(z) = o(g(z))$, что и требовалось доказать.

Асимптотические соотношения и отношения порядка можно интегрировать при условии некоторых очевидных ограничений, связанных со сходимостью интеграла.

ПРИМЕР. Если $S = R$, функция $|f(t)|$ интегрируема и $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow \infty$, то при $\alpha > -1$

$$\int_0^x f(t) dt = O(x^{\alpha+1}) \quad x \rightarrow \infty.$$

Действительно, существует X такое, что при $x > X$ выполнено соотношение $|f(t)| \leq C|x^\alpha|$ и

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &\leq \int_0^x |f(t)| dt = \int_0^X |f(t)| dt + \int_X^x |f(t)| dt \leq \\ &\leq C_1 + C \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} - C \frac{X^{\alpha+1}}{\alpha} = C_2 + C \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} \leq Dx^{\alpha+1} \end{aligned}$$

при

$$D \geq \frac{C}{\alpha} + \frac{C_2}{X^{\alpha+1}}.$$

Аналогично можно показать, что при $\alpha < -1$ в этом случае

$$\int_x^\infty f(t) dt = O(x^{\alpha+1}) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

При $\alpha = -1$ (если функция $|f(t)|$ локально интегрируема)

$$\int_0^x f(t) dt = O(\ln x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Действия над символами O , o и \sim и большое число примеров можно найти в работах [3, 10, 17, 18, 20, 28].

1.1.3. Упражнения

1.1.1. Расположить следующие выражения в порядке убывания при малых ε .

$$\ln(1 + \varepsilon), \quad \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon}, \quad \sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon)}.$$

1.1.2. Определить граничные постоянные в соотношениях

а) $\sqrt{x^2 - 1} = O(x)$, **б)** $x^n = O(e^x)$ на интервале $[1, \infty)$.

1.1.3. Пусть S — сектор $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ в комплексной плоскости z . Показать, что существует вещественное c_1 такое, что при $z \rightarrow \infty$ выполняется $e^{-cz} = O(e^{-c_1|z|})$, $c_1 > 0$ для любого $c > 0$.

1.1.4. Показать, что если функция f интегрируема и $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow \infty$, где $g(x)$ — положительная неубывающая дифференцируемая функция x , то

$$\int_a^x f(t)dt = o(xg(x)).$$

1.1.5. Показать, что

$$а) \quad \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} \sim x, \quad x \rightarrow 0;$$

$$б) \quad \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow \infty;$$

$$в) \quad \sin \ln(x+1) - \sin \ln x = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty;$$

$$г) \quad \text{при } n > 1 \quad \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right) \sim x, \quad x \rightarrow 0.$$

1.2. Асимптотические ряды

1.2.1. Определения

Пусть дана последовательность функций

$$\varphi_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

заданных на множестве S , имеющем предельную точку a . Последовательность (2.1) называется *асимптотической* при $z \rightarrow a$, если при любом целом $n \geq 0$

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \rightarrow a. \quad (2.2)$$

Приведем примеры асимптотических последовательностей, считая, что $S = R$ — множество вещественных чисел.

$$(x - a)^n, \quad x \rightarrow a; \quad x^{-n}, \quad x \rightarrow \infty;$$

$$e^{\lambda_n x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) < 0; \quad (2.3)$$

$$\Phi(x)(x - a)^{\alpha_n}, \quad x \rightarrow a, \quad \alpha_{n+1} > \alpha_n,$$

где $\Phi(x)$ — любая функция, заданная в S . Первые две последовательности (2.3) называются *степенными*.

Пусть функция $f(z)$ определена на том же множестве S . Ряд

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad z \rightarrow a \quad (2.4)$$

называется *асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре* функции $f(z)$ по асимптотической последовательности (2.2), если a_n — постоянные и при любом целом $N \geq 0$

$$R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z) = o(\varphi_N(z)), \quad z \rightarrow a, \quad (2.5)$$

или, что то же самое,

$$R_N(z) = O(\varphi_{N+1}(z)), \quad z \rightarrow a. \quad (2.6)$$

Для асимптотического разложения здесь и далее используется знак \simeq вместо $=$.

Ряд (2.4) может расходиться. Соотношение (2.5) порождает последовательность приближенных формул

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(z), \quad N = 1, 2, \dots,$$

погрешность $R_N(z)$ которых имеет порядок первого отброшенного члена ряда (2.4) $R_N(z) \sim \varphi_{N+1}(z)$. Сумму N первых членов ряда (2.4) будем называть N -членным приближением для функции $f(z)$.

В книгах [10, 17, 18, 20, 29] можно найти большое число асимптотических разложений для специальных функций. Например, интегральная показательная функция имеет асимптотическое разложение [25]

$$E(z) = \int_z^\infty t^{-1} e^{-t} dt \simeq e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

причем ряд в (2.7) расходится при всех z . В то же время погрешность $R_N(z)$ (см. формулу (2.5)) не превосходит первого отброшенного члена в разложении (2.7).

1.2.2. Свойства асимптотических рядов

Свойства асимптотических рядов и действия над ними обсуждаются в работах [3, 10, 24, 28]. Перечислим основные из них.

Если функция $f(z)$ разлагается в асимптотический ряд (2.4) по последовательности (2.1), то это разложение единственно, т. е. единственным образом определяются коэффициенты a_n в (2.4):

$$a_n = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(z)}{\varphi_n(z)}.$$

Вместе с тем асимптотический ряд неединственным образом определяет функцию $f(z)$. Действительно, функция $f(z) + f_1(z)$ будет иметь то же асимптотическое разложение (2.4), если для всех $n \geq 0$

$$f_1(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \rightarrow a.$$

Например, функции $E(z)$ и $E(z) + e^{-2z}$ имеют одно и то же разложение (2.7).

Из сказанного ясно, что при выборе последовательности (2.1) для асимптотического разложения функции $f(z)$ необходимо учитывать поведение $f(z)$ при $z \rightarrow a$. При неудачном выборе $\varphi_n(z)$ разложение (2.4) либо не существует, либо дает тривиальный результат $f(z) \simeq 0$. Например, если функцию e^{-z} раскладывать по последовательности z^{-n} , то получаем $e^{-z} \simeq 0$, $z \rightarrow \infty$, т. е. все $a_n = 0$ в (2.4).

Асимптотические разложения можно суммировать и умножать на функции, при определенных предположениях их можно дифференцировать и интегрировать. Степенные асимптотические разложения

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

можно перемножать: $f(z)g(z)$, при $b_0 \neq 0$ делить: $f(z)/g(z)$ и при $b_0 = 0$ подставлять функцию $g(z)$ в функцию $f(z)$: $f[g(z)]$. При этом асимптотические разложения результатов получаются по тем же правилам, что и для сходящихся рядов Маклорена (2.8). Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2.9)$$

сходится в области $S = \{z : |z| < R\}$, то в этой области он определяет аналитическую функцию $f(z)$, асимптотическое разложение которой при $z \rightarrow 0$ совпадает с (2.9). Несложно привести примеры (например, $a_n = n!$), когда ряд (2.9) расходится при всех $z \neq 0$.

Следует отметить, что любые коэффициенты a_n ряда (2.9) дают асимптотическое разложение при $z \rightarrow 0$ некоторой функции $f(z)$, аналитической в секторе

$$S = \{z : |z| < R, \quad \alpha_1 < \arg z < \alpha_2\}$$

при любых α_1, α_2 .

Подчеркнем существенное различие между сходящимися рядами и расходящимися асимптотическими рядами с вычислительной точки зрения. Если ряд (2.4) сходится при некотором z , то это означает, что при данном z

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(z) = 0,$$

т. е. значение функции $f(z)$ может быть (в принципе) найдено с любой точностью. Если же ряд (2.4) расходится, то погрешность $R_N(z)$ при сохранении $N + 1$ члена ряда при некотором $N = N_0(z)$ достигает минимального значения и точность вычислений не может быть выше, чем $R_{N_0}(z)$.

В простейших случаях, например для специальных функций, удается построить весь асимптотический ряд. В других случаях, в частности при асимптотическом интегрировании дифференциальных уравнений, в связи с громоздкостью вычислений приходится ограничиваться лишь одним или двумя первыми членами ряда (см. последующие главы).

Если функция $f(z)$ (и, возможно, $\varphi_n(z)$) зависит от параметра u , а члены с символами O и o в (2.2), (2.5) и (2.6) равномерны (неравномерны) относительно u в некотором множестве U , то говорят, что асимптотическое разложение равномерно (неравномерно) относительно u в U .

Например, разложение

$$\frac{1}{x-1+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{(x-1)^{n+1}}, \quad x > 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

не является равномерным при $(x-1)/\varepsilon = O(1)$. В этой области ошибка, совершаемая в результате усечения ряда после N членов, не будет иметь порядок $O(\varepsilon^N)$.

1.2.3. Упражнения

1.2.1. Найти первые три члена разложений при малом ε :

а) $\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon^2}$; б) $\sin(1 + \varepsilon - \varepsilon^2)$; в) $(1 - a\varepsilon + a^4\varepsilon^2)^{-1}$;
 г) $\sin^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)$; д) $\ln \frac{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}{\sqrt[3]{1+\varepsilon}}$; е) $\ln[1 + \ln(1 + \varepsilon)]$.

1.2.2. Какие из следующих разложений при $\varepsilon \rightarrow 0$ не являются равномерно пригодными для всех x ? В каких областях нарушается их равномерность?

а) $f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\varepsilon x)^n$; б) $g = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \cos nx$; в) $q = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^n$.

1.2.3. Показать, что асимптотическое разложение функции $f(x) = e^{-x} \sin e^x$ при $x \rightarrow \infty$ по последовательности x^{-n} дает тривиальный результат $f(x) \simeq 0$.

1.2.4. Найти ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

который формально удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^3 u'' + (x^2 + x)u' - u = 0.$$

Показать, что этот ряд расходится.

1.3. Диаграмма Ньютона

1.3.1. Введение

Рассмотрим задачу об определении неявных функций $x(\mu)$ из уравнения

$$F(\mu, x) = 0,$$

где μ и x — вещественные переменные, $F(\mu_0, x_0) = 0$.

Предположим, что $F(\mu, x)$ разлагается в ряд по целым положительным степеням $(\mu - \mu_0)$ и $(x - x_0)$, и будем искать решение в виде ряда

$$x = x_0 + \gamma(\mu - \mu_0)^\beta + \gamma'(\mu - \mu_0)^{\beta'} + \dots,$$

где β, β', \dots — возрастающая последовательность вещественных чисел.

По-видимому, И.Ньютон впервые исследовал эту задачу без требования того, что $F'_x(\mu_0, x_0) \neq 0$, и дал геометрический прием для определения значений $\gamma, \beta, \gamma', \beta', \dots$, получивший название диаграммы Ньютона (или многоугольника Ньютона), описание которого содержится в книге [6].

1.3.2. Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда $F(\mu, x)$ является многочленом относительно x :

$$\sum_{k=0}^n a_k(\mu) x^k = 0. \quad (3.1)$$

Пусть коэффициенты a_k имеют вид

$$a_k(\mu) = \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} \mu^{\alpha_{kj}}, \quad (3.2)$$

$$a_{k0} \neq 0, \quad \alpha_{k,j+1} > \alpha_{kj}, \quad 0 \leq m_k \leq \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Следовательно, $a_k(\mu) \sim \mu^{\alpha_{k0}}$, $\mu \rightarrow 0$. При $a_p(\mu) \equiv 0$ считаем $m_p = 0$, $\alpha_{p0} = \infty$. Пусть $a_n(\mu) \neq 0$, $a_0(\mu) \neq 0$.

Асимптотические разложения корней x_q уравнения (3.1) будем искать в виде

$$x_q \simeq \sum_{j=0}^{\infty} x_{qj} \mu^{\beta_{qj}}, \quad \mu \rightarrow 0, \quad \beta_{q,j+1} > \beta_{qj}, \quad q = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

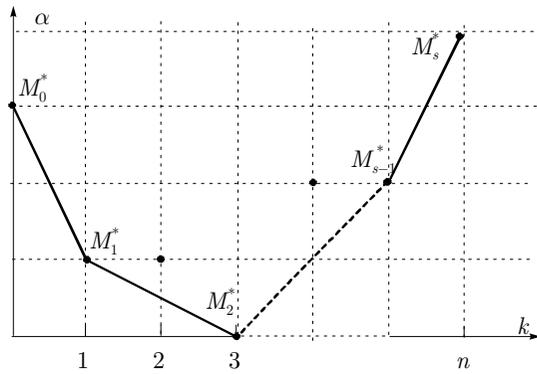


Рис. 1.1

или

$$x_q \simeq x_{q0} \mu^{\beta_{q0}} + o(\mu^{\beta_{q0}}). \quad (3.4)$$

Для определения возможных значений x_{q0} и β_{q0} подставим соотношение (3.4) в (3.1), соберем члены с самой низкой степенью μ и приравняем нулю коэффициент при указанной степени. Пока значение β_{q0} не определено, неизвестно, какие из членов имеют наименьший порядок по μ . Ясно только, что эти члены находятся среди следующих:

$$a_{00} \mu^{\alpha_{00}}, \quad a_{10} x_{q0} \mu^{\alpha_{10} + \beta_{q0}}, \quad a_{20} x_{q0}^2 \mu^{\alpha_{20} + 2\beta_{q0}}, \quad \dots, \quad a_{n0} x_{q0}^n \mu^{\alpha_{n0} + n\beta_{q0}}.$$

Для взаимного уничтожения членов наименьшего порядка (главных членов) необходимо, чтобы два из показателей

$$\alpha_{00}, \quad \alpha_{10} + \beta_{q0}, \quad \alpha_{20} + 2\beta_{q0}, \quad \dots, \quad \alpha_{n0} + n\beta_{q0}$$

совпали, а остальные были бы не меньше их. Приравнивая показатели, найдем все возможные значения β_{q0} , а затем определим x_{q0} .

Для определения значений параметра β_{q0} используем диаграмму Ньютона. Для этого на плоскости (k, α) построим $n+1$ точку $M_k = \{k, \alpha_{k0}\}$ с целочисленными абсциссами (рис. 1.1).

Проведем отрезок $M_0 M_1$. Тангенс угла наклона отрезка к оси k равен значению β_{q0} , при котором совпадают порядки первого и второго слагаемых. Нетрудно проверить, что точкам, лежащим выше прямой, проходящей через M_0 и M_1 , соответствуют слагаемые, имеющие более высокий порядок малости.

Интерес представляют только главные члены, поэтому следует соединять точки M_k отрезками прямой таким образом, чтобы точки M_k , не лежащие на этих отрезках, находились выше полученной ломаной линии.

Для построения указанной ломаной линии будем поворачивать против часовой стрелки луч, проведенный вертикально вниз из точки $M_0^* = M_0$. Обозначим M_1^* первую из точек M_k , которую пересечет луч. Затем вертикальный луч из точки M_1^* будем поворачивать в том же направлении, пока он не пройдет через следующую точку M_2^* . Процесс продолжается до тех пор, пока очередной луч не пройдет через точку $M_s^* = M_n$. Если на луче оказывается несколько точек M_k , то в качестве M_i^* берется крайняя справа точка (с максимальным k).

Ломаная линия, соединяющая точки M_i^* , называется диаграммой Ньютона. Тангенс угла наклона отрезка $M_i^* M_{i+1}^*$ к оси k дает порядок β_{q0} корня x_q , длина проекции отрезка на ось k равна числу корней x_q , имеющих такой порядок, а число точек M_k , через которые проходит отрезок, равно числу членов уравнения для вычисления x_{q0} .

Отметим, что диаграмма Ньютона позволяет обычно оценить порядок поправки (следующего члена) в выражении для корня

$$x \sim \mu^{\beta_{q0}} (1 + O(\mu^{\delta/\varkappa})) = \mu^{\beta_{q0}} + O(\mu^{\delta/\varkappa + \beta_{q0}}),$$

где величина δ определяется наименьшей из длин отрезков, проведенных по вертикали из точек M_k ($M_k \neq M_i^*, M_{i+1}^*$) до прямой, содержащей отрезок $M_i^* M_{i+1}^*$, а \varkappa — кратность корня x_{q0} .

Уравнения

$$-\mu x^3 + x^2 - \mu^2 = 0$$

и

$$-\mu x^3 + x^2 - 2\mu x + \mu^2 = 0$$

имеют похожие диаграммы Ньютона (рис. 1.2), причем в обоих случаях для корней $x_{1,2} = O(\mu)$ $\delta = 2$.

Однако кратность корня ($\varkappa = 2$) во втором уравнении увеличивает порядок следующего члена в разложении для корней. Так, для первого уравнения $x_{1,2} = \pm \mu + O(\mu^3)$, а для второго — $x_{1,2} = \mu + O(\mu^2)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение

$$\mu^3 x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - \mu = 0 \quad (3.5)$$

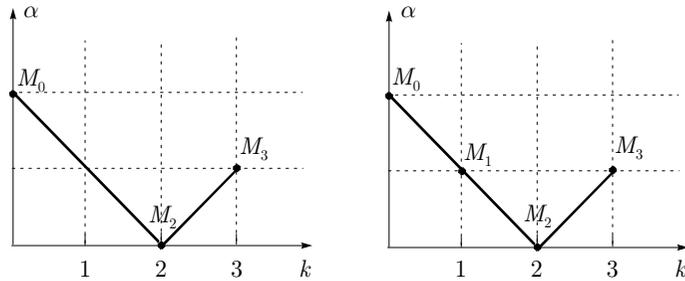


Рис. 1.2

и найдем сначала первое слагаемое в разложении (3.3), опуская индекс q . Подставив $x = x_0 \mu^{\beta_0}$ в (3.5), получим

$$\mu^{3+5\beta_0} x_0^5 + \mu^{4\beta_0} x_0^4 - 2\mu^{3\beta_0} x_0^3 + \mu^{2\beta_0} x_0^2 - \mu = 0. \quad (3.6)$$

Теперь необходимо выбрать в (3.6) главные члены и определить значения β_0 , при которых как минимум два главных члена имеют одинаковый порядок. При $\beta_0 < 0$ главными членами являются два первых слагаемых. Значение $\beta_0 = -3$ определяется из условия совпадения их порядков $3 + 5\beta_0 = 4\beta_0$, а $x_0 = -1$ находится из уравнения $x_0^5 + x_0^4 = 0$. Диаграмма Ньютона для уравнения (3.5) показана на рис. 1.3.

Она имеет три участка: убывающий, постоянный и возрастающий, причем

$$\beta_{10} = -3, \quad x_1 = -\mu^{-3}(1 + O(\mu^3)), \quad \text{так как} \quad |K_1 M_3| = 3;$$

$$\beta_{20} = \beta_{30} = 0, \quad \beta_{40} = \beta_{50} = 1/2, \quad \text{а} \quad |K M_3| = 1/2,$$

поэтому $x_{2,3} = 1 + O(\mu^{1/2})$, $x_{4,5} = \pm \mu^{1/2}(1 + O(\mu^{1/2}))$.

Для вычисления последующих членов рядов (3.3) сделаем в (3.2) замену $x_q = \mu^{\beta_{q0}}(1 + R_q)$. Тогда для R_q получим алгебраическое уравнение типа (3.2), однако будем искать лишь такие корни, которые удовлетворяют соотношению $R_q = o(1)$. Число таких корней равно кратности корня x_{q0} .

Двучленные асимптотические приближения корней уравнения (3.6) таковы: $x_1 = -\mu^{-3} - 2 + o(1)$, $x_{2,3} = 1 \pm \mu^{1/2} + o(\mu^{1/2})$, $x_{4,5} = \pm \mu^{1/2} + \mu + o(\mu)$.

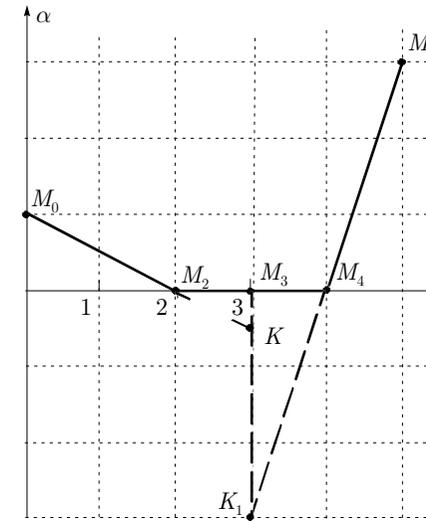


Рис. 1.3

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$x^3 + 3\mu x^2 - (\mu + \mu^{3/2})x + 2\mu^2 = 0. \quad (3.7)$$

Диаграмма Ньютона для уравнения (3.7) показана на рис. 1.4.

Ясно, что

$$\beta_{10} = \beta_{20} = 1/2, \quad |K M_2| = 1/2 \quad \text{и} \quad x_{1,2} = \pm \mu^{1/2}(1 + O(\mu^{1/2})).$$

Для третьего корня имеем

$$\beta_{30} = 1, \quad \text{а} \quad |K_1 M_2| = |K_2 M_3| = 1, \quad \text{но} \quad x_3 = 2\mu(1 + O(\mu^{1/2})),$$

так как $|M'_1 M_1| = 1/2$. Здесь $M'_1 = \{k, \alpha_{k1}\}$. На порядок поправки оказывает влияние второй член в коэффициенте $a_1(\mu) = \mu + \mu^{3/2}$.

Приближенные значения корней уравнения (3.7) таковы: $x_1 = -\mu^{1/2} - 3\mu + O(\mu^{3/2})$, $x_2 = \mu^{1/2} - 2\mu + O(\mu^{3/2})$, $x_3 = 2\mu - 2\mu^{3/2} + O(\mu^2)$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим еще одно уравнение, аналогичное возникающему в задаче о спектре частот свободных осесимметричных колебаний

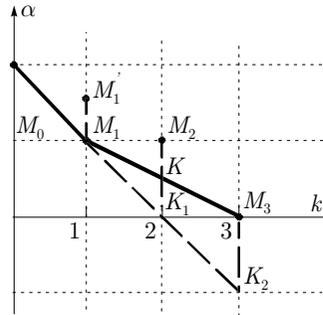


Рис. 1.4

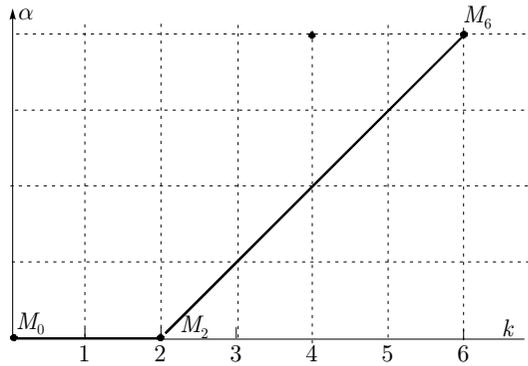


Рис. 1.5

тонкой круговой цилиндрической оболочки (см. п.4.4 в главе 4):

$$\mu^4 x^6 + (1 - \nu^2)\Lambda \mu^4 x^4 + (1 - \Lambda)x^2 + \Lambda(1 - (1 - \nu^2)\Lambda) = 0. \quad (3.8)$$

Здесь Λ — частотный параметр, причем $\Lambda, \nu \sim 1, (1 - \Lambda) \sim 1$. Диаграмма Ньютона для уравнения (3.8) изображена на рис. 1.5.

Ясно, что

$$\beta_{10} = \beta_{20} = 0 \quad \text{и} \quad x_{1,2} = \pm ib, \quad b^2 = \frac{\Lambda(1 - (1 - \nu^2)\Lambda)}{(1 - \Lambda)}.$$

Еще для четырех корней имеем

$$\beta_{k0} = -1, \quad \text{где} \quad k = 3, 4, 5, 6, \quad x_k = \frac{c}{\mu}, \quad c^4 = (\Lambda - 1)^{1/4}.$$

Отметим, что если рассматривать линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами, зависящими от параметра μ :

$$\sum_{k=0}^n a_k(\mu) \frac{d^k z}{dt^k} = 0,$$

то после подстановки $z = e^{xt}$ придем к алгебраическому уравнению (3.1).

1.3.3. Многогранник Ньютона

Более сложной задачей является нахождение асимптотических корней уравнений, содержащих два и более параметра. В этом случае вид диаграммы Ньютона зависит от соотношения между параметрами.

Рассмотрим уравнение, содержащее два параметра: основной малый параметр μ и произвольный параметр λ

$$P(x; \mu, \lambda) = \sum_{k=0}^n \sum_i a_{ki} \mu^{\alpha_{ki}} \lambda^{\beta_{ki}} x^k = 0, \quad a_{ki} \geq 0, \quad a_{ki} = O(1).$$

Отметим в трехмерном пространстве точки $\{k, \alpha_{ki}, \beta_{ki}\}$ и построим выпуклую оболочку для данной точечной совокупности. Поскольку один из параметров мал (μ), то следует построить только «нижние» грани оболочки, то есть только те, которые видны из точки $(0, -\infty, 0)$ пространства $\{k, \alpha, \beta\}$. Грани выпуклой оболочки дают соотношения параметров, при которых происходит изменение диаграммы Ньютона. Для получения таких соотношений следует приравнять порядки членов, соответствующих точкам, определяющим грани.

Замечание. Указанный метод можно применять и для случая, когда коэффициенты a_{ki} имеют произвольные знаки, но при этом может возникнуть ситуация, когда в укороченном уравнении порядок старшего члена (являющегося разностью двух членов одного порядка) снижается. Этот случай следует рассматривать особо (см. Пример 4.)

Пример 4. Найти главные члены корней уравнения при $\mu \ll 1$

$$\mu^4 x^6 + (1 - \nu^2)\lambda \mu^4 x^4 + (1 - \lambda)x^2 + \lambda(1 - (1 - \nu^2)\lambda) = 0.$$

Уравнение такого типа возникает в задаче о спектре частот свободных осесимметричных колебаний тонкой круговой цилиндрической оболочки, причем в данном случае порядок параметра частоты колебаний λ произволен (ср. с Примером 3, где λ имеет порядок 1).

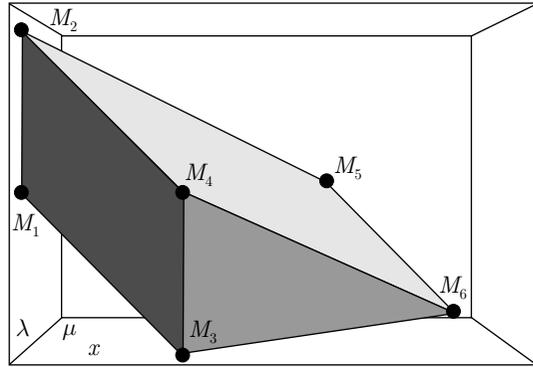


Рис. 1.6

В данном случае трехмерная выпуклая оболочка для вышеприведенного уравнения состоит из трех граней 1: (M_1, M_2, M_3, M_4) ; 2: (M_3, M_4, M_6) ; 3: (M_2, M_4, M_5, M_6) , причем точки M_i имеют следующие координаты $M_1 = \{0, 0, 1\}$, $M_2 = \{0, 0, 2\}$, $M_3 = \{2, 0, 0\}$, $M_4 = \{2, 0, 1\}$, $M_5 = \{4, 4, 1\}$, $M_6 = \{6, 4, 0\}$ (см. рис. 1.6).

Приравнивая порядки членов, определяющих грани, получим

$$\begin{aligned} \lambda &\sim \lambda^2 \sim x^2 \sim \lambda x^2; \\ \lambda x^2 &\sim x^2 \sim \mu^4 x^6; \\ \lambda^2 &\sim \lambda x^2 \sim \lambda \mu^4 x^4 \sim \mu^4 x^6. \end{aligned}$$

Таким образом, для первого и второго соотношения $\lambda \sim 1$, а для третьего $\lambda \sim \mu^{-4}$ и вся область изменения параметра λ разбивается на 3 области, в которых диаграмма Ньютона имеет одинаковую структуру.

В области $\lambda \ll 1$ диаграмма Ньютона имеет 2 сегмента M_1, M_3 и M_3, M_6 , которым соответствуют серии корней $\lambda + x^2 = 0$ и $1 + \mu^4 x^4 = 0$.

В области $1 \ll \lambda \ll \mu^{-4}$ диаграмма Ньютона имеет 2 сегмента M_2, M_4 и M_4, M_6 , которым соответствуют серии корней $(1 - \nu^2)\lambda + x^2 = 0$ и $-\lambda + \mu^4 x^4 = 0$.

В области $\lambda \gg \mu^{-4}$ диаграмма Ньютона имеет 2 сегмента M_2, M_5 и M_5, M_6 , которым соответствуют серии корней $-\lambda + \mu^4 x^4 = 0$ и $(1 - \nu^2)\lambda + x^2 = 0$.

На границе областей при $\lambda \sim 1$ диаграмма Ньютона имеет 2 сегмента M_1, M_2, M_3, M_4 и M_3, M_4, M_6 , которым соответствуют серии корней $(1 - \lambda)x^2 + \lambda(1 - (1 - \nu^2)\lambda) = 0$ и $\mu^4 x^4 + (1 - \lambda) = 0$ (см. Пример 3). Ситуация усложняется, если $1 - \lambda \sim \mu^\alpha$, $\alpha > 0$, при этом происхо-

дит снижение порядка коэффициента при старшем члене укороченного уравнения, что требует особого рассмотрения (см. Параграф 4.4.5).

На границе областей при $\lambda \sim \mu^{-4}$ диаграмма Ньютона имеет 1 сегмент M_2, M_4, M_5, M_6 , которому соответствует серия корней

$$\mu^4 x^6 + (1 - \nu^2)\lambda \mu^4 x^4 - \lambda x^2 - (1 - \nu^2)\lambda^2 = 0.$$

1.3.4. Упражнения

Используя диаграмму Ньютона, определить первые и вторые члены корней уравнения

1.3.1. $x^3 - 3x\mu + \mu^3 = 0.$

1.3.2. $\mu^4 x^4 - x^2 + x - \mu = 0.$

1.3.3. $\mu^{-3} x^3 + \mu^{-1} x^2 - \mu^{-2} x + 1 = 0.$

1.3.4. $\mu^5 x^5 - \mu^2 x^3 + x - \mu^3 = 0.$

1.3.5. Построить многогранник Ньютона для уравнения

$$\mu^4 x^4 + \lambda^2 \mu^2 x^4 + \mu \lambda x^2 + \lambda = 0.$$

1.4. Показатель изменяемости функции

1.4.1. Определения

При интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\lambda > 0$ приходим к функциям $F(x, \lambda)$ двух переменных. Для асимптотического интегрирования и качественного исследования решений при $\lambda \rightarrow \infty$ необходимо располагать способом описания скорости изменения функции F , связанной с изменением x , т. е. производной $\partial F / \partial x$ при $\lambda \rightarrow \infty$. А. Л. Гольденвейзером введено понятие о показателе изменяемости функций.

Показателем изменяемости функции $F(x, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ назовем число t такое, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} \sim \lambda^t F, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

При $t > 0$ функция F быстро меняющаяся, а при $t < 0$ — медленно меняющаяся.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$F(x, \lambda) = g(x)e^z \quad (4.2)$$

при

$$z = \lambda^t f(x), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad t \geq 0, \quad f'(x) \neq 0 \quad (4.3)$$

(функции f и g от λ не зависят)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda^t e^{\lambda^t f(x)} \left[g(x) f'(x) + \frac{g'(x)}{\lambda^t} \right] \sim \lambda^t f'(x) F, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Таким образом, показатель изменяемости функции (4.2) равен t . Аналогично показатель изменяемости функции

$$F(x, \lambda) = g(x) \sin z \quad (4.4)$$

при условии (4.3) также равен t , так как при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda^t g(x) f'(x) \cos(\lambda^t f(x)) + g'(x) \sin(\lambda^t f(x)) \sim \lambda^t f'(x) F \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Правда, для функции (4.4) оценка (4.1) нарушается в окрестностях тех точек, где $\cos z$ или $\sin z$ обращаются в нуль, однако это обстоятельство при введении показателя изменяемости принято игнорировать.

ПРИМЕР 1. Показатель изменяемости может быть различным в различных областях изменения x . В качестве примера рассмотрим уравнение

$$F'' - \lambda q(x) F = 0, \quad (') = \partial/\partial x \quad (4.5)$$

с голоморфным коэффициентом $q(x)$. Если $q(x) \neq 0$, показатель изменяемости решений $F(x, \lambda)$ уравнения (4.5) $t = 1/2$, поскольку в этом случае при $q > 0$ (см. главу 4)

$$F(x, \lambda) \simeq \frac{C_1 \exp\left(\int \sqrt{\lambda q(x)} dx\right) + C_2 \exp\left(-\int \sqrt{\lambda q(x)} dx\right)}{\sqrt[4]{q(x)}},$$

а при $q < 0$ (см. главу 4)

$$F(x, \lambda) \simeq \frac{C_1 \cos\left(\int \sqrt{-\lambda q(x)} dx\right) + C_2 \sin\left(\int \sqrt{-\lambda q(x)} dx\right)}{\sqrt[4]{-q(x)}}.$$

Если $q(x_0) = 0$, $q'(x_0) = a \neq 0$, то при $x - x_0 \sim \lambda^{-1/3}$ показатель изменяемости $t = 1/3$. Для доказательства сделаем замену $x = x_0 + (\lambda a)^{-1/3} \eta$. Тогда уравнение (4.5) в указанной области можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \eta F = 0, \quad (4.6)$$

уже не содержащем параметр λ , и поэтому можно считать, что $\partial F/\partial \eta \sim F$ при $\lambda \rightarrow \infty$, следовательно, $\partial F/\partial x \sim \lambda^{1/3} F$.

Уравнение (4.6) называется *уравнением Эйри*.

С показателем изменяемости t связана *характерная длина рисунка деформации* $l \sim \lambda^{-t}$ (это понятие используется при описании поля деформаций упругих тел).

1.4.2. Дополнительные определения

Показатель изменяемости вводится и для функций большего числа переменных. Рассмотрим функцию $F(x, y, \lambda)$. Ее *общим показателем изменяемости* назовем число t такое, что

$$\max\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right\} \sim \lambda^t F, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Если же производные функции F по различным переменным или направлениям в плоскости x, y имеют разный порядок, то вводится также *частный показатель изменяемости* $t_1 < t$. Например, функция $F(x, y, \lambda) = A \sin \lambda^{t_1} x \sin \lambda^{t_2} y$ имеет по x показатель изменяемости t_1 , а по y — показатель изменяемости t_2 .

При сравнении порядков нескольких функций вводятся *показатели интенсивности*. Пусть даны две функции $F_1(x, \lambda)$ и $F_2(x, \lambda)$. Предположим, что их можно представить в виде

$$F_k = g_k(x, \lambda) H_k(x, \lambda), \quad k = 1, 2,$$

причем

$$g_k \sim \lambda^{p_k}, \quad k = 1, 2; \\ H_1 \sim H_2, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда числа p_k называются показателями интенсивности функций F_k . Если, например, функции F_k имеют вид (4.4) $F_k = g_k \sin(z + \alpha_k)$,

то можно считать, что $H_1 \sim H_2 \sim 1$, и показатели интенсивности совпадают с порядками функций F_k , т. е.

$$F_k \sim \lambda^{pk}. \quad (4.7)$$

Для функций типа (4.3) $F_k = g_k e^z$ оценка (4.7) не выполняется.

Пусть функция F имеет показатель изменяемости t и показатель интенсивности p . Тогда в силу (4.3) при $t \geq 0$ показатель интенсивности p_1 ее производной $\partial F/\partial x$ равен $p_1 = p + t$.

Разумеется, не для каждой функции можно ввести показатель изменяемости. Часто решения дифференциальных уравнений с параметром можно представить в виде суммы нескольких функций с разными показателями изменяемости.

1.4.3. Упражнения

1.4.1. Определить показатель изменяемости функции $F(x, \lambda) = g(x) \operatorname{sh} z$ при $z = \lambda^t f(x)$, $\lambda \rightarrow \infty$, $t \geq 0$, $f'(x) \neq 0$.

1.4.2. Для следующих функций двух переменных

а) $F(x, y, \lambda) = \sin z(x - ay);$

б) $F(x, y, \lambda) = e^{z \frac{x}{y}}$

найти общий показатель изменяемости. Указать направления в плоскости x, y , по которым частный показатель изменяемости является наименьшим при $z = \lambda^n$, $\lambda \rightarrow \infty$, $n \geq 0$.

Определить показатели изменяемости решений дифференциальных уравнений:

1.4.3. $y''' + 4\lambda^2 y'' - \lambda y' - \lambda^2 y = 0.$

1.4.4. $y^V - y^{IV} - \lambda^2 y''' + \lambda^2 y'' + \lambda y' - \lambda y = 0.$

1.5. Асимптотическое решение трансцендентных уравнений

Асимптотические методы используются также для решения многих трансцендентных уравнений, хотя, конечно, в этом случае, в отличие от алгебраических уравнений, не существует единого подхода.

ПРИМЕР 1. Будем искать корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{a} \quad (5.1)$$

при больших положительных x . Здесь a — вещественное положительное число. Такое уравнение получается, например, при решении задачи о высокочастотных поперечных колебаниях стержня переменного сечения с жестко закрепленными концами.

Ясно, что при больших x решение уравнения (5.1) имеет вид $x = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi + o(1)$, где n — целое положительное число. Введем обозначение $\lambda = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi$ и будем искать поправку δ к этому значению корня. Тогда уравнение (5.1) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{tg}(\lambda + \delta) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\lambda + \delta}{a}$$

или

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{a}{\lambda + \delta} = -\frac{a}{\lambda} + O\left(\frac{\delta}{\lambda^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\delta = -a\lambda^{-1} + O(\lambda^{-3}) \quad \text{или} \quad x = \lambda - a\lambda^{-1} + O(\lambda^{-3}).$$

Далее найдем главную часть поправки δ_1 :

$$x = \lambda - a\lambda^{-1} + \delta_1; \quad \delta_1 = O(\lambda^{-3}).$$

Уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(a\lambda^{-1} - \delta_1)} = \frac{\lambda - a\lambda^{-1} + \delta_1}{a},$$

или

$$a(\lambda - a\lambda^{-1} + \delta_1)^{-1} = \operatorname{tg}(a\lambda^{-1} - \delta_1). \quad (5.2)$$

Раскладывая левую и правую части равенства (5.2) в ряд, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda^{2k+1}} &= \frac{a}{\lambda} + \frac{a^2}{\lambda^3} + o(\lambda^{-3}) = \\ &= (a\lambda^{-1} - \delta_1) + \frac{(a\lambda^{-1} - \delta_1)^3}{3} + O(\lambda^{-5}) = \\ &= \frac{a}{\lambda} - \delta_1 + \frac{a^3}{3\lambda^3} + o(\lambda^{-3}), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\delta_1 = a^2 \left(\frac{a}{3} - 1 \right) \lambda^{-3} + O(\lambda^{-5}),$$

то есть $x = \lambda - a\lambda^{-1} + a^2 \left(\frac{a}{3} - 1 \right) \lambda^{-3} + O(\lambda^{-5})$.

Аналогично можно найти и последующие приближения. Таким образом,

$$x = \lambda + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{2k+1}}, \quad (5.3)$$

$$c_0 = -a; \quad c_1 = a^2 \left(\frac{a}{3} - 1 \right); \quad c_2 = a^3 \left(\frac{4a}{3} - 2 - \frac{a^2}{5} \right); \quad \dots$$

Асимптотический порядок ошибки будет постоянно убывать. Отметим, что при $a = 1$ первый корень уравнения (5.1) с точностью до пяти знаков имеет значение $x_1 = 4.49341$, а асимптотические приближения для значений трех первых корней

$$x_{n,i} = \lambda_n + \sum_{k=0}^{k=i} \frac{c_k}{\lambda_n^{2k+1}}, \quad \text{где } \lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

дают

i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$x_{3,i}$
0	4.71239	7.85398	10.99557
1	4.50018	7.72666	10.90463
2	4.49381	7.72528	10.90413
3	4.49344	7.72525	10.90412
∞	4.49341	7.72525	10.90412

ПРИМЕР 2. Рассмотрим аналогичное уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{b}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1} \quad (5.4)$$

при малых x . Здесь a_k, b — вещественные числа. К этому уравнению приводит задача о свободных поперечных колебаниях струны переменной плотности с жестко зашлепленными концами.

Ясно, что при $x \rightarrow 0$ решение уравнения (5.4) имеет вид

$$\frac{b}{x} = \pi n \left(1 + o(1/n) \right) \quad \text{или} \quad x = \frac{b}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2} \right),$$

где n — целое положительное число. Аналогично первому примеру асимптотическое представление для корня имеет вид

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(\pi n)^{2k+1}}, \quad c_0 = b. \quad (5.5)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (5.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $1/(\pi n)$, можно получить коэффициенты $c_k, (k > 0)$ ряда (5.5):

$$c_1 = -a_0 b^2, \quad c_2 = b^3 \left(2a_0^2 - a_1 b + \frac{a_0^3}{3} \right), \quad \dots$$

ПРИМЕР 3. Приведем решение еще одного уравнения.

$$x^2 - \ln x = u, \quad (5.6)$$

где u — большой положительный параметр.

Ясно, что $x^2 - \ln x \sim x^2$ при $x \rightarrow \infty$, и уравнение (5.6) можно представить как

$$u = [1 + o(1)]x^2 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что

$$x = u^{1/2} [1 + o(1)] \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Подставляя это приближение в уравнение $x^2 = u + \ln x$ и учитывая, что $\ln[1 + o(1)] = o(1)$, получаем

$$x^2 = u + \frac{1}{2} \ln x + o(1),$$

т. е.

$$x = u^{1/2} \left(1 + \frac{\ln u}{4u} + o(1/u) \right). \quad (5.7)$$

Как и в примере 1, продолжая процесс подстановок, можно найти асимптотическое приближение любого порядка.

При $u = 10$ уравнение (5.6) имеет решение $x = 3.3478$; Соотношение (5.7) дает $x \approx 3.3443$.

При $u = 100$ точное решение $x = 10.11504$; Соотношение (5.7) дает $x \approx 10.11512$.

ПРИМЕР 4. Построим асимптотическое решение уравнения

$$\sin z + z = 0 \quad (5.8)$$

в комплексной области при больших $|z|$.

Отметим, что на вещественной оси это уравнение имеет единственный корень $z = 0$. Подставим $z = x + iy$, где i — мнимая единица, в уравнение (5.8) и приравняем нулю вещественные и мнимые части:

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + x = 0, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x + y = 0. \quad (5.9)$$

Из уравнений (5.9) видно, что с ростом $|x|$ увеличивается и $|y|$. Ясно также, что если решением системы (5.9) является пара вещественных чисел x, y , то решением является и пара $x, -y$. Поэтому можно считать, что $y > 0$, и при больших y систему (5.9) можно приближенно записать в виде

$$\frac{e^y}{2} \sin x + x = 0, \quad \frac{e^y}{2} \cos x + y = 0. \quad (5.10)$$

Из второго уравнения (5.10) имеем

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{2y}{e^y}\right) + 2\pi n, \quad (5.11)$$

а значит, $x \sim n$ при $n \rightarrow \infty$, а так как $|-2y/e^y| \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, то

$$x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2} + o(1). \quad (5.12)$$

С учетом этого первое уравнение (5.10) дает

$$y = \ln\left(\frac{-2x}{\sin x}\right) \simeq \ln(4\pi n - \pi) \simeq \ln 4\pi n + O(n^{-1}). \quad (5.13)$$

Отметим, что в равенстве (5.12) знак «+» не подходит, так как выражение под знаком логарифма должно быть положительным. Подставляя выражение (5.13) в (5.11), можно получить следующее приближение для x :

$$x \approx 2\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 4\pi n}{2\pi n}.$$

Итак,

$$z \simeq 2\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 4\pi n}{2\pi n} + i \cdot \ln 4\pi n + O(n^{-1}) \quad n \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 5. Многие асимптотические решения трансцендентных уравнений получаются прямым применением формулы обращения Бюрмана—Лагранжа. Эта формула относится к функциям комплексного переменного, но также используется и для вещественных функций.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z=0$ и $f(0) \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$\mu = \frac{z}{f(z)}, \quad (5.14)$$

где z — неизвестное. Тогда существует $a > 0$ такое, что при $|\mu| < a$ уравнение (5.14) имеет единственное решение в окрестности точки $z=0$ и данное решение является аналитической функцией μ :

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (f(z))^n \right]_{z=0}. \quad (5.15)$$

Обобщенная формула дает значение $g(z)$, если функция $g(z)$ аналитична в окрестности точки $z=0$:

$$g(z(\mu)) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mu^n, \quad d_n = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} g'(z)(f(z))^n \right]_{z=0}.$$

Например, решение (5.3) может быть получено с использованием формулы (5.14), если очевидно, что на каждом из интервалов $\pi(n+1/2) < x < \pi(n+3/2)$ имеется ровно один корень x_* , причем при $n \rightarrow \infty$ разность $x_* - \pi(n+1/2) \rightarrow 0$.

Полагая, $x = \pi(n+1/2) + z = \lambda + z$, а $\mu = (\lambda)^{-1}$, уравнение (5.1) можно свести к уравнению вида (5.14), где

$$f(z) = \frac{-z}{\sin z} (a \cos z + z \sin z), \quad f(0) = -a.$$

Отметим, что преобразование уравнения (5.4) в уравнение Лагранжа можно провести аналогично, но этот путь решения приводит к более громоздким выкладкам, чем непосредственное решение, приведенное в этом пункте, а преобразовать уравнение (5.6) в уравнение типа (5.14) значительно труднее, чем в примере 1.

1.5.1. Упражнения

1.5.1. Построить первые три члена асимптотических разложений корней уравнения $xe^{1/x} = e^u$, где u — большое положительное число.

1.5.2. Задача об устойчивости стержня при воздействии распределенной силы, один конец которого жестко зашпелен, а другой свободен, сводится к уравнению $\cos x \operatorname{ch} x = -1$. Построить первые два члена асимптотических разложений больших положительных корней этого уравнения.

1.5.3. Построить первые три члена асимптотических разложений больших положительных корней уравнения $x \sin x = 1$.

1.5.4. Построить первые три члена асимптотических разложений больших положительных корней уравнения $x \operatorname{tg} x = 1$.

1.5.5. Построить первые три члена асимптотических разложений больших положительных корней уравнения $\operatorname{tg} x = x^k$, где k — положительное целое число.

1.5.6. Построить первые два члена в разложении для корня уравнения $x \ln x = u$, где u — большое положительное число.

1.5.7. Построить первые три члена в разложении для корня уравнения $x + \operatorname{th} x = u$, где u — большое положительное число.

1.5.8. Построить первые три члена в разложении для корня уравнения $x \operatorname{tg} x = u$, находящегося в интервале $(0, \pi/2)$, если u — большое положительное число.

1.5.9. Построить асимптотическое решение уравнения $\cos z + z = 0$, в комплексной области при больших $|z|$ ($\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$).

1.6. Решение систем линейных алгебраических уравнений

1.6.1. Простейший случай

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A}(\mu)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mu), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T, \quad (6.1)$$

где

$$\mathbf{A}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \mu^n, \quad \mathbf{b}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{b}_n \mu^n. \quad (6.2)$$

При $\mu \rightarrow 0$ задача (6.1) вырождается в систему

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x} = \mathbf{b}_0. \quad (6.3)$$

Если при малых μ определитель $\det \mathbf{A}(\mu) \neq 0$, то уравнение (6.1) имеет решение $\mathbf{x}(\mu)$. Рассмотрим кратко задачу о разложении по степеням μ решения $\mathbf{x}(\mu)$ и связь этого решения с решением вырожденного уравнения (6.3).

В самом простом случае, если $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$ и существует матрица \mathbf{A}_0^{-1} , решение системы (6.1) находим в виде ряда по степеням μ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{x}_1 + \mu^2 \mathbf{x}_2 + \dots \quad (6.4)$$

Подставляя асимптотическое разложение (6.4) в уравнение (6.1) и приравнявая члены при одинаковых степенях μ , получаем

$$\begin{aligned} \mu^0: \quad & \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0, \\ \mu^1: \quad & \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0, \\ \mu^2: \quad & \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_0, \\ & \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Система уравнений (6.5) дает итерационный процесс для определения коэффициентов разложения (6.4).

1.6.2. Случай $\det \mathbf{A}_0 = 0$, $r = 1$.

В случае, если $\det \mathbf{A}_0 = 0$, задача (6.3), вообще говоря, неразрешима, а решение задачи (6.1) $\mathbf{x}(\mu)$, если оно существует, имеет особенность в точке $\mu = 0$. Допустим, что для малых μ определитель $|\mathbf{A}_0 + \mu \mathbf{A}_1| \neq 0$, тогда уравнение (6.1) имеет решение $\mathbf{x}(\mu)$. Подробное обсуждение этого вопроса содержится в работе [9]. Далее приведем лишь некоторые результаты.

Если $\det \mathbf{A}_0 = 0$, вырожденное уравнение (6.3) разрешимо не для всех \mathbf{b}_0 , а соответствующее однородное уравнение

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x} = 0 \quad (6.6)$$

имеет конечное число r ($r < N$) линейно независимых решений \mathbf{x}_{i0} ($i = 1, 2, \dots, r$). Неоднородное уравнение (6.3) имеет решение тогда

и только тогда, когда его правая часть \mathbf{b}_0 ортогональна всем решениям $\mathbf{y}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, r$) сопряженного однородного уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^* \mathbf{y}^{(k)} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ (\mathbf{b}_0, \bar{\mathbf{y}}^{(k)}) &\equiv \sum_{j=1}^N b_j \bar{y}_j = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь \mathbf{A}_0^* — сопряженная транспонированная матрица ($a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$, где черта означает комплексное сопряжение), а (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов.

Допустим для простоты, что $r = 1$. Тогда однородное уравнение (6.6) имеет только одно (с точностью до множителя) решение \mathbf{x}_{10} . В этом случае сопряженное уравнение (6.7) имеет тоже лишь одно решение $\mathbf{y}^{(1)}$. Разложение по μ решения $\mathbf{x}(\mu)$ уравнения (6.1) будем искать в виде

$$\mathbf{x} = \frac{C_0 \mathbf{x}_{10}}{\mu} + (\mathbf{x}_0 + C_1 \mathbf{x}_{10}) + \mu(\mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_{10}) + \dots + \mu^n(\mathbf{x}_n + C_{n+1} \mathbf{x}_{10}) + \dots \quad (6.8)$$

Неизвестными являются коэффициенты C_i и векторы \mathbf{x}_i . Для их определения подставим соотношение (6.8) в уравнение (6.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ :

$$\begin{aligned} \mu^{-1}: \quad & C_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{10} = 0, \\ \mu^0: \quad & \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 + C_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} = \mathbf{b}_0, \\ \mu^1: \quad & \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0 + C_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} + C_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{10} = \mathbf{b}_1, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Первое равенство (6.9) имеет место при любом C_0 . Для разрешимости второго равенства относительно \mathbf{x}_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$(\mathbf{b}_0 - C_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10}, \mathbf{y}^{(1)}) = 0.$$

Отсюда определяется константа C_0 :

$$C_0 = \frac{(\mathbf{b}_0, \mathbf{y}^{(1)})}{(\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10}, \mathbf{y}^{(1)})}.$$

Зная C_0 , можно определить \mathbf{x}_0 как частное решение второго из уравнений (6.9). Таким образом, после рассмотрения двух первых соотношений (6.9) определены C_0 и \mathbf{x}_0 . Третье уравнение запишем в виде:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0 - C_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} - C_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{10}.$$

Из условия разрешимости данного уравнения

$$(\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0 - C_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} - C_0 \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{10}, \mathbf{y}^{(1)}) = 0$$

определяется следующий коэффициент C_1 и после этого частное решение \mathbf{x}_1 . Продолжая этот процесс, можно найти C_2 и \mathbf{x}_2 и т.д.

1.6.3. Случай $\det \mathbf{A}_0 = 0$, $r > 1$

Для построения решения в общем случае, если $r > 1$, напомним некоторые определения из линейной алгебры.

Если вектор \mathbf{u}_0 удовлетворяет уравнению $\mathbf{A} \mathbf{u}_0 = 0$, где \mathbf{A} — матрица порядка N , а векторы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$, не равные нулю, удовлетворяют уравнениям $\mathbf{A} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1}$ при $i \geq 1$ и уравнение $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{u}_{k-1}$ неразрешимо, то говорят, что векторы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ образуют цепочку Жордана длины k , и вектор \mathbf{u}_i называют присоединенным собственным вектором i -го порядка.

Пусть $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_l$ — квадратные матрицы порядка N из (6.2). Будем рассматривать обобщенное характеристическое уравнение

$$P(\lambda) \equiv \det(\mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{A}_1 + \lambda^2 \mathbf{A}_2 + \dots + \lambda^l \mathbf{A}_l) = 0.$$

Если $\lambda = 0$ корень этого уравнения — обобщенное собственное значение, то существует собственный вектор \mathbf{u}_0 ($\mathbf{A} \mathbf{u}_0 = 0$). Обобщенными присоединенными векторами относительно матриц $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots$ называются в этом случае векторы $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_0 = \mathbf{z}_1, \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_2 &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{z}_2, \\ &\dots = \dots \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_{k-1} &= -\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_{k-2} - \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_{k-3} - \dots - \mathbf{A}_l \mathbf{u}_{k-l} = \mathbf{z}_{k-1}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

при этом $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k-1}$ ортогональны всем собственным векторам сопряженной матрицы \mathbf{A}_0^* , отвечающим собственному значению $\lambda = 0$, а \mathbf{z}_k — не всем.

Итак, пусть уравнение (6.6) имеет $r > 1$ линейно независимых решений \mathbf{x}_{i0} ($i = 1, 2, \dots, r$). Пусть \mathbf{x}_{ij} ($j = 0, 1, \dots, n_i - 1$) — полная система собственных и присоединенных векторов относительно матриц $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots$. В этом случае разложение решения уравнения (6.1) ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mu) = & \sum_{i=1}^r \left(\frac{C_{i0}\mathbf{x}_{i0}}{\mu^{n_i}} + \frac{C_{i0}\mathbf{x}_{i1} + C_{i1}\mathbf{x}_{i0}}{\mu^{n_i-1}} + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{C_{i0}\mathbf{x}_{i,n_i-1} + C_{i1}\mathbf{x}_{i,n_i-2} + \dots + C_{i,n_i-1}\mathbf{x}_{i0}}{\mu} \right) + \\ & + \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^r (C_{i1}\mathbf{x}_{i,n_i-1} + \dots + C_{in_i}\mathbf{x}_{i0}) + \dots \\ & + \mu^s \left(\mathbf{x}_s + \sum_{i=1}^r (C_{i,s+1}\mathbf{x}_{i,n_i-1} + \dots + C_{i,s+n_i}\mathbf{x}_{i0}) \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

Неизвестными являются коэффициенты C_{im} и векторы \mathbf{x}_s . Для их определения, как и раньше, последнее соотношение подставляем в уравнение (6.1) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ . Подробнее этот случай см. в [9].

1.6.4. Упражнения

Получить первые три члена асимптотического решения системы уравнений

1.6.1.

$$\begin{aligned} (1 + \mu)x + \mu y + z &= a_1, \\ \mu x + y + \mu z &= a_2, \\ x + \mu y + (1 + \mu)z &= a_3. \end{aligned}$$

1.6.2.

$$\begin{aligned} (6 + \mu)x + \mu y + (-2 + \mu)z &= 16 + 26\mu, \\ (-3 + 2\mu)y + (2 + \mu)z &= 8\mu, \\ (1 + \mu)x + 4y + (-3 - 2\mu)z &= 6 + 2\mu. \end{aligned}$$

1.6.3.

$$\begin{aligned} (1 + \mu)x + y + z &= b_1, \\ x + (1 + \mu)y + z &= b_2, \\ x + y + (1 + \mu)z &= b_3. \end{aligned}$$

1.6.4.

$$\begin{aligned} (-4 - \mu)x + y + 2z &= d_1, & -8x + (2 - \mu)y + 4z &= d_2, \\ -4x + y + (2 - \mu + \alpha\mu^2)z &= d_3. \end{aligned}$$

1.7. Задачи на собственные значения

Перейдем теперь к задачам на собственные значения для систем линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{A}(\mu) - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = 0. \quad (7.1)$$

Как и ранее,

$$\mathbf{A}(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \mu^n.$$

Пусть \mathbf{A}_0 — самосопряженная матрица ($\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^*$). Если \mathbf{A} — самосопряженная матрица порядка N , то для любых векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} порядка N справедливо равенство

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}).$$

(Самосопряженные матрицы имеют только действительные собственные значения.)

При решении задач на собственные значения в ряд раскладываются и собственный вектор, и собственное число:

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{x}_1 + \mu^2\mathbf{x}_2 + \dots \quad (7.2)$$

Как и ранее, подставляя асимптотические разложения (7.2) в уравнение (7.1) и приравнявая члены при одинаковых степенях μ , получаем:

$$\begin{aligned} \mu^0 : (\mathbf{A}_0 - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{x}_0 &= 0, \\ \mu^1 : (\mathbf{A}_0 - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{x}_1 &= \lambda_1\mathbf{x}_0 - \mathbf{A}_1\mathbf{x}_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \mu^k : (\mathbf{A}_0 - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{x}_k &= \sum_{l=1}^{k-1} (\lambda_{k-l}\mathbf{x}_l - \mathbf{A}_{k-l}\mathbf{x}_l) + (\lambda_k\mathbf{x}_0 - \mathbf{A}_k\mathbf{x}_0), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь \mathbf{E} — единичная матрица.

Первое из уравнений (7.3) имеет N собственных чисел λ_{0i} и N собственных функций \mathbf{x}_{0i} . Пусть сначала все собственные числа различны. Будем искать поправки к собственным значениям λ_{0i} . Пронормируем собственные векторы \mathbf{x}_{0i} : $(\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_{0i}) = 1$. Поскольку $\det(\mathbf{A}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{E}) = 0$, для того, чтобы второе из уравнений (7.3) имело решение, необходимо, чтобы правая часть была ортогональна собственным векторам левой части:

$$\left((\mathbf{A}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{E})\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{0i} \right) = \lambda_{1i}|\mathbf{x}_{0i}|^2 - \left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_{0i} \right).$$

Так как матрица $(\mathbf{A}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{E})$ самосопряженная, то

$$\left((\mathbf{A}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{E})\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{0i} \right) = \left(\mathbf{x}_{1i}, (\mathbf{A}_0 - \lambda_{0i}\mathbf{E})\mathbf{x}_{0i} \right) = 0$$

и поправка к собственному числу

$$\lambda_{1i} = \frac{\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_{0i} \right)}{|\mathbf{x}_{0i}|^2} = \left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_{0i} \right).$$

После определения величины λ_{1i} по второму из уравнений (7.3) может быть определена поправка \mathbf{x}_{1i} к собственному вектору \mathbf{x}_{0i} . Продолжая этот процесс, можно получить последующие члены в разложениях (7.2).

1.7.1. Кратные собственные значения

Рассмотрим теперь более сложный случай кратных собственных значений. Пусть невозмущенная задача (первое из уравнений (7.3)) имеет r -кратное собственное значение λ_0 и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r$ — попарно ортогональные нормированные собственные векторы, соответствующие этому собственному значению. Для возмущенной задачи в общем случае произойдет «расщепление» r -кратного собственного значения. Представим по-прежнему возмущенные собственные числа и собственные векторы в виде рядов ($j = 1, 2, \dots, r$)

$$\lambda_j = \lambda_0 + \mu\lambda_{1j} + \mu^2\lambda_{2j} + \dots, \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{0j} + \mu\mathbf{x}_{1j} + \mu^2\mathbf{x}_{2j} + \dots.$$

В отличие от предыдущего случая неясно, чему равны векторы \mathbf{x}_{0j} . Известно только, что они являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r$. Представим

$$\mathbf{x}_{0j} = a_{j1}^0\mathbf{e}_1 + a_{j2}^0\mathbf{e}_2 + \dots + a_{jr}^0\mathbf{e}_r. \quad (7.4)$$

Сравнивая, как и прежде, коэффициенты при одинаковых степенях μ получаем:

$$\mu^1: \quad \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{0j} + \mathbf{A}_0\mathbf{x}_{1j} = \lambda_0\mathbf{x}_{1j} + \lambda_{1j}\mathbf{x}_{0j}, \dots \quad (7.5)$$

Необходимо найти скалярные коэффициенты $a_{j1}^0, \dots, a_{jr}^0$ и величины λ_{1j} . Умножим обе части равенства (7.5) скалярно на \mathbf{e}_p :

$$\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{e}_p \right) + \left(\mathbf{A}_0\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{e}_p \right) = \lambda_0 \left(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{e}_p \right) + \lambda_{1j} \left(\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{e}_p \right),$$

или, учитывая, что

$$\left(\mathbf{A}_0\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{e}_p \right) = \left(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{A}_0\mathbf{e}_p \right) = \lambda_0 \left(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{e}_p \right),$$

имеем

$$\left(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{e}_p \right) = \lambda_{1j} \left(\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{e}_p \right).$$

Подставив в это равенство выражение (7.4), получим

$$\sum_{i=1}^r \left(\mathbf{A}_1\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_p \right) a_{ji}^0 = \lambda_{1j} a_{jp}^0,$$

или

$$\sum_{i=1}^r c_{ip} a_{ji}^0 = \lambda_{1j} a_{jp}^0, \quad \text{где } c_{ip} = \left(\mathbf{A}_1\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_p \right), \quad (7.6)$$

т. е. числа λ_{1j} являются собственными значениями матрицы $|c_{ip}|$ и определяются из уравнения

$$\det |c_{ip} - \lambda_{1j}\delta_{ip}| = 0, \quad i, p = 1, 2, \dots, r.$$

Здесь δ_{ip} — символ Кронекера. А коэффициенты a_{jk}^0 определяются из соотношений (7.6).

1.7.2. Обобщенная задача на собственные значения

Аналогичный прием используется для решения обобщенной задачи на собственные значения вида

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad \text{где } \mathbf{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n\mu^n, \quad \mathbf{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n\mu^n$$

в случае, когда матрицы \mathbf{A}_0 и \mathbf{B}_0 симметричны.

Собственные числа и векторы также ищутся в виде рядов по малому параметру. Собственные векторы \mathbf{e}_j невозмущенной задачи обладают следующими свойствами: $(\mathbf{A}_0 \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i = \delta_{ij} \lambda_{0j}$, $(\mathbf{B}_0 \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i = \delta_{ij}$. Пользуясь тем же алгоритмом и учитывая указанные свойства, получим формулы для a_{ji}^k и следующих приближений λ_{kj} .

1.7.3. Спектр пучка операторов

Перейдем к задаче о несамосопряженном возмущении (спектр пучка операторов). Рассматривается задача вида

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{x}, \quad (7.7)$$

где матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} представляются в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \mu^n, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i \lambda^i, \quad \mathbf{B}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_{n,k} \mu^k.$$

Решение, как и прежде, ищется в виде разложения по малому параметру μ . Рассмотрим частный случай данной задачи, а именно

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2 \mu^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{1,1} \mu \lambda + \mathbf{E} \lambda^2. \quad (7.8)$$

Задачи такого вида возникают при исследовании свободных колебаний вращающихся тел. В этом случае член \mathbf{A}_0 связан с упругой энергией невращающегося тела, \mathbf{A}_2 — с энергией начальных напряжений и центробежных сил и $\mathbf{B}_{1,1}$ — с энергией сил инерции Кориолиса. При этом \mathbf{x} — вектор перемещений, λ — параметр собственной частоты, μ — параметр угловой скорости вращения. Для удобства индексации перенумеруем $\mathbf{B}_{1,1} = \mathbf{A}_1$. На этот раз, представляя собственные векторы и числа матрицы \mathbf{A} в виде (7.2), подставляя (7.2) в (7.7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$\begin{aligned} \mu^0 : (\mathbf{A}_0 - \lambda_0^2 \mathbf{E}) \mathbf{x}_0 &= 0, \\ \mu^1 : (\mathbf{A}_0 - \lambda_0^2 \mathbf{E}) \mathbf{x}_1 &= \lambda_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0 + 2\lambda_0 \lambda_1 \mathbf{x}_0, \\ &\dots \dots \dots \\ \mu^k : (\mathbf{A}_0 - \lambda_0^2 \mathbf{E}) \mathbf{x}_k &= \sum_{l=1}^{k-1} \left(\lambda_{k-l-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_l - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{k-2} + \sum_{p=0}^{k-l} \lambda_p \lambda_{k-p-l} \mathbf{x}_l \right). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Спектр невозмущенной задачи (первое из уравнений (7.9)) состоит из N пар частот вида $+\lambda_{0j}, -\lambda_{0j}$, каждой из которых соответствует собственный вектор \mathbf{x}_{0j} . Будем рассматривать случай, когда все собственные числа λ_0 просты и отличны от нуля. Тогда собственные векторы образуют ортогональный базис, элементы которого после нормирования обозначим \mathbf{e}_i . Представив векторы в виде, аналогичном (7.2)

$$\mathbf{x}_{kj} = \sum_{i=1}^N a_{ji}^k \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7.10)$$

и подставив в (7.9), получаем

$$\begin{aligned} \mu^1 : \sum_{i=1}^N \left((\lambda_{0i})^2 - (\lambda_{0j})^2 \right) a_{ji}^1 \mathbf{e}_i &= \left(\lambda_{0j} \mathbf{A}_1 + 2\lambda_{0j} \lambda_{1j} \mathbf{E} \right) \mathbf{e}_j, \\ &\dots \dots \dots \\ \mu^k : \sum_{i=1}^N \left((\lambda_{0i})^2 - (\lambda_{0j})^2 \right) a_{ji}^k \mathbf{e}_i &= \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} \left(a_{j,i}^l \lambda_{j,k-l-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_i - a_{j,i}^{k-2} \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_i + \sum_{p=0}^{k-l} \lambda_{j,p} \lambda_{j,k-p-l} a_{j,i}^l \mathbf{e}_i \right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Умножив равенство (7.11) на \mathbf{e}_p и положив $p = j$, получим выражение для определения поправки к частоте λ_{jk} , а при $p \neq j$ получаем поправки к собственному вектору \mathbf{x}_{kj} . Учитываем, что $a_{ij}^0 = \delta_{ij}$ и $a_{ii}^k = 0$. Приведем первые поправки к собственному значению и собственному вектору.

$$\begin{aligned} \lambda_{1j} &= -\frac{(\mathbf{A}_1 \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j)}{2}, \quad j = 1, \dots, N, \\ a_{ij}^1 &= \frac{\lambda_{0i} (\mathbf{A}_1 \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)}{(\lambda_{0i})^2 - (\lambda_{0j})^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Можно заметить, что первые поправки для собственных значений из пары $\pm \lambda_j$ одинаковы, а поправки к соответствующему собственному вектору отличаются знаком. Для второй поправки ситуация обратная.

$$\pm \lambda_j = \pm \lambda_{0j} + \mu \lambda_{1j} \pm \mu^2 \lambda_{2j} \dots, \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{0j} \pm \mu \mathbf{x}_{1j} + \mu^2 \mathbf{x}_{2j} \pm \dots$$

Возмущение в указанной задаче приводит к расщеплению собственных частот и векторов и к их сдвигу. На рис. 1.7 изображена зависимость

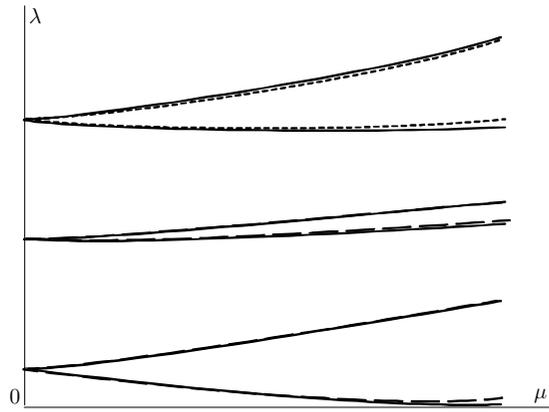


Рис. 1.7

трех низших частот собственных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки от параметра угловой скорости μ (сплошная линия — точное решение, пунктирная линия — двучленное асимптотическое приближение).

1.7.4. Упражнения

1.7.1. Найти с точностью $O(\mu)$ собственные числа и собственные векторы матрицы $A(\mu)$

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 + \mu \\ 1 & \mu & -1 \\ 1 + \mu & -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

1.7.2. Найти с точностью $O(\mu)$ собственные числа и собственные векторы матрицы $A(\mu)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\mu & 3\mu & 0 \\ \mu & 1 + 4\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\mu \end{pmatrix}.$$

1.7.3. Найти с точностью $O(\mu)$ собственные числа и собственные векторы матрицы $A(\mu)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \mu & 0 & \mu \\ 0 & 1 + \mu & \mu^2 \\ -\mu & 0 & 1 + 3\mu \end{pmatrix}.$$

1.7.4. Найти с точностью $O(\mu)$ собственные числа и собственные векторы задачи

$$Ax = (\lambda\mu A_1 + \lambda^2 E)x,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu^2 \\ 0 & 4 + \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7.5. Найти с точностью $O(\mu)$ собственные числа и собственные векторы задачи

$$Ax = (\lambda\mu A_1 + \lambda^2 E)x,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mu^2 \\ 0 & 4 + \mu^2 & 0 \\ \mu^2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8. Ответы и решения

1.1.1. При малых ε имеем

$$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \ln(1+\varepsilon) \sim \varepsilon, \quad \frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} \sim \varepsilon^2.$$

1.1.2а. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \leq 1$, следовательно, $C_{\min} = 1$.

1.1.2б. $|x^n| \leq C|e^x|$, $C \geq |x^n/e^x|$. Максимальное значение выражения x^n/e^x достигается при $x = n$ и равно $C_{\min} = n^n/e^n$.

1.1.3. Так как $\operatorname{Re} z \geq |z|/\sin\varepsilon$ при $z \in S$, то $|e^{-cz}| \leq e^{-c_1|z|}$, $c_1 = c/\sin\varepsilon$.

1.1.4. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_a^x f(t) dt \right) / xg(x) = 0$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_a^x f(t) dt}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x) + x \cdot g'(x)}, \quad \left| \frac{f(x)}{g(x) + x \cdot g'(x)} \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|,$$

так как $g'(x) \geq 0$, а $|f(x)|/|g(x)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

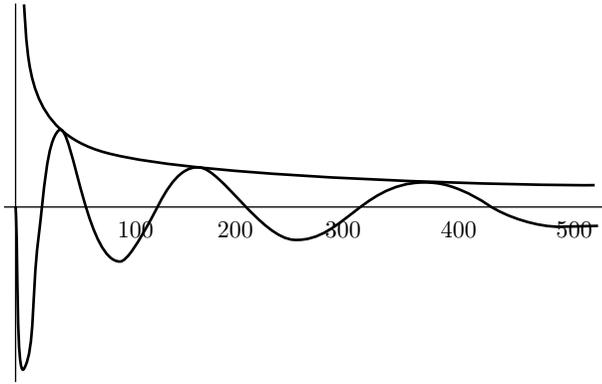


Рис. 1.8

1.1.5а). При $x \rightarrow 0$

$$\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} \simeq \frac{1 - \sqrt{1 - x^2/2}}{1 - (1 - x/2)} \simeq \frac{1 - (1 - x^2/4)}{x/2} = \frac{x}{2} \sim x.$$

1.1.5б).

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} &= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = \\ &= 2 \sin \left(\frac{\sqrt{x}}{2} (\sqrt{1+1/x} - 1) \right) \cos \left(\frac{\sqrt{x}}{2} (\sqrt{1+1/x} + 1) \right). \end{aligned}$$

В последнем выражении второй сомножитель ограничен, а первый при $x \rightarrow \infty$ имеет порядок $2 \sin \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \frac{1}{2x} \right) \simeq \frac{1}{2\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. На рис. 1.8 изображены графики исходной функции и функции $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

1.1.5в). $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x = 2 \sin \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{x} \right) \cos \left(\frac{1}{2} \ln x(1+x) \right)$, $\left| \cos \left(\frac{1}{2} \ln x(1+x) \right) \right| < 1$, и при $x \rightarrow \infty$ имеем $\sin \left(\frac{1}{2} \ln(1+1/x) \right) \simeq \sin \frac{1}{2x}$. Таким образом, $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x = O(1/x)$.

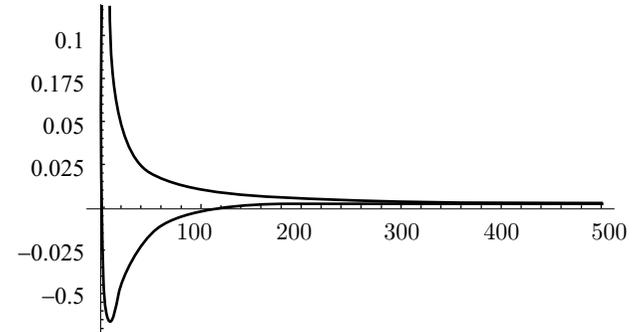


Рис. 1.9

На рис. 1.9 изображены графики исходной функции и функции $\frac{1}{x}$.

1.1.5г). При $x \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} &\simeq \ln \frac{nx + 1 - n^2 x^2/2}{x + 1 - x^2/2} \simeq \\ &\simeq \ln [1 + (n-1)x] \simeq (n-1)x \sim x. \end{aligned}$$

1.2.1а. $\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon^2} = 1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{31\varepsilon^2}{32} + O(\varepsilon^3)$.

1.2.1б. $\sin(1 + \varepsilon - \varepsilon^2) = \sin(1) + \cos(1)\varepsilon - \left[\cos(1) + \frac{\sin(1)}{2} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

1.2.1в. $(1 - a\varepsilon + a^4\varepsilon^2)^{-1} = 1 + a\varepsilon + a^2\varepsilon^2(1 - a^2) + O(\varepsilon^3)$.

1.2.1г. $\sin^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{24} + O(\varepsilon^2)$.

1.2.1д. $\ln \frac{1+2\varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt[3]{1+\varepsilon}} = \frac{5\varepsilon}{3} - \frac{17\varepsilon^2}{6} + \frac{41\varepsilon^3}{9} + O(\varepsilon^4)$.

1.2.1е. $\ln [1 + \ln(1 + \varepsilon)] = \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{7\varepsilon^3}{6} + O(\varepsilon^4)$.

1.2.2а. Разложение не пригодно при $x \rightarrow \infty$.

1.2.2б. Равномерно.

1.2.2в. Разложение не пригодно при $x = O(\varepsilon)$.

1.2.3. $a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \sin e^x = 0$ при всех n .

1.2.4. Пусть $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Подставляем этот ряд в исходное уравнение $\sum_{n=3}^{\infty} [a_{n-1}(n-1)^2 + a_n(n-1)] x^n + (a_1 + a_2)x^2 - a_0 = 0$. Получаем $a_0 = 0$, $a_2 = -a_1$, $a_n = -(n-1)a_{n-1}$ или $a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!a_1$, т.е. $u = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!(-1)^{n-1}x^n$. Ряд расходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)x.$$

1.3.1. $x_1 = \frac{1}{3}\mu^2 + \frac{1}{81}\mu^5 + O(\mu^8)$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}\mu^{1/2} - \frac{1}{6}\mu^2 + O(\mu^{7/2})$.

1.3.2. $x_1 \simeq \mu + \mu^2 + O(\mu^3)$, $x_2 \simeq 1 - \mu + O(\mu^2)$, $x_{3,4} \simeq \pm\mu^{-2} - 1/2 + O(\mu^2)$.

1.3.3. $x_1 \simeq \mu^2 + 2\mu^5 + O(\mu^8)$, $x_{2,3} \simeq \pm\mu^{1/2} - \mu^2 + O(\mu^{7/2})$.

1.3.4. $x_1 = \mu^3 + \mu^{11} + o(\mu^{11})$, $x_{2,3} = \pm\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2}\right) + o(1)$, $x_{4,5} = \pm\left(\frac{1}{\mu^{3/2}} - \frac{1}{2\mu^{1/2}}\right) + o(1/\mu^{1/2})$.

1.3.5. Выделяем 3 пограничные точки, которым соответствуют «нижние» по μ грани многогранника Ньютона (в данном случае тетраэдра с вершинами $M_1 = \{0, 0, 1\}$, $M_2 = \{4, 4, 0\}$, $M_3 = \{4, 2, 2\}$, $M_4 = \{2, 1, 1\}$) и соответственно 4 интервала изменения λ , в которых структура диаграммы Ньютона различна: I) $\lambda \ll \mu^2$, II) $\mu^2 \ll \lambda \ll \mu$, III) $\mu \ll \lambda \ll 1$, IV) $\lambda \gg 1$ (см. рис. 1.10). Например, в области I (включая границу) и в области IV (включая границу) диаграмма Ньютона состоит из одного отрезка, а в остальных областях — из двух сегментов.

1.4.1. $\frac{\partial F}{\partial x} = g'(x)\text{sh}z + g(x)\lambda^t f'(x)\text{ch}z \sim \lambda^t F(x, \lambda)$. Показатель изменяемости равен t .

1.4.2а. Общий показатель изменяемости n . На прямой $ay = x$ частный показатель изменяемости равен нулю.

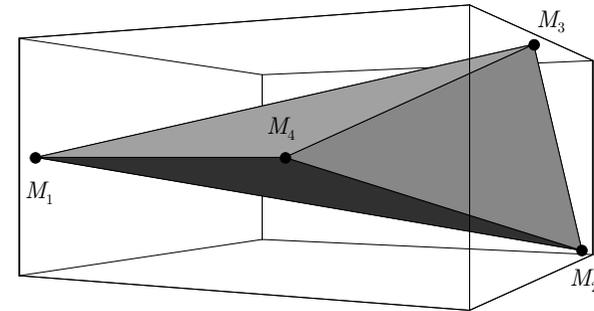


Рис. 1.10

1.4.2б. Общий показатель изменяемости n . На прямой $y = x$ частный показатель изменяемости равен $-\infty$.

1.4.3. Будем искать решение дифференциального уравнения в виде $y = e^z$. Характеристическое уравнение $z^3 + 4z^2\lambda^2 - z\lambda - \lambda^2 = 0$. После замены $\lambda = 1/\mu$ имеем $\mu^2 z^3 + 4z^2 - \mu z - 1 = 0$. Используя диаграмму Ньютона, можно получить корни характеристического уравнения:

$$z_{1,2} \simeq \pm\frac{1}{2} + \frac{\mu}{8} + O(\mu^2) \quad \text{или} \quad z_{1,2} \simeq \pm\frac{1}{2} + \frac{1}{8\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$z_3 \simeq -\frac{4}{\mu^2} - \frac{\mu}{4} + O(\mu^2) \quad \text{или} \quad z_3 \simeq -4\lambda^2 - \frac{1}{4\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение имеет два корня с показателем изменяемости равным нулю: $y(x, \lambda) \simeq e^{\pm\frac{x}{2}}$, $\frac{\partial y}{\partial x} \simeq \pm\frac{1}{2}y(x, \lambda)$, и одно решение с показателем изменяемости равным 2:

$$y(x, \lambda) \simeq e^{-4\lambda^2 x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \simeq -4\lambda^2 y(x, \lambda).$$

1.4.4. После замены переменной $\lambda = 1/\mu$ характеристическое уравнение $z^5 - z^4 - \lambda^2 z^3 + \lambda^2 z^2 + \lambda z - \lambda = 0$ принимает вид $\mu^2 z^5 - \mu^2 z^4 - z^3 + z^2 + \mu z - \mu = 0$.

Корни характеристического уравнения в этом случае равны: $z_{1,2} = \pm\mu^{1/2} + O(\mu)$ или $z_{1,2} = \pm\lambda^{-1/2} + O(\lambda^{-1})$, $z_3 = 1 + O(\mu)$ или $z_3 = 1 + O(1/\lambda)$, $z_{4,5} = \pm 1/\mu + O(1)$ или $z_{4,5} = \pm\lambda + O(1)$.

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение имеет два решения с показателем изменчивости равным $-1/2$:

$$y(x, \lambda) \simeq e^{\pm x/\lambda^{1/2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \simeq \pm \frac{1}{\lambda^{1/2}} y(x, \lambda),$$

одно решение с показателем изменчивости равным нулю:

$$y(x, \lambda) \simeq e^x, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \simeq y(x, \lambda),$$

и два решения с показателем изменчивости равным 1:

$$y(x, \lambda) \simeq e^{\pm \lambda x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \simeq \pm \lambda y(x, \lambda).$$

1.5.1. Уравнение $xe^{1/x} = e^u$ эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{x} + \ln x = u. \quad (8.1)$$

При большом значении u это уравнение имеет два корня: один соответствует малому значению x , и в этом случае слева в уравнении главный член равен $1/x$. Другой корень соответствует большому значению x – тогда главным членом слева в уравнении является член $\ln x$. Итак, в первом случае, в первом приближении $x = 1/u + o(1/u)$. Будем искать поправку к этому корню. Подставляя выражение $x = 1/u + \delta$ в уравнение (8.1) и раскладывая в ряд левую часть, получаем

$$\frac{1}{1/u + \delta} + \ln \left(\frac{1 + \delta u}{u} \right) \approx u - u^2 \delta + \delta u - \ln u = u,$$

откуда $\delta = -\ln u / u^2$. Аналогично можно получить следующую поправку:

$$x = \frac{1}{u} - \frac{\ln u}{u^2} + \frac{\ln^2 u}{u^3} + O\left(\frac{\ln u}{u^3}\right).$$

Для второго корня в первом приближении $x = e^u$. Уточняя его, имеем

$$x = e^u - 1 - \frac{1}{2}e^{-u} + O(e^{-2u}).$$

1.5.2. Уравнение $\cos x \operatorname{ch} x = -1$ можно представить в виде $\cos x = -1/\operatorname{ch} x$ или при больших x : $\cos x = -\frac{2}{e^x}$. При $x \rightarrow \infty$ правая часть этого уравнения стремится к нулю, и поэтому корни этого уравнения можно представить как $x = \pi/2 + \pi n + o(1) = \lambda_n + o(1)$. Учитывая, что $\cos(\lambda_n + \delta) = (-1)^{n+1} \sin \delta$, и разлагая $\sin \delta$ в ряд, получаем $\delta = 2(-1)^n / e^{\lambda_n}$. Продолжая этот процесс можно, построить и следующие члены ряда $x = \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{e^{k\lambda_n}}$.

1.5.3. Уравнение $x \sin x = 1$ можно представить в виде $\sin x = 1/x$. Тогда при больших x корни этого уравнения можно записать как $x = \pi n + O(1/\pi n)$. Учитывая, что $\sin(\pi n + \delta) = (-1)^n \sin \delta$, разлагая $\sin \delta$ в ряд, можно построить следующие члены ряда:

$$x = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (\pi n)^{-2k-1}; \quad x = \pi n + \frac{(-1)^n}{\pi n} - \frac{1}{\pi^3 n^3} \left(1 - \frac{(-1)^n}{6} \right) + O(n^{-5}).$$

1.5.4. Уравнение $x \operatorname{tg} x = 1$ можно представить в виде $\operatorname{tg} x = 1/x$. Отсюда следует, что при больших x корни уравнения можно записать как $x = \pi n + O(1/\pi n)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}(\pi n + \delta) = \operatorname{tg} \delta$, разлагая $\operatorname{tg} \delta$ в ряд, можно определить и следующие слагаемые в разложении

$$x = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (\pi n)^{-2k-1};$$

$$x = \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{4}{3\pi^3 n^3} + O(n^{-5}).$$

1.5.5. Аналогично примеру 1, разобранному в п. 1.5 при больших x , решение уравнения имеет вид $x = (\frac{1}{2} + n)\pi + o(1)$, где n – целое положительное число. Если обозначить $\lambda = (\frac{1}{2} + n)\pi$ и искать поправку δ к этому значению корня, получим $\operatorname{tg}(\lambda + \delta) = -1/\operatorname{tg} \delta = (\lambda + \delta)^k$, откуда имеем $\delta = -1/\lambda^k + o(\lambda^{-k})$. Определяя следующую поправку, находим $\delta_1 \approx 1/(3\lambda^{3k}) - k/\lambda^{2k+1}$. Ясно, что в случае $k = 1$ оба члена имеют одинаковый порядок, и $\delta_1 = -2/3\lambda^{-3}$, а при $k > 1$ поправка $\delta_1 = -k/\lambda^{2k+1}$ или $x = \lambda - \lambda^{-k} - k/\lambda^{2k+1}$.

1.5.6. Покажем, что первое приближение корня уравнения $x = u/\ln x$ имеет вид $x = u/\ln u$. Подставив это выражение в исходное уравнение,

имеем $\frac{u}{\ln u} \ln\left(\frac{u}{\ln u}\right) = \frac{u}{\ln u} (\ln u - \ln \ln u) = u - u \frac{\ln \ln u}{\ln u} = u + o(u)$. Далее будем искать поправку δ . Подставим в исходное уравнение $x = u/\ln u + \delta$ и сохраним только главные члены. Тогда $\delta = \frac{u \ln \ln u}{\ln^2 u}$ или $x \approx \frac{u}{\ln u} + \frac{u \ln \ln u}{\ln^2 u}$.

1.5.7. Запишем исходное уравнение в виде $x = u - \text{th}x$. Тогда, учитывая, что $\text{th}x = 1 + o(1)$ при больших x , имеем $x = u - 1 + o(1)$. Для следующего приближения разложим $\text{th}x$ в ряд, удобный при больших x : $\text{th}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-2kx} = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - \dots$. Отсюда имеем $x = u - 1 + O(e^{-2u})$, на следующем шаге $x = u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u})$.

