PACS 02.30.Yy

© 2010 г. Б. Р. Андриевский, д-р техн. наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)
А. С. Матвеев, д-р физ.-мат. наук,
(Санкт-Петербургский государственный университет)
А. Л. Фрадков, д-р техн. наук,
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ: К ЕДИНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЙ И СВЯЗИ[1]

Делается попытка обзора бурно развивающейся области, посвященной анализу и синтезу систем управления при учете ограничений, вызванных наличием в них цифровых каналов связи с конечной пропускной способностью. Анализируется предыстория проблемы, начиная с работ 1960 – 1970 г., а также новые подходы, сформировавшиеся в последнее десятилетие. Значительное место уделяется различным версиям ставшей уже знаменитой «теоремы о скорости передачи данных» (*Data Rate Theorem*). Рассматриваются задачи управления через коммуникационные сети и некоторые результаты для нелинейных систем. Кратко перечисляются основные области приложений.

1. Введение

В настоящее время все более широкое распространение получают системы, в которых устройства управления и датчики, расположенные на расстоянии друг от друга, связаны между собой цифровыми информационными каналами с ограниченной пропускной способностью.[2] Такая ситуация характерна для распределенных сенсорных сетей, в которых большое число датчиков связано с центральным управляющим устройством. Сюда также относятся системы наблюдения за подвижными объектами, управления агротехническими системами, мобильными роботами (автономными летательными и подводными аппаратами, транспортными средствами, микромеханическими летающими насекомыми, наноспутниками) и другими подвижными устройствами. Ограничение пропускной способности канала связи между отдельными элементами систем оказывает существенное влияние на процессы управления и навигации. Нуждаются в пересмотре и переосмыслении даже такие фундаментальные свойства систем управления, как управляемость и наблюдаемость: условия управляемости и наблюдаемости существенно изменяются при учете информационных ограни-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00775, 09-08-00803), Межсекционной программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН, 2) «Проблемы управления и безопасности энергетики и технических систем» и Российской федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт № 02.740.11.5056). Авторы признательны проф. А. В. Савкину (Сидней) и проф. Р. Дж. Эвансу (Мельбурн) за полезные обсуждения.

[2] В англоязычной литературе *пропускная способность* канала связи обозначается термином *capacity* — *производительность*, *емкость*, которые встречаются и в настоящем обзоре.

чений. Возникает фундаментальная задача: найти границы для скоростей передачи данных, при которых обеспечение заданной цели управления возможно в принципе. Ее решение дает исчерпывающее (в определенном отношении) описание возможностей канала как части системы управления и одновременно требований к каналу, вытекающих из поставленной цели.

Указанной задаче в различных модификациях было уделено значительное внимание в течение последнего десятилетия, а в ее решении достигнут существенный прогресс. Все чаще говорят о новом этапе в развитии теории управления, о конвергенции ее с теорией информации [1–3]. Дополнительное требование учета вычислительных ограничений формирует круг проблем, обозначаемый как «стремление к единой теории управления, вычислений и связи» ($control \times communication \times computing = C^3$) [4]. Конечно, эти важнейшие для проблемы стали обсуждаться не сегодня, а гораздо раньше, лишь только цифровые системы стали внедряться в практику. Однако для работ последних лет характерна формулировка результатов в информационных терминах, что представляется более естественным. Кроме того, работы прошлых лет были посвящены, в основном, анализу ошибок в существующих схемах, тогда как на новом этапе ставятся задачи синтеза систем, в том числе оптимального синтеза, с учетом информационных и вычислительных ограничений.

При этом новое звучание придается проверенным инструментам: наблюдателям состояния, кодерам с переменным масштабирующим коэффициентом (*zooming*), регуляторам с переключениями (*switching*), превращающим системы в гибридные и т. д. Для оптимизации использования канала связи в контуре управления устанавливаются предельные возможности системы при данной пропускной способности канала, получаются оценки погрешности процесса управления. Влияние неопределенности, присущей моделям динамики большинства технических систем, преодолевается путем применения методов адаптивного и робастного управления.

Традиционная теория информации образует теоретическую основу техники связи и дает границы для скорости передачи информации, а также вероятности ошибки, достижимые при оптимальном кодировании. Соответствующие результаты служат компасом, определяющим направление развития теории и практики кодирования, и мерилом уже пройденного и еще оставшегося пути. Критерии, которыми руководствуется эта теория, в основном, абстрагированы от конечных целей передачи информации. Рассматривая канал связи в качестве составной части управляющего комплекса, естественно сменить ориентиры и руководствоваться критериями, применяемыми в теории управления. Такой подход исповедуется многими участниками нового «бума» в теории управления.