1.5.8. При большом u корень уравнения $x \text{tg} x = u$, находящийся в интервале $(0, \pi/2)$, можно представить как $x = \frac{\pi}{2} - \delta$, где $\delta = o(1)$. Учитывая, что $\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \delta) = 1/\text{tg} \delta$, имеем $(\frac{\pi}{2} - \delta)u^{-1} = \text{tg} \delta \approx \delta$, откуда $\delta = \pi/2u$. Последующие приближения дают $x = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}) + O(u^{-3})$.

1.5.9. Аналогично примеру 3 в п. 1.5. исходное уравнение можно представить в виде системы

$$\begin{cases} (e^y + e^{-y}) \cos x + 2x = 0, \\ (e^{-y} - e^y) \sin x + 2y = 0, \end{cases} \quad z = x + i \cdot y.$$

Рассуждая далее как в подп. 1.5.3, получаем

$$z \simeq (2n+1)\pi + \frac{2 \ln(4\pi n + \pi)}{4\pi n + \pi} + i \cdot \ln(4\pi n + \pi) \quad n \rightarrow \infty.$$

1.6.1. Исходную систему уравнений можно представить в виде

$$(\mathbf{A}_0 + \mu \mathbf{A}_1) \mathbf{X} = \mathbf{a}, \quad \text{где } \mathbf{X} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T,$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det(\mathbf{A}_0 + \mu \mathbf{A}_1) = \mu(2 + \mu - 2\mu^2) > 0$ при $0 < \mu \ll 1$, но $\det \mathbf{A}_0 = 0$ и $r = 1$. Матрица \mathbf{A}_0 самосопряженная. Однородное урав-

нение (6.6) имеет решение $\mathbf{X}_{10} = (1, 0, -1)^T$. Разложение по μ решения $\mathbf{X}(\mu)$ исходной системы уравнений ищем в форме (6.8). Из условия разрешимости второго из уравнений (6.9) относительно x_0 имеем $C_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{X}_{10}) / (\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{10}, \mathbf{X}_{10}) = (a_1 - a_3)/2$. Одно из частных решений этого уравнения $\mathbf{x}_0 = (a_1/2, a_2, a_3/2)^T$.

Продолжая этот процесс, можно найти

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_0, & \mathbf{x}_1 &= -((a_1 + a_3)/4, (a_1 + a_3)/2, a_2)^T, \\ C_2 &= (a_1 + a_3 - 4a_2)/8 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\mu}(a_1 - a_3) + \frac{1}{4}(a_1 + a_3) - \frac{\mu}{8}(a_1 + a_3 + 4a_2) + O(\mu^2), \\ y &= a_2 - \frac{\mu}{2}(a_2 + a_3) + O(\mu^2), \\ z &= \frac{1}{2\mu}(a_3 - a_1) + \frac{1}{4}(a_1 + a_3) - \frac{\mu}{8}(a_1 + a_3 + 4a_2) + O(\mu^2). \end{aligned}$$

1.6.2. Исходную систему уравнений представим в виде

$$(\mathbf{A}_0 + \mu \mathbf{A}_1) \mathbf{X} = \mathbf{b}_0 + \mu \mathbf{b}_1,$$

где

$$\mathbf{X} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{b}_0 = (16, 0, 6)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (26, 8, 2)^T.$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

причем $\det \mathbf{A}_0 = 0$ и $r = 1$. Однородное уравнение (6.6) имеет решение $\mathbf{X}_{10} = (1, 2, 3)^T$. Сопряженное однородное уравнение $\mathbf{A}_0^* \mathbf{y} = 0$ имеет решение $\mathbf{y} = (1, -8, -6)^T$. Из условия разрешимости второго уравнения (6.9) относительно x_0 имеем $C_0 = 1$, а одно из частных решений этого уравнения $\mathbf{x}_0 = (1, 1, -2)^T$.

Последовательно можно найти

$$x = \frac{1}{\mu} + 2 + \frac{11}{4}\mu + O(\mu^2), \quad y = \frac{2}{\mu} + 3 - \frac{3}{2}\mu + O(\mu^2), \quad z = \frac{3}{\mu} + 1 - \frac{7}{4}\mu + O(\mu^2).$$

1.6.3. Исходную систему уравнений можно представить в виде

$$(\mathbf{A}_0 + \mu \mathbf{A}_1) \mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad \text{где } \mathbf{X} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T.$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A}_0 — самосопряженная, $\det \mathbf{A}_0 = 0$. Решение однородного уравнения (6.6) может быть представлено в виде $\mathbf{X}_0 = a(1, 0 - 1)^T + b(0, 1, -1)^T$, т. е. $r = 2$. Можно показать, что ни при каких значениях констант a и b не существует решений системы (6.10), т. е. не существует обобщенных присоединенных векторов, таким образом, решение исходной системы уравнений можно искать в форме (6.11), при этом $n_1 = n_2 = 1$, т. е.

$$\mathbf{x} = \frac{C_{10} \mathbf{x}_{10} + C_{20} \mathbf{x}_{20}}{\mu} + (\mathbf{x}_0 + C_{11} \mathbf{x}_{10} + C_{21} \mathbf{x}_{20}) + \mu(\mathbf{x}_1 + C_{12} \mathbf{x}_{10} + C_{22} \mathbf{x}_{20}) + \dots$$

В качестве векторов \mathbf{x}_{10} и \mathbf{x}_{20} можно взять любые два линейно независимых вектора, например, $\mathbf{x}_{10} = (1, 0, -1)^T$ и $\mathbf{x}_{20} = (1, -2, 1)^T$. Подставляя асимптотическое разложение (6.11) в исходное уравнение и приравнявая члены при одинаковых степенях μ , получаем

$$\begin{aligned} \mu^{-1}: & \quad C_{10} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{10} + C_{20} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{20} = 0, \\ \mu^0: & \quad \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 + C_{11} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{10} + C_{21} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_{20} + C_{10} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} + C_{20} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{20} = \mathbf{b}, \\ \mu^1: & \quad \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0 + C_{11} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} + C_{21} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{20} = 0, \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

Первое из этих равенств имеет место при любых C_{10} и C_{20} . Для разрешимости второго равенства относительно \mathbf{x}_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$(\mathbf{b} - C_{10} \mathbf{x}_{10} - C_{20} \mathbf{x}_{20}, \mathbf{x}_{i0}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда определяются константы C_{10} , C_{20} :

$$C_{10} = (b_1 - b_3)/2, \quad C_{20} = (b_1 - 2b_2 + b_3)/6.$$

Зная эти константы, можно определить частное решение \mathbf{x}_0 и из разрешимости следующего уравнения $\mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_0 - C_{11} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{10} - C_{21} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{20}$

определить следующие константы C_{11}, C_{21} . Продолжая этот процесс, можно получить

$$\mathbf{X} = \frac{1}{3\mu} \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 - b_3 \\ 2b_2 - b_1 - b_3 \\ 2b_3 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \frac{b_1 + b_2 + b_3}{27} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(\mu^2).$$

1.6.4. Исходную систему уравнений можно представить в виде

$$(\mathbf{A}_0 + \mu \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{X} = \mathbf{d}, \quad \text{где } \mathbf{X} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)^T.$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A}_0 — самосопряженная, $\det \mathbf{A}_0 = 0$ и $r = 2$. Решение однородного уравнения (6.6) может быть представлено в виде $\mathbf{X}_0 = a(1, 4, 0)^T + b(0, -2, 1)^T$, т. е. $r = 2$. Первое из уравнений (6.10) имеет решение, если $\mathbf{u}_0 = \mathbf{X}_0$ при $a = b$, т. е., если $\mathbf{u}_0 = a(1, 2, 1)^T$. Тогда общее решение, зависящее от двух произвольных постоянных a_1 и b_1 , имеет вид $\mathbf{u}_1 = (a_1, a + 4a_1 - 2b_1, b_1)^T$. Второе из уравнений (6.10) $\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_2 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_0$ имеет решение, только если $\alpha = 1/2$, тогда при $b_1 = a_1 + a/2$ это уравнение имеет вид $\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_2 = a_1(1, 2, 1)^T$. Таким образом, решение исходной системы можно искать в форме (6.11), при этом если $\alpha \neq 1/2$, то $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{C_{10} \mathbf{x}_{10}}{\mu^2} + \frac{C_{10} \mathbf{x}_{11} + C_{11} \mathbf{x}_{10} + C_{20} \mathbf{x}_{20}}{\mu} + \\ & + (\mathbf{x}_0 + C_{11} \mathbf{x}_{11} + C_{12} \mathbf{x}_{10} + C_{21} \mathbf{x}_{20}) + \dots \end{aligned}$$

Вектор \mathbf{x}_{10} должен иметь вид $\mathbf{x}_{10} = a(1, 2, 1)^T$ при любом a . Вектор $\mathbf{x}_{11} = (a_1, a + 4a_1 - 2b_1, b_1)^T$ при любых a_1 и b_1 . Например, можно принять $\mathbf{x}_{10} = (4, 8, 4)^T$, $\mathbf{x}_{11} = (-1, 0, 0)^T$, $\mathbf{x}_{20} = (1, -2, 3)^T$.

Если $\alpha = 1/2$, то $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{C_{10} \mathbf{x}_{10}}{\mu^3} + \frac{C_{10} \mathbf{x}_{11} + C_{11} \mathbf{x}_{10}}{\mu^2} + \frac{C_{10} \mathbf{x}_{12} + C_{11} \mathbf{x}_{11} + C_{12} \mathbf{x}_{10} + C_{20} \mathbf{x}_{20}}{\mu} + \\ & + (\mathbf{x}_0 + C_{11} \mathbf{x}_{12} + C_{12} \mathbf{x}_{11} + C_{13} \mathbf{x}_{10} + C_{21} \mathbf{x}_{20}) + \dots; \\ \mathbf{x}_{10} = & (4, 8, 4)^T, \quad \mathbf{x}_{11} = (-1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{x}_{12} = (0, -1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_{20} = (1, -2, 3)^T. \end{aligned}$$

Подставляя это асимптотическое разложение в исходное уравнение и приравнявая члены при одинаковых степенях μ , получаем последовательно коэффициенты C_{10} , C_{20} и т.д.

При $\alpha = 1/2$

$$\mathbf{X} = \frac{4d_3 + 2d_2 - 8d_1}{\mu^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} 4d_1 - d_2 \\ 8d_1 - 2d_2 \\ 2d_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\alpha \neq 1/2$

$$\mathbf{X} = \frac{2d_3 + d_2 - 4d_1}{(2\alpha - 1)\mu^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

1.7.1. В этом случае

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первое из уравнений (7.3) (невозмущенная задача) имеет двухкратное собственное значение $\lambda_{0(1,2)} = 1$ и собственное значение $\lambda_{01} = -2$. Ортонормированные собственные векторы, соответствующие первому собственному значению, таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T, \\ \mathbf{e}_2 &= (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3})^T. \end{aligned}$$

По соотношениям (7.6) можно построить поправки к собственному значению $\lambda_{0(1,2)} = 1$ и найти коэффициенты a_j для определения соответствующих собственных векторов: $c_{11} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$, $c_{12} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1/\sqrt{3}$, $c_{21} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 1/\sqrt{3}$, $c_{22} = (\mathbf{A}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 5/3$. Собственные числа матрицы c_{ij} определяются из уравнения $\tilde{\lambda}^2 - \frac{8}{3}\tilde{\lambda} + \frac{4}{3} = 0$: $\tilde{\lambda}_1 = 2$, $\tilde{\lambda}_2 = 2/3$. Коэффициенты a_k , соответствующие $\tilde{\lambda}_1 = 1$, определяются из соотношений (7.5): $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{3}$. Аналогично для $\tilde{\lambda}_2 = 2/3$ можно найти $a_1 = -\sqrt{3}$, $a_2 = 1$. Следовательно, для матрицы \mathbf{A} имеем

$$\lambda_1 = 1 + 2\mu + O(\mu^2), \quad \lambda_2 = 1 + \frac{2}{3}\mu + O(\mu^2).$$

Собственный вектор $\mathbf{x}_{01} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^T$, причем для удобства можно взять $\mathbf{x}_{01} = (1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_{02} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -4, 2)^T$ или считать $\mathbf{x}_{02} = (-1, -2, 1)^T$.

По соотношению (7.4) может быть определена поправка к третьему собственному значению $\lambda_3 = -2 + \frac{\mu}{3} + O(\mu^2)$ и с учетом (7.3) получим $\mathbf{x}_{13} = (1/3, 0, -1/3)^T$, т.е. $\mathbf{x}_3 = (1 + \mu/3, -1, -1 - \mu/3)^T + O(\mu^2)$.

1.7.2. В этом случае

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Невозмущенная задача в этом случае имеет трехкратное собственное значение $\lambda_{0(1,2,3)} = 1$. Ему соответствуют ортонормированные собственные векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$.

По соотношениям (7.6) можно построить поправки к собственному значению $\lambda_{0(1,2,3)} = 1$ и найти коэффициенты a_j для определения соответствующих собственных векторов: $c_{11} = 2$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 0$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 0$, $c_{31} = 0$, $c_{32} = 0$, $c_{33} = 2$. Собственные числа матрицы c_{ij} : $\tilde{\lambda}_1 = 2$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, $\tilde{\lambda}_3 = 5$.

Коэффициенты a_k , соответствующие $\tilde{\lambda}_1 = 2$: $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, для $\tilde{\lambda}_2 = 1$ значения $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, а для $\tilde{\lambda}_3 = 5$ значения $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$. Следовательно, для матрицы \mathbf{A} имеем

$$\lambda_1 = 1 + 2\mu + O(\mu^2), \quad \lambda_2 = 1 + \mu + O(\mu^2), \quad \lambda_3 = 1 + 5\mu + O(\mu^2),$$

$$\mathbf{x}_{01} = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{x}_{02} = (-3, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_{03} = (1, 1, 0)^T.$$

1.7.3.

$$\lambda_1 = 1 + \mu + O(\mu^2), \quad \lambda_2 = 1 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\mu + O(\mu^2), \quad \lambda_3 = 1 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\mu + O(\mu^2),$$

$$\mathbf{x}_{01} = (0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_{02} = \left(1, 0, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^T, \quad \mathbf{x}_{03} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0, 1\right)^T.$$

1.7.4. Невозмущенная задача $(\mathbf{A}_0 - \lambda^2 \mathbf{E})\mathbf{x} = 0$ имеет собственные значения $\lambda_{01} = \pm 1$, $\lambda_{02} = \pm 2$, $\lambda_{03} = \pm 3$ и собственные векторы, являющиеся столбцами единичной матрицы. По соотношениям (7.12) могут

быть определены поправки к собственным значениям λ_{1i} и коэффициенты a_{ij}^1 : $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = -\frac{1}{2}$, $a_{23}^1 = \frac{\pm 2}{5}$, $a_{32}^1 = \frac{\pm 3}{5}$, $a_{12}^1 = a_{21}^1 = a_{13}^1 = a_{31}^1 = 0$. После этого по соотношениям (7.10) можно получить собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{01} &= (1, 0, 0)^T + O(\mu^2), \\ \mathbf{x}_{02} &= (0, 1, \frac{\pm 2\mu}{5})^T + O(\mu^2), \\ \mathbf{x}_{03} &= (0, \frac{\pm 3\mu}{5}, 1)^T + O(\mu^2). \end{aligned}$$

1.7.5. Невозмущенная задача имеет те же собственные значения и собственные векторы, что и в задаче 1.7.4. Однако в этом случае $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$. Собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{01} &= (1, \pm\mu/3, 0)^T + O(\mu^2), \\ \mathbf{x}_{02} &= (\pm 2\mu/3, 1, \pm 2\mu/5)^T + O(\mu^2), \\ \mathbf{x}_{03} &= (0, \pm 3\mu/5, 1)^T + O(\mu^2). \end{aligned}$$

ГЛАВА 2

Асимптотические оценки интегралов

Решения многих дифференциальных уравнений, к которым сводятся задачи механики, не выражаются в элементарных функциях, но имеют интегральные представления. В данной главе речь пойдет об асимптотической оценке интегралов вида

$$F(\mu) = \int_{a(\mu)}^{b(\mu)} f(z, \mu) dz, \quad (0.1)$$

где μ — малый параметр, $z \in \mathcal{C}$. В некоторых случаях удобнее использовать большой параметр λ , рассматривая интеграл с большим параметром

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(z, \lambda) dz. \quad (0.2)$$

С учетом очевидных изменений все утверждения, справедливые для интегралов (0.1), остаются справедливыми и для (0.2). В общем случае асимптотические оценки записаны при $\mu \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

2.1. Разложение подынтегральной функции в ряд

Рассмотрим интеграл вида (0.1). Пусть подынтегральная функция такова, что она разлагается в асимптотический ряд вида

$$f(z, \mu) = \sum_{n=0}^N a_n(z) \mu^{p_n} + O(\mu^{p_{N+1}}), \quad p_0 < p_1 < \dots < p_N < \dots < +\infty, \quad (1.1)$$

причем это разложение равномерно по z на отрезке $[a(\mu), b(\mu)]$. Тогда этот ряд может быть почленно проинтегрирован и

$$F(\mu) = \sum_{n=0}^N b_n(\mu)\mu^{p_n} + O\left((b(\mu) - a(\mu))\mu^{p_{N+1}}\right), \quad b_n(\mu) = \int_{a(\mu)}^{b(\mu)} a_n(z)dz. \quad (1.2)$$

Наиболее простым разложение (1.2) является в случае, когда подынтегральная функция раскладывается в ряд Тейлора.

ПРИМЕР 1. Найти асимптотическое разложение функции

$$F(\mu) = \int_0^1 \frac{\sin \mu x}{x} dx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Функция $\sin \mu x$ имеет асимптотическое разложение вида

$$\sin \mu x = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mu^{2n+1} + O(\mu^{2N+3}),$$

причем это представление равномерно на промежутке интегрирования $[0, 1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \mu^{2n+1} + O(\mu^{2N+3}) \right) dx = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \mu^{2n+1} + O(\mu^{2N+3}). \end{aligned}$$

В случае, когда граница интервала интегрирования зависит от малого параметра, замена переменных

$$t = \frac{z - a(\mu)}{b(\mu) - a(\mu)} \quad (1.3)$$

приводит интегралы вида (0.1) к интегралам вида

$$F(\mu) = \int_0^1 f_1(t, \mu) dt.$$

Аналогично решается задача и для интегралов с большим параметром.

ПРИМЕР 2. Найти асимптотическое разложение функции

$$F(\mu) = \int_0^\mu x^{-3/4} \exp(-x) dx.$$

Замена (1.3) приводит исходный интеграл к интегралу

$$F(\mu) = \mu^{1/4} \int_0^1 t^{-3/4} \exp(-\mu t) dt.$$

Функция $\exp(-\mu t)$ имеет асимптотическое представление вида

$$\exp(-\mu t) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \mu^n t^n + O(\mu^{N+1}),$$

равномерно пригодное для всех t из промежутка интегрирования $[0, 1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \mu^{1/4} \sum_{n=0}^N \int_0^1 \left(\frac{(-1)^n}{n!} t^{n-3/4} \mu^n + O(\mu^{N+1}) \right) dt = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!(n+1/4)} \mu^{n+1/4} + O(\mu^{N+5/4}) = \\ &= 4\mu^{1/4} - \frac{4}{5}\mu^{5/4} + \frac{2}{9}\mu^{9/4} + O(\mu^{13/4}). \end{aligned}$$

В некоторых случаях подынтегральная функция не имеет равномерного асимптотического представления на всем интервале интегрирования. В этом случае следует попытаться разбить исходный интервал интегрирования на такие интервалы, что на части из них функция имеет равномерное асимптотическое представление, а на других интеграл вычисляется в квадратурах либо может быть оценен.

ПРИМЕР 3. Найти асимптотическое разложение функции

$$F(\mu) = \int_\mu^\infty \exp(-x^2) dx.$$

Функция $\exp(-x^2)$ имеет равномерное асимптотическое представление $\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^N (-1)^n x^{2n}/n! + O(x^{2N+2})$ на любом конечном промежутке $[0, x_0]$. Поэтому представим исходный интеграл в виде

$$\int_{\mu}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx - \int_0^{\mu} \exp(-x^2) dx.$$

Первый из интегралов в правой части легко вычисляется после перехода к полярным координатам [17] и равен $\sqrt{\pi}/2$. Для второго из интегралов представление подынтегральной функции равномерно на промежутке интегрирования $[0, 1]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \sqrt{\pi}/2 - \sum_{n=0}^N \mu \int_0^1 \left(\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \mu^{2n} + O(\mu^{2N+2}) \right) dt = \\ &= \sqrt{\pi}/2 - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \mu^{2n+1}}{n!(2n+1)} + O(\mu^{2N+2}). \end{aligned}$$

2.1.1. Упражнения

2.1.1. Найти асимптотическое разложение функции

$$F(\mu) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \mu \sin^2 x} dx.$$

2.1.2. Функция F задается интегралом

$$F(\mu) = \int_0^{\mu} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Эллиптические функции Якоби определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x) &= \sin(F^{-1}(x)), \\ \operatorname{cn}(x) &= \cos(F^{-1}(x)), \\ \operatorname{am}(x) &= F^{-1}(x). \end{aligned}$$

Найти первые два члена асимптотических разложений функций Якоби.

2.1.3. Найти асимптотическое разложение функции

$$F(\mu) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \mu \sin^2 x}}.$$

2.1.4. Найти первые два члена асимптотического разложения функции

$$F(\lambda) = \int_0^{\lambda} \sqrt{1 + x^2} dx$$

и порядок ошибки,

- а) вычислив исходный интеграл в квадратурах,
- б) разложив подынтегральную функцию в ряд.

2.2. Интегрирование по частям

Следующим методом нахождения асимптотической оценки интеграла является метод интегрирования по частям. Представим подынтегральную функцию (0.1) в виде произведения двух функций так, что

$$f(z, \mu) = g(z, \mu)h(z, \mu) \quad (2.1)$$

при этом полагая, что $h(z, \mu)$ аналитична по z в некоторой области, содержащей путь интегрирования, а функция $g(z, \mu)$ интегрируема по z . Введем обозначения

$$\begin{aligned} h_0(z, \mu) &\equiv h(z, \mu), \quad h_n(z, \mu) \equiv \frac{\partial^n}{\partial z^n} h(z, \mu), \\ g_0(z, \mu) &\equiv g(z, \mu), \quad g_{-n+1}(z, \mu) \equiv \frac{\partial}{\partial z} g_{-n}(z, \mu). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Применяя n раз интегрирование по частям, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (g_{-k-1}(b, \mu)h_k(b, \mu) - g_{-k-1}(a, \mu)h_k(a, \mu)) + \\ &+ (-1)^n \int_{a(\mu)}^{b(\mu)} g_{-n}(z, \mu)h_n(z, \mu) dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если

- 1) соотношение (2.3) справедливо для каждого $n \in \mathbf{N}$,
- 2) члены под знаком суммы в (2.3) образуют асимптотическую последовательность,
- 3) остаток при каждом $n \in \mathbf{N}$ удовлетворяет условию в определении асимптотического разложения, то (2.3) является требуемым асимптотическим разложением.

Основной проблемой при использовании указанного метода является удачный выбор функций g и h .

ПРИМЕР 1. Найти асимптотическое представление функции

$$F(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{e^x}{x} dx.$$

Подынтегральную функцию представим в виде $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x) = e^x$, $h(x) = 1/x$. Тогда по формуле (2.3)

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n \left(e^{\lambda} \frac{k!}{\lambda^k} - e k! \right) + n! \int_1^{\lambda} \frac{e^x}{x^{n+1}} dx.$$

Второе слагаемое под знаком суммы имеет порядок $O(1)$. Для интеграла же справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} n! \int_1^{\lambda} \frac{e^x}{x^{n+1}} dx &= n! \int_1^{\lambda/2} \frac{e^x}{x^{n+1}} dx + n! \int_{\lambda/2}^{\lambda} \frac{e^x}{x^{n+1}} dx < \\ &< n! \int_1^{\lambda/2} e^x dx + n! \int_{\lambda/2}^{\lambda} e^x \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{n+1} dx = O\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda} \frac{k!}{\lambda^k} + O\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^{n+1}} \right).$$

Сравнение численного (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) значений интегралов представлено на рис. 2.1 для $n = 8$.

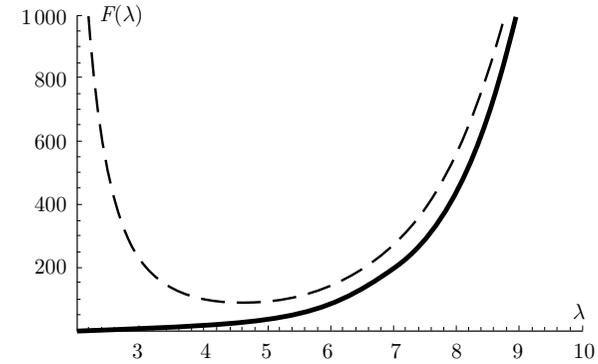


Рис. 2.1

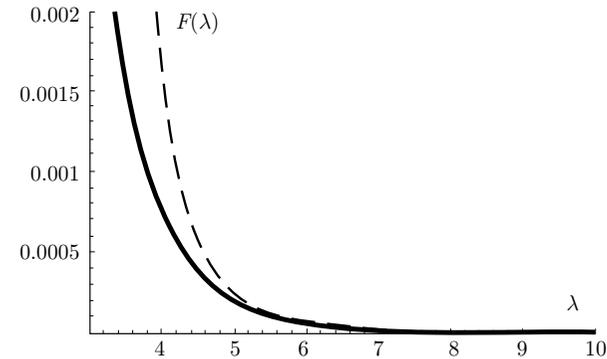


Рис. 2.2

ПРИМЕР 2. Найти асимптотическое представление функции

$$F(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} dx.$$

Положим $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = 1/x^2$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$F(\lambda) = -e^{-x} \frac{1}{x^2} \Big|_{\lambda}^{\infty} - 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^3} dx.$$

Продолжая дальше интегрирование по частям, имеем

$$F(\lambda) = \sum_{k=2}^n (-1)^k e^{-\lambda} \frac{(k-1)!}{\lambda^k} + n!(-1)^{n-1} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx.$$

При $\lambda \leq x < \infty$

$$x^{n+1} \geq \lambda^{n+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^{n+1}} \leq \frac{1}{\lambda^{n+1}},$$

откуда

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} dx \leq \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} dx = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^{n+1}}.$$

Таким образом, находим асимптотическое разложение

$$F(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{(k-1)!}{\lambda^k} + O\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^{n+1}}\right).$$

Этот ряд расходится, так как отношение m -го члена ряда к $(m-1)$ -му члену стремится к $-\infty$ при $m \rightarrow \infty$:

$$\lim \frac{(-1)^{m-1} m! \lambda^m}{\lambda^{m+1} (-1)^{m-2} (m-1)!} = -\lim \frac{m}{\lambda} = -\infty.$$

Сравнение численного (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) значений интегралов представлены на рис. 2.2 для $n = 8$.

2.2.1. Упражнения

При $\lambda \rightarrow \infty$ найти асимптотическое разложение функций

$$\mathbf{2.2.1.} \quad F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\lambda + x} dx.$$

$$\mathbf{2.2.2.} \quad F(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\cos(x - \lambda) dx}{x}.$$

$$\mathbf{2.2.3.} \quad F(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}.$$

2.3. Метод Лапласа

Рассмотрим интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda) dx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

В случае, когда функция $f(x, \lambda)$ имеет острый максимум в точке $x_0 \in I$, $I = [a, b]$, который тем резче, чем больше λ , для вычисления интегралов целесообразно использовать метод Лапласа.

Наиболее удобным объектом для применения этого метода являются интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \varphi(x) e^{\lambda S(x)} dx, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3.1)$$

называемые *интегралами Лапласа*.

Для иллюстрации метода рассмотрим сначала несколько частных случаев.

ПРИМЕР 1. Пусть $S(x) = -x$ и в окрестности точки $x = 0$ функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-\lambda x} dx. \quad (3.2)$$

Интегрируя n раз по частям интеграл (3.2), можно получить при $\lambda \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \sum_{n=0}^N \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\lambda^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right).$$

ПРИМЕР 2. Если $S(x) = -x$ и в окрестности точки $x = 0$ функция $\varphi(x)$ имеет сходящееся или асимптотическое разложение

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}, \quad \alpha > -1,$$

то интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^b \varphi(x) e^{-\lambda x} dx, \quad b > 0 \quad (3.3)$$

имеет асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\lambda^{n+\alpha+1}} a_n, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Действительно, почленное интегрирование в (3.3) дает

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(\lambda),$$

$$F_n(\lambda) = \int_0^b x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx.$$

С помощью интегрирования по частям можно показать, что

$$\int_b^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx = o(\lambda^N),$$

где N — любое натуральное число. Следовательно,

$$F_n(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx - \int_b^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx + o(\lambda^N).$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^{n+\alpha+1}} \int_0^{\infty} z^{n+\alpha} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\lambda^{n+\alpha+1}},$$

приходим к формуле (3.4).

Отметим, что в зависимости от a_n ряд (3.4) может расходиться или сходиться, однако в последнем случае он может сходиться не к функции $F(\lambda)$, давая лишь ее асимптотическое разложение. Например, применяя формулу (3.4) при $\alpha = 0$ к интегралу

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda x} \sin x dx,$$

получаем

$$F(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda^{2k+2}} = \frac{1}{1+\lambda^2}. \quad (3.5)$$

Точное значение

$$F(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^2} \left(1 - \lambda e^{-\pi\lambda/2}\right)$$

отличается от функции, к которой сходится ряд (3.5). Дело в том, что здесь, как и в последующих случаях, ряд (3.4) или (3.5) учитывает лишь вклад в интеграл окрестности точки максимума функции $e^{\lambda h(x)}$ и пренебрегает экспоненциально малыми слагаемыми.

ПРИМЕР 3. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad S(x) = -x^2, \quad a < 0, \quad b > 0. \quad (3.6)$$

Тогда интеграл (3.1) имеет разложение

$$\int_a^b \varphi(x) e^{-\lambda x^2} dx \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\lambda^{n+1/2}} a_{2n}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Ряд (3.7) — это вклад в интеграл окрестности точки $x = 0$, в которой функция $e^{-\lambda x^2}$ максимальна.

Вернемся к обобщенному интегралу (3.1). В данном случае для интегрирования по частям нельзя положить $u = \varphi(x)$ и $dv = e^{\lambda S(x)} dx$, так как последнее выражение не интегрируется в общем виде. Предположим, что $S'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , и положим

$$u = \frac{\varphi(x)}{S'(x)}, \quad dv = e^{\lambda S(x)} S'(x) dx.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(x)} \varphi(x)}{\lambda S'(x)} \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b e^{\lambda S(x)} \left[\frac{\varphi(x)}{S'(x)} \right]' dx$$

или при $\lambda \rightarrow \infty$

$$F(\lambda) \simeq \frac{e^{\lambda S(b)} \varphi(b)}{\lambda S'(b)} - \frac{e^{\lambda S(a)} \varphi(a)}{\lambda S'(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Если $S(a) \neq S(b)$, то асимптотическое поведение определяет одна концевая точка, в которой $S(x)$ больше. Пусть для определенности $S(a) > S(b)$. Продолжая этот процесс, можно получить

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^N \frac{M^k (P(a) e^{\lambda S(a)})}{\lambda^{k+1}} + O\left(\frac{e^{\lambda a}}{\lambda^{N+2}}\right), \quad (3.8)$$

где

$$M^k = \left(\frac{-1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^k, \quad P(x) = \frac{\varphi(x)}{S'(x)}.$$

Все вышеизложенное позволяет сделать вывод, что основной вклад в $F(\lambda)$ дает точка $x = c \in (a, b)$, соответствующая наибольшему значению $S(x)$, независимо от того, граничная эта точка или нет.

Предположим, что $c = a$, и в окрестности этой точки

$$\varphi(x) \simeq \varphi_0 (x - a)^\alpha, \quad S'(a) = 0, \quad S''(a) < 0,$$

т. е.

$$S(x) \simeq S(a) + \frac{S''(a)(x - a)^2}{2!}.$$

Для существования интеграла необходимо, чтобы $\alpha > -1$. Тогда

$$F(\lambda) \simeq \varphi_0 e^{\lambda S(a)} \int_a^{a+\delta} (x - a)^\alpha e^{\frac{\lambda S''(a)(x-a)^2}{2!}} dx.$$

Так как $S''(a) < 0$, то ошибка будет экспоненциально мала, если $a + \delta$ заменить на ∞ . После замены переменных

$$-\frac{\lambda S''(a)(x - a)^2}{2!} = \tau$$

имеем $\tau = 0$ при $x = a$ и

$$F(\lambda) \simeq \frac{\varphi_0}{2} \left[\frac{2}{-\lambda S''(a)} \right]^{(\alpha+1)/2} e^{\lambda S(a)} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\tau} d\tau,$$

или

$$F(\lambda) \simeq \frac{\varphi_0}{2} \left[\frac{2}{-\lambda S''(a)} \right]^{(\alpha+1)/2} e^{\lambda S(a)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Пусть теперь $a < c < b$, причем $S''(c) < 0$. Аналогично предыдущему можно получить

$$F(\lambda) \simeq \varphi_0 \left[\frac{2}{-\lambda S''(c)} \right]^{(\alpha+1)/2} e^{\lambda S(c)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Подобным образом рассматриваются случаи, когда при $x = c$ (или $x = a$) обращается в нуль большее число производных.

Пусть

- 1) $\varphi(x), S(x) \in C([a, b])$,
- 2) $\max_{x \in I} S(x)$ достигается только в одной точке x_0 ,
- 3) $\varphi(x), S(x) \in C^\infty$ при x близких к x_0 .

Тогда справедливо следующее утверждение:

А) если точка максимума лежит внутри интервала ($a < x_0 < b$) и $S^{(j)}(x_0) = 0$, $1 \leq j \leq 2m - 1$, $S^{(2m)}(x_0) \neq 0$, $m \geq 1$, то главный член асимптотического разложения имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{\Gamma(1/2m)e^{\lambda S(x_0)}}{m\lambda^{1/2m}} \left[-\frac{(2m)!}{S^{(2m)}(x_0)} \right]^{1/2m} \left(\varphi(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2m}}\right) \right), \quad (3.9)$$

В) если точка максимума лежит на границе интервала ($x_0 = a$) и $S^{(j)}(x_0) = 0$, $1 \leq j \leq m - 1$, $S^{(m)}(x_0) \neq 0$, $m \geq 2$, то главный член асимптотического разложения имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{\Gamma(1/m)e^{\lambda S(x_0)}}{m\lambda^{1/m}} \left[-\frac{(m)!}{S^{(m)}(x_0)} \right]^{1/m} \left(\varphi(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/m}}\right) \right). \quad (3.10)$$

ПРИМЕР 4. Найти асимптотическое представление функции

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda x^4} dx, \quad a \leq 0, b > 0.$$

В случае $a < 0$ и $b > 0$ следует воспользоваться формулой (3.9), которая определяет главный член асимптотического разложения

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\lambda^{-1/4}.$$

При $a = -\infty$, $b = \infty$ главный член разложения совпадает с точным значением интеграла. На рис. 2.3 приведено сравнение точного (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) значений интеграла при $a = -1$, $b = 1$.

При $a = 0$, $b > 0$ следует воспользоваться формулой (3.10), которая определяет главный член асимптотического разложения

$$\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\lambda^{-1/4}.$$

Как и следовало ожидать, значение интеграла получилось вдвое меньше, чем в первом случае.

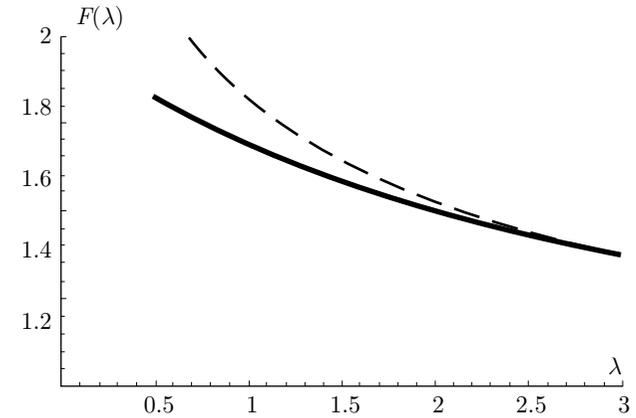


Рис. 2.3

2.3.1. Упражнения

2.3.1. Найти два первых члена асимптотического разложения функции

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi^2/4} \exp(\lambda \cos \sqrt{x}) dx.$$

Найти первый член асимптотического разложения функций.

2.3.2. $F(\lambda) = \int_0^1 \exp(-1/x - \lambda x) dx.$

2.3.3. $F(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\alpha x^{-\alpha} - \lambda x) dx, \quad \alpha > 0.$

2.3.4. $F(\lambda) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\lambda x^2 dx.$

2.3.5. $F(\lambda) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\lambda dx.$

$$2.3.6. F(\lambda) = \int_0^1 (1-x^2)^\lambda x dx.$$

$$2.3.7. F(\lambda) = \int_0^\pi x^\lambda \sin x dx, \quad \lambda \in \mathbf{N}.$$

$$2.3.8. F_\nu(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda \operatorname{ch} x) \operatorname{ch}(\nu x) dx.$$

2.4. Метод стационарной фазы

Рассмотрим интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \varphi(x) \exp(i\lambda S(x)) dx, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (4.1),$$

где $\varphi(x)$ — комплекснозначная, а $S(x)$ — вещественнозначная функция, называемая *фазовой функцией*, $\lambda > 0$, как и ранее, большой параметр.

2.4.1. Интегралы в отсутствии стационарных точек

Пусть сначала $I = [a, b]$ конечный отрезок, в котором

$$\varphi(x) \in C^{N+1}(I), \quad S(x) \in C^{N+2}(I), \quad S'(x) \neq 0 \quad (4.2)$$

(т. е. $\varphi(x)$ и $S(x)$ имеют $N+1$ и $N+2$ непрерывных производных).

Тогда

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(i\lambda)^{k+1}} \left[M^k(P(x)) \exp(i\lambda S(x)) \right] \Big|_a^b + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right), \quad (4.3)$$

$$M = \frac{-1}{S'(x)} \frac{d}{dx}, \quad P(x) = \frac{\varphi(x)}{S'(x)}.$$

Главный член асимптотического разложения в этом случае имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{\varphi(x)}{S'(x)} \exp(i\lambda S(x)) \right] \Big|_a^b + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Формула (4.3) доказывается интегрированием по частям с последующей ссылкой на лемму Римана–Лебега [4, 22]

$$\int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx = o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

для кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$.

ПРИМЕР 1. Найти первый член асимптотического разложения и оценку ошибки для функции

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi/4} \sin(\lambda \sin x) x dx.$$

Представим данный интеграл в виде

$$F(\lambda) = \operatorname{Im} \int_0^{\pi/4} \exp(i\lambda \sin x) x dx.$$

Воспользовавшись формулой (4.3), получим

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \operatorname{Im} \left(\frac{\pi}{4i\lambda} \frac{2}{\sqrt{2}} \exp\left(i\lambda \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) = \\ &= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}\lambda} \cos\left(\lambda \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Сравнение численного (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) значений интеграла представлены на рис. 2.4.

Из соотношения (4.3) следует, что при сделанных предположениях (4.2) асимптотическое разложение $F(\lambda)$ зависит лишь от значений функций $\varphi(x)$ и $S(x)$ и их производных на концах промежутка интегрирования. В окрестности остальных точек происходит интерференция колебаний. На рис. 2.5 изображен график функции $\operatorname{Re}(\exp(S(x)))$, $S(x) = i(x-6)^2$, для которой $S'(x) \neq 0$ на отрезке $[-3, 5]$.

Если $\varphi(x)$ и $S(x)$ или их производные имеют конечное число точек разрыва, можно разбить промежуток интегрирования $[a, b]$ на части

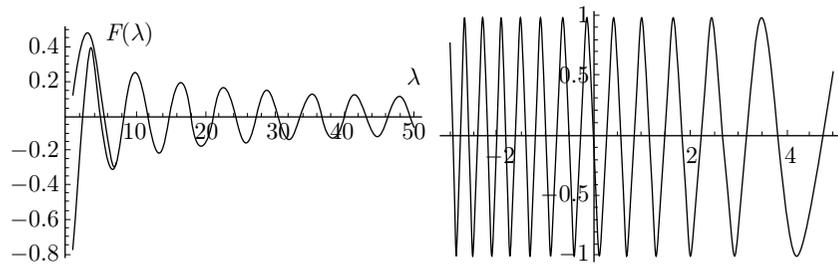


Рис. 2.4

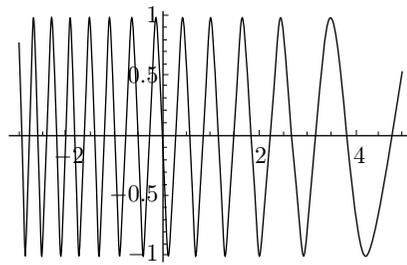


Рис. 2.5

таким образом, чтобы точки разрыва совпали с концами этих частей, и к каждой части применить формулу (4.3)

Если $b = \infty$, по-прежнему выполнены условия (4.2) и

$$M^k(P(x)) = o(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{d}{dx}M^k(P(x)) \in L_1[0, \infty],$$

то

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(i\lambda)^{k+1}} [M^k(P(x)) \exp(i\lambda S(x))] \Big|_a + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right). \quad (4.4)$$

ПРИМЕР 2. Найти первые два члена разложения и оценку остатка для интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{i\lambda x} dx}{(1+x)^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

В данном случае имеем $S(x) = x$, $S'(x) = 1$, $M^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}$,

$$P(x) = (1+x)^{-\alpha}, \quad M^0(P(x)) = (1+x)^{-\alpha},$$

$$M^k(P(x)) = (\alpha + k - 1)M^{k-1}(P(x))/(1+x).$$

Следовательно, справедлива формула (4.4) и

$$F(\lambda) = - \left[\frac{1}{i\lambda} + \alpha \frac{1}{(i\lambda)^2} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

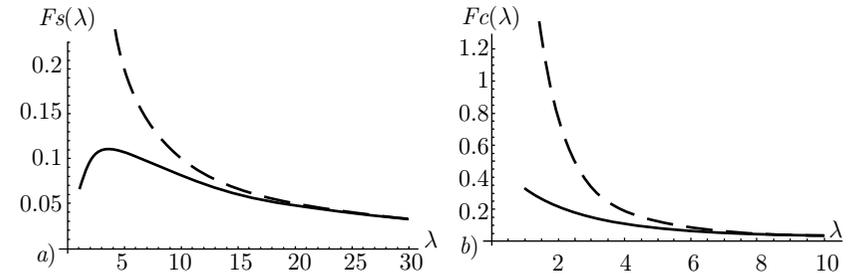


Рис. 2.6

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$F_s(\lambda) = \text{Im}(F(\lambda)) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x dx}{(1+x)^\alpha} = \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$F_c(\lambda) = \text{Re}(F(\lambda)) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x dx}{(1+x)^\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Сравнение численных (сплошная линия) и асимптотических (пунктирная линия) значений функций $F_c(\lambda) = \text{Re}(F(\lambda))$ и $F_s(\lambda) = \text{Im}(F(\lambda))$ представлено на рис. 2.6 *a, b* для $\alpha = 3$.

2.4.2. Лемма Эрдейи

Рассматривается интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} \varphi(x) \exp(i\lambda x^\alpha) dx. \quad (4.5)$$

Если

$$\varphi(x) \in C^\infty((0, a]), \quad \alpha \geq 1, \quad \beta > 0, \quad \forall k \quad \varphi^{(k)}(a) = 0,$$

то справедливо разложение

$$F(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{(k+\beta)/\alpha}} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \exp\left(\frac{i\pi(k+\beta)}{2\alpha}\right). \quad (4.6)$$

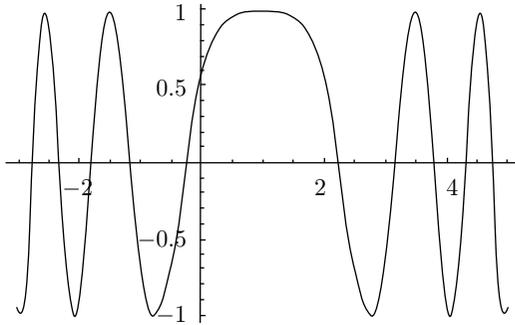


Рис. 2.7

Лемма Эрдейи определяет вклад точки $x_0 = 0$ в асимптотическое разложение интеграла.

2.4.3. Интегралы при наличии стационарных точек

Точки $x = c$, в которых $S'(x) = 0$, называются *стационарными*. При наличии стационарных точек разложение (4.3) не выполняется. На рис. 2.7 изображен график функции $\operatorname{Re}(\exp(S(x)))$, $S(x) = i(x-1)^2$, которая имеет стационарную точку $x = 1$ на отрезке $[-3, 5]$.

Для иллюстрации вклада стационарной точки в значение интеграла рассмотрим сначала пример с единственной стационарной точкой $x = 0$, причем $S''(0) \neq 0$:

$$F(\lambda) = \int_{-1}^3 \exp(i\lambda x^2) dx.$$

Функция $S(x) = x^2$ имеет минимум в точке $x_0 = 0$, причем $x_0 \in I$. Представим исходный интеграл в виде

$$\int_{-1}^3 \exp(i\lambda x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x^2) dx - J_1 - J_2,$$

где

$$J_1 = \int_{-\infty}^{-1} \exp(i\lambda x^2) dx, \quad J_2 = \int_3^{+\infty} \exp(i\lambda x^2) dx.$$

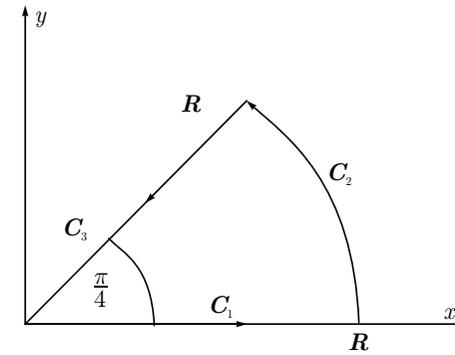


Рис. 2.8

Интегрированием по частям можно показать, что интегралы J_1 и J_2 имеют порядок $O(\lambda^{-1})$, т. е.

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda x^2) dx + O(\lambda^{-1}) = 2 \int_0^{+\infty} \exp(i\lambda x^2) dx + O(\lambda^{-1}).$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся теоремой Коши, согласно которой, если функция комплексного переменного является аналитической в области, ограниченной замкнутым контуром, то интеграл от этой функции по контуру равен нулю. Основная идея вычисления интеграла $F(\lambda)$ состоит в том, чтобы выбрать контур интегрирования таким образом, чтобы исходный интеграл Фурье перешел в интеграл Лапласа. Интеграл по контуру $C_1 C_2 C_3$ (рис. 2.8) равен 0.

Кроме того, можно показать, что при $R \rightarrow \infty$ интеграл по C_2 стремится к 0. Следовательно, полагая $x^2 = z^2 \exp(i\pi/2)$ и используя метод Лапласа, получаем

$$\int_0^{+\infty} \exp(i\lambda x^2) dx = \exp(i\pi/4) \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda z^2) dz = \frac{\exp(i\pi/4)}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

или

$$F(\lambda) = \exp(i\pi/4) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-1}).$$

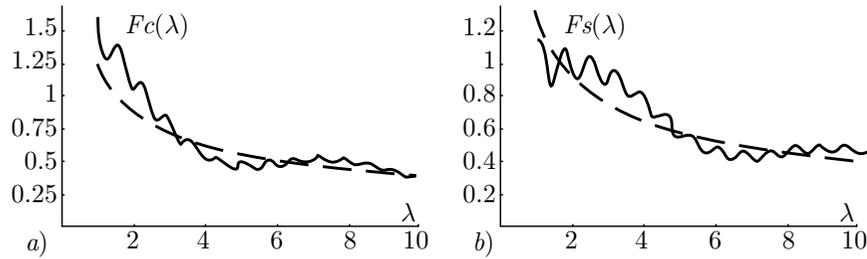


Рис. 2.9

Сравнение численных (сплошная линия) и асимптотических (пунктирная линия) значений функций $F_c(\lambda) = \text{Re}(F(\lambda))$ и $F_s(\lambda) = \text{Im}(F(\lambda))$ представлено на рис. 2.9 *a, b*.

Если функция $S(x)$ имеет конечное число стационарных изолированных точек x_i на отрезке $[a, b]$, то асимптотическое разложение интеграла (4.1) состоит из сумм вкладов стационарных точек $F(\lambda, x_i)$.

Как правило, при применении метода стационарной фазы ограничиваются вычислением первого члена асимптотического разложения.

Определим вклад стационарной точки.

Пусть $I=[a, b]$ конечный отрезок, в котором $S(x) \in C(I)$, $\max_{x \in I} S(x)$ достигается только в одной точке x_0 и $\varphi(x) \approx C(x - x_0)^\alpha$, $\alpha > -1$ в окрестности точки x_0 .

Тогда

А) Если $a < x_0 < b$ и $S^{(j)}(x_0) = 0$, $1 \leq j \leq 2m - 1$, $S^{(2m)}(x_0) \neq 0$, $m \geq 1$, то главные члены асимптотического разложения имеют вид

$$F(\lambda, x_0) = m^{-1} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2m}\right) \left[\frac{(2m)!}{|S^{2m}(x_0)|}\right]^{(1+\alpha)/2m} \lambda^{-(1+\alpha)/2m} \times \exp\left(i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi(1+\alpha)}{4m} \text{sign}(S^{2m}(x_0))\right) \left(\varphi(x_0) + O(\lambda^{-1/2m})\right). \quad (4.7)$$

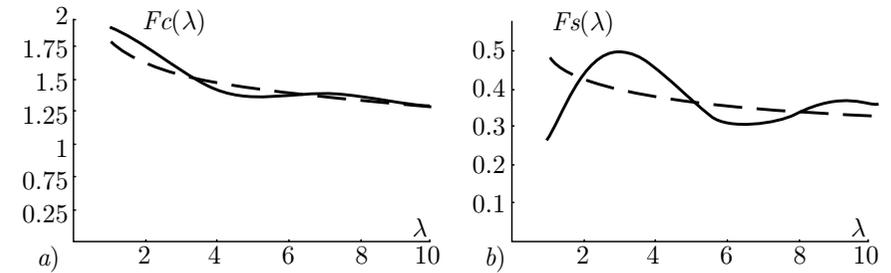


Рис. 2.10

В) Если $x_0 = a$ и $S^{(j)}(x_0) = 0$, $1 \leq j \leq m - 1$, $S^{(m)}(x_0) \neq 0$, $m \geq 2$, то главные члены асимптотического разложения имеют вид

$$F(\lambda, x_0) = m^{-1} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{m}\right) \left[\frac{(m)!}{|S^m(x_0)|}\right]^{(1+\alpha)/m} \lambda^{-(1+\alpha)/m} \times \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi(1+\alpha)}{2m} \text{sign}(S^m(x_0))\right] \left(\varphi(x_0) + O(\lambda^{-1/m})\right). \quad (4.8)$$

ПРИМЕР 3. Найти первый член асимптотического разложения для интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\exp(i\lambda x^3)}{\sqrt{x}} dx.$$

Подынтегральная функция имеет критическую точку $x_0 = 0$, вклад которой определяется по лемме Эрдейи. При $\alpha = 3$, $\beta = 1/2$, $\varphi(x) \equiv 1$ получаем

$$F(\lambda) = \frac{1}{3} \lambda^{-1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \exp(i\pi/12).$$

Сравнение численных (сплошная линия) и асимптотических (пунктирная линия) значений функций $F_c(\lambda) = \text{Re}(F(\lambda))$ и $F_s(\lambda) = \text{Im}(F(\lambda))$ представлено на рис. 2.10 *a, b*.

ПРИМЕР 4. Найти первый член асимптотического разложения и оценку остатка для функции Бесселя целого неотрицательного ин-

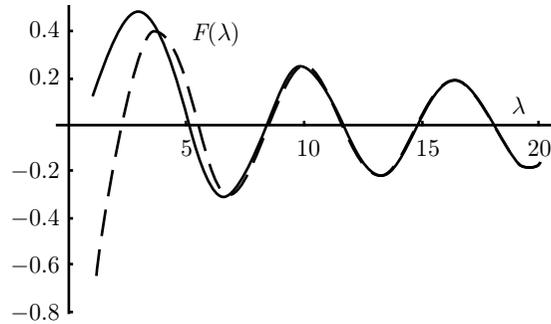


Рис. 2.11

декса n , определяемой интегралом

$$J_n(\lambda) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(\lambda \sin x - nx) dx.$$

Представим искомый интеграл в виде

$$J_n(\lambda) = \pi^{-1} \operatorname{Re} \int_0^\pi \exp(i\lambda \sin x) \exp(-inx) dx.$$

При этом $S(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/2$, $S(x_0) = 1$, $S''(x_0) = -1$, $m = 1$, $\varphi(x_0) = \exp(-in\pi/2)$. В результате имеем

$$J_n(\lambda) = \operatorname{Re} \left[\pi^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{2!}{1}\right]^{1/2} \lambda^{-1/2} \exp\left(i\lambda - \frac{i\pi}{4}\right) (\exp(-in\pi/2) + O(\lambda^{-1})) \right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\lambda - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(\lambda^{-1}). \quad (4.9)$$

Сравнение численного (сплошная линия) и асимптотического (пунктирная линия) значений интегралов представлено на рис. 2.11.

2.4.4. Полные асимптотические разложения

По лемме Ван дер Корпута [28] промежуток интегрирования можно разбить на части и добиться того, чтобы вклад в интеграл давала окрестность лишь одной точки на промежутке интегрирования. Для вычисления вклада одной точки используются следующие полные асимптотические разложения.

В случае **A**), т.е. если стационарная точка x_0 находится внутри промежутка интегрирования и первые $2m-1$ производные функции $S(x)$ в стационарной точке равны нулю, а $S^{(2m)}(x_0) \neq 0$, то

$$F(\lambda, x_0) = \frac{1}{\lambda^{(1+\alpha)/2m}} \exp\left(i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi(1+\alpha)}{4m} \operatorname{sign}(S^{(2m)}(x_0))\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{\lambda^{k/m}},$$

$$a_k = \frac{2^{2k+1/2}}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1+\alpha}{2m}\right) \exp\left[\frac{i\pi(2k+1+\alpha)}{4m} \operatorname{sign}(S^{(2m)}(x_0))\right] \times$$

$$\times \left[\left(h^{-1}(x, x_0) \frac{d}{dx} \right)^{2k} (\varphi(x) h(x, x_0)) \right] \Big|_{x=x_0},$$

где

$$h(x, x_0) = (2 \operatorname{sign}(S^{(2m)}(x_0)) (S(x) - S(x_0)))^{1-1/2m} / S'(x).$$

В случае **B**), если стационарная точка x_0 совпадает с концом промежутка интегрирования и первые $m-1$ производные функции $S(x)$ в стационарной точке равны нулю, а $S^{(m)}(x_0) \neq 0$, то

$$F(\lambda, x_0) = \frac{1}{\lambda^{(1+\alpha)/m}} \exp(i\lambda S(x_0)) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m},$$

$$a_k = \frac{1}{k!m} \Gamma\left(\frac{k+1+\alpha}{m}\right) \exp\left(\frac{i\pi(1+k+\alpha)}{2m} \operatorname{sign}(S^{(m)}(x_0))\right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^k (\varphi(x) h(x, x_0)) \right] \Big|_{x=x_0},$$

где

$$h(x, x_0) = (-\operatorname{sign}(S^{(m)}(x_0)) (S(x) - S(x_0)))^{-(k+1)/m} (x - x_0)^{k+1}.$$

Итак, вклад в интеграл (4.1) дают лишь окрестности концов промежутка интегрирования, точек разрыва функций $\varphi(x)$, $S(x)$ или их производных и стационарных точек функции $S(x)$.

Например, интеграл

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\lambda}$$

имеет асимптотическое разложение (4.3) с нулевыми членами, ибо нет точек разрыва и стационарных точек, а вклады окрестностей концов равны нулю, так как $\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

2.4.5. Упражнения

2.4.1. Найти первый член асимптотического разложения и оценку остатка для функции Бесселя большого вещественного индекса ν при фиксированном аргументе $t > 0$

$$J_\nu(\nu t) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(\nu(x - t \sin x)) dx - \pi^{-1} \sin \nu\pi \int_0^\infty \exp(-\nu(x + t \operatorname{sh} x)) dx.$$

2.4.2. Найти первый член асимптотического разложения и оценку остатка для интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^1 \exp(i\lambda x^3) dx.$$

2.4.3. Найти первый член асимптотического разложения и оценку остатка для интеграла

$$F_n(\lambda) = \int_0^1 \exp(i\lambda x^n) dx.$$

2.5. Метод перевала

2.5.1. Описание метода

Будем искать асимптотическое разложение при $\lambda \rightarrow \infty$ интеграла

$$F(\lambda) = \int_\gamma \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz, \quad (5.1)$$

где γ — кривая в комплексной плоскости, а $\varphi(z)$ и $h(z)$ голоморфны в области S , причем $\gamma \subset S$.

Метод перевала включает в себя два этапа:

1) деформацию контура γ в контур γ_0 , наиболее удобный для получения асимптотических оценок,

2) вычисление асимптотики интеграла по контуру γ_0 .

При $\lambda \rightarrow \infty$ модуль подынтегральной функции будет наибольшим в точках z , в которых функция $\operatorname{Re}(h(z))$ максимальна. Предположим, что среди контуров, концы которых совпадают с концами γ , существует контур γ_0 , на котором достигается

$$\min_{\gamma} \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re}(h(z)) = \max_{z \in \gamma_0} \operatorname{Re}(h(z)).$$

Допустим также, что возможна деформация контура γ в γ_0 , не выходящая за пределы S . Тогда по теореме Коши

$$F(\lambda) = \int_{\gamma_0} \varphi(z) e^{\lambda h(z)} dz. \quad (5.2)$$

Пусть для простоты

$$\max_{z \in \gamma_0} \operatorname{Re}(h(z))$$

достигается только в одной точке $z = c$.

Если $z = c$ — внутренняя точка γ_0 , то из минимаксного свойства контура γ_0 следует, что c является стационарной точкой функции $f(x, y) = \operatorname{Re}(h(z))$, где $z = x + iy$. В ней $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, и из условий Коши—Римана следует, что $h'(c) = 0$.

Точка $z = c$ называется *точкой перевала*, а величина $\operatorname{Re}(h(c))$ — высотой точки перевала. Точка перевала называется *простой*, если $h''(c) \neq 0$. В этом случае через нее проходят две пересекающиеся под прямым углом линии $\operatorname{Im}(h(z) - h(c)) = 0$, на которых функция $f(x, y)$ меняется наиболее быстро. Одна из линий, на которой $f(x, y)$ убывает при удалении от точки $z = c$, называется *линией наискорейшего спуска* или *линией стока*.

Контур γ_0 можно деформировать так, чтобы в окрестности точки $z = c$ он совпал с линией наискорейшего спуска. Тогда в этой окрестности $\operatorname{Im}(h(z)) = \operatorname{const}$, и для оценки интеграла (5.2) удобно использовать метод Лапласа.

Если контур γ_0 целиком лежит в области регулярности функций $\varphi(z)$ и $h(z)$ и наибольшее значение $\operatorname{Re}(h(z))$ на γ_0 достигается в точках перевала (или в концах контура), через которые проходит контур, то асимптотическое поведение интеграла (5.1) при $\lambda \rightarrow \infty$ дается суммой вкладов точек перевала (или концов контура).

Общего алгоритма построения контура γ_0 не существует. Для конкретного интеграла (5.1) следует сначала найти точки перевала и провести через них линии наискорейшего спуска. После этого следует пытаться так деформировать контур γ , чтобы он состоял из частей линий наискорейшего спуска и, может быть, других кривых, интегралы по которым могут быть отброшены как асимптотически малые.

2.5.2. Асимптотика функций Эйри

Найдем первые члены разложений для функций Эйри. Рассмотрим интегралы

$$w_k(\eta) = C_k \int_{\gamma_k} e^{z^3/3 - \eta z} dz, \quad (5.3)$$

где γ_k — контуры, уходящие обоими концами в бесконечность по лучам OA_n , на которых $\arg z = \frac{\pi}{3}(-1 + 2n)$, $n = 1, 2, 3$ (рис. 2.12).

На этих лучах подынтегральная функция в (5.3) стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

Стандартные функции Эйри $\operatorname{Ai}(\eta)$ и $\operatorname{Bi}(\eta)$, вещественные при вещественных η , определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ai}(\eta) &= w_1(\eta), & C_1 &= i/2\pi, & \gamma_1 &= A_1OA_3, \\ \operatorname{Bi}(\eta) &= w_2(\eta), & C_2 &= 1/2\pi, & \gamma_2 &= A_2OA_1 + A_2OA_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Функции Эйри находят приложение при асимптотическом интегрировании дифференциальных уравнений с параметром, содержащих точки поворота (см. главу 5).

Рассмотрим случай $\eta > 0$. После замены переменной $z = \sqrt{\eta}z_1$ формула (5.3) принимает вид

$$w_k(\eta) = C_k \sqrt{\eta} \int_{\gamma_k} e^{\lambda h(z_1)} dz_1, \quad h(z) = \frac{z^3}{3} - z, \quad \lambda = \eta^{3/2}. \quad (5.5)$$

Вычислим интеграл в (5.5) с помощью метода перевала. Корнями уравнения $h'(c) = 0$ являются точки перевала $c_{1,2} = \pm 1$. Ввиду того,

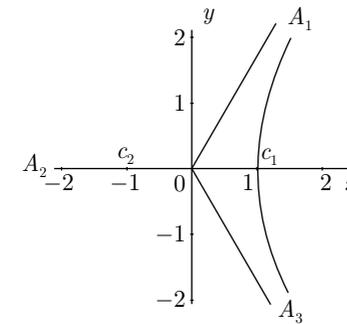


Рис. 2.12

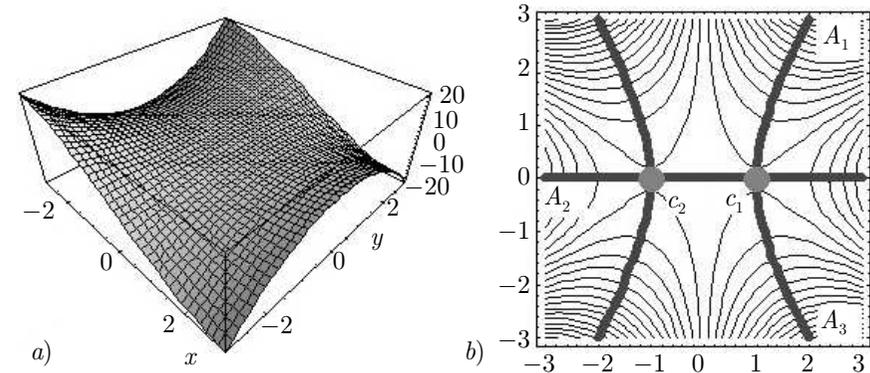


Рис. 2.13

что $h''(c_k) = 2c_k \neq 0$, точки перевала являются седловыми точками функции $f(x, y) = \operatorname{Re}(h(z))$, где $z = x + iy$. На рис. 2.13 a приведен график функции $\operatorname{Re} f(x, y)$ вблизи точки $c = 0$.

Линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала c_k , определяются из уравнений

$$\operatorname{Im} h(z) = \operatorname{Im} h(c_k). \quad (5.6)$$

В рассматриваемом случае $\operatorname{Im} h(c_k) = 0$ при $k = 1, 2$, и уравнения (5.6) эквивалентны уравнениям $y = 0$ и $x^2 - y^2/3 = 1$. Линии наискорейшего спуска, проходящие через точки c_1 и c_2 , показаны на рис. 2.13 b жирными линиями, а линии уровня функции $\operatorname{Re}(h(z))$ — тонкими линиями.

Пути интегрирования γ_1 и γ_2 деформируются в пути $\gamma_{10} = A_1 c_1 A_3$ и $\gamma_{20} = A_2 c_2 c_1 A_1 + A_2 c_2 c_1 A_3$, состоящие из частей линий наискорейшего спуска.

Пути γ_{k0} имеют лучи OA_n своими асимптотами, на которых подынтегральная функция в (5.5) стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, поэтому асимптотические разложения интегралов (5.5) состоят лишь из вкладов окрестностей точек перевала.

Для $\text{Ai}(\eta)$ получаем

$$\text{Ai}(\eta) = w_1(\eta) = C_1 \sqrt{\eta} \int_{\gamma_{10}} e^{\lambda h(z)} dz \simeq C_1 \sqrt{\eta} J_1,$$

где

$$J_1 = \int_{\gamma_{10}^*} e^{\lambda h(z)} dz$$

— вклад точки перевала c_1 , γ_{10}^* — малая дуга контура γ_{10} , содержащая точку перевала c_1 . На дуге γ_{10}^* имеем

$$\tau^2 = h(c_1) - h(z) \simeq -h''(c_1)(z - c_1)^2/2. \quad (5.7)$$

Из (5.7) вытекает, что на γ_{10}^* справедливо приближенное равенство $dz \simeq id\tau$. Следовательно,

$$J_1 \simeq e^{\lambda h(c_1)} \int_{\delta}^{-\delta} e^{-\lambda \tau^2} id\tau = -ie^{\lambda h(c_1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \tau^2} d\tau = -i\sqrt{\pi/\lambda} e^{-2\lambda/3},$$

$$\text{Ai}(\eta) \simeq \frac{i\eta^{1/2}}{2\pi} J_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} e^{-\zeta}, \quad \zeta = \frac{2}{3} \eta^{3/2}.$$

Аналогичным образом находится главный член асимптотического разложения функции $\text{Bi}(\eta)$ для $\eta \rightarrow \infty$

$$\text{Bi}(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} e^{\zeta}.$$

При его вычислении вклад точки c_2 удваивается, так как путь γ_{20} дважды проходит через эту точку, а вклад точки c_1 не принимается во внимание, так как высота точки перевала c_1 меньше, чем высота c_2 .

Для определения асимптотики функций Эйри при $\eta \rightarrow -\infty$ в (5.3) сделаем замену переменной $z = \sqrt{-\eta} z_1$. Формула (5.3) примет вид

$$w_k(-\eta) = C_k \sqrt{\eta} \int_{\gamma_k} e^{\lambda h(z_1)} dz_1, \quad h(z_1) = \frac{z_1^3}{3} + z_1, \quad \lambda = \eta^{3/2}. \quad (5.8)$$

Приближенные выражения для интегралов из (5.8) можно найти методом перевала (см. решение упр. 2.5.1).

2.5.3. Упражнения

2.5.1. Найти первые члены асимптотических разложений для функций Эйри при $\eta \rightarrow -\infty$.

Найти первый член асимптотического разложения при $\lambda \rightarrow \infty$ для интегралов

$$\mathbf{2.5.2.} \quad F(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(\lambda(x + ix - x^3)) dx.$$

$$\mathbf{2.5.3.} \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x)(1 + x^2)^{-\lambda} dx.$$

$$\mathbf{2.5.4.} \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda(3x - x^3)) dx.$$

2.6. Ответы и решения

$$\mathbf{2.1.1.} \quad F(\mu) = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{4}\mu - \frac{3}{64}\mu^2 + O(\mu^3) \right).$$

2.1.2. После замены переменных исходная функция представляется в виде

$$F(\mu) = \mu \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - m \sin^2 \mu t}}.$$

Подынтегральная функция раскладывается в ряд

$$f(t) = 1 + \frac{m}{2} \sin^2 \mu t + \frac{3m^2}{8} \sin^4 \mu t + O(\mu^6).$$

В свою очередь,

$$\sin \mu t = \mu t - \frac{(\mu t)^3}{6} + O(\mu^5), \quad \sin^2 \mu t = (\mu t)^2 - \frac{(\mu t)^4}{3} + O(\mu^6),$$

$$\sin^4 \mu t = (\mu t)^4 + O(\mu^6).$$

Следовательно,

$$f(t) = 1 + \frac{m}{2}(\mu t)^2 + \left(-\frac{m}{6} + \frac{3m^2}{8}\right)(\mu t)^4 + O(\mu^6),$$

и после почленного интегрирования имеем

$$F(\mu) = \mu + \frac{m}{6}\mu^3 + \left(-\frac{m}{30} + \frac{3m^2}{40}\right)\mu^5 + O(\mu^7).$$

Для нахождения обратной функции F^{-1} воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, представив μ в виде ряда

$$\mu = F + aF^3 + bF^5 + O(F^7), \quad F \rightarrow 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях F , получаем $a = -m/6$, $b = \frac{m}{30} - \frac{m}{6}3a - \frac{3m^2}{40}$. Отсюда $b = \frac{m^2 + 4}{120}$. Таким образом,

$$\operatorname{am}(\mu) = \mu - \frac{m}{6}\mu^3 + \frac{m^2 + 4}{120}\mu^5 + O(\mu^7),$$

$$\operatorname{sn}(\mu) = \sin(F^{-1}(\mu)) = \mu - \frac{m+1}{6}\mu^3 + \frac{m^2 + 14m + 1}{120}\mu^5 + O(\mu^7),$$

$$\operatorname{cn}(\mu) = \cos(F^{-1}(\mu)) = 1 - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{4m+1}{24}\mu^4 + O(\mu^6).$$

$$\mathbf{2.1.3.} \quad F(\mu) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\mu + \frac{9}{64}\mu^2\right) + O(\mu^3).$$

2.1.4.

а) Используя замену $t = \operatorname{sh}x$, имеем

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}.$$

Получаем

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) + \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + 1}}{2} = \frac{1}{2} \ln(2\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{4} + O(\lambda^{-2}).$$

б) Подынтегральная функция при $x > 0$ может быть разложена в ряд

$$\sqrt{1+x^2} = x \left(1 + \frac{1}{2x^2} + O(x^{-2})\right) = x + \frac{1}{2x} + O(x^{-1}).$$

Представим исходный интеграл в виде

$$\int_0^\lambda \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx + \int_1^\lambda \sqrt{1+x^2} dx.$$

Для первого интеграла в правой части справедлива оценка $O(1)$, а во второй интеграл подставим разложение подынтегральной функции и почленно проинтегрируем.

$$F(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(\lambda) + O(1).$$

$$\mathbf{2.2.1.} \quad F(\lambda) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right).$$

$$\mathbf{2.2.2.} \quad F(\lambda) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right).$$

$$\mathbf{2.2.3.} \quad F(\lambda) = e^{-\lambda} \left[\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\lambda^n} + O\left(\frac{N!}{\lambda^{N+1}}\right) \right].$$

2.3.1. В данном случае $S(x) = \cos(\sqrt{x})$, $S'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$,
 $S'(x) \neq 0$ при $x \in (0, \frac{\pi^2}{4}]$, $S'(0+) = -\frac{1}{2}$. Следовательно, можно использо-
 вать формулу (3.6). Вычислим

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S'(x)} \right) = \frac{\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cos \sqrt{x}}{\sin^2 \sqrt{x}}.$$

Таким образом,

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda S'(0)} e^{\lambda S(0)} + \frac{1}{\lambda^2 S'(0)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S'(x)} \right)_{x=0} e^{\lambda S(0)} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

При вычислении $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S'(x)} \right)_{x=0}$ заменим $\sin \sqrt{x}$ на $\sqrt{x} - (\sqrt{x})^3/6$
 и $\cos \sqrt{x}$ на $1 - x/2$. Получим

$$F(\lambda) = e^{\lambda} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{2}{3\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right).$$

На рис. 2.14 сплошная линия соответствует численному решению, пунк-
 тирная — одночленному асимптотическому приближению.

2.3.2. Заменой переменных $x = \frac{z}{\lambda^{1/2}}$ приходим к интегралу

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \exp\left(-\sqrt{\lambda} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) dz.$$

Имеем

$$F(\lambda) = \lambda^{-3/4} \exp\left(-2\sqrt{\lambda}\right) \left(\sqrt{\pi} + O(\lambda^{-1})\right).$$

На рис. 2.15 сплошная линия соответствует численному решению, пунк-
 тирная — одночленному асимптотическому приближению.

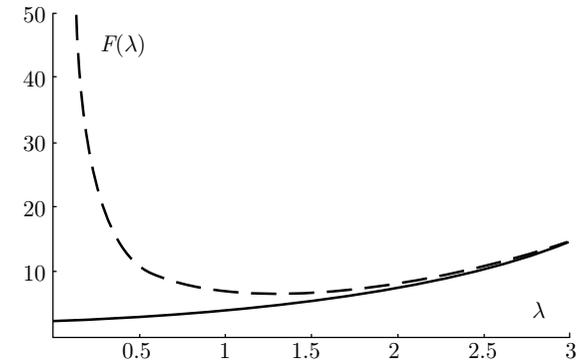


Рис. 2.14

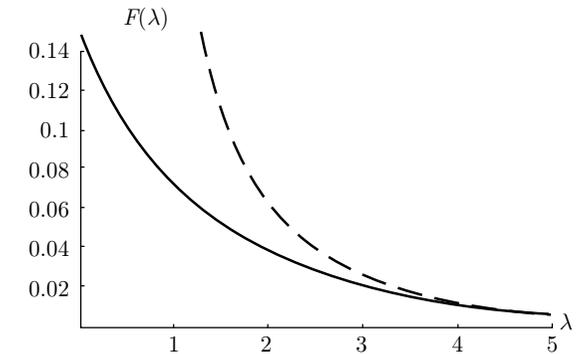


Рис. 2.15

2.3.3. Заменой переменной $x = z \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{1/(1+\alpha)}$ приходим к интегралу

$$F(\lambda) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{1/(1+\alpha)} \int_0^{\infty} \exp\left(-\lambda^{\alpha/(\alpha+1)} \alpha^{1/(\alpha+1)} (z + z^{-\alpha})\right) dz.$$

Отсюда

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-\frac{\alpha+2}{2(1+\alpha)}} \alpha^{\frac{1}{1+\alpha}} \exp\left(-(\alpha+1) \alpha^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \lambda^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right) \left(\sqrt{\frac{2\pi}{1+\alpha}}\right).$$

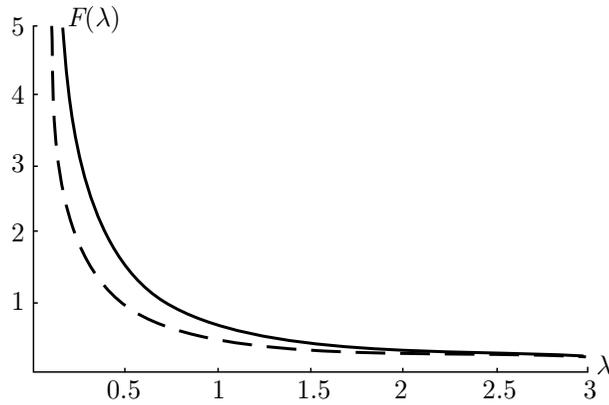


Рис. 2.16

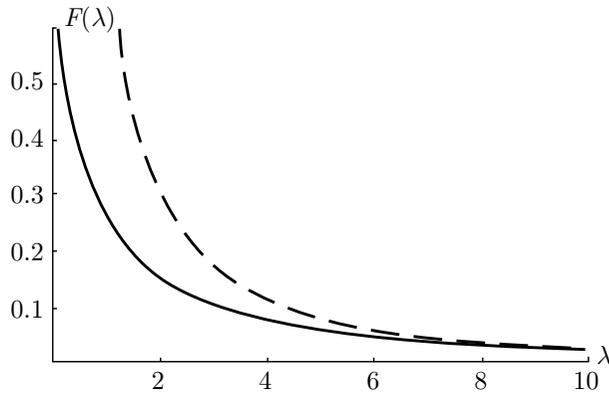


Рис. 2.17

На рис. 2.16 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению для $\alpha = 0.3$.

2.3.4. Запишем исходный интеграл в виде

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 \exp(\lambda \ln(S(x))) x^2 dx.$$

В данном случае $S(x) = \ln(1 - x^2)$, $x_0 = 0$, $S(x_0) = 0$, $S''(x_0) = -2$, $m = 1$, $\varphi(x) = x^2$, т.е. $\alpha = 2$. Имеем $F(\lambda) = \lambda^{-3/2}(\sqrt{\pi}/2 + O(\lambda^{-3/2}))$. На рис. 2.17 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению.

2.3.5. Запишем исходный интеграл в виде

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 \exp(\lambda \ln(S(x))) dx.$$

В данном случае $S(x) = \ln(1 - x^2)$, $x_0 = 0$, $S(x_0) = 0$, $S''(x_0) = -2$, $m = 1$, $\varphi(x) = 1$, т.е. $\alpha = 0$. Имеем $F(\lambda) = \lambda^{-1/2}(\sqrt{\pi} + O(\lambda^{-1/2}))$. На рис. 2.18 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению.

2.3.6. Запишем исходный интеграл в виде

$$F(\lambda) = \int_0^1 \exp(\lambda \ln(S(x))) x dx.$$

В данном случае $S(x) = \ln(1 - x^2)$, $x_0 = 0$, $S(x_0) = 0$, $S''(x_0) = -2$, $m = 1$, $\varphi(x) = x$, т.е. $\alpha = 1$. Заметим, что в данном случае точка максимума лежит на границе. Имеем $F(\lambda) = \lambda^{-1}(1/2 + O(\lambda^{-1}))$. На рис. 2.19 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению.

2.3.7. Запишем исходный интеграл в виде

$$F(\lambda) = \int_0^\pi \exp(nS(x)) \sin x dx.$$

В данном случае $S(x) = \ln x$, $x_0 = b = \pi$ (обратите внимание, что максимум функции $S(x)$ достигается на верхнем пределе), $S(x_0) = \ln \pi$, $S'(x_0) = 1/\pi$, $m = 1$, $h(x, x_0) = x$. При этом $\varphi(x_0) = 0$, т.е. в асимптотическое разложение не входит член при $k = 0$. Вычисляем $x \frac{d}{dx} (x \sin x)|_{x=\pi} = -\pi^2$. Следовательно,

$$F(\lambda) = \lambda^{-2} \exp(\lambda \ln \pi) (\pi^2 + O(\lambda^{-1})) = \pi^{\lambda+2} \lambda^{-2} (1 + O(\lambda^{-1})).$$

На рис. 2.20 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению.

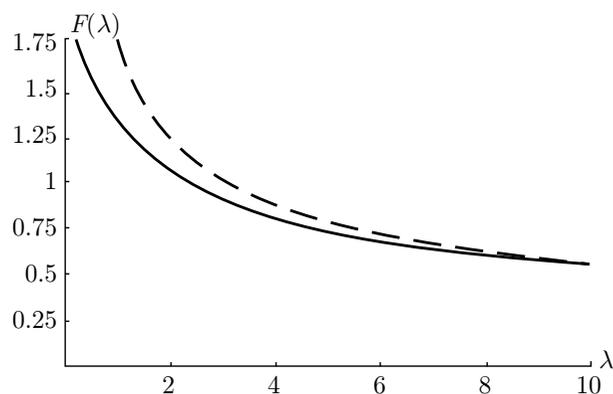


Рис. 2.18

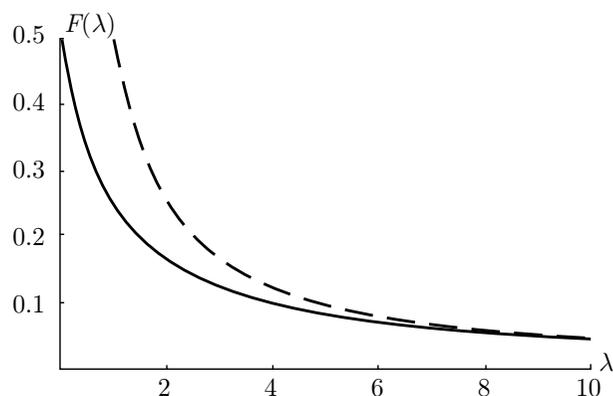


Рис. 2.19

2.3.8. Функция $S(x) = \operatorname{ch}(x)$ имеет критическую точку $x_0 = 0$; $S(x_0) = 1$, $S''(x_0) \neq 0$.

$$F_\nu(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O(\lambda^{-1/2})\right).$$

На рис. 2.21 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению.

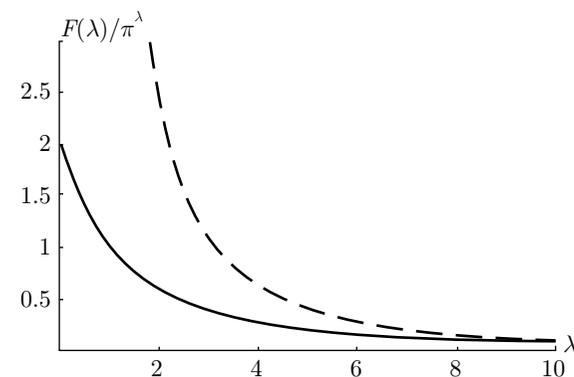


Рис. 2.20

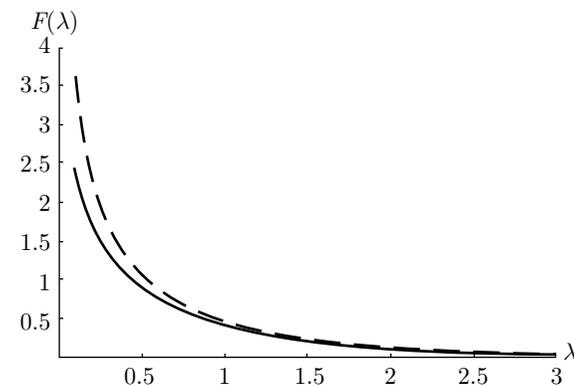


Рис. 2.21

2.4.1. $J_\nu(\nu t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sqrt{t^2-1}}} \cos\left(\nu \arccos \frac{1}{t} - \nu\sqrt{t^2-1} + \frac{\pi}{4}\right) + O(\nu^{-1})$.

На рис. 2.22 сплошная линия соответствует численному решению, пунктирная — одночленному асимптотическому приближению при $t = 1.3$.

2.4.2. $S(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $S''(x_0) = 0$, $S'''(x_0) = 6$, $S(x_0) = 0$. Следовательно,

$$F(\lambda) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \lambda^{-1/3} \exp\left(\frac{i\pi}{6}\right) (1 + O(\lambda^{-1})).$$

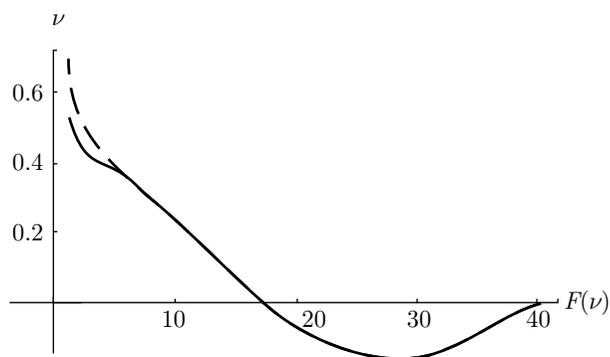


Рис. 2.22

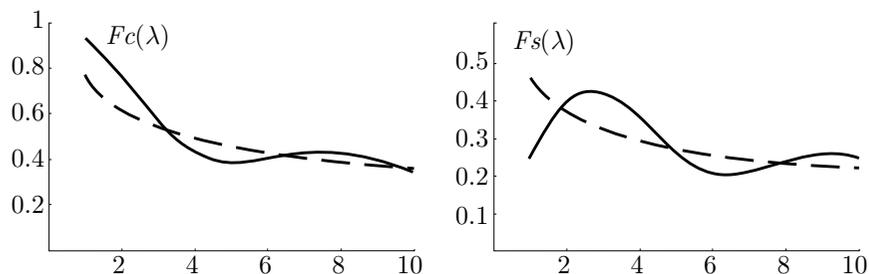


Рис. 2.23

Сравнение численных (сплошная линия) и асимптотических (пунктирная линия) значений функций $F_c(\lambda) = \operatorname{Re}(F(\lambda))$ и $F_s(\lambda) = \operatorname{Im}(F(\lambda))$ представлено на рис. 2.23.

2.4.3. $S(x) = x^n$, $x_0 = 0$, $S^{(n-1)}(x_0) = 0$, $S^{(n)}(x_0) = n!$, $S(x_0) = 0$. Следовательно,

$$F(\lambda) = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \lambda^{-1/n} \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right) (1 + O(\lambda^{-1/n})).$$

2.5.1. Обозначим $h(z) = z + z^3/3$. Точки перевала $c_{1,2} = \pm i$ для интегралов в (5.8) находятся из условия $h'(c) = 0$. Линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала, определяются из уравне-

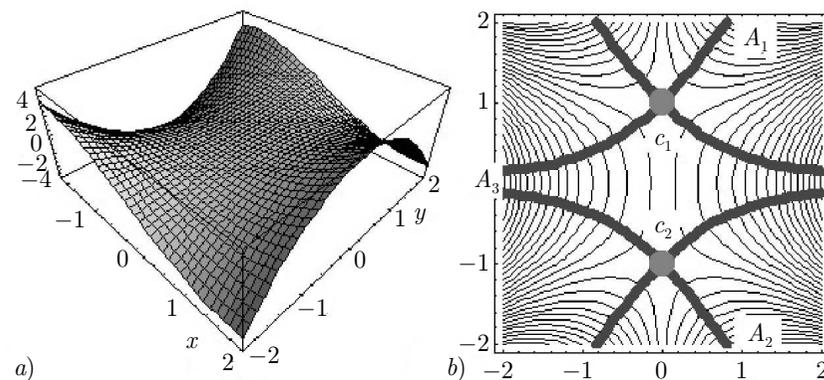


Рис. 2.24

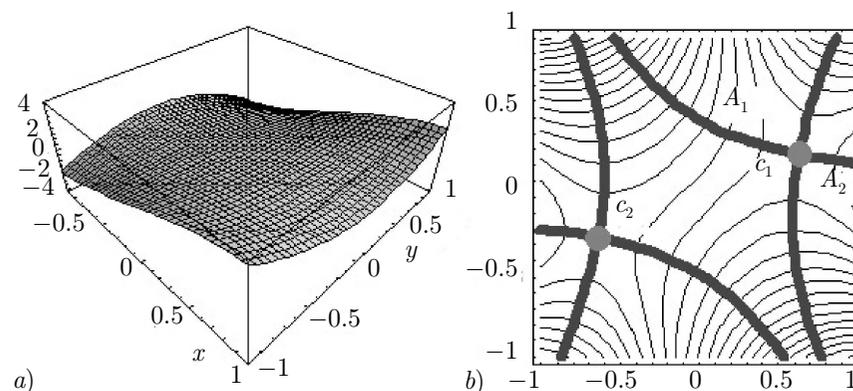


Рис. 2.25

ний (5.6), эквивалентным уравнениям $x^2y - y^3 + 3y = \pm 2$, где $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. На рис. 2.24a приведен график функции $\operatorname{Re}(h(z))$ в окрестности $z = 0$, а на рис. 2.24b — линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала c_1 и c_2 и линии уровня функции $\operatorname{Re}(h(z))$.

Пути интегрирования γ_1 и γ_2 деформируются в пути $\gamma_{10} = A_1c_1A_2 + A_2c_2A_3$ (путь состоит из двух линий наискорейшего спуска, уходящих концами в бесконечность) и $\gamma_{20} = A_2c_1A_1 + A_2c_2A_3$.

Обозначим $J_k = \int_{\gamma_{k0}^*} e^{\lambda h(z)} dz$, $k = 1, 2$ вклады точек перевала c_1 и c_2 , соответствующие интегрированию по направлениям от A_2 к A_1 и от A_2

к A_3 . Учитывая, что при изменении направления интегрирования знак вклада J_k меняется на противоположный, получаем

$$\text{Ai}(-\eta) \simeq C_1 \sqrt{\eta}(J_2 - J_1), \text{Bi}(-\eta) \simeq C_2 \sqrt{\eta}(J_2 + J_1), \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Для вычисления вклада J_1 в интеграле по дуге γ_{10}^* сделаем замену переменной (5.7). С учетом соотношения $dz \simeq \exp(i\pi/4)d\tau$ имеем

$$J_1 \simeq e^{\lambda h(c_1) + i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi/\lambda} e^{i(2\lambda/3 + \pi/4)}.$$

Аналогичным образом находим

$$J_2 \simeq \sqrt{\pi/\lambda} e^{-i(2\lambda/3 + \pi/4)}.$$

Следовательно,

$$\text{Ai}(-\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{Bi}(-\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $\zeta = \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}$ и $\lambda = (-\eta)^{3/2}$.

2.5.2. Обозначим $h(z) = z + iz - z^3$. Уравнение $h'(z) = 0$ имеет два корня: $c_{1,2} = \pm 2^{1/4} 3^{-1/2} e^{i\pi/8}$. На рис. 2.25a приведен график функции $\text{Re}(h(z))$ в окрестности $z = 0$, а на рис. 2.25b — линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала c_1 и c_2 и линии уровня функции $\text{Re}(h(z))$. Уравнение линии наискорейшего спуска, проходящей через точку c_1 , имеет вид $y^3 - 3x^2y + x + y = 2^{7/4} 3^{-3/2} \sin(3\pi/8)$.

В качестве γ_0 возьмем контур, состоящий из отрезка OA_1 и части линии наискорейшего спуска $A_1c_1A_2$ (см. рис. 2.26)

Главный член асимптотики $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ равен вкладу J_1 точки перевала c_1 , так как по сравнению с ним вклад отрезка OA_1 экспоненциально мал.

После замены переменной (5.7) с учетом соотношения

$$dz \simeq 2^{-1/8} 3^{-1/4} e^{i\pi/16} d\tau$$

получим $F(\lambda) \simeq J_1 = \sqrt{\pi/\lambda} 2^{-1/8} 3^{-1/4} \exp(2^{7/4} 3^{-3/2} e^{3\pi i/8} \lambda - i\pi/16)$.

2.5.3. Положим $h(z) = iz - \ln(1 + z^2)$. Тогда $F(\lambda)$ примет вид (5.1), причем $\varphi(z) \equiv 1$. В рассматриваемом случае имеются две простые точки перевала: $c_1 = i(\sqrt{2} - 1)$, $c_2 = -i(\sqrt{2} + 1)$. На рис. 2.27a приведен

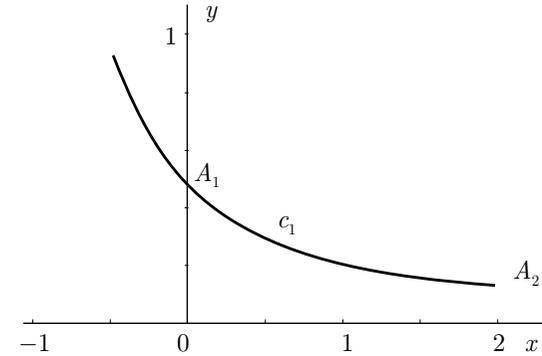


Рис. 2.26

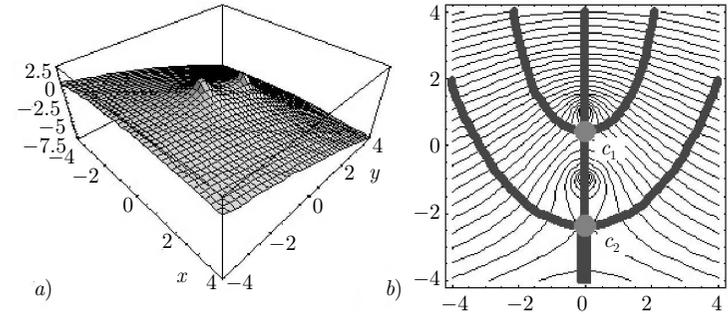


Рис. 2.27

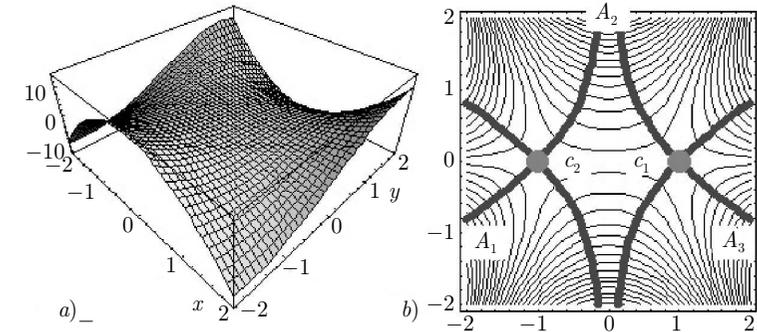


Рис. 2.28

график функции $\operatorname{Re}(h(z))$ в окрестности $z = 0$, а на рис. 2.27b — линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала c_1 и c_2 и линии уровня функции $\operatorname{Re}(h(z))$. Уравнение линии наискорейшего спуска, проходящей через точку c_1 , имеет вид $\sin x(1 + x^2 - y^2) = 2xy \cos x$.

Главный член асимптотического разложения $F(\lambda)$ равен вкладу J_1 точки перевала c_1 . С помощью замены переменной (5.7) получим $F(\lambda) \simeq J_1 = \lambda^{-1/2} \exp(-\lambda c) (2c)^{-\lambda} [\pi(1-c)^{1/2}]$, где $c = \sqrt{2} - 1$.

2.5.4. Точки перевала для функции $h(z) = i(3z - z^3)$ находим из уравнения $h'(z) = 0$, которое имеет корни $c_{1,2} = \pm 1$.

На рис. 2.28a приведен график функции $\operatorname{Re}(h(z))$ в окрестности $z = 0$, а на рис. 2.28b — линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала c_1 и c_2 и линии уровня функции $\operatorname{Re}(h(z))$.

Главный член разложения $F(\lambda)$ равен сумме вкладов точек перевала c_1 и c_2 : $F(\lambda) \simeq J_1 + J_2 = 2\pi^{1/2}(3\lambda)^{-1/2} \cos(2\lambda - \pi/4)$.

ГЛАВА 3

Регулярное возмущение решений обыкновенных дифференциальных уравнений

В данной главе построены асимптотические разложения решений некоторых регулярно возмущенных уравнений и систем уравнений, к которым сводятся задачи механики. Рассмотрены задачи Коши, задачи о нахождении периодических решений и краевые задачи.

3.1. Введение

Систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \varepsilon), \quad (1.1)$$

где \mathbf{y} и \mathbf{f} — векторные функции, t — независимая скалярная переменная, ε — малый параметр, будем называть *регулярно возмущенной*, если

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(t, \mathbf{y}) \varepsilon^k. \quad (1.2)$$

В этом случае ее решение можно искать в виде асимптотического ряда

$$\mathbf{y}(t, \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k(t) \varepsilon^k. \quad (1.3)$$

Асимптотические разложения вида (1.3) называют *прямыми* [18].

Подставим (1.2) и (1.3) в (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях системы уравнений (1.1).

Получим последовательность систем уравнений для определения векторных функций $\mathbf{y}_k(t)$. Система для определения $\mathbf{y}_0(t)$ имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{y}_0}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, 0) \quad (1.4)$$

и называется *порождающей* для системы (1.1). Системы уравнений для нахождения $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots$ оказываются линейными. Если линейна и порождающая система (1.4), то система (1.1) называется *квазилинейной*.

Система (1.1) называется *автономной*, если векторная функция \mathbf{f} не зависит явно от t . Для автономной квазилинейной системы порождающая система будет линейной системой с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение вида

$$L(x, t, \varepsilon) = 0, \quad (1.5)$$

где L — дифференциальный оператор, $x(t, \varepsilon)$ — скалярная функция, будем называть регулярно возмущенным, если оно сводится к регулярно возмущенной системе.

Так, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \varepsilon),$$

в котором для функции f имеет место разложение

$$f(t, x, \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t, x) \varepsilon^k,$$

является регулярно возмущенным, так как заменой переменных $x = y_1$, $\dot{x} = y_2$ оно сводится к системе

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = f(t, y_1, \varepsilon).$$

Решение регулярно возмущенного дифференциального уравнения можно представить в виде

$$x(t, \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \varepsilon^k,$$

причем порождающим для уравнения (1.5) будет уравнение

$$L(x, t, 0) = 0.$$

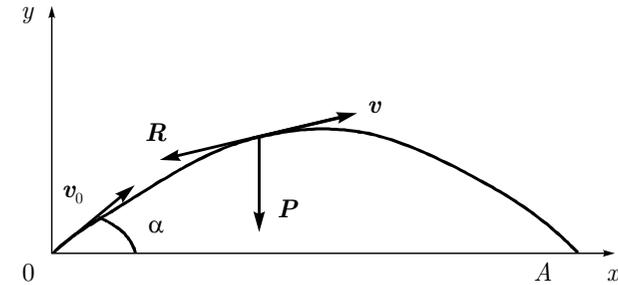


Рис. 3.1

3.2. Задачи Коши

Задачей Коши для системы (1.1) называется задача определения решения этой системы, удовлетворяющего начальному условию $\mathbf{y}(t_*) = \mathbf{y}_*$. Начальные условия для уравнения (1.5) n -го порядка имеют вид

$$x = x_*, \quad \frac{dx}{dt} = x_*^{(1)}, \dots, \quad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x_*^{(n-1)} \quad \text{при } t = t_*.$$

3.2.1. Движение материальной точки в поле силы тяжести

Предположим, что материальная точка массой m брошена с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. На точку действует сила веса $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ и сила сопротивления воздуха $\mathbf{R} = \nu\mathbf{v}f(v)$ (рис. 3.1).

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{P} - \nu\mathbf{v}f(v), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.1)$$

Спроектируем векторные равенства (2.1) на оси координат Ox и Oy . В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -\nu v_x f(v), & m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - \nu v_y f(v), \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, & \frac{dy}{dt} &= v_y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Запишем начальные условия для системы (2.2):

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha, \quad x = y = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.3)$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$t = T\tau, \quad x = L\xi, \quad y = L\eta, \quad u = \frac{T}{L}v_x, \quad w = \frac{T}{L}v_y,$$

где T и L — некоторые характерные масштабы времени и длины. В безразмерных переменных система (2.2) и граничные условия (2.3) примут вид

$$\frac{du}{d\tau} = -\varepsilon u f, \quad \frac{dw}{d\tau} = -a - \varepsilon w f, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = u, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = w, \quad (2.4)$$

$$u = v_* \cos \alpha, \quad w = v_* \sin \alpha, \quad \xi = \eta = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\nu T}{m}, \quad a = \frac{gT^2}{L}, \quad v_* = \frac{Tv_0}{L}$$

— безразмерные параметры.

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$, и рассмотрим случай $f(v) \equiv 1$, который соответствует силе сопротивления, пропорциональной скорости. Решение системы (2.4) будем искать в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (2.6)$$

Формулы для w , ξ , η получаются заменой u в (2.6) на соответствующую переменную.

Порождающая система

$$\frac{du_0}{d\tau} = 0, \quad \frac{dw_0}{d\tau} = -a, \quad \frac{d\xi_0}{d\tau} = u_0, \quad \frac{d\eta_0}{d\tau} = w_0$$

с начальными условиями

$$u_0 = v_* \cos \alpha, \quad w_0 = v_* \sin \alpha, \quad \xi_0 = \eta_0 = 0 \quad \text{при } \tau = 0$$

описывает движение материальной точки при отсутствии сопротивления ($f = 0$) и имеет решение

$$u_0 = v_* \cos \alpha, \quad w_0 = -a\tau + v_* \sin \alpha, \\ \xi_0 = v_* \tau \cos \alpha, \quad \eta_0 = \frac{-a\tau^2}{2} + v_* \tau \sin \alpha. \quad (2.7)$$

При отсутствии сопротивления траектория движения является параболой.

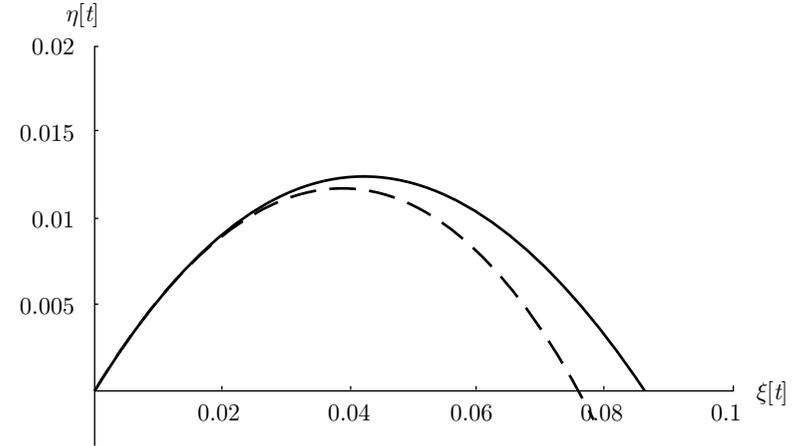


Рис. 3.2

Следующие приближения ($k = 1, 2, \dots$) определяются после решения систем

$$\frac{du_k}{d\tau} = -u_{k-1}, \quad \frac{dw_k}{d\tau} = -w_{k-1}, \quad \frac{d\xi_k}{d\tau} = -u_k, \quad \frac{d\eta_k}{d\tau} = -w_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

с нулевыми начальными условиями. Система первого приближения ($k=1$) имеет решение

$$u_1 = -v_* \tau \cos \alpha, \quad w_1 = \frac{a\tau^2}{2} - v_* \tau \sin \alpha, \\ \xi_1 = -\frac{v_* \tau^2}{2} \cos \alpha, \quad \eta_1 = \frac{a\tau^3}{6} - \frac{v_* \tau^2}{2} \sin \alpha. \quad (2.8)$$

На рис. 3.2 изображены траектории движения с сопротивлением (пунктирная линия) и без сопротивления (сплошная линия) для случая $\varepsilon = 2$, $a = 10$, $v_* = 1$, $\alpha = \pi/6$.

3.2.2. Уравнение Дюффинга

Рассмотрим построение асимптотического разложения решения задачи Коши для уравнения Дюффинга [1, 2, 18]

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon b x^3 = 0, \quad \dot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (2.9)$$

которое, в частности, описывает колебания груза, закрепленного на нелинейной пружине. Здесь x и t — безразмерные переменные, ε — малый параметр.

Предположим, что при $t = 0$ заданы начальные условия

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2.10)$$

Решение задачи (2.9), (2.10) ищем в виде ряда

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (2.11)$$

Подставим (2.11) в (2.9) и (2.10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях. Приравняв слагаемые, не содержащие ε (нулевое приближение), получим порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (2.12)$$

с начальными условиями

$$x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0(0) = 0. \quad (2.13)$$

Уравнения первого и второго приближений для определения x_1 и x_2 имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + b x_0^3 = 0, \quad (2.14)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + 3b x_1 x_0^2 = 0. \quad (2.15)$$

Из формул (2.10) и (2.13) следует, что

$$x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0 \quad \text{при } k \geq 1 \quad (2.16)$$

Подставим общее решение порождающего уравнения (2.12)

$$x_0 = M_0 \cos z + N_0 \sin z, \quad z = \omega t$$

в начальные условия (2.13). Получим $M_0 = a$, $N_0 = 0$ и, следовательно,

$$x_0 = a \cos z. \quad (2.17)$$

Подстановка (2.17) в (2.14) с учетом формулы

$$\cos^3 z = \frac{1}{4}(\cos 3z + 3 \cos z)$$

приводит к следующему уравнению:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{a^3 b}{4}(\cos 3z + 3 \cos z). \quad (2.18)$$

Его общее решение равно сумме частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Частное решение уравнения (2.18) можно представить в виде суммы решений уравнений

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{a^3 b}{4} \cos 3z \quad \text{и} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{3a^3 b}{4} \cos z$$

(принцип суперпозиции для линейных уравнений).

Решение первого из них ищем в виде $x = A \cos 3z$, а второго — в виде $x = B t \sin z$. После определения постоянных A и B получаем

$$x_1 = M_1 \cos z + N_1 \sin z - \frac{a^3 b}{32\omega^2}(12z \sin z - \cos 3z).$$

Постоянные M_1 и N_1 находятся из начальных условий (2.16):

$$M_1 = -\frac{a^3 b}{32\omega^2}, \quad N_1 = 0.$$

Таким образом, двучленное приближение к решению уравнения (2.9) имеет вид

$$x \simeq a \cos z - \varepsilon \frac{a^3 b \sin z (\sin 2z + 6z)}{16\omega^2}. \quad (2.19)$$

Аналогичным образом из уравнения (2.15) после подстановки в него выражений для x_0 и x_1 можно найти x_2 .

На рис. 3.3 сплошной линией изображено решение уравнения (2.9), полученное методом Рунге-Кутты при следующих значениях параметров: $\omega = b = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 2$. Штриховой линией изображено решение, найденное по формуле (2.19). Погрешность асимптотической формулы увеличивается с увеличением t , так как двучленное приближение содержит слагаемое с множителем εt , и при $t \sim \varepsilon^{-1}$ прямое асимптотическое разложение (2.19) становится неравномерным.

Замечание. Можно искать решение задачи Коши для уравнения (2.9) в виде

$$x = M(\varepsilon) \cos z + N(\varepsilon) \sin z + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (2.20)$$

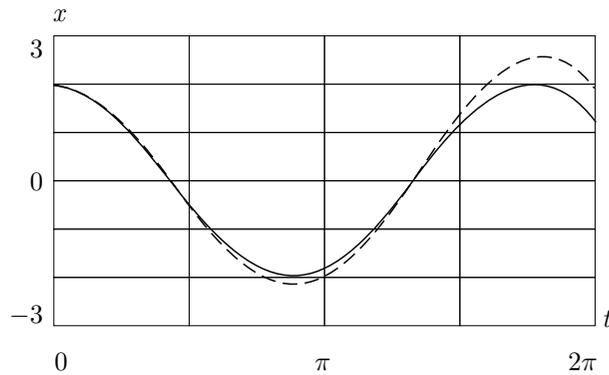


Рис. 3.3

где

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \dots, \\ N = N_0 + \varepsilon N_1 + \dots,$$

а функция x_k является частным решением уравнения k -го приближения. Этот метод построения асимптотического разложения в ряде случаев оказывается более удобным (см. п. 4.1).

3.2.3. Упражнения

3.2.1. Для задачи из подп. 3.2.1 (рис. 3.2) в случае $f(v) \equiv 1$ найти продолжительность и дальность полета материальной точки с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$. Определить угол α_* , для которого дальность полета будет наибольшей.

3.2.2. Найти точное решение системы (2.4) при $f(v) \equiv 1$ и сравнить его асимптотическое разложение с (2.6).

3.2.3. Построить первое приближение для решений u и v системы (2.4) в случае, когда $f(v) = \sqrt{u^2 + w^2}$ (сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости). Сравнить численное решение системы (2.4) с нулевым и первым приближением при разных значениях ε .

3.2.4. Найти двучленное асимптотическое представление решений системы дифференциальных уравнений

$$t\dot{x} = x + \varepsilon y, \quad t\dot{y} = (2 - x)y$$

с начальными условиями

$$x(1) = 1, \quad y(1) = e^{-1}.$$

Сравнить полученное решение с численным решением системы.

3.2.5. Найти двучленное асимптотическое представление решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \dot{x}^2 x$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Сравнить полученное приближенное решение с численным решением.

3.2.6. Система безразмерных уравнений

$$\ddot{x} = -\varepsilon \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = \varepsilon (\dot{x} \sin \varphi - \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{z} = 2 + \varepsilon \dot{y} \cos \varphi$$

с нулевыми начальными данными описывает падение материальной точки на поверхность Земли с высоты h с учетом силы инерции Кориолиса [23]. Здесь x — отклонение от вертикали к югу, y — отклонение к западу, φ — широта ($\varphi < 0$ в южном полушарии). Окончанию движения соответствует значение $z = 1$. Предполагается, что параметр

$$\varepsilon = \omega \sqrt{2h/g},$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, g — ускорение свободного падения, является малой величиной.

Найти первое приближение для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Построить точное решение системы уравнений и сравнить его с приближенным.

3.3. Периодические решения

Асимптотические разложения (1.3) можно использовать для приближенного определения периодических решений некоторых систем неавтономных дифференциальных уравнений, правые части которых содержат периодические функции независимой переменной. Эти задачи рассмотрены в пп. 3.3.1, 3.3.2.

Для автономных систем, правые части которых не содержат явных функций от независимой переменной, прямые разложения (1.3) оказываются неудобными для определения периодических решений из-за появления в них так называемых вековых членов. Наличие вековых членов приводит к нарушению равномерности асимптотических разложений

при больших значениях независимой переменной [18]. В этом случае используются асимптотические разложения более сложного вида, метод построения которых описан в подп. 3.3.3.

3.3.1. Решение неавтономных квазилинейных уравнений в нерезонансном случае

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin t + \varepsilon \varphi(x, \dot{x}). \quad (3.1)$$

Порождающее уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin t$$

при $\omega \neq 1$ имеет периодическое решение

$$x_0 = A \sin t, \quad A = \frac{h}{\omega^2 - 1}. \quad (3.2)$$

Будем искать периодическое решение уравнения (3.1) с периодом 2π в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (3.3)$$

Подставим (3.3) в (3.1). С учетом разложения

$$\varphi(x, \dot{x}) = \varphi(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots, \dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \dots) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots,$$

где

$$\varphi_0 = \varphi(x_0, \dot{x}_0), \quad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{x}_1, \dots,$$

получим

$$\ddot{x}_n + \omega^2 x_n = \varphi_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Разложим функцию $\varphi_0(t) = \varphi(A \sin t, A \cos t)$ в ряд Фурье

$$\varphi_0(t) = A_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{0k} \cos kt + B_{0k} \sin kt). \quad (3.5)$$

Замечание. Для разложения некоторых функций в ряд Фурье удобно использовать формулы:

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Например,

$$\sin^3 t = \frac{(e^{it} - e^{-it})^3}{(2i)^3} = -\frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{8i} = \frac{1}{4}(3 \sin 3t - \sin t). \quad (3.6)$$

При $\omega \neq k$ уравнение (3.4) первого приближения имеет периодическое решение

$$x_1 = \frac{A_{00}}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0k}}{\omega^2 - k^2} \cos kt + \frac{B_{0k}}{\omega^2 - k^2} \sin kt \right).$$

Функции x_2, x_3, \dots последовательно определяются из уравнений (3.4):

$$x_{n+1} = \frac{A_{n0}}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_{nk}}{\omega^2 - k^2} \cos kt + \frac{B_{nk}}{\omega^2 - k^2} \sin kt \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где A_{nk}, B_{nk} — коэффициенты Фурье функции $\varphi_n(t)$.

Асимптотическое разложение (3.3) не является равномерным по параметру ω . Равномерность нарушается благодаря появлению малых знаменателей при $|\omega^2 - k^2| = O(\varepsilon)$. Случай $\omega^2 = k^2 - \varepsilon\delta$, $\delta = O(1)$ называется *резонансным* и будет рассмотрен далее.

Найдем первые члены асимптотического разложения (3.3) 2π -периодического решения уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon b x^3 = h \sin t \quad (3.7)$$

в нерезонансном случае.

Нулевое приближение имеет вид (3.2). Подставим (3.2) в уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -b x_0^3$$

и воспользуемся формулой (3.6). Ввиду того, что $\omega \neq k$, уравнение

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{b}{4} A^3 (3 \sin t - \sin 3t)$$

имеет периодическое решение

$$x_1 = -\frac{b}{4} A^3 \left(\frac{3 \sin t}{\omega^2 - 1} - \frac{\sin 3t}{\omega^2 - 9} \right).$$

3.3.2. Решение неавтономных квазилинейных уравнений в резонансном случае

Рассмотрим случай главного резонанса $\omega^2 = 1 - \varepsilon\delta$ для уравнения (3.1)

$$\ddot{x} + x = h \sin t + \varepsilon\delta x + \varepsilon\varphi(x, \dot{x}). \quad (3.8)$$

Порождающее уравнение

$$\ddot{x} + x = h \sin t$$

имеет общее решение

$$x_0 = M \cos t + N \sin t - \frac{h}{2}t \cos t,$$

которое ни при каких значениях постоянных M и N не является периодическим. Однако построение 2π -периодического решения уравнения (3.8) возможно, если $h = \varepsilon a$. Действительно, в этом случае порождающее уравнение

$$\ddot{x} + x = 0$$

имеет двупараметрическое семейство 2π -периодических решений вида

$$x_0 = M \cos t + N \sin t. \quad (3.9)$$

При некоторых значениях постоянных M и N , которые находятся из условия существования периодических решений уравнения первого приближения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = a \sin t + \delta x_0 + \varphi_0(t), \quad (3.10)$$

уравнение (3.8) может иметь периодические решения вида (3.3).

Для того, чтобы уравнение (3.10) имело 2π -периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы разложение его правой части в ряд Фурье не содержало членов вида $A \cos t$, $B \sin t$. Приравняв нулю коэффициенты при функциях $\cos t$, $\sin t$ в разложении правой части (3.10) в ряд Фурье, получим систему двух уравнений для определения M и N :

$$\begin{aligned} P(M, N) &= 0, & Q(M, N) &= 0, \\ P &= M\delta + A_{01}(M, N), & Q &= a + N\delta + B_{01}(M, N), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(M \cos t + N \sin t, -M \sin t + N \cos t) \cos t dt, \\ B_{01} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(M \cos t + N \sin t, -M \sin t + N \cos t) \sin t dt, \end{aligned}$$

— коэффициенты Фурье в разложении (3.5) функции $\varphi_0(t)$.

Пусть система уравнений (3.11) имеет решение $M = M_0$, $N = N_0$. Тогда

$$x_0 = M_0 \cos t + N_0 \sin t,$$

а уравнение для определения x_1

$$\ddot{x}_1 + x_1 = A_{00} + \sum_{k=2}^{\infty} (A_{0k} \cos kt + B_{0k} \sin kt)$$

имеет периодическое решение

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t + \Phi_1(t),$$

где

$$\Phi_1 = A_{00} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{A_{0k} \cos kt + B_{0k} \sin kt}{1 - k^2} \right).$$

Из условия существования периодического решения уравнения второго приближения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \delta x_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{x}_1$$

получаем систему двух линейных алгебраических уравнений для определения постоянных M_1 и N_1 :

$$\frac{\partial P}{\partial M} M_1 + \frac{\partial P}{\partial N} N_1 = D_{11}, \quad \frac{\partial Q}{\partial M} M_1 + \frac{\partial Q}{\partial N} N_1 = D_{12},$$

$$D_{11} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \Phi_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{\Phi}_1 \right) \cos t dt, \quad (3.12)$$

$$D_{12} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \Phi_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_0} \dot{\Phi}_1 \right) \sin t dt.$$

Частные производные по M и N в формулах (3.12) вычисляются при $M = M_0$, $N = N_0$. Система уравнений (3.12) имеет единственное решение, если ее определитель

$$D = \frac{\partial P}{\partial M} \frac{\partial Q}{\partial N} - \frac{\partial P}{\partial N} \frac{\partial Q}{\partial M}$$

отличен от нуля. В этом случае процесс построения асимптотического разложения решения можно продолжить. Функции x_k последовательно определяются по формулам

$$x_k = M_k \cos t + N_k \sin t + \Phi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

а постоянные M_k и N_k находятся после решения систем линейных уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial M} M_k + \frac{\partial P}{\partial N} N_k = D_{k1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial M} M_k + \frac{\partial Q}{\partial N} N_k = D_{k2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Особенностью резонансного случая по сравнению с нерезонансным является возбуждение колебаний с амплитудой порядка единицы под действием периодической силы с малой амплитудой порядка ε .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение Дюффинга в случае $\omega^2 = 1 - \varepsilon\delta$, $h = \varepsilon a$, $a \neq 0$:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(a \sin t + \delta x - bx^3). \quad (3.13)$$

Нулевое приближение для решения уравнения (3.13) имеет вид (3.9). Подставим выражение для x_0 в уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = a \sin t + \delta x_0 - bx_0^3$$

и преобразуем его:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 = P \cos t + Q \sin t - \frac{b}{4}(M^3 - 3MN^2) \cos 3t + \\ + \frac{b}{4}(N^3 - 3M^2N) \sin 3t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$P = M \left[\delta - \frac{3b}{4}(M^2 + N^2) \right], \quad Q = a + N \left[\delta - \frac{3b}{4}(M^2 + N^2) \right].$$

Уравнение (3.14) имеет периодическое решение, если $P = Q = 0$. Предположим, что $M \neq 0$. Тогда из равенств $P = 0$, $Q = 0$ следует

$$\delta - \frac{3b}{4}(M^2 + N^2) = 0, \quad a = 0,$$

что противоречит условию $a \neq 0$. Следовательно, $M = 0$. Для определения N получаем кубическое уравнение

$$\frac{3b}{4}N^3 - \delta N - a = 0. \quad (3.15)$$

Пусть N_0 — вещественный корень уравнения (3.15). Тогда

$$x_0 = N_0 \sin t, \quad (3.16)$$

а уравнение (3.14) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{b}{4}N_0^3 \sin 3t.$$

Постоянные M_1 и N_1 в 2π -периодическом решении

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t - \frac{b}{32}N_0^3 \sin 3t \quad (3.17)$$

находятся из условия существования периодического решения уравнения второго приближения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \delta x_1 - 3bx_0^2 x_1.$$

Подставим в это уравнение (3.16) и (3.17), преобразуем его правую часть в линейную комбинацию функций $\cos kt$, $\sin kt$ и приравняем нулю коэффициенты при $\sin t$, $\cos t$. Получим

$$M_1 \left(\delta - \frac{3b}{4}N_0^2 \right) = 0, \quad N_1 \left(\delta - \frac{9b}{4}N_0^2 \right) = \frac{3}{128}b^2 N_0^5. \quad (3.18)$$

Из первого уравнения (3.18) следует, что $M_1 = 0$. Действительно, в противном случае из равенства

$$\delta - \frac{3b}{4}N_0^2 = 0$$

в силу (3.15) получаем $a = 0$.

Если $\delta \neq 9bN_0^2/4$, то

$$N_1 = \frac{3b^2 N_0^5}{32(4\delta - 9bN_0^2)},$$

и периодическое решение уравнения (3.13) может быть представлено в виде (3.3).

Аналогичным образом строится асимптотическое разложение 2π -периодического решения в случае резонанса типа $\omega^2 = k^2 - \varepsilon\delta$ при $k \neq 1$ (см. задачу 3.3.4).

3.3.3. Метод Пуанкаре

Квазилинейное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\varphi(x, \dot{x}) \quad (3.19)$$

называется *автономным*, так как его правая часть не зависит явно от времени.

Использование прямого асимптотического разложения (3.3) для решения уравнения (3.19) обычно приводит к появлению в этом разложении *вековых членов* типа $A\varepsilon t \sin t$, $A\varepsilon t \cos t$ (см. формулу (2.19) и решение задачи 3.2.5). В результате прямое асимптотическое разложение оказывается неравномерным при больших значениях $t \sim \varepsilon^{-\alpha}$, $\alpha \geq 1$. Термин вековой член возник при решении задач небесной механики, в которых величина εt часто играет заметную роль лишь при значениях t , равных столетию.

Возникновение вековых членов связано с тем, что период решения уравнения (3.19), как правило, зависит от параметра ε . Так, например, прямое разложение функции

$$x = \sin[(\omega_0 + \varepsilon\omega_1)t] = \sin \omega_0 t + \varepsilon\omega_1 t \cos \omega_0 t + \dots$$

содержит вековой член $\varepsilon\omega_1 t \cos \omega_0 t$.

Для получения равномерного асимптотического разложения периодического решения можно использовать метод Пуанкаре.

Предположим, что искомое решение уравнения (3.19) имеет период

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega} g(\varepsilon), \quad g(\varepsilon) = 1 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots,$$

где g_k — неизвестные постоянные. В уравнении (3.19) сделаем замену переменной

$$t = \frac{\tau}{\omega} g(\varepsilon). \quad (3.20)$$

Уравнение примет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x g^2 = \varepsilon\varphi\left(x, \frac{\omega}{g} \frac{dx}{d\tau}\right) \frac{g^2}{\omega^2}. \quad (3.21)$$

Пусть $x(t)$ — периодическое решение уравнения (3.19) с периодом T . Тогда

$$x\left[\frac{\tau + 2\pi}{\omega} g(\varepsilon)\right] = x(t + T) = x(t) = x\left[\frac{\tau}{\omega} g(\varepsilon)\right],$$

и, следовательно, функция $x[\tau g(\varepsilon)/\omega]$, являющаяся решением уравнения (3.21), имеет период 2π .

Для периодического решения уравнения (3.21) существует значение $\tau = \tau_0$ такое, что

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = \tau_0.$$

Если в уравнении (3.21) сделать замену переменной $\tau' = \tau - \tau_0$, то будет выполнено равенство

$$\frac{dx}{d\tau'} = 0 \quad \text{при } \tau' = 0,$$

а вид уравнения не изменится. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\tau_0 = 0$.

Будем искать решение уравнения (3.21) в виде

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots, \quad (3.22)$$

где

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau), \quad \frac{dx_i}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Подставим (3.22) и (3.21) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε . Порождающее уравнение

$$\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0$$

имеет семейство решений

$$x_0 = M \cos \tau, \quad (3.24)$$

удовлетворяющих условиям (3.23).

В уравнение первого приближения

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{\varphi_0}{\omega^2} - 2g_1 x_0 \quad (3.25)$$

входит 2π -периодическая функция

$$\varphi_0(\tau) = \varphi(M \cos \tau, -\omega M \sin \tau).$$

Разложим функцию φ_0/ω^2 в ряд Фурье:

$$\frac{\varphi_0}{\omega^2} = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\tau + B_k \sin k\tau).$$

Уравнение (3.25) будет иметь периодическое решение, если

$$B_1(M) = \frac{1}{\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} \varphi(M \cos \tau, -\omega M \sin \tau) \sin \tau d\tau = 0, \quad (3.26)$$

$$A_1(M) - 2g_1 M = \frac{1}{\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} \varphi(M \cos \tau, -\omega M \sin \tau) \cos \tau d\tau - 2g_1 M = 0.$$

Пусть $M = M_0 \neq 0$ — решение уравнения (3.26). Тогда

$$g_1 = \frac{A_1(M_0)}{2M_0},$$

и в нулевом приближении периодическое решение уравнения (3.19) имеет вид

$$x_0 = M_0 \cos \frac{\omega t}{1 + \varepsilon g_1}.$$

Уравнение первого приближения

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (A_k \cos k\tau + B_k \sin k\tau)$$

имеет решение

$$x_1 = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau + \Phi_1, \quad (3.27)$$

где

$$\Phi_1 = A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k \cos k\tau + B_k \sin k\tau}{1 - k^2}.$$

Из условия

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0$$

находим

$$N_1 = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k A_k}{1 - k^2}.$$

Для определения M_1 необходимо рассмотреть уравнение второго приближения

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -2g_2 x_0 - 2g_1 x_1 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} x_1 + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_{0\tau}} \frac{dx_1}{d\tau} + \psi_2, \quad (3.28)$$

$$\psi_2 = -g_1 x_0^2 - \frac{g_1}{\omega} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_{0\tau}} \frac{dx_0}{d\tau} + 2g_1 \varphi_0, \quad x_{0\tau} = \frac{dx_0}{d\tau}.$$

Подставим (3.24) и (3.27) в (3.28), разложим правую часть в ряд Фурье и приравняем нулю коэффициенты при $\cos \tau$ и $\sin \tau$. После преобразований получим два уравнения для определения M_1 и g_2 :

$$\frac{dB_1}{dM} M_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2 \sin \tau d\tau = 0, \quad (3.29)$$

$$-2g_2 M_0 + 2 \frac{dg_1}{dM} M_0 M_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2 \cos \tau d\tau,$$

где

$$\varphi_2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \Phi_1 + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_{0\tau}} \frac{d\Phi_1}{d\tau} - 2g_1 \Phi_1 + \psi_2.$$

Производные по M в (3.29) вычисляются при $M = M_0$. Если

$$\frac{dB_1}{dM} \neq 0 \quad \text{при } M = M_0,$$

то из первого уравнения (3.29) находится M_1 , а из второго — g_2 . В этом случае процесс построения периодического решения уравнения (3.19) можно продолжить и последовательно определить x_k для $k \geq 2$.

Пусть φ — аналитическая функция. Тогда полученный ряд будет сходиться при достаточно малых ε . Следовательно, квазилинейное уравнение (3.19) при достаточно малых ε будет иметь периодическое решение, если уравнение (3.26) имеет простой корень $M = M_0$. В свою очередь число корней уравнения (3.26) зависит от свойств функции φ .

Если функция φ не зависит от \dot{x} , то уравнение (3.26) удовлетворяется тождественно при любых M , и, следовательно, уравнение (3.19) при достаточно малых ε имеет бесчисленное множество периодических решений. Предположим, что уравнение (3.19) описывает движение материальной точки единичной массы. Тогда в рассматриваемом случае имеет место закон сохранения энергии, т. е. механическая система является *консервативной*.

Если $\varphi\dot{x} < 0$, то $B_1 < 0$, и уравнение (3.26) не имеет решений. Соответствующая ему механическая система будет диссипативной, так как ее механическая энергия убывает.

В том случае, когда уравнение (3.26) имеет конечное число решений, механическая система называется *автоколебательной*.

Одним из простейших уравнений, описывающих движение автоколебательной системы, является уравнение Ван-дер-Поля [18]:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (3.30)$$

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$, и найдем асимптотическое разложение периодического решения уравнения (3.30) методом Пуанкаре.

После замены переменной $t = \tau g(\varepsilon)$ уравнение (3.30) примет вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + xg^2 = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{d\tau}g. \quad (3.31)$$

Решение уравнения (3.31) ищем в виде (3.22). В уравнение первого приближения

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = (1 - x_0^2)\frac{dx_0}{d\tau} - 2g_1x_0$$

подставим решение порождающего уравнения (3.24). После преобразований получим

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = \left(\frac{M^2}{4} - 1\right)M \sin \tau - 2g_1M \cos \tau + \frac{1}{4}M^3 \sin 3\tau. \quad (3.32)$$

Уравнение (3.32) имеет периодическое решение, если

$$\left(\frac{M^2}{4} - 1\right)M = 0, \quad 2g_1M = 0.$$

Значение $M = 0$ соответствует тривиальному решению $x = 0$. Предположив, что $M \neq 0$, получим

$$M = M_0 = \pm 2, \quad g_1 = 0.$$

Значения $M_0 = 2$ и $M_0 = -2$ соответствуют одному и тому же периодическому решению, поэтому ограничимся исследованием случая $M_0 = 2$. Тогда

$$x_0 = 2 \cos \tau, \quad (3.33)$$

а уравнение (3.32) принимает вид

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = 2 \sin 3\tau.$$

Его решение

$$x_1 = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau - \frac{1}{4} \sin 3\tau \quad (3.34)$$

содержит неизвестные постоянные M_1 и N_1 . Из условия

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0$$

находим $N_1 = 3/4$.

Постоянные M_1 и g_2 определяются из условия существования периодического решения уравнения второго приближения

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -2g_2x_0 + (1 - x_0^2)\frac{dx_1}{d\tau} - 2x_0\frac{dx_0}{d\tau}x_1. \quad (3.35)$$

Подставим (3.33) и (3.34) в (3.35), представим правую часть в виде линейной комбинации функций $\sin k\tau$, $\cos k\tau$ и приравняем нулю коэффициенты при $\sin \tau$ и $\cos \tau$. В результате получим

$$M_1 = 0, \quad g_2 = \frac{1}{16}.$$

Следовательно, двучленное асимптотическое разложение периодического решения уравнения Ван-дер-Поля (3.30) имеет вид

$$x = 2 \cos \tau + \frac{\varepsilon}{4}(3 \sin \tau - \sin 3\tau), \quad \tau = \frac{16t}{16 + \varepsilon^2}. \quad (3.36)$$

Построение периодических решений с помощью численных методов оказывается существенно более сложной задачей по сравнению с задачей Коши. Поэтому ограничимся здесь определением фазовых траекторий. *Фазовой траекторией* для уравнения (3.1) называется кривая, которую описывает на фазовой плоскости (x, \dot{x}) изображающая точка с координатами $x(t), \dot{x}(t)$ при изменении переменной t . Построение достаточно большого количества фазовых траекторий позволяет судить о качественном поведении решений рассматриваемого уравнения при различных начальных условиях. Периодическим решениям соответствуют замкнутые фазовые траектории. Фазовые траектории, соответствующие периодическим решениям автоколебательных систем, называются *предельными циклами*.

На рис. 3.4 штриховой линией изображен предельный цикл для уравнения (3.30), построенный с использованием асимптотической формулы (3.36) при $\varepsilon = 0.3$. Сплошная линия представляет собой фазовую траекторию, полученную при помощи численного интегрирования задачи Коши с начальными условиями $x = 3, \dot{x} = 0$. При достаточно больших значениях переменной t фазовая точка описывает на фазовой плоскости кривую, которая в пределах точности рисунка становится замкнутой. Эту замкнутую кривую можно рассматривать как предельный цикл, полученный численным методом. Предельные циклы, найденные асимптотическим и численным методами, практически совпадают.

Можно убедиться в том, что и при других начальных условиях фазовые траектории уравнения (3.30) приближаются к предельному циклу, что свидетельствует об его асимптотической устойчивости (см. пп. 3.4.2).

3.3.4. Упражнения

3.3.1. Найти функцию x_2 в разложении (3.3) для уравнения (3.7).

3.3.2. Найти асимптотическое разложение 2π -периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin t + \varepsilon \dot{x}^2 x$$

в нерезонансном случае.

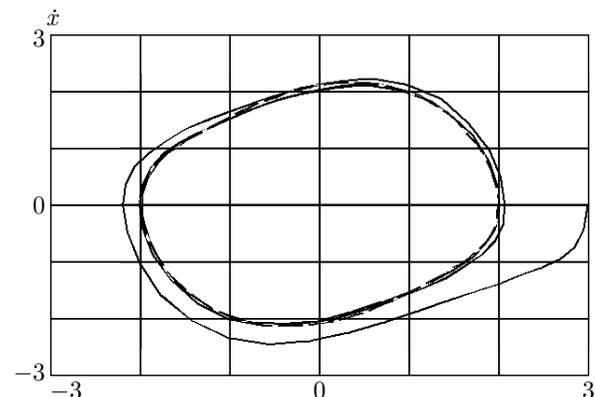


Рис. 3.4

3.3.3. Найти двучленное асимптотическое разложение 2π -периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(a \sin t + \delta x + \dot{x}^2 x), \quad a \neq 0$$

3.3.4. Найти главный член асимптотического разложения 2π -периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + 9x = \varepsilon(\delta x - bx^3) + h \sin t, \quad h \neq 0.$$

3.3.5. Методом Пуанкаре найти равномерное асимптотическое разложение периодических решений уравнений

$$1) \quad \ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^4)\dot{x},$$

$$2) \quad \ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - \varepsilon x^3$$

при $\varepsilon \ll 1$. Для первого из уравнений с помощью полученных асимптотических формул построить предельный цикл. Методом численного интегрирования изучить поведение фазовых траекторий вблизи предельного цикла.

3.4. Переходные режимы

Периодические решения систем дифференциальных уравнений (1.1) и решения вида $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, где \mathbf{y}_0 — постоянный вектор, называются *ста-*

ционарными. Решения, которые при $t \rightarrow \infty$ приближаются к некоторому стационарному решению, называются *переходными режимами*. Такие решения нельзя найти методом Пуанкаре, так как они не являются периодическими. Метод прямых асимптотических разложений ввиду его неравномерности позволяет определять переходные режимы только на сравнительно небольших интервалах изменения аргумента, имеющих длину $O(1)$, что, как правило, не представляет интереса для приложений.

В данном разделе рассматриваются метод осреднения и метод многих масштабов, которые позволяют получить равномерные на интервалах длиной $O(\varepsilon^{-1})$ приближенные решения задач Коши с произвольными начальными условиями.

3.4.1. Метод Ван-дер-Поля

Приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \varphi(x, \dot{x}) \quad (4.1)$$

может быть получено с помощью метода, предложенного голландским инженером Ван-дер-Полем. Решение уравнения (4.1) будем искать в виде

$$x = a(t) \cos z, \quad z = \omega t + \beta(t). \quad (4.2)$$

Тогда

$$\dot{x} = -a\omega \sin z + \dot{a} \cos z - a\dot{\beta} \sin z.$$

Решение (4.2) содержит две неизвестные функции $a(t)$ и $\beta(t)$. Одно из условий для их определения состоит в том, что решение (4.2) должно удовлетворять уравнению (4.1). Второе условие мы можем выбрать по своему усмотрению. Потребуем, чтобы

$$\dot{a} \cos z - a\dot{\beta} \sin z = 0. \quad (4.3)$$

В этом случае

$$\dot{x} = -a\omega \sin z, \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos z - \dot{a}\omega \sin z - a\omega\dot{\beta} \cos z. \quad (4.4)$$

Подставив (4.2) и (4.4) в (4.1), получим

$$-\dot{a}\omega \sin z - a\omega\dot{\beta} \cos z = \varepsilon \varphi(a \cos z, -a\omega \sin z). \quad (4.5)$$

Из формул (4.3), (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \varphi(a \cos z, -a\omega \sin z) \sin z, \\ \dot{\beta} &= -\frac{\varepsilon}{\omega a} \varphi(a \cos z, -a\omega \sin z) \cos z. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Замена переменных (4.2), (4.4) позволила свести уравнение (4.1) к эквивалентной системе двух уравнений (4.6). Функции $a(t)$ и $\beta(t)$ называются *медленными переменными* ($\dot{a} \sim \dot{\beta} \sim \varepsilon$), функция $z(t)$ — *быстрой переменной* ($\dot{z} \sim 1$), а проведенное преобразование — *разделением переменных на медленные и быстрые*.

Заменяем правые части системы (4.6) их средними значениями на интервале $[0, 2\pi]$ изменения z . Мы получим *укороченную систему*

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} B(a), \quad \dot{\beta} = -\frac{\varepsilon}{\omega a} A(a), \\ A(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \cos z, -\omega a \sin z) \cos z dz, \\ B(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \cos z, -\omega a \sin z) \sin z dz, \end{aligned} \quad (4.7)$$

решение которой находится в квадратурах. Переход от (4.6) к (4.7) называется *осреднением*.

Приближенное решение (4.2), где a и β определяются из системы (4.7), является главным членом асимптотического разложения решения уравнения (4.1) на интервале изменения t длиной $O(1/\varepsilon)$.

Метод Ван-дер-Поля удобен для определения нулевого приближения к решению, однако не позволяет найти следующие приближения. Для их построения можно использовать метод многих масштабов (см. пп. 3.4.3).

Применим метод Ван-дер-Поля для приближенного определения решения уравнения

$$\ddot{x} + \Lambda^2 x = \varepsilon[\varphi(x, \dot{x}) + h \sin \omega t], \quad (4.8)$$

правая часть которого содержит периодическую функцию t .

Решение ищем в виде (4.2). Принимая во внимание (4.3), для определения $a(t)$ и $\beta(t)$ получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos z - a \dot{\beta} \sin z &= 0, \\ -\dot{a}\omega \sin z - a\omega \dot{\beta} \cos z &= a(\omega^2 - \Lambda^2) \cos z + \varepsilon\varphi + \varepsilon h \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Переход к укороченной системе будет оправдан, если $\omega^2 - \Lambda^2 = O(\varepsilon)$, что соответствует случаю главного резонанса (см. пп. 3.3.2). Учитывая, что

$$\sin \omega t = \sin(z - \beta) = \sin z \cos \beta - \sin \beta \cos z,$$

после осреднения (4.9) по переменной z получаем

$$\begin{aligned} \dot{a}\omega &= -\varepsilon \left[B(a) + \frac{h}{2} \cos \beta \right], \\ a\omega \dot{\beta} &= -\varepsilon \left[A(a) - \frac{h}{2} \sin \beta \right] - \frac{a}{2}(\omega^2 - \Lambda^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В случае $\dot{a} = \dot{\beta} = 0$ решение (4.2) будет периодическим

$$x = a_0 \cos(\omega t + \beta_0), \quad (4.11)$$

где постоянные a_0 и β_0 определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} B(a_0) + \frac{h}{2} \cos \beta_0 &= 0, \\ A(a_0) - \frac{h}{2} \sin \beta_0 + \frac{a_0}{2\varepsilon}(\omega^2 - \Lambda^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Решение (4.11) с точностью до величин $O(\varepsilon)$ совпадает с приближенным решением (3.9).

Если исключить β_0 из системы (4.12), то получится уравнение

$$F(a_0, \omega) = B^2 + \left[A + \frac{a_0}{2\varepsilon}(\omega^2 - \Lambda^2) \right]^2 - \frac{h^2}{4} = 0, \quad (4.13)$$

связывающее амплитуду a_0 периодического решения с его частотой ω . Зависимость a_0 от ω называется *амплитудно-частотной характеристикой*.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(h \sin \omega t - n\dot{x} - bx^3), \quad (4.14)$$

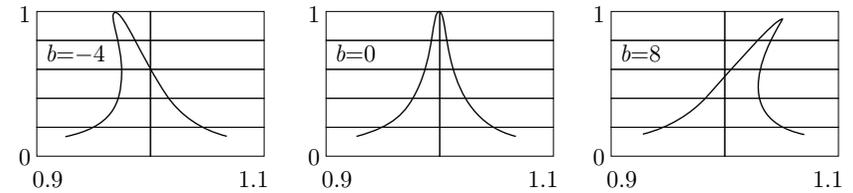


Рис. 3.5

которое по сравнению с уравнением (3.13) содержит в правой части дополнительное слагаемое $-\varepsilon n\dot{x}$, возникающее, в частности, при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости. Функции A и B для уравнения (4.14) находятся по формулам

$$A(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (na\omega \sin z - ba^3 \cos^3 z) \cos z dz = -\frac{3}{8}ba^3,$$

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (na\omega \sin z - ba^3 \cos^3 z) \sin z dz = \frac{na\omega}{2}.$$

Уравнение для определения амплитудно-частотной характеристики имеет вид

$$n^2 a_0^2 \omega^2 + \left[\frac{a_0}{\varepsilon}(\omega^2 - 1) - \frac{3}{4}ba_0^3 \right]^2 - h^2 = 0, \quad a_0 > 0.$$

На рис. 3.5 изображены амплитудно-частотные характеристики для уравнения (4.14) при различных значениях b в случае $h = n = 1$, $\varepsilon = 0.02$.

Случай $b = 0$ соответствует линейному уравнению. Если $b \neq 0$, то при некоторых значениях ω уравнение (4.14) может иметь более одного периодического решения.

3.4.2. Устойчивость стационарных решений

В реальных системах, которые мы описываем с помощью дифференциальных уравнений, обычно имеются малые случайные возмущения. Во многих случаях эти возмущения можно учесть посредством малых изменений начальных условий решения. Если малые изменения начальных

условий приводят к значительным изменениям решения на рассматриваемом промежутке времени, то такое неустойчивое решение плохо описывает реальный процесс. В связи с этим необходимо исследовать поведение решений с начальными условиями, близкими к начальным условиям рассматриваемого решения, т. е. исследовать его устойчивость.

Пусть система (1.1) имеет решение $\mathbf{y}(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Обозначим $\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$, $\boldsymbol{\eta}_0 = \tilde{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{y}_0$, где $\tilde{\mathbf{y}}$ — любое другое решение, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{\mathbf{y}}_0(0) = \tilde{\mathbf{y}}_0$. Решение $\mathbf{y}(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\delta > 0$ можно найти $\delta_0 > 0$ такое, что при условии $|\boldsymbol{\eta}_0| < \delta_0$, при всех значениях t выполняется неравенство $|\boldsymbol{\eta}| < \delta$. Устойчивое решение называется асимптотически устойчивым, если $|\boldsymbol{\eta}| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Исследование устойчивости решений уравнений (4.1), (4.8) является достаточно сложной задачей. В данном разделе мы ограничимся исследованием устойчивости решений укороченных систем (4.7), (4.10). Из устойчивости решения укороченной системы не следует, вообще говоря, устойчивость по Ляпунову соответствующего решения исходного уравнения, тем не менее информация об устойчивости решений укороченных систем может оказаться полезной при решении многих прикладных задач.

Рассмотрим первое из уравнений системы (4.7)

$$\omega \dot{a} = -\varepsilon B(a). \quad (4.15)$$

Исследуем устойчивость стационарного решения $a = a_0$, удовлетворяющего уравнению

$$B(a_0) = 0. \quad (4.16)$$

Для этого рассмотрим решение

$$a = a_0 + \xi \quad (4.17)$$

уравнения (4.15). Подставим (4.17) в (4.15) и разложим правую часть полученного тождества в ряд по степеням ξ . С учетом (4.16) получим:

$$\omega \dot{\xi} = -\varepsilon B_0 \xi + \dots, \quad B_0 = \left. \frac{dB}{da} \right|_{a=a_0}. \quad (4.18)$$

В силу теоремы об устойчивости по линейному приближению нулевое решение уравнения (4.18) будет асимптотически устойчивым, если асимптотически устойчиво нулевое решение линейного уравнения

$$\omega \dot{\xi} = -\varepsilon B_0 \xi. \quad (4.19)$$

Решение уравнения (4.19) имеет вид

$$\xi = C \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\omega} B_0 t\right).$$

Очевидно, что $\xi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $B_0 > 0$. Следовательно, стационарное решение $a = a_0$ будет асимптотически устойчиво, если

$$\left. \frac{dB}{da} \right|_{a=a_0} > 0. \quad (4.20)$$

Для уравнения (3.30)

$$B(a) = \frac{a}{2} \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right).$$

Уравнение $B(a) = 0$ имеет корни $a_0 = 0$ и $a_0 = 2$. Из неравенств

$$\left. \frac{dB}{da} \right|_{a=0} = -\frac{1}{2} < 0, \quad \left. \frac{dB}{da} \right|_{a=2} = 1 > 0$$

вытекает, что тривиальное решение $a_0 = 0$ неустойчиво, а предельный цикл $a_0 = 2$ устойчив.

Исследуем теперь устойчивость стационарных решений укороченной системы (4.10). Запишем эту систему в виде

$$\omega \dot{a} = X(a, \beta), \quad a\omega \dot{\beta} = Y(a, \beta), \quad (4.21)$$

$$X = -\varepsilon \left[B(a) + \frac{h}{2} \cos \beta \right], \quad Y = -\varepsilon \left[A(a) - \frac{h}{2} \sin \beta \right] - \frac{a}{2} (\omega^2 - \Lambda^2).$$

Стационарное решение $a = a_0$, $\beta = \beta_0$ системы (4.21) является решением системы уравнений

$$X(a_0, \beta_0) = 0, \quad Y(a_0, \beta_0) = 0. \quad (4.22)$$

Рассмотрим решение системы (4.21)

$$a = a_0 + \xi, \quad \beta = \beta_0 + \eta. \quad (4.23)$$

Подставим (4.23) в (4.21) и разложим правые части полученной системы в ряды по степеням ξ , η . С учетом (4.22) получим

$$\omega \dot{\xi} = \frac{\partial X}{\partial a} \xi + \frac{\partial X}{\partial \beta} \eta + \dots, \quad a_0 \omega \dot{\eta} = \frac{\partial Y}{\partial a} \xi + \frac{\partial Y}{\partial \beta} \eta + \dots. \quad (4.24)$$

Частные производные в (4.24) вычисляются при $a = a_0$, $\beta = \beta_0$. Из теоремы об устойчивости по линейному приближению следует, что нулевое решение системы (4.24) будет асимптотически устойчиво, если асимптотически устойчиво нулевое решение линейной системы, которая получается из (4.24) отбрасыванием нелинейных членов. В свою очередь нулевое решение линейной системы будет асимптотически устойчиво, если корни Λ_1 и Λ_2 характеристического уравнения

$$\left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial X}{\partial a} - \Lambda\right) \left(\frac{1}{a_0 \omega} \frac{\partial Y}{\partial \beta} - \Lambda\right) - \frac{1}{a_0 \omega^2} \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \quad (4.25)$$

имеют отрицательные вещественные части. Последнее условие будет выполнено, если коэффициенты квадратного уравнения (4.25) положительны, т. е.

$$-\frac{1}{a_0 \omega} \left(a_0 \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial \beta}\right) > 0, \quad \frac{1}{a_0 \omega^2} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial Y}{\partial a}\right) > 0. \quad (4.26)$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} &= -\varepsilon \frac{dB}{da} \Big|_{a=a_0}, & \frac{\partial Y}{\partial \beta} &= \frac{\varepsilon h}{2} \cos \beta_0 = -\varepsilon B(a_0), \\ \frac{\partial Y}{\partial a} &= -\frac{d}{da} \left[\varepsilon B(a) + \frac{a}{2} (\omega^2 - \Lambda^2) \right], \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} &= \frac{\varepsilon h}{2} \sin \beta_0 = -\varepsilon B(a_0) + \frac{a}{2} (\omega^2 - \Lambda^2) \end{aligned}$$

следует, что неравенства (4.26) эквивалентны неравенствам

$$\frac{d(aB)}{da} \Big|_{a=a_0} > 0, \quad \frac{dF}{da} \Big|_{a=a_0} > 0, \quad (4.27)$$

где функция $F(a, \omega)$ определяется по формуле (4.13).

Если выполнены неравенства (4.27), то стационарное решение $a = a_0$, $\beta = \beta_0$ укороченной системы (4.21) является асимптотически устойчивым.

Для уравнения (4.14) функция $B(a) = na\omega/2$, и первое неравенство (4.27) принимает вид $na_0\omega > 0$. Это неравенство будет выполнено для всех стационарных решений, если $n > 0$. Для проверки выполнения второго неравенства (4.27) удобно использовать изображение кривой $F(a, \omega) = 0$ на плоскости (a, ω) . Рассмотрим случай $b > 0$ (рис. 3.6).

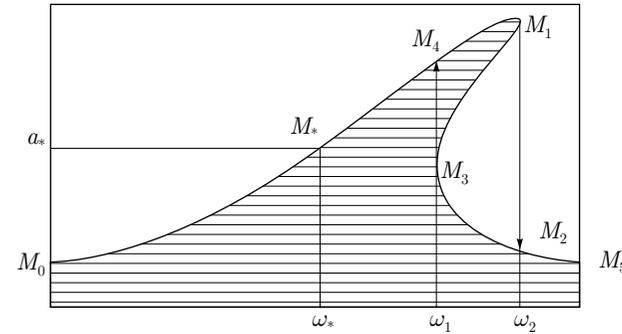


Рис. 3.6

Неравенство $F(a, \omega) < 0$ выполняется в заштрихованной области под кривой, а над кривой имеем $F(a, \omega) > 0$. Рассмотрим точку M_* с координатами (a_*, ω_*) , лежащую на кривой над заштрихованной областью. Очевидно $F < 0$ при $a_* < 0$ и $F > 0$ при $a_* > 0$. Поэтому

$$\frac{dF}{da} > 0 \quad \text{при } a = a_*, \quad \omega = \omega_*,$$

и соответствующее этой точке периодическое решение асимптотически устойчиво. Точкам кривой $F = 0$, лежащим под заштрихованной областью, соответствуют неустойчивые решения. Таким образом, в интервалах $(0, \omega_1)$ и (ω_2, ∞) имеется по одному устойчивому периодическому решению, а в интервале (ω_1, ω_2) — три периодических решения, из которых два устойчивы.

Характер колебаний зависит от того, как меняется ω . Если ω возрастает, то амплитуда меняется по закону, определяемому ломаной линией $M_0M_1M_2M_5$. При $\omega = \omega_2$ происходит резкое уменьшение амплитуды — срыв колебаний. При уменьшении частоты закон изменения амплитуды описывает линия $M_5M_3M_4M_0$. В этом случае скачок амплитуды наблюдается при $\omega = \omega_1$.

3.4.3. Метод многих масштабов

Введем переменные

$$\tau = t, \quad \tau_1 = \varepsilon t, \quad \tau_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

и будем искать решение уравнения (4.1) в виде асимптотического ряда

$$x = x_0(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots) + \varepsilon x_1(\tau, \tau_1, \tau_2, \dots) + \dots \quad (4.28)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + \dots \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_1^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial \tau_2} + \dots\end{aligned}\quad (4.29)$$

Подставим (4.28) в (4.1) и, учитывая (4.29), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях (4.1). Уравнение нулевого приближения

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + \omega^2 x_0 = 0$$

имеет решение

$$x_0 = a \cos z, \quad (4.30)$$

где

$$a = a(\tau_1, \tau_2, \dots), \quad z = \omega\tau + \beta(\tau_1, \tau_2, \dots).$$

Подстановка (4.30) в уравнение первого приближения

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \omega^2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_1} + \varphi \left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right)$$

дает равенство

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \omega^2 x_1 = 2\omega \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \sin z + 2a\omega \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} \cos z + \varphi(a \cos z, -a\omega \sin z). \quad (4.31)$$

Периодическую функцию $\varphi(a \cos z, -a\omega \sin z)$ разложим в ряд Фурье

$$\varphi = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kz + B_k \sin kz).$$

Для того, чтобы в асимптотическом разложении (4.28) отсутствовали вековые члены, необходимо, чтобы коэффициенты при $\sin z$ и $\cos z$ в правой части уравнения (4.31) были равны нулю, что дает

$$2\omega \frac{\partial a}{\partial \tau_1} + B_1(a) = 0, \quad 2a\omega \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} + A_1(a) = 0, \quad (4.32)$$

где

$$\begin{aligned}A_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \cos z, -a\omega \sin z) \cos z dz, \\ B_1(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \cos z, -a\omega \sin z) \sin z dz.\end{aligned}$$

В нулевом приближении следует считать, что $a = a(\tau_1)$, $\beta = \beta(\tau_1)$. Действительно,

$$a(\tau_1, \tau_2, \dots) = a(\tau_1, 0, \dots) + \frac{\partial a}{\partial \tau_2} \tau_2 + \dots = a(\tau_1) + \frac{\partial a}{\partial \tau_2} \varepsilon^2 t + \dots$$

и при $t \sim 1/\varepsilon$ ошибка от замены $a(\tau_1, \tau_2, \dots)$ на $a(\tau_1)$ будет величиной $O(\varepsilon)$. Таким образом, система нулевого приближения (4.32) совпадает с укороченной системой (4.7), полученной методом осреднения. Приближенная формула для решения уравнения (4.1) имеет вид

$$x = a(\varepsilon t) \cos[\omega t + \beta(\varepsilon t)] + O(\varepsilon).$$

Перейдем к построению первого приближения. Для определения решения с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$ следует считать, что $a = a(\tau_1, \tau_2)$, $\beta = \beta(\tau_1, \tau_2)$. Рассматривая τ_2 как параметр, перепишем (4.32) в виде

$$d\tau_1 = -2\omega \frac{da}{B_1(a)}, \quad \frac{d\beta}{d\tau_1} = -\frac{A_1(a)}{2\omega a}.$$

После интегрирования получаем

$$\tau_1 = -2\omega \int \frac{da}{B_1(a)} + c_1(\tau_2), \quad \beta = -\frac{1}{2\omega} \int \frac{A_1(a)}{a} d\tau_1 + c_2(\tau_2). \quad (4.33)$$

Приравняв нулю коэффициенты при $\sin z$ и $\cos z$ в правой части уравнения второго приближения, получим два уравнения для определения функций $c_1(\tau_2)$ и $c_2(\tau_2)$. Более подробно вопрос о построении первого приближения рассмотрим на примере уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Подставив нулевое приближение к решению этого уравнения

$$x_0 = a(\tau_1, \tau_2) \cos[\tau + \beta(\tau_1, \tau_2)] \quad (4.34)$$

в уравнение первого приближения

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_1} + (1 - x_0^2) \frac{\partial x_0}{\partial \tau},$$

после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \omega^2 x_1 = 2 \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \sin z + 2a \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} \cos z + a \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right) \sin z + \frac{a^3}{4} \sin 3z.$$

Уравнения для определения a и β имеют вид:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_1} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} = 0. \quad (4.35)$$

Решения уравнений (4.35)

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + c(\tau_2)e^{-\tau_1}}}, \quad \beta = \beta(\tau_2)$$

выражаются через неизвестные функции $c(\tau_2)$ и $\beta(\tau_2)$. При построении решения с точность до величин $O(\varepsilon)$ полагаем $c(\tau_2) = c_0$, $\beta(\tau_2) = \beta_0$,

$$x = \frac{2 \cos(t + \beta_0)}{\sqrt{1 + c_0 e^{-\varepsilon t}}} + O(\varepsilon). \quad (4.36)$$

Решение (4.36) при $c_0 \neq 0$ представляет собой переходной режим, приближающийся при $t \rightarrow \infty$ к периодическому решению с амплитудой $a = 2$.

Из равенств (4.35) следует, что

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = \frac{a^3}{4} \sin 3z. \quad (4.37)$$

Будем считать, что произвольные постоянные в решении (4.28) являются функциями ε (см. подп. 3.3.2). Тогда x_1 будет частным решением уравнения (4.37) и, следовательно,

$$x_1 = -\frac{a^3}{32} \sin 3z. \quad (4.38)$$

Подставим (4.34) и (4.38) в уравнение второго приближения

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2} + x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau \partial \tau_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau_1^2} + (1 - x_0^2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} \right) - 2x_0 \frac{\partial x_0}{\partial \tau} x_1,$$

представим правую часть в виде линейной комбинации функций $\sin kz$, $\cos kz$ и приравняем нулю коэффициенты при $\sin z$ и $\cos z$. Получим

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_2} = 0, \quad 2a \frac{d\beta}{d\tau_2} + \frac{a^5}{128} - \frac{\partial^2 a}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \left(1 - \frac{3a^2}{4} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Из первого равенства (4.39) следует, что $c(\tau_2) = c_0$, а из второго равенства (4.39) с помощью формулы (4.35) получаем следующее уравнение для определения $\beta(\tau_2)$:

$$\frac{d\beta}{d\tau_2} = \frac{1}{8} \left(-1 + a^2 - \frac{7a^4}{32} \right).$$

Метод многих масштабов является обобщением метода Пуанкаре. Для периодических решений оба метода приводят к одинаковым результатам. В случае $c_0 = 0$ метод многих масштабов дает асимптотическое разложение

$$x \simeq 2 \cos z - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3z, \quad z = t - \frac{\varepsilon^2 t}{16} + \beta_0$$

периодического решения, которое при $\beta_0 = -3\varepsilon/8$ с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$ совпадает с разложением (3.36), полученным методом Пуанкаре.

3.4.4. Упражнения

3.4.1. Методом Ван-дер-Поля найти приближенное решение уравнения

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - \varepsilon bx^3, \quad \varepsilon \ll 1.$$

3.4.2. Исследовать устойчивость стационарных решений уравнения

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^4)\dot{x}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

3.4.3. Записать укороченную систему (4.10) для уравнения

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(h \sin \omega t + \dot{x} - \dot{x}^3/3).$$

3.4.4. Построить амплитудно-частотную характеристику для уравнения

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(h \sin \omega t + 8x\dot{x}^2 - n\dot{x}).$$

3.4.5. Методом многих масштабов построить нулевое и первое приближения для решений уравнений из задачи 3.4.1 при $b = 1$ и задачи 3.4.2.

3.5. Краевые задачи

Ограничимся исследованием краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Неоднородные регулярно возмущенные краевые задачи рассматриваются в пп. 3.5.1. Решение краевых задач на собственные значения обсуждается в разделе 3.5.2. В обоих случаях используются прямые асимптотические разложения. В пп. 3.5.3 для решения краевых задач, описывающих среды с периодической структурой, применяется метод многих масштабов.

3.5.1. Неоднородные краевые задачи

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$Ly = f(x), \quad (5.1)$$

с граничными условиями

$$G_i y \Big|_{x=0} = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \quad H_j y \Big|_{x=l} = h_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_2, \quad (5.2)$$

где $n_1 + n_2 = n$,

$$L = \sum_{k=0}^n a_k(x, \varepsilon) \frac{d^k}{dx^k}, \quad a_n = 1, \quad (5.3)$$

$$G_i = \sum_{k=0}^{n-1} b_{ik} \frac{d^k}{dx^k}, \quad H_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_{jk} \frac{d^k}{dx^k}.$$

Если

$$a_k(x, \varepsilon) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} a_{km}(x) \varepsilon^m, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.4)$$

то

$$L = \sum_{m=0}^{\infty} L_m \varepsilon^m, \quad L_m = \sum_{k=0}^n a_{km} \frac{d^k}{dx^k},$$

и решение краевой задачи (5.1), (5.2) можно искать в виде прямого асимптотического разложения

$$y(x, \varepsilon) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x) \varepsilon^m. \quad (5.5)$$

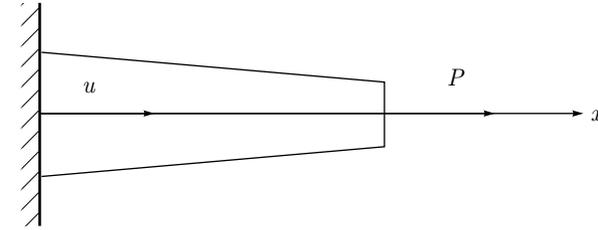


Рис. 3.7

Функция $y_0(x)$ является решением порождающего уравнения

$$L_0 y = f(x) \quad (5.6)$$

и удовлетворяет граничным условиям (5.2). Функция y_m при $m \geq 1$ удовлетворяет уравнению m -го приближения

$$L_0 y_m = - \sum_{k=1}^m L_k y_{m-k}$$

и однородным граничным условиям (5.2)

$$G_i y \Big|_{x=0} = H_j y \Big|_{x=l} = 0.$$

ПРИМЕР 1. Используем асимптотическое разложения (5.5) для определения продольного перемещения $u(x)$ стержня длиной l под действием силы P , приложенной к его концу (рис. 3.7).

Предположим, что площадь поперечного сечения стержня

$$S = S_0(1 - \varepsilon x/l), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (5.7)$$

Функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (5.8)$$

и граничным условиям

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad ES \frac{du}{dx} = P \quad \text{при} \quad x = l, \quad (5.9)$$

где E — модуль Юнга.

Из уравнения (5.8) и второго граничного условия (5.9) следует, что

$$ES \frac{du}{dx} = P, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5.10)$$

Решение уравнения (5.10) ищем в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$$

С учетом (5.7), (5.9) получаем

$$ES_0 \frac{du}{dx} = P, \quad u_0 = \frac{Px}{ES_0}.$$

Функция u_0 описывает продольные перемещения стержня с поперечным сечением постоянной площади S_0 .

Уравнение первого приближения

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{x}{l} \frac{du_0}{dx}$$

с граничным условием $u_1 = 0$ при $x = 0$ имеет решение

$$u_1 = \frac{Px^2}{2lES_0}.$$

Следовательно,

$$u(x) \simeq \frac{Px}{ES_0} \left(1 + \frac{\varepsilon x}{2l}\right).$$

К такому же результату приводит разложение в ряд по малому параметру ε точного решения

$$u = -\frac{Pl}{ES_0\varepsilon} \ln(1 - \varepsilon x/l)$$

данной задачи.

Пример 2. Рассмотрим изгиб балки длиной l под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 3.8).

Уравнение для определения проекций $w(x)$ перемещений балки на ось y имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -q, \quad (5.11)$$

где E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения.

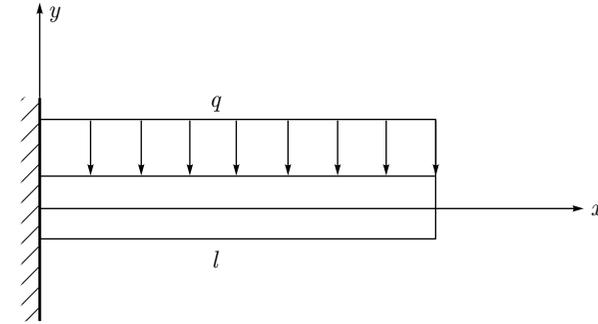


Рис. 3.8

Предположим, что левый конец балки $x = 0$ заделан, а правый ее конец $x = l$ свободен. Тогда

$$w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \quad (5.12)$$

Пусть балка имеет прямоугольное поперечное сечение, причем высота его b_0 постоянна, а ширина a меняется по линейному закону: $a = a_0(1 - \varepsilon x/l)$. В этом случае момент инерции

$$J = \frac{ab_0^3}{12} = J_0 \left(1 - \frac{\varepsilon x}{l}\right), \quad J_0 = \frac{a_0 b_0^3}{12}. \quad (5.13)$$

Решение уравнения (5.11) будем искать в виде

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \quad (5.14)$$

Функция w_0 удовлетворяет уравнению

$$EJ_0 \frac{d^4 w}{dx^4} = -q,$$

общее решение которого

$$w_0 = -\frac{q}{EJ_0} \frac{x^4}{4!} + A \frac{x^3}{3!} + B \frac{x^2}{2!} + Cx + D \quad (5.15)$$

содержит четыре произвольные постоянные A , B , C и D . После определения этих постоянных с помощью граничных условий (5.12) получим

$$w_0 = -\frac{qx^2}{24EJ_0} (x^2 - 4xl + 6l^2).$$

Функция

$$w_1 = -\frac{qx^3}{120EJ_0l}(3x^2 - 10xl + 10l^2)$$

находится после решения уравнения первого приближения

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{x}{l} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \quad (5.16)$$

с граничными условиями (5.12).

3.5.2. Краевые задачи на собственные значения

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$Ly = \Lambda M_0 y \quad (5.17)$$

с однородными граничными условиями

$$G_i y \Big|_{x=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad H_j y \Big|_{x=l} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_2. \quad (5.18)$$

Здесь Λ искомый спектральный параметр, операторы L , G , H определены формулами (5.3),

$$M_0 = \sum_{k=0}^m b_k(x) \frac{d^k}{dx^k}, \quad m < n.$$

Предположим, что имеют место разложения (5.4). Тогда решение краевой задачи (5.17), (5.18) можно представить в виде

$$y(x, \varepsilon) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} y_m(x) \varepsilon^m, \quad \Lambda \simeq \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_m \varepsilon^m. \quad (5.19)$$

Пусть при некотором Λ_0 краевая задача нулевого приближения

$$L_0 y = \Lambda_0 M_0 y, \quad G_i y \Big|_{x=0} = H_j y \Big|_{x=l} = 0 \quad (5.20)$$

имеет нетривиальное решение y_0 .

В первом приближении получим

$$L_0 y_1 - \Lambda_0 M_0 y_1 = -L_1 y_0 + \Lambda_1 M_0 y_0. \quad (5.21)$$

Обозначим (y, z) скалярное произведение функций y и z и предположим, что для любых функций y и z , удовлетворяющих граничным условиям (5.18),

$$(L_0 y, z) = (y, L_0 z), \quad (M_0 y, z) = (y, M_0 z),$$

т. е. операторы L_0 и M_0 являются самосопряженными.

Домножим уравнение (5.21) скалярно на y_0 . В силу самосопряженности L_0 и M_0 получим

$$(y_1, L_0 y_0 - \Lambda_0 M_0 y_0) = -(L_1 y_0, y_0) + \Lambda_1 (M_0 y_0, y_0).$$

Из (5.20) следует, что

$$\Lambda_1 = \frac{(L_1 y_0, y_0)}{(M_0 y_0, y_0)}.$$

Последнее равенство является условием разрешимости краевой задачи первого приближения.

Аналогичным способом определяются Λ_k и y_k при $k > 1$.

ПРИМЕР 3. Используем асимптотический метод для приближенного определения частот и форм продольных колебаний стержня длиной l , площадь поперечного сечения которого меняется по закону (5.7).

Уравнение продольных колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5.22)$$

где ρ — плотность материала. Предположим, что левый конец стержня закреплен, а правый свободен. Тогда

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Решение уравнения (5.22) ищем в виде

$$u(x, t) = u(x) \sin(\omega t + \alpha).$$

Для определения $u(x)$ и ω получаем краевую задачу на собственные значения

$$(Su)' + \Lambda Su = 0, \quad u(0) = u'(l) = 0,$$

где $\Lambda = \rho \omega^2 / E$, штрихом обозначена производная по x .

Уравнение нулевого приближения

$$u_0'' + \Lambda_0 u_0 = 0 \quad (5.23)$$

имеет решение

$$u_0 = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad \alpha^2 = \Lambda.$$

С учетом граничных условий находим

$$u_{0n} = A \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = (\pi/2 + \pi n)/l, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Полученные формы u_{0n} и частоты $\omega_{0n} = \alpha_n \sqrt{E/\rho}$ описывают колебания стержня постоянного поперечного сечения площадью S_0 .

Уравнение первого приближения

$$u_1'' + \Lambda_0 u_1 = u_0'/l - \Lambda_1 u_0$$

умножим на u_0 и проинтегрируем по частям на интервале $[0, l]$. С учетом (5.23) получим

$$\Lambda_1 = \frac{I_1}{II}, \quad I_1 = \int_0^l u_0' u_0 dx, \quad I = \int_0^l u_0^2 dx.$$

Вычислив интегралы, найдем поправку первого приближения $\Lambda_1 = 1/l^2$. Отметим, что в данной задаче Λ_1 не зависит от n .

В том случае, когда в граничные условия (5.18) входит малый параметр, интегрирование по частям уравнения первого приближения может привести к появлению ненулевых внеинтегральных членов.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим продольные колебания стержня, левый конец которого заделан, а правый поджат пружиной жесткости c . Пусть площадь поперечного сечения стержня S_0 не зависит от координаты x . Тогда краевая задача на собственные значения для этого стержня имеет вид

$$u'' + \Lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(l) = -\frac{\varepsilon u(l)}{l}, \quad \varepsilon = \frac{cl}{ES_0}.$$

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$, и будем искать решение краевой задачи в виде (5.19). Решение задачи нулевого приближения совпадает с решением из примера 3. В первом приближении получаем

$$u_1'' + \Lambda_0 u_1 = -\Lambda_1 u_0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(l) = -u_0(l)/l.$$

Умножив уравнение первого приближения на u_0 и проинтегрировав его по частям на интервале $[0, l]$ с учетом равенства (5.23), получим

$$\Lambda_1 \int_0^l u_0^2 dx = -[u_1' u_0 - u_1 u_0']_0^l.$$

Из этой формулы и граничных условий для u_0 и u_1 следует, что

$$\Lambda_1 = 2 \frac{u_0^2(l)}{A^2 l^2} = \frac{2}{l^2}.$$

Регулярно возмущенные краевые задачи на собственные значения возникают, в частности, в теории устойчивости упругих систем.

ПРИМЕР 5. Определим влияние собственного веса вертикально расположенного шарнирно опертого стержня на критическое усилие осевого сжатия T .

Уравнение устойчивости

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho g S \frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right) + T \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

и граничные условия

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \quad (5.24)$$

перепишем в безразмерном виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \varepsilon \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dw}{d\xi} \right) + \Lambda \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0$$

$$w = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = \pi.$$

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$, и будем искать решение в виде (5.19). В нулевом приближении получим классическую задачу Эйлера

$$\frac{d^4 w_0}{d\xi^4} + \Lambda_0 \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} = 0, \quad w = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = \pi.$$

Первому собственному значению $\Lambda_0 = 1$ соответствуют критическое усилие $T = EJ\pi^2/l^2$ и форма потери устойчивости $w_0 = A \sin \xi$. Из уравнения первого приближения

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + \Lambda_0 \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = -\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dw_0}{d\xi} \right) + \Lambda_1 \frac{d^2 w_0}{d\xi^2}$$

определяем $\Lambda_1 = -\pi/2$.

3.5.3. Краевые задачи для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами

Описанный в пп. 3.4.3 метод многих масштабов может использоваться при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с быстроменяющимися периодическими коэффициентами.

В качестве примера рассмотрим задачу о продольной деформации стержня быстропеременной толщины. Уравнение для определения продольных перемещений стержня $u(x)$ под действием приложенной к нему равномерно распределенной нагрузки q имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = q, \quad a = ES > 0. \quad (5.25)$$

Пусть края стержня закреплены. Тогда

$$u(0) = u(l) = 0. \quad (5.26)$$

Предположим, что a периодическая функция переменной $\xi = x/\varepsilon$ с периодом 1, причем $\varepsilon \ll 1$.

Заменим уравнение (5.25) эквивалентной системой двух уравнений первого порядка

$$\frac{du}{dx} = \frac{w}{a}, \quad \frac{dw}{dx} = q. \quad (5.27)$$

Решение краевой задачи (5.26), (5.27) будем искать в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots, \quad (5.28)$$

где

$$u_i(x, \xi + 1) = u_i(x, \xi), \quad w_i(x, \xi + 1) = w_i(x, \xi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Подставим равенства (5.28) в уравнения (5.27). Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{dx} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_i}{\partial \xi}, \\ \frac{dw_i}{dx} &= \frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_i}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

в нулевом приближении получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = 0.$$

Следовательно, $u_0(x, \xi) = u_0(x)$, $w_0(x, \xi) = w_0(x)$.

Система уравнений первого приближения имеет вид

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{w_0}{a}, \quad \frac{dw_0}{dx} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = q. \quad (5.29)$$

Введем обозначение для среднего значения функции $f(x, \xi)$ на периоде

$$\langle f(x, \xi) \rangle = \int_0^1 f(x, \xi) d\xi$$

и применим оператор осреднения $\langle \cdot \rangle$ к уравнениям системы (5.29). С учетом равенств

$$\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right\rangle = 0,$$

вытекающих из периодичности u_1 и w_1 , получим систему

$$\frac{du_0}{dx} = \langle 1/a \rangle w_0, \quad \frac{dw_0}{dx} = q,$$

которая сводится к уравнению

$$\hat{a} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = q, \quad \hat{a} = \langle 1/a \rangle^{-1}. \quad (5.30)$$

Это означает, что в нулевом приближении получается задача об определении перемещений стержня некоторой усредненной постоянной толщины.

Решение уравнения (5.30) с граничными условиями (5.26) имеет вид

$$u_0 = \frac{q}{2a}x(x-l).$$

Описанный метод можно использовать и для решения краевых задач на собственные значения.

Рассмотрим уравнение

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + cu \sum_{i=1}^{n-1} \delta\left(x - \frac{i}{n}\right) = \Lambda u \quad (5.31)$$

с граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (5.32)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция, c — постоянный коэффициент, Λ — искомого собственное значение. К краевой задаче (5.31), (5.32) сводится задача определения частот и форм колебаний струны, подкрепленной $n-1$ пружинами, равномерно расположенными по длине струны.

Предположим, что $n \gg 1$, и введем переменную $\xi = nx$. Учитывая, что $\delta(ax) = \delta(x)/a$, заменим уравнение (5.31) эквивалентным уравнением

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + A(\xi)u = \Lambda u, \quad (5.33)$$

где

$$A(\xi) = cn \sum_{i=1}^{n-1} \delta(\xi - i).$$

Решения (5.33) будем искать в виде асимптотических разложений по отрицательным степеням большого параметра n :

$$u(x, \xi) = u_0(x, \xi) + n^{-2}u_1(x, \xi) + \dots, \quad \Lambda = \Lambda_0 + n^{-2}\Lambda_1 + \dots, \quad (5.34)$$

где $u_i(x, \xi + 1) = u_i(x, \xi)$. В дальнейшем предполагается, что коэффициент c мал, причем $cn \sim 1$.