В настоящей работе делается попытка дать обзор этой бурно развивающейся области. В первой части обзора (разделы 1 и 2) анализируется предыстория проблемы начиная с работ 1960 — 1970 гг.

В середине 1990-х г. усилия исследователей были в значительной мере сконцентрированы на возможности стабилизации неустойчивого объекта системой управления, компоненты которой связаны через сеть ограниченной пропускной способности. Естественной отправной ситуацией является случай линейного объекта и простейшей сети, связывающей измерительное устройство (сенсоры, датчики), регулятор и исполнительное устройство (актуатор, привод) двумя каналами: *каналом наблюдения и каналом управления.* По этим каналам передаются данные от сенсора регулятору и от регулятора актуатору соответственно. Уже в этом случае был установлен ряд важных результатов, показавших, в частности, что учет ограничений на битовую скорость передачи информации приводит к существенно новым по сравнению с классической теорией эффектам. Обзору этих результатов посвящен раздел 4, где значительное место уделяется различным версиям ставшей уже знаменитой «теоремы о скорости передачи данных» (*Data Rate Theorem*). Отметим, что изложение в разделе 4 более детализировано и его стиль более формален. Раздел 5 посвящен задачам управления через коммуникационные сети. Число публикаций по этим задачам пока невелико. Некоторые результаты для нелинейных систем приведены в разделе 6, где известные результаты либо носят локальный характер, либо дают лишь достаточные условия. В разделе 7 рассматриваются другие подходы к задачам управления с коммуникационными ограничениями. Раздел 8 посвящен краткой характеристике прикладных исследований по теме обзора. В Приложениях изложен необходимый технический материал. Так как обзор структурирован по темам, то работы, касающиеся нескольких тем, как правило, обсуждаются в нескольких разделах.

Отметим, что на отбор материала в данной работе, несомненно, повлияли научные интересы авторов, которые заранее приносят свои извинения коллегам, чей вклад оказался вне зоны основного фокуса обзора.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел; $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел; $\Re z$ и $\Im z$ — вещественная и мнимая части комплексного числа z соответственно; $:=$ — равно по определению; $\{a_1, \dots, a_k\}$ — множество, образованное перечисленными элементами; $\{a : \mathcal{P}(a)\}$ — множество элементов, для которых верно утверждение $\mathcal{P}(a)$; $A \setminus B$ — разность множеств A и B (т. е. совокупность всех элементов A, непопадающих в B); $\emptyset$ — пустое множество; $|A|$ — число элементов множества A; $[m : n] := \{j \in \mathbb{Z} : m \leqslant j \leqslant n\}$; $\det A$ — определитель матрицы A; $\|A\|$ — спектральная норма матрицы A (в частном случае, когда A — вектор-столбец, $\|A\|$ совпадает с евклидовой нормой вектора A); $\mathbf{diag}(a_1, \dots, a_k)$ — диагональная $k \times k$-матрица с элементами $a_1, \dots, a_k$ на диагонали; $\boldsymbol{P}$ — вероятность; $\boldsymbol{P}\big[A\big|B\big]$ — условная вероятность события A при условии события B; $\boldsymbol{E}$ — математическое ожидание; $\wedge$ — логическое «и».

2. Ранние работы: управление и наблюдение с квантованием

В ранних работах по исследованию влияния эффекта квантования по уровню сигнала в цифровых системах управления устройство квантования («*квантователь*», «*кодирующее устройство*» или «*кодер*») обычно рассматривалось как источник независимого случайного дискретного процесса (шума), аддитивно воздействующего на систему. Это допущение позволяет существенно упростить исследование систем с квантованием, особенно для объектов управления, описываемых линейными моделями (см. например [5–10]). Однако, такое допущение является слишком грубым, если величина шага квантования соизмерима с диапазоном изменения передаваемой величины [9, 11–15]. Квантование по уровню в замкнутой системе дискретного времени может вызвать колебательные процессы, аналогичные автоколебаниям в непрерывных нелинейных системах. Аналитическое определение параметров этих процессов возможно только в простейших случаях. Упростить исследование можно на основе приближенного численно-аналитического метода гармонической линеаризации, распространенного на дискретные системы в [9, 16].