Подставим (5.34) в (5.33). В нулевом приближении имеем

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = C_0(x).$$

Применим оператор осреднения $\langle \cdot \rangle$ к последнему равенству. В силу периодичности u_0 получим $C_0(x) = 0$, $u_0(x, \xi) = v_0(x)$. Осреднение уравнения первого приближения

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \frac{d^2 v_0}{dx^2} + A(\xi)v_0 = \Lambda_0 v_0 \quad (5.35)$$

с учетом равенства $\langle A(\xi) \rangle = cn$ дает уравнение

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} + (\Lambda_0 - cn)v_0 = 0. \quad (5.36)$$

С физической точки зрения переход от уравнения (5.33) к уравнению (5.36) соответствует замене подкрепляющих струну пружин упругим основанием.

Нетривиальное решение уравнения (5.36), удовлетворяющее граничным условиям $v_0(0) = v_0(1) = 0$, имеет вид $v_{0k} = \sin k\pi x$, а соответствующее собственное число $\Lambda_{0k} = (\pi k)^2 + cn$.

Для построения следующего приближения представим u_1 в виде суммы

$$u_1(x, \xi) = v_1(x) + w_1(x, \xi),$$

где $\langle w_1(x, \xi) \rangle = 0$. Из (5.35) следует, что

$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = cn(i - \xi)v_0 + C_{1i}, \quad i \leq \xi \leq i + 1. \quad (5.37)$$

Осреднив (5.37), получим $C_{1i} = 1/2$. Интегрирование (5.37) по ξ позволяет найти

$$w_1 = cnv_0(2i\xi - \xi^2 + \xi)/2 + D_{1i}, \quad i \leq \xi \leq i + 1.$$

Осреднение последнего равенства дает значение

$$D_{1i} = -\frac{cnv_0}{2} \left[i(i+1) + \frac{1}{6} \right].$$

Следовательно,

$$w_1 = -\frac{cnv_0}{2} \left[(\xi - i)(\xi - i - 1) + \frac{1}{6} \right], \quad i \leq \xi \leq i + 1. \quad (5.38)$$

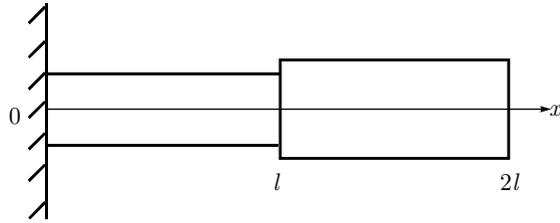


Рис. 3.9

После применения оператора $\langle \cdot \rangle$ к уравнению второго приближения

$$-\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A(\xi)u_1 = \Lambda_0 v_1 + \Lambda_1 v_0$$

получаем уравнение для определения $v_1(x)$:

$$-\frac{d^2 v_1}{dx^2} + (cn - \Lambda_0)v_1 = \frac{c^2 n^2}{12}v_0 + \Lambda_1 v_0.$$

Домножим последнее уравнение на v_0 и проинтегрируем по частям на интервале $(0, 1)$. Принимая во внимание (5.36) и граничные условия $v_1(0) = v_1(1) = 0$, получим поправку первого приближения

$$\Lambda_1 = -\frac{c^2 n^2}{12}.$$

3.5.4. Упражнения

3.5.1. Найти двучленное асимптотическое приближение для перемещений балки, рассмотренной в подп. 3.5.1, в том случае, когда $q = 0$, а к ее правому концу $x = l$ приложена сила P , направленная вертикально вниз. Весом балки пренебречь.

3.5.2. Пусть концы балки, описанной в подп. 3.5.1, шарнирно оперты. Найти два первых члена асимптотического разложения для функции $w(x)$.

3.5.3. В примере 2 из подп. 3.5.2 рассмотреть случай, когда малым параметром является величина $ES_0/(cl)$. Найти Λ_0 и Λ_1 для наименьшего собственного значения соответствующей краевой задачи.

3.5.4. Рассмотрим продольные колебания двух сопряженных стержней, изготовленных из одного материала (рис. 3.9).

Левый конец $x = 0$ первого стержня заделан, правый конец $x = 2l$ второго стержня свободен. Площади поперечных сечений S_1 и S_2 первого и второго стержней связаны соотношением $S_2 = (1 + \varepsilon)S_1$, где $\varepsilon \ll 1$. Найти коэффициенты Λ_0 и Λ_1 разложения в ряд первого собственного значения краевой задачи, описывающей колебания этих двух стержней.

3.5.5. Поперечные колебания балки (см. подп. 3.5.1) описывает уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Представив его решение в виде

$$w(x, t) = w(x) \sin(\omega t + \alpha),$$

для определения частот и форм колебаний получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\beta \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \Lambda \beta w,$$

где

$$\beta = 1 - \varepsilon \frac{x}{l}, \quad \Lambda = \frac{\rho S_0 \omega^2}{EJ_0}, \quad S_0 = a_0 b_0.$$

Предположим, что на краях балки выполнены условия шарнирного опирания (5.24). Представив решение в виде (5.19), найти Λ_0 и Λ_1 для наименьшего собственного значения краевой задачи.

3.5.6. Свободные колебания прямоугольной мембраны описываются уравнением

$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho \omega^2 w = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

где $w(x, y)$ — прогиб мембраны, a , b — длины ее сторон, ω — частота колебаний, T — растягивающее напряжение, ρ — плотность материала.

Граничные условия имеют вид:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b.$$

Предполагая, что $c = \rho/T = c_0[1 + \varepsilon g(x)]$, где ε — малый параметр, найти первые два члена асимптотических разложений для частот колебаний мембраны.

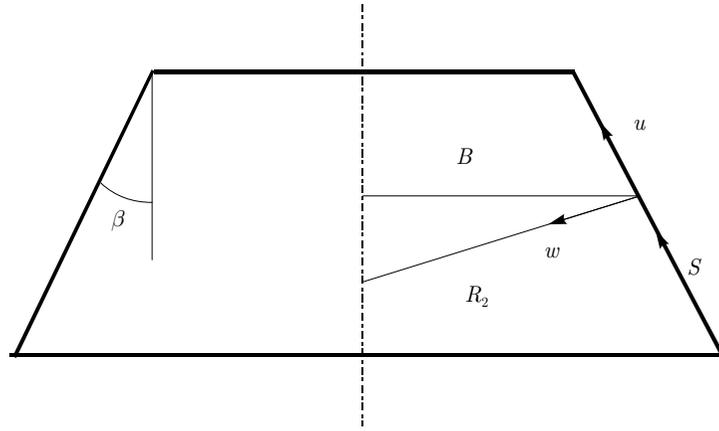


Рис. 3.10

3.5.7. Безразмерная система уравнений

$$u'' + \left(\frac{B'}{B}u\right)' - \frac{\nu}{R_2}w' - \left(\frac{1}{R_2}\right)'w = -\Lambda u, \quad \frac{\nu}{R_2}u' + \frac{B'}{R_2B}u - \frac{w}{R_2^2} = -\Lambda w$$

описывает осесимметричные безмоментные колебания усеченной конической оболочки. Штрихом обозначена производная по безразмерной длине образующей конуса s , u и w — проекции перемещений точек срединной поверхности оболочки, $B(s) = 1 - s \sin \beta$ — расстояние от оси симметрии оболочки до срединной поверхности, $R_2(s) = B(s) \cos^{-1} \beta$ — радиус кривизны, 2β — угол при вершине конуса, ν — коэффициент Пуассона, Λ — искомый спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты. На рис. 3.10 изображено сечение оболочки плоскостью, проходящей через ось симметрии.

В случае жесткой заделки краев оболочки граничные условия для безмоментной системы имеют вид $u(0) = u(l) = 0$. Рассмотрим случай $\beta \ll 1$ и найти два первых члена асимптотического разложения по степеням β для наименьшего собственного значения Λ .

3.5.8. Найти двучленное асимптотическое разложение по степеням параметра $n^{-2} \ll 1$ для функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + cu \sum_{i=1}^{n-1} \delta\left(x - \frac{i}{n}\right) = \sin \pi x,$$

где $c \sim 1/n$, и граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$.

Функция $u(x)$ описывает прогиб подкрепленной пружинами струны под действием распределенной нагрузки.

3.5.9. Найти два первых члена асимптотического разложения по степеням параметра $n^{-4} \ll 1$ для собственного значения Λ краевой задачи

$$\frac{d^4u}{dx^4} + cu \sum_{i=1}^{n-1} \delta\left(x - \frac{i}{n}\right) = \Lambda u,$$

$$u = \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = 1,$$

описывающей свободные колебания шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами. При построении асимптотического разложения считать, что $cn \sim 1$.

3.6. Ответы и решения

3.2.1. Время полета ищем в виде $\tau^* \simeq \tau_0^* + \varepsilon \tau_1^*$. Подставим выражение для τ^* в уравнение

$$\eta \simeq \eta_0 + \varepsilon \eta_1 = 0,$$

где η_0 и η_1 определяются по формулам (2.7), (2.8). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\tau_0^* = \frac{2v_* \sin \alpha}{a}, \quad \tau_1^* = -\frac{(\tau_0^*)^2}{6}, \quad \tau^* \simeq \frac{2v_* \sin \alpha}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon v_* \sin \alpha}{3a}\right).$$

В размерных переменных имеем

$$t^* = T \tau^* \simeq \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \left(1 - \frac{\nu v_0 \sin \alpha}{3mg}\right).$$

Подставив $\tau = \tau^*$ в формулу для ξ , найдем дальность полета

$$\xi^* = \xi(\tau^*) \simeq \xi_0(\tau^*) + \varepsilon \xi_1(\tau^*) \simeq v_* \cos \alpha (\tau_0^* + \varepsilon \tau_1^* - \varepsilon (\tau_0^*)^2 / 2).$$

Следовательно,

$$\xi^* \simeq \tau_0^* v_* \cos \alpha \left(1 - \frac{2\varepsilon \tau_0^*}{3}\right) = \frac{2v_*^2 \sin 2\alpha (3a - 4\varepsilon v_* \sin \alpha)}{3a^2}.$$

Угол α_* определяется из уравнения

$$\frac{d\xi^*}{d\alpha} \simeq \frac{2v_*(3a \cos 2\alpha + \varepsilon v_*(\sin \alpha - 3 \sin 3\alpha))}{3a^2} = 0,$$

приближенное решение которого имеет вид

$$\alpha_* \simeq \frac{\pi}{4} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}v_*}{6a}.$$

3.2.2. Точное решение системы (2.4) с начальными условиями (2.5) при $f(v) \equiv 1$ определяется по следующим формулам:

$$u = v_* e^{-\varepsilon\tau} \cos \alpha, \quad w = v_* e^{-\varepsilon\tau} \sin \alpha + \frac{a}{\varepsilon} (e^{-\varepsilon\tau} - 1),$$

$$\xi = \frac{v_* \cos \alpha}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon\tau}), \quad \eta = \frac{a + \varepsilon v_* \sin \alpha}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\varepsilon\tau}) + \frac{a\tau}{\varepsilon}.$$

3.2.3. Система первого приближения для определения u_1 и w_1 имеет вид:

$$\frac{du_1}{d\tau} = -u_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2}, \quad \frac{dw_1}{d\tau} = -w_0 \sqrt{u_0^2 + w_0^2},$$

причем u_0 и w_0 находятся по формулам (2.7).

Учитывая, что $u_1(0) = w_1(0) = 0$, получаем

$$u_1 = -av_* \cos \alpha I, \quad w_1 = a^2 J - av_* \sin \alpha I,$$

где

$$I = \int_0^\tau s(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left[(\tau + p)s - pq + (p^2 - q^2) \ln \frac{s + \tau + p}{q + p} \right],$$

$$J = \int_0^\tau \tau s(\tau) d\tau = \frac{s(\tau) - q}{3} - pI,$$

$$s(\tau) = \sqrt{\tau^2 + 2p\tau + q^2}, \quad p = -\frac{v_* \sin \alpha}{a}, \quad q = \frac{v_*}{a}.$$

На рис. 3.11 сплошная линия представляет собой график функции u , построенный с помощью численного решения системы (2.4), а штриховая — график соответствующего приближенного асимптотического решения при $a = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $\alpha = \pi/4$, $v_* = 1$.

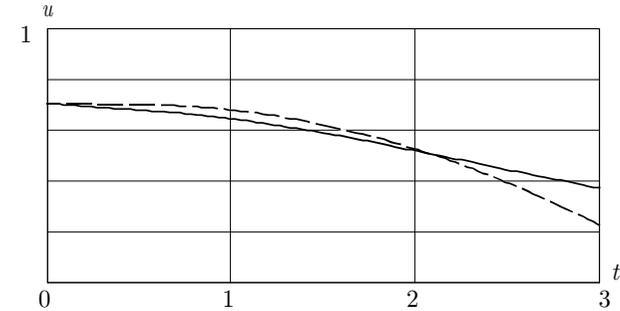


Рис. 3.11

3.2.4. Решение порождающей системы

$$t\dot{x}_0 = x_0, \quad t\dot{y}_0 = (2 - x)y_0$$

с начальными условиями

$$x_0(1) = 1, \quad y_0(1) = e^{-1}$$

имеет вид

$$x_0 = t, \quad y_0 = t^2 e^{-t}.$$

Решение системы первого приближения

$$t\dot{x}_1 = x_1 + y_0, \quad t\dot{y}_1 = (2 - x_0)y_1 - x_1 y_0$$

представляется в виде суммы общего решения однородной системы, совпадающей с порождающей, и частного решения неоднородной системы первого приближения, которое находится методом вариации произвольных постоянных:

$$x_1 = Ct + C_1(t)t, \quad y_1 = Dt^2 e^{-t} + D_1(t)t^2 e^{-t}.$$

После подстановки выражений для x_1 и y_1 в систему первого приближения получаем

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= e^{-t}, & C_1 &= -e^{-t}, \\ \dot{D}_1 &= e^{-t} - e^{-1}, & D_1 &= -e^{-t} - te^{-1}. \end{aligned}$$

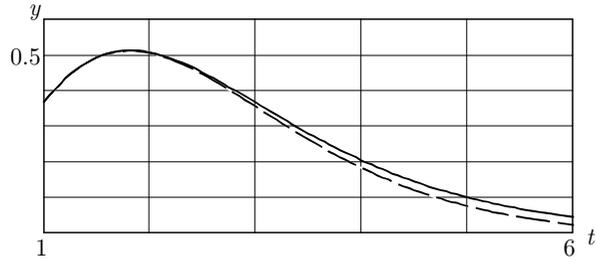


Рис. 3.12

Из начальных условий $x_1(1) = y_1(1) = 0$ находим

$$C = e^{-1}, \quad D = 2e^{-1}.$$

Следовательно,

$$x \simeq x_0 + \varepsilon x_1 = t[1 + \varepsilon(e^{-1} - e^{-t})],$$

$$y \simeq y_0 + \varepsilon y_1 = t^2 e^{-t} [1 + \varepsilon((2-t)e^{-1} - e^{-t})].$$

На рис. 3.12 сплошной линией показано численное решение для функции y , а штриховой линией — приближенное асимптотическое решение при $\varepsilon = 0.5$.

3.2.5. Задача Коши для порождающего уравнения

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$$

с начальными условиями $x_0(0) = 0$, $\dot{x}_0(0) = v_0$ имеет решение

$$x_0 = a \sin z, \quad a = \frac{v_0}{\omega}, \quad z = \omega t.$$

Общее решение уравнения первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = a^3 \omega^2 \cos^2 z \sin z = \frac{a^3}{4} \omega^2 (\sin z + \sin 3z)$$

имеет вид

$$x_1 = M_1 \cos z + N_1 \sin z - \frac{a^3}{32} (4z \cos z + \sin 3z).$$

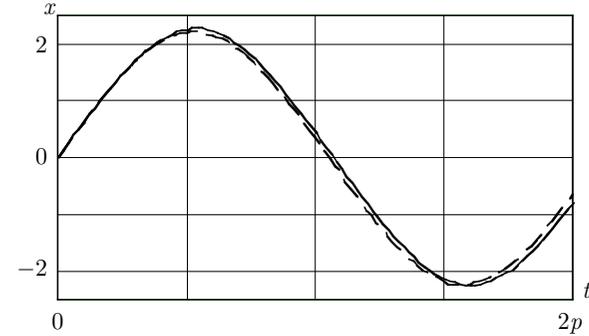


Рис. 3.13

Из начальных условий $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ находим

$$M_1 = 0, \quad N_1 = \frac{7a^3}{32}.$$

Следовательно,

$$x \simeq a \left[\sin z + \frac{\varepsilon a^2}{32} (7 \sin z - \sin 3z - 4z \cos z) \right].$$

Для построения численного решения исходное уравнение удобно заменить системой двух уравнений первого порядка в нормальной форме:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x + \varepsilon y^2 x.$$

На рис. 3.13 сплошная линия представляет собой график численного решения уравнения при $\omega = 1$, $v_0 = 2$, $\varepsilon = 0.1$, штриховая линия — график двучленного асимптотического приближения.

3.2.6. Приближенное решение представляем в виде:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \quad z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots.$$

После подстановки решения в систему с учетом равенств $x_k = y_k = z_k = \dot{x}_k = \dot{y}_k = \dot{z}_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ при $t = 0$, получаем $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = \frac{t^4}{12} \sin \varphi \cos \varphi$, $y_0 = 0$, $y_1 = -\frac{t^3}{3} \cos \varphi$, $z_0 = t^2$.

Для того, чтобы найти точное решение, проинтегрируем первое и третье уравнения системы. Принимая во внимание начальные условия $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$, получаем $\dot{x} = -\varepsilon y \sin \varphi$, $\dot{z} = 2t + \varepsilon y \cos \varphi$. Подставим эти выражения во второе уравнение и преобразуем его:

$$\ddot{y} + \varepsilon^2 y = -2\varepsilon t \cos \varphi.$$

Функция

$$y = \frac{2}{\varepsilon} \cos \varphi \left(\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} - t \right) \simeq -\varepsilon \frac{t^3}{3} \cos \varphi$$

является решением этого уравнения с нулевыми начальными условиями. Из первого и третьего уравнений системы находим

$$x = \left(\frac{\cos \varepsilon t - 1}{\varepsilon^2} - \frac{t^2}{2} \right) \simeq \varepsilon^2 \frac{t^4}{12} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$z = t^2 + 2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\cos \varepsilon t - 1}{\varepsilon^2} - \frac{t^2}{2} \right) \simeq t^2.$$

3.3.1. Уравнение второго приближения

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -3bx_0^2 x_1$$

имеет решение

$$x_2 = \frac{3}{4} b^2 A^5 \left[\left(\frac{9}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{\omega^2 - 9} \right) \frac{\sin t}{4(\omega^2 - 1)} - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\omega^2 - 1} + \frac{2}{\omega^2 - 9} \right) \frac{\sin 3t}{\omega^2 - 9} + \frac{\sin 5t}{4(\omega^2 - 9)(\omega^2 - 25)} \right].$$

3.3.2. Решение уравнения ищем в виде (3.3). Нулевое приближение x_0 при $\omega \neq 1$ определяется по формуле (3.2). Уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -bA^3 \sin t \cos^2 t$$

при $\omega \neq 3$ имеет 2π -периодическое решение

$$x_1 = -\frac{b}{4} A^3 \left(\frac{\sin t}{\omega^2 - 1} + \frac{\sin 3t}{\omega^2 - 9} \right).$$

3.3.3. После подстановки нулевого приближения (3.9) в уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = a \sin t + \delta x_0 + x_0 \dot{x}_0^2$$

получаем

$$\ddot{x}_1 + x_1 = P \cos t + Q \sin t + \frac{1}{4}(3MN^2 - M^3) \cos 3t + \frac{1}{4}(N^3 - 3M^2N) \sin 3t,$$

где

$$P = M \left[\delta + \frac{1}{4}(M^2 + N^2) \right], \quad Q = a + N \left[\delta + \frac{1}{4}(M^2 + N^2) \right].$$

Уравнение для x_1 имеет периодическое решение, если $P = Q = 0$. Предположив, что $M \neq 0$, приходим к противоречию с условием $a \neq 0$. Следовательно, $M = 0$, и для определения N мы получаем кубическое уравнение

$$\frac{1}{4}N^3 + \delta N + a = 0.$$

Пусть N_0 — вещественный корень этого уравнения. Уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{1}{4}N_0^3 \sin 3t$$

имеет решение

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t - \frac{1}{32}N_0^3 \sin 3t.$$

Из условия существования периодического решения уравнения второго приближения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \delta x_1 + \dot{x}_0^2 x_1 + 2x_0 \dot{x}_0 \dot{x}_1$$

получаем два уравнения

$$M_1(\delta + \frac{1}{4}N_0^2) = 0, \quad N_1(\delta + \frac{3}{4}N_0^2) = -\frac{5N_0^5}{128}.$$

Из первого уравнения и условия $a \neq 0$ следует, что $M_1 = 0$. Из второго уравнения при $\delta \neq -3N_0^2/4$ находим

$$N_1 = -\frac{5N_0^5}{32(4\delta + 3N_0^2)}.$$

3.3.4. Порождающее уравнение

$$\ddot{x}_0 + 9x_0 = h \sin t$$

имеет семейство 2π -периодических решений

$$x_0 = M \cos 3t + N \sin 3t + H \sin t, \quad H = h/8.$$

Постоянные M и N находятся из условия существования периодического решения уравнения первого приближения

$$\ddot{x}_1 + 9x_1 = \delta x_0 - bx_0^3.$$

Подставив в это уравнение выражение для x_0 , разложим правую часть в ряд Фурье и приравняем нулю коэффициенты при $\cos 3t$ и $\sin 3t$. Получим

$$\frac{3bM}{4}(M^2 + N^2 + 2H^2) - \delta M = 0, \quad \frac{3bN}{4}(M^2 + N^2 + 2H^2) - \delta N - \frac{b}{4}H^3 = 0.$$

Предположив, что $M \neq 0$, мы приходим к противоречию с условием $h \neq 0$. Следовательно, $M = 0$, и для определения N мы имеем кубическое уравнение

$$3bN^3 + (6bH^2 - 4\delta)N - bH^3 = 0.$$

Пусть N_0 — вещественный корень этого уравнения. Тогда

$$x_0 = N_0 \sin 3t + H \sin t.$$

3.3.5.

1). После замены переменной (3.20) уравнение примет вид: $\ddot{x} + g^2x = \varepsilon g(1 - x^4)\dot{x}$, $(\dot{}) \equiv d()/d\tau$. Его решение ищем в виде (3.22). Подставив решение порождающего уравнения (3.24) в уравнение первого приближения $\ddot{x}_1 + x_1 = \varepsilon(1 - x_0^4)\dot{x}_0 - 2g_1x_0$, из условия существования 2π -периодического решения $x_1(\tau)$ получим $\left(\frac{M^4}{8} - 1\right)M = 0$, $2g_1M = 0$.

Периодическому решению соответствует $M = M_0 = \sqrt[4]{8}$, $g_1 = 0$. Решение уравнения первого приближения $\ddot{x}_1 + x_1 = (1/2)M_0(3 \sin 3\tau + \sin 5\tau)$ имеет вид:

$$x_1 = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau - \frac{3}{16}M_0 \sin 3\tau - \frac{1}{48}M_0 \sin 5\tau.$$

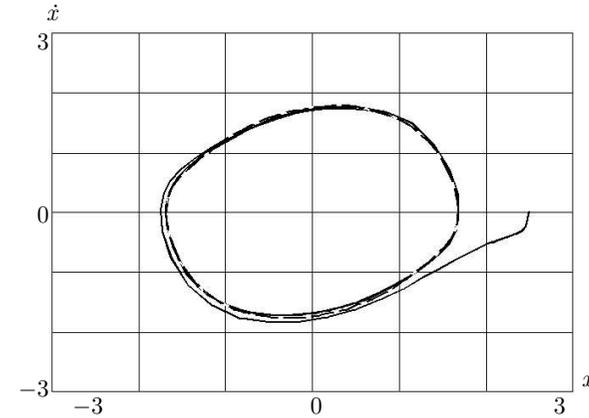


Рис. 3.14

Из условия $\dot{x}_1 = 0$ при $\tau = 0$ находим $N_1 = 2M_0/3$. Постоянные M_1 и g_2 определяются из условия существования периодического решения уравнения второго приближения

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2g_2x_0 + (1 - x_0^4)\dot{x}_1 - 4x_0^3\dot{x}_0x_1.$$

После преобразований получим $M_1 = 0$, $g_2 = 7/48$.

На рис. 3.14 штриховой линией изображен предельный цикл, построенный с использованием двучленного асимптотического приближения при $\varepsilon = 0.2$. Сплошная линия представляет собой фазовую траекторию, полученную при помощи численного интегрирования задачи Коши с начальными условиями $x = 2.5$, $\dot{x} = 0$.

2). Замена переменной (3.20) приводит уравнение к виду $\ddot{x} + g^2x = \varepsilon g(1 - x^2)\dot{x} - \varepsilon g^2x^3$. Из условия существования 2π -периодического решения уравнения первого приближения $\ddot{x}_1 + x_1 = (1 - x_0^2)\dot{x}_0 - 2g_1x_0 - x_0^3$, где $x_0 = M \cos \tau$, получаем $M = 2$, $g_1 = -3/2$. Функции x_0 и $x_1 = M_1 \cos \tau - \frac{3}{4} \sin \tau + \frac{1}{4}(\cos 3\tau - \sin 3\tau)$ подставим в уравнение

второго приближения

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -2g_1 x_1 x_0 + (1 - x_0^2) \left(\frac{dx_1}{d\tau} + g_1 \frac{dx_0}{d\tau} \right) - x_0(2g_2 + g_1^2 + 2x_0 \frac{dx_0}{d\tau} x_1 + 3x_0 x_1 + 2g_1 x_0^2).$$

Условия существования периодического решения дают систему для определения M_1 и g_2 :

$$6M_1 + 4g_2 = 13, \quad 2M_1 = -1,$$

которая имеет решение $M_1 = -1/2$, $g_2 = 4$.

3.4.1. Решение уравнения ищем в виде (4.2) $x = a(t) \cos z$, $z = t + \beta(t)$. Укороченная система

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \quad \dot{\beta} = -\frac{3\varepsilon}{8} b a^2$$

имеет решение

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + c_0 e^{-\varepsilon t}}}, \quad \beta = \frac{3b}{2} \ln(e^{\varepsilon t} + c_0) + \beta_0,$$

где c_0, β_0 — произвольные постоянные. При $t \rightarrow \infty$ $a \rightarrow 2$, т. е. стационарное решение $a = 2$ устойчиво.

3.4.2. В рассматриваемом случае уравнение (4.15) имеет вид:

$$\dot{a} = -\varepsilon B(a), \quad B(a) = \frac{a}{2} \left(\frac{a^4}{8} - 1 \right).$$

Стационарные решения $a = 0$ и $a = a_0 = \sqrt[4]{8}$ соответствуют положению равновесия и предельному циклу. Используя условие (4.20), получаем, что положение равновесия неустойчиво, а предельный цикл устойчив, так как

$$\left. \frac{dB}{da} \right|_{a=0} = -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{dB}{da} \right|_{a=a_0} = 2.$$

3.4.3.

$$\dot{a}\omega = \varepsilon \left[\frac{a\omega}{2} \left(1 - \frac{a^2\omega^2}{4} \right) - \frac{h}{2} \cos \beta \right],$$

$$a\omega\dot{\beta} = \frac{\varepsilon h}{2} \sin \beta - \frac{a}{2}(\omega^2 - 1).$$

3.4.4. Для рассматриваемого уравнения

$$A(a) = a^3, \quad B(a) = na\omega/2.$$

Подставив эти выражения в (4.13), получим уравнение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)

$$n^2 a_0^2 \omega^2 + \left[2a_0^3 + \frac{a_0}{\varepsilon} (\omega^2 - 1) \right]^2 - h^2 = 0.$$

Для построения АЧХ на плоскости (ω, a) необходимо найти все вещественные значения a_0 , удовлетворяющие уравнению АЧХ при различных значениях ω . Как уже отмечалось (см. пп. 3.4.1), построение АЧХ с помощью данного метода оправдано лишь в малой окрестности прямой $\omega = 1$. Вычисление a_0 при заданном ω сводится к решению кубического уравнения. Более удобным способом построения АЧХ является определение ω по заданному значению a_0 , так как для этого достаточно найти корни квадратного уравнения.

Введем новые переменные $y = \omega^2$, $\xi = a^2$. Тогда уравнение АЧХ можно преобразовать к виду $y^2 - py + q = 0$, где $p = 2\gamma - n^2\varepsilon^2$, $q = \gamma^2 - \varepsilon^2 h^2 / \xi$, $\gamma = 1 - 2\varepsilon\xi$. Корни последнего уравнения $y_{1,2} = (p \pm \sqrt{D})/2$, $D = \varepsilon^2(4h^2/\xi - 4\gamma n^2 + \varepsilon^2 n^4)$ будут вещественны и положительны при $0 < \xi \leq \xi_1$, где $\xi_1 = (c - \sqrt{c^2 - 8\varepsilon h^2/n^2})/(4\varepsilon)$ — корень уравнения $D(\xi) = 0$, $c = 1 - \varepsilon^2 n^2/4$. Кривые $y_1(\xi)$ и $y_2(\xi)$ пересекаются в точке $\xi = \xi_1$ и представляют собой АЧХ на плоскости (ξ, y) . Для построения АЧХ на плоскости (a, ω) следует вернуться к исходным переменным a и ω .

На рис. 3.15 изображена АЧХ при $h = 1$, $n = 1$, $\varepsilon = 0.02$.

3.4.5. 1) Решение уравнения $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} - \varepsilon b x^3$ ищем в виде (4.28), где $x_0 = a(\tau_1, \tau_2) \cos z$, $z = \tau + \beta(\tau_1, \tau_2)$. Уравнение первого приближения

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_1} + (1 - x_0^2) \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - x_0^3$$

имеет периодическое решение $x_1 = \frac{a^3}{32} (\cos 3z - \sin 3z)$ в том случае, когда

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_1} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} = \frac{3}{8} a^2,$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + c_0(\tau_2) e^{-\tau_1}}}, \quad \beta = \frac{3}{2} \ln[e^{\tau_1} + c_0(\tau_2)] + \beta_0(\tau_2).$$

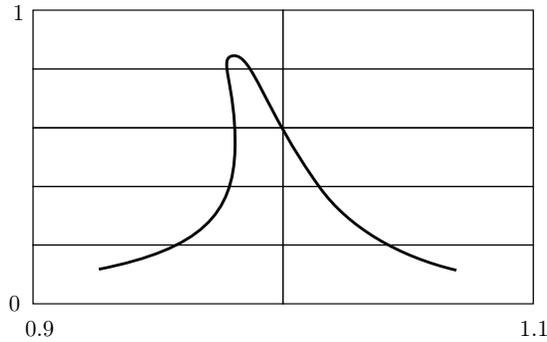


Рис. 3.15

Из условия существования периодического решения уравнения второго приближения

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2} + x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau \partial \tau_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau_1^2} + (1 - x_0^2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} \right) - 2x_0 \frac{\partial x_0}{\partial \tau} x_1 - 3x_0^2 x_1$$

получаем

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_2} = \frac{a^3}{32}(a^2 - 6), \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau_2} = \frac{1}{8} \left(-1 + a^2 - \frac{11a^4}{16} \right).$$

С помощью первого уравнения находится функция $c_0(\tau_2)$, с помощью второго — $\beta_0(\tau_2)$

2) Для уравнения $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^4)\dot{x}$ в первом приближении имеем

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_1} + (1 - x_0^4) \frac{\partial x_0}{\partial \tau}.$$

Уравнения для определения зависимости a и β от τ_1

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_1} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^4}{8} \right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} = 0,$$

имеют решения $a^4 = \frac{8}{1 + c_0(\tau_2)e^{-2\tau_1}}$, $\beta = \beta_0(\tau_2)$.

Периодические решения уравнений нулевого и первого приближений $x_0 = a \cos z$, $x_1 = -\frac{a^5}{128} \left(\frac{\sin 5z}{3} + 3 \sin 3z \right)$ подставим в правую часть уравнения второго приближения

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2} + x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau \partial \tau_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau_1^2} + (1 - x_0^4) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} \right) - 4x_0^3 \frac{\partial x_0}{\partial \tau} x_1$$

и приравняем нулю коэффициенты при $\sin z$ и $\cos z$. Получим

$$\frac{\partial a}{\partial \tau_2} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau_2} = -\frac{1}{8} + \frac{3a^4}{4 \cdot 8} - \frac{37}{48} \left(\frac{a^4}{8} \right)^2.$$

Из первого уравнения следует, что c_0 не зависит от τ_2 , из второго уравнения находится $\beta_0(\tau_2)$.

3.5.1. Краевую задачу для рассматриваемого примера запишем в виде $(EJw'')'' = 0$, $w = w' = 0$ при $x = 0$, $w'' = 0$, $(EJw'')' = P$ при $x = l$, где момент инерции J определяется по формуле (5.13). Интегрирование уравнения изгиба с учетом граничных условий при $x = l$ дает $EJw'' = P(x-l)$ $0 \leq x \leq l$. Представим w в виде (5.14). Тогда $EJ_0 w_0'' = P(x-l)$, и, следовательно, $w_0 = \frac{Px^2}{6EJ_0}(x-3l)$.

Уравнение первого приближения $\frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{x}{l} \frac{d^2 w_0}{dx^2}$ имеет решение $w_1 = \frac{Px^3}{12EJ_0}(x-2l)$.

3.5.2. После определения с помощью граничных условий $w_0 = w_0'' = 0$ при $x = 0$, $x = l$ постоянных A, B, C, D в (5.15) получим $w_0 = -\frac{qx}{24EJ_0}(x^3 - 2x^2l + l^3)$. Решение уравнения (5.16) в этом случае имеет вид: $w_1 = -\frac{qx}{120EJ_0l}(3x^4 - 5x^3l + 2l^4)$.

3.5.3. Введем обозначение $\varepsilon = ES_0/(cl) \ll 1$ и будем искать решение краевой задачи

$$u'' + \Lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = -\varepsilon l u'(l)$$

в виде (5.19). Наименьшее собственное значение Λ_0 задачи нулевого приближения

$$u_0'' + \Lambda_0 u = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(l) = 0$$

определяется по формуле $\Lambda_0 = \alpha^2$, где $\alpha = \pi/l$, а соответствующая форма колебаний имеет вид $u = \sin \alpha x$.

Принимая во внимание граничные условия первого приближения

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(l) = -lu'_0(l),$$

получаем

$$\Lambda_1 = -\frac{2}{l}[u'_1 u_0 - u_1 u'_0]_0^l = -\frac{2\pi^2}{l^2}.$$

3.5.4. Уравнения, описывающие продольные колебания стержней, имеют вид

$$\frac{d^2 u^{(k)}}{dx^2} + \Lambda u^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2,$$

где $u^{(k)}$ — перемещения точек k -го стержня. Решения этих уравнений удовлетворяют граничным условиям

$$u^{(1)}(0) = 0, \quad u^{(1)}(l) = u^{(2)}(l), \quad \frac{du^{(1)}}{dx}(l) = (1 + \varepsilon) \frac{du^{(2)}}{dx}(l), \quad \frac{du^{(2)}}{dx}(2l) = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$u^{(k)} = u_0^{(k)} + u_1^{(k)} + \dots, \quad \Lambda_0 + \Lambda_1 \varepsilon + \dots$$

Краевая задача нулевого приближения

$$\frac{d^2 u_0^{(k)}}{dx^2} + \Lambda_0 u_0^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$u_0^{(1)}(0) = 0, \quad u_0^{(1)}(l) = u_0^{(2)}(l), \quad \frac{du_0^{(1)}}{dx}(l) = \frac{du_0^{(2)}}{dx}(l), \quad \frac{du_0^{(2)}}{dx}(2l) = 0$$

имеет решение

$$\Lambda_0 = \alpha^2, \quad u_0^{(1)} = u_0^{(2)} = \sin \alpha x.$$

Для первого собственного значения $\alpha = \pi/(4l)$.

Умножив уравнения первого приближения

$$\frac{d^2 u_1^{(k)}}{dx^2} + \Lambda_0 u_1^{(k)} = -\Lambda_1 u_0^{(k)}, \quad k = 1, 2,$$

на $u_0^{(k)}$ и проинтегрировав по частям на интервалах $[0, l]$, для $k = 1$ и $[l, 2l]$ для $k = 2$, получим равенства

$$\Lambda_1 I_1 = - \left[\frac{du_1^{(1)}}{dx} u_0^{(1)} - \frac{du_0^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} \right]_0^l, \quad \Lambda_1 I_2 = - \left[\frac{du_1^{(2)}}{dx} u_0^{(2)} - \frac{du_0^{(2)}}{dx} u_1^{(2)} \right]_l^{2l},$$

где

$$I_1 = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{4l} dx, \quad I_2 = \int_l^{2l} \sin^2 \frac{\pi x}{4l} dx.$$

Сложение полученных равенств с учетом граничных условий первого приближения

$$u_1^{(1)}(0) = 0, \quad u_1^{(1)}(l) = u_1^{(2)}(l), \quad \frac{du_1^{(1)}}{dx}(l) = \frac{du_1^{(2)}}{dx}(l) + \frac{du_0^{(2)}}{dx}(l), \quad \frac{du_1^{(2)}}{dx}(2l) = 0$$

дает формулу

$$\Lambda_1 (I_1 + I_2) = - \frac{du_0^{(2)}}{dx}(l) u_0^{(2)}(l),$$

из которой следует, что

$$\Lambda_1 = - \frac{\pi}{8l^2}.$$

3.5.5. В нулевом приближении получаем задачу о колебаниях балки постоянного поперечного сечения $w_0'''' - \Lambda_0 w_0 = 0$, $w_0 = w_0'' = 0$ при $x = 0, l$. Первому собственному значению $\Lambda_0 = \alpha_0^4$, где $\alpha_0 = \pi/l$, соответствует форма колебаний $w_0 = A \sin \alpha_0 x$. Из уравнения первого приближения $w_1'''' - \Lambda_0 w_1 = \frac{2}{l} w_0'''' + \Lambda_1 w_0$ находим $\Lambda_1 = 0$.

3.5.6. После разделения переменных

$$w(x, y) = w(x) \sin \beta y, \quad \beta = \frac{\pi n}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

для определения функции $w(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [\Lambda(1 + \varepsilon g - \beta^2)] w = 0, \quad \Lambda = c_0 \omega^2$$

и граничные условия

$$w(0) = w(a) = 0.$$

Решение краевой задачи ищем в виде (5.19). Задача нулевого приближения

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} + (\Lambda_0 - \beta^2)w_0 = 0, \quad w_0(0) = w_0(a) = 0$$

имеет нетривиальное решение

$$w_0 = A \sin \alpha x, \quad \alpha = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 1, 2, \dots$$

при

$$\Lambda_0 = \alpha^2 + \beta^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Из условия разрешимости уравнения первого приближения

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + (\Lambda_0 - \beta^2)w_1 + \Lambda_1 w_0 + \Lambda_0 g w_0 = 0$$

находим

$$\Lambda_1 = -\frac{2\Lambda_0}{a} \int_0^a g \sin^2 \alpha x dx.$$

3.5.7. Коэффициенты системы уравнений разложим в ряды по степеням β и отбросим члены, содержащие β^m , если $m > 1$. Получим систему

$$\begin{aligned} u'' - \beta u' - \nu(1 + s\beta)w' - \beta w &= -\Lambda u, \\ \nu(1 + s\beta)u' - \beta u - (1 + 2\beta s)w &= -\Lambda w, \end{aligned}$$

решение которой представим в виде $u = u_0 + \beta u_1$, $w = w_0 + \beta w_1$, $\Lambda = \Lambda_0 + \beta \Lambda_1$. В нулевом приближении имеем систему уравнений $u_0'' - \nu w_0' = -\Lambda_0 u_0$, $\nu u_0' - w_0 = -\Lambda_0 w_0$, описывающую безмоментные колебания цилиндрической оболочки и эквивалентную уравнению

$$u_0'' + \alpha^2 u_0 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{(1 - \Lambda_0)\Lambda_0}{1 - \nu^2 - \Lambda_0}.$$

Учитывая граничные условия $u_0(0) = u_0(l) = 0$, находим $u_{0n} = \sin[\alpha_n(s-l)]$, $\alpha_n = \pi n/l$, $n = 1, 2, \dots$. Наименьшему значению

$$\Lambda_0 = \left(1 + \alpha_1^2 - \sqrt{(1 + \alpha_1^2)^2 - 4(1 - \nu^2)\alpha_1^2} \right) / 2$$

соответствует форма колебаний

$$u_0 = \sin[\alpha_1(s-l)], \quad w_0 = \frac{\nu\alpha_1}{1 - \Lambda_0} \cos[\alpha_1(s-l)].$$

Рассмотрим систему уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} u_1'' - \nu w_1' + \Lambda_0 u_1 &= u_0' + \nu s w_0' - \Lambda_1 u_0 + w_0, \\ \nu u_1' - w_1 + \Lambda_0 w_1 &= -\nu s u_0' + u_0 + 2s w_0 - \Lambda_1 w_0. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на u_0 , второе — на w_0 , просуммируем их и проинтегрируем полученное равенство по частям в промежутке $[0, l]$. Учитывая граничные условия и систему уравнений нулевого приближения, получим уравнение

$$\Lambda_1 I_0 = \int_0^l (u_0' u_0 + \nu s w_0' u_0 + 2w_0 u_0 - \nu s u_0' w_0 + 2s w_0^2) ds,$$

где

$$I_0 = \int_0^l (u_0^2 + w_0^2) ds = \frac{l}{2} \left[1 + \left(\frac{\nu\alpha_1}{1 - \Lambda_0} \right)^2 \right].$$

После вычисления интеграла найдем

$$\Lambda_1 = \frac{\Lambda_0^2 \nu^2 l^2}{2I_0(1 - \nu^2 - \Lambda_0)(1 - \Lambda_0)}.$$

3.5.8. При построении асимптотического разложения воспользуемся методом, применявшимся в подп. 3.5.3 для решения уравнения (5.31). Представив решение в виде (5.34), вместо уравнения (5.36) для определения v_0 получим уравнение $-v_0'' + cnv_0 = \sin \pi x$, решение которого $v_0 = \sin \pi x / (\pi^2 + cn)$ удовлетворяет граничным условиям $v_0(0) = v_0(1) = 0$. Для функции $w_1(x, \xi)$ снова получим выражение (5.38). Уравнение $-v_1'' + cnv_1 = c^2 n^2 v_0 / 12$ имеет решение

$$v_1 = \frac{c^2 n^2 v_0}{12(\pi^2 + cn)}.$$

Следовательно,

$$u(x) \simeq \frac{\sin \pi x}{\pi^2 + cn} \left\{ 1 - \frac{c}{2n} \left[(\xi - i)(\xi - i - 1) + \frac{1}{6} \right] + \frac{c^2 n}{12(\pi^2 + cn)} \right\},$$

$$i \leq \xi \leq i + 1, \quad \xi = nx.$$

3.5.9. Представим решение краевой задачи в следующем виде:

$$u = v_0(x) + n^{-4}[v_1(x) + w_1(x, \xi)] + \dots, \quad \langle w_1(x, \xi) \rangle = 0,$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + n^{-4}\Lambda_1 + \dots, \quad \xi = nx.$$

С помощью осреднения уравнения первого приближения получим уравнение

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} + (cn - \Lambda_0)v_0 = 0,$$

описывающее колебания балки на упругом основании. Приняв во внимание граничные условия

$$v_0 = \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = 1,$$

найдем собственные числа $\Lambda_{0k} = (\pi k)^4 + cn$ и собственные функции $v_{0k} = \sin k\pi x$ краевой задачи нулевого приближения.

Уравнение для определения $w_1(x, \xi)$ имеет вид

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} = cnv_0 \left[1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta(\xi - i) \right].$$

Проинтегрировав его по ξ , получим

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} = cn(i - \xi)v_0 + C_{1i}.$$

Осреднив последнее равенство, найдем $C_{1i} = 1/2$. Продолжив интегрирование по ξ в сочетании с осреднением, определим

$$w_1(x, \xi) = cnv_0[(\xi - i)^2(\xi - i - 1)^2 - 1/720], \quad i \leq \xi \leq i + 1.$$

Применение оператора осреднения к уравнению второго приближения дает уравнение

$$\frac{d^4 v_1}{dx^4} + cnv_1 - \frac{c^2 n^2}{720}v_0 = \Lambda_0 v_1 + \Lambda_1 v_0,$$

с помощью которого отыскивается $\Lambda_1 = -c^2 n^2 / 720$.

ГЛАВА 4

Сингулярно возмущенные линейные системы

В этой главе изучаются системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с малым параметром μ при производных [4, 5, 8, 9, 17, 18]. Сингулярное возмущение характеризуется тем, что при $\mu = 0$ образуется система дифференциальных уравнений меньшего порядка или даже алгебраическая система уравнений. При отсутствии точек поворота строится асимптотическое разложение фундаментальной системы решений при $\mu \rightarrow 0$.

Обсуждаются методы асимптотического решения линейных краевых задач и задач на собственные значения. В качестве примеров рассматриваются одномерные задачи равновесия, динамики и устойчивости твердых и упругих тел.

4.1. Интегралы линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производных

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка n

$$M_\mu y = \sum_{k=0}^n \mu^k a_k(x, \mu) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad \mu > 0, \quad (1.1)$$

$$a_k(x, \mu) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j a_{kj}(x), \quad \mu \rightarrow 0, \quad x \in S$$

в вещественной или комплексной области S в предположении, что коэффициенты $a_{kj}(x)$ голоморфны в S . Уравнение (1.1) введением дополнительных неизвестных функций

$$y_j = \mu^j \frac{d^j y}{dx^j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

может быть приведено к системе уравнений, однако для наглядности оно изучается отдельно.

4.1.1. Случай простых корней характеристического уравнения

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$y(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(x) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \lambda(x) dx\right). \quad (1.2)$$

После подстановки в (1.1) и приравнивания нулю коэффициентов при μ^k получим систему уравнений для определения неизвестных функций $\lambda(x)$ и $u_k(x)$ в виде

$$P_0 u_0 = 0, \quad (1.3)$$

$$P_0 u_1 + P_0^{(1)} u_0' + \frac{1}{2} P_0^{(2)} \lambda' u_0 + P_1 u_0 = 0, \quad (') = \frac{d}{dx}, \quad (1.4)$$

$$P_0 u_2 + P_0^{(1)} u_1' + \frac{1}{2} P_0^{(2)} \lambda' u_1 + P_1 u_1 + \frac{1}{2} P_0^{(2)} u_0'' + \frac{1}{2} P_0^{(3)} \lambda' u_0' + \frac{1}{6} P_0^{(3)} \lambda'' u_0 + \frac{1}{8} P_0^{(4)} (\lambda')_2 u_0 + P_1^{(1)} u_0' + \frac{1}{2} P_1^{(2)} \lambda' u_0 + P_2 u_0 = 0, \dots, \quad (1.5)$$

где через $P_k^{(m)}$ обозначены многочлены по λ с коэффициентами, зависящими от x , и их производные порядка m по λ :

$$P_j = P_j(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n a_{kj}(x) \lambda^k, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$P_j^{(m)} = P_j^{(m)}(x, \lambda) = \frac{d^m P_j}{d\lambda^m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Интерес представляют только ненулевые решения уравнения (1.1), поэтому уравнение (1.3) дает характеристическое уравнение

$$P_0(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n a_{k0}(x) \lambda^k = 0 \quad (1.7)$$

для определения λ . При $a_{n0}(x) \neq 0$ уравнение (1.7) имеет n корней

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x). \quad (1.8)$$

Пусть $\lambda(x)$ — простой корень уравнения (1.7), ($P_0^{(1)}(x, \lambda(x)) \neq 0$ при $x \in S$.) Тогда уравнения (1.4), (1.5), ... имеют голоморфные в S решения $u_0(x), u_1(x), \dots$. Следовательно, может быть построен ряд (1.2) с голоморфными коэффициентами $u_k(x)$, обращающий в тождество уравнение (1.1). Такой ряд называется формальным асимптотическим решением. Далее ограничимся построением таких решений, оставляя в стороне вопрос о существовании точных решений, для которых построенные решения являются их асимптотическими разложениями.

Если все n корней (1.8) уравнения (1.7) являются простыми, таким способом можно построить n линейно независимых решений уравнения (1.1).

Найдем асимптотическое разложение (1.2) линейно независимых решений уравнения

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho(x) y = 0, \quad \rho(x) > 0, \quad (1.9)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, а функция $\rho(x)$ голоморфна. К этому уравнению сводится задача о свободных колебаниях струны с переменной по длине линейной плотностью (см. подп. 4.4.3).

Характеристическое уравнение (1.7) принимает вид $\lambda^2 + \rho(x) = 0$ и имеет решения $\lambda(x) = \pm iq(x)$, $q(x) = (\rho(x))^{1/2}$. Построим решение, соответствующее корню $\lambda(x) = iq(x)$. Второе решение будет комплексно сопряженным. Уравнения (1.4), (1.5), ... дают:

$$2qu_n' + u_n q' = iu_{n-1}'', \quad n = 0, 1, \dots, \quad u_{-1} = 0, \quad (') = \frac{d}{dx}. \quad (1.10)$$

Решая последние, находим

$$u_0 = (\rho(x))^{-1/4}, \quad u_{n+1} = \frac{i}{2} u_0(x) \int_{x_0}^x u_0(\xi) u_n''(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.11)$$

где нижний предел интегрирования x_0 произволен и может выбираться из соображений удобства.

В частном случае $\rho(x) = 1 + \alpha x$ имеем

$$u_n = (-i\alpha)^n b_n (\rho(x))^{-\beta_n}, \quad (1.12)$$

где

$$b_0 = 1, \quad b_n = \frac{(6n-5)(6n-1)}{48n} b_{n-1}, \quad \beta_n = \frac{1}{4} + \frac{3n}{2}.$$

Ясно, что ряд (1.2) расходится, ибо отношение последующего члена к предыдущему стремится к бесконечности вместе с n .

В качестве второго примера рассмотрим построение асимптотических разложений (1.2) решений уравнения

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \rho(x)y = 0, \quad p(x), \rho(x) > 0, \quad (1.13)$$

причем функции $p(x)$, $\rho(x)$ голоморфны. К этому уравнению сводится задача о поперечных колебаниях балки переменного поперечного сечения (см. подп. 4.4.4).

В данном случае

$$P_0(\lambda) = p\lambda^4 - \rho, \quad P_1(\lambda) = 2p'\lambda^3, \quad P_2(\lambda) = p''\lambda^2.$$

Характеристическое уравнение (1.7) имеет четыре корня:

$$\lambda_k = qr_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad q = \left(\frac{\rho}{p} \right)^{1/4}, \quad r_1 = i, \quad r_2 = -i, \quad r_3 = -1, \quad r_4 = 1. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.4) дает

$$L_0 u_0 = 4\lambda^3 p u_0' + 6\lambda^2 \lambda' p u_0 + 2\lambda^3 p' u_0 = 0,$$

откуда для всех λ_k находим $u_0 = p^{-1/8} \rho^{-3/8}$.

Уравнение (1.5) имеет вид

$$L_0 u_1^{(k)} + r_k^2 L_1 u_0 = 0,$$

где

$$L_1 u_0 = 6pq^2 u_0'' + 12pqq' u_0' + 4pqq'' u_0 + 3p(q')^2 u_0 + 6p'q^2 u_0' + 6p'qq' u_0 + p''q^2 u_0.$$

Отсюда получаем

$$u_1^{(k)} = -\frac{u_0}{4r_k} \int u_0 L_1 u_0 dx, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

или, после упрощений,

$$u_1^{(k)} = -\frac{v_1}{r_k}, \quad v_1 = \frac{5u_0}{8} \int \frac{3(q')^2 - 2qq''}{q^3} dx. \quad (1.15)$$

Интегралы $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ осциллируют, а интегралы $y^{(3)}$ и $y^{(4)}$ являются интегралами краевого эффекта.

4.1.2. Случай нулевого кратного корня

Случай кратных корней представляет значительные трудности. Если кратность корней (1.8) меняется в отдельных точках $x = x_*$, такие точки называются *точками поворота* или *точками перехода* (они рассматриваются в главе 5). Кроме того, возможен случай тождественно кратных корней. При этом в разложении (1.2) могут появиться дробные степени μ . Здесь ограничимся изучением часто встречающегося в приложениях случая нулевого корня кратности m .

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка $n=l+m$

$$L_\mu y = \sum_{k=0}^l \mu^k a_{k+m}(x, \mu) \frac{d^{k+m} y}{dx^{k+m}} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x, \mu) \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \quad (1.16)$$

при тех же предположениях относительно коэффициентов $a_k(x, \mu)$, что и в уравнении (1.1). При $\mu = 0$ уравнение (1.16) вырождается в уравнение порядка m

$$L_0 y = \sum_{k=0}^m a_k(x, 0) \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (1.17)$$

Если уравнение (1.16) умножить на μ^m , получим уравнение вида (1.1). Соответствующее характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^l a_{k+m}(x, 0) \lambda^{k+m} = 0 \quad (1.18)$$

имеет нулевой корень кратности m . Пусть $a_n(x, 0) \neq 0$, $a_m(x, 0) \neq 0$ и все корни уравнения

$$\sum_{k=0}^l a_{k+m}(x, 0)\lambda^k = 0 \quad (1.19)$$

различны. Тогда уравнение (1.16) имеет l решений вида (1.2), остальные m решений не являются быстро меняющимися функциями x и имеют разложения

$$y(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_k(x), \quad (1.20)$$

где $v_0(x)$ удовлетворяет уравнению (1.17), а функции $v_k(x)$ удовлетворяют неоднородным уравнениям, левые части которых те же, что и в (1.17).

Построим асимптотические разложения решений уравнения второго порядка

$$\mu \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad (1.21)$$

где μ — малый параметр, функции $a_0(x)$ и $a_1(x)$ голоморфны.

Характеристическое уравнение (1.18) имеет один корень $\lambda_1(x) = -a_1(x)$ и один корень $\lambda_2(x) = 0$. Корню $\lambda_1(x)$ отвечает решение вида (1.2), причем в силу (1.5) функции $u_n(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda u_n)' + a_0 u_n + u_{n-1}'' = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad u_{-1} = 0,$$

решая которые, находим

$$u_0 = \frac{1}{a_1(x)} \exp\left(\int \frac{a_0}{a_1} dx\right), \quad u_n = u_0 \int \frac{u_{n-1}''}{a_1 u_0} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

В частном случае $a_1(x) = 1 + \alpha x$ имеем

$$u_n = \alpha^n b_n (1 + \alpha x)^{\beta_n}, \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha} - 2n - 1, \quad b_0 = 1, \quad b_{n+1} = -\frac{\beta_n(\beta_n - 1)}{2n + 3} b_n.$$

Ряд (1.2) расходится.

Найдем теперь медленно меняющееся решение (1.20) уравнения (1.21), отвечающее корню $\lambda_2(x) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} a_1 v_0' + a_0 v_0 &= 0, & v_0 &= \exp\left(-\int \frac{a_0}{a_1} dx\right), \\ a_1 v_n' + a_0 v_n + v_{n-1}'' &= 0, & v_n &= -v_0 \int \frac{v_{n-1}''}{a_1 v_0} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В частном случае $a_1(x) = 1 + \alpha x$:

$$v_n = \alpha^n c_n (1 + \alpha x)^{\gamma_n}, \quad \gamma_n = -\frac{1}{\alpha} - 2n, \quad c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{\gamma_n(\gamma_n - 1)}{2n + 3} c_n.$$

Ряд (1.20) также расходится.

4.1.3. Асимптотические решения уравнений, не содержащих параметров

Описанный алгоритм построения решений может быть применен и к некоторым линейным уравнениям, не содержащим параметра μ при $\xi \rightarrow \infty$. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^n d_k(\xi) \frac{d^k y}{d\xi^k} = 0 \quad (1.22)$$

в области $S = [\xi_0, \infty)$ при

$$d_k(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{kj} \xi^{-j}. \quad (1.23)$$

После замены переменной $x = \mu\xi$ уравнение (1.22) принимает вид (1.1), причем $a_{kj} = d_{kj} x^{-j}$.

Решение, по-прежнему, ищем в виде (1.2). В связи с тем, что a_{k0} постоянны, корни (1.8) уравнения (1.7) также будут постоянными. Для простого корня λ уравнения (1.4), (1.5), ... дают

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} u_0' + b_1 x^{-1} u_0 &= 0, & b_1 &= \sum_{k=0}^n d_{k1} \lambda^k, \\ P_0^{(1)} u_1' + b_1 x^{-1} u_1 + \frac{1}{2} P_0^{(2)} u_0'' + b_1^{(1)} x^{-1} u_0' + b_2 x^{-2} u_0 &= 0, & (1.24) \\ b_1^{(1)} &= \sum_{k=0}^n k d_{k1} \lambda^{k-1}, & b_2 &= \sum_{k=0}^n d_{k2} \lambda^k, \quad \dots \end{aligned}$$

Решая систему (1.24), находим

$$u_k = c_k x^{\alpha-k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.25)$$

где c_0 — произвольная постоянная,

$$\alpha = -\frac{b_1}{P_0^{(1)}}, \quad c_1 = c_0(1/2\alpha(\alpha-1)P_0^{(2)} + b_1^{(1)}\alpha + b_2)(P_0^{(1)})^{-1}, \dots$$

Возвращаясь к первоначальной переменной ξ , находим асимптотическое решение уравнения (1.22) в виде

$$y \simeq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{\alpha-k} e^{\lambda \xi}, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (1.26)$$

Если все n корней уравнения (1.7) различны, таким способом находим все n решений. Разумеется, удобнее искать решения уравнения (1.22) сразу в виде (1.26), не переходя к вспомогательной переменной x . Эти выкладки были проделаны для того, чтобы показать связь асимптотических разложений по параметру μ с асимптотическими разложениями при $\xi \rightarrow \infty$ решений линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки $\xi = \infty$.

Построим асимптотическое разложение при $x \rightarrow +\infty$ функций Бесселя $J_\nu(x)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (1.27)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (1.22), и его решения имеют вид (1.26):

$$y = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\alpha-k}.$$

Подстановка этого решения в уравнение (1.27) дает $\lambda_{1,2} = \pm i$. Возьмем $\lambda_1 = i$ и найдем

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad c_0 = 1, \quad c_{k+1} = i \frac{(k+1/2)^2 - \nu^2}{2(k+1)} c_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Имеем $J_\nu(x) \simeq \text{Re}(Cy)$, где C — комплексная постоянная, для определения которой используем интегральное представление

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\pi \cos(x \cos(\theta)) \sin^{2\nu} \theta d\theta.$$

Применяя метод стационарной фазы (см. п.2.4.), получаем главный член асимптотического разложения

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Сравнивая эту формулу с первым членом ряда для $y(x)$, находим

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right).$$

4.1.4. Асимптотические решения неоднородных уравнений

Остановимся на построении частных решений неоднородных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$M_\mu y = f(x, \mu) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \gamma(x) dx\right), \quad f(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k f_k(x), \quad (1.28)$$

где функции $\gamma(x)$, $f_k(x)$ голоморфны в S , а $M_\mu y$ — оператор в левой части (1.1).

Если

$$\gamma(x) \neq \lambda_k(x), \quad k = 1, \dots, n, \quad x \in S, \quad (1.29)$$

где $\lambda_k(x)$ — корни уравнения (1.7), то частное решение $y^*(x, \mu)$ уравнения (1.28) имеет вид

$$y^*(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_k(x) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \gamma(x) dx\right), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (1.30)$$

Функции $v_k(x)$ голоморфны в S и определяются в результате подстановки (1.30) в (1.28). В частности,

$$v_0(x) = f_0(x)(P_0(\gamma(x), x))^{-1}. \quad (1.31)$$

Если условие (1.29) нарушается в отдельных точках x , решение имеет вид, отличный от (1.30). Это «резонансный случай», который обсуждается, напр., в [16].

Неоднородное уравнение (1.16)

$$L_\mu y = f(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k f_k(x), \quad \mu \rightarrow 0, \quad (1.32)$$

где оператор $L_\mu y$ тот же, что и в (1.16), при $a_m(x, 0) \neq 0$ имеет частное решение

$$y^*(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k^*(x), \quad \mu \rightarrow 0, \quad (1.33)$$

причем $y_0^*(x)$ — одно из частных решений уравнения

$$L_0 y = f_0(x), \quad (1.34)$$

где $L_0 y$ — оператор в левой части уравнения (1.17).

4.1.5. Упражнения

4.1.1. Построить асимптотическое разложение (1.2) решений уравнения

$$\mu^2 \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - \mu^2 r(x)y + \rho(x)y = 0, \quad p(x), \rho(x) > 0,$$

причем функции $p(x)$, $r(x)$, $\rho(x)$ голоморфны. К этому уравнению сводится исследование асимптотики решений в задаче Штурма–Лиувилля. Рассмотреть частный случай $p = \rho = 1 + \alpha x$, $r = 0$, соответствующий продольным колебаниям стержня, толщина которого меняется по линейному закону.

4.1.2. Построить асимптотическое разложение (1.2) решений уравнения

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - c(x)y = 0, \quad c(x) > 0,$$

для голоморфной $c(x)$.

4.1.3. Найти u_0 и $u_1^{(k)}$ для уравнения (1.13) при $p(x) = \rho(x) = 1 + \alpha x$. В этом случае уравнение описывает колебания балки, ширина которой меняется по линейному закону.

4.1.4. В условиях примера 4.1.3 найти u_0 и $u_1^{(k)}$ для балки, толщина которой меняется по линейному закону, т. е. $p(x) = (\rho(x))^3$, $\rho(x) = 1 + \alpha x$.

4.1.5. Найти два первых слагаемых асимптотических разложений (1.2) решений уравнения

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + c(x)y = 0, \quad p(x), c(x) > 0,$$

описывающего прогиб балки на упругом основании.

4.1.6. Построить первые члены асимптотических разложений решений уравнения с постоянными коэффициентами

$$-\mu^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \Lambda y = 0,$$

описывающего колебания неабсолютно гибкой струны (см. пп. 4.4.2).

4.1.7. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Найти асимптотические разложения функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ при фиксированном ν и $x \rightarrow +\infty$. Для определения постоянных множителей воспользоваться интегральными представлениями:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos(\theta)) \cos(\nu\theta) d\theta - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} t - \nu t) dt,$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(\nu t) dt$$

и применить метод Лапласа (см. п.2.3).

4.2. Интегралы системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных

Результаты, изложенные в этом пункте, в значительной мере аналогичны предыдущим (п.4.1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\mu \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x, \mu)\mathbf{y}, \quad \mu > 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{y} — n -мерный вектор, \mathbf{A} — квадратная матрица n -го порядка, представляемая в виде

$$\mathbf{A}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{A}_k(x), \quad \mu \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

с голоморфными в вещественной или комплексной области S коэффициентами.

4.2.1. Случай простых корней характеристического уравнения

Формальное асимптотическое решение системы (2.1) ищем в виде

$$\mathbf{y}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(x) \mu^k \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \lambda(x) dx \right\}. \quad (2.3)$$

Функция $\lambda(x)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\mathbf{A}_0(x) - \lambda \mathbf{E}_n) = 0, \quad (2.4)$$

где \mathbf{E}_n — единичная матрица порядка n . Если $\lambda(x)$ — простой корень уравнения (2.4) при всех $x \in S$, то все вектор-функции $\mathbf{U}_k(x)$ последовательно определяются в результате подстановки (2.3) в (2.1) и являются голоморфными в области S .

Рассмотрим подробнее определение вектор-функции $\mathbf{U}_0(x)$. Запишем уравнения

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{E}_n) \mathbf{U}_0 &= 0, \\ (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{E}_n) \mathbf{U}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_0 &= \frac{d\mathbf{U}_0}{dx}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

получающиеся после подстановки (2.3) систему (2.1) и приравнивания коэффициентов при μ^0 и при μ^1 . Первое из этих уравнений дает

$$\mathbf{U}_0(x) = \varphi_0(x) \mathbf{V}(x), \quad (2.6)$$

где $\varphi_0(x)$ — скалярная функция, а $\mathbf{V}(x)$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_0(x)$, соответствующий простому корню $\lambda(x)$ уравнения (2.4).

Функция $\varphi_0(x)$ определяется лишь из следующего приближения. Второе уравнение (2.5) рассматриваем как систему линейных неоднородных уравнений относительно компонент вектора \mathbf{U}_1 . Определитель этой системы равен нулю, а условие ее совместности имеет вид

$$\mathbf{W}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_0 = \mathbf{W}^T \frac{d\mathbf{U}_0}{dx}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{W}(x)$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_0^T(x)$ (индексом T обозначено транспонирование)

$$(\mathbf{A}_0^T(x) - \lambda(x) \mathbf{E}_n) \mathbf{W} = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.7) находим дифференциальное уравнение первого порядка для функции $\varphi_0(x)$

$$\frac{d\varphi_0(x)}{dx} = b_0(x) \varphi_0(x), \quad b_0 = \frac{\mathbf{W}^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{V} - d\mathbf{V}/dx)}{\mathbf{W}^T \mathbf{V}}, \quad (2.9)$$

которое интегрируется в квадратурах.

Для простого корня $\lambda(x)$ все функции $\lambda(x)$, $\mathbf{U}_k(x)$ голоморфны в S .

Если при всех $x \in S$ все корни уравнения (2.4) простые, формула (2.6) дает фундаментальную матрицу формальных асимптотических решений.

Построим асимптотические разложения решений системы уравнений

$$\mu \frac{dy}{dx} = y \cos x + z \sin x, \quad \mu \frac{dz}{dx} = y \sin x + 3z \cos x \quad (2.10)$$

при $\mu \rightarrow 0$.

Решение ищем в виде (2.3):

$$\{y(x, \mu), z(x, \mu)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \{y_k(x), z_k(x)\} \exp \left(\frac{1}{\mu} \int \lambda(x) dx \right). \quad (2.11)$$

Характеристическое уравнение (2.4)

$$\lambda^2 - 4\lambda \cos x + 3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 2 \cos x \pm 1$. Эти корни различны при всех x , поэтому искомое решение существует. Последующие построения выполним для $\lambda_1 = 2 \cos x + 1$.

Подстановка (2.11) в систему уравнений (2.10) и приравнение коэффициентов при μ^k приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} -y_k(1 + \cos x) + z_k \sin x &= y'_{k-1}, \\ y_k \sin x + z_k(\cos x - 1) &= z'_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

причем $y_{-1} = z_{-1} \equiv 0$.

При $k = 0$ находим

$$y_0 = \varphi_0(x) \sin \frac{x}{2}, \quad z_0 = \varphi_0(x) \cos \frac{x}{2},$$

где функция $\varphi_0(x)$ определяется из следующего приближения.

При $k \geq 1$ система (2.12) относительно y_k, z_k имеет нулевой определитель и условие ее совместности суть

$$y'_{k-1} \sin \frac{x}{2} + z'_{k-1} \cos \frac{x}{2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При $k = 1$ условие совместности дает $\varphi'_0 = 0$. Возьмем $\varphi_0(x) = 1$.

Решение системы (2.12) при $k \geq 1$ имеет вид

$$y_k = \varphi_k(x) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} y'_{k-1}, \quad z_k = \varphi_k(x) \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} z'_{k-1}. \quad (2.13)$$

Подставляя это решение в условие совместности, получаем

$$\varphi'_k = \frac{1}{2} y''_{k-1} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} z''_{k-1} \cos \frac{x}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

откуда при $k = 1$ находим

$$\varphi'_1 = -\frac{1}{8} \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{8}, \quad \varphi_1 = -\frac{x}{8},$$

$$y_1 = \varphi_1 \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}, \quad z_1 = \varphi_1 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2}.$$

Итак, определены два первых члена рядов (2.11). Пользуясь рекуррентными формулами (2.13) и (2.14), можно найти любое число членов, однако на получение общей формулы рассчитывать трудно.

4.2.2. Случай кратного нулевого корня

Как и для одного уравнения порядка n , следует отдельно рассматривать случаи, когда корни $\lambda_k(x)$ уравнения (2.4) меняют свою кратность в отдельных точках (точках поворота) и случай тождественно кратных корней. Первый из этих случаев обсуждается в главе 5.

Здесь рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{z}, \quad \mu \frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{z}, \quad (2.15)$$

где \mathbf{y} и \mathbf{z} — векторы размерности m и l соответственно и \mathbf{A}_{ij} — матрицы соответствующих размеров, регулярно зависящие от μ :

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{A}_{ij}^{(k)}(x). \quad (2.16)$$

Умножая на μ первое из уравнений (2.15), получим систему вида (2.1), характеристическое уравнение которой имеет m корней, тождественно равных нулю. Остальные l корней удовлетворяют уравнению

$$\det(\mathbf{A}_{22}^{(0)}(x) - \lambda \mathbf{E}_l) = 0. \quad (2.17)$$

Если корень $\lambda(x)$ уравнения (2.17) является простым и нигде не обращается в нуль, ему соответствует решение вида (2.3). Если таковы все l корней уравнения (2.17), то и решений вида (2.3) будет l .

При $\mu = 0$, $\det \mathbf{A}_{22}^{(0)}(x) \neq 0$ система (2.15) вырождается в систему уравнений порядка m :

$$\frac{d\mathbf{y}_0}{dx} = (\mathbf{A}_{11}^{(0)} - \mathbf{A}_{12}^{(0)} \mathbf{A}_{22}^{(0)-1} \mathbf{A}_{21}^{(0)}) \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{z}_0 = -\mathbf{A}_{22}^{(0)-1} \mathbf{A}_{21}^{(0)} \mathbf{y}_0, \quad (2.18)$$

имеющую m линейно независимых решений.

Первоначальная система (2.15) при $\mu \neq 0$ имеет m решений вида

$$\mathbf{y}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{y}_k(x), \quad \mathbf{z}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{z}_k(x), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

причем $\mathbf{y}_0(x)$ и $\mathbf{z}_0(x)$ те же, что и в (2.18).

Исследуем поведение решений гироскопической системы

$$\frac{d}{dx} \left(\mathbf{A}(x) \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) + H\mathbf{G}(x) \frac{d\mathbf{y}}{dx} + \mathbf{B}(x)\mathbf{y} = 0 \quad (2.20)$$

в предположении, что \mathbf{y} — n -мерный вектор, $\mathbf{A}(x)$ — положительно определенная симметричная матрица, $\mathbf{G}(x)$ — кососимметричная матрица с $\det \mathbf{G}(x) \neq 0$, элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{G} , \mathbf{B} голоморфны, H — большой параметр. Система (2.20) исследована в работе [16].

Отметим, что n — четное число, ибо для нечетного n определитель $\det \mathbf{G}(x) \equiv 0$.

Система (2.20) приводится к системе вида (2.15) путем введения вспомогательных неизвестных $\mathbf{z} = \mathbf{A}d\mathbf{y}/dx$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}, \quad \mu \frac{d\mathbf{z}}{dx} = -\mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} + \mu\mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (2.21)$$

где $\mu = H^{-1}$ — малый параметр. Эта система имеет n быстро меняющихся решений вида (2.3), причем уравнение (2.17) для определения λ имеет вид

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{A}) = 0. \quad (2.22)$$

Докажем, что все корни этого уравнения чисто мнимые. Для этого рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\mathbf{A}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{G}(x)\mathbf{u} = 0,$$

где x — параметр. В силу теоремы Ляпунова нулевое решение этой системы устойчиво, ибо квадратичная форма $V = \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}$ положительно определена, а ее производная $dV/dt = -2\mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} \equiv 0$ в силу кососимметричности матрицы \mathbf{G} . Следовательно, уравнение (2.22) не может иметь корней λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Но $f(-\lambda) \equiv f(\lambda)$, поэтому корни с $\operatorname{Re} \lambda < 0$ также отсутствуют. Нулевых корней нет в силу $\det \mathbf{G} \neq 0$.

Итак, n интегралов системы являются быстро осциллирующими. Поведение остальных n интегралов отличается от вида (2.19) тем, что они являются очень медленно меняющимися ($d\mathbf{y}/dx \sim \mu\mathbf{y}$). Для их построения систему (2.20) заменим эквивалентной ей системой интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 - \mu \int_0^x \mathbf{G}^{-1} \left(\mathbf{B}\mathbf{y} + \frac{d}{dx} \left(\mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) \right) dx \equiv L(\mathbf{y}), \quad (2.23)$$

где \mathbf{y}_0 — произвольный вектор. Решение этой системы методом итераций по схеме $\mathbf{y}_{n+1} = L(\mathbf{y}_n)$ приводит к асимптотическому разложению (2.19), в котором

$$\mathbf{y}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{y}_1 = - \int_0^x \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{y}_0 dx,$$

$$\mathbf{y}_2 = \int_0^x \left(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \int_0^x \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{y}_0 dx + \mathbf{G}^{-1} \frac{d}{dx} (\mathbf{A} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{y}_0 \right) dx.$$

4.2.3. Асимптотические решения систем уравнений, не содержащих параметров

Как и в п. 4.1, рассмотрим асимптотические разложения решений системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{A}(\xi)\mathbf{y} \quad (2.24)$$

при $\xi \rightarrow \infty$. Предположим, что

$$\mathbf{A}(\xi) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k \xi^{-k}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (2.25)$$

где \mathbf{A}_k — постоянные матрицы.

Замена переменной $x = \mu\xi$ приводит систему (2.24) к виду (2.1). Простому корню λ характеристического уравнения (2.4) соответствует решение вида

$$\mathbf{y}(\xi) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k \xi^{\alpha-k} e^{\lambda\xi}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

где \mathbf{U}_k постоянны, а показатель α равен

$$\alpha = - \frac{\mathbf{V}_0^T \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_0}{\mathbf{V}_0^T \mathbf{U}_0}. \quad (2.27)$$

Здесь \mathbf{U}_0 — собственный вектор матрицы \mathbf{A}_0 , соответствующий собственному числу λ , а \mathbf{V}_0 — собственный вектор транспонированной матрицы \mathbf{A}_0^T .

4.2.4. Асимптотические решения неоднородных уравнений

Рассмотрим неоднородное уравнение вида

$$\mu \frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x, \mu) \mathbf{y} + \mathbf{F}(x, \mu) \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \gamma(x) dx \right), \quad (2.28)$$

где

$$\mathbf{F}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{F}_k(x), \quad \mu \rightarrow 0,$$

матрица $\mathbf{A}(x, \mu)$ та же, что и в (2.1), а вектор-функции $\mathbf{F}_k(x)$ и функция $\gamma(x)$ голоморфны в S .

Если выполнено условие (1.29), в котором теперь $\lambda_k(x)$ – корни уравнения (2.4), то решение уравнения (2.28) имеет асимптотическое разложение

$$\mathbf{y}^*(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k^*(x) \mu^k \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \gamma(x) dx \right\}, \quad (2.29)$$

голоморфные коэффициенты $\mathbf{y}_k^*(x)$ которого последовательно находятся в результате подстановки (2.29) в (2.28). В частности,

$$\mathbf{y}_0^*(x) = (\mathbf{A}_0(x) - \mathbf{E}_n \gamma(x))^{-1} \mathbf{F}_0(x). \quad (2.30)$$

Случай $\gamma(x) = 0$ не исключается из рассмотрения, однако условие (1.29) при этом требует, чтобы ни один из корней уравнения (2.4) не обращался в нуль в отдельных точках.

4.2.5. Уравнения теории оболочек

Система уравнений Доннелла

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^1 \Delta^1 w - \Delta_k^1 \Phi^1 - \rho h \omega^2 w &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta^1 \Delta^1 \Phi^1 + \Delta_k^1 w &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

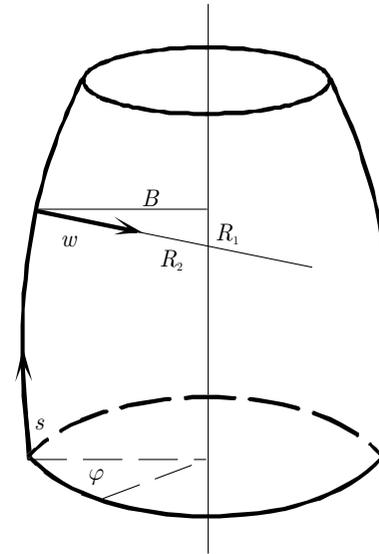


Рис. 4.1

описывает свободные колебания полой оболочки. Здесь w – прогиб, Φ^1 – функция усилий, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, h – толщина оболочки, ω – частота колебаний, Δ^1 , Δ_k^1 – линейные дифференциальные операторы второго порядка. Применим систему (2.31) для описания неосесимметричных колебаний оболочки вращения с m волнами в окружном направлении. На поверхности оболочки введем криволинейные координаты s^1 , φ , где s^1 – длина дуги меридиана, φ – угол в окружном направлении (см. рис. 4.1).

Тогда после разделения переменных

$$w(s^1, \varphi) = w(s^1) \cos m\varphi, \quad \Phi(s^1, \varphi) = \Phi(s^1) \cos m\varphi \quad (2.32)$$

операторы Δ^1 и Δ_k^1 принимают вид

$$\Delta^1 w = \frac{1}{B} (Bw')' - \frac{m^2}{B^2} w, \quad \Delta_k^1 w = \frac{1}{B} \left(\frac{Bw'}{R_2} \right)' - \frac{m^2}{R_1 B^2} w, \quad ' = \frac{d(\cdot)}{ds^1}, \quad (2.33)$$

где $B(s^1)$ – расстояние до оси вращения, $R_1(s^1)$, $R_2(s^1)$ – главные радиусы кривизны (см. рис. 4.1).

Пусть R — характерный размер срединной поверхности. Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} s &= \frac{s^1}{R}, \quad b = \frac{B}{R}, \quad k_1 = \frac{R}{R_1}, \quad \Phi = \frac{\Phi^1}{EhR\mu^2}, \\ \Lambda &= \frac{\rho\omega^2 R^2}{E}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где Λ — параметр частоты, $\mu > 0$ — малый параметр.

Система (2.31) содержит три основных параметра — μ , m , Λ , от соотношения между порядками которых зависят асимптотические разложения ее решений.

4.2.6. Случай $m \sim \mu^{-1}$, $\Lambda \sim 1$

Рассмотрим неосесимметричные колебания с большим числом m волн в окружном направлении. Предположим, что $\Lambda = O(\mu^0)$, $m \sim \mu^{-1}$. Пусть $r = \mu m \sim 1$. Тогда система (2.31) может быть переписана в виде

$$\Delta\Delta w - \Delta_k \Phi - \Lambda w = 0, \quad \Delta\Delta\Phi + \Delta_k w = 0, \quad (2.35)$$

где

$$\Delta w = \mu^2 \frac{1}{b} (bw')' - \frac{r^2}{b^2} w, \quad \Delta_k w = \mu^2 \frac{1}{b} (bk_2 w')' - \frac{k_1 r^2}{b^2} w, \quad (')' = \frac{d}{ds}.$$

Система (2.35) содержит малый параметр μ при производных и путем введения вспомогательных функций

$$y_k = \mu^{k-1} \frac{d^{k-1} w}{ds^{k-1}}, \quad y_{k+4} = \mu^{k-1} \frac{d^{k-1} \Phi}{ds^{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (2.36)$$

приводится к стандартному виду (2.1). Поэтому решение системы (2.35) следует искать в виде

$$\begin{aligned} w(s, \mu) &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \lambda(s) ds \right\}, \\ \Phi(s, \mu) &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Phi_k(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \lambda(s) ds \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

После подстановки рядов (2.37) в систему (2.35) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ находим, что функция $\lambda(s)$ удовлетворяет характеристическому уравнению, являющемуся алгебраическим уравнением восьмой степени

$$f(\lambda, s) = \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^4 - \Lambda \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2 + \left(k_2 \lambda^2 - \frac{k_1 r^2}{b^2} \right)^2 = 0, \quad (2.38)$$

а старшие коэффициенты рядов (2.37) равны (см. пример 4.2.3)

$$\begin{aligned} w_0 &= \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right) \left(b \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^{-1/2}, \\ \Phi_0 &= - \left(k_2 \lambda^2 - \frac{k_1 r^2}{b^2} \right) \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{-1} \left(b \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Каждому простому корню $\lambda(s)$ уравнения (2.38) соответствует решение (2.37) с голоморфными коэффициентами $w_k(s)$, $\Phi_k(s)$. Исключение составляют оболочки в форме купола. В вершине купола $b = 0$, поэтому в окрестности вершины разложения (2.37) неприменимы.

Если все восемь корней уравнения (2.38) простые, таким способом получаем общее решение системы (2.35).

В точках поворота $s = s_*$ корни $\lambda(s)$ становятся кратными, величина $\partial f / \partial \lambda = 0$ и разложения (2.37) неприменимы. Этот случай рассматривается в п. 5.3.

4.2.7. Случай $m \sim \mu^{-1/2}$, $\Lambda \sim 1$

Построим асимптотические разложения интегралов системы (2.31) в предположении, что $m \sim \mu^{-1/2}$, $\Lambda \sim 1$. В качестве исходной возьмем систему (2.35), в которой теперь

$$\Delta w = \mu^2 \frac{1}{b} (bw')' - \mu \frac{r_0^2}{b^2} w, \quad \Delta_k w = \mu^2 \frac{1}{b} (bk_2 w')' - \mu \frac{k_1 r_0^2}{b^2} w, \quad (2.40)$$

где $r_0 = \mu^{1/2} m \sim 1$. В рассматриваемом случае уже нет оснований считать, что все решения имеют асимптотические разложения вида (2.37). Для выяснения структуры асимптотических разложений будем искать

сначала решения в виде:

$$w(s, \mu) \simeq w_0 \exp \left\{ \int_{s_0}^s p ds \right\}, \quad \Phi(s, \mu) \simeq \Phi_0 \exp \left\{ \int_{s_0}^s p ds \right\}, \quad |p| \gg 1.$$

Тогда для функции $p(s)$ получим алгебраическое уравнение, аналогичное (2.38)

$$\mu^2 \left(\mu p^2 - \frac{r_0^2}{b^2} \right)^4 - \Lambda \left(\mu p^2 - \frac{r_0^2}{b^2} \right)^2 + \left(\mu k_2 p^2 - \frac{k_1 r_0^2}{b^2} \right)^2 = 0. \quad (2.41)$$

Это уравнение имеет четыре корня $p_j \sim \mu^{-1}$:

$$p_j = \mu^{-1} \lambda_j + O(1), \quad \lambda_j^4 + k_2^2 - \Lambda = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.42)$$

и четыре корня $p_j \sim \mu^{-1/2}$:

$$p_j = \mu^{-1/2} q_j + O(1), \quad \Lambda \left(q_j^2 - \frac{r_0^2}{b^2} \right)^2 = \left(k_2 q_j^2 - \frac{k_1 r_0^2}{b^2} \right)^2, \quad j = 5, 6, 7, 8,$$

$$q_{5,6} = \pm \frac{r_0}{b} \sqrt{\frac{\sqrt{\Lambda} + k_1}{\sqrt{\Lambda} + k_2}}, \quad q_{7,8} = \pm \frac{r_0}{b} \sqrt{\frac{\sqrt{\Lambda} - k_1}{\sqrt{\Lambda} - k_2}}. \quad (2.43)$$

В соответствии с этим четыре решения системы (2.35), (2.40) имеют разложения (2.37), причем

$$w_0(s) = b^{-1/2} \lambda^{-3/2} \exp \left\{ -r_0^2 \int_{s_0}^s \frac{b(\Lambda - 2\lambda^4) + b''}{2b^3 \lambda^5} ds \right\}, \quad \Phi_0 = -\frac{k_2 w_0}{\lambda^2}. \quad (2.44)$$

Показатель изменчивости (см. п. 1.4) этих решений равен 1. Четыре других решения имеют показатель изменчивости 1/2 и представимы в виде

$$w(s, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} w_k(s) \exp \left\{ \mu^{-1/2} \int_{s_0}^s q(s) ds \right\}, \quad (2.45)$$

$$\Phi(s, \mu) \simeq \mu^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} k \Phi_k(s) \exp \left\{ \mu^{-1/2} \int_{s_0}^s q(s) ds \right\},$$

причем

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \pm k_2}} \left(\frac{k_1 - k_2}{qb^3} \right)^{1/2}, \quad \Phi_0 = -\frac{\Lambda w_0}{k_2 q^2 - k_1 r_0^2 b^{-2}},$$

где знак «+» берется для $q = q_{5,6}$, а знак «-» — для $q = q_{7,8}$.

Как следует из приведенных выше формул для w_0 , Φ_0 , построенные решения неприменимы в окрестностях вершины купола ($b = 0$) и точек поворота $s = s_*$, в которых

$$\Lambda = k_1^2 (s_*^{(1)}) \quad \text{или} \quad \Lambda = k_2^2 (s_*^{(2)}).$$

При $s = s_*^{(1)}$ два из корней q_j становятся равными нулю (а следовательно, и друг другу), а при $s = s_*^{(2)}$ четыре корня λ_j равны нулю, а два из корней q_j обращаются в бесконечность.

4.2.8. Низкочастотные колебания оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны

Рассмотрим неосесимметричные низкочастотные колебания оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны при следующих соотношениях между параметрами: $k_1 = 0$, $m \sim \mu^{-1/2}$, $\Lambda \sim \mu^2$. Как и в пп. 4.2.7, будем исходить из системы (2.35), (2.40), в которой считаем $k_1 = 0$, $\Lambda = \mu^2 \Lambda_0$, $\Lambda_0 \sim 1$.

Характеристическое уравнение (2.41) при сделанных предположениях таково:

$$\left(\mu p^2 - \frac{r_0^2}{b^2} \right)^4 - \Lambda_0 \left(\mu p^2 - \frac{r_0^2}{b^2} \right)^2 + k_2 p^4 = 0. \quad (2.46)$$

Это уравнение имеет четыре корня $p_j \sim \mu^{-1}$, $j = 1, 2, 3, 4$, которым соответствуют решения (2.37), (2.42), (2.44) при $\Lambda = 0$.

Четыре оставшихся корня $p_j \sim 1$, $j = 5, 6, 7, 8$ не являются большими по модулю, поэтому соответствующие им решения имеют вид

$$w(s, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(s), \quad \Phi(s, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Phi_k(s). \quad (2.47)$$

Интегралы (2.47) служат для приближенного построения нижней части спектра частот собственных колебаний оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны.

4.2.9. Низкочастотные колебания оболочки вращения отрицательной гауссовой кривизны

Рассмотрим неосесимметричные колебания оболочки вращения в предположении, что $k_1 k_2 < 0$, $m \sim \mu^{-2/3}$, $\Lambda \sim \mu^{4/3}$. Введем малый параметр $\mu_1 = \mu^{2/3}$ и положим $r_1 = m\mu_1 \sim 1$, $\Lambda = \mu_1^2 \Lambda_1$, $\Lambda_1 \sim 1$. Тогда систему (2.35) можно записать в виде

$$\mu_1 \Delta_1 \Delta_1 w - \Delta_{k_1} \Phi - \mu_1 \Lambda_1 w = 0, \quad \mu_1 \Delta_1 \Delta_1 \Phi + \Delta_{k_1} w = 0, \quad (2.48)$$

где

$$\Delta_1 w = \mu_1^2 \frac{1}{b} (bw')' - \frac{r_1^2}{b^2} w, \quad \Delta_{k_1} w = \mu_1^2 \frac{1}{b} (bk_2 w')' - \frac{k_1 r_1^2}{b^2} w.$$

Характеристическое уравнение системы (2.48)

$$\mu_1^2 \left(\mu_1^2 p^2 - \frac{r_1^2}{b^2} \right)^4 - \mu_1^2 \Lambda_1 \left(\mu_1^2 p^2 - \frac{r_1^2}{b^2} \right)^2 + \left(\mu_1^2 k_2 p^2 - \frac{k_1 r_1^2}{b^2} \right)^2 = 0$$

имеет корни

$$p_j = \mu_1^{-3/2} \lambda_j + O(\mu_1^{-1/2}), \quad \lambda_j^4 + k_2^2 = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.49)$$

$$p_j = \mu^{-1} q_j + O(1), \quad \left(k_2 q_j^2 - \frac{k_1 r_1^2}{b^2} \right)^2 = 0, \quad j = 5, 6, 7, 8. \quad (2.50)$$

Корням (2.49) соответствуют решения:

$$w(s, \mu_1) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^{k/2} w_k(s) \exp \left\{ \mu^{-3/2} \int_{s_0}^s \lambda(s) ds + \mu^{-1/2} \int_{s_0}^s \lambda^{(1)}(s) ds \right\},$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{r_1^2}{2\lambda b^2} \left(1 + \frac{b'}{bk_2} \right), \quad w_0 = b^{-1/2} \lambda^{-3/2}.$$

Корням (2.50) соответствуют решения:

$$\begin{aligned} w(s, \mu_1) &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k w_k(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu_1} \int_{s_0}^s q(s) ds \right\}, \\ \Phi(s, \mu_1) &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k \Phi_k(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu_1} \int_{s_0}^s q(s) ds \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Интегралы (2.51) используются для приближенного построения нижней части спектра у оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны.

4.2.10. Упражнения

4.2.1. Построить два первых члена асимптотики решений системы уравнений (2.10) для $\lambda_1 = 2 \cos x - 1$.

4.2.2. Малые колебания динамически симметричного волчка описываются системой уравнений

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} - H \frac{dy_2}{dt} - k^2 y_1 = 0, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} + H \frac{dy_1}{dt} - k^2 y_2 = 0, \quad (2.52)$$

где y_1, y_2 — малые отклонения оси волчка от вертикали, t — время, $H = C\omega/A$, $k^2 = mgz_c/A$. Здесь C — момент инерции волчка относительно оси симметрии, A — момент его инерции относительно перпендикулярной оси, проходящей через точку опоры, mg — вес волчка, z_c — расстояние между центром тяжести и точкой опоры, ω — угловая скорость вращения волчка.

В предположении, что $H \rightarrow \infty$, построить асимптотические разложения решений системы (2.52) и сравнить их с точным решением.

4.2.3. Вывести формулы (2.39) для w_0, Φ_0 .

4.2.4. Устойчивость безмоментного осесимметричного напряженно-го состояния оболочки вращения описывается системой уравнений:

$$\Delta \Delta w + \Lambda \Delta_t w - \Delta_k \Phi = 0, \quad \Delta \Delta \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (2.53)$$

где $\Delta_t w = \mu^2 \frac{1}{b} (bt_1 w')' - \frac{t_2 r^2}{b^2} w$, $t_k = -\frac{T_k^0}{\Lambda E h \mu^2}$, $k = 1, 2$. Здесь $T_k^0(s)$ — безмоментные начальные усилия, $\Lambda > 0$ — параметр нагружения, а остальные обозначения те же, что и в системе (2.35).

Построить асимптотические разложения интегралов системы (2.53).

4.2.5. Вывести уравнения для определения функций w_0 и Φ_0 в асимптотических разложениях (2.47).

4.2.6. Найти систему уравнений для определения главных членов рядов (2.51).

4.3. Неоднородные краевые задачи

4.3.1. Постановка краевых задач

Пусть область S содержит отрезок вещественной оси $x_1 \leq x \leq x_2$. Здесь рассматриваем как одно дифференциальное уравнение (1.28), так и систему уравнений первого порядка (2.28). Пусть выполнены условия (основным из которых является отсутствие точек поворота), при которых в п. 4.1 и 4.2 построены решения. Тогда общее решение может быть записано в виде

$$\mathbf{y}(x, \mu) = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{y}^{(k)}(x, \mu) + \mathbf{y}^*(x, \mu), \quad (3.1)$$

где C_k — произвольные постоянные, $\mathbf{y}^{(k)}(x, \mu)$ — частные решения однородных уравнений (1.1) или (2.1), $\mathbf{y}^*(x, \mu)$ — частное решение неоднородного уравнения (1.28) или (2.28).

Для краткости формулу (3.1) запишем так:

$$\mathbf{y}(x, \mu) = \mathbf{Y}(x, \mu)\mathbf{C} + \mathbf{y}^*(x, \mu), \quad \mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{Y}(x, \mu)$ — матрица порядка n , составленная из частных решений $\mathbf{y}^{(k)}(x, \mu)$ однородного уравнения.

Для системы (2.28) граничные условия возьмем в виде

$$\mathbf{B}_j(\mu)\mathbf{y} = \mathbf{b}_j(\mu) \quad \text{при } x = x_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.3)$$

где \mathbf{y} — n -мерный вектор, \mathbf{B}_j — матрица размера $n_j * n$, \mathbf{b}_j — вектор размера n_j , $n_1 + n_2 = n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j(\mu) &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_{jk} \mu^k, \\ \mathbf{b}_j(\mu) &\simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_{jk} \mu^k, \end{aligned} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Будем предполагать, что граничные условия линейно независимы в нулевом приближении, т. е.

$$\text{rang}\{\mathbf{B}_{0j}\} = n_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.5)$$

Для одного уравнения (1.28) общий вид граничных условий также имеет форму (3.3), если в качестве \mathbf{y} взять n -мерный вектор

$$\mathbf{y} = \left(y, \mu \frac{dy}{dx}, \dots, \mu^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right), \quad (3.6)$$

причем ограничение на матрицы \mathbf{B}_{j0} то же, что и выше.

Подстановка общего решения (3.1) в граничные условия (3.3) приводит к системе n линейных неоднородных уравнений для определения постоянных C_k :

$$\mathbf{D}(\mu)\mathbf{C} = \mathbf{d}(\mu), \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_j(\mu) = \mathbf{B}_j(\mu)\mathbf{y}(x_j, \mu), \quad \mathbf{d}_j(\mu) = \mathbf{b}_j(\mu) - \mathbf{B}_j(\mu)\mathbf{y}^*(x_j, \mu), \quad j = 1, 2. \quad (3.8)$$

Если

$$\det \mathbf{D}(\mu) \neq 0, \quad (3.9)$$

система (3.7), а вместе с ней и рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение.

Если же

$$\det \mathbf{D}(\mu) = 0, \quad (3.10)$$

краевая задача имеет решение не при любых правых частях $\mathbf{f}(x, \mu)$, $\mathbf{b}(\mu)$. В этом случае будем говорить, что задача находится «на спектре».

Трудность исследования корней уравнения (3.10) состоит в том, что не всегда существует предел

$$\mathbf{D}_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mathbf{D}(\mu). \quad (3.11)$$

Далее исследованы частные случаи (см. также пп. 4.4 и 4.5).

4.3.2. Характер поведения интегралов

Рассмотрим сначала возможные варианты поведения интегралов (1.2) и (2.3) в зависимости от корней $\lambda_k(x)$. При $\text{Re}(\lambda_k(x)) > 0$ интеграл экспоненциально возрастает, при $\text{Re}(\lambda_k(x)) < 0$ — убывает и при $\text{Re}(\lambda_k(x)) = 0$, $\text{Im}(\lambda_k(x)) \neq 0$ — осциллирует. Если $\lambda_k(x) \equiv 0$,

что имеет место для интегралов (1.20), (2.19), то интеграл является медленно меняющимся.

Если выполнены условия:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k(x_1)) < 0, \quad \operatorname{Re} \int_{x_1}^x \lambda_k(x) dx < 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad (3.12)$$

интеграл (1.2) или (2.3) будем называть интегралом краевого эффекта или интегралом пограничного слоя вблизи левого края $x = x_1$. В этом случае в (1.2) или (2.3) будем считать $x_0 = x_1$. Тогда данный интеграл экспоненциально убывает при удалении от края $x = x_1$ и останется экспоненциально малым при всех x , $x < x_1$. При вычислении соответствующих элементов матрицы $\mathbf{Y}(x_2, \mu)$ в (3.8) с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$, $c > 0$ можно считать их равными нулю.

Кроме (1.2) или (2.3) для описания интеграла краевого эффекта можно использовать представление

$$\mathbf{y}_k(x, \mu) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathbf{P}_m^{(k)}(\xi) e^{\lambda_k^0 \xi}, \quad \xi = \frac{x - x_1}{\mu}, \quad (3.13)$$

где $\lambda_k^0 = \lambda_k(x_1) < 0$, $\mathbf{P}_m^{(k)}(\xi)$ — многочлены по ξ , степени которых не превосходят $2m$.

Аналогично вводится интеграл краевого эффекта на правом краю $x = x_2$.

Если при всех x будет $\operatorname{Re}(\lambda_k(x)) = 0$, $\operatorname{Im}(\lambda_k(x)) \neq 0$, интеграл называется осциллирующим. Могут существовать интегралы, не принадлежащие ни к одному из названных типов. Отметим среди них интегралы (см. гл. 5), осциллирующие на части S_0 промежутка $[x_1, x_2]$. Если коэффициенты уравнений (1.1) или (2.1) вещественны, граница S_0 могут быть лишь точки поворота или крайние точки x_1 или x_2 .

4.3.3. Простейший случай

Обратимся теперь к системе уравнений (3.7). Рассмотрим сначала простейший случай, когда характеристическое уравнение (2.4) или (1.7) при всех x не имеет нулевых и чисто мнимых корней. Пусть

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_k(x)) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, l_1, \\ \operatorname{Re}(\lambda_k(x)) > 0, \quad k = l_1 + 1, l_1 + 2, \dots, l_1 + l_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $l_1 + l_2 = l = n$, $l_1 = n_1$, $l_2 = n_2$, причем числа n_1 и n_2 те же, что и в (3.3), т.е. совпадают с числом граничных условий, заданных при $x = x_1$ и при $x = x_2$. Тогда с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$, $c > 0$ матрица (3.8) имеет блочно-диагональную структуру

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{D}^{(k)}, \quad (3.15)$$

где \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 — квадратные матрицы размеров n_1 и n_2 соответственно. При достаточно малых μ условие (3.9) будет выполнено, если

$$\Delta_j(0) = \det \mathbf{D}_j(0) \neq 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.16)$$

Решение краевой задачи (2.1), (3.3) складывается из частного решения $\mathbf{y}^*(x, \mu)$, которое в окрестности краев $x = x_1$ и $x = x_2$ подправлено интегралами краевого эффекта.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим определение прогиба $y(x_1)$ струны, лежащей на упругом основании. Функция $y(x_1)$ удовлетворяет уравнению

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} - c_1(x_1)y + q_1(x_1) = 0, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad (3.17)$$

где T — натяжение струны, $c_1(x_1) > 0$ — упругость основания, $q_1(x_1)$ — интенсивность внешней нагрузки. В предположении, что натяжение T относительно мало, найти приближенное выражение прогиба. Функции $c_1(x_1)$ и $q_1(x_1)$ считаем голоморфными.

В уравнении (3.17) перейдем к безразмерным переменным

$$x_1 = lx, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad c_1(x_1) = c_0 c(x), \quad c(x) \sim 1.$$

Тогда уравнение (3.17) примет вид

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - c(x)y + q(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (3.18)$$

где $\mu^2 = T/(c_0 l^2)$, $q(x) = q_1(x_1)/c_0$. Будем считать μ малым параметром. Именно этот смысл имеет сделанное предположение об относительной малости натяжения.

Здесь и в дальнейшем при введении малого параметра руководствуемся соображениями удобства, заключающимися в том, чтобы последующие асимптотические ряды были расположены по целым степеням μ . При этом показатель изменчивости (см. п.1.4.) быстро меняющихся решений равен 1 (как в формулах (1.2)).

Общее решение уравнения (3.18) имеет вид (3.1):

$$y(x, \mu) = C_1 y^{(1)}(x, \mu) + C_2 y^{(2)}(x, \mu) + y^*(x, \mu), \quad (3.19)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ — частные решения соответствующего однородного уравнения, полученные в примере 4.1.1 и имеющие характер интегралов краевого эффекта. Частное решение $y^*(x, \mu)$ неоднородного уравнения (3.18) имеет вид (1.33):

$$y^*(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k^*(x),$$

где

$$y_0^*(x) = \frac{q(x)}{c(x)}, \quad y_{2k+1}^*(x) \equiv 0, \quad y_{2k+2}^*(x) = \frac{1}{c(x)} \frac{d^2 y_{2k}^*}{dx^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Постоянные C_1 и C_2 в (3.19) находим из граничных условий $y(0) = y(1) = 0$. С погрешностью порядка

$$\varepsilon = \exp \left(-\frac{1}{\mu} \int_0^1 \sqrt{c(x)} dx \right)$$

возможно раздельное удовлетворение граничных условий

$$y(0) = C_1 y^{(1)}(0, \mu) + y^*(0, \mu) = 0, \quad y(1) = C_2 y^{(2)}(1, \mu) + y^*(1, \mu) = 0.$$

Выберем теперь нижний предел интегрирования $x^{(1)} = 0$, $x^{(2)} = 1$ в формулах для вычисления $y_k^{(j)}(x)$, $k > 0$ (см. ответ к примеру 4.1.1) таким образом, чтобы было $u_k^{(1)}(0) = 0$, $u_k^{(2)}(1) = 0$, $k > 0$. Тогда

$$C_1 = -(c(0))^{1/4} y^*(0, \mu), \quad C_2 = -(c(1))^{1/4} y^*(1, \mu).$$

4.3.4. Прогиб балки, лежащей на упругом основании

Прогиб балки, лежащей на упругом основании, описывается уравнением

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx_1^2} \right) + c_1(x_1) y = g_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l,$$

где EI — жесткость балки на изгиб, $c_1(x_1)$ — жесткость основания, $g_1(x_1)$ — интенсивность нагрузки.

Перейдем к безразмерным переменным

$$EI = E_0 I_0 p(x), \quad c_1(x_1) = c_0 c(x), \quad g_1(x_1) = E_0 I_0 g(x), \\ x_1 = lx, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + c(x) y = g(x), \quad \mu^4 = \frac{E_0 I_0}{c_0 l^4}. \quad (3.20)$$

Функции $p(x)$, $c(x)$, $g(x)$ считаем голоморфными. Предположим, что μ — малый параметр и $p(x), c(x) \sim 1$, $p(x), c(x) > 0$. Наличие малого параметра позволяет строить приближенные асимптотические решения и раздельно удовлетворять граничным условиям при $x=0$ и $x=1$.

Построим приближенное решение уравнения (3.20), удовлетворяющее граничным условиям шарнирного опирания:

$$y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = 1.$$

Общее решение уравнения (3.20) представляет собой линейную комбинацию интегралов краевого эффекта (см. пример 4.1.3):

$$y(x, \mu) = \sum_{k=1,2} C_k \left(u_0(x) + \mu u_1^{(k)}(x) + O(\mu^2) \right) \exp \left(\frac{r_k}{\mu} \int_0^x q(x) dx \right) + \\ + \sum_{k=3,4} C_k \left(u_0(x) + \mu u_1^{(k)}(x) + O(\mu^2) \right) \exp \left(\frac{r_k}{\mu} \int_1^x q(x) dx \right) + y_0^*(x) + O(\mu^4),$$

где

$$u_0(x) = (p^2 q^3)^{-1/2}, \quad q(x) = \left(\frac{c}{p}\right)^{1/4}, \quad y_0^*(x) = \frac{g}{c},$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad r_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}},$$

а функции $u_1^{(k)}(x)$ те же, что и в примере 4.1.3. Постоянные C_k определяем из граничных условий.

Выберем $u_j^{(k)}(x)$, $j > 0$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$u_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \quad u_j^{(k)}(1) = 0, \quad k = 3, 4.$$

Тогда с погрешностью порядка

$$\varepsilon = \exp\left(-\frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_0^1 q(x) dx\right)$$

возможно раздельное удовлетворение граничных условий при $x = 0$ и при $x = 1$. При $x = 0$ граничные условия дают

$$\sum_{k=1,2} C_k u_0(0) + y_0^*(0) = 0,$$

$$\sum_{k=1,2} C_k \left(\frac{r_k^2 q^2(0) u_0(0)}{\mu^2} + \frac{r_k}{\mu} (2q(0)u_0'(0) + q'(0)u_0(0)) + O(1) \right) + y_0^{*''}(0) = 0.$$

Аналогичные два уравнения для определения C_3 и C_4 получаются из граничных условий при $x = 1$. Решая эти уравнения, находим

$$C_{1,2} = -\frac{y_0^*(0)}{2u_0(0)} \left(1 \pm \frac{i\mu a(0)}{\sqrt{2}} + O(\mu^2) \right),$$

$$C_{3,4} = -\frac{y_0^*(1)}{2u_0(1)} \left(1 \pm \frac{i\mu a(1)}{\sqrt{2}} + O(\mu^2) \right),$$

$$a(x) = \frac{1}{q(x)} \frac{d}{dx} \ln(qu_0^2).$$

Итак, постоянные C_k найдены с погрешностью порядка μ^2 . Выясним, какие упрощения можно внести в решение $y(x, \mu)$ таким образом, чтобы его погрешность не превосходила $O(\mu^2)$. Примем во внимание, что при $b \sim 1$

$$xe^{-bx/\mu} = O(\mu), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда получим

$$y(x, \mu) = 2u_0(x) \operatorname{Re} \left\{ [C_1 \exp\left(\frac{r_1}{\mu} \int_0^x q(x) dx\right) + C_3 \exp\left(\frac{r_3}{\mu} \int_1^x q(x) dx\right)] \right\} + y_0^*(x) + O(\mu^2). \quad (3.21)$$

Если же ограничиться большей погрешностью порядка μ , то решение еще упрощается:

$$y(x, \mu) = y_0^*(x) - \operatorname{Re} \left(y_0^*(0) \exp\left(\frac{r_1 q_0 x}{\mu}\right) + y_0^*(1) \exp\left(\frac{r_3 q_1 (x-1)}{\mu}\right) \right) + O(\mu), \quad (3.22)$$

где $q_0 = q(0)$, $q_1 = q(1)$.

ПРИМЕР 2. Исследуем прогиб балки на упругом основании в окрестности точки разрыва нагрузки. В качестве модельного возьмем уравнение с постоянными коэффициентами

$$\mu^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + y = g(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad g(x) = 0, \quad x < 0; \quad g(x) = 1, \quad x \geq 0.$$

В окрестности точки разрыва нагрузки $x = 0$ решение имеет вид:

$$y = C_3 e^{r_3 x/\mu} + C_4 e^{r_4 x/\mu}, \quad r_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad x < 0;$$

$$y = C_1 e^{r_1 x/\mu} + C_2 e^{r_2 x/\mu} + 1, \quad r_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad x > 0.$$

Постоянные C_k находим из условий непрерывности при $x = 0$ функции y и ее первых трех производных

$$C_3 r_3^m + C_4 r_4^m = \delta_{m0} + C_1 r_1^m + C_2 r_2^m, \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

$$\delta_{00} = 1, \quad \delta_{m0} = 1, \quad m > 0.$$

Решение этой системы суть

$$C_1 = C_2 = -1/4, \quad C_3 = C_4 = 1/4.$$

Теперь находим

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{x_1} \cos x_1, \quad x_1 = \frac{x}{\mu\sqrt{2}}, \quad x < 0;$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x_1} \cos x_1, \quad x \geq 0.$$

Прогиб $y_1(x)$ жестко закрепленной балки ($y(0) = y'(0) = 0$) и прогиб $y_2(x)$ шарнирно опертой балки ($y(0) = y''(0) = 0$) определяются равенствами

$$y_1(x) = 1 - e^{-x_1} (\cos x_1 + \sin x_1), \quad x \geq 0,$$

$$y_2(x) = 1 - e^{-x_1} \cos x_1, \quad x \geq 0.$$

На рис. 4.2 показаны функции $y(x)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (кривые 0, 1, и 2 соответственно).

Максимальные значения прогибов

$$y^{max} = y(3\pi/4) = 1.0335,$$

$$y_1^{max} = y(\pi) = 1.0432,$$

$$y_2^{max} = y(3\pi/4) = 1.0670.$$

Вдали от точки $x = 0$ имеем $y \simeq 1$. Следовательно, в окрестности точки разрыва нагрузки или точки закрепления балки происходит незначительное увеличение прогиба. Тот же эффект наблюдается и для балки с переменными параметрами, ибо главные члены асимптотических разложений в этом случае те же, что и для балки с постоянными параметрами.

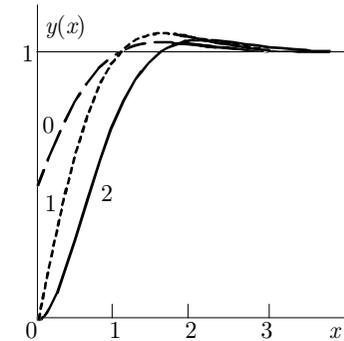


Рис. 4.2

4.3.5. Регулярное вырождение

Рассмотрим теперь случай регулярного вырождения, исследованный впервые в работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [8]. Пусть характеристическое уравнение (2.4) или (1.7) имеет l корней вида (3.14), однако $l < n$. Оставшиеся $m = n - l$ корней тождественно равны нулю. Иными словами, рассматривается уравнение (1.16) или система (2.15). Будем предполагать, что

$$m_1 = n_1 - l_1 \geq 0, \quad m_2 = n_2 - l_2 \geq 0, \quad m = m_1 + m_2, \quad (3.23)$$

где n_1 и n_2 — те же, что и в (3.3).

С погрешностью, как и ранее, порядка $e^{-c/\mu}$, $c > 0$ матрица (3.8) имеет в этом случае вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_{01} & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{02} & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{D}^{(k)}, \quad (3.24)$$

где размеры прямоугольных матриц следующие: \mathbf{D}_1 — $n_1 * l_1$, \mathbf{D}_{01} — $n_1 * m$, \mathbf{D}_{02} — $n_2 * m$, \mathbf{D}_2 — $n_2 * l_2$.

Будем предполагать, что

$$\text{rang}\{\mathbf{D}_j(0)\} = l_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.25)$$

Если

$$\det \mathbf{D}(0) \neq 0, \quad (3.26)$$

то при достаточно малых μ выполнено условие (3.9), искомое решение существует и имеет асимптотическое разложение

$$\mathbf{y} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{y}_k(x) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbf{z}_k^{(j)}(\xi_j) + \mathbf{y}^*(x, \mu), \quad (3.27)$$

где первое слагаемое представляет собой решение типа (1.20), (2.19), соответствующее нулевым корням характеристического уравнения (1.7) или (2.4). Второе слагаемое суть интегралы краевого эффекта вблизи краев $x = x_1$ и $x = x_2$, причем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x - x_1}{\mu}, \quad \mathbf{z}_k^{(1)}(\xi_1) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \rightarrow \infty, \\ \xi_2 &= \frac{x - x_2}{\mu}, \quad \mathbf{z}_k^{(2)}(\xi_2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Последнее слагаемое в (3.27) — это частное решение (1.30) или (2.29). Если $\gamma(x) \equiv 0$, частное решение $\mathbf{y}^*(x, \mu)$ также является медленно меняющимся и может быть включено в первую сумму в (3.27).

Рассмотрим уравнение (1.32) с граничными условиями частного вида

$$\frac{d^k y}{dx^k} = b_{kj} \quad \text{при} \quad x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, m_j + l_j - 1, \quad j = 1, 2, \quad (3.29)$$

где b_{kj} не зависят от μ .

Если выполнены условия (3.14), то при $\mu \rightarrow 0$ краевая задача (1.32), (3.29) вырождается в задачу (1.34) с граничными условиями

$$\frac{d^k y}{dx^k} = b_{kj} \quad \text{при} \quad x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, 2. \quad (3.30)$$

Если решение $y_0(x)$ вырожденной задачи существует и единственно, то при достаточно малых μ существует и единственно решение $y_0(x, \mu)$ исходной задачи. Оно имеет вид (3.27), причем несколько первых слагаемых во второй сумме равны нулю:

$$y(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=m_j}^{\infty} \mu^k \mathbf{z}_k^{(j)}(\xi_j). \quad (3.31)$$

Предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} y(x, \mu) = y_0(x) \quad (3.32)$$

в промежутке $x_1 + \varepsilon \leq x \leq x_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ является равномерным по x вместе со всеми производными, в промежутке $x_1 \leq x \leq x_2 - \varepsilon$ является равномерным по x вместе с $m_1 - 1$ производными и в промежутке $x_1 + \varepsilon \leq x \leq x_2$ является равномерным по x вместе с $m_2 - 1$ производными.

Наличие чисто мнимых корней $\lambda_k(x)$ характеристического уравнения (1.19) или (2.4) существенно затрудняет построение решения, ибо, как правило, соотношение (3.11) не выполняется, и множество нулей функции $D(\mu)$ имеет точку сгущения $\mu = 0$. При этих условиях неоднородная задача здесь не рассматривается, а однородная задача будет рассмотрена в п.4.4.

Найдем приближенные асимптотические решения некоторых краевых задач теории деформируемого твердого тела, для которых имеет место случай регулярного вырождения.

4.3.6. Неабсолютно гибкая струна

Прогиб неабсолютно гибкой струны описывается уравнением

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx_1^2} \right) - T \frac{d^2 y}{dx_1^2} = g_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l,$$

где EI — жесткость струны на изгиб, T — ее натяжение, $g_1(x_1)$ — интенсивность внешней нагрузки.

После перехода к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} x_1 &= lx, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ EI &= E_0 I_0 p(x) > 0, \\ g_1(x_1) &= E_0 I_0 g(x) \end{aligned}$$

уравнение принимает вид

$$\mu^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \frac{d^2 y}{dx^2} = g(x), \quad \mu^2 = \frac{E_0 I_0}{T l^2}, \quad (3.33)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр.

Возьмем граничные условия

$$y(x) = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = 1, \quad (3.34)$$

соответствующие жесткому закреплению концов струны.

Построим первые члены асимптотики решения краевой задачи (3.33), (3.34), считая для простоты $p(x) \equiv 1$.

Характеристическое уравнение (1.19) $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет один положительный и один отрицательный корень. Следовательно, краевая задача (3.33), (3.34) при $\mu \rightarrow 0$ регулярно вырождается в краевую задачу

$$-\frac{d^2 y_0}{dx^2} = g(x), \quad y_0(0) = y_0(1) = 0. \quad (3.35)$$

Решение краевой задачи (3.33), (3.34) представимо в виде трех сумм (3.27):

$$y \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k z_k^{(j)}(\xi_j),$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{x}{\mu}, & z_k^{(1)}(\xi_1) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \rightarrow \infty, \\ \xi_2 &= \frac{x-1}{\mu}, & z_k^{(2)}(\xi_2) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi_2 \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Первая из них дает медленную часть решения, а две другие (при $j=1, 2$) — интегралы краевого эффекта. Слагаемые в этих суммах удобно определять последовательно. Покажем, как это можно сделать.

Пусть решение задачи (3.35) найдено

$$y_0(x) = xg_2(1) - g_2(x), \quad g_2(x) = \int_0^x \left(\int_0^t g(t_1) dt_1 \right) dt.$$

Это решение, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям $y'(x)=0$ при $x = 0, x = 1$ (которые были отброшены при переходе от полной задачи (3.33), (3.34) к вырожденной задаче (3.35)). Рассмотрим край $x = 0$ и добавим к решению y_0 интеграл краевого эффекта

$$y(x, \mu) = y_0(x) + C\mu e^{-x/\mu}.$$

При $C = y'_0(0)$ условие $y'_0(x) = 0$ при $x = 0$ будет выполнено. Выполняя также это условие при $x = 1$, получаем приближенное решение вида

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y'_0(0) e^{-x/\mu} - \mu y'_0(1) e^{(x-1)/\mu}.$$

Как и ранее, пренебрежем взаимным влиянием краевых эффектов, допуская при этом погрешность порядка $\varepsilon = e^{-1/\mu}$, т. е. будем приближенно считать $\varepsilon = e^{-1/\mu} = 0$.

Построенное решение уже не удовлетворяет условиям $y(0)=y(1)=0$. Невязка имеет порядок μ . Возьмем

$$y^{(1)}(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu y'_0(0) e^{-x/\mu} - \mu y'_0(1) e^{(x-1)/\mu}.$$

Функция $y_1(x)$ находится из решения краевой задачи

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0, \quad y_1(0) = -y'_0(0), \quad y_1(1) = y'_0(1).$$

Следовательно, $y_1(x) = y'_0(0) + x(y'_0(0) + y'_0(1))$.

Функция $y^{(1)}(x, \mu)$ не удовлетворяет условиям $y'_1(0) = y'_1(1) = 0$. Невязка имеет порядок μ . Следующим шагом должно быть уточнение интегралов краевого эффекта. Таким способом можно найти любое число членов ряда (3.27).

4.3.7. Осесимметричная деформация оболочки вращения

Теория тонких оболочек порождает большое число задач, решаемых асимптотическими методами. Рассмотрим систему уравнений, описывающих осесимметричную деформацию тонкой оболочки вращения. Три уравнения равновесия оболочки запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{ds} + \frac{B'}{B}(T_1 - T_2) - \frac{Q_1}{R_1} + q_1^* &= 0, \\ \frac{dQ_1}{ds} + \frac{B'}{B}Q_1 + T_1 \left(\frac{1}{R_1} + \kappa_1 \right) + T_2 \left(\frac{1}{R_2} + \kappa_2 \right) + q_n^* &= 0, \\ \frac{dM_1}{ds} + \frac{B'}{B}(M_1 - M_2) + Q_1 &= 0, \quad (') = \frac{d}{ds}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где s — длина дуги меридиана. Форму срединной поверхности характеризуют функции $B(s), R_1(s), R_2(s), \theta(s)$ (см. рис. 4.3), где $B(s)$ —

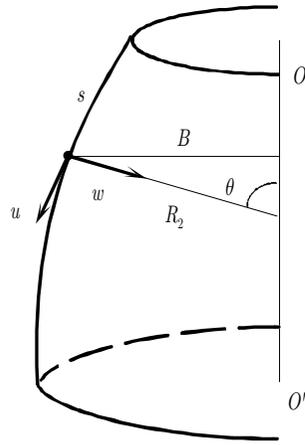


Рис. 4.3

расстояние точки срединной поверхности оболочки до оси вращения, $R_1(s)$ и $R_2(s)$ – главные радиусы кривизны, причем

$$R_1 = -\frac{d\theta}{ds}, \quad R_2 = \frac{B}{\sin \theta}, \quad B' = -\cos \theta.$$

Далее в системе (3.36) T_1 , T_2 – усилия в срединной поверхности, Q_1 – поперечная сила, M_1 , M_2 – изгибающие моменты, q_1^* , q_n^* – интенсивности внешних распределенных нагрузок в проекциях на касательную и нормаль к оболочке.

Усилия и моменты связаны с деформациями срединной поверхности по формулам:

$$\begin{aligned} T_1 &= K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & T_2 &= K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), & K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где E , ν , h – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки. Деформации растяжения срединной поверхности ε_1 , ε_2 и ее изгибы κ_1 , κ_2 связаны с перемещениями $u(s)$, $w(s)$ (см. рис. 4.3) по форму-

лам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{B'}{B}u - \frac{w}{R_2}, \\ \kappa_1 &= \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{1}{R_1}\frac{du}{ds}, & \kappa_2 &= \frac{B'}{B}\left(\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_1}\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Уравнения (3.36)–(3.38) образуют замкнутую систему шестого порядка. Отбросим во втором уравнении (3.36) нелинейные слагаемые $T_1\kappa_1 + T_2\kappa_2$ (их роль поясняется далее). Тогда эта система становится линейной.

На каждом крае оболочки следует задать три граничных условия.

а	$u = w = w' = 0$	жесткое закрепление
б	$T_1 = Q_1 = M_1 = 0$	свободный край
в	$T_1 = w = M_1 = 0$	промежуточный случай
г	$T_1 = w = w' = 0$	промежуточный случай
д	$u = w = M_1 = 0$	промежуточный случай

(3.39)

Если на крае заданы ненулевые перемещения или усилия, то граничные условия будут неоднородными.

Часто применяется упрощенный подход к расчету оболочек – безмоментная теория. Оболочка предполагается абсолютно гибкой, т. е. $M_1 = M_2 = Q_1 = 0$. В результате из трех уравнений (3.36) остаются два первых:

$$\frac{dT_1^0}{ds} + \frac{B'}{B}(T_1^0 - T_2^0) + q_1^* = 0, \quad \frac{T_1^0}{R_1} + \frac{T_2^0}{R_2} + q_n^* = 0. \quad (3.40)$$

Вместе с соотношениями (3.37) и (3.38) система (3.40) имеет второй порядок. Поэтому из трех граничных условий (3.39) следует сохранить только одно, именно первое условие.

Достаточно точное приближенное решение полной системы (3.36) можно представить в виде суммы безмоментного решения и интегралов краевого эффекта в окрестностях краев оболочки $s = s_1$ и $s = s_2$.

Введем характерный размер R срединной поверхности и отнесем к нему все линейные размеры. Введем малый параметр μ по формуле

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}.$$

Тогда система (3.36) – (3.38) сведется к двум уравнениям относительно перемещений $u(s)$, $w(s)$:

$$\begin{aligned} L_{11}u + \mu^4 N_{11}u + L_{13}w + \mu^4 N_{13}w + q_1 &= 0, \\ L_{31}u + \mu^4 N_{31}u + L_{33}w + \mu^4 N_{33}w + q_n &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}u &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{B'}{B} \frac{du}{ds} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 u + \frac{\nu B''}{B} \right), \\ L_{13}w &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{B'c_2w}{B} - \frac{(Bc_1w)'}{B} \right), \\ L_{31}u &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(c_1 \frac{du}{ds} + \frac{B'c_2u}{B} \right), \\ L_{33}w &= -\frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{R_1^2} + \frac{2\nu w}{R_1R_2} + \frac{w}{R_2^2} \right), \\ N_{33} &= -\frac{d^4w}{ds^4} - \frac{2B'}{B} \frac{d^3w}{ds^3} + \dots, \\ c_1 &= \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}, \quad c_2 = \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad q_1 = \frac{q_1^*}{Eh}, \quad q_2 = \frac{q_2^*}{Eh}. \end{aligned}$$

У оператора N_{33} выписаны только главные члены, а остальные операторы N_{ij} не приводятся, ибо они не участвуют в построении старших слагаемых в решении.

Интегралы краевого эффекта ищем в виде (2.3):

$$\begin{aligned} w^k(s, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n w_n^k(s) \exp \left(\frac{1}{\mu} \int \lambda(s) ds \right), \\ u^k(s, \mu) &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n u_n^k(s) \exp \left(\frac{1}{\mu} \int \lambda(s) ds \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Путем подстановки в систему (3.41) находим

$$\lambda^4(s) + \frac{1}{R_2^2(s)} = 0, \quad w_0^k(s) = B^{-1/2} R_2^{3/4}, \quad u_0^k(s) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) w_0^k. \quad (3.43)$$

Для частного случая круговой цилиндрической оболочки $R_1=0$, $R_2=B=1$ и система (3.41) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2u}{ds^2} - \nu \frac{dw}{ds} \right) + q_1 &= 0, \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{ds} - w \right) - \mu^4 \frac{d^4w}{ds^4} + q_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Исключая функцию u , для w получим уравнение четвертого порядка

$$\mu^4 \frac{d^4w}{ds^4} + w = q_n - \nu \int q_1 ds, \quad u = \int \left(\nu w - (1-\nu^2) \int q_1 ds \right) ds. \quad (3.45)$$

Однородное уравнение (3.45) описывает краевой эффект. Заметим, что оно идентично уравнению (3.20) прогиба балки, лежащей на упругом основании.

Пренебрегая в (3.44) слагаемым с множителем μ^4 , приходим к безмоментной системе уравнений:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = q_1 - \nu \frac{dq_n}{ds}, \quad w = \nu \frac{du}{ds} + (1-\nu^2)q_n. \quad (3.46)$$

4.3.8. Деформация оболочки под действием внешнего давления

Найдем приближенные выражения для перемещений u , w цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерного нормального давления q_n . Пусть на краях $x=0$ и $x=l$ заданы граничные условия шарнирного опирания (3.39в).

Запишем граничные условия в виде

$$\frac{du}{ds} = w = \frac{d^2w}{ds^2} = 0 \quad \text{при} \quad s=0, \quad s=l.$$

Безмоментная часть решения суть

$$u_0 = C + \nu q_n s, \quad w_0 = q_n,$$

причем постоянная C остается неопределенной, ибо заданные граничные условия не препятствуют осевому смещению оболочки. При построении безмоментного решения удовлетворяем условию

$$T_1 = \frac{du}{ds} - \nu w = 0.$$

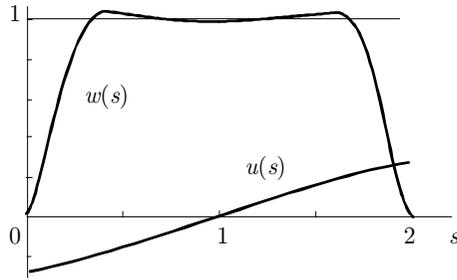


Рис. 4.4

Добавляя к найденному решению интегралы краевого эффекта, добиваемся выполнения граничных условий $w = dw/ds = 0$, первому из которых безмоментное решение не удовлетворяет. Тогда получим

$$u = C + \nu q_n s + \frac{\mu \nu q_n}{\sqrt{2}} (e^{-s_1} (\cos s_1 - \sin s_1) - e^{s_2} (\cos s_2 + \sin s_2)),$$

$$w = q_n (1 - e^{-s_1} \cos s_1 - e^{s_2} \cos s_2), \quad s_1 = \frac{s}{\mu \sqrt{2}}, \quad s_2 = \frac{s-l}{\mu \sqrt{2}}.$$

Это решение точно удовлетворяет уравнениям (3.44). Граничные же условия (3.39в) выполняются с погрешностью порядка $\exp(-l/(\mu \sqrt{2}))$. Следовательно, для коротких оболочек, у которых $l = L/R \ll 1$, необходимо учитывать взаимное влияние краевых эффектов. Здесь предполагается, что $l \sim 1$.

На рис. 4.4 показаны функции $u(s)$ и $w(s)$ при $l = 2$, $\mu = 0.1$, $\nu = 0.3$, $q_n = 1$, $C = -\nu l$.

4.3.9. Деформация оболочки под действием продольной силы

Исследуем перемещения цилиндрической оболочки при осевом растяжении или сжатии в предположении, что на краях оболочки заданы граничные условия

$$T_1 = T_1^0, \quad w = \frac{d^2 w}{ds^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l.$$

В силу первого уравнения (3.36) имеем $T_1(s) \equiv T_1^{(0)}$. Учитывая, что

$$T_1 = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left(\frac{du}{ds} - \nu w \right),$$

находим безмоментное решение

$$u^{(0)} = C + as, \quad w^{(0)} = \nu a, \quad a = \frac{T_1^0 R}{Eh}, \quad (3.47)$$

где C — произвольная постоянная.

Найдем интегралы краевого эффекта, которые следует добавить к построенному безмоментному решению, чтобы удовлетворить граничным условиям, накладываемым на прогиб w . Рассмотрим окрестность края $s = 0$. Как и в пп. 4.3.8, решение имеет вид:

$$u = C + as + \frac{\mu \nu^2 a}{\sqrt{2}} e^{-s_1} (\cos s_1 - \sin s_1),$$

$$w = \nu a (1 - e^{-s_1} \cos s_1), \quad s_1 = \frac{s}{\mu \sqrt{2}}. \quad (3.48)$$

Определим пределы применимости построенного решения, обусловленные увеличением осевой силы $|T_1^0|$ (при сжатии $T_1^0 < 0$). Для этого обратимся ко второму уравнению (3.36) и сохраним в нем нелинейное слагаемое $T_1 \kappa_1$, которое при переходе к системе (3.44) было отброшено. В результате для построения интегралов краевого эффекта вместо (3.45) получим уравнение

$$\mu^4 \frac{d^4 w}{ds^4} - 2\mu^2 \tau \frac{d^2 w}{ds^2} + w = 0, \quad \tau = \frac{T_1^0}{2Eh\mu^2}. \quad (3.49)$$

Рассмотрим его характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 2\tau \lambda^2 + 1 = 0. \quad (3.50)$$

При $(\tau > -1)$, т.е. при растяжении $T_1^0 > 0$ и при не слишком большом сжатии ($T_1^0 < 0$, $|\tau| < 1$), уравнение (3.7) имеет два корня с положительной вещественной частью и два — с отрицательной. Иными словами, можно построить интегралы краевого эффекта. Построим их

таким образом, чтобы в сумме с ними решение (3.47) удовлетворяло граничным условиям $w = d^2w/ds^2 = 0$ при $s = 0$. Получаем

при $|\tau| < 1$

$$u = C + as + O(\mu), \quad w = w_0 [1 - e^{-\alpha_1}(\cos \beta_1 + b \sin \beta_1) + O(\mu)],$$

$$\lambda_{1,2} = -\sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1-\tau}{2}} = -\alpha \pm i\beta, \quad b = \frac{\tau}{\tau_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha s}{\mu}, \quad \beta_1 = \frac{\beta s}{\mu};$$

при $\tau > 1$

$$u = C + as + O(\mu), \quad w = w_0 \left[1 - \frac{1}{2\tau_1}(\lambda_2^2 e^{-\lambda_1 s/\mu} - \lambda_1^2 e^{-\lambda_2 s/\mu}) + O(\mu) \right],$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\tau - \tau_1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\tau + \tau_1}, \quad w_0 = \nu a = \frac{\nu h \tau}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}},$$

где $\tau_1 = \sqrt{|1 - \tau^2|}$.

Следует обратить внимание на то, что при $\tau \rightarrow -1 + 0$ будет $w \rightarrow \infty$. При $\tau = -1$ или при сжимающей силе $T_1^0 = -2Eh\mu^2$ оболочка теряет устойчивость при продольном сжатии. Заметим, что при $\tau = +1$ функция $w(s)$ не имеет особенностей, ибо неопределенность типа $0/0$ раскрывается:

$$w = w_0(1 - e^{-\xi}(1 + \xi/2) + O(\mu)), \quad \xi = s/\mu, \quad \tau = 1.$$

4.3.10. Упражнения

4.3.1. Решить краевую задачу (3.18) в частном случае $c(x) = 1 + x$, $q(x) \equiv 1$, удерживая в решении слагаемые вплоть до величин порядка μ^2 включительно. Построить график функции $y(x, \mu)$ при $\mu = 0.1$.

4.3.2. Построить асимптотическое разложение решения уравнения $\mu^2 y'' - y + q(x) = 0$, $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, где $q(x) = x$ при $0 \leq x \leq 1$ и $q(x) \equiv 0$ при $x < 0$ или $x > 1$, описывающего прогиб достаточно длинной струны, лежащей на упругом основании, под действием переменной нагрузки. Построить график функции $y(x, \mu)$ при $\mu = 0.2$.

4.3.3. В условиях предыдущего примера 4.3.2 взять $q(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$. Построить приближенное и точное решение уравнения $\mu^2 y'' - y + q(x) = 0$, $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

4.3.4. Построить графики приближенных решений (3.21) и (3.22) для балки переменной толщины при $p(x) = (1 + \alpha x)^3$, $c(x) \equiv 1$, $g(x) \equiv 1$. Взять $\alpha = 0.2$, $\mu = 0.2$.

4.3.5. Построить приближенные решения уравнения (3.20), аналогичные решениям (3.21) и (3.22) для балки с жестко закрепленными концами $y(x) = y'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$.

4.3.6. В асимптотическом решении краевой задачи (3.33), (3.34) найти члены порядка μ^2 .

4.3.7. Путем подстановки (3.42) в систему (3.41) вывести формулы (3.43).

4.3.8. В условиях пп. 4.3.8 рассмотреть граничные условия (3.39г).

4.3.9. В условиях подп. 4.3.8 рассмотреть граничные условия жесткой заделки (3.39а).

4.3.10. Найти прогиб w цилиндрической оболочки при осевом растяжении или сжатии в предположении, что на краях оболочки заданы граничные условия $T_1 = T_1^0$, $w = w' = 0$ при $s = 0$, $s = l$.

4.4. Построение спектра

Рассматриваем те же задачи, что и в п. 4.3, однако уравнения и граничные условия считаем однородными, т. е. исследуем уравнения (1.1), (1.16), (2.1), (2.15) с граничными условиями вида (3.3) при $b_j(\mu) = 0$. Предположим, что коэффициенты уравнений (и, быть может, граничных условий) зависят от спектрального параметра Λ . Будем искать собственные значения $\Lambda = \Lambda^{(k)}(\mu)$, при которых существуют ненулевые решения данных краевых задач. Ограничимся случаем вещественных Λ .

4.4.1. Асимптотика решений краевых задач на собственные значения

Для определения Λ используем уравнение (3.10), которое запишем в виде

$$\Delta(\Lambda, \mu) = \det D(\Lambda, \mu) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь возможны два случая. В первом из них существует предел

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\Lambda, \mu) = \Delta(\Lambda, 0), \quad (4.2)$$

а во втором предел в левой части (4.2) не существует.

В первом случае (при выполнении естественных дополнительных условий) имеет место разложение

$$\Lambda = \Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \mu^2\Lambda_2 + \dots \quad (4.3)$$

по целым степеням μ . Здесь Λ_0 — корень уравнения $\Delta(\Lambda, 0) = 0$. Этот случай имеет место для ряда краевых задач (см. п. 4.3), для которых характеристическое уравнение не имеет чисто мнимых корней.

В частности, если характеристическое уравнение не имеет чисто мнимых и нулевых корней и выполнены условия (3.14), то

$$\Delta(\Lambda, \mu) = \Delta_1(\Lambda, 0)\Delta_2(\Lambda, 0) + O(\mu) \quad (4.4)$$

и для каждого простого корня Λ_0 уравнений $\Delta_j(\Lambda, 0)$, $j = 1, 2$ имеет место разложение (4.3). Собственные функции имеют характер интегралов краевого эффекта и локализуются в окрестности соответствующего края промежутка $[x_1, x_2]$.

Если для уравнения (1.16) заданы граничные условия (3.29) при $b_{kj} = 0$ и ненулевые корни уравнения (1.18) удовлетворяют условиям (3.14), то при $\mu \rightarrow 0$ исходная краевая задача вырождается в задачу для уравнения (1.17) с граничными условиями (3.30) при $b_{kj} = 0$.

Запишем теперь (1.17), (3.30) в виде

$$L_0(\Lambda)y \equiv \sum_{k=0}^m a_{k0}(x, \Lambda) \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, 2.$$

Для каждого простого собственного значения Λ_0 вырожденной задачи (4.5) имеет место разложение (4.3), а собственная функция имеет разложение (3.31).

Для последней задачи опишем алгоритм построения собственной функции и собственного значения, ограничившись определением Λ_1 в (4.3). Пусть найдены Λ_0 и $y_0(x)$ для вырожденной задачи, причем Λ_0 — простое, т. е. функция $y_0(x)$ с точностью до постоянного множителя единственна.

Находим функции $z_{m_j}^{(j)}(\xi_j)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sum_{k=0}^n a_{k+m}(x_j, 0) \frac{d^k z_{m_j}^{(j)}}{d\xi_j^k} = 0, \quad \xi_j = \frac{x - x_j}{\mu}, \quad j = 1, 2, \quad (4.6)$$

условиям затухания (3.28) и граничным условиям при $\xi_j = 0$:

$$\frac{d^{m_j} z_{m_j}^{(j)}}{d\xi_j^{m_j}} = -\frac{d^{m_j} y_0(x_j)}{dx^{m_j}}, \quad j = 1, 2, \quad (4.7)$$

$$\frac{d^k z_{m_j}^{(j)}}{d\xi_j^k} = 0, \quad k = m_j + 1, m_j + 2, \dots, m_j + l_j - 1.$$

Функция $z_{m_j}^{(j)}(\xi_j)$ существует и единственна.

Для функции $y_1(x)$ получаем краевую задачу

$$L_0(\Lambda_0)y_1 = \varphi_1(x),$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^m a_{k1}(x, \Lambda_0) \frac{d^k y_0}{dx^k} + c_1 \Lambda_1, \quad c_1 = \sum_{k=0}^m \frac{\partial a_{k0}(x, \Lambda_0)}{\partial \Lambda_0} \frac{d^k y_0}{dx^k} = 0,$$

$$\frac{d^k y_1}{dx^k} = 0, \quad \text{при} \quad x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, m_j - 2,$$

$$\frac{d^{m_j-1} y_1}{dx^{m_j-1}} = d_j = -\left. \frac{d^{m_j-1} z_{m_j}^{(j)}}{d\xi_j^{m_j-1}} \right|_{\xi_j=0}, \quad j = 1, 2. \quad (4.8)$$

Так как однородная задача, соответствующая (4.8), имеет ненулевое решение $y_0(x)$, неоднородная задача (4.8) имеет решение не при всяких правых частях. Условие ее совместности при $c_1 \neq 0$ служит для определения Λ_1 . Упомянутое условие совместности выражается уравнением

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) z(x) dx - (-1)^{m_1} a_{m_0}(x_2, \Lambda_0) d_2 \frac{d^{m_1} z(x_2)}{dx_2^{m_1}} + (-1)^{m_2} a_{m_0}(x_1, \Lambda_0) d_1 \frac{d^{m_2} z(x_1)}{dx_1^{m_2}} = 0, \quad (4.9)$$

где $z(x)$ — ненулевое решение сопряженной с (4.5) краевой задачи

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} (a_{k0}(x, \Lambda_0) z) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{d^k z}{dx^k} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_j, \quad k = 0, 1, \dots, m - m_j - 1, \quad j = 1, 2.$$

Если задача (4.5) самосопряженная, то в (4.9) $z(x) = y_0(x)$.

Если характеристическое уравнение имеет одну или несколько пар чисто мнимых корней, предел (4.2) может не существовать. Например, если уравнение (1.7) имеет одну пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm iq(x, \Lambda)$ и не имеет нулевых корней, определитель (4.1) записывается в виде

$$\Delta(\Lambda, \mu) = a(\Lambda, \mu) \sin(\mu^{-1}\varphi(\Lambda) + \Psi(\Lambda, \mu)) = 0, \quad \varphi(\Lambda) = \int_{x_1}^{x_2} q(x, \Lambda) dx. \quad (4.11)$$

Если $r = \partial\varphi/\partial\Lambda \neq 0$, наличие быстро осциллирующего при малых μ множителя в (4.11) приводит к тому, что это уравнение имеет часто расположенные корни. Расстояние между соседними корнями имеет порядок μ и равно

$$\Lambda^{(k+1)} - \Lambda^{(k)} \simeq \pi\mu r^{-1}. \quad (4.12)$$

Построим асимптотические решения некоторых задач теории колебаний.

4.4.2. Колебания неабсолютно гибкой струны

Свободные колебания неабсолютно гибкой струны описываются уравнением

$$-EJ \frac{d^4 y}{dx_1^4} + T \frac{d^2 y}{dx_1^2} + \rho\omega^2 y = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l,$$

где EJ — жесткость на изгиб, T — натяжение струны, ρ — линейная плотность, ω — частота колебаний, l — длина струны. Запишем это уравнение в безразмерных переменных:

$$-\mu^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \Lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.13)$$

где

$$\mu^2 = \frac{EJ}{Tl^2}, \quad \Lambda = \frac{\rho\omega^2 l^2}{T}, \quad x_1 = lx.$$

Найдем асимптотические разложения при $\mu \rightarrow +0$ собственных значений Λ для граничных условий

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = 1. \quad (4.14)$$

Асимптотические разложения интегралов уравнения (4.13) были построены в примере 4.1.5, и ими можно было бы воспользоваться для удовлетворения граничным условиям (4.14). Однако теперь имеется осложняющее обстоятельство, заключающееся в том, что $\Lambda = \Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \dots$. Поэтому для решения задачи используем метод итераций (см. пп. 4.3.6).

В качестве нулевого приближения возьмем вырожденную задачу, соответствующую абсолютно гибкой струне (здесь имеет место регулярное вырождение по Вишику–Люстернику):

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \Lambda_0 y_0 = 0, \quad y_0(0) = y_0(1) = 0. \quad (4.15)$$

Ее решение

$$\Lambda_0 = n^2\pi^2, \quad y_0 = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение полной задачи имеет вид

$$y(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k z_k^{(j)}(\xi_j), \quad (4.16)$$

где использованы те же обозначения, что и в подп. 4.3.6.

Удовлетворяя граничным условиям $y'(0) = y'(1) = 0$, находим интегралы краевого эффекта

$$z_1^{(1)} = n\pi e^{-\xi_1}, \quad \xi_1 = \frac{x}{\mu}, \quad z_1^{(2)} = (-1)^{n+1} n\pi e^{\xi_2}, \quad \xi_2 = \frac{x-1}{\mu}.$$

Таким образом,

$$y(x, \mu) \simeq \sin n\pi x + \mu n\pi \left[e^{-x/\mu} + (-1)^{n+1} e^{(1-x)/\mu} \right].$$

Далее вычисляем Λ_1 и $y_1(x)$ из краевой задачи

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \Lambda_0 y_1 + \Lambda_1 y_0 = 0, \quad y_1(0) = -n\pi, \quad y_1(1) = (-1)^n n\pi.$$

Получаем

$$\Lambda_1 = 4n^2\pi^2, \quad y_1(x) = n\pi(2x-1) \cos n\pi x.$$

Итак, приближенное решение задачи

$$\Lambda = n^2\pi^2 + 4\mu n^2\pi^2 + O(\mu^2), \quad n = 1, 2, \dots, \\ y(x, \mu) = \sin n\pi x + \mu n\pi \left[e^{-x/\mu} + (-1)^{n+1} e^{(1-x)/\mu} + (2x-1) \cos n\pi x \right] + O(\mu^2).$$

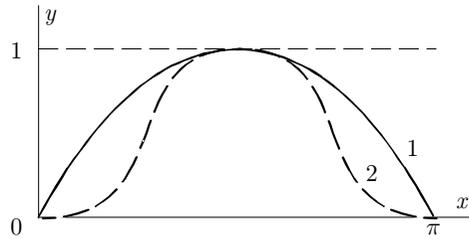


Рис. 4.5

На рис. 4.5 показана первая форма собственных колебаний абсолютно гибкой (кривая 1) и неабсолютно гибкой струны (кривая 2) с защемленными концами. Как и следовало ожидать, при учете жесткости струны на изгиб ($\mu \neq 0$) ее частоты колебаний увеличиваются.

4.4.3. Колебания струны с переменной плотностью

Свободные колебания струны с переменной плотностью описываются уравнением

$$T \frac{d^2 y}{dx_1^2} + \rho_1(x_1) \omega^2 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0,$$

где T — натяжение струны, $\rho_1(x_1)$ — линейная плотность, ω — частота колебаний, l — длина струны.

Запишем уравнения в безразмерной форме

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \Lambda \rho(x) y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где

$$x_1 = lx, \quad \rho_1(x_1) = \rho_0 \rho(x), \quad \rho_0 \sim 1, \quad \Lambda = \frac{\rho_0 \omega^2}{T}.$$

Найдем асимптотику собственных значений Λ_n при $n \rightarrow \infty$. Введем малый параметр $\mu = \Lambda^{-1/2}$. Тогда уравнение примет вид

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho(x) y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (4.17)$$

рассмотренный в задаче 4.1.1. Воспользуемся построенным в ней решением

$$y(x, \mu) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n u_n(x) e^{i\varphi(x)/\mu}, \quad \varphi(x) = \int_0^x \sqrt{\rho(x)} dx. \quad (4.18)$$

Как показано в задаче 4.1.1, функции $u_n(x)$ с четными n вещественны, а с нечетными n чисто мнимы. Положим

$$U = u_0 + \mu^2 u_2 + \dots, \quad V = \mu v_1 + \mu^3 v_3 + \dots, \quad v_{2n+1} = -i u_{2n+1}. \quad (4.19)$$

Тогда, разделяя в решении (4.18) вещественную и мнимую части, находим общее решение

$$y(x, \mu) = C_1 (U \cos(\varphi/\mu) - V \sin(\varphi/\mu)) + C_2 (U \sin(\varphi/\mu) + V \cos(\varphi/\mu)), \quad (4.20)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. После подстановки в граничные условия (4.17) и приравнивания нулю определителя второго порядка, получаем уравнение для определения μ :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{\mu} = \frac{V(0)U(1) - U(0)V(1)}{U(0)U(1) + V(0)V(1)} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^{2k+1}, \quad \varphi_1 = \int_0^1 \sqrt{\rho(x)} dx. \quad (4.21)$$

Асимптотическое разложение n -го решения этого уравнения имеет вид

$$\mu_n \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(n\pi)^{2k+1}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$c_0 = \varphi_1, \quad c_1 = a_0 \varphi_1^2, \quad a_0 = \frac{v_1(1)}{u_0(1)} - \frac{v_1(0)}{u_0(0)}.$$

Вычисление коэффициентов c_k при больших k затруднительно, ибо для этого требуется несколько раз осуществлять деление рядов и подстановку одного ряда в другой. Для приближенного определения корней μ_n удобнее непосредственно решать уравнение (4.21) методом итераций, сохраняя в разложениях (4.19) то или иное число слагаемых.

4.4.4. Колебания балки с переменным поперечным сечением

Свободные колебания балки переменного поперечного сечения описываются уравнением

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left(EJ(x_1) \frac{dy^2}{dx_1^2} \right) - \omega^2 \rho_0 S_1(x_1) y = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l,$$

где EJ — жесткость на изгиб, ρ_0 — плотность, $S_1(x_1)$ — площадь поперечного сечения, l — длина балки, ω — частота колебаний.

В безразмерных переменных

$$x_1 = lx, \quad EJ(x_1) = EJ_0 p(x), \quad S_1(x_1) = S_0 \rho(x), \quad \mu^4 = \frac{EJ_0}{\rho_0 S_0 \omega^2 l^4},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho_0 S_0 l^4}} \Omega, \quad \Omega = \frac{1}{\mu^2}$$

уравнение колебаний балки имеет вид

$$\mu^4 \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - \rho(x) y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.22)$$

Найдем первые члены асимптотических разложений частот и форм свободных колебаний в случае жестко закрепленных концов балки

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = 1.$$

Общее решение уравнения (4.22) построено в подп. 4.1.1. Приведем два первых слагаемых в его асимптотическом разложении:

$$y(x, \mu) = C_1(u_0 \cos z - \mu v_1 \sin z) + C_2(u_0 \sin z + \mu v_1 \cos z) + C_3 e^{-z}(u_0 + \mu v_1) + C_4 e^{z_1}(u_0 - \mu v_1),$$

где C_k — произвольные постоянные,

$$z = \frac{1}{\mu} \int_0^x q(x) dx, \quad z_1 = \frac{1}{\mu} \int_1^x q(x) dx, \quad q(x) = \left(\frac{\rho}{p} \right)^{1/4},$$

$$u_0 = p^{-1/2} q^{-3/2}, \quad v_1 = \frac{u_0}{8} \int_0^x \left(\frac{15(q')^2 - 10qq''}{q^3} + \frac{3(p')^2 - 4pp''}{p^2 q} \right) dx.$$

После подстановки в граничные условия и приравнивания нулю определителя четвертого порядка с точностью до величин порядка μ^2 получаем

$$\cos z(1) - \mu b_1 \sin z(1) + O(\mu^2) = 0, \quad b_1 = \frac{v_1(1)}{u_0(1)},$$

откуда находим (см. подп. 1.5.1)

$$\mu_n = \frac{f_1 c_n}{c_n^2 - f_1 b_1}, \quad c_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad f_1 = \int_0^1 q(x) dx.$$

Величина Ω_n , пропорциональная частоте колебаний ω_n , вычисляется следующим образом:

$$\Omega_n = \left(\frac{c_n}{f_1} - \frac{b_1}{c_n} \right)^2 + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

4.4.5. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки

Исследуем спектр частот свободных осесимметричных колебаний тонкой круговой цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями.

Запишем систему уравнений (3.44), внося в нее инерционные слагаемые:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} - \nu \frac{dw}{ds} \right) + \Lambda u &= 0, \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{ds} - w \right) - \mu^4 \frac{d^4 w}{ds^4} + \Lambda w &= 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\Lambda = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}.$$

Здесь u, w — проекции перемещения на направления образующей и нормали, ω — частота колебаний, ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, μ — малый параметр, Λ — параметр частоты.

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид

$$\frac{du}{ds} = w = \frac{d^2w}{ds^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, s = l = \frac{L}{R}, \quad (4.24)$$

где L — длина оболочки, R — ее радиус.

При $\mu = 0$ получаем уравнения колебаний безмоментной оболочки. В связи с тем, что при этом порядок системы уравнений уменьшается с 6 до 2, из трех граничных условий (3.39в) остается только одно:

$$T_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du}{ds} - \nu w = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, s = l.$$

Решение как полной, так и безмоментной задачи имеет один и тот же вид

$$u = u_0 \cos \frac{n\pi s}{l}, \quad w = w_0 \sin \frac{n\pi s}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.25)$$

Подстановка в систему (4.23) приводит к уравнению для определения параметра частоты Λ :

$$\left(\Lambda - \frac{k_n^2}{1 - \nu^2} \right) \left(\Lambda - \frac{1}{1 - \nu^2} - \mu^4 k_n^4 \right) - \frac{\nu^2 k_n^2}{(1 - \nu^2)^2} = 0, \quad k_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (4.26)$$

При каждом n это уравнение имеет два корня Λ_{n1} и Λ_{n2} .

При фиксированном μ и $n \rightarrow \infty$

$$\Lambda_{n1} \sim \frac{k_n^2}{1 - \nu^2}, \quad \Lambda_{n2} \sim \mu^4 k_n^4,$$

т. е. обе серии частот имеют точку $\Lambda = \infty$ точкой сгущения.

При $\mu = 0$ корни уравнения (4.26) обозначим Λ_{n1}^0 и Λ_{n2}^0 :

$$\Lambda_{n1}^0 = \frac{k_n^2}{1 - \nu^2} + O(1), \quad \Lambda_{n2}^0 = 1 - \frac{\nu^2}{k_n^2} + O(n^{-4}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.27)$$

т. е. безмоментная оболочка имеет две серии частот, у одной из которых (Λ_{n1}^0) точка сгущения $\Lambda = \infty$, а у другой (Λ_{n2}^0) точка сгущения $\Lambda = 1$.

Сравнивая корни Λ_{nj} и Λ_{nj}^0 уравнения (4.26) при $\mu \neq 0$ и при $\mu = 0$, получаем

$$\Lambda_{nj} = \Lambda_{nj}^0 + O(\mu^4), \quad j = 1, 2,$$

причем оценка в последней формуле неравномерна по n . При $n \sim \mu^{-1}$ остаточный член имеет тот же порядок, что и главный.

Исследуем теперь спектр частот свободных осесимметричных колебаний тонкой круговой цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями.

Полная краевая задача состоит из системы уравнений (4.23) и граничных условий (3.39а)

$$u = w = \frac{dw}{ds} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, s = l. \quad (4.28)$$

Ее решение будем сравнивать с решением вырожденной задачи

$$\frac{d^2u^0}{ds^2} + a(\Lambda^0)u^0 = 0, \quad u^0 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, s = l, \quad (4.29)$$

$$a(\Lambda^0) = \frac{\Lambda^0(1 - (1 - \nu^2)\Lambda^0)}{1 - \Lambda^0}, \quad w^0 = \frac{\nu}{1 - (1 - \nu^2)\Lambda^0} \frac{du^0}{ds},$$

дающей частоты и формы собственных колебаний безмоментной оболочки и получающейся при $\mu = 0$ в результате исключения w из системы (4.23). Спектр частот собственных колебаний безмоментной оболочки определяется из уравнения

$$a(\Lambda_{nj}^0) = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2$$

и совпадает с частотами шарнирно опертой оболочки при $n > 0$ (см. пп. 4.4.5). Форма колебаний такова:

$$u^0 = \sin \frac{n\pi s}{l}, \quad w^0 = \frac{\nu n\pi}{l(1 - (1 - \nu^2)\Lambda^0)} \cos \frac{n\pi s}{l}. \quad (4.30)$$

Полная краевая задача в рассматриваемом случае не имеет простого решения типа (4.25), удовлетворяющего всем граничным условиям (4.28). Поэтому построим сначала общее решение системы (4.23)

$$u = \sum_{k=1}^6 C_k u_k e^{p_k s}, \quad w = \sum_{k=1}^6 C_k w_k e^{p_k s}, \quad (4.31)$$

где C_k — произвольные постоянные, а u_k и w_k связаны соотношением

$$(p_k^2 + (1 - \nu^2)\Lambda)u_k - \nu p_k w_k = 0,$$

причем p_k удовлетворяют уравнению шестой степени

$$\mu^4 p^6 + (1 - \nu^2)\Lambda \mu^4 p^4 + (1 - \Lambda)p^2 + \Lambda(1 - (1 - \nu^2)\Lambda) = 0. \quad (4.32)$$

Пусть сначала $\Lambda \neq 1$. Тогда (см. п. 1.3) это уравнение имеет два корня $p_k \sim 1$ ($k=1,2$). Для оставшихся четырех корней $p_k \sim \mu^{-1}$ ($k=3,4,5,6$), причем, если $\Lambda < 1$, все корни имеют отличную от нуля вещественную часть и этим корням соответствуют интегралы краевого эффекта. Если же $\Lambda > 1$, два из корней p_k , ($k=3,4$) — чисто мнимые и им соответствуют осциллирующие интегралы. С различным поведением интегралов при $\Lambda < 1$ и при $\Lambda > 1$ связаны обсуждаемые далее особенности спектра в этих областях.

При $\Lambda < 1$ задача A_μ регулярно вырождается в задачу A_0 , и ее решение может быть построено итерационным методом (см. задачу 4.4.10).

Пусть $\Lambda > 1$. Запишем приближенные выражения корней (4.32):

$$p_{1,2} = \pm ib + O(\mu^2), \quad p_{3,4} = \pm \frac{ic}{\mu} + O(\mu), \quad p_{5,6} = \pm \frac{c}{\mu} + O(\mu),$$

$$b^2 = \frac{\Lambda(1 - (1 - \nu^2)\Lambda)}{1 - \Lambda}, \quad c^4 = \Lambda - 1 \quad (4.33)$$

и подставим общее решение (4.31) в граничные условия (4.28). Приравняв нулю получающийся при этом определитель шестого порядка, после преобразований найдем

$$\sin bl \cos \frac{cl}{\mu} + O(\mu) = 0. \quad (4.34)$$

Левая часть этого уравнения при $\mu = 0$ распадается на произведение двух сомножителей, в соответствии с чем спектр при $\Lambda > 1$ состоит из двух частей. Уравнение $\sin bl = 0$ дает $b = n\pi/l$ и в силу (4.33) имеет корни, совпадающие с собственными значениями безмоментной задачи A_0 (см. (4.29)).

Из уравнения $\cos(cl/\mu) = 0$ вычисляем

$$\Lambda_n = 1 + \left(\frac{(2n+1)\pi\mu}{2l} \right)^4, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

Это дополнительные собственные значения, аналога которым безмоментная задача не имеет.

Следует подчеркнуть, что указанные построения имеют смысл, лишь если величина $1 - \Lambda$ не близка к нулю. Действительно, оценки (4.33) становятся неравномерными в окрестности $\Lambda = 1$. Анализ остаточных членов (4.33) показывает, что

$$p_{1,2} = \pm ib \left(1 + O\left(\frac{\mu^2}{(\Lambda - 1)^{3/2}} \right) \right), \quad p_k = \frac{r_k c}{\mu} \left(1 + O\left(\frac{\mu^2}{(\Lambda - 1)^{3/2}} \right) \right),$$

где $k = 3, 4, 5, 6$, $r_k^4 = 1$. Следовательно, при $\Lambda - 1 \sim \mu^{4/3}$ приведенные выше формулы уже не применимы.

Построим спектр собственных значений Λ краевой задачи A_μ (см. (4.23), (4.28)) в окрестности точки $\Lambda = 1$ для свободных осесимметричных колебаний тонкой круговой цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями. Точка $\Lambda = 1$ — это точка сгущения частот безмоментной оболочки.

Положим $\Lambda = 1 + \mu^{4/3}z$ и перепишем уравнение (4.32) в виде

$$q^6 - z_1 q^2 + 1 = 0, \quad (4.36)$$

$$p = \mu^{-2/3} a^{1/6} q (1 + O(\mu^{4/3})), \quad a = \nu^2, \quad z = z_1 a^{2/3}.$$

При любом z_1 ($-\infty < z_1 < \infty$) уравнение (4.36) имеет пару чисто мнимых корней $q_{1,2} = \pm ix$, причем $z_1 = (x^6 - 1)/x^2$, а остальные корни, с отличной от нуля вещественной частью, находим из уравнения

$$q^4 - x^2 q^2 + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Подставляя общее решение (4.31) в граничные условия (4.28), после громоздких преобразований получим уравнение для определения неизвестной x :

$$\operatorname{tg}(\mu^{-2/3} a^{1/6} l x) = \frac{2(x^3 - 1)\sqrt{x^6 + 2x^3}}{4x^3 - 1}, \quad (4.37)$$

через которую параметр Λ выражается по формуле

$$\Lambda = 1 + \mu^{4/3} a^{2/3} \frac{x^6 - 1}{x^2}. \quad (4.38)$$

4.4.6. Упражнения

4.4.1. Найти члены порядка μ^2 в разложениях для Λ и $y(x)$ из пп. 4.4.2.

4.4.2. Построить асимптотические разложения при $\mu \rightarrow 0$ для собственного значения $\Lambda(\mu)$ и собственной функции $y(x, \mu)$ для свободных колебаний неабсолютно гибкой струны (см. уравнение (4.13)) с шарнирно опертными концами $y = y'' = 0$ при $x = 0, x = 1$.

4.4.3. Найти асимптотику при $n \rightarrow \infty$ собственных значений μ_n краевой задачи $\mu^2 y'' + \rho(x)y = 0, y(0) = y'(1) = 0$.

4.4.4. В условиях подп. 4.4.3 рассмотреть частный случай $\rho(x) = 1 + x$, соответствующий струне, плотность которой изменяется по линейному закону и на одном конце вдвое больше, чем на другом. Сравнить с точными значениями приближенные значения μ_n , найденные из уравнения (4.21) при вычислении U, V с разной точностью. Построить точные и приближенные графики собственных функций для $n = 1, 2, 3$.

4.4.5. Колебания стержня переменного сечения с грузом на конце приводятся к краевой задаче $(S(x)y')' + S(x)y = 0, y(0) = 0, \mu^2 S(x)y' = ay$ при $x = 1$. В случае $S(x) = 1 + \alpha x$ найти асимптотические приближения для первых восьми значений μ_n при $\alpha = 1, a = 1$.

4.4.6. Найти асимптотические разложения частот и форм свободных колебаний балки с постоянной толщиной и линейно переменной шириной. Концы балки считать жестко закрепленными.

4.4.7. Сравнить моментные и безмоментные частоты осесимметричных колебаний шарнирно опертой оболочки с параметрами $R/h = 100, l = 3, \nu = 0.3$.

4.4.8. Построить двучленное асимптотическое приближение для собственных значений $\Lambda < 1$ краевой задачи (4.23), (4.28).

4.4.9. Для жестко закрепленной цилиндрической оболочки с параметрами $R/h = 100, l = 3, \nu = 0.3$ провести сравнение значений параметра частоты Λ , найденных по асимптотическим формулам (4.26), (4.8), (4.35), (4.38) с точными значениями.

4.5. Собственные функции, локализованные в окрестности одного из концов промежутка

В п. 4.4 появление точек спектра в примерах было связано с наличием у системы осциллирующих интегралов, а интегралы краевого эффекта были вспомогательными. Далее рассматривается ряд примеров, в которых собственные функции являются линейными комбинациями интегралов краевого эффекта и экспоненциально затухают при удалении от края. Исследование таких примеров важно в связи с тем, что при этом получаем наименьшие собственные значения.

4.5.1. Колебания прямоугольной пластины

Свободные колебания прямоугольной пластины описываются уравнением

$$D\Delta^2 w - \rho\omega^2 w = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

где $w(x, y)$ — прогиб пластинки, a, b — длины ее сторон, ω — частота колебаний, E, ν, h, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, толщина пластинки и плотность материала.

Пусть края $y = 0$ и $y = b$ шарнирно опертые

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = b,$$

край $x = 0$ свободен

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Граничные условия на краю $x = a$ пока не конкретизируем, ибо при достаточно большом a результат от них не зависит. Найдем наименьшую частоту колебаний пластинки при $a \rightarrow \infty$.

После разделения переменных и перехода к новой переменной x_1

$$w(x, y) = w(x_1) \sin \frac{\pi y}{b}, \quad x_1 = \frac{\pi x}{b} \quad (5.1)$$

для определения функции $w(x_1)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 w}{dx_1^4} - 2\frac{d^2 w}{dx_1^2} + w - \Lambda w = 0, \quad \Lambda = \frac{\rho h \omega^2 b^4}{D \pi^4} \quad (5.2)$$

и граничные условия на свободном крае

$$\frac{d^2 w}{dx_1^2} - \nu w = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx_1^3} - (2 - \nu) \frac{dw}{dx_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0. \quad (5.3)$$

Если рассматривается цилиндрический изгиб бесконечной в направлении x_1 пластины, то функция w не зависит от x_1 и $\Lambda = 1$.

Если края $x = 0$ и $x = a$ шарнирно оперты, то

$$w(x_1) = \sin \frac{bx_1}{a}, \quad \Lambda = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^2 > 1$$

и при $b/a \rightarrow 0$ параметр $\Lambda \rightarrow 1$.

Пусть $\Lambda < 1$. Будем искать ненулевое решение уравнения (5.2), удовлетворяющее условиям (5.3) и $w(x_1) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow \infty$ в виде

$$w(x_1) = C_1 e^{-sx_1} + C_2 e^{-rx_1}, \quad s > 0, \quad r > 0,$$

где s и r — корни уравнения

$$(z^2 - 1)^2 - \Lambda = 0,$$

а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Имеем

$$s = \sqrt{1 - \sqrt{\Lambda}}, \quad r = \sqrt{2 - s^2}.$$

Подстановка в граничные условия (5.3) дает для определения Λ уравнение

$$s(r^2 - \nu)^2 = r(\nu - s^2)^2, \quad (5.4)$$

которое имеет единственный корень $\Lambda < 1$.

Учитывая, что $\nu < 1/2$, приближенно получаем

$$\Lambda = 1 - \frac{4\nu^4}{(2 - \nu)^2}, \quad s = \frac{\sqrt{2}\nu^2}{(2 - \nu)^2}.$$

В частности, при $\nu = 0.3$ находим $\Lambda = 0.9962$, $s = 0.0436$, $r = 1.4135$.

Наличие свободного края $x = 0$ ведет лишь к незначительному снижению параметра Λ по сравнению со значением $\Lambda = 1$, а форма колебаний

$$w(x_1) = 0.85e^{-sx_1} + 0.15e^{-rx_1}$$

медленно затухает с увеличением x_1 .

4.5.2. Колебания и устойчивость оболочек

Если в пп. 4.5.1 снижение собственного значения, связанное с наличием свободного края, незначительно и составляет менее 1%, то в рассматриваемых ниже задачах свободных колебаний и устойчивости тонких оболочек наличие свободного или слабо закрепленного края может в несколько раз уменьшить собственное значение.

Запишем линейную систему уравнений пологих оболочек в безразмерном виде (см. также (2.53))

$$\mu^2 \Delta^2 w - \Delta_k \Phi + Z = 0, \quad \mu^2 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (5.5)$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \Delta_k w = k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Здесь $w(x, y)$, $\Phi(x, y)$ — неизвестные прогиб и функция усилий, k_1 , k_2 — безразмерные кривизны, $\mu > 0$ — малый параметр, причем

$$k_1 = \frac{R}{R_1}, \quad k_2 = \frac{R}{R_2}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2},$$

где R_1 , R_2 — радиусы кривизны, E , ν , h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки соответственно. Через R обозначен линейный размер, к которому отнесены также координаты x , y , через Z — нагрузочный член. Далее будут рассматриваться как свободные колебания, так и задачи устойчивости. Для свободных колебаний с частотой ω

$$Z = -\frac{\rho \omega^2 R^2}{E \mu^2} w = \frac{c \Lambda}{\mu^2} w, \quad \Lambda = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E c}, \quad (5.6)$$

а для устойчивости безмоментного напряженного состояния, описываемого начальными усилиями T_1^0 , T_2^0 (при сжатии $T_i^0 < 0$),

$$Z = 2\Lambda \left(t_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + t_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad T_1^0 = -2\Lambda E h \mu^2 t_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.7)$$

Искомым является параметр Λ (параметр частоты или параметр нагружения в зависимости от рассматриваемой задачи). Нормировка при

введении Λ (в том числе параметр c) выбирается таким образом, чтобы характерное значение Λ было равно 1.

Будем считать, что на краях $y = 0$ и $y = b$ заданы граничные условия шарнирного опирания

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = b, \quad (5.8)$$

допускающие (при $k_i, t_i = \text{const}$) разделение переменных:

$$w(x, y) = w(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \Phi(x, y) = \Phi(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

На крае $x = 0$ будем рассматривать 16 стандартных вариантов граничных условий, имеющих обозначения $C_i, S_i, i = 1, 2, \dots, 8$.

$$\begin{array}{ll} u = v = w = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_1 \text{ или } S_1 \\ T_1 = v = w = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_2 \text{ или } S_2 \\ u = S = w = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_3 \text{ или } S_3 \\ T_1 = S = w = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_4 \text{ или } S_4 \\ u = v = Q_1^* = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_5 \text{ или } S_5 \\ T_1 = v = Q_1^* = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_6 \text{ или } S_6 \\ u = S = Q_1^* = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_7 \text{ или } S_7 \\ T_1 = S = Q_1^* = 0, \{w' = 0 \text{ или } M_1 = 0\} & C_8 \text{ или } S_8, \end{array} \quad (5.10)$$

где u, v — проекции перемещения на оси x и y ; T_1, S, Q_1^*, M_1 — тангенциальные усилия, обобщенная перерезывающая сила и изгибающий момент. В частности, жесткая заделка края обозначена через C_1 , шарнирная опора (5.8) — S_2 , свободный край — S_8 .

Будем искать собственные функции, локализованные в окрестности края $x = 0$ и экспоненциально затухающие при удалении от него, в виде

$$w(x, y) = \sum_{k=4}^4 C_k w_k e^{p_k x / \mu} \sin \frac{qy}{\mu}, \quad q = \frac{n\pi\mu}{b}, \quad (5.11)$$

где C_k — произвольные постоянные, p_k — корни уравнения восьмой степени, удовлетворяющие условию $\text{Re } p_k < 0$, обеспечивающему затухание решения (5.11).

В случае колебаний это уравнение имеет вид

$$(p^2 - q^2)^4 + (k_2 p^2 - k_1 q^2)^2 - c\Lambda(p^2 - q^2)^2 = 0, \quad (5.12)$$

а в случае устойчивости — вид

$$(p^2 - q^2)^4 + (k_2 p^2 - k_1 q^2)^2 + 2\Lambda(t_1 p^2 - t_2 q^2)(p^2 - q^2)^2 = 0. \quad (5.13)$$

Функции u, T_1, Q_1^*, M_1 имеют тот же вид (5.11), а для функций v, S вместо $\sin(qy/\mu)$ следует брать $\cos(qy/\mu)$. Приведем выражения для u_k, v_k, \dots через w_k (индекс k опущен):

$$\begin{array}{l} u = \mu p^{-1}(k_1 w - (q^2 + \nu p^2)\Phi), \quad T_1 = -EhR^{-1}q^2\Phi, \\ v = \mu q^{-1}(k_2 w + (p^2 + \nu q^2)\Phi), \quad S = EhR^{-1}pq\Phi, \\ Q_1^* = -EhR^{-1}\mu(p^3 - (2 - \nu)pq^2 + 2\Lambda t_1 p)w, \\ M_1 = Eh\mu^2(p^2 - \nu q^2)w, \quad \Phi = -(k_2 p^2 - k_1 q^2)(p^2 - q^2)^{-2}w. \end{array} \quad (5.14)$$

Через Q_1^* обозначена обобщенная перерезывающая сила

$$Q_1^* = Q_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial y} + T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x},$$

где H — крутящий момент.

Подстановка решений (5.11) в граничные условия при $x = 0$ приводит к системе четырех уравнений относительно C_k . Равенство нулю ее определителя дает для определения Λ уравнение

$$\Delta(\Lambda, q) = 0. \quad (5.15)$$

Решение (5.11) и уравнение (5.15) рассматриваем в той области изменения параметров Λ, q, k_i, t_i , в которой уравнение (5.12) (или (5.13)) не имеет чисто мнимых корней (ибо только тогда четыре корня этого уравнения удовлетворяют условию $\text{Re } p_k < 0$).

В зависимости от граничных условий при $x = 0$, а также от параметров q, k_i, t_i уравнение (5.15) может иметь интересующие нас корни, а может и не иметь их. Если корни Λ существуют, соответствующее закрепление края $x = 0$ будем называть *слабым*.

Далее по этой схеме рассматривается ряд частных задач свободных колебаний и устойчивости тонких оболочек.

4.5.3. Колебания цилиндрической панели

Рассмотрим свободные колебания цилиндрической панели со свободным прямолинейным краем $x = 0$ и шарнирно опертыми криволинейными краями $y = 0$ и $y = b$. Найдем частоты колебаний панели,

для которых формы колебаний локализованы в окрестности края $x = 0$, считая, что $b \sim 1$.

В данном случае в формулах пп. 4.5.2 следует считать $k_1=1, k_2=0$. Уравнение (5.12) имеет вид

$$(p^2 - q^2)^4 + q^4 - 2\Lambda q^2(p^2 - q^2)^2 = 0, \quad q = \frac{n\pi\mu}{b}. \quad (5.16)$$

Рассмотрим сначала замкнутую в окружном направлении оболочку. Условие периодичности в направлении x дает $p = im\mu$ ($m=1, 2, \dots$ — число волн в окружном направлении). Записывая уравнение (5.16) в виде

$$\Lambda = \frac{(m^2\mu^2 + q^2)^4 + q^4}{c(m^2\mu^2 + q^2)^2},$$

находим, что при $c = 2q^2$

$$\min_m \Lambda = 1.$$

Поэтому искомым параметр Λ будем сравнивать со значением $\Lambda = 1$, соответствующим наименьшей частоте колебаний замкнутой в окружном направлении цилиндрической оболочки. При $\Lambda < 1$ уравнение (5.16) не имеет чисто мнимых корней.

Вернемся к рассмотрению панели со свободным краем $x = 0$ (см. граничные условия S_8 , (5.10)). Найдем корни уравнения (5.16) при $\Lambda < 1$. В силу (5.16) $q = n\pi\mu/b$. Возьмем $n = 1$ или $n \sim 1$. Тогда q будет вместе с μ малым параметром и корни уравнения (5.16) можно представить в виде

$$p_{1,2} = -\sqrt{q}e^{\pm i\theta} + O(\sqrt{q^3}), \quad p_{3,4} = -\sqrt{q}e^{\pm i(\pi/2 - \theta)} + O(\sqrt{q^3}), \quad (5.17)$$

где $\Lambda = \cos 4\theta$, причем

$$0 < \theta < \frac{\pi}{8}. \quad (5.18)$$

В (5.17) приведены лишь корни p_k , у которых $\operatorname{Re} p_k < 0$.