Помимо анализа исследовались и задачи синтеза, в первую очередь — минимизации погрешностей, вызванных квантованием в контуре управления. Обычно эти задачи ставятся как оптимизация некоторого интегрального целевого функционала (функции потерь). К наиболее ранним работам в этом направлении относятся публикации [17–19]. Статья [19] посвящена задаче синтеза оптимальной системы управления дискретным линейным объектом с квантованием *управляющего воздействия*. Рассматриваются *статические* кодеры, описываемые характеристикой $\tilde{z} = q(z)$, где z — скалярный входной сигнал, $z \in \mathbb{R}$; $\tilde{z}$ — преобразованный (квантованный) сигнал на выходе кодера. Статическая характеристика кодера $q(\cdot)$ подлежит оптимизации. Считается, что $q(\cdot)$ — монотонная нечетная функция, имеющая заданное число $N+1$ различных значений, $q : \mathbb{R} \to \{c_0, c_1, \dots c_N\}$. Значения $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{0, N})$ являются оптимизируемыми параметрами. В [19] отдельно рассматривается задача оптимизации квантователя в разомкнутом контуре в предположении, что статистические свойства входного сигнала z известны и заданы его одномерной плотностью распределения $p(z)$. Критерием оптимизации кодера является математическое ожидание некоторой заданной выбранной целевой функции $g(z, q(z))$. Решение такой оптимизационной задачи выполняется стандартными методами математического программирования. Затем рассматривается замкнутая динамическая система, включающая объект управления, измерительное устройство, наблюдатель состояния, регулятор и квантователь. Считается, что объект управления подвержен внешним стохастическим возмущениям. Учитываются также стохастические шумы измерения. Для квадратичного функционала качества, линейного объекта управления, гауссовских возмущений и шумов измерения в [19] формулируется *теорема разделения*, согласно которой задачи оптимизации регулятора, наблюдателя и кодера могут решаться независимо. Первые две задачи решаются известными методами оптимального линейно-квадратичного управления без учета квантования, а для оптимизации кодера используется процедура математического программирования, полученная для разомкнутой системы.

В результате последующей дискуссии [20–22] выяснилось, что результаты [19] приводят к кодеру с *переменными параметрами* («*нестационарный кодер*»), что существенно усложняет применение полученных результатов в системах реального времени. Для векторного сигнала управления эти результаты получили развитие в [21], где отмечено, что в [17–19, 22, 23] рассмотрены задачи оптимизации кодеров *заданной* структуры. В [21] алгоритм работы оптимального квантователя выводится из решения оптимизационной задачи для замкнутой системы по линейно-квадратичному критерию с гауссовскими шумами (так называемой *LQG-problem*). Получено, что при заданном числе уровней квантования оптимальный регулятор находится раздельным решением следующих подзадач:

1. Синтез оптимального фильтра Калмана для оценки состояния при стохастических воздействиях;

2. Синтез оптимального регулятора по полученным оценкам;

3. Оптимальное квантование найденного по п. 2 непрерывного управления с минимальным искажением.

В [21] отмечено, что если для системы со скалярным управлением имеется возможность рассчитать параметры квантователя заранее, то в случае векторного управления эти параметры должны определяться в процессе работы системы (в зависимости от текущей реализации процесса). Текущее значение функции потерь представлет собой сумму значений этой функции для задачи оптимального управления без квантования и дополнительного слагаемого, которое выражает погрешность, вызванную квантованием.

Близкие результаты приведены в [23], где рассматривается задача оптимальной стабилизации линейного стохастического дискретного объекта с квадратичным целевым функционалом при условии, что *устройство измерения* описывается нелинейной статической характеристикой произвольного вида (в том числе в качестве таковой может рассматриваться нелинейная характеристика кодера на выходе объекта $\tilde{y} = q(y)$). В [23], в частности, предложена структура, в которой на кодер поступает не сигнал выхода объекта y, а «*инновация*» — рассогласование z между выходом объекта и его условным средним значением, вырабатываемым с помощью фильтра Калмана. Такой структуре соответствуют уравнения кодера

$$\tilde{z}_k = q(z_k, \nu_k), \quad z_k = y_k - \bar{y}_k, \tag{2.1}$$

где y — выход объекта, $\bar{y}$ — его условное среднее, формируемое фильтром Калмана, ν — шум (погрешность) измерений выхода, $q(\cdot)$ — статическая характеристика кодера, $k = 0, 1, \ldots$ — дискретное время.