Для граничных условий S_8 в силу (5.14), (5.17) с точностью до величин порядка q уравнение (5.15) приводится к виду:

$$\begin{vmatrix} p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & p_4^3 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 \\ p_1^{-4} & p_2^{-4} & p_3^{-4} & p_4^{-4} \\ p_1^{-3} & p_2^{-3} & p_3^{-3} & p_4^{-3} \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований, отбрасывая величины порядка q по сравнению с 1, находим

$$\sin 2\theta - \sin^2 6\theta = 0. \quad (5.19)$$

Это уравнение имеет два корня $\Lambda^{(1)} = 0.113$ и $\Lambda^{(2)} = 0.973$, удовлетворяющих условию (5.18).

На рис. 4.6 приведены соответствующие собственные функции $w^{(1)}(x)$ и $w^{(2)}(x)$ при $q \rightarrow 0$, определяемые по формулам:

$$w^{(k)}(x) = D^{(k)} \operatorname{Re} \left\{ C_1^{(k)} \exp(-\xi e^{i\theta^{(k)}}) + C_3^{(k)} \exp(i\xi e^{-i\theta^{(k)}}) \right\}, \quad k = 1, 2,$$

$$\xi = x\sqrt{q}, \quad \theta^{(1)} = 0.63448, \quad \theta^{(2)} = 0.05770,$$

$$C_1^{(k)} = ie^{2i\theta^{(k)}} + ie^{-2i\theta^{(k)}} (\cos 6\theta^{(k)} - \sin 6\theta^{(k)}),$$

$$C_3^{(k)} = -ie^{-2i\theta^{(k)}} + ie^{2i\theta^{(k)}} (\cos 6\theta^{(k)} + \sin 6\theta^{(k)}).$$

Здесь D_k — нормировочные множители, определяемые из условия $\max_x w^{(k)} = 1$. С уменьшением q одновременно уменьшается скорость затухания $w^{(k)}(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Сравнительно медленное затухание функции $w^{(2)}(x)$ (см. рис. 4.6) связано с тем, что $\Lambda^{(2)} = 0.973$ близко к значению $\Lambda = 1$, при котором система (5.5) имеет осциллирующие интегралы.

Мы нашли значения $\Lambda^{(k)}$ корней $\Lambda(q)$ уравнения (5.15) при $q \rightarrow 0$. Корни $\Lambda(q)$ при $q > 0$ найдены в задаче 4.5.4.

4.5.4. Устойчивость цилиндрической панели

Рассмотрим устойчивость круговой цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем $x = 0$ под действием осевого сжатия (см. рис. 4.7). Криволинейные края $y = 0$ и $y = b$ шарнирно оперты.

Найдем варианты слабого закрепления края $x = 0$. В обозначениях, принятых в подп.4.5.2, имеем

$$T_1^{(0)} = -2Eh\mu^2\Lambda, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 0,$$

и уравнение (5.13) принимает вид

$$(p^2 - q^2)^4 + p^4 + 2\Lambda p^2(p^2 - q^2)^2 = 0, \quad q = \frac{n\pi\mu}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.20)$$

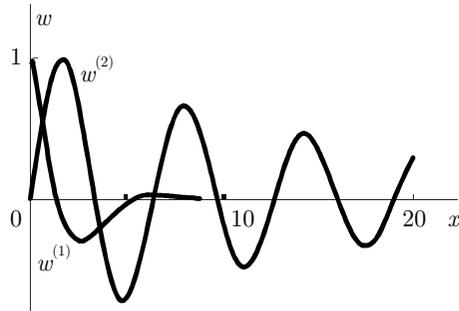


Рис. 4.6

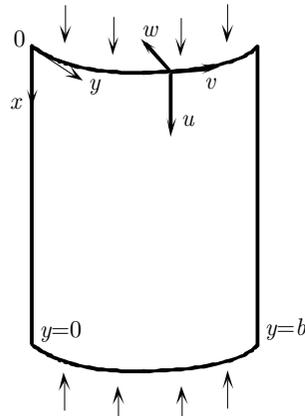


Рис. 4.7

При $b \sim 1$, $n = 1$ параметр q будет малым. При $\Lambda < 1$ уравнение (5.20) имеет два корня $p_k \sim 1$ ($\text{Re } p_k < 0$) и два корня $p_k \sim q^2$ ($\text{Re } p_k < 0$)

$$p_{1,2} = \pm i e^{\pm i \psi} + O(q^2), \quad p_{3,4} = \pm i q^2 e^{\pm i \psi} + O(q^4), \quad (5.21)$$

$$q \rightarrow 0, \quad \Lambda = \cos 2\psi,$$

причем берутся или верхние, или нижние знаки.

Рассмотрим, например, граничные условия жесткой заделки $u = v = w = w' = 0$, т. е. условия C_1 (см. (5.10)). Подставив в (5.14) значения

корней (5.21), получим уравнение (5.15) в виде

$$\begin{vmatrix} \nu p_1^{-1} & \nu p_2^{-1} & p_1 & p_2 \\ -(2 + \nu)q^2 p_1^{-2} & -(2 + \nu)q^2 p_2^{-2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & q^2 p_1 & q^2 p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.22)$$

В определителе (5.22) произведены сокращения общих множителей в строках и опущены члены порядка q^2 по сравнению с 1. С точностью до слагаемых порядка q^2 уравнение (5.22) представим в виде

$$-(p_2 - p_1)^2 = 4 \cos^2 \psi = 0.$$

Оно не имеет корней, удовлетворяющих условию

$$0 < \psi < \frac{\pi}{4}, \quad (5.23)$$

т. е. жесткая заделка края не является слабым закреплением.

Рассматривая точно так же остальные 15 вариантов граничных условий (5.10), находим, что для семи вариантов ($S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, C_8, S_8$) уравнение (5.15) имеет корень

$$\Lambda = \frac{1}{2}, \quad (q \rightarrow 0). \quad (5.24)$$

Отметим, что $\Lambda = 1$ дает классическое значение критической нагрузки при осевом сжатии круговой цилиндрической оболочки. Поэтому для перечисленных семи вариантов слабого закрепления происходит двукратное снижение критической нагрузки, что было отмечено ранее в ряде работ.

4.5.5. Упражнения

4.5.1. В условиях подп. 4.5.1 исследовать влияние на наименьшую частоту колебаний отношения a/b , считая, что край $x = 0$ свободен, а край $x = a$ жестко закреплен. Взять $\nu = 0.3$.

4.5.2. Устойчивость прямоугольной пластины $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, сжатой усилием T в направлении y , описывается уравнением [16]: $D\Delta^2 w + T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, где приняты те же обозначения, что и в пп. 4.5.1.

Найти критическое усилие T , если края $y = 0$ и $y = b$ шарнирно оперты, край $x = 0$ свободен и $a/b \rightarrow \infty$.

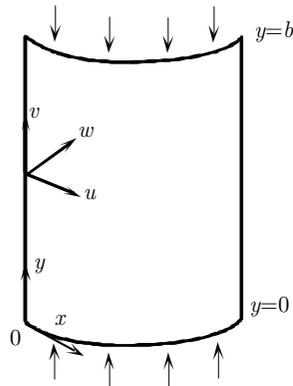


Рис. 4.8

4.5.3. Для всех 16 вариантов граничных условий (5.10) вывести уравнения, аналогичные (5.19), и найти их корни, удовлетворяющие условию (5.18).

4.5.4. В подп.4.5.3 и задаче 4.5.3 найдены корни уравнения (5.15) при $q \rightarrow 0$. Напомним, что $q = n\pi\mu/b$, $n = 1, 2, \dots$. При больших n и (или) при малых b предположение $q \ll 1$ уже не выполняется. Найти корни $\Lambda(q)$ уравнения (5.15) при $q \sim 1$. Взять $\nu = 0.3$.

4.5.5. Рассмотрим устойчивость цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем $x = 0$ под действием осевого сжатия (см. рис. 4.8). Криволинейные края $y = 0$ и $y = b$ шарнирно оперты.

Для различных граничных условий при $x = 0$ исследовать вопрос о существовании форм потери устойчивости, локализованных вблизи края $x = 0$, и найти критические значения нагрузки $T_2^{(0)}$.

4.5.6. В условиях подп. 4.5.4 исследовать зависимость параметра нагружения $\Lambda(q)$ от величины q , считая $q \sim 1$, $\nu = 0.3$.

4.6. Ответы и решения

4.1.1 В обозначениях, принятых в формуле (1.2), имеем

$$\lambda = iq(x), \quad q(x) = \left(\frac{\rho}{p}\right)^{1/2}, \quad u_0 = (p\rho)^{-1/4},$$

$$u_{n+1} = \frac{i u_0}{2} \int u_0((p u_n')' - r u_n) dx.$$

В частном случае $p = \rho = 1 + \alpha x$, $r = 0$ получаем

$$u_0 = p^{-1/2}, \quad u_n = (-i\alpha)^n p^{-\beta_n} b_n,$$

где $b_0 = 1$, $b_n = (2n-1)^2 b_{n-1}/(8n)$, $\beta_n = n + 1/2$, $n = 1, 2, \dots$

Ряд (1.2) расходится.

4.1.2 В формуле (1.2) $u_0^{(1,2)}(x) = (c(x))^{-1/4}$,

$$\lambda_1(x) = -\sqrt{c(x)}, \quad u_{n+1}^{(1)}(x) = \frac{u_0}{2} \int_{x^{(1)}}^x u_0(\xi) \frac{d^2 u_n^{(1)}}{d\xi^2} d\xi,$$

$$\lambda_2(x) = \sqrt{c(x)}, \quad u_{n+1}^{(2)}(x) = -\frac{u_0}{2} \int_{x^{(2)}}^x u_0(\xi) \frac{d^2 u_n^{(2)}}{d\xi^2} d\xi,$$

причем, как и в (1.11), нижний предел интегрирования $x^{(1)}$ или $x^{(2)}$ произволен.

4.1.3. $q(x) = 1$, $u_0 = p^{-1/2}$, $u_1^{(k)}(x) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$.

4.1.4. $q(x) = (\rho(x))^{-1/2}$, $u_0 = (\rho(x))^{-3/4}$,

$$u_1^{(k)}(x) = \frac{15\alpha u_0(x)}{16r_k} (q(0) - q(x)), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

4.1.5.

$$y^{(k)}(x, \mu) = [u_0(x) + \mu u_1(x) + O(\mu^2)] \exp\left(\frac{1}{\mu} \int \lambda_k(x) dx\right), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\lambda_k = qr_k, \quad q = \left(\frac{c}{p}\right)^{1/4}, \quad r_k^4 + 1 = 0, \quad r_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad r_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}},$$

а выражения для величин u_0 и $u_1^{(k)}$ совпадают с выражениями, полученными для уравнения (1.13). Все интегралы $y^{(k)}(x, \mu)$ являются интегралами краевого эффекта.

4.1.6. Два решения уравнения являются медленно меняющимися и имеют вид (1.20), причем для нечетных k имеем $v_k(x) = 0$, а для четных $k = 2n$ для одного из решений будет $v_{2n} = P_n(x) \exp(i\omega x)$,

где $\omega = \sqrt{\Lambda}$, $P_n(x)$ — многочлены степени n . Этому решению соответствует разложение

$$y_1(x, \mu) = \left(1 + \mu^2 \frac{(i\omega)^3 x}{2} + \mu^4 \left(\frac{(i\omega)^6 x^2}{8} + \frac{7(i\omega)^5 x}{8} \right) + O(\mu^6) \right) \exp(i\omega x),$$

а решение $y_2(x, \mu)$ является комплексно сопряженным с ним.

Интегралы краевого эффекта имеют вид

$$y_{3,4}(x, \mu) = \left(1 + \mu \frac{\Lambda x}{2} \pm \mu^2 \frac{\Lambda^2 x^2}{8} + O(\mu^3) \right) \exp(\pm x/\mu).$$

$$\mathbf{4.1.7.} \quad K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad I_\nu(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

$$\text{где } a_0 = 1, \quad a_n = \frac{(\nu_1 - 1) \cdots (\nu_1 - (2n - 1)^2)}{n!(8x)^n}, \quad \nu_1 = 4\nu^2.$$

4.2.1. Асимптотическое разложение ищем в виде (2.3):

$$y(x, \mu) = \left(\cos \frac{x}{2} + \mu \left(\varphi_1(x) \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} \right) + O(\mu^2) \right) \exp(q/\mu),$$

$$z(x, \mu) = \left(-\sin \frac{x}{2} - \mu \left(\varphi_1(x) \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \right) + O(\mu^2) \right) \exp(q/\mu),$$

где $q(x) = 2 \sin x - x$, φ_1 то же, что и в подп. 4.2.1.

4.2.2. Асимптотические разложения суть:

$$y_1 = D(\cos z + \mu k^2 t \sin z + O(\mu^4)) + y_1^0 + \mu k^2 y_2^0 t + O(\mu^2),$$

$$y_2 = D(-\sin z + \mu k^2 t \cos z + O(\mu^4)) + y_2^0 - \mu k^2 y_1^0 t + O(\mu^2),$$

где $z = \mu^{-1} t + \alpha$, а D , α , y_1^0 , y_2^0 — произвольные постоянные.

Точное общее решение системы (2.52) имеет вид:

$$y_1 = D_1 \cos(\nu_1 t + \alpha_1) + D_2 \cos(\nu_2 t + \alpha_2),$$

$$y_2 = -\frac{\nu_1 H D_1}{k^2 + \nu_1^2} \sin(\nu_1 t + \alpha_1) + \frac{\nu_2 H D_2}{k^2 + \nu_2^2} D_2 \sin(\nu_2 t + \alpha_2),$$

где D_1 , α_1 , D_2 , α_2 — произвольные постоянные,

$$\nu_{1,2}^2 = \frac{H}{2} - k^2 \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} - Hk^2}, \quad \nu_1 \sim H, \quad \nu_2 \sim \frac{1}{H}.$$

При $H > 4k^2$ величины ν_1 , ν_2 вещественны, и вертикальное положение волчка устойчиво. Сравнение показывает неравномерность при $t \rightarrow \infty$ O -оценок остаточных членов асимптотических разложений.

4.2.3. После подстановки решений (2.37) в систему (2.35) при μ^0 получим

$$\begin{aligned} (F - \Lambda)w_0 - G\Phi_0 &= 0, & Gw_0 + F\Phi_0 &= 0, \\ F(\lambda, s) &= \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2, & G(\lambda, s) &= k_2 \lambda^2 - \frac{k_1 r^2}{b^2}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

откуда следует уравнение (2.38) и соотношение между w_0 и Φ_0 .

При μ^1 получаем

$$\begin{aligned} (F - \Lambda)w_1 - G\Phi_1 + L_1 w_0 - L_2 \Phi_0 &= 0, \\ Gw_1 + F\Phi_1 + L_2 w_0 + L_1 \Phi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 w_0 &= \left(4\lambda w_0' + 2 \left(\lambda' + \frac{\lambda b'}{b} \right) w_0 \right) \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right) + 2\lambda \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)' w_0 = \\ &= \sqrt{\frac{F_\lambda}{b}} \left(w_0 \sqrt{bF_\lambda} \right)', \end{aligned}$$

$$L_2 w_0 = 2\lambda k_2 w_0' + \lambda' k_2 w_0 + \frac{\lambda(k_2 b)'}{b} w_0 = \sqrt{\frac{G_\lambda}{b}} \left(w_0 \sqrt{bG_\lambda} \right)',$$

$$F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad G_\lambda = \frac{\partial G}{\partial \lambda}, \quad ()' = \frac{d()}{ds}.$$

Из первого уравнения (6.2), умноженного на bw_0 , вычтем второе, умноженное на $b\Phi_0$. Тогда величины w_1 и Φ_1 исключаются и мы получаем

$$\begin{aligned} w_0 \sqrt{bF_\lambda} \left(w_0 \sqrt{bF_\lambda} \right)' - w_0 \sqrt{bG_\lambda} \left(\Phi_0 \sqrt{bG_\lambda} \right)' - \\ \Phi_0 \sqrt{bG_\lambda} \left(w_0 \sqrt{bG_\lambda} \right)' - \Phi_0 \sqrt{bF_\lambda} \left(\Phi_0 \sqrt{bF_\lambda} \right)' = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Второе уравнение (6.1) будет выполнено, если взять

$$w_0 = \sqrt{F}z, \quad \Phi_0 = -\frac{G}{\sqrt{F}}z. \quad (6.4)$$

Тогда с учетом (2.38) уравнение (6.3) приводится к уравнению вида

$$\left(z^2 b \frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)' = 0, \quad f = F(F - \Lambda) + G^2,$$

причем функция f та же, что и в (2.38). При $z = \left(b \frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^{-1/2}$ формулы (6.4) эквивалентны (2.39).

4.2.4. Асимптотические разложения интегралов системы уравнений (2.53) имеют вид (2.37), где функция $\lambda(s)$ удовлетворяет уравнению

$$f(\lambda, s) = \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2}\right)^4 + \Lambda \left(t_1 \lambda^2 - \frac{t_2 r^2}{b^2}\right) \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2 + \left(k_2 \lambda^2 - \frac{k_1 r^2}{b^2}\right)^2 = 0, \quad (6.5)$$

а первые коэффициенты w_0 и Φ_0 имеют тот же вид (2.39).

4.2.5. После подстановки (2.47) в систему (2.35) находим, что функции w_0 , Φ_0 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{r_0^4}{b^3 \cos \alpha} \Phi_0 &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi_0}{ds^2} - \frac{r_0^4}{b^3 \cos \alpha} w_0 + \frac{\Lambda b}{\cos \alpha} w_0 &= 0 \end{aligned}$$

или уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(b^3 \frac{d^2 w_0}{ds^2} \right) + \left(\frac{r_0^8}{b^3 \cos^2 \alpha} - \frac{\Lambda b r_0^4}{\cos^2 \alpha} \right) w_0 = 0. \quad (6.6)$$

Для цилиндрической оболочки радиуса R можно считать $b = 1$, $\alpha = 0$, а для конической оболочки α — угол при вершине конуса, $b = b(s)$ — линейная функция s .

4.2.6. Подстановка (2.51) в систему (2.48) и приравнение коэффициентов при μ_1 дает систему двух дифференциальных уравнений для

определения w_0 и Φ_0 :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{k_2 q}{b}} \left(\sqrt{k_2 q b} w_0 \right)' + \frac{r_1^4}{b^4} \Phi_0 &= 0, \\ 2\sqrt{\frac{k_2 q}{b}} \left(\sqrt{k_2 q b} \Phi_0 \right)' + \left(\Lambda_1 - \frac{r_1^4}{b^4} \right) w_0 &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в случае простого корня характеристического уравнения коэффициенты асимптотических рядов находятся в квадратурах, ибо в отличие от рассматриваемого случая их определение сводится к дифференциальным уравнениям первого порядка (см. (1.4), (2.9), (2.43)).

4.3.1.

$$\begin{aligned} y(x, \mu) = & -\frac{1 + 2\mu^2}{c^{1/4}} \left(1 + \frac{5\mu}{48}(1 - c^{-3/2}) \right) \exp\left(-\frac{2}{3\mu}(c^{3/2} - 1)\right) - \\ & - \frac{4 + \mu^2}{(2^{11}c)^{1/4}} \left(1 - \frac{5\mu}{48}(2^{-3/2} - c^{-3/2}) \right) \exp\left(\frac{2}{3\mu}(c^{3/2} - 2^{3/2})\right) + \\ & + \frac{1}{c} + \frac{2\mu^2}{c^4} + O(\mu^3), \quad c = c(x). \end{aligned}$$

На рис. 4.9 показано приведенное асимптотическое решение (сплошная кривая) и менее точное решение, полученное при сохранении лишь главных по μ слагаемых (точки). Асимптотическое решение отличается от точного решения менее, чем на 0.001.

4.3.2.

$$\begin{aligned} y(x, \mu) &= \frac{\mu}{2} e^{x/\mu}, & x \leq 0, \\ y(x, \mu) &= x + \frac{\mu}{2} e^{-x/\mu} - \frac{1 + \mu}{2} e^{(x-1)/\mu}, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(x, \mu) &= \frac{1 - \mu}{2} e^{(1-x)/\mu}, & x \geq 1. \end{aligned}$$

Погрешность построенного решения не превосходит $\varepsilon = 1/2e^{-1/\mu}$.

На рис. 4.10 представлены графики функции $q(x)$ (кривая 1) и функции $y(x, \mu)$ при $\mu = 0.2$ (кривая 2) и при $\mu = 0.05$ (кривая 3). С уменьшением μ кривые $q(x)$ и $y(x, \mu)$ сближаются.

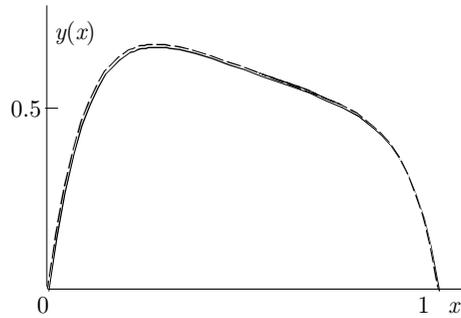


Рис. 4.9

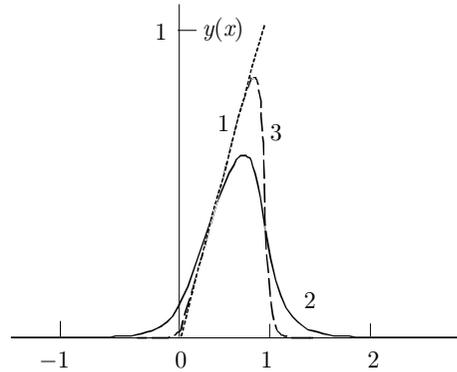


Рис. 4.10

4.3.3. Приближенное решение

$$y(x, \mu) = \frac{1}{2}e^{x/\mu}, \quad x \leq 0,$$

$$y(x, \mu) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x/\mu} - \frac{1}{2}e^{(x-1)/\mu}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(x, \mu) = \frac{1}{2}e^{(1-x)/\mu}, \quad x \geq 1$$

в точках $x = 0$, $x = 1$ имеет разрыв порядка $\varepsilon = 1/2e^{-1/\mu}$.

Точное решение имеет вид:

$$y(x, \mu) = Ce^{x/\mu}, \quad C = \frac{1}{2}(1 - e^{1/\mu}), \quad x \leq 0,$$

$$y(x, \mu) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x/\mu} - \frac{1}{2}e^{(x-1)/\mu}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(x, \mu) = Ce^{(1-x)/\mu}, \quad x \geq 1.$$

На рис. 4.11 представлен график функции $y(x, \mu)$ при $\mu = 0.5$ (1 — точное решение, 2 — асимптотическое приближение). При $0 \leq x \leq 1$ разрывное асимптотическое приближение совпадает с точным решением.

4.3.4. В рассматриваемой задаче

$$q(x) = (1 + \alpha x)^{-3/4}, \quad u_0 = (1 + \alpha x)^{-15/8}, \quad a = -\frac{9\alpha}{2}(1 + \alpha x)^{-7/4}, \quad y_0^* = 1.$$

На рис. 4.12 представлены точное решение (сплошная линия) и асимптотическое приближение (3.22) (пунктир).

4.3.5. Решение с погрешностью порядка μ^2 имеет вид (3.21), в котором

$$C_1 = -\frac{r_1 y_0^*(0)}{u_0(0)\sqrt{2}} + \frac{\mu}{q(0)u_0(0)\sqrt{2}} \left(y_0^{*\prime}(0) - \frac{y_0^*(0)u_0'(0)}{q(0)u_0(0)} \right) + O(\mu^2),$$

$$C_3 = -\frac{r_3 y_0^*(1)}{u_0(1)\sqrt{2}} + \frac{\mu}{q(1)u_0(1)\sqrt{2}} \left(y_0^{*\prime}(1) - \frac{y_0^*(1)u_0'(1)}{q(1)u_0(1)} \right) + O(\mu^2).$$

Решение с погрешностью порядка μ имеет вид:

$$y(x, \mu) = y_0^*(x) - \operatorname{Re} (y_0^*(0)(1 - i)e^{r_1 q_0 x/\mu} + y_0^*(1)(1 + i)e^{r_3 q_1 x/\mu}) + O(\mu),$$

где $q_0 = q(0)$, $q_1 = q(1)$.

4.3.6.

$$y^{(2)}(x, \mu) = y^{(1)}(x, \mu) + \mu^2 \left[y_2(x) + C_1 e^{-x/\mu} + C_2 e^{(x-1)/\mu} \right],$$

где функция $y^{(1)}(x, \mu)$ построена в подп. 4.3.6.

Сначала находим $C_1 = -C_2 = y_1' = y_0'(0) + y_0'(0)$. Далее из краевой задачи

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{d^4 y_0}{dx^4} = -g''(x), \quad y_2(0) = -C_1, \quad y_2(1) = -C_2$$

получаем $y_2(x) = -g(x) + (g(0) - C_1)(1 - x) + (g(1) - C_2)x$.

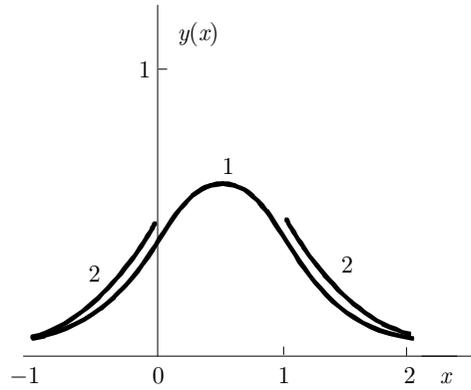


Рис. 4.11

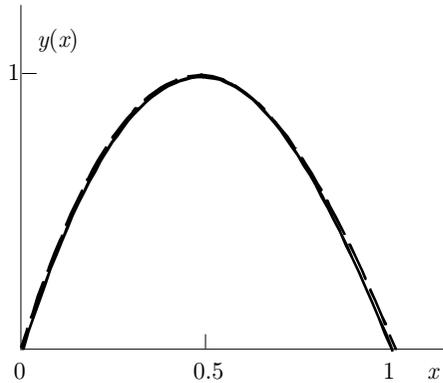


Рис. 4.12

4.3.7. Старшие по μ слагаемые (3.42) после подстановки в систему (3.41) дают (верхний индекс k опускаем)

$$\lambda^2 u_0 - \lambda c_1 w_0 = 0, \quad \lambda c_1 u_0 - \left(\lambda^4 (1 - \nu^2) + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w_0 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим уравнение (3.43) для определения λ . Первое уравнение системы позволяет выразить u_0 через w_0 . Для определения w_0 рассмотрим следующее при-

ближение по степеням μ :

$$\begin{aligned} \lambda^2 u_1 - \lambda c_1 w_1 + 2\lambda \frac{du_0}{ds} + \lambda' u_0 + \frac{B' c_2 w_0 - (B c_1)' w_0}{B} - c_1 \frac{dw_0}{ds} &= 0, \\ \lambda c_1 u_1 - c_1^2 w_1 + c_1 \frac{du_0}{ds} \frac{B' c_2 u_0}{B} - 4\lambda^3 \frac{dw_0}{ds} - 6\lambda^2 \lambda' w_0 - \frac{2B' \lambda^3 w_0}{B} &= 0. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений умножим на c_1 , а второе — на λ и вычтем из первого. Тогда после сокращения слагаемых с w_1 и u_1 получим уравнение для определения w_0 :

$$-\lambda^4 \left(4 \frac{dw_0}{ds} + \left(\frac{6\lambda'}{\lambda} + \frac{2B'}{B} \right) w_0 \right) = 0,$$

откуда, учитывая уравнение для λ , найдем требуемое выражение (3.43) для w_0 .

4.3.8.

$$u = C + \nu q_n s + \mu \nu q_n \sqrt{2} (e^{-s_1} \cos s_1 - e^{s_2} \cos s_2),$$

$$s_1 = \frac{s}{\mu \sqrt{2}}, \quad s_2 = \frac{s-l}{\mu \sqrt{2}},$$

$$w = q_n (1 - e^{-s_1} (\cos s_1 + \sin s_1) - e^{s_2} (\cos s_2 - \sin s_2)).$$

Как и в пп. 4.3.8, постоянная C остается неопределенной, а условия (3.39г) выполняются с погрешностью порядка $\exp(-l/(\mu\sqrt{2}))$.

4.3.9. Безмоментное решение

$$u_0 = 0, \quad w_0 = \tilde{q}_n, \quad \tilde{q}_n = (1 - \nu^2) q_n.$$

После добавления интегралов краевого эффекта, как и в задаче 4.3.8, получаем

$$u^{(1)} = \mu \nu \tilde{q}_n \sqrt{2} (e^{-s_1} \cos s_1 - e^{s_2} \cos s_2), \quad s_1 = \frac{s}{\mu \sqrt{2}}, \quad s_2 = \frac{s-l}{\mu \sqrt{2}},$$

$$w^{(1)} = \tilde{q}_n (1 - e^{-s_1} (\cos s_1 + \sin s_1) - e^{s_2} (\cos s_2 - \sin s_2)).$$

Однако это решение уже не удовлетворяет условиям $u(0) = 0$ и $u(l) = 0$. Для ликвидации этой невязки добавляем первое приближение безмоментного решения, определяемое из краевой задачи

$$\frac{d^2 u_0^{(1)}}{ds^2} = 0, \quad u_0^{(1)}(0) = -\mu \nu \tilde{q}_n \sqrt{2}, \quad u_0^{(1)}(l) = \mu \nu \tilde{q}_n \sqrt{2},$$

откуда находим

$$u_0^{(1)} = \frac{\mu\nu\tilde{q}_n\sqrt{2}}{l}(2s-l), \quad w_0^{(1)} = \frac{\mu\nu\tilde{q}_n\sqrt{8}}{l}.$$

К полученному решению снова добавляем краевой эффект для выполнения условий $w(0) = w(l) = 0$ и с погрешностью порядка μ^2 получаем:

$$u = \frac{\mu\nu\tilde{q}_n\sqrt{2}}{l}(2s-l) + \mu\nu\tilde{q}_n\sqrt{2}(e^{-s_1}\cos s_1 - e^{s_2}\cos s_2) + O(\mu^2),$$

$$w = \tilde{q}_n \left(1 + \frac{\mu\nu\sqrt{8}}{l}\right) (1 - e^{-s_1}(\cos s_1 + \sin s_1) - e^{s_2}(\cos s_2 - \sin s_2)) + O(\mu^2).$$

4.3.10. В окрестности края $s = 0$ имеем

$$w = w_0(1 - e^{-\alpha_1}(\cos \beta_1 + b \sin \beta_1) + O(\mu)), \quad b = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}, \quad |\tau| < 1,$$

$$w = w_0(1 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 e^{-\lambda_1 s/\mu} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s/\mu}) + O(\mu)), \quad \tau > 1,$$

где приняты те же обозначения, что и в пп. 4.3.9.

4.4.1. Используя те же обозначения, что и в пп. 4.4.2, из следующей итерации находим $z_2^{(1)} = 2n\pi e^{-\xi_1}$, $z_2^{(2)} = (-1)^{n+1}2n\pi e^{-\xi_1}$.

Для Λ_2 и $y_2(x)$ получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \Lambda_0 y_2 + \Lambda_1 y_1 + \Lambda_2 y_0 + \frac{d^4 y_0}{dx^4} = 0, \quad y_2(0) = -2n\pi, \quad y_2(1) = (-1)^n 2n\pi,$$

откуда имеем

$$\Lambda_2 = 12n^2\pi^2 + n^4\pi^4, \quad y_2(x) = 2n^2\pi^2(x-x^2)\sin n\pi x + n\pi(2x-1)\cos n\pi.$$

4.4.2. Вырожденная краевая задача имеет тот же вид (4.15) и то же решение $\Lambda_0 = n^2\pi^2$, $y_0(x) = \sin n\pi x$, что и в пп. 4.4.2, однако решение $y_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям $y = y'' = 0$ при $x = 0, 1$. Если взять $\Lambda = n^2\pi^2 + \mu^2 n^4\pi^4$, $y(x) = y_0(x) = \sin n\pi x$, получим точное решение задачи. В отличие от задачи, рассмотренной в пп. 4.4.2, интегралы краевого эффекта здесь не появляются.

4.4.3. Возьмем общее решение (4.20), продифференцируем его по x и подставим в граничные условия. Тогда для определения μ_n получим уравнение

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{\mu} = \frac{U(0)G_1 - V(0)G_2}{U(0)G_2 + V(0)G_1} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mu^{2k+1}, \quad (6.7)$$

где $G_1 = \varphi_1'V(1) - \mu U'(1)$, $G_2 = \varphi_1'U(1) + \mu V'(1)$, $\varphi_1' = \sqrt{\rho(1)}$, а остальные обозначения те же, что и в пп. 4.4.3. Разлагая решение уравнения (6.7) в ряд

$$\mu_n \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^*}{((n-1/2)\pi)^{2k+1}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

находим первые слагаемые

$$c_0^* = \varphi_1, \quad c_1^* = b_0\varphi_1^2, \quad b_0 = \frac{v_1(1)}{u_0(1)} - \frac{u_1'(1)}{\varphi_1' u_0(1)} - \frac{v_1(0)}{u_0(0)}.$$

4.4.4. Для $\rho(x) = 1 + \alpha x$ решение построено в пп. 4.1.1. Полагая $\alpha=1$ и пользуясь обозначениями (4.19) из пп. 4.4.3, находим

$$U^{(K)} = \rho^{-1/4} \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k \mu^{2k} b_{2k}}{\rho^{3k}}, \quad V^{(K)} = \mu \rho^{-7/4} \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^{k+1} \mu^{2k} b_{2k+1}}{\rho^{3k}},$$

$$b_0 = 1, \quad b_n = \frac{(6n-1)(6n-5)}{48n} b_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Взяв $K = 0, 1, 2, \dots$, получим разные асимптотические приближения функций U , V в уравнении (4.21) и соответственно разные приближения μ_n .

В таблице 4.1 для первых пяти частот собственных колебаний ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho_0}} \Omega_n, \quad \Omega_n = \sqrt{\Lambda^{(n)}} = \frac{1}{\mu_n}, \quad n = 1, 2, \dots, 5$$

приведены значения безразмерных частот Ω_n . В первом столбце представлены значения, найденные методом Рунге–Кутты. Далее идут значения, найденные по асимптотическим формулам различной точности — сначала самое грубое приближение

$$\Omega_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \int_0^1 \sqrt{\rho(x)} dx = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1),$$

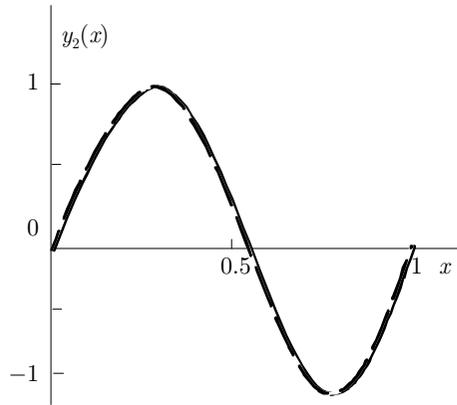


Рис. 4.13

а затем $\Omega_n^{(K)} = 1/\mu_n^{(K)}$, где $\mu_n^{(K)}$ — корни уравнения (4.20), полученные при сохранении в рядах (4.19) $K + 1$ первых слагаемых.

Таблица 4.1

n	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}$	$\Omega_n^{(0)}$	$\Omega_n^{(1)}$	$\Omega_n^{(2)}$	$\Omega_n^{(3)}$	$\Omega_n^{(4)}$
1	2.559	2.577	2.556	2.561	2.555	2.572	2.466
2	5.144	5.155	5.144	5.145	5.144	5.144	5.144
3	7.725	7.732	7.725	7.725	7.725	7.725	7.725
4	10.304	10.309	10.304	10.304	10.304	10.304	10.304
5	12.882	12.886	12.882	12.882	12.882	12.882	12.882

Как и должно быть для асимптотических расходящихся рядов, погрешность с ростом числа членов сначала убывает, а затем начинает расти (см. $n = 1, 2, 3$).

На рис. 4.13 показана точная собственная функция $y_n(x)$, $n = 2$ и самое грубое асимптотическое приближение

$$y_n(x) \simeq C(1+x)^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3\mu_n}((1+x)^{3/2} - 1)\right).$$

Для удобства сравнения обе собственные функции нормированы условием $\max y_n = 1$. На графике эти функции неразличимы, ибо максимальное различие имеет порядок 10^{-3} .

4.4.5. Уравнение краевой задачи является частным случаем уравнения из задачи 4.1.1 при $p(x) = \rho(x) = S(x)$, $r(x) = 0$. Его общее решение имеет вид:

$$y(x, \mu) = C_1(U \cos(\varphi/\mu) - V \sin(\varphi/\mu)) + C_2(U \sin(\varphi/\mu) + V \cos(\varphi/\mu)),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $U = u_0 + \mu^2 u_2 + \dots$, $V = \mu v_1 + \mu^3 v_3 + \dots$, $v_{2n+1} = i u_{2n+1}$, а функции $u_k(x)$ построены в задаче 4.1.1.

Уравнение для определения μ имеет вид $\operatorname{tg} \frac{1}{\mu} = \frac{U(0)F_1 + V(0)F_2}{U(0)F_2 - V(0)F_1}$, $F_1 = S(1)(\mu U(1) + \mu^2 V'(1)) - aV(1)$, $F_2 = S(1)(\mu V(1) - \mu^2 U'(1)) + aU(1)$. В предположении, что $a \sim 1$, решение имеет ту же структуру, что и в пп. 4.4.3:

$$\mu_n \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(n\pi)^{2k+1}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{где } c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{v_1(1)}{u_0(1)} - \frac{v_1(0)}{u_0(0)} - \frac{S(1)}{a}.$$

При $S(x) = 1 + \alpha x$ приближенные выражения для U и V имеют вид:

$$U^{(K)} = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k (\mu\alpha)^{2k} b_{2k}}{S^{2k+1/2}}, \quad V^{(K)} = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^{k+1} (\mu\alpha)^{2k+1} b_{2k+1}}{S^{2k+3/2}},$$

где $b_0 = 1$, $b_n = \frac{(2n-1)^2}{8n} b_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

Для первых восьми корней μ_n при $\alpha = a = 1$ в таблице 4.2 приведены точные значения $\Omega_n = 1/\mu_n$ и последовательные асимптотические приближения, имеющие тот же смысл, что и в таблице 4.1.

Таблица 4.2

n	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n = n\pi$	$\Omega_n^{(0)}$	$\Omega_n^{(1)}$	$\Omega_n^{(2)}$	$\Omega_n^{(3)}$	$\Omega_n^{(4)}$
0	0.917	—	—	—	—	—	—
1	3.616	3.142	3.618	3.619	3.619	3.619	3.619
2	6.567	6.283	6.568	6.568	6.568	6.568	6.568
3	9.622	9.425	9.623	9.623	9.623	9.623	9.623
4	12.717	12.566	12.718	12.718	12.718	12.718	12.718
5	15.829	15.708	15.830	15.830	15.830	15.830	15.830
6	18.951	18.850	18.952	18.952	18.952	18.952	18.952
7	22.079	21.991	22.079	22.079	22.079	22.079	22.079
8	25.209	25.133	25.210	25.210	25.210	25.210	25.210

Таблица 4.3

n	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n^{(1)}$	$\Omega_n^{(2)}$
1	14.243	14.381	15.052
2	57.904	57.524	58.189
3	129.958	129.430	130.093
4	230.702	230.097	230.760
5	360.178	359.527	360.190
6	518.401	517.718	518.382

Отличие этой задачи от задачи 4.4.4 состоит в том, что корень Ω_0 не может быть найден по асимптотическим формулам.

4.4.6. Для рассматриваемой задачи в обозначениях подп. 4.4.4 и с учетом задачи 4.1.3 $p(x) = \rho(x) = 1 + \alpha x$, $b_1 = \frac{3\alpha}{8} \left(1 - \frac{1}{1+\alpha}\right)$, $q \equiv 1$, $f_1 = 1$, $u_0 = p^{-1/2}$ и частоты собственных колебаний

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho_0 S_0 l^4}} \Omega_n, \quad \Omega_n = c_n^2 + O(n^{-1}), \quad c_n = \frac{\pi}{2}(2n+1).$$

Приближенное выражение для формы колебаний:

$$y_n(x) = \frac{\sin(c_n x - \pi/4)}{(1 + \alpha x)^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-c_n x} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}(1 + \alpha)} e^{c_n(x-1)} + O(c_n^{-1}).$$

Пусть $\alpha = 1$. В табл. 4.3 приведены первые шесть величин Ω_n — сначала точное значение, а затем первое и второе асимптотические приближения $\Omega_n^{(1)} = c_n^2$, $\Omega_n^{(2)} = \left(c_n - \frac{b_1}{c_n}\right)^2$.

На рис. 4.14 показана форма колебаний для $n = 3$. Различие точной формы и ее асимптотического приближения менее 0.01.

4.4.7. Результаты сравнения моментных и безмоментных частот для $n \leq 15$ приведены в таблице 4.4.

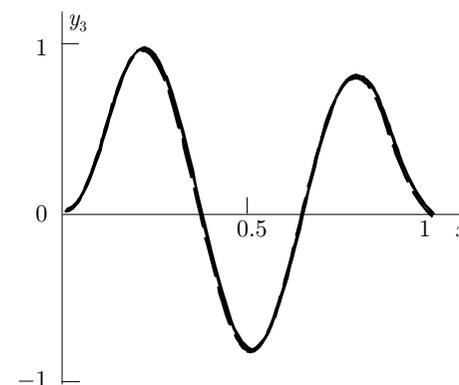


Рис. 4.14

Таблица 4.4

n	Λ_{n1}	Λ_{n1}^0	Λ_{n2}	Λ_{n2}^0
0	1.0989	1.0989	.0000	.0000
1	1.5013	1.5013	.8027	.8027
2	4.9443	4.9443	.9751	.9749
3	10.9546	10.9546	.9910	.9901
4	19.3856	19.3856	.9974	.9946
5	30.2293	30.2293	1.0035	.9966
6	43.4841	43.4841	1.0119	.9977
7	59.1496	59.1495	1.0247	.9983
8	77.2254	77.2253	1.0438	.9987
9	97.7115	97.7114	1.0712	.9999
10	120.6078	120.6077	1.1092	.9992
11	145.9144	145.9143	1.1604	.9993
12	173.6311	173.6310	1.2277	.9994
13	203.7581	203.7579	1.3139	.9995
14	236.2952	236.2950	1.4225	.9996
15	271.2425	271.2423	1.5569	.9996

4.4.8. В качестве нулевого приближения возьмем решение (4.30) вырожденной задачи (4.29). Это решение не удовлетворяет условиям

$$w = \frac{dw}{ds} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l, \quad (6.8)$$

поэтому добавляем к нему интегралы краевого эффекта, которые с точностью до величин порядка μ имеют вид:

$$u^e = \sum_{k=3,4} \nu p_k^{-1} C_k e^{p_k s} + \sum_{k=5,6} \nu p_k^{-1} C_k e^{p_k(s-l)},$$

$$w^e = \sum_{k=3,4} C_k e^{p_k s} + \sum_{k=5,6} C_k e^{p_k(s-l)},$$

$$p_{3,4} = \frac{(1 - \Lambda^0)^{1/4}}{\mu} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \quad p_{5,6} = \frac{(1 - \Lambda^0)^{1/4}}{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right).$$

Постоянные C_3 и C_4 находим из условий (6.8) при $s = 0$:

$$C_3 + C_4 + \frac{n\pi}{1 - (1 - \nu^2)\Lambda^0} = 0, \quad \frac{C_3}{p_3} + \frac{C_4}{p_4} = 0.$$

Теперь сумма $u^0 + u^e$ уже не удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Положим

$$\Lambda = \Lambda^0 + \mu\Lambda^1, \quad u = u^0 + u^1. \quad (6.9)$$

Тогда функция u^1 будет решением краевой задачи

$$\frac{d^2 u^1}{ds^2} + a(\Lambda^0)u^1 + \Lambda^1 a'_\Lambda u^0 = 0, \quad a'_\Lambda = \frac{da}{d\Lambda^0}, \quad (6.10)$$

решая которую, получаем

$$u^1(0) = -\frac{\nu^2 n \pi \sqrt{2}}{l(1 - (1 - \nu^2)\Lambda^0)(1 - \Lambda^0)^{1/4}}, \quad u^1(l) = (-1)^n u^1(0),$$

где величину $a(\Lambda^0)$ берем из (4.29), а значение $u^1(l)$ определяем аналогично значению $u^1(0)$.

Величину Λ^1 находим из условия совместности неоднородной задачи (6.10) на спектре. Для его вывода умножим уравнение (6.10) на u^0 и проинтегрируем по s от 0 до l . Тогда получим

$$\Lambda^1 = \frac{4\nu^2 n^2 \pi^2 \sqrt{2}}{l^3 (1 - (1 - \nu^2)\Lambda^0) a'_\Lambda (1 - \Lambda^0)^{1/4}}.$$

Таблица 4.5

n	$\Lambda_n^{\text{точн}}$	$\Lambda_n^{(4.38)}$	$\Lambda_n^{(4.35)}$	$\Lambda_n^{\text{безм}}$	$\Lambda_n^{(6.9)}$
1	.82157	(.93403)	(1.00043)	.80270	.82039
2	.98213	.98593	(1.00165)	.97493	.98126
3	.99603	.99681	(1.00452)	.99006	.99329
4	1.00418	1.00467	(1.01008)	(.99462)	(.99667)
5	1.01465	1.01524	1.01966	(.99662)	(.99807)
6	1.02986	1.03096	1.03484	(.99767)	(.99877)
7	1.05275	1.05394	1.05749		
8	1.07678	1.08638	1.08970		
9	1.1028			1.0989	
10	1.12840	1.13071	1.13386		
11	1.19342	1.18958	1.19261		
12	1.26062	1.26592	1.26886		
13	1.36556	1.36291	1.36579		
14	1.44440	1.48399	1.48681		
15	1.52334			1.50128	
16	1.63506	1.63287	1.63565		
17	1.82056	1.81351	1.81626		
18	2.03198	2.03015	2.03287		
19	2.29137	2.28727	2.28997		
20	2.59107	2.58964	2.59232		
21	2.94535	2.94228	2.94494		
22	3.35119	3.35048	3.35313		
23	3.82226	3.81978	3.82242		
24	4.35368	4.35600	4.35864		
25	4.93833			4.94430	
26	4.96726	4.96523	4.96786		

Лишь несколько первых корней Λ могут быть определены по приближенной формуле (6.9), ибо на основании оценки (4.27) Λ_{n2}^0 с возрастанием n быстро приближается к 1, а $\Lambda_1 \sim (1 - \Lambda)^{-9/4}$, $\Lambda \rightarrow 1$. Следовательно, поправочное слагаемое будет малым лишь при $1 - \Lambda \gg \mu^{4/9}$.

4.4.9. В табл. 4.5 приведены собственные значения параметра частоты Λ , меньшие 5 (их оказалось 26). Приведены точные значения $\Lambda_n^{\text{точн}}$ и асимптотические приближения, применимые в различных областях изменения Λ . В скобки заключены значения, выходящие из области применимости соответствующей формулы, а прочерки — в случаях, когда ее применение лишено смысла.

Значения $\Lambda_n^{(4.38)}$ найдены из соотношения (4.38), выведенного в предположении, что $\Lambda \approx 1$. Оказалось, что соотношение (4.38) хорошо аппроксимирует большинство значений $\Lambda > 1$. Значения при $n = 9$, $n = 15$ и $n = 25$ выпадают.

Значения $\Lambda_n^{(4.35)}$ найдены по формуле (4.35), которая пригодна лишь при $\Lambda > 1$. Значения $\Lambda > 1$, близкие к 1, аппроксимируются плохо, а значения при $n = 9$, $n = 15$ и $n = 25$ также пропущены.

Значения $\Lambda_n^{\text{безм}}$ — безмоментные ($\mu = 0$). При $\Lambda < 1$ (как в задаче 4.4.7) этих значений бесконечное множество с точкой сгущения $\Lambda = 1$, однако, как показывает сравнение с точным решением, лишь три первых точных значения, близких к безмоментным. При $\Lambda > 1$ безмоментные значения расположены относительно редко (см. $n = 9$, $n = 15$ и $n = 25$).

Значения $\Lambda_n^{(6.9)}$ (уточненные безмоментные значения) найдены по формуле (6.9) при $\Lambda < 1$, т. е. в области регулярного вырождения.

Из таблицы 4.5 следует, что в окрестности точки $\Lambda = 1$ собственные значения расположены наиболее часто.

4.5.1. Запишем общее решение уравнения (5.1)

$$w(x_1) = C_1 e^{-sx_1} + C_2 e^{-rx_1} + C_3 e^{sx_1} + C_4 e^{rx_1}, \quad (6.11)$$

где C_k — произвольные постоянные, определяемые в результате подстановки в граничные условия (5.3) и $w = w' = 0$ при $x_1 = \frac{\pi b}{a}$. Тогда для определения Λ вместо (5.4) получим уравнение

$$s(r^2 - \nu)^2 - r(\nu - s^2)^2 + \frac{r+s}{r-s} (s(r^2 - \nu)^2 + r(\nu - s^2)^2) \exp\left(-\frac{2\pi as}{b}\right) = 0. \quad (6.12)$$

Это уравнение будем решать при $a \gg b$, поэтому при его написании отброшены слагаемые порядка $\exp(-2\pi a/b)$. Выражая r через s по формуле $r = \sqrt{2 - s^2}$, находим, что при достаточно больших a/b это уравнение имеет единственный корень $s > 0$, через который выражается $\Lambda = (1 - s^2)^2$.

При $\nu = 0.3$ уравнение (6.12) имеет вещественный корень, если $\pi a/b \geq 22.7$. Для разных a/b значения s и Λ таковы:

$\pi a/b$	25	30	35	40	∞
s	0.0186	0.0324	0.0375	0.0400	0.0436
Λ	0.9993	0.9979	0.9972	0.9968	0.9962

При $\pi a/b < 22.7$ решение следует искать в виде, отличном от (6.11). Этот случай не рассматривается.

Таблица 4.6

Вариант граничных условий	Уравнение	Корень уравнения
C_1	$\sin 2\theta (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 0$	—
S_1	$\cos \theta (\cos \theta - \sin \theta) = 0$	—
C_2	$\sin 4\theta (\cos 3\theta + \sin 3\theta) = 0$	—
S_2	$\sin^2 4\theta = 0$	—
C_3	$\sin 4\theta (\cos \theta - \sin \theta) = 0$	—
S_3	$\sin^2 2\theta + \sin 6\theta = 0$	—
C_4	$\sin^2 4\theta = 0$	—
S_4	$\sin 4\theta (\cos 5\theta - \sin 5\theta) = 0$	$\Lambda = \cos \pi/5 = 0.809$
C_5	$\sin 4\theta (\cos 3\theta + \sin 3\theta) = 0$	—
S_5	$\sin^2 4\theta = 0$	—
C_6	$\sin 10\theta - \sin^2 2\theta = 0$	$\Lambda = 0.419$
S_6	$\sin 4\theta (\cos 7\theta + \sin 7\theta) = 0$	$\Lambda = \cos 3\pi/7 = 0.223$
C_7	$\sin^2 4\theta = 0$	—
S_7	$\sin 4\theta (\cos 5\theta - \sin 5\theta) = 0$	$\Lambda = \cos \pi/5 = 0.809$
C_8	$\sin 4\theta (\cos 7\theta + \sin 7\theta) = 0$	$\Lambda = \cos 3\pi/7 = 0.223$
S_8	$\sin 2\theta - \sin^2 6\theta = 0$	$\Lambda^{(1)} = 0.113, \Lambda^{(2)} = 0.973.$

4.5.2. После разделения переменных (5.1) приходим к тому же уравнению (5.2), в котором $\Lambda = Tb^2/(D\pi^2)$. В связи с тем, что граничные условия также совпадают с рассмотренными в подп. 4.5.1 (при $\nu = 0.3$), критическое значение $T = 0.9962\pi^2 D/b^2$. Это снижение критической нагрузки было впервые установлено А.Ю. Ишлинским [16].

4.5.3. Результаты приведены в табл. 4.6. (Прочерк означает отсутствие корней).

Из этих данных следует, что слабыми являются шесть вариантов граничных условий — $S_4, C_6, S_6, S_7, C_8, S_8$, причем только в последнем варианте (S_8) уравнение имеет два корня.

В связи с тем, что у перечисленных уравнений существует корень $\theta = 0$, отсюда нельзя сделать вывод о том, что остальные десять вариантов не являются слабыми. Этот вопрос обсуждается в задаче 4.5.4, где показано, что вариант S_5 также является слабым.

4.5.4. Корни $\Lambda(q)$ уравнения (5.15) для семи вариантов граничных условий представлены на рис. 4.15, на котором в порядке возрастания $\Lambda(q)$ кривые отмечены соответственно номерами: 1 для граничных условий S_8 , 2 — C_8 , 3 — S_6 , 4 — C_6 , 5 — S_4 , 6 — S_7 , 7 — S_5 .

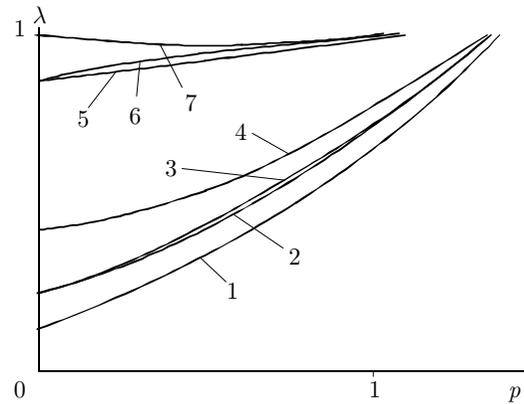


Рис. 4.15

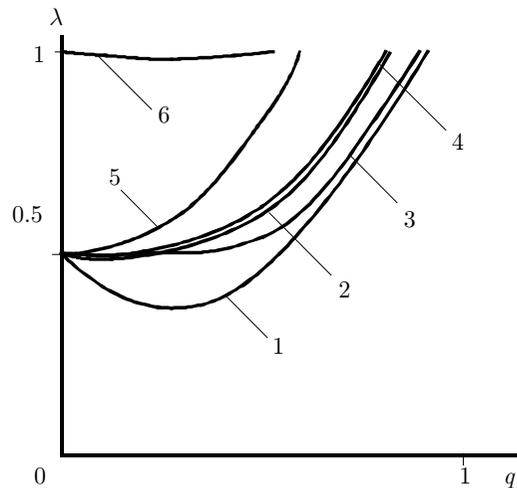


Рис. 4.16

При этом для вариантов $S_4, C_6, S_6, S_7, C_8, S_8$ при $q \rightarrow 0$ корни $\Lambda(q)$ стремятся к значениям, найденным в задаче 4.5.3, а для граничных условий S_5 значение $\Lambda(0) = 1$.

При $q > 1$ для слабого закрепления должно быть выполнено неравенство $\Lambda(q) < (q^2 + q^{-2})/2$, ибо только при этом условии уравне-

ние (5.16) имеет четыре корня с отрицательными вещественными частями, необходимые для построения локализованного решения (5.11).

4.5.5. В рассматриваемой задаче в обозначениях, принятых в пп. 4.5.2, имеем

$$T_2^{(0)} = -2Eh\mu^2\Lambda, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1$$

и уравнение (4.5.13) совпадает с (5.16). Поэтому все результаты, полученные для случая колебаний, могут быть использованы и для этой задачи устойчивости. Различие заключается в том, что в задаче устойчивости интерес представляет лишь наименьшее собственное значение. Поэтому в (5.16) следует брать лишь $n = 1$.

4.5.6. На рис. 4.16 приведена зависимость $\Lambda(q)$ для восьми вариантов граничных условий (5.10), для которых $\Lambda(q) < 1$.

В порядке возрастания $\Lambda(q)$ кривые отмечены соответственно номерами: 1 для граничных условий S_8 , 2 — S_7 , 3 — S_6 , 4 — S_5 , 5 — S_4, S_3, C_8 (для трех вариантов граничных условий значения $\Lambda(q)$ совпадают), 6 — C_6 . Функции $\Lambda(q)$ найдены в результате численного решения уравнения (5.15), при построении которого использованы точные значения корней уравнения (5.20). К семи вариантам ($S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, C_8, S_8$), дающим $\Lambda(0) = 1/2$ (см. пп. 4.5.4), добавился вариант C_6 , для которого $\Lambda(0) = 1$ и который дает $\Lambda_{\min} = 0.97$. Кривые 1, 2, 6 на рис. 4.16 имеют минимум при $q = 0.31, q = 0.20, q = 0.36$ соответственно. Остальные кривые имеют минимум при $q = 0$. Эта информация необходима для определения числа n в (5.20), которое выбирается из условия, чтобы $\Lambda(q)$ было наименьшим.

ГЛАВА 5

Сингулярно возмущенные линейные системы при наличии точек поворота

В главе рассматриваются системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с малым параметром μ при производных. В предположении, что на промежутке интегрирования имеется точка (или точки) поворота, построены асимптотические разложения решений при $\mu \rightarrow 0$. Эти разложения используются при решении краевых задач.

5.1. Свойства функций Эйри

Функции Эйри играют существенную роль при построении асимптотических разложений. Поэтому для удобства читателей здесь приводятся их свойства, которые понадобятся далее (см. также пп. 2.5.2).

Функции Эйри являются целыми функциями комплексной переменной η . Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} - \eta v = 0. \quad (1.1)$$

Вводятся в рассмотрение две стандартные функции Эйри $\text{Ai}(\eta)$ и $\text{Bi}(\eta)$, вещественные при вещественных η . Разложения этих функций в ряды Маклорена имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\eta) &= a_1 f_1(\eta) - a_2 f_2(\eta), & \text{Bi}(\eta) &= \sqrt{3}(a_1 f_1(\eta) + a_2 f_2(\eta)), \\ f_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \eta^{3k}, & b_0 &= 1, \quad b_k = \frac{b_{k-1}}{(3k-1)3k}, \quad a_1 = \frac{3^{-2/3}}{\Gamma(2/3)}, \\ f_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k \eta^{3k+1}, & d_0 &= 1, \quad d_k = \frac{d_{k-1}}{3k(3k+1)}, \quad a_2 = \frac{3^{-1/3}}{\Gamma(1/3)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Отметим соотношение

$$\text{Bi}(0) = \text{Ai}(0)\sqrt{3}. \quad (1.3)$$

Асимптотические разложения функций Эйри при $\eta \rightarrow \infty$ определяются выражениями:

$$\text{Ai}(\eta) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{\zeta^k}, \quad |\arg \eta| < \pi;$$

$$\text{Bi}(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} e^{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta^k}, \quad |\arg \eta| < \frac{\pi}{3};$$

$$\text{Ai}(-\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} \left[D_1(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) - D_2(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad |\arg \eta| < \frac{2\pi}{3};$$

$$\text{Bi}(-\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta^{-1/4} \left[D_1(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) + D_2(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad |\arg \eta| < \frac{2\pi}{3};$$

$$D_1(\zeta) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_{2k}}{\zeta^{2k}}, \quad D_2(\zeta) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_{2k+1}}{\zeta^{2k+1}},$$

$$\zeta = \frac{2}{3} \eta^{3/2}, \quad c_k = \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)}.$$

(1.4)

Ряды (1.4) расходятся. Область их применимости не ограничивается вещественными η . Указаны сектора в окрестности точки $\eta = \infty$, в которых разложения (1.4) являются асимптотическими.

На рис. 5.1 представлены графики функций $\text{Ai}(\eta)$ и $\text{Bi}(\eta)$ для вещественных η .

5.1.1. Упражнения

5.1.1. Провести сравнение результатов вычисления функций $\text{Ai}(\eta)$ и $\text{Bi}(\eta)$ для вещественных η с помощью сходящихся рядов (1.2) и асимптотических рядов (1.4). Выяснить возможности использования этих рядов для получения пяти верных десятичных знаков у $\text{Ai}(\eta)$ и $\text{Bi}(\eta)$ в предположении, что вычисления ведутся с 12 десятичными знаками.

5.1.2. Найти первые шесть нулей η_n и η'_n функций $\text{Ai}(\eta)$ и $v_0(\eta) = \sqrt{3}\text{Ai}(\eta) - \text{Bi}(\eta)$ и вывести асимптотические формулы для η_n и η'_n при $n \rightarrow \infty$. Сравнить точные и асимптотические значения нулей.

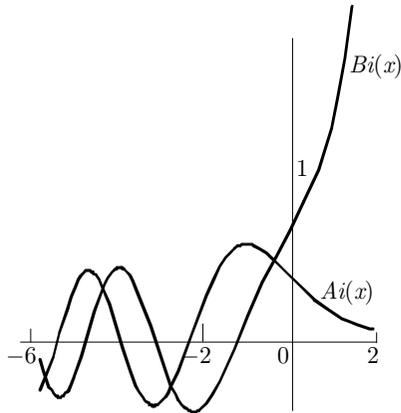


Рис. 5.1

5.2. Асимптотическое интегрирование уравнения второго порядка при наличии точек поворота

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - q(x, \mu)y = 0, \quad q(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) \mu^k, \quad (2.1)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, а функции $q_k(x)$ голоморфны при $x \in S \subset \mathbb{R}$, $S = [x_1, x_2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более общее уравнение

$$\mu^2 a_0 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \mu a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 = 0, \quad a_n(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(x) \mu^k, \quad n = 0, 1, 2$$

сводится к уравнению (2.1) путем замены неизвестной функции

$$y_1(x, \mu) = y(x, \mu) \exp\left(-\frac{1}{2\mu} \int \frac{a_1 dx}{a_0}\right),$$

если $a_{00}(x) \neq 0$. При этом в (2.1)

$$q = \frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)', \quad ()' = \frac{d}{dx}.$$

Если $q_0(x) \neq 0$ при $x \in S$, асимптотическое разложение решений уравнения (2.1) имеет вид (4.1.2) при $\lambda(x) = \pm \sqrt{q_0(x)}$.

Пусть теперь $q_0(x_*) = 0$, $x_1 \leq x_* \leq x_2$. Тогда решение (4.1.2) становится непригодным, ибо $u_k(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_*$. В частности, $u_0(x) = (q_0(x))^{-1/4}$ (см. (4.1.11)) и $u_0(x_*) = \infty$. Точки $x = x_*$, в которых $q_0(x_*) = 0$, называются *точками поворота*. Если $q_0'(x_*) \neq 0$, точку поворота $x = x_*$ называем *простой*.

5.2.1. Асимптотические разложения решений

Асимптотические разложения решений уравнения (2.1) в окрестности простой точки поворота $x = x_*$ при $q_0'(x_*) > 0$ имеют вид:

$$y(x, \mu) = a^{(0)}(x, \mu)v[\eta(x, \mu)] + \mu^{1/3} a^{(1)}(x, \mu) \frac{dv}{d\eta}, \quad (2.2)$$

где $v(\eta)$ — функция Эйри (см. п. 5.1):

$$\eta(x, \mu) = \mu^{-2/3} \xi(x), \quad \xi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x_*}^x \sqrt{q_0(x)} dx \right)^{2/3}, \quad (2.3)$$

$$a^{(j)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)}(x) \mu^k, \quad j = 0, 1.$$

Функция $\xi(x)$ и коэффициенты $a_k^{(j)}(x)$ определяются в результате подстановки решения (2.2) в (2.1) и приравнивания коэффициентов при $\mu^k v$ и $\mu^k (dv/d\eta)$. Если в S нет других точек поворота, функции $\xi(x)$ и $a_k^{(j)}(x)$ оказываются голоморфными в S , включая точку $x = x_*$.

Первые коэффициенты в (2.3) равны

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\xi'}} \cos \nu, \quad a_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\xi \xi'}} \sin \nu, \quad \nu = \int_{x_*}^x \frac{q_1 dx}{2\xi' \sqrt{\xi}}. \quad (2.4)$$

В частности, при $q_1 = 0$ имеем $\nu = 0$ и

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\xi'}}, \quad a_0^{(1)} = 0. \quad (2.5)$$

Все коэффициенты $a_k^{(j)}(x)$ выражаются через $q_i(x)$ в виде квадратур (см. также задачу 5.2.1).

Разложение (2.2) равномерно пригодно во всей области S , включая окрестность точки $x = x_*$. Если $|\eta| \gg 1$, можно воспользоваться асимптотическими разложениями функций Эйри (1.4) и выразить (2.2) в виде линейных комбинаций функций (1.2).

Пусть функция $q(x, \mu)$ вещественна при вещественных x , и пусть выполнены условия:

$$\begin{aligned} q_0(x_*) = 0, \quad q'_0(x_*) > 0, \quad q_1(x) \equiv 0, \\ q_0(x) < 0 \quad \text{при } x < x_*, \quad q_0(x) > 0 \quad \text{при } x > x_*. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда для двух решений $y_1(x, \mu)$ и $y_2(x, \mu)$ имеют место асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} y_1(x, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{\xi^l}} \text{Ai}(\eta) (1 + O(\mu)) + C \text{Ai}'(\eta), \quad C = O(\mu^{4/3}), \\ y_1(x, \mu) &= \frac{a}{2} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_{x_*}^x \sqrt{q_0(x)} dx\right) (1 + O(\mu)), \quad x > x_*, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$y_1(x, \mu) = a \left[\sin\left(\frac{1}{\mu} \int_x^{x_*} \sqrt{-q_0(x)} dx + \frac{\pi}{4}\right) + O(\mu) \right], \quad x < x_*.$$

$$y_2(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\xi^l}} \text{Bi}(\eta) (1 + O(\mu)) + C \text{Bi}'(\eta), \quad C = O(\mu^{4/3}),$$

$$y_2(x, \mu) = a \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{x_*}^x \sqrt{q_0(x)} dx\right) (1 + O(\mu)), \quad x > x_*, \quad (2.8)$$

$$y_2(x, \mu) = a \left[\cos\left(\frac{1}{\mu} \int_x^{x_*} \sqrt{-q_0(x)} dx + \frac{\pi}{4}\right) + O(\mu) \right], \quad x < x_*,$$

где $a = \mu^{1/6} / (|q_0|^{1/4} \sqrt{\pi})$.

Первые из формул (2.7) и (2.8) равномерно пригодны при $x_1 \leq x \leq x_2$, а две следующие — лишь при $x > x_*$ и при $x < x_*$ соответственно. При $x > x_*$ функция y_1 экспоненциально убывает, а функция y_2 возрастает. При $x < x_*$ обе функции осциллируют.

5.2.2. Точки поворота на концах промежутка интегрирования

Найдем асимптотические разложения при $n \rightarrow \infty$ собственных значений Ω_n и собственных функций $y_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \Omega^2 \rho(x) y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0 \quad (2.9)$$

в предположении, что $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) > 0$, $\rho(x) > 0$ при $0 < x \leq l$. К этой задаче сводится задача о свободных колебаниях струны с переменной плотностью (см. подп. 4.4.3).

Положим $\Omega = \mu^{-1}$. Тогда уравнение (2.9) приводится к виду (2.1) и имеет решение (2.2). Ограничиваясь старшими членами асимптотических разложений, находим

$$y(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\xi^l}} v_0(\eta) (1 + O(\mu^2)) + v'_0(\eta) O(\mu^{4/3}), \quad \eta = -\mu^{-2/3} \xi, \quad (2.10)$$

$$v_0(\eta) = \sqrt{3} \text{Ai}(\eta) - \text{Bi}(\eta), \quad \xi = \left(\frac{3}{2} \varphi(x)\right)^{2/3}, \quad \varphi(x) = \int_0^x \sqrt{\rho(x)} dx.$$

Имеем $v_0(0) = 0$. Искомое значение $\mu = \mu_n$ вычисляем из условия $v_0[\eta(l)] = 0$. Получаем

$$\mu_n = \frac{3}{2} |\eta'_n|^{-3/2} \varphi^0 + O(n^{-3}), \quad \Omega_n = \frac{2 |\eta'_n|^{3/2}}{3 \varphi^0} + O(n^{-1}),$$

$$\varphi^0 = \varphi(l) = \int_0^l \sqrt{\rho(x)} dx, \quad (2.11)$$

где η'_n — n -ый нуль функции $v_0(\eta)$ (см. задачу 5.1.2 и табл. 5.5). Заменяя η'_n их асимптотическими представлениями по формуле (5.1) (см. решение задачи 5.1.2), имеем

$$\Omega_n = \frac{\pi(n - 1/12)}{\varphi^0} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

Найдем теперь асимптотические разложения собственных значений Ω_n в предположении, что $\rho(0) = 0$, $\rho'(0) > 0$, $\rho(l) = 0$, $\rho'(l) < 0$, $\rho(x) > 0$ при $0 < x < l$.

В рассматриваемой задаче имеются две точки поворота: $x=0$ и $x=l$, поэтому с использованием эталонных функций Эйри построить асимптотическое разложение решений, равномерно пригодное на всем промежутке $0 \leq x \leq l$, не удастся. Будем строить два разных решения $y^{(1)}(x)$ и $y^{(2)}(x)$. Решение $y^{(1)}(x)$ пригодено при $0 \leq x \leq l - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и удовлетворяет условию $y^{(1)}(0) = 0$, а решение $y^{(2)}(x)$ пригодено при $\varepsilon \leq x \leq l$ и удовлетворяет условию $y^{(2)}(l) = 0$. Собственные значения Ω_n будем находить из условия

$$y^{(1)}(x) = Cy^{(2)}(x), \quad C = \text{const}, \quad \varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon. \quad (2.13)$$

В силу (2.8), (2.10), опустив остаточные члены, при $\varepsilon \leq x \leq l - \varepsilon$ запишем

$$y^{(1)}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\xi_1^{\ell_1}}} v_0(\eta^1) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\rho(x)}} \sin(\mu^{-1}\varphi_1(x) + \pi/12),$$

$$\eta^1 = -\mu^{-2/3}\xi_1, \quad \xi_1 = \left(\frac{2}{3}\varphi_1(x)\right)^{3/2}, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x \sqrt{\rho(x)} dx;$$

$$y^{(2)}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\xi_2^{\ell_2}}} v_0(\eta_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\rho(x)}} \sin(\mu^{-1}\varphi_2(x) + \pi/12),$$

$$\eta_2 = -\mu^{-2/3}\xi_2, \quad \xi_2 = \left(\frac{2}{3}\varphi_2(x)\right)^{3/2}, \quad \varphi_2(x) = \int_x^l \sqrt{\rho(x)} dx.$$

Тождество(2.13) возможно лишь при

$$\mu^{-1}\varphi_1(x) + \pi/12 + \mu^{-1}\varphi_2(x) + \pi/12 = n\pi,$$

откуда при $n \rightarrow \infty$ получим искомую асимптотическую формулу

$$\Omega_n = \mu_n^{-1} = \frac{\pi(n - 1/6)}{\varphi^0} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

$$\varphi^0 = \varphi_1 + \varphi_2 = \int_0^l \sqrt{\rho(x)} dx.$$

5.2.3. Точки поворота внутри промежутка интегрирования

Найдем асимптотические разложения при $n \rightarrow \infty$ собственных значений Ω_n и собственных функций $y_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \Omega^2 \rho(x)y = 0, \quad y(x_1) = y(x_2) = 0 \quad (2.15)$$

в предположении, что

$$\rho(x_*) = 0, \quad \rho'(x_*) > 0, \quad x_1 < x_* < x_2, \quad (2.16)$$

$$\rho(x) < 0 \text{ при } x < x_*, \quad \rho(x) > 0 \text{ при } x > x_*.$$

Будем искать лишь те собственные значения, для которых $\Omega_n^2 > 0$. Задача (2.15) имеет также счетное множество собственных значений $\Omega_n^2 < 0$, которые могут быть найдены аналогично после замены $x' = -x$, $\Omega' = i\Omega$, $i = \sqrt{-1}$.

Как и в подп. 5.2.2, положим $\Omega = \mu^{-1}$ и приведем задачу к уравнению (2.1). Решение (2.2) возьмем в виде

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\xi^{\ell}}} \text{Ai}(\eta)(1 + O(\mu)) + C \text{Ai}'(\eta), \quad C = O(\mu^{4/3}), \quad (2.17)$$

где

$$\eta = -\mu^{-2/3}\xi, \quad \xi = \left(\frac{3}{2}\varphi(x)\right)^{2/3}, \quad \varphi(x) = \int_{x_*}^x \sqrt{\rho(x)} dx.$$

Функция $y(x)$ приближенно удовлетворяет условию $y(x_1) = 0$, ибо $\text{Ai}(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$. Удовлетворяя условию $y(x_2) = 0$, получаем

$$\Omega_n = \frac{2|\eta_n|^{3/2}}{3\varphi^0} + O(n^{-1}), \quad \varphi^0 = \varphi(x_2) = \int_{x_*}^{x_2} \sqrt{\rho(x)} dx, \quad (2.18)$$

где η_n — n -ый нуль функции $\text{Ai}(\eta)$ (см. задачу 5.1.2 и табл. 5.5). Замечая η_n их асимптотическими представлениями по формуле (5.1) (см. решение задачи 5.1.2), имеем

$$\Omega_n = \frac{\pi(n - 1/4)}{\varphi^0} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Следует заметить, что формулы (2.18) и (2.19) не зависят от граничного условия при $x = x_1$, а также от поведения функции $\rho(x)$ при $x < x_*$ (если только $\rho(x) < 0$). Собственные функции экспоненциально убывают вместе с x при $x < x_*$ (см. рис. 5.7).

5.2.4. Колебания струны на упругом основании

Свободные колебания струны, лежащей на упругом основании, описываются уравнением (см. подп. 4.3.3)

$$T \frac{d^2 y}{dx_1^2} - c_1(x_1)y + \omega^2 \rho_1(x_1)y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad (2.20)$$

где l — длина струны, T — ее натяжение, ω — частота колебаний. Линейная плотность струны $\rho_1(x_1)$ и жесткость основания $c_1(x_1)$ предполагаются переменными.

После перехода к безразмерным переменным $x = x_1/l$, $c_1 = c_0 c(x)$, $\rho_1 = \rho_0 \rho(x)$, $c(x)$, $\rho(x) \sim 1$ задача (2.20) принимает стандартный вид (2.1)

$$\mu^2 y'' - q(x)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (2.21)$$

где $q(x) = q(x, \Lambda) = c(x) - \Lambda \rho(x)$, $\mu^2 = T/(c_0 l^2)$, $\Lambda = \omega^2 \rho_0 / c_0$.

В предположении, что $\mu > 0$ — малый параметр, исследуем спектр частот собственных колебаний струны. Предположим также, что $c(x)$, $\rho(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Введем вспомогательную функцию $z(x)$ и величины Λ^- и Λ^+ по формулам:

$$z(x) = \frac{c(x)}{\rho(x)}, \quad \Lambda^- = \min_x z(x), \quad \Lambda^+ = \max_x z(x). \quad (2.22)$$

При $\Lambda < \Lambda^-$ функция $q(x) > 0$ при всех x , и задача (2.21) не имеет ненулевых решений.

При $\Lambda > \Lambda^+$ функция $q(x) < 0$ при всех x , и при $\Lambda > \Lambda^+ + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ можно воспользоваться решением (4.4.21), построенным в пп. 4.4.3. Ограничиваясь нулевым приближением, запишем уравнение для определения Λ в виде

$$\varphi^0(\Lambda) = \mu \pi + O(\mu^2), \quad \varphi^0 = \int_0^1 \sqrt{-q(x)} dx. \quad (2.23)$$

При $\Lambda^- < \Lambda < \Lambda^+$ промежуток интегрирования $[0, 1]$ содержит точки поворота, которые, в отличие от задач 5.2.2–5.2.8, движутся по оси x с изменением $\Lambda \in [\Lambda^-, \Lambda^+]$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $z'(x) > 0$, $x \in [0, 1]$. Тогда промежуток интегрирования при всех $\Lambda \in [\Lambda^-, \Lambda^+]$ имеет одну точку поворота $x_*(\Lambda)$, причем $\Lambda = z(x_*)$, $q'(x_*) > 0$.

При построении асимптотических разложений решений уравнения (2.21) ограничимся главным членом в (2.2). Тогда

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (C_1 \text{Ai}(\eta) + C_2 \text{Bi}(\eta)), \quad \varphi = \int_{x_*}^x \sqrt{-q(x)} dx, \quad (2.24)$$

где C_1 , C_2 — произвольные постоянные, $\eta = \mu^{2/3} \xi$, $\xi = (3\varphi/2)^{2/3}$, причем $\eta < 0$ при $x < x_*$ и $\eta > 0$ при $x > x_*$.

После подстановки (2.24) в граничные условия (2.21) получим приближенное уравнение для определения Λ в виде

$$\text{Ai}(\eta^0) - \gamma \text{Bi}(\eta^0) = 0, \quad \gamma = \frac{\text{Ai}(\eta^1)}{\text{Bi}(\eta^1)}, \quad (2.25)$$

где

$$\eta^0 = - \left(\frac{3\varphi^0}{2\mu} \right)^{2/3} < 0, \quad \varphi^0 = \int_0^{x_*} \sqrt{-q(x)} dx,$$

$$\eta^1 = \left(\frac{3\varphi^1}{2\mu} \right)^{2/3} > 0, \quad \varphi^1 = \int_{x_*}^1 \sqrt{q(x)} dx.$$

Рассмотрим два частных случая.

1) Если точка поворота x_* расположена далеко от края $x = 1$, то $\eta^1 \gg 1$, $\gamma \ll 1$ и уравнение (2.25) упрощается (как в пп. 5.2.3, и задаче 5.2.5) и принимает вид $\text{Ai}(\eta^0) = 0$ или

$$\varphi^0 = \frac{2\mu |\eta_n|^{3/2}}{3} \simeq \mu \pi (n - 1/4), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

где η_n — n -ый нуль функции $\text{Ai}(\eta)$. Собственная функция осциллирует слева от точки поворота x_* и экспоненциально убывает справа от нее.

2) Если точка поворота x_* расположена вблизи края $x = 1$, то уравнение (2.26) уже неприменимо, ибо нельзя приближенно считать $\gamma = 0$. В частности, при $x_* = 1$, т.е. при совпадении точки поворота с краем, параметр $\gamma = 1/\sqrt{3}$ и уравнение (2.26) заменяется на уравнение (2.12) $\varphi^0 \simeq \mu \pi (n - 1/12)$.

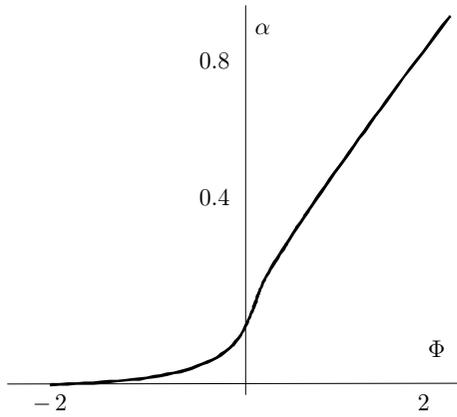


Рис. 5.2

Положим $\operatorname{tg}(\alpha\pi) = \gamma$. Тогда уравнение (2.25) дает выражение

$$\varphi^0 \simeq \mu\pi(n + \alpha - 1/4). \quad (2.27)$$

При $\Lambda > \Lambda^+$ формула для вычисления η^1 уже не применима. Предположим, что функции $s(x)$ и $\rho(x)$ могут быть аналитически продолжены вправо от точки $x = 1$. Тогда $x_* > 1$ и для вычисления η^1 в (2.25) используем формулу

$$\eta^1 = - \left(\frac{3\varphi^1}{2\mu} \right)^{2/3}, \quad \varphi^1 = \int_1^{x_*} \sqrt{-q(x)} dx.$$

На рис. 5.2 представлена зависимость $\alpha(\Phi)$, где

$$\Phi = -\frac{1}{\mu} \int_{x_*}^1 \sqrt{q(x)} dx, \quad x_* < 1; \quad \Phi = \frac{1}{\mu} \int_1^{x_*} \sqrt{-q(x)} dx, \quad x_* > 1.$$

На основании формул (1.4)

$$\alpha(\Phi) = \frac{\Phi}{\pi} + \frac{1}{4} + O(\Phi^{-1}), \quad \Phi \rightarrow \infty$$

и формула (2.27) переходит в (2.23).

5.2.5. Асимптотические разложения функций Бесселя

Найдем главные члены асимптотических разложений функций Бесселя $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$ в предположении, что порядок ν и аргумент z являются большими положительными числами одновременно.

Положим $z = \nu x$ и будем считать, что $\nu \rightarrow \infty$, а x фиксировано. Используем предельные соотношения при $z \rightarrow 0$:

$$\{I_\nu(z), J_\nu(z)\} \simeq \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad K_\nu(z) \simeq \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{z^\nu}, \quad N_\nu(z) \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi z^\nu}. \quad (2.28)$$

С учетом замены $z = \nu x$ и формулы Стирлинга

$$\Gamma(\nu) \simeq \sqrt{2\pi\nu} \nu^{\nu-1} e^{-\nu}, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

запишем соотношения (2.28) в виде:

$$\begin{aligned} \{I_\nu(z), J_\nu(z)\} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2} \right)^\nu, \\ K_\nu(z) &\simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \left(\frac{ex}{2} \right)^{-\nu}, \\ N_\nu(z) &\simeq -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2} \right)^{-\nu}, \\ x &\rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Функции $I_\nu(\nu x)$, $K_\nu(\nu x)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2 y'' + xy' - \nu^2(x^2 + 1) = 0, \quad (') = \frac{d}{dx}.$$

Положим $y = y_1 x^{-1/2}$, $\mu = \nu^{-1}$. Тогда это уравнение примет вид

$$\mu^2 y_1'' - q(x, \mu) = 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad (2.30)$$

причем

$$\begin{aligned} q(x, \mu) &= q_0(x) + \mu^2 q_2(x), \\ q_0(x) &= 1 + \frac{1}{x^2}, \quad q_2(x) = -\frac{1}{4x^2}. \end{aligned}$$

При $x > 0$ уравнение (2.30) не содержит точек поворота. Главные члены асимптотических разложений двух его решений имеют вид

$$y_1(x) \simeq (q_0(x))^{-1/4} \exp \pm \frac{1}{\mu} \int \sqrt{q_0(x)} dx. \quad (2.31)$$

Вычисляя интеграл и возвращаясь к переменной y , получаем

$$\begin{aligned} I_\nu(\nu x) &\simeq C_1(x^2 + 1)^{-1/4} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right)^\nu e^{\nu\sqrt{x^2 + 1}}, \\ K_\nu(\nu x) &\simeq C_2(x^2 + 1)^{-1/4} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right)^{-\nu} e^{-\nu\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем в результате сравнения формул (2.32) при $x \rightarrow 0$ и (2.29):

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}.$$

Построение асимптотических разложений функций $J_\nu(\nu x)$, $N_\nu(\nu x)$ сводится к тому же уравнению (2.30), в котором теперь $q_0(x) = x^2 - 1$. Уравнение (2.30) имеет точку поворота $x_* = 1$, и в силу (2.2), (2.5) асимптотические разложения его решений выражаются через функции Эйри. Возвращаясь к функции y , находим при $\nu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_\nu(\nu x) &\simeq C_3 \left(\frac{\xi}{1 - x^2} \right)^{1/4} \text{Ai}(\eta), \quad N_\nu(\nu x) \simeq C_4 \left(\frac{\xi}{1 - x^2} \right)^{1/4} \text{Bi}(\eta), \\ \eta &= \nu^{2/3} \xi(x), \quad \xi(x) = - \left(\frac{3}{2} \Phi(x) \right)^{2/3} \text{sign}(x - 1), \\ \Phi(x) &= \int_1^x \sqrt{-q(x)} dx = \sqrt{x^2 - 1} - \arctg \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \geq 1, \\ \Phi(x) &= \int_x^1 \sqrt{q(x)} dx = -\sqrt{1 - x^2} + \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}, \quad x \leq 1. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Если $|x - 1| \gg \nu^{-2/3}$, то $|\eta| \gg 1$ и можно воспользоваться формулами (2.7), (2.8), по которым имеем:

$$\begin{aligned} J_\nu(\nu x) &\simeq C_3 \frac{\nu^{-1/6} (1 - x^2)^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)^\nu e^{\nu\sqrt{1 - x^2}}, \quad x < 1, \\ N_\nu(\nu x) &\simeq C_4 \frac{\nu^{-1/6} (1 - x^2)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)^{-\nu} e^{-\nu\sqrt{1 - x^2}}, \quad x < 1, \\ J_\nu(\nu x) &\simeq C_3 \frac{\nu^{-1/6} (x^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin(\nu\Phi + \pi/4), \quad x > 1, \\ N_\nu(\nu x) &\simeq C_4 \frac{\nu^{-1/6} (x^2 - 1)^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos(\nu\Phi + \pi/4), \quad x > 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Сравнивая формулы (2.34) при $x \rightarrow 0$ и (2.29), находим

$$C_3 = \sqrt{2}\nu^{-1/3}, \quad C_4 = -\sqrt{2}\nu^{-1/3}.$$

Очевидно, что $\Phi(x) \simeq x - \pi/2$ при $x \gg 1$. Подстановка этого приближенного выражения в формулу для $J_\nu(x)$ дает асимптотическую формулу (2.4.9).

5.2.6. Упражнения

5.2.1. Вывести рекуррентные формулы для коэффициентов $a_k^{(j)}(x)$, $j = 0, 1$ в разложении (2.3) в предположении, что $q(x, \mu) = q_0(x)$.

5.2.2. В условиях подп. 5.2.2 найти асимптотические разложения собственных значений Ω_n при $\rho(x) = x$ ($0 \leq x \leq l$).

5.2.3. В условиях подп. 5.2.2 найти асимптотические разложения собственных значений Ω_n при $\rho(x) = x + x^2$ ($0 \leq x \leq 1$). Провести сравнение точных и асимптотических результатов.

5.2.4. В условиях подп. 5.2.2 провести сравнение точных собственных значений Ω_n и их асимптотических приближений (2.14) при $\rho(x) = x(1 - x)$, $l = 1$.

5.2.5. В условиях подп. 5.2.3 найти асимптотические разложения собственных значений Ω_n при $\rho(x) = x + x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Провести сравнение точных значений Ω_n и их асимптотических приближений. Построить график собственной функции при $n = 3$. Исследовать влияние граничного условия при $x = -1$, взяв $y'(-1) = 0$ вместо $y(-1) = 0$.

5.2.6. Найти асимптотические разложения при $N \rightarrow \infty$ собственных значений Ω_N и собственных функций $Y_N(x)$ задачи (2.15) в предположении, что

$$\begin{aligned} \rho(x_*^{(k)}) &= 0, \quad \rho'(x_*^{(k)}) \neq 0, \quad k = 1, 2, \quad x_1 < x_*^{(1)} < x_*^{(2)} < x_2; \\ \rho(x) &> 0 \text{ при } x < x_*^{(1)} \text{ и при } x > x_*^{(2)}; \\ \rho(x) &< 0 \text{ при } x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}. \end{aligned}$$

5.2.7. Условием задачи 5.2.6 удовлетворяет функция $\rho(x) = x^2 - a^2$ при $x_1 < -a$, $x_2 > a$. При $a = 0.5$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ исследовать спектр собственных значений, сравнив точные и приближенные значения.

5.2.8. Функция $\rho(x) = x^2 - a^2$ при $a = 0.5$, $x_1 = -0.9$, $x_2 = 1$ удовлетворяет условиям задачи 5.2.6. Найти точные значения первых десяти собственных значений и сравнить их с определяемыми по формуле (5.4). Построить некоторые из собственных функций.

5.2.9. Для задачи (2.21) провести сравнение первых десяти точных собственных значений Λ_n и значений, найденных по асимптотическим формулам (2.26), (2.27) и (2.23), в предположении, что $c(x) = 1 + x$, $\rho(x) = 1$, $\mu = 0.3$.

5.2.10. Свободные колебания круглой мембраны описываются уравнением

$$T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \rho \omega^2 w = 0, \quad w(R, \varphi) = 0,$$

где $w(r, \varphi)$ — прогиб мембраны, T — натяжение, ρ — масса единицы площади, ω — частота колебаний, R — радиус мембраны. После разделения переменных $w(r, \varphi) = y(r) \cos m\varphi$ и изменения масштаба $r = ax$, $a = \sqrt{T/(\rho\omega^2)}$ для функции $y(x)$ приходим к уравнению Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ и граничным условиям $y(R/a) = 0$, $y(0) < \infty$.

Вывести приближенные асимптотические формулы для частот собственных колебаний круглой мембраны с большим числом m волн в окружном направлении.

5.2.11. Для $m = 8$ провести сравнение точных значений α_{mn} корней функций Бесселя $J_m(x)$ и их асимптотических приближений по формулам (5.10)–(5.15) (см. решение задачи 5.2.10).

5.3. Асимптотическое интегрирование систем линейных уравнений при наличии точек поворота

Рассмотрим систему уравнений (4.2.1)

$$\mu \frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x, \mu) \mathbf{y}, \quad \mu > 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3.1)$$

при тех же предположениях относительно матрицы $\mathbf{A}(x, \mu)$, что и в п. 4.2.

Исследуем случаи, когда кратность корней характеристического уравнения (4.2.4)

$$\det(\mathbf{A}_0(x) - \lambda \mathbf{E}_n) = 0 \quad (3.2)$$

меняется в отдельных точках $x = x_*$ ($x_1 \leq x_* \leq x_2$), называемых точками поворота.

5.3.1. Теорема о расщеплении

В общем случае задача построения асимптотических разложений при $\mu \rightarrow 0$ решений системы (3.1) не решена. Здесь мы ограничимся простейшим частным случаем, когда кратность корней уравнения (3.2) при $x = x_*$ не превосходит 2. Дополнительно будем предполагать, что совпадающие при $x = x_*$ корни уравнения (3.2) (пусть это $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$) можно записать в виде

$$\lambda_{1,2} = p(x) \pm \sqrt{q(x)}, \quad q(x_*) = 0, \quad q'(x_*) \neq 0, \quad (3.3)$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ голоморфны в окрестности точки $x = x_*$.

При сделанных предположениях этим корням уравнения (3.2) соответствуют интегралы системы (3.1), асимптотические разложения которых при $\mu \rightarrow 0$ (как и в подп. 5.2) выражаются через функции Эйри:

$$\mathbf{y}(x, \mu) = [\mathbf{a}^{(0)}(x, \mu)v(\eta) + \mu^{1/3} \mathbf{a}^{(1)}(x, \mu)v'(\eta)] \exp\left(\frac{1}{\mu} \int p(x) dx\right), \quad (3.4)$$

где

$$\eta(x, \mu) = \mu^{-2/3} \xi(x), \quad \xi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x_*}^x \sqrt{q(x)} dx \right)^{2/3},$$

$$\mathbf{a}^{(j)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k^{(j)}(x) \mu^k, \quad j = 0, 1,$$

$v(\eta)$ — одно из решений уравнения Эйри (1.1). В отличие от решения (2.3) здесь \mathbf{y} , $\mathbf{a}^{(j)}$, $\mathbf{a}_k^{(j)}$ — вектор-функции. Как и в (2.3), функция $\xi(x)$ и коэффициенты $\mathbf{a}_k^{(j)}(x)$ голоморфны при $x = x_*$. Ряды (3.4) расходятся.

Далее основное внимание уделено вопросу определения функций $\mathbf{a}_k^{(j)}$, в частности $\mathbf{a}_0^{(j)}$. Помощь при этом может оказать теорема о расщеплении [4], заключающаяся в следующем:

Пусть корни уравнения (3.2) можно разбить на две группы $\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$ и $\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_n(x)$ такие, что

$$\lambda_j(x_*) \neq \lambda_k(x_*), \quad j = 1, \dots, p, \quad k = p+1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Тогда существует формальное преобразование

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_k(x) \mu^k, \quad \det \mathbf{P}_0(x_*) \neq 0 \quad (3.6)$$

с голоморфными при $x = x_*$ коэффициентами $\mathbf{P}_k(x)$, приводящее систему (3.1) к виду

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{z}}{dx} &= \mathbf{B}(x, \mu)\mathbf{z}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{P} - \mu\mathbf{P}'), \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем матрица \mathbf{B} имеет голоморфные при $x = x_*$ элементы и квазидиагональную структуру

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где квадратные матрицы \mathbf{B}_{11} и \mathbf{B}_{22} имеют соответственно размеры p и $n-p$, а собственные значения матриц $\mathbf{B}_{11}(x, 0)$ и $\mathbf{B}_{22}(x, 0)$ равны соответственно $\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$ и $\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_n(x)$.

В результате последовательного применения теоремы о расщеплении (при сделанных выше предположениях о корнях уравнения (3.2)) систему (3.1) можно преобразовать так, что она распадается на отдельные уравнения первого порядка

$$\mu \frac{dz_j}{dx} = b^{(j)}(x, \mu)z_j, \quad b^{(j)}(x, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)}(x) \mu^k, \quad b_0^{(j)}(x) = \lambda_j(x) \quad (3.9)$$

для простых $\lambda_j(x_*)$ или на системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{dz_j}{dx} &= b^{(j,j)}z_j + b^{(j,j+1)}z_{j+1}, \\ \mu \frac{dz_{j+1}}{dx} &= b^{(j+1,j)}z_j + b^{(j+1,j+1)}z_{j+1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

если $\lambda_j(x_*) = \lambda_{j+1}(x_*)$.

Пусть при $x = x_*$ имеем $\lambda_1(x_*) = \lambda_2(x_*)$, причем выполнены соотношения (3.3). Найдем выражения для векторов $\mathbf{a}_0^{(0)}(x)$ и $\mathbf{a}_0^{(1)}(x)$ в (3.4). При $x \neq x_*$ для построения интегралов $y^{(j)}(x, \mu)$, соответствующих корням $\lambda_j(x)$, $j = 1, 2$, можно воспользоваться формулами (4.2.3)–(4.2.9). Тогда

$$\mathbf{y}^{(j)}(x, \mu) = \mathbf{U}_0^{(j)}(x) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \lambda_j(x) dx\right) (1 + O(\mu)), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{U}_0^{(j)} = \varphi_0^{(j)} \mathbf{V}^{(j)}, \quad (\mathbf{A}_0 - \lambda_j \mathbf{E}) \mathbf{V}^{(j)} = 0, \quad \varphi_0^{(j)'} = b_1^{(j)} \varphi_0^{(j)},$$

$$\mathbf{V}^{(j)} = \mathbf{V}_1(x) - (-1)^j \sqrt{q} \mathbf{V}_2(x), \quad b_1^{(j)} = \frac{c_1(x)}{q} - (-1)^j \frac{c_2(x)}{\sqrt{q}}, \quad j = 1, 2,$$

где вектор-функции $\mathbf{V}_1(x)$, $\mathbf{V}_2(x)$ и функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ голоморфны при $x = x_*$, однако $\varphi_0^{(j)}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_*$.

В окрестности точки $x = x_*$ главные члены асимптотических разложений (3.4) при $\mu \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x, \mu) &= d_0(x) \left[\left(\frac{\mathbf{V}_1 \operatorname{ch} \nu}{\sqrt{\xi \xi'}} + \mathbf{V}_2 \sqrt{\xi \xi'} \sin \nu + O(\mu) \right) v(\eta) + \right. \\ &+ \mu^{1/3} \left. \left(\frac{\mathbf{V}_1 \operatorname{sh} \nu}{\sqrt{\xi \xi'}} + \mathbf{V}_2 \sqrt{\xi \xi'} \cos \nu + O(\mu) \right) v'(\eta) \right] \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{x_*}^x p(x) dx\right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\eta = \mu^{-2/3} \xi$,

$$d_0(x) = \exp\left(\int_{x_*}^x \frac{4c_1 + q'}{4q} dx\right), \quad \nu = \int_{x_*}^x \frac{c_2}{\sqrt{q}} dx, \quad \xi = \left(\frac{2}{3} \int_{x_*}^x \sqrt{q} dx\right)^{3/2}.$$

5.3.2. Колебания круглой пластины

Уравнение свободных колебаний круглой пластинки с m волнами в окружном направлении имеет вид

$$D \Delta \Delta w - \rho h \omega^2 w = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (3.13)$$

где

$$\Delta w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} w, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$w(r) \sin m\varphi$ — прогиб пластинки, R — ее радиус, E , ν , ρ , h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность и толщина пластинки.

Общее решение уравнения (3.13), ограниченное при $r = 0$, выражается через функции Бесселя $J_m(x)$, $I_m(x)$

$$w(r) = C_1 J_m(\alpha r) + C_2 I_m(\alpha r), \quad \alpha^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}. \quad (3.14)$$

Для жестко закрепленного края $r = R$ граничные условия имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = R$$

и уравнение частот приводится к виду

$$f_1(\beta) = J_m(\beta) I_m'(\beta) - I_m(\beta) J_m'(\beta) = 0, \quad (') = \frac{d}{d\beta}. \quad (3.15a)$$

Для шарнирно опертого края $r = R$ имеем соответственно

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{m^2}{r^2} w \right) = 0 \quad \text{при} \quad r = R,$$

$$f_2(\beta) = J_m(\beta) I_m'(\beta) - I_m(\beta) J_m'(\beta) - \frac{2\beta}{1-\nu} J_m(\beta) I_m(\beta) = 0. \quad (3.15b)$$

Наконец, для свободного края $r = R$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{m^2}{r^2} w \right) = 0, \\ & \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{m^2}{r^2} w \right) \right) + \\ & + (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{2m^2+1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{3m^2}{r^2} w \right) = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \end{aligned} \quad (3.15c)$$

$$\begin{aligned} f_3(\beta) = & \left(a_1 J_m(\beta) - \frac{1}{\beta} J_m'(\beta) \right) \left(\frac{m^2}{\beta^3} I_m(\beta) - a_1 I_m'(\beta) \right) - \\ & - \left(\frac{m^2}{\beta^3} J_m(\beta) - a_2 J_m'(\beta) \right) \left(a_2 I_m(\beta) - \frac{1}{\beta} I_m'(\beta) \right) = 0, \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{m^2}{\beta^2} - \frac{1}{1-\nu}, \quad a_2 = \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{1}{1-\nu}.$$

При выводе уравнений (3.15b) и (3.15c) использованы уравнения, которым удовлетворяют функции $J_m(\beta)$ и $I_m(\beta)$ (см. подп. 5.2.5).

Частоты ω_{mn} выражаются через корни β_{mn} уравнений (3.15) по формуле

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\beta_{mn}^2}{R^2}. \quad (3.16)$$

Для асимптотического исследования при $m \rightarrow \infty$, как и в пп. 5.2.5, сделаем замену $r = mx/\alpha$ и положим $\mu = 1/m$. Тогда уравнение (3.13) примет стандартный вид (4.1.1):

$$\mu^4 \Delta_1 \Delta_1 w - w = 0, \quad \Delta_1 w = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} - \frac{w}{x^2}. \quad (3.17)$$

При $x_* = 1$ уравнение (3.17) имеет точку поворота. Упомянутая теорема о расщеплении сводится к тому, что вместо уравнения четвертого порядка (3.17) можно рассматривать два уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \mu^2 \Delta_1 w + w = 0, \quad w = J_m(mx), \\ \text{б)} \quad & \mu^2 \Delta_1 w - w = 0, \quad w = I_m(mx), \end{aligned} \quad (3.18)$$

первое из которых содержит точку поворота $x_* = 1$.

Будем использовать асимптотические формулы, приведенные в пп. 5.2.5. Запишем формулу (2.31) в виде

$$I_m(\beta) \simeq (m^2 + \beta^2)^{1/4} \exp\left(\int \frac{\sqrt{m^2 + \beta^2}}{\beta} d\beta\right), \quad (m, \beta) \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

откуда

$$I'_m(\beta) \simeq \frac{\sqrt{m^2 + \beta^2}}{\beta} I_m(\beta), \quad (m, \beta) \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

При $m \rightarrow \infty$ будет $\beta \rightarrow \infty$ для корней уравнений (3.15), поэтому условия применимости формулы (3.20) выполнены и (с точностью до слагаемых порядка $1/m$) уравнения (3.15) принимают соответственно вид:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{m^2 + \beta^2} J_m(\beta) - \beta J'_m(\beta) = 0, \\ \text{b) } & J_m(\beta) = 0, \\ \text{c) } & a_1^2 \sqrt{m^2 + \beta^2} J_m(\beta) - a_2^2 \beta J'_m(\beta) = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где a_1 и a_2 — те же, что и в (3.15).

Дальнейшее упрощение получим, заменяя $J_m(\beta)$ асимптотической формулой (2.33). Тогда уравнения (3.21) примут вид

$$Ai(\eta) + b_k Ai'(\eta) = 0, \quad k = a, b, c, \quad (3.22)$$

где

$$\eta = -\left(\frac{3m}{2} \Phi\left(\frac{\beta}{m}\right)\right)^{2/3} \text{sign}(\beta - m),$$

$$b_1 = \left(\frac{m^2 - \beta^2}{\eta(m^2 + \beta^2)}\right)^{1/2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{a_2^2}{a_1^2} \left(\frac{m^2 - \beta^2}{\eta(m^2 + \beta^2)}\right)^{1/2},$$

а функция $\Phi(x)$ та же, что и в (2.33).

5.3.3. Колебания оболочки вращения

Построим главные члены асимптотических разложений интегралов системы (4.2.35), описывающей свободные колебания оболочки вращения с большим числом m волн в окружном направлении, в предположении, что характеристическое уравнение (4.2.38) имеет два меняющих

свою кратность корня

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{q(s)}, \quad q(s_*) = 0, \quad q'(s_*) < 0, \quad (3.23)$$

а остальные его корни являются простыми. Интегралы, соответствующие простым корням, построены в подп. 4.2.6. Рассмотрим интегралы, соответствующие корням (3.23).

Для приведения системы (4.2.35) к стандартному виду (3.1) введем вектор-функцию $\mathbf{y}(s, \mu)$ по формулам (4.2.36). Тогда при $s \neq s_*$ в силу формул (4.2.3)–(4.2.9), (4.2.39)

$$\mathbf{y}(s, \mu) \simeq \mathbf{U}_0(s) \exp\left(\frac{1}{\mu} \int \lambda(s) ds\right), \quad \mathbf{U}_0 = \varphi_0(s) \mathbf{V}(s), \quad (3.24)$$

где

$$\varphi_0 = (bf_\lambda)^{-1/2}, \quad f_\lambda = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad \mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_8)^T,$$

$$v_1 = \lambda^2 - \frac{r^2}{b^2}, \quad v_5 = -\frac{k_2 \lambda^2 - k_1 r^2 / b^2}{\lambda^2 - r^2 / b^2}, \quad v_{k+1} = \lambda v_k, \quad k = 2, 3, 4, 6, 7, 8,$$

функция $f = f(\lambda, s)$ определена формулой (4.2.38), T означает транспонирование.

Кратные корни (3.23) имеют вид (3.3) при $p(x) \equiv 0$. На основании формул (3.9), (4.2.9), (3.11)

$$b_1^{(j)}(s) = \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = \frac{c_1}{q} - (-1)^j \frac{c_2}{\sqrt{q}}, \quad j = 1, 2. \quad (3.25)$$

В связи с тем, что $f(\lambda, s)$ — полином по четным степеням λ , находим $c_2(s) \equiv 0$, следовательно, $\nu(s) \equiv 0$ в (3.12).

Компоненты v_k , $k = 1, \dots, 8$ вектора \mathbf{V} являются или четными, или нечетными функциями λ , поэтому в представлении (3.11) для вектора $\mathbf{V}^{(j)}$ каждая компонента v_k содержит только одно из двух слагаемых. В связи с этим формулы (3.12) упрощаются и принимают вид

$$y_k(s, \mu) \simeq \frac{d_0 v_k}{\sqrt{\xi^T}} v(\eta) = \mu^{1/6} \frac{d_0 v_k \eta^{1/4}}{\lambda^{1/2}} v(\eta), \quad k = 1, 3, 5, 7,$$

$$y_k(s, \mu) \simeq \mu^{1/3} \frac{d_0 \sqrt{\xi^T} v_k}{\lambda} v'(\eta) = \mu^{1/6} \frac{d_0 v_k}{\eta^{1/4} \lambda^{1/2}} v'(\eta), \quad k = 2, 4, 6, 8, \quad (3.26)$$

где v_k определены формулами (3.24), $v(\eta)$ — функция Эйри,

$$d_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{bf_\lambda}}, \quad \eta = \mu^{-2/3}\xi, \quad \xi = \left(\frac{3}{2} \int_{s_*}^s \sqrt{q(s)} ds \right)^{2/3},$$

причем $\xi > 0$ при $q > 0$ и $\xi < 0$ при $q < 0$.

Правые части в (3.26) голоморфны при $s = s_*$.

Выведем приближенное уравнение для определения частот собственных колебаний оболочки вращения с большим числом m волн в окружном направлении, считая, что на промежутке интегрирования имеется одна простая точка поворота вида (3.23).

При сделанных предположениях точка поворота $s = s_*$ делит промежутки интегрирования на две части. При $s_1 \leq s < s_*$ характеристическое уравнение восьмого порядка (4.2.38) имеет четыре корня с положительными вещественными частями и четыре — с отрицательными. При $s_1 \leq s < s_*$ оно имеет три корня с положительными вещественными частями, три — с отрицательными и два чисто мнимых корня.

Будем искать форму колебаний, затухающую слева от точки поворота, в виде

$$z(s, \mu) \simeq \sum_{j=1,3,4,5} C_j z^{(j)}(s, \mu), \quad (3.27)$$

где C_j — произвольные постоянные, $z^{(1)}(s, \mu)$ — решения вида (5.22) или (5.23), в которых $v(\eta) = \text{Ai}(\eta)$ — функция Эйри, затухающая при $\eta > 0$, и $z^{(j)}(s, \mu)$, $j = 3, 4, 5$ — решения вида (5.20), для которых $\text{Re}(\lambda_j) > 0$.

Подстановка в граничные условия при $s = s_2$ приводит к уравнению частот

$$\text{Ai}(-\eta_2) + d \left(-\frac{q(s_2)}{\eta_2} \right)^{1/2} \text{Ai}'(-\eta_2) = 0, \quad \eta_2 = \left(\frac{3}{2\mu} \int_{s_*}^{s_2} \sqrt{-q(s)} ds \right)^{2/3} > 0, \quad (3.28)$$

где $q(s)$ — то же, что и в (3.23), а коэффициент d зависит от рассматриваемого варианта граничных условий и является корнем определителя 4 порядка.

Например, для граничных условий жесткой заделки C_1 (см. формулы (4.5.9)) $u = v = w = \gamma_1 = 0$ уравнение для определения d имеет

вид

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{-1} u_0^{(1)} & u_0^{(3)} & u_0^{(4)} & u_0^{(5)} \\ dv_0^{(1)} & v_0^{(3)} & v_0^{(4)} & v_0^{(5)} \\ dw_0^{(1)} & w_0^{(3)} & w_0^{(4)} & w_0^{(5)} \\ \lambda_1^{-1} \gamma_{10}^{(1)} & \gamma_{10}^{(3)} & \gamma_{10}^{(4)} & \gamma_{10}^{(5)} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.29)$$

где функции $u_0^{(j)}$, $v_0^{(j)}$, $w_0^{(j)}$, $\gamma_{10}^{(j)}$ вычисляются по формулам (5.21) при $\lambda = \lambda_j(s)$. В первом столбце определителя (3.29) функции (5.22) имеют множитель d , а функции (5.23) — множитель λ^{-1} .

В частности, для граничных условий шарнирной опоры S_2 ($T_1 = v = w = \gamma_1 = 0$) в первом столбце определителя (3.29) все функции $z_0^{(1)}$ имеют множитель d , поэтому $d = 0$ в (3.28).

При $\eta_2 \gg 1$ можно воспользоваться формулами (1.4) и уравнение (3.28) упрощается

$$\text{tg} \left(\frac{1}{\mu} \int_{s_*}^{s_2} \sqrt{-q(s)} ds + \frac{\pi}{4} \right) = d \sqrt{-q(s_2)}, \quad (3.30)$$

откуда

$$\int_{s_*}^{s_2} \sqrt{-q(s)} ds = \mu(\pi(n-1/4) + \text{arctg}(d\sqrt{-q(s_2)})), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Форма собственных колебаний локализуется вблизи края $s = s_2$ (см. рис. 5.9). Если противоположный край $s = s_1$ является слабо закрепленным или свободным (см. подп. 4.5.2), возможно появление форм собственных колебаний, локализующихся вблизи этого края.

5.3.4. Упражнения

5.3.1. Вывести формулы (3.12).

5.3.2. Для рассмотренных в подп. 5.3.2 трех вариантов граничных условий при $m = 4$, $\nu = 0.3$ провести сравнение первых шести значений β_{mn} , найденных из точных уравнений (3.15) и приближенных уравнений (3.21)–(3.22).

5.3.3. Используя разложения (4.2.5), (3.26) и формулы (4.5.12), построить главные члены асимптотических разложений для функций u , v , w , $\gamma_1 = w'$, T_1 , S , Q_1^* и M_1 , описывающих напряженно-деформированное состояние при свободных колебаниях оболочки вращения и входящих в формулировку граничных условий (4.5.12).

5.3.4. Выполнить построение интегралов системы (4.2.53), описывающей устойчивость безмоментного осесимметричного состояния оболочки при наличии точки поворота вида (3.23).

5.3.5. Пользуясь уравнением (3.28), найти частоты собственных колебаний параболоида вращения, лежащие в окрестности наименьшей частоты. Для параболоида вращения параметры, входящие в формулы (4.2.38), (5.21), равны

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \quad k_1 = k_2^3, \quad \frac{ds}{db} = \sqrt{1+b^2}, \quad (3.32)$$

где $b(s)$ — расстояние до оси вращения.

Рассмотреть варианты граничных условий C_1 , S_1 , C_2 , S_2 (см. формулы (4.5.9)). Взять следующие значения параметров $R/h=250$, $\nu=0.3$, $s_2=2$, причем в качестве характерного размера R принять радиус кривизны в вершине купола.

5.3.6. Найти критическую нагрузку для параболоида вращения, рассмотренного в задаче 5.3.5 и находящегося под действием внешнего нормального давления p . Начальное осесимметричное напряженное состояние определяется безразмерными усилиями

$$t_1 = \frac{1}{2k_2}, \quad t_2 = \frac{1-t_1k_1}{k_2}, \quad (3.33)$$

где k_1 и k_2 — те же, что и в (3.32).

Параметр нагружения Λ , входящий в (4.2.53), связан с давлением p формулой

$$\Lambda = \frac{pR}{\mu^2 E h}. \quad (3.34)$$

5.4. Локализованные собственные функции

В пп. 5.2 и 5.3 были рассмотрены случаи, когда собственная функция экспоненциально затухает при приближении к одному из краев промежутка $[x_1, x_2]$, а уравнение для определения собственного значения Λ

не зависит (с погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$) от граничных условий на этом краю (см. задачи 5.2.5–5.2.9, 5.3.5, 5.3.6). Исследуем случаи, когда система (3.1) или уравнение (4.1.1) имеет решение, осциллирующее при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$ ($x_1 < x_*^{(1)} < x_*^{(2)} < x_2$) и экспоненциально затухающее при приближении к краям x_1 и x_2 . С погрешностью порядка $e^{-c/\mu}$ можно считать, что это решение удовлетворяет любым однородным граничным условиям при $x = x_1$ и $x = x_2$. Ниже это решение будем называть *локализованным*. Считаем, что коэффициенты системы (1.1) линейно зависят от параметра Λ , и ищем собственные значения Λ , при которых существует локализованное решение.

5.4.1. Условия существования локализованных решений

Рассмотрим сначала уравнение второго порядка

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - q(x, \Lambda)y = 0, \quad q(x, \Lambda) = q_1(x) + \Lambda q_2(x). \quad (4.1)$$

Пусть $q(x_*^{(k)}, \Lambda) = 0$, $q'_x(x_*^{(k)}, \Lambda) \neq 0$, $k = 1, 2$, причем $q < 0$ при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$. Тогда условие существования локализованного решения имеет вид:

$$\frac{1}{\mu} \int_{x_*^{(1)}}^{x_*^{(2)}} g(x, \Lambda) dx = \frac{\pi}{2}(2n+1) + O(\mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad g = \sqrt{-q}. \quad (4.2)$$

Пусть теперь порядок системы (3.1) или уравнения (4.1.1) больше двух, и пусть при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$ характеристическое уравнение (3.2) или (4.1.7) имеет два чисто мнимых корня

$$\lambda_{1,2} = \pm ig(x), \quad g(x) \sim (x_*^{(2)} - x)^{1/2}(x - x_*^{(1)})^{1/2}, \quad x \rightarrow x_*^{(k)}, \quad (4.3)$$

которые при $x \in [x_*^{(1)}, x_*^{(2)}]$ переходят в вещественные корни разных знаков. Остальные корни характеристического уравнения имеют отличную от нуля вещественную часть. Тогда при выполнении того же условия (4.2) система (3.1) имеет *формальное* локализованное решение.

Отметим еще один случай появления локализованных решений для систем, порядок которых не меньше четырех. Пусть при $x_*^{(1)} < x < x_*^{(2)}$

уравнение характеристическое (3.2) имеет четыре чисто мнимых корня

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm iq(x) \pm ig(x), \quad g(x) \sim (x_*^{(2)} - x)^{1/2}(x - x_*^{(1)})^{1/2}, \quad x \rightarrow x_*^{(k)}, \quad (4.4)$$

где функция $q(x)$ голоморфна. При $x \in [x_*^{(1)}, x_*^{(2)}]$ корни уравнения (3.2) имеют отличную от нуля вещественную часть. При тех же предположениях относительно остальных корней уравнения (3.2) условием существования локализованных решений снова будет соотношение (4.2).

5.4.2. Алгоритм построения локализованных решений

При решении задач колебаний и устойчивости особый интерес представляет определение наименьших собственных значений Λ и построение соответствующих собственных функций. Часто оказывается, что при этом собственная функция является локализованной, а точки поворота $x_*^{(1)}$ и $x_*^{(2)}$ — близко расположенными ($x_*^{(2)} - x_*^{(1)} \sim \mu^{1/2}$). В этом случае может быть использован алгоритм, описываемый ниже на примере самосопряженного уравнения порядка $2m$

$$\sum_{k=0}^m (-i\mu)^{2k} \frac{d^k}{dx^k} \left(a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right) = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (4.5)$$

Коэффициенты a_k предполагаются вещественными, голоморфными и линейно зависящими от параметра Λ :

$$a_k = a_{1k} - \Lambda a_{2k}, \quad \Lambda > 0. \quad (4.6)$$

Будем искать собственные значения Λ , для которых существуют локализованные в окрестности некоторой точки x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) решения уравнения (4.5). Точку x_0 называем *наиболее слабой*. Решение ищем в виде асимптотического ряда

$$y(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} y_k(\xi) \exp \left[i(\mu^{-1/2} p_0 \xi + 1/2 a \xi^2) \right], \quad (4.7)$$

$$\xi = \mu^{-1/2}(x - x_0), \quad \Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1 + \dots,$$

где $y_k(\xi)$ — полиномы по ξ ; p_0, x_0, Λ_k вещественны, $\text{Im}(a) > 0$. Последнее условие обеспечивает убывание решения (4.7) с ростом $|x - x_0|$.

Делая в характеристическом уравнении (4.1.7) замену $\lambda = ip$ и разрешая его относительно Λ , получаем

$$\Lambda = \left(\sum_{k=0}^m a_{1k}(x) p^{2k} \right) \left(\sum_{k=0}^m a_{2k}(x) p^{2k} \right)^{-1} \equiv f(p, x). \quad (4.8)$$

Предположим, что существует единственная точка (p_0, x_0) такая, что

$$\Lambda_0 = \min_{p,x}^{(+)} \{f\} = f(p_0, x_0) \quad (4.9)$$

и

$$d^2 f = f_{pp}^0 dp^2 + 2f_{px}^0 dp dx + f_{xx}^0 dx^2 > 0, \quad f_{px}^0 = \frac{\partial^2 f(p_0, x_0)}{\partial p_0 \partial x_0}, \dots \quad (4.10)$$

Минимум (4.9) ищется по всем $x \in [x_1, x_2]$, $p_0 \geq 0$, для которых $f > 0$. Тогда решение вида (4.7) существует, причем

$$y_0^{(n)}(\xi) = H_n(z), \quad z = c^{1/2} \xi, \quad \Lambda^{(n)} = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1^{(n)} + O(\mu^2),$$

$$a = \frac{ir - f_{px}^0}{f_{pp}^0}, \quad c = \frac{r}{f_{pp}^0}, \quad r = (f_{pp}^0 f_{xx}^0 - (f_{px}^0)^2)^{1/2} > 0, \quad (4.11)$$

$$\Lambda_1^{(n)} = r(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $H_n(z)$ — полином Эрмита степени n (в частности, $H_0 = 1$, $H_1 = z$, $H_2 = z^2 - 1/2$). Формулы (4.7), (4.11) определяют серию собственных значений $\Lambda^{(m)}$, наименьшее из которых получается при $n = 0$.

Что касается собственных функций, то здесь следует различать два случая:

$$(A) \quad p_0 = 0 \quad \text{и} \quad (B) \quad p_0 > 0. \quad (4.12)$$

В случае $p_0 = 0$ собственные функции имеют вид

$$y^{(n)}(x, \mu) = (H_n(z) + O(\mu^{1/2})) e^{-z^2/2}, \quad z = \left(\frac{c}{\mu} \right)^{1/2} (x - x_0), \quad (4.13)$$

а соответствующие собственные значения $\Lambda^{(n)}$ простые.

В случае $p_0 > 0$ функция (4.7) комплексна. Так как коэффициенты a_k в (4.5) вещественны, решениями уравнения (4.5) будут как вещественная, так и мнимая часть (4.7). Но было бы ошибочно считать, что собственные значения $\Lambda^{(n)}$ двукратны и произвольная линейная комбинация вещественной и мнимой частей (4.7) дает собственную функцию. Дело в том, что ряд (4.7) является не сходящимся, а асимптотическим, и параметру $\Lambda^{(n)}$ соответствуют две фиксированные вещественные собственные функции:

$$y^{(n,j)}(x, \mu) = \left[H_n(z) \cos \Psi_j + O(\mu^{1/2}) \right] \exp \left(-\frac{\text{Im}(a)(x-x_0)^2}{2\mu} \right),$$

$$\Psi_j = \frac{p_0 x}{\mu} + \frac{\text{Re}(a)(x-x_0)^2}{2\mu} + \Theta_j,$$

$$j = 1, 2, \quad z = \left(\frac{c}{\mu} \right)^{1/2} (x-x_0),$$
(4.14)

где фазы Θ_j фиксированы ($0 \leq \Theta_1, \Theta_2 < 2\pi$). Соответствующие точные собственные значения $\Lambda^{(n,1)}, \Lambda^{(n,2)}$ различны, однако

$$\Delta\Lambda = \Lambda^{(n,2)} - \Lambda^{(n,1)} = O(\mu^N) \quad (4.15)$$

для любого N . Такие собственные значения назовем *асимптотически двукратными*. В случае, когда характеристическое уравнение (3.2) имеет две пары чисто мнимых корней (4.3) между точками поворота, собственные значения также асимптотически двукратны.

На рис. 5.3 при $n = 0$ показаны собственная функция при $p_0 = 0$ (a) и две собственные функции при $p_0 > 0$ (b, c).

5.4.3. Колебания вытянутого эллипсоида вращения

Пользуясь формулами (4.7)–(4.11), приближенно определим наименьшую частоту колебаний тонкой оболочки, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения ($a_0 < b_0$, см. рис. 5.4).

Колебания эллипсоида с m волнами в окружном направлении описываются системой уравнений (4.2.35):

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w - \Delta_k \Phi - \Lambda w &= 0, \\ \Delta\Delta \Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

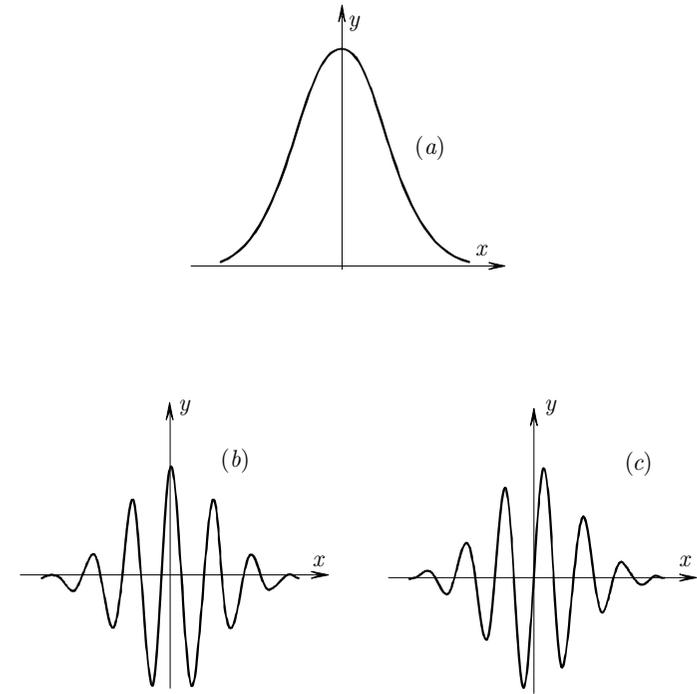


Рис. 5.3

где

$$\Delta w = \mu^2 \frac{1}{b} (bw')' - \frac{r^2}{b^2} w, \quad \Delta_k w = \mu^2 \frac{1}{b} (bk_2 w')' - \frac{k_1 r^2}{b^2} w, \quad ()' = \frac{d()}{ds},$$

причем обозначения те же, что и в подп. 4.2.5.

Пусть a_0 и b_0 — полуоси эллипса ($a_0 < b_0$). Возьмем $R = a_0$ в качестве характерного размера в формулах (4.2.34). Тогда

$$k_2 = \sqrt{\sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta}, \quad k_1 = \frac{k_2^3}{\delta^2}, \quad b = \frac{\sin \theta}{k_2},$$

$$\delta = \frac{b_0}{a_0} > 0, \quad \frac{d\theta}{ds} = k_1, \quad (4.17)$$

где θ — угол между осью вращения и нормалью к оболочке.

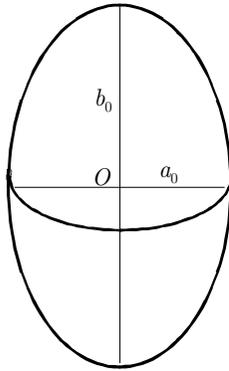


Рис. 5.4

Функция (4.8) имеет вид

$$f(p, s) = \left(p^2 + \frac{r^2}{b^2}\right)^2 + \frac{(k_2 p^2 + k_1 r^2/b^2)^2}{(p^2 + r^2/b^2)^2}, \quad r = \mu m \quad (4.18)$$

и достигает наименьшего значения (4.9)

$$\Lambda_0 = \left(\frac{r^4}{b^4} + k_1^2\right)_{\theta=\theta_0} = r^4 + \frac{1}{\delta^4} \quad (4.19)$$

при $p_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$.

Вычисляя производные

$$f_{pp}^0 = \left(\frac{4r^2}{b^2} + \frac{4k_1(k_2 - k_1)r^2}{b^2}\right)_{\theta=\theta_0} = 4r^2 + \frac{4(\delta^2 - 1)}{r^2\delta^4}, \quad (4.20)$$

$$f_{ss}^0 = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{r^4}{b^4} + k_1^2\right)_{\theta=\theta_0} = \frac{6(\delta^2 - 1)}{\delta^6} + \frac{4r^4}{\delta^2}, \quad f_{ps}^0 = 0,$$

по формуле (4.11) при $n = 0$ получаем

$$\Lambda \simeq r^4 + \frac{1}{\delta^4} + \frac{\mu}{r\delta^5} \sqrt{(r^4\delta^4 + \delta^2 - 1)(4r^4\delta^4 + 6(\delta^2 - 1))}, \quad r = \mu m. \quad (4.21)$$

Минимум по числу m волн в окружном направлении достигается при $r \ll 1$. Отбрасывая под корнем в (4.21) слагаемые с множителем r^4 , находим приближенно

$$\Lambda_{\min} = \frac{1}{\delta^4} + \frac{5}{\delta} \left(\frac{\sqrt{6}(\delta^2 - 1)\mu}{4}\right)^{4/5}, \quad m_{\min} = \frac{1}{\mu\delta} \left(\frac{\sqrt{6}(\delta^2 - 1)\mu}{4}\right)^{1/5}. \quad (4.22)$$

Теперь наименьшая частота колебаний может быть найдена по формуле (4.2.34).

5.4.4. Устойчивость цилиндрической оболочки при неоднородном осевом сжатии

Устойчивость тонкой круговой цилиндрической оболочки радиуса R с шарнирно опертыми краями при неоднородном осевом сжатии описывается системой уравнений типа (4.2.53):

$$\Delta\Delta w - 2\Lambda r^2 t(\varphi)w + r^2\Phi = 0, \quad \Delta\Delta\Phi - r^2w = 0, \quad (4.23)$$

где

$$\Delta w = \mu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - r^2 w, \quad r = \frac{\mu m \pi}{l}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad l = \frac{L}{R}, \quad t(\varphi) = -\frac{T_1^0(\varphi)}{2\Lambda E h \mu^2}.$$

Здесь $T_1^0(\varphi)$ — безмоментное начальное усилие, L — длина оболочки, m — число полуволн в продольном направлении при разделении переменных

$$w(s, \varphi) = w(\varphi) \sin \frac{m\pi s}{l}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (4.24)$$

где s и φ — продольная и окружная координаты на поверхности оболочки.

Система (4.23) имеет переменный коэффициент $t(\varphi)$. Параметр нагружения $\Lambda \geq 0$ введен таким образом, чтобы

$$\max_{\varphi} t(\varphi) = t(\varphi_0) = 1. \quad (4.25)$$

Не нарушая общности, считаем, что $\varphi_0 = 0$.

При фиксированном значении r найдем параметр нагружения Λ , при котором система (4.24) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее условию периодичности по φ . Считаем, что $t''(0) < 0$.

При использовании алгоритма, описываемого формулами (4.5)–(4.15), условие периодичности по φ заменяем условием затухания решения при удалении от наиболее слабой образующей $\varphi_0 = 0$.

Функция (4.8) может быть записана в виде

$$f(p, \varphi, r) = \frac{1}{2t(\varphi)} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z = \frac{(p^2 + r^2)^2}{r^2}. \quad (4.26)$$

Как и в общем случае (см. (4.12)), при отыскании минимума (4.9)

$$\Lambda_0 = \min_{p, \varphi} f(p, \varphi, r) = f(p_0, 0, r) \quad (4.27)$$

возможны два случая в зависимости от величины r :

$$(A) \quad p_0 = 0, \quad \Lambda_0 = \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \quad \text{для } r > 1, \quad (4.28)$$

$$(B) \quad p_0 = \sqrt{r - r^2}, \quad \Lambda_0 = 1 \quad \text{для } r < 1. \quad (4.29)$$

В случае (A) $r > 1$, поэтому этот случай может реализоваться при потере устойчивости только весьма коротких оболочек ($m = 1$, $l < \pi\mu$). В случае (A) по формулам (4.7) и (4.11) находим

$$\Lambda^{(n)} = \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right) + \mu \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{-\frac{2(r^8 - 1)t''(0)}{r^6}} + O(\mu^2), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.30)$$

В случае (B) по тем же формулам (4.7) и (4.11) находим

$$\Lambda^{(n)} = 1 + \mu \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{-\frac{16(r - 1)t''(0)}{r}} + O(\mu^2), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.31)$$

В отличие от случая (A) собственные значения (4.31) являются асимптотически двукратными (см. также задачу 5.4.10).

Пусть $l \sim 1$. Тогда при $\mu \ll 1$ для нескольких значений m будет $r = \mu t \pi / l < 1$. Для этих m формула (4.31) дает примерно одну и ту же критическую нагрузку $\Lambda \simeq 1$. Различие проявляется лишь в слабом порядке μ , из рассмотрения которого следует, что наименьшее значение Λ получаем при $r = 1$.

Обе формулы (4.30) и (4.31) дают при $r = 1$ одно и то же значение $\Lambda = 1$. Однако при $r = 1$ разложение (4.7), а вместе с ним и формулы (4.30) и (4.31) неприменимы, ибо $f_{pp} = 0$ вопреки предположению (5.29). При $r \simeq 1$ асимптотическое разложение решения построено в задаче 5.4.11.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассматриваемая здесь задача является хорошей иллюстрацией асимптотических методов, однако для оценки критической нагрузки при сжатии реальных оболочек формула (4.31) неприменима из-за весьма существенного влияния начальных неправильностей формы срединной поверхности, которые в 2–3 раза могут уменьшить критическую нагрузку. Кроме того, потеря устойчивости длинных цилиндрических оболочек ($l \gg 1$) происходит по иной схеме, чем описано выше. Длинная оболочка ведет себя как стержень, сжатый осевой силой.

5.4.5. Упражнения

5.4.1. Найти коэффициенты p_0 , Λ_0 , Λ_1 в формулах (4.7) для уравнения (4.1).

5.4.2. Свободные колебания струны, лежащей на упругом основании, описываются уравнением (4.1), в котором (см. также разд. 4.3.3 и 5.2.4)

$$\mu^2 = \frac{T}{c_0 l^2}, \quad \Lambda = \frac{\rho_0 \omega^2}{c_0},$$

а $q_1(x) = c(x)$ и $q_2(x) = \rho(x)$ — безразмерные жесткость основания и плотность струны (см. обозначения в разд. 5.2.4).

Найти при $q_1(x) = x^2$, $q_2(x) = 1$ решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям затухания:

$$y(-\infty) = y(\infty) = 0. \quad (4.32)$$

5.4.3. Рассмотрим краевую задачу

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^2 - \Lambda)y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0. \quad (4.33)$$

При $\mu = 0.1$, $\Lambda < 1$ сравнить точные собственные значения $\Lambda^{(n)}$ и их асимптотические приближения, найденные по формулам (4.2) и (5.28).

5.4.4. Рассмотрим краевую задачу

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \Lambda \right) y = 0, \quad y(-2) = y(1) = 0. \quad (4.34)$$

При $\mu = 0.1$, $\Lambda < 1$ сравнить точные собственные значения $\Lambda^{(n)}$ и их асимптотические приближения, найденные по формулам (4.2) и (5.30).

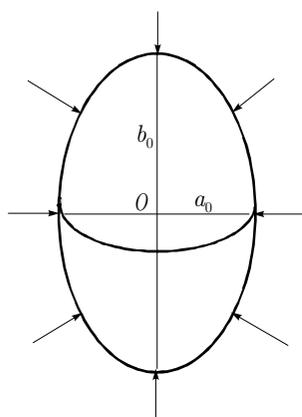


Рис. 5.5

Рассмотреть также граничные условия $y(-2) = y'(1) = 0$ вместо (4.34).

5.4.5. Провести вычисления значений параметра Λ по формулам (4.2) и (4.21) для эллипсоида вращения с параметрами $R/h = 500$, $\nu = 0.3$, $\delta = \sqrt{2}$.

5.4.6. Найти критическое значение внешнего давления q при потере устойчивости тонкой оболочки, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения ($a_0 > b_0$, см. рис. 5.5).

5.4.7. Для эллипсоида вращения с параметрами $R/h = 500$, $\nu = 0.3$, $\delta = \sqrt{2}$ провести сравнение результатов вычислений по формулам (4.2) и (5.34).

5.4.8. При различных отношениях полуосей δ (см. формулу (4.17)) исследовать устойчивость тонкого эллипсоида вращения под действием *внутреннего* давления $q > 0$.

5.4.9. Вывести формулу, аналогичную (5.41), для сплюснутого эллипсоида вращения ($\delta < 1/2$), находящегося под действием внутреннего давления $q > 0$.

5.4.10. Рассмотрим устойчивость круговой цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями под действием осевой силы P и изгибающего момента M , приложенных к краям оболочки (см. рис. 5.6). Тогда

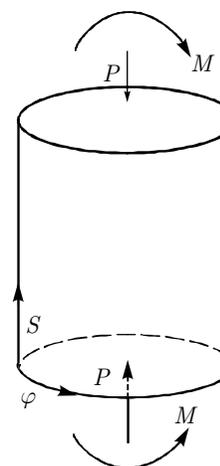


Рис. 5.6

начальное усилие $T_1^{(0)}$ и функция $t(\varphi)$ равны (см. (4.23))

$$T_1^{(0)} = \frac{P}{2\pi R} + \frac{M \cos \varphi}{\pi R^2}, \quad t(\varphi) = \frac{\alpha + \cos \varphi}{\alpha + 1},$$

$$M = -\frac{2\pi R^2 \Lambda E h \mu^2}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{PR}{2M} > -1. \quad (4.35)$$

Наиболее слабой является образующая $\varphi_0 = 0$.

Для значений параметров (см. обозначения в разд. 5.4.4) $R/h=100$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 1$ при различных q провести сравнение точных значений Λ , найденных при численном интегрировании системы (4.23), и их асимптотических приближений по формулам (4.30) и (4.31).

5.4.11. В силу формул (4.30) и (4.31) наименьшее значение $\Lambda(r)$ достигается при $r = 1$, при котором эти формулы неприменимы.

При тех же предположениях, что и в разд. 5.4.4, исследовать асимптотику первых двух собственных значений $\Lambda(r)$ задачи (4.23) при $\mu \rightarrow 0$, $r \simeq 1$.

5.4.12. Рассмотрим свободные колебания тонкой оболочки с шарнирно опертыми краями, имеющей форму некругового цилиндра. Часть спектра частот, лежащая вблизи наименьшей частоты колебаний, может

быть найдена из системы уравнений:

$$\mu^4 \frac{d^4 w}{dx^4} - \Lambda w + k(y)\Phi = 0, \quad \mu^4 \frac{d^4 \Phi}{dx^4} - k(y)w = 0, \quad (4.36)$$

$$\mu^8 = \frac{h^2 L^4}{12\pi(1-\nu)r^6}, \quad k(y) = \frac{R}{R_2(y)}, \quad \Lambda = \frac{\rho\omega^2 r^2}{E\mu^4},$$

где y — безразмерная координата в поперечном направлении, L — длина оболочки, $k(y)$ — безразмерная кривизна направляющей, а остальные обозначения те же, что и в разд. 4.2.5.

При $\mu \rightarrow 0$ вывести асимптотическую формулу для наименьшей частоты колебаний (наименьшего значения Λ).

Рассмотреть частный случай эллиптического цилиндра с полуосями эллипса a_0 и b_0 , для которого

$$R = a_0, \quad \frac{d\theta}{dy} = k(y) = \delta^{-2}(\sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}, \quad \delta = \frac{b_0}{a_0} > 1. \quad (4.37)$$

Здесь θ — угол между большим диаметром эллипса и нормалью к оболочке.

Для $\delta = \sqrt{2}$ и двух значений μ ($\mu = 0.1$ и $\mu = 0.2$) провести сравнение асимптотических и численных результатов.

5.5. Ответы и решения

5.1.1. В таблицах 5.1 и 5.3 представлены результаты вычисления функции $\text{Ai}(\eta)$ при $\eta > 0$ и при $\eta < 0$ соответственно, а в таблицах 5.2 и 5.4 — функции $\text{Bi}(\eta)$. Приведены значения $\text{Ai}^{(1,2)}$ и $\text{Bi}^{(1,2)}$, найденные с помощью сходящихся рядов (1.2), и значения $\text{Ai}^{(N)}$ и $\text{Bi}^{(N)}$, найденные из расходящихся рядов (1.4) при сохранении в них $N = 1, 4, 7, 10$ первых членов соответственно. В скобках указан десятичный порядок числа.

Сходящиеся ряды (1.2) пригодны, вообще говоря, при небольших $|\eta|$, а асимптотические ряды (1.4) — при больших $|\eta|$. При промежуточных значениях $|\eta|$ следует ожидать совпадения результатов. Из приведенных таблиц следует, что наиболее узкой ($4 \leq \eta \leq 5$) оказывается область совпадения результатов для функции $\text{Ai}(\eta)$ при $\eta > 0$, а наиболее широкой ($\eta \geq 4$) — для функции $\text{Bi}(\eta)$ при $\eta > 0$. При $\eta < 0$ для обеих функций $\text{Ai}(\eta)$ и $\text{Bi}(\eta)$ область совпадения результатов суть $4 \leq |\eta| \leq 10$.

Таблица 5.1.

η	$\text{Ai}^{(1,2)}$	$\text{Ai}^{(1)}$	$\text{Ai}^{(4)}$	$\text{Ai}^{(7)}$	$\text{Ai}^{(10)}$
1	.1353(-0)	.1448(-0)	.1233(-0)	.5189(-0)	-.58938(+2)
2	.3492(-1)	.3599(-1)	.3484(-1)	.3506(-1)	.3390(-1)
3	.6591(-2)	.6709(-2)	.6589(-2)	.6592(-2)	.6590(-2)
4	.9516(-3)	.9630(-3)	.9515(-3)	.9516(-3)	.9516(-3)
5	.1084(-3)	.1093(-3)	.1083(-3)	.1083(-3)	.1083(-3)
6	.9979(-5)	.1002(-4)	.9948(-5)	.9948(-5)	.9948(-5)
7	.1134(-5)	.7533(-6)	.7492(-6)	.7492(-6)	.7492(-6)
8	.5797(-5)	.4713(-7)	.4692(-7)	.4692(-7)	.4692(-7)
9	.1029(-3)	.2481(-8)	.2471(-8)	.2471(-8)	.2471(-8)
10	.2184(-2)	.1108(-9)	.1105(-9)	.1105(-9)	.1105(-9)

Таблица 5.2

η	$\text{Bi}^{(1,2)}$	$\text{Bi}^{(1)}$	$\text{Bi}^{(4)}$	$\text{Bi}^{(7)}$	$\text{Bi}^{(10)}$
1	.1208(1)	.1099(1)	.1446(1)	.6386(1)	.6310(3)
2	.3298(1)	.3127(1)	.3292(1)	.3342(1)	.3563(1)
3	.1404(2)	.1370(2)	.1403(2)	.1404(2)	.1404(2)
4	.8385(2)	.8263(2)	.8384(2)	.8385(2)	.8385(2)
5	.6578(3)	.6512(3)	.6578(3)	.6578(3)	.6578(3)
6	.6536(4)	.6488(4)	.6536(4)	.6536(4)	.6536(4)
7	.8033(5)	.7986(5)	.8033(5)	.8033(5)	.8033(5)
8	.1200(7)	.1194(7)	.1200(7)	.1200(7)	.1200(7)
9	.2147(8)	.2139(8)	.2147(8)	.2147(8)	.2147(8)
10	.4556(9)	.4541(9)	.4556(9)	.4556(9)	.4556(9)

Таблица 5.3

η	$\text{Ai}^{(1,2)}$	$\text{Ai}^{(1)}$	$\text{Ai}^{(4)}$	$\text{Ai}^{(7)}$	$\text{Ai}^{(10)}$
-1	.5356(+0)	.5602(+0)	.5150(+0)	-.1241(+1)	.1227(+2)
-2	.2274(+0)	.2151(+0)	.2260(+0)	.2277(+0)	.2448(+0)
-3	-.3788(+0)	-.3836(+0)	-.3787(+0)	-.3788(+0)	-.3788(+0)
-4	-.7027(-1)	-.6531(-1)	-.7025(-1)	-.7027(-1)	-.7027(-1)
-5	.3508(+0)	.3497(+0)	.3508(+0)	.3508(+0)	.3507(+0)
-6	-.3292(+0)	-.3303(+0)	-.3291(+0)	-.3292(+0)	-.3292(+0)
-7	.1843(+0)	.1860(+0)	.1843(+0)	.1843(+0)	.1843(+0)
-8	-.5271(-1)	-.5423(-1)	-.5271(-1)	-.5271(-1)	-.5271(-1)
-9	-.2213(-1)	-.2088(-1)	-.2214(-1)	-.2213(-1)	-.2213(-1)
-10	.4024(-1)	.3921(-1)	.4024(-1)	.4024(-1)	.4024(-1)

Таблица 5.4

η	$\text{Bi}^{(1.2)}$	$\text{Bi}^{(1)}$	$\text{Bi}^{(4)}$	$\text{Bi}^{(7)}$	$\text{Bi}^{(10)}$
-1	.1040(+0)	.6683(-1)	.4777(-1)	.3392(+0)	.2630(+3)
-2	-.4123(+0)	-.4229(+0)	-.4117(+0)	-.4099(+0)	-.4114(+0)
-3	-.1983(+0)	-.1914(+0)	-.1982(+0)	-.1983(+0)	-.1983(+0)
-4	.3922(+0)	.3936(+0)	.3922(+0)	.3922(+0)	.3922(+0)
-5	-.1384(+0)	-.1417(+0)	-.1384(+0)	-.1384(+0)	-.1384(+0)
-6	-.1467(+0)	-.1444(+0)	-.1467(+0)	-.1467(+0)	-.1467(+0)
-7	.2938(+0)	.2928(+0)	.2938(+0)	.2938(+0)	.2938(+0)
-8	-.3313(+0)	-.3311(+0)	-.3313(+0)	-.3313(+0)	-.3313(+0)
-9	.3250(+0)	.3251(+0)	.3250(+0)	.3250(+0)	.3250(+0)
-10	-.3147(+0)	-.3148(+0)	-.3147(+0)	-.3147(+0)	-.3147(+0)

Отмеченное различие областей совпадения результатов связано с тем, что при вычислении с помощью рядов (1.2) при больших $|\eta|$ происходит потеря точности, ибо приходится вычислять малые разности больших величин. Наибольшая потеря точности имеет место для $\text{Ai}(\eta)$ при $\eta > 0$. При $\eta \geq 7$ с помощью рядов (1.2) не удается верно определить даже порядок $\text{Ai}(\eta)$. Для функции же $\text{Bi}(\eta)$ при $\eta > 0$ потеря точности не имеет места, ибо все слагаемые в (1.2) положительны.

Следует обратить внимание на то, что для небольших $|\eta|$ увеличение числа удерживаемых слагаемых в асимптотических рядах (1.4) ухудшает результат (как и должно быть для расходящихся рядов).

5.1.2. С использованием асимптотических формул (1.4) при $n \rightarrow \infty$ находим

$$\begin{aligned} \eta_n &= \eta_{na}(1 + O(n^{-2})), & \eta_{na} &= -(1.5\pi(n - 1/4))^{2/3}, \\ \eta'_n &= \eta'_{na}(1 + O(n^{-2})), & \eta'_{na} &= -(1.5\pi(n - 1/12))^{2/3}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Величины η_n , η_{na} , η'_n , η'_{na} для $n = 1, 2, \dots, 6$ приведены в таблице 5.5.

5.2.1. После подстановки (2.2) в (2.1) и приравнивания коэффициентов при v и $dv/d\eta$ с учетом (2.3) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} (a^{(0)}\xi')' + a^{(0)'}\xi' + \mu a^{(1)''} &= 0, \\ (a^{(1)}\xi\xi')' + a^{(1)''}\xi\xi' + \mu a^{(0)''} &= 0, \end{aligned}$$

где $\xi(x)$ определено формулой (2.3). Эта система имеет асимптотическое

Таблица 5.5

n	η_n	η_{na}	η'_n	η'_{na}
1	-2.3381	-2.3203	-2.6670	-2.6524
2	-4.0880	-4.0818	-4.3425	-4.3370
3	-5.5206	-5.5172	-5.7413	-5.7379
4	-6.7867	-6.7845	-6.9865	-6.9840
5	-7.9441	-7.9425	-8.1288	-8.1272
6	-9.0227	-9.0214	-9.1962	-9.1949

решение

$$a^{(0)}(x, \mu) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(0)}(x)\mu^{2n}, \quad a^{(1)}(x, \mu) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^{(1)}(x)\mu^{2n+1}, \quad (5.2)$$

где $a_0^{(0)}(x) = 1/\sqrt{\xi'}$,

$$\begin{aligned} a_{2n}^{(0)}(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\xi'}} \int_{x_*}^x \frac{a_{2n-1}^{(1)''}}{\sqrt{\xi'}} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \\ a_{2n+1}^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\xi\xi'}} \int_{x_*}^x \frac{a_{2n}^{(0)''}}{\sqrt{\xi\xi'}} dx, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (5.3)$$

причем все функции $a_k^{(j)}(x)$ голоморфны.

5.2.2. Задача имеет точное решение

$$y^{(n)}(x) = v_0(-\Omega_n^{2/3}x), \quad \Omega_n = \frac{|\eta'_n|^{3/2}}{l^{3/2}},$$

где функция $v_0(\eta)$ — та же, что и в (2.10).

5.2.3. Имеем $\varphi^0 = 0.75\sqrt{2} - 0.125 \log(3 + \sqrt{8})$. Результаты сравнений точных значений $\Omega_n^{\text{точн}}$ и асимптотических приближений $\Omega_n^{2.11}$ и $\Omega_n^{2.12}$, найденных по формулам (2.11) и (2.12), приведены в таблице 5.6.

5.2.4. Имеем $\varphi^0 = \pi/8$, поэтому по формуле (2.14) получаем $\Omega_n = 8(n - 1/6)$. Результаты сравнения точных ($\Omega_n^{\text{точн}}$) и приближенных ($\Omega_n^{\text{пп}} = 8(n - 1/6)$) значений Ω_n приведены в таблице 5.7. Как и следовало ожидать, с ростом n точность асимптотической формулы возрастает.

Таблица 5.6

n	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n^{2.11}$	$\Omega_n^{2.12}$
1	3.4368	3.4270	3.4270
2	7.1679	7.1656	7.1656
3	10.9047	10.9042	10.9041
4	14.6427	14.6428	14.6428
5	18.3810	18.3814	18.3814
6	22.1195	22.1200	22.1199

Таблица 5.7

n	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n^{\text{пп}}$
1	6.7264	6.6667
2	14.6892	14.6667
3	22.6794	22.6667
4	30.6752	30.6667
5	38.6730	38.6667
6	46.6716	46.6667

Таблица 5.8

n	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n^{\text{точн}}$	$\Omega_n^{2.18}$	$\Omega_n^{2.19}$
1	2.8183	2.6891	2.8364	2.8039
2	6.5296	6.52310	6.5573	6.5425
3	10.2726	10.2723	10.2906	10.2811
4	14.0137	14.0137	14.0266	14.0197
5	17.7537	17.7537	17.7638	17.7583
6	21.4931	21.4931	21.5014	21.4968

5.2.5. В рассматриваемой задаче

$$x_* = 0, \quad \varphi^0 = \int_0^1 \sqrt{x+x^2} dx = 0.75\sqrt{2} - 0.125 \log(3 + \sqrt{8}).$$

Результаты сравнения значений Ω_n представлены в таблице 5.8. Приведены точные значения $\Omega_n^{\text{точн}}$ для задачи (2.15) и $\Omega_n^{\text{точн}}$ для задачи, в которой граничное условие на левом конце заменено на $y' = 0$, и асимптотические значения $\Omega_n^{2.18}$ и $\Omega_n^{2.19}$, найденные по формулам (2.18) и (2.19) и не зависящие от граничного условия на левом конце. Следует обратить внимание на сближение с ростом n значений $\Omega_n^{\text{точн}}$ и $\Omega_n^{\text{точн}}$.

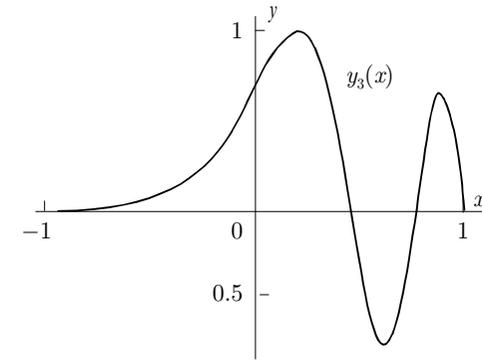


Рис. 5.7

На рис. 5.7 изображен график собственной функции $y_3(x)$.

5.2.6. Промежуток интегрирования содержит две точки поворота $x_*^{(1)}$ и $x_*^{(2)}$ и имеет две зоны осцилляции собственных функций — $x_1 \leq x \leq x_*^{(1)}$ и $x_*^{(2)} \leq x \leq x_2$. Каждая из этих зон порождает свою серию собственных значений $\Omega_n^{(1)}$ и $\Omega_n^{(2)}$. Для значений $\Omega_n^{(2)}$ собственные функции осциллируют при $x_*^{(2)} \leq x \leq x_2$ и являются экспоненциально малыми в остальной части промежутка $[x_1, x_2]$ (см. рис. 5.8а). Собственная функция, соответствующая $\Omega_n^{(1)}$, осциллирует при $x_1 \leq x \leq x_*^{(1)}$ и экспоненциально затухает на остальной части промежутка (рис. 5.8б). Если же при некоторых m и n будет $\Omega_m^{(1)} \simeq \Omega_n^{(2)}$, то две собственных функции осциллируют как при $x_1 \leq x \leq x_*^{(1)}$, так и при $x_*^{(2)} \leq x \leq x_2$ (см. задачу 5.2.7).

Асимптотические формулы для определения $\Omega_n^{(k)}$ аналогичны формулам (2.18), (2.19):

$$\Omega_n^{(k)} = \frac{2|\eta_n|^{3/2}}{3\varphi_k^0} + O(n^{-1}) = \frac{\pi(n-1/4)}{\varphi_k^0} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

$$\varphi_k^0 = \left| \int_{x_*^{(k)}}^{x_k} \sqrt{\rho(x)} dx \right|, \quad k = 1, 2.$$

5.2.7. Промежуток интегрирования содержит две точки поворота $x_*^{(1,2)} = \pm 0.5$. В силу четности функции $\rho(x)$ и симметрии задачи

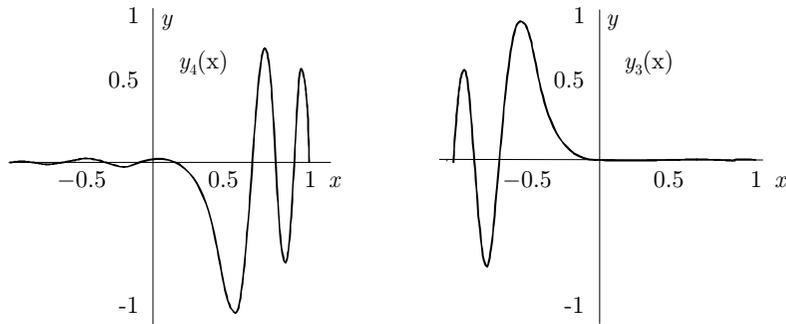


Рис. 5.8

относительно точки $x = 0$ задача распадается на две:

$$\begin{aligned} y^{(1)''} + \Omega^{(1)2} y^{(1)} &= 0, & y^{(1)}(-1) &= 0, & y^{(1)'}(0) &= 0; \\ y^{(2)''} + \Omega^{(2)2} y^{(2)} &= 0, & y^{(2)}(-1) &= 0, & y^{(2)}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

При $x < 0$ функции $y^{(1)}(x)$ следует продолжать как четные, а функции $y^{(2)}(x)$ — как нечетные.

На основании формулы (5.4) при $n \rightarrow \infty$

$$\Omega_n^{(1)} \simeq \Omega_n^{(2)} \simeq \frac{\pi(n-1/4)}{\varphi^0}, \quad \varphi^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\log(2+\sqrt{3}). \quad (5.6)$$

Каждому значению $\Omega_n^{(k)}$, найденному по формуле (5.6), отвечает два близких между собой точных собственных значения и две собственные функции — четная и нечетная. В дальнейшем (см. также п. 5.4) такие собственные значения будем называть *асимптотически двухкратными*.

В табл. 5.9 приведены результаты сравнения точных значений $\Omega_n^{(1)}$, $\Omega_n^{(2)}$ и значений, найденных по формуле (5.6). Видим, что при $n \geq 4$ (с принятой в таблице точностью) значения $\Omega_n^{(1)}$ и $\Omega_n^{(2)}$ совпадают.

5.2.8. В силу формулы (5.4) возьмем

$$\Omega_n^{(k)} = \frac{\pi(n-1/4)}{\varphi_k^0}, \quad \varphi_k^0 = \int_a^{|x_k|} \sqrt{x^2 - a^2} dx, \quad k = 1, 2. \quad (5.7)$$

Таблица 5.9

n	$\Omega_n^{(1)}$	$\Omega_n^{(2)}$	Ω_n^{np}
1	8.7614	8.8779	8.7789
2	20.5058	20.5070	20.4841
3	32.2039	32.2039	32.1893
4	43.9053	43.9053	43.8945
5	55.6082	55.6082	55.5997
6	67.3120	67.3120	67.3049

Таблица 5.10

N	Ω_N	$n^{(1)}$	$\Omega_n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$\Omega_n^{(2)}$
1	8.8200			1	8.7789
2	12.6489	1	12.5573		
3	20.5064			2	20.4841
4	29.3440	2	29.3004		
5	32.2039			3	32.1893
6	43.9053			4	43.8945
7	46.0717	3	46.0435		
8	55.6082			5	55.5997
9	62.8074	4	62.7865		
10	67.3200			6	67.3049

Таблица 5.11

n	$\Lambda_n^{\text{точн}}$	$\Lambda_n^{(1)}$	$\Lambda_n^{(2)}$	$\Lambda_n^{(3)}$	$\Lambda_n^{(3)}$
1	1.2257	1.2257	1.2240	1.2240	
2	1.3947	1.3947	1.3941	1.3941	
3	1.5330	1.5330	1.5327	1.5327	
4	1.6553	1.6553	1.6550	1.6550	
5	1.7671	1.7670	1.7668	1.7670	
6	1.8730	1.8711	1.8710	1.8729	
7	1.9819	1.9694	1.9693	1.9818	
8	2.1055			2.1054	2.1082
9	2.2487			2.2486	2.2498
10	2.4119			2.4118	2.4124

В табл. 5.10 приведены первые десять точных собственных значений Ω_N и соответствующие им асимптотические приближения $\Omega_n^{(1)}$ и $\Omega_n^{(2)}$, найденные по формуле (5.7). Оказалось, что четыре собственных значения принадлежат первой серии $\Omega_n^{(1)}$ и шесть — второй серии $\Omega_n^{(2)}$.

На рис. 5.8 б) и а) приведены графики собственных функций $y_5(x) = y_3^{(1)}(x)$ и $y_7(x) = y_4^{(2)}(x)$ соответственно. Как и следовало ожидать, функция $y_5(x)$ существенно отлична от нуля и осциллирует вблизи левого края промежутка, а функция $y_7(x)$ — вблизи правого края. В связи с тем, что Ω_7 близко к Ω_6 , у функции $y_7(x)$ заметна слабо выраженная осцилляция и вблизи левого края.

5.2.9. В рассматриваемой задаче $q(x) = 1 + x - \Lambda$. Точка поворота $x_* = \Lambda - 1$ принадлежит промежутку $[0, 1]$ при $\Lambda \in [1, 2]$.

Результаты вычислений представлены в табл. 5.11. Приведены точные значения $\Lambda_n^{\text{точн}}$, найденные из уравнения (2.25), в котором $\eta^0 = -(\Lambda - 1)\mu^{-2/3}$, $\eta^1 = -(\Lambda - 2)\mu^{-2/3}$. Здесь (в отличие от общего случая) уравнение (2.25) является точным, ибо функция $q(x)$ линейно зависит от x . Далее записаны приближенные значения $\Lambda_n^{(1)}$, $\Lambda_n^{(2)}$:

$$\Lambda_n^{(1)} = 1 + \mu^{2/3}|\eta_n|, \quad (5.8)$$

$$\Lambda_n^{(2)} = 1 + \left(\frac{2}{3}\mu\pi(n-1/4)\right)^{2/3}, \quad (5.9)$$

вытекающие из формулы (2.26) и пригодные лишь при $\Lambda < 2$. Приведены решения $\Lambda_n^{(3)}$ уравнения (2.27) и решения $\Lambda_n^{(4)}$ уравнения (2.23), пригодного лишь при $\Lambda > 2$.

5.2.10. Точное решение задачи выражается через нули α_{mn} функции Бесселя $J_m(x)$:

$$\omega_{mn} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\alpha_{mn}, \quad J_m(\alpha_{mn}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Найдем асимптотику α_{mn} при $m \rightarrow \infty$. Из формул (2.33), (2.34) следует, что $\alpha_{mn} > m$ при всех n . Формулы (2.33) дают

$$\alpha_{mn} = m(1 + \beta_{mn}^2)^{1/2} + O(m^{-1/3}), \quad (5.10)$$

где β_{mn} — положительный корень уравнения

$$\beta - \arctan \beta = \gamma \quad (5.11)$$

при

$$\gamma = \gamma_{mn} = \frac{2}{3m}|\eta_n|^{3/2}. \quad (5.12)$$

Таблица 5.12

n	$\alpha_{mn}^{\text{точн}}$	$\alpha_{mn}^{(1)}$	$\alpha_{mn}^{(2)}$	$\alpha_{mn}^{(3)}$	$\alpha_{mn}^{(4)}$
1	12.2251	12.2234	11.1079	12.1873	
2	16.0378	16.0362	12.9548	16.0219	
3	19.5545	19.5531		19.5443	
4	22.9452	22.9438		22.9376	
5	26.2668	26.2656		26.2607	26.4019
6	29.5457	29.5445		29.5405	29.6411
7	32.7958	32.7947		32.7913	32.8656
8	36.0256	36.0246		36.0217	36.0781
9	39.2405	39.2395		39.2369	39.2808
10	42.4439	42.4430		42.4407	42.4755

При фиксированном n и $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{mn} &\ll 1, \quad \beta_{mn} \simeq (3\gamma_{mn})^{1/3}, \\ \alpha_{mn} &\simeq m \left(1 + \left(\frac{2}{m}\right)^{2/3} |\eta_n|\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где η_n — n -ый нуль функции $\text{Ai}(\eta)$.

При $n \gg 1$ вместо (5.12) можно считать

$$\gamma_{mn} \simeq \frac{\pi}{m}(n-1/4). \quad (5.14)$$

При $\gamma_{mn} \gg 1$ также возможно приближенное решение уравнения (5.11):

$$\beta_{mn} \simeq \gamma_{mn} + \pi/2 - (\gamma_{mn} + \pi/2)^{-1}. \quad (5.15)$$

5.2.11. В табл. 5.12 для $n \leq 10$ приведены точные значения $\alpha_{mn}^{\text{точн}}$ и приближенные значения α_{mn}^k , $k = 1, 2, 3, 4$, найденные по формуле (5.10). Для вычисления α_{mn}^1 , α_{mn}^2 , α_{mn}^3 величина β_{mn} в (5.10) определялась из уравнения (5.11), в котором $\nu = \nu_{mn}$ вычислялась по формулам (5.12)–(5.14) соответственно. Для α_{mn}^4 при вычислении β_{mn} использовалась формула (5.15).

Пропуски в таблице означают неприменимость соответствующей приближенной формулы. Формула (5.13) даст приемлемые по точности результаты лишь при значениях m , существенно больших $m = 8$.

5.3.1. Решения (3.1) можно представить в виде $y^{(j)} \simeq V^{(j)} z_j$, где скалярные функции z_j удовлетворяют уравнениям (3.9):

$$\mu \frac{dz_j}{dx} = (\lambda_j(x) + \mu b_1^{(j)}(x)) z_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.16)$$

$b_1^{(j)}(x)$ — те же, что и b_0 в формулах (4.2.9), (3.11). Здесь и далее записаны лишь слагаемые, влияющие на главные члены (3.12).

Функции $\lambda_j(x)$, $b_1^{(j)}(x)$ имеют особую точку при $x = x_*$. В соответствии с теоремой о расщеплении существует линейное преобразование

$$z_j = (\nu_{j1}^{(0)}(x) + \mu \nu_{j1}^{(1)}(x)) \theta_1 + (\nu_{j2}^{(0)}(x) + \mu \nu_{j2}^{(1)}(x)) \theta_2, \quad j = 1, 2, \quad (5.17)$$

которое превращает уравнения (5.16) в систему двух уравнений, не содержащих особой точки. Коэффициенты этого преобразования суть $\nu_{11}^{(0)} = \nu_{21}^{(0)} = 1/2$, $\nu_{12}^{(0)} = -\nu_{22}^{(0)} = 1/(2\sqrt{q})$, $\nu_{11}^{(1)} = -b_1^{(2)}/(2\sqrt{q})$, $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{21}^{(1)} = 0$, $\nu_{22}^{(1)} = b_1^{(1)}/(2\sqrt{q})$, а полученная система уравнений:

$$\mu \theta_1' = p \theta_1 + \theta_2, \quad \mu \theta_2' = (q + 2\mu c_2) \theta_1 + \left(p + \mu \frac{4c_1 + q'}{2q} \right) \theta_2 \quad (5.18)$$

уже не имеет особой точки $x = x_*$.

Главные члены асимптотических разложений решений системы (5.18) выражаются через функции Эйри:

$$\theta_1 = d_0(x) \left[\frac{\cos \nu}{\sqrt{\xi'}} v(\eta) + \mu^{1/3} \frac{\sin \nu}{\sqrt{\xi \xi'}} v'(\eta) \right] \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_{x_*}^x p(x) dx \right), \quad (5.19)$$

$$\theta_2 = d_0(x) \left[\sqrt{\xi \xi'} \sin \nu v(\eta) + \mu^{1/3} \sqrt{\xi'} \cos \nu v'(\eta) \right] \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_{x_*}^x p(x) dx \right),$$

где использованы те же обозначения, что и в формулах (3.11), (3.12). Для вывода формул (3.12) остается подставить (5.19) в (5.17), а затем в формулы $\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{V}^{(j)} z_j$.

5.3.2. Для трех вариантов граничных условий результаты сравнения приведены в табл. 5.13 (жесткое закрепление — первые три столбца, шарнирная опора — следующие три столбца, свободный край — последние

три столбца). Приведены соответственно решения $\beta_{mn}^{\text{точн}}$ точных уравнений (3.15k), $k = a, b, c$, решения $\beta_{mn}^{(1)}$ приближенных уравнений (3.21k), $k = a, b, c$, и решения $\beta_{mn}^{(2)}$ приближенного уравнения (3.22). Отметим, что в случае жесткого закрепления значения β_{mn} не зависят от коэффициента Пуассона ν . В случае шарнирной опоры от ν не зависят корни $\beta_{mn}^{(1)}$ и $\beta_{mn}^{(2)}$ приближенных уравнений (21b) и (3.22) при $k = 2$. Следовательно, корни точного уравнения (3.15) слабо зависят от ν . В случае свободного края один из корней рассматриваемых уравнений меньше m . Этот корень не приведен в табл. 5.13.

5.3.3. Для простых корней $\lambda(s)$ характеристического уравнения (4.2.38) имеем

$$z(s, \mu) \simeq z_0(s) \exp \left(\frac{1}{\mu} \int \lambda(s) ds \right), \quad (5.20)$$

где z заменяет любую из перечисленных выше функций (u, v, \dots), причем

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\mu}{\lambda} \left(k_1 w_0 - \left(\frac{r^2}{b^2} + \nu \lambda^2 \right) \Phi_0 \right), & T_{10} &= -\frac{Ehr^2}{Rb^2} \Phi_0, \\ v_0 &= \frac{\mu b}{r} \left(k_2 w_0 + \left(\lambda^2 + \frac{\nu r^2}{b^2} \right) \Phi_0 \right), & S_0 &= \frac{Ehr\lambda}{Rb^2} \Phi_0, \\ w_0 &= \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right) (bf\lambda)^{-1/2}, \\ \Phi_0 &= - \left(k_2 \lambda^2 - \frac{k_1 r^2}{b^2} \right) \left(\lambda^2 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{-2} w_0, \\ Q_{10}^* &= -\frac{Eh\mu}{R} \left(\lambda^3 - \frac{(2-\nu)\lambda r^2}{b^2} \right) w_0, \\ \gamma_{10} &= \frac{\lambda}{\mu} w_0, & M_{10} &= Eh\mu^2 \left(\lambda^2 - \frac{\nu r^2}{b^2} \right) w_0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где использованы те же обозначения, что и в подп. 4.2.5.

Для кратных при $s = s_*$ корней уравнения (4.2.38) вида (3.28) главные члены асимптотических разложений этих функций выражаются либо через функции Эйри $v(\eta)$, либо через их производные:

$$z(s, \mu) \simeq \frac{\mu^{1/6} \eta^{1/4} z_0}{\lambda^{1/2}} v(\eta), \quad z = \{v, w, T_1, M_1\}, \quad (5.22)$$

$$z(s, \mu) \simeq \frac{\mu^{1/6} z_0}{\lambda^{1/2} \eta^{1/4}} v'(\eta), \quad z = \{u, \gamma_1, S, Q_1^*\}, \quad (5.23)$$

Таблица 5.13

n	$\beta_{mn}^{\text{точн}}$	$\beta_{mn}^{(1)}$	$\beta_{mn}^{(2)}$	$\beta_{mn}^{\text{точн}}$	$\beta_{mn}^{(1)}$	$\beta_{mn}^{(2)}$	$\beta_{mn}^{\text{точн}}$	$\beta_{mn}^{(1)}$	$\beta_{mn}^{(2)}$
1	12.971	12.957	12.964	12.195	12.225	12.223	9.039	9.214	9.277
2	16.799	16.787	16.792	16.015	16.038	16.036	13.483	13.535	13.552
3	20.323	20.312	20.312	19.536	19.554	19.553	17.086	17.121	17.131
4	23.718	23.709	23.713	22.930	22.945	22.944	20.510	20.537	20.545
5	27.043	27.034	27.038	26.253	26.267	26.265	23.850	23.871	23.878
6	30.323	30.316	30.319	29.534	29.546	29.544	27.140	27.159	27.164

Таблица 5.14

m	S_2	C_2	S_1	C_1
9	.09844	.09845	.10001	.10002
10	.09495	.09495	.09675	.09677
11	.09311	.09311	.09516	.09521
12	.09277	.09278	.09511	.09519
13	.09387	.09389	.09654	.09664
14	.09641	.09643	.09945	.09956
15	.10041	.10043	.10387	.10399

где z заменяет одну из букв, стоящих в фигурных скобках. Выражения для z_0 в (5.22) и (5.23) те же, что и в (5.20), и даются формулами (5.21). При $s \rightarrow s_*$ функции $z_0 \rightarrow \infty$, однако правые части в (5.22) и (5.23) регулярны при $s = s_*$.

Построенные интегралы можно использовать для приближенного определения частот собственных колебаний.

5.3.4. Функцию (4.2.38) следует заменить на (4.6.5), а для Q_1^* использовать формулу:

$$Q_{10}^* = -\frac{Eh\mu}{R} \left(\lambda^3 - \frac{(2-\nu)\lambda r^2}{b^2} + 2\Lambda t_1 \lambda \right) w_0. \quad (5.24)$$

Остальные формулы те же, что и в подп. 5.3.3 и задаче 5.3.3.

5.3.5. В табл.5.14 приведены собственные значения параметра Λ , связанные с частотами свободных колебаний ω по формуле (4.2.34)

$$\Lambda = \frac{\rho\omega^2 r^2}{E}. \quad (5.25)$$

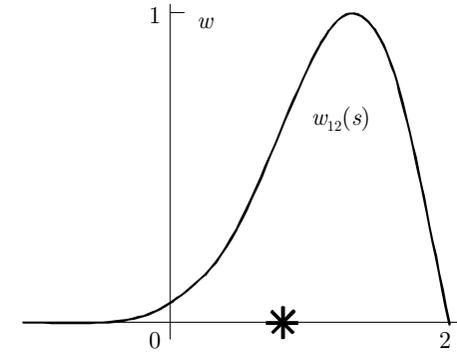


Рис. 5.9

В ней представлены соответственно наименьшие корни Λ_{m1} уравнения (3.28) для следующих граничных условий при $s = s_2$:

$$\begin{aligned} S_2: T_1 = v = w = M_1 = 0, \\ C_2: u = v = w = M_1 = 0, \\ S_1: T_1 = v = w = \gamma_1 = 0, \\ C_1: u = v = w = \gamma_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Причем в случае граничных условий S_2 в (3.28) берется $d = 0$, в случае C_1 величину d находим из уравнения (3.29), а для условий C_2 и S_1 — соответственно из уравнений:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{-1} u_0^{(1)} & u_0^{(3)} & u_0^{(4)} & u_0^{(5)} \\ dv_0^{(1)} & v_0^{(3)} & v_0^{(4)} & v_0^{(5)} \\ dw_0^{(1)} & w_0^{(3)} & w_0^{(4)} & w_0^{(5)} \\ dM_{10}^{(1)} & M_{10}^{(3)} & M_{10}^{(4)} & M_{10}^{(5)} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} dT_{10}^{(1)} & T_{10}^{(3)} & T_{10}^{(4)} & T_{10}^{(5)} \\ dv_0^{(1)} & v_0^{(3)} & v_0^{(4)} & v_0^{(5)} \\ dw_0^{(1)} & w_0^{(3)} & w_0^{(4)} & w_0^{(5)} \\ \lambda_1^{-1} \gamma_{10}^{(1)} & \gamma_{10}^{(3)} & \gamma_{10}^{(4)} & \gamma_{10}^{(5)} \end{vmatrix} = 0.$$

Для рассмотренных параметров и граничных условий наименьшая частота достигается при $m = 12$. Частоты колебаний сравнительно мало зависят от граничных условий.

На рис. 5.9 приведен график собственной функции $w(s)$ при $m = 12$ для граничных условий S_2 . Точка поворота $s_* = 1.3914$ отмечена крестиком.

5.3.6. В таблице 5.15 приведены наименьшие собственные значения параметра Λ , найденные при различных m из уравнения (3.28). Рассмотрены те же граничные условия (5.26) на краю $s = s_2 = 2$ оболочки.

Таблица 5.15

m	S_2	C_2	S_1	C_1
17	.36137	.36160	.37114	.37172
18	.35016	.35037	.36024	.36077
19	.34412	.34431	.35453	.35501
20	.34227	.34248	.35307	.35350
21	.34392	.34407	.35507	.35547
22	.34848	.34863	.36000	.36035
23	.35554	.35568	.36745	.36777

Потеря устойчивости происходит при $m = 20$. Как и в задаче 5.3.5, значения Λ слабо зависят от граничных условий (5.26). Тем не менее более жесткому закреплению края соответствует большая критическая нагрузка.

5.4.1. Формула (4.8) принимает вид

$$\Lambda = f(p, x) = \frac{p^2}{q_2(x)} + \gamma(x), \quad \gamma(x) = \frac{q_1(x)}{q_2(x)}. \quad (5.27)$$

Пусть функция $\gamma(x)$ имеет минимум при $x = x_0$, причем $\gamma''(x_0) > 0$, $x_1 < x_0 < x_2$. Тогда в силу (4.9) – (4.11) находим

$$p_0 = 0, \quad \Lambda^{(n)} = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1^{(n)} + O(\mu^2), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.28)$$

$$\Lambda_0 = \gamma(x_0), \quad \Lambda_1^{(n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2\gamma''(x_0)}{q_2(x_0)}}.$$

График собственной функции при $n = 0$ показан на рис. 5.3а.

5.4.2. В силу формул (4.13), (5.28) имеем

$$\Lambda^{(n)} = \mu(2n + 1), \quad y^{(n)}(x) = H_n(z)e^{-z^2/2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.29)$$

где $z = x/\sqrt{\mu}$, $H_n(z)$ – полином Эрмита степени n . В отличие от (4.13) построенное решение является точным.

5.4.3. Формулы (4.2) и (5.28) дают одинаковый результат:

$$\Lambda^{(n)} = \mu(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.30)$$

Таблица 5.16

n	0	1	2	3	4
$\Lambda_{\text{пр}}^n$	0.10000	0.30000	0.50000	0.70000	0.90000
$\Lambda_{\text{точн}}^n$	0.10003	0.30054	0.50413	0.71864	0.95714

Таблица 5.17

n	$\Lambda_{\text{пр}}^{(n)}$	$\Lambda_{\text{ут}}^{(n)}$	$\Lambda_{\text{точн}}^{(n)}$	$\Lambda'_{\text{точн}}^{(n)}$	$s_*^{(1)}$	$s_*^{(2)}$
0	0.100	0.100	0.099	0.099	-0.335	0.301
1	0.300	0.295	0.295	0.295	-0.608	0.503
2	0.500	0.486	0.486	0.485	-0.817	0.633
3	0.700	0.671	0.672	0.668	-1.004	0.734
4	0.900	0.850	0.853	0.842	-1.185	0.817

Таблица 5.18

m	$\Lambda_{\text{ут}}^{(n)}$	$\Lambda_{\text{пр}}^{(n)}$
10	0.2851	0.2975
11	0.2841	0.2954
12	0.2842	0.2946
13	0.2853	0.2949

В табл. 5.16 приведены приближенные значения $\Lambda_{\text{пр}}^{(n)}$, найденные по формуле (5.30), и точные значения, полученные при численном интегрировании. По мере приближения точек поворота $s_*^{(1,2)} = \pm\sqrt{\Lambda}$ к границам промежутка $[-1, 1]$ погрешность приближенной формулы (5.30) увеличивается.

5.4.4. Результаты сравнения приведены в таблице 5.17. Приведены два не зависящих от граничных условий приближенных значения: $\Lambda_{\text{пр}}^{(n)}$, найденные по формуле (5.30), и $\Lambda_{\text{ут}}^{(n)}$ – по уточненной формуле (4.2), а также два точных значения $\Lambda_{\text{точн}}^{(n)}$, $\Lambda'_{\text{точн}}^{(n)}$ для граничных условий $y(1)=0$ и $y'(1) = 0$ на правом конце соответственно. В двух последних столбцах приведены координаты точек поворота.

Формула (5.30) учитывает только локальные свойства функции $q(x, \Lambda)$ вблизи точки $x = 0$, слагаемое $x^3/3$ этой формулой не учитывается. Формула (4.2) учитывает поведение функции $q(x, \Lambda)$ между точками поворота и обеспечивает лучшее приближение к точным значениям, чем формула (5.30). По мере приближения точек поворота к границам промежутка $[-2, 1]$ увеличивается погрешность приближенных значений $\Lambda_{\text{пр}}^{(n)}$ и $\Lambda_{\text{ут}}^{(n)}$ и растет различие между значениями $\Lambda_{\text{точн}}^{(n)}$ и $\Lambda'_{\text{точн}}^{(n)}$.

5.4.5. В табл. 5.18 представлены результаты вычисления $\Lambda^{(m)}$ для ряда значений m , ($10 \leq m \leq 13$). Приведены значения $\Lambda_{\text{ут}}^{(n)}$ и $\Lambda_{\text{пр}}^{(n)}$, найденные соответственно по более точной формуле (4.2) и по приближенной формуле (4.21). Наименьшее значение $\Lambda^{(m)}$ получаем при $m=11$ (при $m=12$ по формуле (4.21)). Приближенные формулы (4.22) дают $m_{\min} = 12.4$, $\Lambda_{\min} = 0.2936$.

5.4.6. Устойчивость эллипсоида вращения описывается системой уравнений (4.2.53), для которой функция (4.2.8) имеет вид

$$\Lambda = f(p, s, r) = \frac{(p^2 + r^2/b^2)^4 + (k_2 p^2 + k_1 r^2/b^2)^2}{(t_1 p^2 + t_2 r^2/b^2)(p^2 + r^2/b^2)^2}, \quad (5.31)$$

где на основании (3.33), (3.34)

$$t_1 = \frac{1}{2k_2}, \quad t_2 = \frac{1 - t_1 k_1}{k_2}, \quad \Lambda = \frac{qR}{Eh\mu^2}, \quad r = \mu m, \quad (5.32)$$

а функции $k_1(s)$, $k_2(s)$ и $b(s)$ определяются теми же формулами (4.17). Минимум

$$\Lambda_0 = \min_{p,s,r} f(p, s, r) = f(p_0, s_0, r_0) = \frac{4}{2\delta^2 - 1} \quad (5.33)$$

достигается при $p = p_0 = 0$, $\theta = \theta_0 = \pi/2$, $r = r_0 = 1/\delta$. После вычисления производных (4.20) формула (4.11) при $n = 0$ дает

$$\Lambda = \frac{4}{2\delta^2 - 1} + \mu \frac{4(\delta^2 - 1)\sqrt{8\delta^2 - 2}}{(2\delta^2 - 1)^2} + O(\mu^2). \quad (5.34)$$

В размерных переменных критические значения давления q и числа m волн в окружном направлении могут быть найдены по формулам:

$$q = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}a_0^2(2\delta^2 - 1)} \left(1 + \sqrt{\frac{h(4\delta^2 - 1)}{a_0\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{(\delta^2 - 1)}{(2\delta^2 - 1)^2}} + O\left(\frac{h}{a_0}\right) \right),$$

$$m \simeq \sqrt{\frac{a_0\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h\delta^2}}, \quad \delta = \frac{b_0}{a_0} > 0, \quad (5.35)$$

где a_0 , b_0 — полуоси эллипса, E , ν , h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки.

Таблица 5.19

m	26	27	28	29	30	31	32
$\Lambda^{(m)}$	1.40523	1.38697	1.37691	1.37415	1.37793	1.38762	1.40268

5.4.7. По формулам (5.34) получаем $\Lambda = 1.37424$, $m = 28.7$. Результаты вычислений $\Lambda^{(m)}$ по формулам (4.2) для ряда значений m , близких к $m = 29$, приведены в таблице 5.19.

5.4.8. Введем параметр нагружения Λ по формуле (5.32):

$$\Lambda = \frac{qR}{Eh\mu^2}. \quad (5.36)$$

Тогда безразмерные усилия t_1 и t_2 будут отличаться знаком от введенных формулами (5.32):

$$t_1 = -\frac{1}{2k_2}, \quad t_2 = -\frac{1 + t_1 k_1}{k_2}, \quad (5.37)$$

где функции $k_1(s)$ и $k_2(s)$ определяются формулами (4.17). На основании зависимости (5.37) $t_1 < 0$ при всех θ

$$t_2 = \frac{\sin^2 \theta + \delta^2(\cos^2 \theta - 2)}{2k_2\delta^2}, \quad \delta = \frac{b_0}{a_0}. \quad (5.38)$$

Поэтому при $2\delta^2 > 1$ имеем и $t_2 < 0$ при всех θ . В силу (4.2.53) в оболочке действуют только растягивающие усилия, и при соотношении полуосей $\sqrt{2}b_0 < a_0$ эллипсоид вращения под действием внутреннего давления устойчивости не теряет.

Пусть $2\delta^2 < 1$. При отыскании минимума (5.33) будем рассматривать лишь те значения p , s , r , для которых $f(p, s, r) > 0$. Найдем сначала

$$\gamma(\theta) = \min_{p,r} f(p, s, r) = \frac{2k_2}{t_1} = \frac{4(\sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta + \delta^2(\cos^2 \theta - 2)}, \quad p_0 = 0. \quad (5.39)$$

В зависимости от δ функция $\gamma(\theta)$ имеет минимум

$$\Lambda_0 = \min_{\theta} \gamma(\theta) = \gamma(\theta_0) \quad (5.40)$$

при разных θ_0 .

При $1/2 < \delta < 1/\sqrt{2}$ наиболее слабой параллелью является экватор $\theta = \pi/2$. При этом параметр нагружения Λ и число m волн по параллели находятся по формулам, аналогичным (5.34):

$$\Lambda = \frac{4}{1-2\delta^2} + \mu \frac{4(1-\delta^2)\sqrt{8\delta^2-2}}{(2\delta^2-1)^2} + O(\mu^2), \quad m = \frac{1}{\mu\delta}. \quad (5.41)$$

При $\delta < 1/2$ функция $\gamma(\theta)$ имеет на экваторе $\theta = \pi/2$ локальный максимум, а минимум достигается при

$$\theta_0^{(1)} = \arcsin \sqrt{\frac{3\delta^2}{1-\delta^2}}, \quad \theta_0^{(2)} = \pi - \theta_0^{(1)} \quad (5.42)$$

и равен $\Lambda_0 = 32\delta^2$.

5.4.9. Пользуясь формулами (4.7)–(4.11) и (5.31), находим

$$\Lambda = 32\delta^2 \left(1 + \mu \sqrt{\frac{193(1-4\delta^2)}{16\delta^2}} + O(\mu^2) \right), \quad m = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{6\delta}{1-\delta^2}}.$$

5.4.10. В формулах (4.30) и (4.31) при $\alpha = 1$ имеем $t''(0) = -0.5$. При численном интегрировании будем искать отдельно четные и нечетные формы $w(\varphi)$ потери устойчивости. Четным формам соответствуют граничные условия:

$$w' = w''' = \Phi' = \Phi''' = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \varphi = \pi, \quad (5.43)$$

а нечетным — условия:

$$w = w'' = \Phi = \Phi'' = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \varphi = \pi. \quad (5.44)$$

В табл. 5.20 для ряда значений r представлены первое ($\Lambda^{(1)}$) и второе ($\Lambda^{(2)}$) собственные значения Λ , причем $\Lambda^{(1)}$ соответствует четная собственная функция $w(\varphi)$, а $\Lambda^{(2)}$ — нечетная. Приведены точные значения $\Lambda_{\text{точн}}^{(1)}$ и $\Lambda_{\text{точн}}^{(2)}$, полученные в результате численного интегрирования, приближенные значения $\Lambda_{\text{пр}}^{(1)}$ и $\Lambda_{\text{пр}}^{(2)}$, найденные по асимптотическим формулам (4.30) и (4.31) и приближенные значения $\Lambda_{\text{окр}}^{(1)}$ и $\Lambda_{\text{окр}}^{(2)}$, вычисленные по формулам (5.50).

При $r < 1$ собственные значения асимптотически двукратны. Поэтому значения $\Lambda_{\text{точн}}^{(1)}$ и $\Lambda_{\text{точн}}^{(2)}$ сближаются при уменьшении параметра $r < 1$.

Таблица 5.20

r	$\Lambda_{\text{точн}}^{(1)}$	$\Lambda_{\text{пр}}^{(1)}$	$\Lambda_{\text{окр}}^{(1)}$	$\Lambda_{\text{точн}}^{(2)}$	$\Lambda_{\text{пр}}^{(2)}$	$\Lambda_{\text{окр}}^{(2)}$
0.50	1.0792	1.0778		1.0792	1.0778	
0.55	1.0713	1.0704		1.0713	1.0704	
0.60	1.0639	1.0635		1.0640	1.0635	
0.65	1.0571	1.0571		1.0571	1.0571	
0.70	1.0505	1.0509		1.0505	1.0509	
0.75	1.0438	1.0449		1.0440	1.0449	
0.80	1.0366	1.0389	1.0321	1.0376	1.0389	1.0330
0.85	1.0275	1.0327	1.0249	1.0321	1.0327	1.0291
0.90	1.0169	1.0259	1.0159	1.0292	1.0259	1.0275
0.95	1.0101	1.0178	1.0100	1.0310	1.0178	1.0304
1.00	1.0108	1.0000	1.0111	1.0388	1.0000	1.0398
1.05	1.0194	1.0212	1.0208	1.0531	1.0540	1.0568
1.10	1.0356	1.0403	1.0396	1.0740	1.0845	1.0822
1.15	1.0589	1.0653	1.0679	1.1011	1.1172	1.1164

Им соответствует одно и то же асимптотическое значение ($\Lambda_{\text{пр}}^{(1)} = \Lambda_{\text{пр}}^{(2)}$) при $r < 1$.

При $r > 1$ асимптотические приближения $\Lambda_{\text{пр}}^{(1)}$ и $\Lambda_{\text{пр}}^{(2)}$ для четной и нечетной форм $w(\varphi)$ получаем по формуле (4.30) при $n = 0$ и при $n = 1$ соответственно.

В окрестности точки $r = 1$ формулы (4.30) и (4.31) ненадежны (см. задачу 5.4.11, где приведен способ вычисления величин $\Lambda_{\text{окр}}^{(1)}$ и $\Lambda_{\text{окр}}^{(2)}$).

5.4.11. Для исследования окрестности точки $r = 1$ положим

$$r = 1 + \varepsilon r_1, \quad \Lambda = 1 + \varepsilon^2 \Lambda_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \eta, \quad \varepsilon = \mu^{2/3} \quad (5.45)$$

и будем искать решение системы (4.23) в виде

$$w \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\eta), \quad \Phi \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k(\eta). \quad (5.46)$$

После подстановки формул (5.46) в систему (4.23) в нулевом приближении приходим к уравнению четвертого порядка

$$4 \left(\frac{d^2}{d\eta^2} - r_1 \right)^2 w_0 + (a\eta^2 - 2\Lambda_1)w_0 = 0, \quad a = -t_1''(0) > 0 \quad (5.47)$$

и граничным условиям $w_0 \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$.

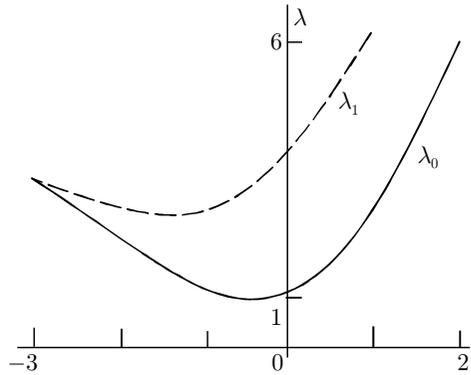


Рис. 5.10

Уравнение (5.47) не интегрируется в известных функциях. Для уменьшения числа параметров при численном интегрировании сделаем замену:

$$x = \frac{\eta}{b}, \quad b = \left(\frac{4}{a}\right)^{1/6}, \quad k = r_1 b^2, \quad \lambda = 2\Lambda_1 b^4 \quad (5.48)$$

и приведем уравнение (5.47) к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - k\right)^2 w_0 + (x^2 - \lambda)w_0 = 0, \quad w(\pm\infty) = 0. \quad (5.49)$$

Для каждого k существует счетное множество $\lambda_i(k)$ значений λ , при которых краевая задача (5.49) имеет ненулевое решение. На рис. 5.10 изображены кривые $\lambda_0(k)$ и $\lambda_1(k)$.

В силу формул (5.45) и (5.48) имеем

$$\Lambda^{(i)} = 1 + \frac{2\varepsilon^2}{b^4} \lambda_i(k) + O(\varepsilon^3), \quad k = \frac{(r-1)b^2}{\varepsilon}. \quad (5.50)$$

Функция $\lambda_0(k)$ принимает наименьшее значение $\lambda_0 = 0.905$ при $k = -0.44$. Следовательно, при изменении r параметр λ минимален при $r = 1 - 0.44\varepsilon b^2$ и равен

$$\Lambda_{\min} = 1 + 0.181\varepsilon^2 b^{-4} + O(\mu^2).$$

Для параметров из задачи 5.4.10 в табл.5.20 для $r \simeq 1$ представлены значения $\Lambda_{\text{окр}}^{(1)}(r)$ и $\Lambda_{\text{окр}}^{(2)}(r)$, найденные по формуле (5.50).

5.4.12. Функция (4.8) имеет вид

$$f(p, y) = p^4 + \frac{k^2(y)}{p^4}. \quad (5.51)$$

После минимизации $f(p, y)$ находим

$$\Lambda_0 = 2k_0, \quad k_0 = k(y_0) = \min_y k(y), \quad p_0 = k_0^{1/4}, \quad (5.52)$$

где y_0 — наиболее слабая образующая.

В предположении, что $k''(y_0) = k_0'' > 0$, формула (4.11) дает

$$\Lambda^{(n)} = 2k_0 + \mu \left(\frac{1}{2} + n\right) \sqrt{\frac{32k_0''}{p_0^2} + O(\mu^2)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.53)$$

причем собственные значения $\Lambda^{(n)}$ асимптотически двукратны.

Для эллиптического цилиндра

$$k_0 = \frac{1}{\delta^2}, \quad k_0'' = \frac{3(\delta^2 - 1)}{\delta^6},$$

$$\theta_0^{(1)} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_0^{(2)} = \frac{3\pi}{2}.$$

У этой оболочки две наиболее слабых образующих, поэтому собственные значения

$$\Lambda^{(n)} = \frac{2}{\delta^2} \left(1 + \mu \left(\frac{1}{2} + n\right) \sqrt{\frac{24(\delta^2 - 1)}{\delta} + O(\mu^2)}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.54)$$

являются асимптотически четырехкратными.

Для численного определения близких между собой значений параметра Λ интегрируем систему (4.23), задавая при $\theta = 0$ и при $\theta = \pi/2$ условия четности (5.43) или нечетности (5.44).

Численные результаты для $\delta = \sqrt{2}$ и $\mu = 0.1$, $\mu = 0.2$ приведены в табл. 5.21 для первых четырех собственных значений.

Таблица 5.21

μ	$\Lambda_{ас}$	$\Lambda_{нн}$	$\Lambda_{нч}$	$\Lambda_{чн}$	$\Lambda_{чч}$
0.1	1.205976	1.210790	1.212372	1.212372	1.210790
0.2	1.411953	1.450047	1.387287	1.387290	1.450068

Приведены приближенные значения $\Lambda_{ас}$, найденные по асимптотической формуле (5.54) при $n = 0$ и одинаковые для всех четырех форм колебаний, а также четыре близких между собой точных собственных значения $\Lambda_{нн}$, $\Lambda_{нч}$, $\Lambda_{чн}$, $\Lambda_{чч}$, полученные при численном интегрировании. Последним собственным значениям отвечают формы колебаний: нечетная по отношению к θ и к $\theta - \pi/2$, нечетная по θ и четная по $\theta - \pi/2$, четная по θ и нечетная по $\theta - \pi/2$, четная по θ и по $\theta - \pi/2$ соответственно.

Значения $\Lambda_{нн}$, $\Lambda_{чч}$, а также $\Lambda_{нч}$, $\Lambda_{чн}$ при $\mu = 0.1$ с принятой точностью совпадают, а при $\mu = 0.2$ близки между собой.

ГЛАВА 6

Асимптотическое интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений

Асимптотические разложения решений нелинейных дифференциальных уравнений отличаются большим разнообразием. В третьей главе рассматривались некоторые вопросы, касающиеся решения регулярно возмущенных нелинейных уравнений. В данной главе мы ограничимся небольшим кругом вопросов, связанных с сингулярными возмущениями и с ветвлением решений нелинейных уравнений.

6.1. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром

6.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы $m + n$ нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), & \mathbf{y}^T &= (y_1, \dots, y_m), \\ \mu \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), & \mathbf{z}^T &= (z_1, \dots, z_n), \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}^0, & \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}^0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь \mathbf{y} , \mathbf{f} — векторы порядка m , а \mathbf{z} , \mathbf{F} — порядка n . Как правило, точное решение $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$ найти не удастся, и задача состоит в определении асимптотического решения, учитывающего малость параметра μ .

При $\mu \rightarrow 0$ система (1.1) вырождается в систему m дифференциальных и n алгебраических уравнений:

$$\frac{d\mathbf{y}_0}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, t), \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, t) = 0. \quad (1.2)$$

Порядок этой системы ниже, чем исходной, поскольку второе уравнение не является дифференциальным. В этой системе не требуется задавать начальное условие для функции z , а следует оставить только начальное условие для y

$$\mathbf{y}_0(0) = \mathbf{y}^0.$$

Пусть система уравнений (1.2)

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, t) = 0 \quad (1.3)$$

имеет изолированное решение

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t) \quad (1.4)$$

(т. е. существует такое $\eta > 0$, что $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}, t) \neq 0$ при $0 < |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t)| < \eta$). Подставляя это решение в систему (1.2), приходим к вырожденной задаче:

$$\frac{d\mathbf{y}_0}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t), t), \quad \mathbf{y}_0(0) = \mathbf{y}^0. \quad (1.5)$$

В связи с описанным вырождением задачи (1.1) в (1.5) возникают два вопроса: во-первых, в каком соотношении находятся решения задач (1.1) и (1.5) при $\mu \rightarrow 0$, и, во-вторых, какова аналитическая структура решения задачи (1.1) при $\mu > 0$. Ответ на первый из поставленных вопросов дает теорема Тихонова [7]:

Пусть

1) правые части $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ являются аналитическими функциями своих аргументов;

2) функция (1.4) является изолированным решением системы (1.3);

3) решение (1.4) является асимптотически устойчивой точкой покоя присоединенной системы

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \tilde{\mathbf{z}}, t) \quad (1.6)$$

(здесь \mathbf{y}_0 и t рассматриваются как параметры), причем все корни дополнительного характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \right)_{\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t)} \quad (1.7)$$

имеют отрицательные вещественные части;

4) начальная точка \mathbf{z}^0 принадлежит области притяжения устойчивого решения (1.4).

Если выполнены условия 1)–4), то при достаточно малых μ задача (1.1) имеет единственное решение $\mathbf{y}(t, \mu)$, $\mathbf{z}(t, \mu)$, и для этого решения справедливы следующие предельные равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t, \mu) &\rightarrow \mathbf{y}_0(t) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \mathbf{z}(t, \mu) &\rightarrow \mathbf{z}_0(t) = \mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0(t), t) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad \varepsilon \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Естественно, что функция $\mathbf{z}_0(t)$ граничному условию (1.1) в общем случае не удовлетворяет.

Поясним последние два условия теоремы Тихонова.

В уравнении (1.6) \mathbf{y} и t рассматриваются как параметры, и в силу условия 2) $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t)$ является решением уравнения (1.6), а так как это решение не зависит от τ , то $d\mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t)/d\tau = 0$, т. е. решение (1.4) – точка покоя для системы (1.6).

Условие 4) означает, что решение $\tilde{\mathbf{z}}(\tau)$ задачи

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \tilde{\mathbf{z}}, 0), \quad \tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}^0$$

стремится к точке покоя $\mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Отметим, что система (1.3) может иметь неединственное решение, и именно условия 3), 4) позволяют выбрать искомым корень (1.4). Если мы хотим получить лишь соотношения (1.8), то условия 1)–4) могут быть ослаблены.

6.1.2. Построение формального асимптотического решения

Решение задачи (1.1) в виде асимптотического ряда по степеням μ построено в [7] и кратко излагается далее.

Пусть \mathbf{x} заменяет любой из символов \mathbf{y} , \mathbf{z} . Решение $\mathbf{x}(t, \mu)$ задачи (1.1) ищем в виде:

$$\mathbf{x}(t, \mu) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(t) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}_k(\tau) \mu^k, \quad (1.9)$$

где $\tau = t/\mu$ — быстрая переменная, а на функции $\mathbf{X}_k(\tau)$ накладываем ограничение

$$\mathbf{X}_k(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

т. е. $\mathbf{X}_k(\tau)$ — это функции пограничного слоя.

Построение последовательных членов в рядах (1.9) в значительной мере аналогично алгоритму метода Вишика–Люстерника (см. главу 4). Нулевое приближение для $\mathbf{y}_0(t)$ определяется из (1.5), а $\mathbf{Y}_0(\tau) \equiv 0$. Функция $\mathbf{z}_0(t)$ определяется по формуле (1.4). Для построения $\mathbf{Z}_0(\tau)$ приходим к задаче Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}_0}{d\tau} &= \mathbf{F}(\mathbf{y}^0, \mathbf{z}_0(0) + \mathbf{Z}_0(\tau), 0) - \mathbf{F}(\mathbf{y}^0, \mathbf{z}_0(0), 0), \\ \mathbf{Z}_0(0) &= \mathbf{z}^0 - \mathbf{z}_0(0), \end{aligned} \quad (1.11)$$

которая в силу условий 3) и 4) имеет решение, удовлетворяющее соотношению (1.10).

Последующие члены рядов (1.9) определяются из линейных уравнений в следующем порядке: $\mathbf{Y}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Y}_2, \dots$. Функции \mathbf{Y}_1 находим в виде квадратуры

$$\mathbf{Y}_1(\tau) = \int_{\infty}^{\tau} [\mathbf{f}(\mathbf{y}^0, \mathbf{z}_0(0) + \mathbf{Z}_0(\tau), 0) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^0, \mathbf{z}_0(0), 0)] d\tau. \quad (1.12)$$

Для определения $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ решаем линейную задачу Коши:

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)_0 \mathbf{y}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \mathbf{z}_1, \quad \mathbf{y}_1(0) = -\mathbf{Y}_1(0), \quad (1.13)$$

$$\frac{d\mathbf{z}_0}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_0 \mathbf{y}_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 \mathbf{z}_1, \quad (1.14)$$

где индекс «нуль» внизу означает, что соответствующие производные вычислены на решении (1.4). В силу условия 4) матрица $\mathbf{A} = (\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{z})_0$

имеет отличный от нуля определитель, и из (1.14) находим вектор \mathbf{z}_1 , который подставляем в (1.13).

При построении последовательных приближений правые части уравнений (1.1) представим в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \tau), \quad (1.15)$$

где через $\tilde{\mathbf{x}}$ и \mathbf{X} обозначены соответственно первая и вторая суммы в правой части (1.9). Соотношение (1.15) определяет функцию \mathbf{F}^* :

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}(\mu\tau) + \mathbf{X}(\tau), \mu\tau) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}(\mu\tau), \mu\tau) \quad (1.16)$$

(оно было уже использовано при написании (1.11) и (1.12)).

Уравнение для определения $\mathbf{Z}_1(\tau)$ оказывается уже достаточно громоздким:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}_1}{d\tau} &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_{00} (\mathbf{Y}_1(\tau) + \mathbf{y}_1(0) + \tau \mathbf{y}'_0(0)) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_{00} (\mathbf{Z}_1(\tau) + \mathbf{z}_1(0) + \tau \mathbf{z}'_0(0)) + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} \right)_{00} - \\ &- \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} \right)_0 (\mathbf{y}_1(0) + \tau \mathbf{y}'_0(0)) - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)_0 (\mathbf{z}_1(0) + \tau \mathbf{z}'_0(0)) - \tau \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} \right)_0, \\ \mathbf{Z}_1(0) &= -\mathbf{z}_1(0). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь $(\)_{00}$ означает, что производная вычисляется при $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0, \mathbf{z} = \mathbf{z}_0(0) + \mathbf{Z}_0(\tau), t = 0$.

В работе [7] приводится доказательство того, что формальные ряды (1.9) являются асимптотическими разложениями при $\mu \rightarrow 0$ ($\mu > 0$) точных решений.

Задача (1.1) допускает обобщение и на случай, когда правые части системы (1.1) регулярно зависят от μ .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий пример:

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \mu \frac{dz}{dt} = y^2 - z^2, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Корни уравнения $F(y_0, z_0, t) = 0$ такие: $z = y, z = -y$. Так как $\partial F / \partial z = -2z$, то корень $z = y$ устойчив при $y > 0$, а корень $z = -y$

устойчив при $y < 0$. Начальная точка $y = 1, z = 0$ принадлежит области устойчивого корня $z = y$. Таким образом, вырожденная задача имеет вид

$$\frac{dy_0}{dt} = y_0, \quad y_0(0) = 1.$$

Решение этого уравнения $y_0(t) = e^t$, а следовательно, $z_0(t) = e^t$. Для построения $Z_0(\tau)$ используем уравнение (1.11):

$$\frac{dZ_0}{d\tau} = -2Z_0(\tau) - Z_0^2(\tau), \quad Z_0(0) = -1,$$

которое имеет решение $Z_0(\tau) = \text{th}(\tau) - 1$. Таким образом, функции

$$y(t) = e^t, \quad z(t) = e^t + \text{th}\tau - 1$$

аппроксимируют решение с точностью $O(\mu)$ в любом конечном интервале $0 \leq t \leq T_0 < \infty$.

По соотношению (1.12) может быть найдена функция $Y_1(\tau)$:

$$Y_1(\tau) = \ln 2 + \ln(\text{ch}\tau) - \tau.$$

Для определения y_1 и z_1 в рядах (1.9) имеем

$$\frac{dy_1}{dt} = z_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = 2y_0y_1 - 2z_0z_1,$$

или

$$1 = 2y_1 - 2z_1, \quad y_1(0) = -Y_1(0) = -\ln 2.$$

Отсюда

$$y_1(t) = \left(-\frac{1}{2} - \ln 2\right) e^t + \frac{1}{2}, \quad z_1(t) = \left(-\frac{1}{2} - 2\ln 2\right) e^t.$$

Для определения $Z_1(\tau)$ из (1.17) записываем уравнение

$$\frac{dZ_1}{d\tau} = 2\ln(\text{ch}\tau) - 2\text{th}(\tau) \left(Z_1(\tau) - \frac{1}{2} - \ln 2 + \tau\right) - 1,$$

$$Z_1(0) = \frac{1}{2} + \ln 2.$$

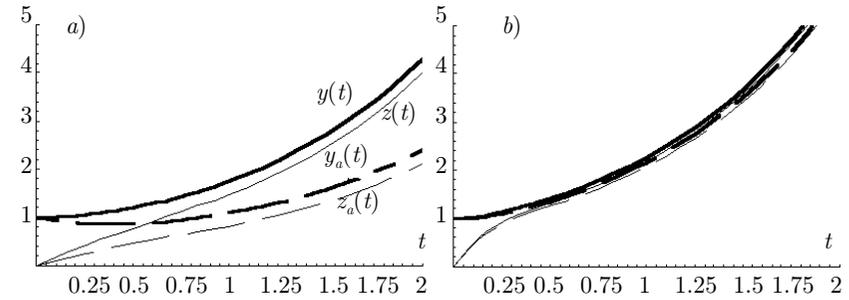


Рис. 6.1

Его решение имеет вид

$$Z_1(\tau) = \frac{1}{2} + \ln 2 - \tau + \frac{2}{\text{ch}^2\tau} \int_0^\tau \text{ch}^2 x \ln(\text{ch}x) dx.$$

Таким образом, объединяя эти результаты, получаем

$$y(t, \mu) = e^t - t + \mu \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \ln 2 \right) e^t + \ln 2 + \ln(\text{ch}\tau) \right] + O(\mu^2);$$

$$z(t, \mu) = e^t + \text{th}\tau - 1 - t + \mu \left(\frac{1}{2} + \ln 2 \right) (1 - e^t) +$$

$$+ \mu \frac{2}{\text{ch}^2\tau} \int_0^{t/\mu} \text{ch}^2 x \ln(\text{ch}x) dx + O(\mu^2).$$

На рис. 6.1 нанесены численные (сплошные линии) и асимптотические (пунктирные линии) значения функций $y(t)$ (жирные линии) и $z(t)$ (тонкие линии) при $\mu = 0.6$ (рис. а) и $\mu = 0.2$ (рис. б).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим еще один пример — приведенное уравнение Ван-дер-Поля колебаний маятника с малой массой:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2x}{dt^2} + (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x &= 0, \\ x(0) &= a, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0, \quad a \neq 1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Решение уравнения (1.18) будем искать по-прежнему в виде рядов (1.9):

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu \left[X_1(\tau) + x_1(t) \right] + O(\mu^2).$$

При $\mu = 0$ получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(1 - x_0^2) \frac{dx_0}{dt} + x_0 = 0, \quad x_0(0) = a. \quad (1.19)$$

Для определения $x_0(t)$ имеем

$$t = \frac{x_0^2 - a^2}{2} - \ln \frac{|x_0|}{|a|}. \quad (1.20)$$

Для функции погранслоя $X_1(\tau)$ запишем уравнение

$$\frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + (1 - a^2) \frac{dX_1}{d\tau} = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$X_1(\tau) = C + C_1 e^{-(1-a^2)\tau}.$$

Константа $C = 0$, так как функция $X_1(\tau)$ должна удовлетворять условию (1.10), а константа C_1 определяется из второго начального условия (1.18):

$$\frac{dX_1(0)}{d\tau} = -\frac{dx_0(0)}{dt} = -\frac{a}{1-a^2}, \quad C_1 = \frac{a}{(1-a^2)^2}.$$

Для определения x_1 приходим к уравнению

$$\frac{dx_1}{dt}(1 - x_0^2) + x_1 \left(1 - 2x_0 \frac{dx_0}{dt} \right) + \frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0, \quad x_1(0) = -X_1(0)$$

или, с учетом соотношений (1.19), (1.20), — к уравнению

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 \frac{1 + x_0^2}{(1 - x_0^2)^2} + \frac{x_0(1 + x_0^2)}{(1 - x_0^2)^4} = 0, \quad x_1(0) = -\frac{a}{(1 - a^2)^2}. \quad (1.21)$$

Отметим, что в данном примере построение аналитического решения (явной функции $x_0(t)$ по соотношению (1.20)) затруднительно, но выделение функций погранслоя облегчает численное решение. «Медленная» часть решения может быть построена численно по соотношениям (1.20), (1.21). «Краевой эффект» определяется аналитически.

6.1.3. Упражнения

6.1.1. Получить точное и асимптотическое решения уравнения

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 1 = 0, \quad x(0) = x^0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

6.1.2. Получить главные члены в асимптотическом решении уравнения

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + cx + kx^n = 0, \quad x(0) = x^0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}^0, \quad (1.23)$$

$$n = 2, \quad x^0 > 0, \quad c > 0, \quad k > 0.$$

6.1.3. Получить главные члены в асимптотическом решении уравнения (1.23) при $n = 3$.

6.1.4. Получить точное и асимптотическое решения уравнения

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} x = 0, \quad (1.24)$$

$$x(0) = x^0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}^0, \quad x^0 > 0.$$

6.1.5. Получить главные члены в асимптотическом решении уравнения

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} x - Ax = 0, \quad (1.25)$$

$$x(0) = x^0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}^0, \quad x^0 > 0.$$

6.1.6. Получить главные члены в асимптотическом решении уравнения

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} x - A = 0, \quad (1.26)$$

$$x(0) = x^0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}^0, \quad x^0 > 0.$$

6.2. Вырождение нелинейных краевых задач с малым параметром

6.2.1. Введение

При рассмотрении краевых задач ограничимся случаями, когда решение может быть представлено в виде суммы медленно меняющихся функций и функций типа пограничного слоя. Кроме пограничного слоя в окрестностях концов промежутка интегрирования возможно появление и *внутреннего пограничного слоя*.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), \\ \mu \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), \\ t &\in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \mathbf{y} и \mathbf{z} — m -мерный и n -мерный векторы. Пусть задано $m + n$ граничных условий общего вида

$$l_i(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \mathbf{z}(0), \mathbf{z}(1)) = 0, \quad i = 1, \dots, m + n. \quad (2.2)$$

Вырожденная система уравнений имеет тот же вид (1.2), однако вопрос о соответствующих ей граничных условиях становится нетривиальным.

Пусть $\mathbf{z}_0(\mathbf{y}_0, t)$ — изолированное решение уравнения (1.3). В окрестности этого решения рассмотрим присоединенную систему (1.6), в которой \mathbf{y}, t считаем параметрами.

При решении краевых задач целесообразно ввести более общее, чем используемое в условии 3) теоремы Тихонова определение устойчивости: если все корни дополнительного характеристического уравнения (1.7) имеют отрицательные вещественные части, говорят, что *корень $\mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$ устойчив вправо*. Если все корни уравнения (1.7) имеют положительные вещественные части, говорят об устойчивости влево и корень $\mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$ называют *устойчивым влево*.

Пусть уравнение (1.7) при всех t, \mathbf{y}_0 из некоторой области, содержащей решение уравнения (1.3), имеет n_1 корней с отрицательными

вещественными частями и n_2 корней с положительными вещественными частями ($n_1 + n_2 = n$). В этом случае решение задачи (2.1) ищем в виде, аналогичном (1.9), но с двумя пограничными слоями:

$$\mathbf{x}(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k(t) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}_k^{(0)}(\tau_0) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{X}_k^{(1)}(\tau_1) \mu^k, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k^{(0)}(\tau_0) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau_0 \rightarrow \infty, \\ \mathbf{X}_k^{(1)}(\tau_1) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 \rightarrow -\infty, \\ \tau_0 &= t/\mu, \quad \tau_1 = (t-1)/\mu. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ограничимся обсуждением вопроса о граничных условиях для вырожденной задачи (1.2). В нулевом приближении условия (2.2) можно записать в виде:

$$l_i(\mathbf{y}_0(0), \mathbf{y}_0(1), \mathbf{z}_0(0) + \mathbf{Z}_0^{(0)}(0), \mathbf{z}_0(1) + \mathbf{Z}_0^{(1)}(1)) = 0. \quad (2.5)$$

В силу (2.4) семейство функций \mathbf{Z}_0^0 (\mathbf{Z}_0^1) содержит n_1 (n_2) постоянных. Исключение этих функций из условий (2.5) приводит к m соотношениям, которые не содержат функций пограничного слоя и служат граничными условиями для вырожденной задачи (1.2).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= z, \quad \mu \frac{dz}{dt} = -(z-y-1)(z-y)(z-y+1), \\ y(1) &= 0, \quad z(0) = z^0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где y, z — скалярные функции. Уравнение $F(y, z, t) = 0$ в данном случае имеет три изолированных решения: 1) $z = y + 1$, 2) $z = y$, 3) $z = y - 1$, каждое из которых может дать решение краевой задачи (2.6). Этим решениям соответствуют медленно меняющиеся функции нулевого приближения и присоединенные уравнения (1.6):

$$\begin{aligned} 1) \quad y_0 &= e^{t-1} - 1, \quad z_0 = e^{t-1}, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -Z(Z+1)(Z+2); \\ 2) \quad y_0 &= 0, \quad z_0 = 0, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -(Z-1)Z(Z+1); \\ 3) \quad y_0 &= 1 - e^{t-1}, \quad z_0 = -e^{t-1}, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -(Z-2)(Z-1)Z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

1) Корень $z = y + 1$ уравнения $F = 0$ устойчив вправо, область притяжения корня $Z = 0$ системы (2.7) суть $-1 < Z(0) < \infty$ или в силу (1.11) для z^0 , удовлетворяющих неравенству

$$-1 + e^{-1} < z^0 < \infty, \quad (2.8)$$

задача (2.6) имеет решение, стремящееся к y_0, z_0 при $\mu \rightarrow 0, t \geq \varepsilon > 0$.

2) Корень $z = y$ устойчив влево, поэтому краевая задача (2.6) не имеет решений вида (2.3), стремящихся к $y_0 = z_0 \equiv 0$ при $\mu \rightarrow 0$ (если $z^0 \neq 0$).

3) Корень $z = y - 1$ устойчив вправо с областью притяжения

$$-\infty < z^0 < 1 - e^{-1}. \quad (2.9)$$

Суммируя рассмотренные варианты, видим, что при выполнении условия $z^0 < -1 + e^{-1}$ задача (2.6) имеет одно решение, стремящееся при $\mu \rightarrow 0$ к функциям y_0, z_0 (см. формулу (2.7), случай 3), рис. 6.2a).

При $-1 + e^{-1} < z^0 < 1 - e^{-1}$ задача (2.6) имеет два решения, одно из которых соответствует случаю 1), а другое — случаю 3) (рис. 6.2 b).

При $1 - e^{-1} < z^0 < \infty$ снова получаем одно решение, соответствующее случаю 1) (см. рис. 6.2c).

ПРИМЕР 2. При рассмотрении краевой задачи может получиться так, что в построении решения следует использовать не один, а несколько корней вырожденного уравнения $F(y, z, t) = 0$. При этом внутри промежутка при переходе с корня, устойчивого влево, на корень, устойчивый вправо, возможно появление внутреннего пограничного слоя. Рассмотрим модельный пример (более подробное обсуждение содержится в работе [7])

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \mu \frac{dz}{dt} = 1 - z^2, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad |a - b| < 1. \quad (2.10)$$

Для этого примера несложно записать точное решение:

$$y = \mu \ln \left(\frac{e^{(t+b+1)/\mu} - e^{(t+a)/\mu} - e^{(b+1-t)/\mu} + e^{(2+a-t)/\mu}}{e^{2/\mu} - 1} \right), \quad (2.11)$$

$$z = \frac{e^{(2t+b-a+1)/\mu} - e^{2t/\mu} - e^{2/\mu} + e^{(b-a+t)/\mu}}{e^{(2t+b-a+1)/\mu} - e^{2t/\mu} + e^{2/\mu} - e^{(b-a+t)/\mu}}.$$

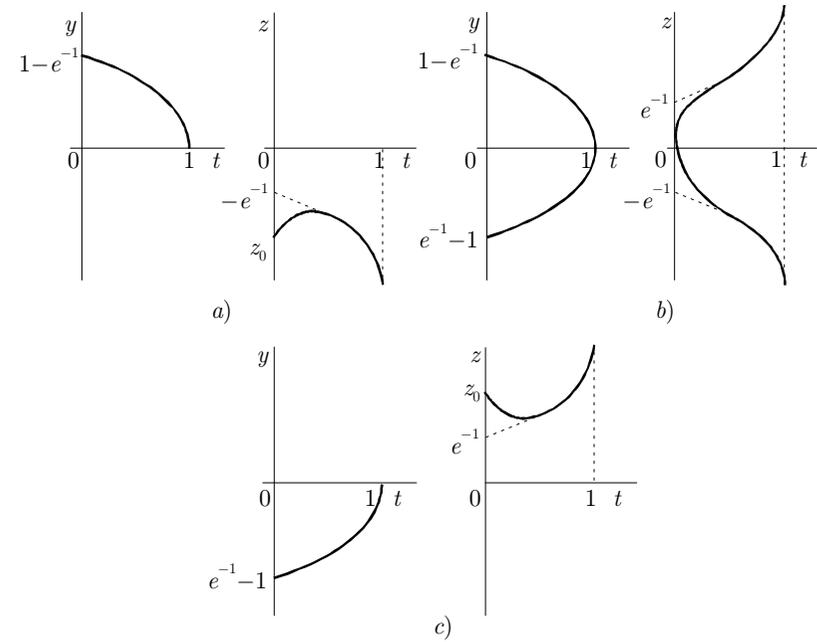


Рис. 6.2

При рассматриваемом здесь асимптотическом подходе получаем, что уравнение $F = 0$ имеет два решения: 1) $z = -1$ и 2): $z = 1$, первое из которых устойчиво влево, а второе — вправо. В связи с тем, что оба граничных условия в (2.10) наложены на функцию y , оба решения уравнения $F = 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad z = -1, \quad y = -t + C, \quad C = a, \quad t < (a - b + 1)/2, \\ 2) \quad z = 1, \quad y = t + C, \quad C = b - 1, \quad t > (a - b + 1)/2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

участвуют в построении решения задачи (2.10). Прямые $y = -t + a$ и $y = t + b - 1$ пересекаются во внутренней точке $t = (a - b + 1)/2$, и в ее окрестности возникает внутренний пограничный слой, сглаживающий разрывы функций (2.12) при $t = (a - b + 1)/2$ (ср. с точным решением (2.11) и см. рис. 6.3 при $a = b = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что внутренний пограничный слой может иметь более сложный вид. Квазилинейные задачи вида

$$\mu y'' = g_1(y, t)y' + g_2(y, t), \quad y(t_0) = a, \quad y(t_1) = b \quad (2.13)$$

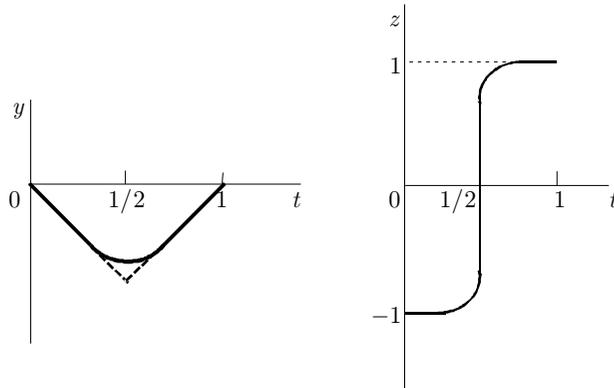


Рис. 6.3

исследовались в работе [7]. Показано, что эта задача может иметь решение, близкое к разрывному, если точки (t_0, a) , (t_1, b) на плоскости (t, y) разделены кривой, на которой функция $g_1(y, t)$ меняет знак.

Решение, близкое к разрывному, можно строить как решение с начальным условием в точке $t_* \in (t_0, t_1)$:

$$y(t_*, \mu) = y_0 + \mu y_1 + \dots,$$

$$z(t_*, \mu) = \frac{z_{-1}}{\mu} + z_0 + \mu z_1 + \dots.$$

Первоначально коэффициенты z_i , y_i и значение t_* неизвестны.

Решение задачи имеет следующий вид.

При $0 \leq t \leq t_*$

$$z(t, \mu) = z_0^{(0)}(t) + \mu z_1^{(0)}(t) + \dots + \frac{1}{\mu} Z_{-1}^{(0)}(\tau) + Z_0^{(0)}(\tau) + \dots,$$

$$y(t, \mu) = y_0^{(0)}(t) + \mu y_1^{(0)}(t) + \dots + Y_0^{(0)}(\tau) + \mu Y_1^{(0)}(\tau) + \dots.$$

При $t_* \leq t \leq t_1$

$$z(t, \mu) = z_0^{(1)}(t) + \mu z_1^{(1)}(t) + \dots + \frac{1}{\mu} Z_{-1}^{(1)}(\tau) + Z_0^{(1)}(\tau) + \dots,$$

$$y(t, \mu) = y_0^{(1)}(t) + \mu y_1^{(1)}(t) + \dots + Y_0^{(1)}(\tau) + \mu Y_1^{(1)}(\tau) + \dots.$$

В нулевом приближении

$$y_0^{(0)}(t_0) = a, \quad y_0^{(1)}(t_1) = b.$$

Эти условия определяют решения $z_0^{(0)}(t)$, $y_0^{(0)}(t)$ и $y_0^{(1)}(t)$, $z_0^{(1)}(t)$. Для каждого из них должно выполняться условие

$$z_{-1} + \int_{y_0}^{y_{0i}(t_*)} g_1(y, t_*) dy = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Вычитая одно уравнение ($i = 1$) из другого уравнения ($i = 2$), получаем уравнение для определения места «скачка» ($t = t_*$) в решении задачи (2.13):

$$\int_{y_{01}(t_*)}^{y_{02}(t_*)} g_1(y, t_*) dy = 0, \quad (2.14)$$

где $y_{01}(t)$ — решение вырожденного уравнения, устойчивое влево, а $y_{02}(t)$ — решение вырожденного уравнения, устойчивое вправо.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим задачу:

$$\mu y'' = -yy' + \alpha y, \quad y(0) = a, \quad y(1) = b, \quad a < 0, \quad \alpha, b > 0.$$

Вырожденное уравнение $y(y' - \alpha) = 0$ имеет решение $y' = \alpha$, откуда решение, удовлетворяющее левому граничному условию, имеет вид $y_{01} = a + \alpha t$, а решение, удовлетворяющее правому граничному условию, — вид $y_{02} = b + \alpha(t - 1)$. При этом должны выполняться условия:

$$1) g_1(y_{01}, t) = -y_{01} = -a - \alpha t > 0, \quad 0 \leq t \leq t_*;$$

$$2) g_1(y_{02}, t) = -y_{02} = -b - \alpha(t - 1) < 0, \quad t_* \leq t \leq 1.$$

Зависимость места скачка от a и b , как видно из (2.14), имеет вид

$$t_* = \frac{1}{2} - \frac{b+a}{2\alpha}.$$

Предполагается, что $|a+b| < \alpha < |b-a|$.

6.2.2. Упражнения

6.2.1. Получить главные члены в асимптотическом решении краевой задачи

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y + ky^n = 0, \quad n = 2, \quad \frac{dy(0)}{dt} = \dot{y}^0, \quad y(1) = y^1. \quad (2.15)$$

6.2.2. Получить главные члены в асимптотическом решении краевой задачи (2.15) при $n = 3$.

6.2.3. Получить главные члены в асимптотическом решении краевой задачи

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{dx}{dt} - 2 = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (2.16)$$

6.2.4. Получить главные члены в решении краевой задачи

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} x = 0, \quad x(0) = x^0, \quad x(1) = x^1, \quad x^0, x^1 > 0. \quad (2.17)$$

6.3. О ветвлении решений нелинейных уравнений

Основы теории ветвления решений нелинейных уравнений заложены в работах А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова и Э. Шмидта. В них показано, что задача о числе и поведении решений интегральных или дифференциальных уравнений может быть сведена к исследованию систем неявных аналитических функций, называемых «уравнениями разветвления».

Идея метода Ляпунова–Шмидта заключается в разложении исследуемого уравнения на два: одно в конечномерном подпространстве размерности n , а другое — в его бесконечномерном ортогональном дополнении. Этот метод, его различные варианты и его развитие подробно рассмотрены в работе [5].

Изложим кратко один из возможных путей решения задачи о ветвлении на примере конкретной задачи о продольном изгибе однородного стержня, зажатого на концах и находящегося под действием сжимающей силы.

6.3.1. Постановка задачи

Угол поворота $\theta(x)$ касательной к стержню удовлетворяет следующему уравнению равновесия и граничным условиям:

$$\theta_{xx} + \Lambda \cdot \sin \theta = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \theta_x(0) = \theta_x(1) = 0. \quad (3.1)$$

Величина Λ в уравнении (3.1) пропорциональна осевому усилию. Функция $\theta_0(x) \equiv 0$ является решением уравнения (3.1) при всех значениях Λ .

Требуется

- 1) определить значения параметра Λ (например, λ_0), в которых меняется число решений уравнения;
- 2) определить число решений в окрестности $\Lambda = \lambda_0$;
- 3) исследовать поведение этих решений в окрестности $\Lambda = \lambda_0$.

Рассмотрим задачу, линеаризованную около $\theta_0(x) = 0$:

$$\theta_{xx} + \Lambda \cdot \theta = 0, \quad \theta_x(0) = \theta_x(1) = 0. \quad (3.2)$$

Эта задача имеет собственные числа $\Lambda_i = (\pi i)^2$ и соответствующие им собственные функции $\theta_i(x) = \cos(\pi i x)$, которые образуют ортогональное на отрезке $[0, 1]$ семейство функций:

$$\int_0^1 \theta_i(x) \cdot \theta_j(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \int_0^1 \theta_i^2(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Если функция $\theta(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет граничным условиям $\theta_x(0) = \theta_x(1) = 0$, то она может быть разложена в равномерно сходящийся на отрезке $[0, 1]$ ряд по собственным функциям линейной задачи (3.2):

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \theta_n(x), \quad c_n = 2 \int_0^1 \theta(t) \theta_n(t) dt$$

6.3.2. Решение нелинейной задачи

Рассмотрим решения задачи в окрестности первого собственного числа $\Lambda_1 = \pi^2$. Пусть $\Lambda = \pi^2 + \lambda$. Уравнение (3.1) представим в виде

$$B\theta = \theta_{xx} + \pi^2\theta = -\theta \cdot \lambda - (\pi^2 + \lambda) \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \theta^{2i-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!}. \quad (3.3)$$

Известно, что для существования решения неоднородного уравнения $B\theta = h(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 h(x) \cdot \theta_0(x) dx = 0, \quad (3.4)$$

где θ_0 — решение однородного уравнения $B\theta = 0$.

Решение θ уравнения (3.3) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра ξ :

$$\theta = \xi \cos(\pi x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{2i+1} \theta_{2i+1}, \quad \xi \ll 1 \quad (3.5)$$

(решение раскладывается по нечетным степеням ξ , т.к. оператор B является нечетной функцией). Подставляя решение (3.5) в уравнение (3.3) и оставляя главные члены (с учетом малости величин ξ и λ), получим последовательность граничных задач для определения функций θ_i :

$$\xi^3 B\theta_3 = \frac{\pi^2}{6} \xi^3 \cos^3(\pi x) - \lambda \xi \cos(\pi x), \quad (\theta_3)_x(0) = (\theta_3)_x(1) = 0. \quad (3.6)$$

Условие (3.4) существования решения задачи (3.6) дает уравнение разветвления

$$\frac{\pi^2}{8} \xi^3 - \lambda \xi = 0, \quad (3.7)$$

которое при $\lambda > 0$ кроме тривиального ($\xi \equiv 0$) имеет еще два решения $\xi = \pm \sqrt{\lambda}$.

Частное решение задачи (3.6) имеет вид:

$$\theta_3 = -\frac{\cos(3\pi x)}{24 \cdot 8}. \quad (3.8)$$

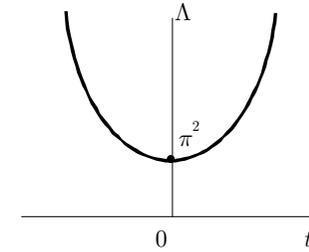


Рис. 6.4

Общее решение задачи (3.6) представляет собой сумму частного решения (3.8) и решения однородной задачи:

$$\theta_3 = -\frac{\cos(3\pi x)}{24 \cdot 8} + C \cos(\pi x),$$

где C — константа, которая может быть найдена из условия разрешимости следующей задачи:

$$\xi^5 B\theta_5 = -\frac{\pi^2}{120} \xi^5 \cos^5(\pi x) + \frac{\lambda \xi^3}{6} \cos^3(\pi x) - \lambda \xi^3 \theta_3 + \frac{\pi^2 \xi^5}{2} \cos^2(\pi x),$$

$$(\theta_5)_x(0) = (\theta_5)_x(1) = 0.$$

Таким образом, угол поворота стержня при нагрузках, близких к критическим, определяется как

$$\theta \simeq \xi \cos(\pi x) - \frac{\xi^3}{24 \cdot 8} \cos(3\pi x) - \frac{5\xi^3}{16 \cdot 8} \cos(\pi x) + \dots$$

Зависимость величины ξ от параметра Λ в окрестности критического значения $\Lambda = \pi^2$ представлена на рис. 6.4.

Как и следует из уравнения разветвления (3.7), при малых значениях λ (в окрестности критического значения осевого усилия) существует три решения уравнения (3.1), т.е. три положения равновесия.

Отметим, что аналогичным образом можно исследовать ветвление решений в окрестности всех остальных собственных чисел.

6.3.3. Упражнения

Получить уравнение разветвления и решение краевой задачи в окрестности первого собственного значения.

$$\mathbf{6.3.1.} \quad y_{xx} + \Lambda y = -y^3, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.2.} \quad y_{xx} + \Lambda y = y^2, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

6.3.3. Получить уравнение разветвления и решение задачи 3.2 в окрестности второго и третьего собственных значений.

6.3.4. Получить уравнение разветвления в задаче об осесимметричном выпучивании жестко защемленной круглой пластины, находящейся под действием равномерной сжимающей нагрузки, приложенной вдоль края. Угол θ поворота нормали к срединной поверхности пластины ($\theta = -w'_r$, где w — прогиб пластины, r — радиус) и безразмерное радиальное усилие $T_r - 1$ удовлетворяют нелинейным уравнениям Кармана:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} + \Lambda \cdot (1 - T_r)\theta = 0, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dT_r}{dr} \right) + \frac{\theta^2}{2} = 0, \quad \theta(1) = T_r(1) = 0,$$

и $\theta'(0) = T'_r(0) = 0$ из условий симметрии. Величина Λ пропорциональна приложенной нагрузке.

6.4. Ответы и решения

6.1.1. Точное решение уравнения (1.22) $x = -t + \mu \ln((e^{2t/\mu} + 1)/2) + x^0$.

Для построения асимптотического решения представим уравнение (1.22) в виде системы:

$$\mu \frac{dz}{dt} = -z^2 + 1, \quad \frac{dx}{dt} = z, \quad x(0) = x^0, \quad z(0) = 0. \quad (4.1)$$

При $\mu = 0$ корни уравнения $F(x_0, z_0, t) = -z_0^2 + 1 = 0$ таковы: $z = 1$, $z = -1$. Так как $\partial F / \partial z = -2z$, то устойчив корень $z_0 = 1$. Таким образом, вырожденная задача имеет решение $x_0 = t + x^0$, $z_0(t) = 1$. Для построения $Z_0(\tau)$ используем уравнение (1.11) $dZ_0/d\tau = -2Z_0(\tau) - Z_0^2(\tau)$, $Z_0(0) = -1$, которое имеет решение $Z_0(\tau) = -2/(e^{2\tau} + 1)$.

По соотношению (1.12) может быть найдена функция

$$X_1(\tau) = -2\tau + \ln(e^{2\tau} + 1).$$

Таким образом, функции

$$x(t) \simeq t + x^0, \quad z(t) \simeq 1 - 2(e^{2t/\mu} + 1)^{-1}$$

аппроксимируют решение системы (4.1) с точностью $O(\mu)$ в любом конечном интервале $0 \leq t \leq T_0 < \infty$ (т.е. разность между истинным решением и данным нулевым приближением имеет порядок μ .) Решение уравнения (1.22) с той же точностью можно представить в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= t + x^0 + \mu \left(-2t/\mu + \ln(e^{2t/\mu} + 1) \right) + O(\mu) = \\ &= -t + \mu \ln(e^{2t/\mu} + 1) + x^0 + O(\mu). \end{aligned}$$

Следовательно, для того чтобы удовлетворить и уравнению, и граничным условиям с точностью $O(\mu)$, гладкая часть решения должна быть построена с точностью $O(\mu)$, а пограничный слой — с точностью $O(\mu^2)$: $x(t) = x_0(t) + \mu X_1(t) + O(\mu)$. Для определения x_1 имеем $dx_1/dt = z_1 = 0$, $x_1(0) = -X_1(0) = -\ln 2$, откуда $x_1(t) = -\ln 2$.

Таким образом, решение, построенное с точностью $O(\mu^2)$, совпадает с точным решением.

6.1.2. Для построения асимптотического решения представим уравнение (1.23) в виде системы:

$$\mu \frac{dz}{dt} = -z - cy - ky^2, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad y(0) = x^0, \quad z(0) = \dot{x}^0.$$

При $\mu = 0$ имеем $z_0 = -cy_0 - ky_0^2$. Таким образом, вырожденная задача $dy_0/dt = -cy_0 - ky_0^2$, $y(0) = x^0$ имеет решение $y_0 = (cx^0)[(c + kx^0)e^{ct} - kx^0]^{-1}$. Для построения $Z_0(\tau)$ запишем $dZ_0/d\tau = -Z_0(\tau)$, $Z_0(0) = \dot{x}^0 + cx^0 + kx_0^2$, откуда следует, что $Z_0(\tau) = (\dot{x}^0 + cx^0 + kx_0^2)e^{-\tau}$.

По соотношению (1.12) может быть найдена функция $Y_1(\tau) = -(\dot{x}^0 + cx^0 + kx_0^2)e^{-\tau}$. Таким образом, решение уравнения (1.23) имеет вид:

$$x(t) = \frac{cx^0}{(c + kx^0)e^{ct} - kx^0} - \mu (\dot{x}^0 + cx^0 + kx_0^2) e^{-t/\mu} + O(\mu).$$

6.1.3.

$$x(t) = \sqrt{\frac{cx^{02}}{(c + kx^{02})e^{2ct} - kx^{02}}} - \mu (\dot{x}^0 + cx^0 + kx^{03}) e^{-\tau} + O(\mu).$$

6.1.4. Точное решение уравнения (1.24) имеет вид

$$x = a \frac{(a + x^0)e^{at/\mu} + x^0 - a}{(a + x^0)e^{at/\mu} - x^0 + a}, \quad \text{где } a = \sqrt{x^{0^2} + 2\mu\dot{x}^0}.$$

Для построения асимптотического решения представим уравнение (1.24) в виде системы $\mu dx/dt = -zx$, $dx/dt = z$, $x(0) = x^0$, $z(0) = \dot{x}^0$. При $\mu = 0$ уравнение (2.1) $F = 0$ имеет корень $z_0 = 0$. Так как $\partial F/\partial z = -x$, то при $x^0 > 0$ этот корень будет устойчив. Вырожденная задача имеет решение $x_0 = x^0$, $z_0(t) = 0$. Для построения $Z_0(\tau)$ используем уравнение (1.11) $dZ_0/d\tau = -x^0 Z_0(\tau)$, $Z_0(0) = \dot{x}^0$, решение которого $Z_0(\tau) = \dot{x}^0 e^{-x^0\tau}$. По соотношению (1.12) может быть найдена функция $X_1(\tau) = -\dot{x}^0 e^{-x^0\tau}/x^0$.

Решение уравнения (1.24) можно представить в виде $x(t) = x^0 - \mu(\dot{x}^0/x^0)e^{-x^0t/\mu} + O(\mu)$.

Для определения функции x_1 запишем $dx_1/dt = z_1 = 0$, $x_1(0) = -X_1(0) = \dot{x}^0/x^0$, откуда $x_1(t) = \dot{x}^0/x^0$, или $x(t) = x^0 + \mu(\dot{x}^0/x^0)(1 - e^{-x^0t/\mu}) + O(\mu^2)$.

6.1.5. Для построения асимптотического решения представим задачу (1.25) в виде системы $\mu \frac{dz}{dt} = (A - z)y$, $\frac{dy}{dt} = z$, $y(0) = x^0$, $z(0) = \dot{x}^0$. При $\mu = 0$ имеем $z_0 = A$. Таким образом, вырожденная задача $\frac{dy_0}{dt} = A$, $y(0) = x^0$ имеет решение $y_0 = At + x^0$. Для построения $Z_0(\tau)$ запишем $dZ_0/d\tau = -x^0 Z_0(\tau)$, $Z_0(0) = \dot{x}^0 - A$, или $Z_0(\tau) = (\dot{x}^0 - A)e^{-\tau}$.

По соотношению (1.12) может быть найдена функция $Y_1(\tau) = -(\dot{x}^0 - A)e^{-\tau}/x^0$. Решение уравнения (1.25) можно представить в виде

$$x(t) = At + x^0 - \mu(\dot{x}^0 - A)e^{-x^0t/\mu}/x^0 + O(\mu).$$

Для определения x_1 имеем

$$\frac{dy_1}{dt} = z_1, \quad 0 = -(At + x^0)z_1, \quad x_1(0) = -X_1(0) = \frac{\dot{x}^0 - A}{x^0},$$

откуда $x_1(t) = (\dot{x}^0 - A)/x^0$. Итак, решение уравнения (1.25) суть

$$x(t) = At + x^0 + \mu \frac{\dot{x}^0 - A}{x^0} (1 - e^{-x^0t/\mu}) + O(\mu^2).$$

6.1.6. Уравнение (1.26) эквивалентно системе:

$$\mu \frac{dz}{dt} = A - zy, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad y(0) = x^0, \quad z(0) = \dot{x}^0.$$

При $\mu = 0$ имеем $A - z_0 y_0 = 0$. Вырожденная задача $dy_0/dt = A/y$, $y(0) = x^0$ имеет решение $y_0 = \sqrt{2At + x^{0^2}}$, $z_0 = A/\sqrt{2At + x^{0^2}}$. Для построения $Z_0(\tau)$ запишем задачу $dZ_0/d\tau = -x^0 Z_0(\tau)$, $Z_0(0) = \dot{x}^0 - A/x^0$, или $Z_0(\tau) = (\dot{x}^0 - A/x^0)e^{-x^0\tau}$. По соотношению (1.12) найдем $Y_1(\tau) = (A - \dot{x}^0 x^0)e^{-\tau}/(x^0)^2$. Для определения y_1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= z_1, \\ z_1 &= \frac{A^2}{((x^0)^2 + 2At)^2} - \frac{Ay_1}{(x^0)^2 + 2At}, \\ y_1(0) &= -Y_1(0) = \frac{\dot{x}^0 x^0 - A}{(x^0)^2}, \end{aligned}$$

откуда получаем $y_1(t) = -A/((x^0)^2 + 2At) + \dot{x}^0/(\sqrt{(x^0)^2 + 2At})$. Решение уравнения (1.26) можно представить в виде

$$x(t) = \sqrt{2At + (x^0)^2} + \mu \left[\frac{A - \dot{x}^0 x^0}{(x^0)^2} e^{-\tau} + \frac{\dot{x}^0 \sqrt{(x^0)^2 + 2At} - A}{(x^0)^2 + 2At} \right] + O(\mu^2).$$

6.2.1. Для построения асимптотического решения представим уравнение (2.15) в виде системы:

$$\mu \frac{dz}{dt} = -z - y - ky^2, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad y(1) = y^1, \quad z(0) = \dot{y}^0.$$

При $\mu = 0$ корень $z_0 = -y_0 - ky_0^2$, и вырожденная задача $dy_0/dt = -y_0 - ky_0^2$, $y(1) = y^1$ имеет решение $y_0 = y^1/((1 + ky^1)e^{t-1} - ky^1)$. Для построения $Z_0(\tau)$ ($\tau = t/\mu$) запишем $dZ_0/d\tau = -Z_0(\tau)$, $Z_0(0) = \dot{y}^0 + y_0(0) + ky_0(0)^2$, или $Z_0(\tau) = (\dot{y}^0 + y^1 e^{(1 + ky^1)(1 - e^{-\tau})} - ky^1 e^{-\tau})e^{-\tau}$.

Корень $z = -y - ky^2$ уравнения $F = 0$ устойчив вправо, областью притяжения корня $Z = 0$ уравнения (2.17) является вся вещественная

ось. По соотношению (1.12) может быть найдена функция $Y_1(\tau) = -\dot{y}^0 + y^1 e(1 + ky^1)(1 + ky^1 - ky^1 e)^{-2} e^{-\tau}$. Таким образом, решение задачи (2.15) с точностью $o(\mu)$ имеет вид:

$$y = \frac{y^1}{(1 + ky^1)e^{t-1} - ky^1} - \mu \left(\dot{y}^0 + \frac{y^1 e(1 + ky^1)}{(1 + ky^1 - ky^1 e)^2} \right) e^{-t/\mu}.$$

6.2.2.

$$y(t) = \sqrt{\frac{(y^1)^2}{(1 + ky^{1^2})e^{2t-2} - ky^{1^2}}} - \mu \left(\dot{y}^0 + \frac{1 + ky^{1^2}}{1 + ky^{1^2} - k(ey^1)^2} \sqrt{\frac{(ey^1)^2}{1 + ky^{1^2} - k(ey^1)^2}} \right).$$

6.2.3. Для построения асимптотического решения представим задачу (2.16) в виде системы:

$$\mu \frac{dz}{dt} = -z^2 + z + 2, \quad \frac{dx}{dt} = z, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

При $\mu = 0$ имеем два корня $z = -1$ и $z = 2$. Первый корень устойчив влево, второй — вправо. В связи с тем, что оба граничных условия наложены на функцию x , запишем два решения:

$$\begin{aligned} z = -1, \quad x = -t + C, \quad x(0) = 0, \quad C = 0, \quad x = -t, \\ x = 2t + C_1, \quad x(1) = 0, \quad C_1 = -2, \quad x = 2t - 2, \end{aligned}$$

участвующие в построении решения задачи. Прямые $x = -t$ и $x = 2t - 2$ пересекаются во внутренней точке $t_0 = 2/3$, и в окрестности этой точки возникает внутренний пограничный слой (рис. 6.5).

6.2.4. Для построения асимптотического решения представим уравнение (2.17) в виде системы:

$$\mu \frac{dz}{dt} = -zx, \quad \frac{dx}{dt} = z, \quad x(0) = x^0, \quad x(1) = x^1.$$

При $\mu = 0$ ее корень $z_0 = 0$. Так как $\partial F/\partial z = -x$, то при $x^0, x^1 > 0$ этот корень устойчив вправо. Таким образом, вырожденная задача имеет

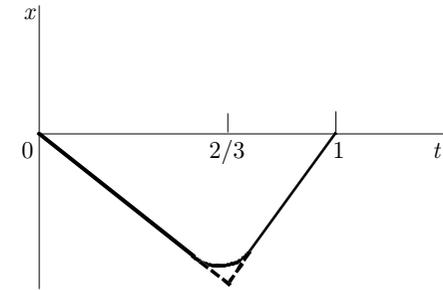


Рис. 6.5

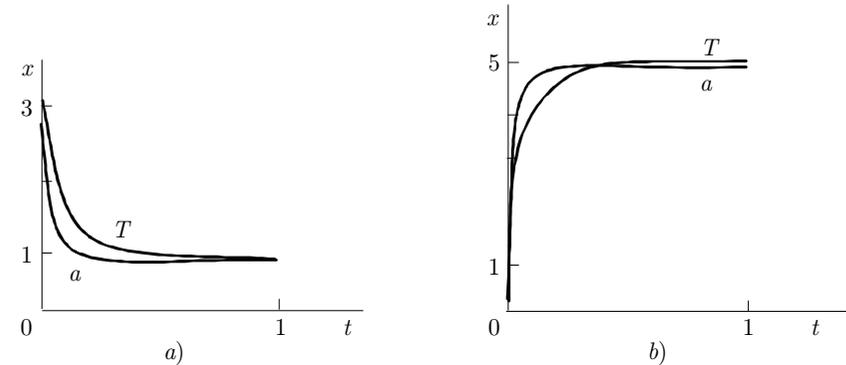


Рис. 6.6

решение $x_0 = x^1$, $z_0(t) = 0$, а в окрестности края $x = 0$ решение имеет пограничный слой: $x(t) = x^1 + X(\tau)$, $\tau = t/\mu$.

Для построения функции $X(\tau)$ получим уравнение $dX/d\tau = -x^1 X(\tau)$, $X(0) = (x^0 - x^1)$, $X(\tau) \rightarrow 0$, при $\tau \rightarrow \infty$, которое имеет решение $X(\tau) = (x^0 - x^1)e^{-x^1 \tau}$. Решение исходной задачи имеет вид $x(t) \simeq x^1 + (x^0 - x^1)e^{-x^1 t/\mu} + O(\mu)$.

На рис. 6.6 представлены точные и асимптотические решения уравнения (2.17) при $x^0 = 3$, $x^1 = 1$, $\mu = 0.1$ (a) и при $x^0 = 1$, $x^1 = 5$, $\mu = 0.1$ (b).

6.3.1. Линеаризованная задача $y_{xx} + \Lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ имеет собственные числа $\Lambda_i = (\pi i)^2$ и соответствующие им собственные

функции $y(x) = \sin(\pi x)$, образующие ортогональное на отрезке $[0, 1]$ семейство функций.

Рассмотрим решения задачи в окрестности первого собственного числа $\Lambda_1 = \pi^2$. Пусть $\Lambda = \pi^2 + \lambda$. Исходное уравнение представим в виде $Bu = y_{xx} + \pi^2 y = -\lambda y - y^3$. Решение задачи y будем искать в виде ряда по нечетным степеням малого параметра ξ : $y = \xi \sin(\pi x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{2i+1} y_{2i+1}$, $\xi \ll 1$. Подставляя это решение в исходное уравнение, с учетом малости величин ξ и λ , получаем последовательность граничных задач для определения функций y_i . В частности, для определения y_3 приходим к задаче

$$\xi^3 B y_3 = -\xi^3 \sin^3(\pi x) - \lambda \xi \sin(\pi x), \quad y_3(0) = y_3(1) = 0. \quad (4.2)$$

И условие (3.4) для краевой задачи $Bu = h(x)$ дает уравнение разветвления

$$-\frac{3}{4}\xi^3 - \lambda \xi = 0.$$

Последнее при $\lambda < 0$ имеет кроме тривиального ($\xi \equiv 0$) еще два решения $\xi = \pm \sqrt{-\lambda/3}$. Частное решение задачи (4.2) имеет вид $y_{3ч} = -\sin(3\pi x)/32\pi^2$. Общее решение задачи (4.2) представляет собой сумму частного решения и решения однородной задачи: $y_3 = -(1/32\pi^2)\sin(3\pi x) + C \sin(\pi x)$, где C — константа, которая может быть определена из условия разрешимости следующей задачи: $\xi^5 B y_5 = -3\xi^5 \sin^2(\pi x)y_3 - \lambda \xi^3 y_3$, $y_5(0) = y_5(1) = 0$. Таким образом,

$$y \simeq \xi \sin(\pi x) - \frac{\xi^3}{32\pi^2} \sin(3\pi x) - \frac{\xi^3}{64\pi^2} \sin(\pi x) + \dots$$

На рис. 6.7 представлена зависимость величины ξ от параметра Λ в окрестности критического значения $\Lambda = \pi^2$.

6.3.2. Линеаризованная задача имеет тот же вид, что и в задаче 6.3.1. Решение задачи

$$Bu = y_{xx} + \pi^2 y = -\lambda y + y^2 \quad (4.3)$$

ищем в виде $y = \xi \sin(\pi x) + \sum_{i=2}^{\infty} \xi^i y_i$, $\xi \ll 1$. Подставляя последнее в уравнение (4.3) и оставляя главные члены, получаем: $\xi^2 B y_2 = \xi^2 \sin^2(\pi x) - \lambda \xi \sin(\pi x)$, $y_2(0) = y_2(1) = 0$. Условие существования решения для этой задачи дает уравнение разветвления $-\lambda \xi/2 + 4\xi^2/(3\pi) = 0$, которое имеет решение, отличное от нуля как при $\lambda < 0$,

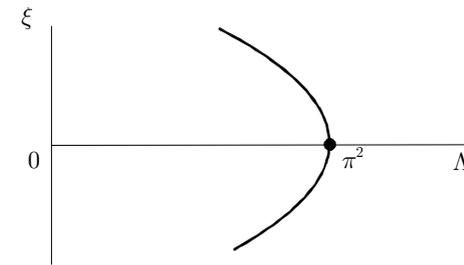


Рис. 6.7

так и при $\lambda > 0$: $\xi = 3\pi\lambda/8$. Получаем

$$y_2 = \frac{4x-2}{3\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{6\pi^2} \cos(2\pi x) + C \sin(\pi x),$$

где константа C определяется из условия разрешимости следующей задачи: $B y_3 = [2 \sin(\pi x) - 8/(3\pi)]y_2$, $y_3(0) = y_3(1) = 0$. Таким образом,

$$y \simeq \left(\xi + \frac{2\xi^2}{\pi^3} - \frac{5\xi^2}{16\pi} \right) \sin(\pi x) + \xi^2 \left(\frac{4x-2}{3\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{\cos(2\pi x)}{6\pi^2} \right) + O(\xi^3).$$

На рис. 6.8 представлена зависимость величины ξ от параметра Λ в окрестности критического значения $\Lambda = \pi^2$.

6.3.3. В окрестности второго собственного числа задача может быть представлена в виде $B_1 u = y_{xx} + 4\pi^2 y = -\lambda y + y^2$. В этом случае решение задачи ищем в виде $y = \xi \sin(2\pi x) + \sum_{i=2}^{\infty} \xi^i y_i$, $\xi \ll 1$. Подставляя это решение в уравнение и оставляя главные члены, получаем $\xi^2 B_1 y_2 = \xi^2 \sin^2(2\pi x) - \lambda \xi \sin(2\pi x)$, $y_2(0) = y_2(1) = 0$. Условие разрешимости для этого уравнения $\int_0^1 h(x) \cdot \sin(2\pi x) dx = 0$ дает $\lambda = 0$. Это означает, что в данном случае $\lambda \ll \xi$.

$$y_2 = C \sin(2\pi x) + \frac{\cos(4\pi x)}{24\pi^2} - \frac{\cos(2\pi x)}{6\pi^2} + \frac{1}{8\pi^2}.$$

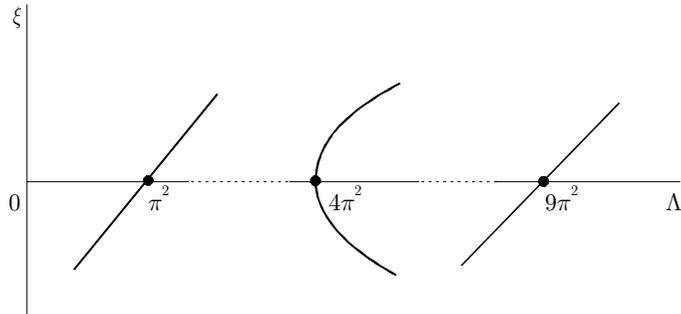


Рис. 6.8

Для следующего приближения имеем уравнение

$$\xi^3 B_1 y_3 = 2y_2 \xi^3 \sin(2\pi x) - \lambda \xi \sin(2\pi x), \quad y_3(0) = y_3(1) = 0.$$

Условие разрешимости последнего уравнения дает уравнение разветвления $\lambda = 5\xi^2/(24\pi^2)$, а константа C в выражении для y_2 определяется из условия разрешимости следующей задачи: $\xi^4 B_1 y_4 = \xi^4 y_2^2 + 2\xi^4 \sin^2(\pi x) y_3 - \lambda \xi^2 y_2$, $y_4(0) = y_4(1) = 0$. Уравнение разветвления имеет решение, отличное от нуля при $\lambda > 0$.

В окрестности третьего собственного числа имеем $B_1 y = y_{xx} + 9\pi^2 y = -\lambda y + y^2$. Решение аналогично решению задачи в окрестности первого собственного числа. Уравнение разветвления в этом случае $\lambda \xi - 8\xi^2/(9\pi) = 0$. Отличное от нуля решение в окрестности третьего собственного числа имеет вид:

$$y \simeq \xi \sin(3\pi x) + \xi^2 \left(\frac{4x-2}{27\pi^2} \cos(3\pi x) + \frac{1}{18\pi^2} + \frac{\cos(6\pi x)}{54\pi^2} \right) + C_1 \xi^2 \sin(3\pi x) + O(\xi^3),$$

где константа C_1 определяется из условия разрешимости задачи для y_3 .

Зависимость величины ξ от параметра Λ в окрестности критических значений $\Lambda = 4\pi^2$ и $\Lambda = 9\pi^2$ представлена на рис. 6.8.

6.3.4. Рассмотрим линеаризованную задачу

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} + \Lambda \theta = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \\ T_r \equiv 0, \quad \theta(1) = \theta(0) = 0.$$

При $\Lambda = \Lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$) эта задача имеет нетривиальные решения $\theta_n = C J_1(\sqrt{\Lambda_n} r)$ и $J_1(\sqrt{\Lambda_n}) = 0$, где собственное значение Λ_n таково, что $\sqrt{\Lambda_n}$ — n -ый нуль функции Бесселя J_1 . Собственные функции образуют ортогональное на отрезке $[0, 1]$ семейство функций:

$$\int_0^1 J_1(\sqrt{\Lambda_i} r) J_1(\sqrt{\Lambda_j} r) r dr = 0, \quad i \neq j.$$

Найдем решение задачи в окрестности собственных чисел $\Lambda = \Lambda_n + \delta$

$$\mathbf{B}\theta \equiv \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r^2} + \Lambda_n \theta = (\Lambda_n + \delta) T_r \theta - \delta \theta.$$

Учитывая, что из второго уравнения задачи $T_r = \int_r^1 \frac{1}{2\tau^3} \int_0^\tau \theta^2 s ds d\tau$, уравнение относительно угла θ можно представить как

$$\mathbf{B}\theta = (\Lambda_n + \delta) \theta \int_r^1 \frac{1}{2\tau^3} \int_0^\tau \theta^2 s ds d\tau - \delta \theta.$$

Решение задачи будем искать в виде ряда

$$\theta = \mu J_1(\sqrt{\Lambda_n} r) + \mu^3 \theta_{n3}(r) + \mu^5 \theta_{n5}(r) + \dots$$

Подставляя это решение в исходное уравнение и оставляя только главные члены (с учетом малости μ и δ), получаем последовательность граничных задач для определения θ_{ni} . Для θ_{n3} имеем

$$\mu^3 \mathbf{B}\theta_{n3} = -\delta \mu J_1(\sqrt{\Lambda_n} r) + \\ + \mu^3 \Lambda_n J_1(\sqrt{\Lambda_n} r) \int_r^1 \frac{1}{2\tau^3} \int_0^\tau J_1(\sqrt{\Lambda_n} r)^2 s ds d\tau.$$

Условие существования решения задачи $\mathbf{B}\theta = f$, $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ имеет вид $\int_0^1 f J_1(\sqrt{\Lambda_n} r) r dr = 0$ и дает уравнение разветвления $\delta = \Lambda_n A \mu^2$,

где

$$A = \frac{\int_0^1 r J_1^2(\sqrt{\Lambda_n} r) F_1(r) dr}{\int_0^1 J_1^2(\sqrt{\Lambda_n} r) r dr}, \quad F_1(r) = \frac{1}{2} \int_r^1 \frac{1}{\tau^3} \int_0^\tau s J_1^2(\sqrt{\Lambda_n} s) ds d\tau.$$

Для $\Lambda_1 = 14.682$ ($\sqrt{\Lambda_1} = 3.832$), например, $A = 0.0369$, а уравнение разветвления имеет вид $\delta = 0.537\mu^2$; для $\Lambda_2 = 49.219$ ($\sqrt{\Lambda_2} = 7.016$) находим $\delta = 1.606\mu^2$; для $\Lambda_3 = 103.500$ ($\sqrt{\Lambda_3} = 10.174$) имеем $\delta = 2.911\mu^2$.

Литература

1. И. И. Аргатов. Введение в асимптотическое моделирование в механике. — СПб.: Политехника, 2004. — 302 с.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
3. Н. Г. де Брейн. Асимптотические методы в анализе. — М.: ИЛ, 1961. — 248 с.
4. В. Вазов. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
5. Б. Р. Вайнберг. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1982. — 296 с.
6. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
7. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
8. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 5 (77). — с. 3–122.
9. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук. — 1960. — Т. 15. — Вып. 3 (93). — с. 3–80.
10. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
11. Р. Г. Коул. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972. — 274 с.

12. С. А. Ломов. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
13. В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
14. В. П. Маслов. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1987. — 408 с.
15. В. П. Маслов. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988. — 312 с.
16. Д. Р. Меркин. Гироскопические системы. — М.: 1956. — 300 с.
17. А. Найфэ. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 456 с.
18. А. Найфэ. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 536 с.
19. С. А. Назаров. Введение в асимптотические методы теории упругости. — Изд. Ленингр. ун-та, 1983. — 117 с.
20. Ф. Олвер. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.
21. В. А. Треногин. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика. Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25. — Вып. 4 (154). — с.125–156.
22. М. В. Федорюк. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 468 с.
23. В. М. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
24. М. Ф. Федорюк. Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.
25. Н. Фреман, П. У. Фреман. ВКБ — приближение. — М.: Мир, 1967. — 168 с.
26. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965. — 238 с.
27. К. В. Холшевников. Асимптотические методы небесной механики. — Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1985. — 208 с.

28. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962. — 128 с.
29. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.

Дополнительная литература

Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. — М.: Наука, 1997. — 414 с.

Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. — Изд. Едиториал УРСС, 2004. — 304 с.

Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. — М.: Наука, 1985. — 224 с.

Асланян А. Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1974. — 156 с.

Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972. — 456 с.

Баранцев Р. Г. Об асимптотологии // Вестник ЛГУ, 1976 // N1. // С. 69–76.

Бауэр С. М. (ред.), Смирнов А. Л., Филиппов С. Б., Товстик П. Е. Асимптотические методы в примерах и задачах. Учебное пособие. — СПб.: Изд. СПбГУ, 1997. — 276 с.

Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979. — 319 с.

Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.

Гольденвейзер А. Л. Асимптотический метод в теории оболочек // Успехи механики, 1982 // Т. 5 // Вып. 1/2 // С. 137–182.

Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — 384 с.

- Елисеев В. В.** Механика упругих тел. — СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. — 341 с.
- Коссович Л. Ю.** Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. — Саратов: Изд. Саратовского ун-та, 1986. — 176 с.
- Малинецкий Г. Г.** Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. — 4-е изд. — М.: КомКнига, 2005. — 312 с.
- Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
- Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1991. — 416 с.
- Риекстыньш Э. Я.** Асимптотические разложения интегралов. — Рига, 1974. — Т. 1. — 391 с.; 1977. — Т. 2. — 370 с.; 1981. — Т. 3. — 370 с.
- Розо М.** Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
- Товстик П. Е.** Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы. — М.: Наука, 1995. — 314 с.
- Товстик П. Е., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б.** Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. — Учебное пособие. — СПб.: Изд. СПбГУ, 1995. — 182 с.
- Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — К.: Наукова думка, 1996. — 252 с.
- Филиппов С. Б.** Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. — СПб.: Изд. СПбГУ, 1999. — 196 с.
- Шамровский А. Д.** Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. — Запорожье.: Изд-во Гос. инж. акад., 1997. — 169 с.
- Varantsev R. G.** Asymptotic versus classical mathematics. In: Topics in Math. Analysis, Singapore: World Scientific, 1989, P. 49–64.
- Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E.** Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and

- plates// Asymptotic Methods in Mechanics. CRM Proceedings and Lecture Notes. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. P. 3–141.
- Kaplanov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.** Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, San Diego, 1998. 226 p.
- Tovstik P. E., Smirnov A. L.** Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. World Scientific. Ser. A. Vol. 4. 347 p.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,
тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34)
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
4. Магазины:
Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)
Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,
Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)
С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

***Светлана Михайловна Бауэр,
Андрей Леонидович Смирнов,
Петр Евгеньевич Товстик,
Сергей Борисович Филиппов***

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. В. Панкратов
Корректор З. В. Соболева*

Подписано в печать 02.08.2007. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. ????. Уч. изд. л. ????.
Гарнитура *antiqua*. Бумага офсетная №1.
Тираж ??? экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295