Таким образом, согласно [19,21] для использования теоремы разделения при квантовании сигнала управления следует применять нестационарный кодер *в прямой цепи*, а в соответствии с [23] при квантовании сигнала измерений кодер должен быть охвачен *обратной связью*. Стоит заметить, что предложенный в [23] метод преобразования (2.1) предвосхищает результаты появившихся значительно позже работ (см., например, [24–28]), в которых кодированию и передаче через канал связи подвергается сигнал инновации.

Работа [29] посвящена синтезу оптимальных фильтров Калмана с учетом ошибок округления, вызванных конечной длиной машинного слова. Рассматривается влияние как ошибок представления сигналов датчиков, так и ошибок реализации параметров оптимального фильтра. Влияние указанных погрешностей описывается в [29] в виде аддитивного случайного процесса с равномерной на заданном интервале плотностью распределения. Предложено решение, являющееся компромиссом между частотой квантования и разрядностью вычислительного устройства.

Статьи [30–35] посвящены построению так называемых (*адаптивных*) квантователей, в которых диапазон преобразования сигнала автоматически изменяется в процессе работы. В [35] при настройке диапазона преобразования (верхнего и нижнего уровней насыщения квантователя) используется прогноз, полученный при передаче предыдущего блока сигналов. Верхний и нижний уровни насыщения изменяются независимо так, чтобы охватить прогнозируемый диапазон сигналов. В [30] ширина диапазона квантования изменяется при кодировании каждого сигнала. Заметим, что указанные работы посвящены только задаче передачи сигналов. В ряде последующих работ (см. например, [36–39]) рассматривается использование адаптивных квантователей в *замкнутых* системах управления и оценивания.

В [40] ставится задача минимизации чувствительности дискретных регуляторов к ошибкам квантования, вызванных конечной разрядностью вычислительного устройства. Считается, что коэффициенты регулятора представлены точно, эффекты переполнения и квантования результатов измерений отсутствуют, а погрешность возникает в вычислителе до или после операции умножения. Требуется по заданной передаточной функции регулятора найти его реализацию в форме уравнений состояния, при которой влияние ошибок округления будет минимальным. Как и во многих других работах [7,8,29,41], ошибка округления представляется внешним аддитивным ограниченным шумом. Для оптимизации используются H_2 и H_∞ нормы. Показано, как поставленная задача сводится к задаче выпуклой оптимизации линейной целевой функции при аффинных матричных ограничениях типа неравенств.

Возникновение хаотических колебаний вследствие квантования по уровню исследуется в [42–45].

Выводы. Таким образом, задачи управления и оценивания в условиях квантования одновременно как по уровню, так и по времени стали привлекать внимание одновременно с началом внедрения цифровой техники. Вследствие нелинейности систем с квантованием в замкнутом контуре их аналитическое исследование оказывается сложной задачей, упрощение которой достигается обычно применением процедуры линеаризации. Как правило, ошибки квантования представляются в виде аддитивного ограниченного шума, действующего на линейную систему. Другой подход, используемый значительно реже, состоит в применении процедуры гармонической линеаризации. Но во всех случаях квантование по уровню рассматривалось как *аппроксимация* вещественного числа конечным числом разрядов, являющаяся источником ошибки в системе. Со временем появилась альтернативная точка зрения, идущая из эргодической теории динамических систем, согласно которой квантованное измерение $q(x)$ непрерывной величины x является объектом, содержащим некоторую неполную информацию относительно x (см. [46]). В [46] сформулирована и следующая задача: «вопрос, на который мы хотим найти ответ: при каких условиях и в каком смысле мы можем стабилизировать неустойчивую дискретную систему с помощью обратной связи, зависящей только от квантованных измерений состояния объекта?». Решению этой задачи посвящено значительное число публикаций, обзор которых дан ниже в разделе 4.

3. Задачи управления и наблюдения при ограничениях на пропускную способность канала связи

Работа [46] является одной из первых, в которых явно указывается на информационные ограничения в канале связи между датчиками и наблюдателем в задаче оценивания состояния динамической системы. Рассматривается замкнутая система стабилизации, состоящая из линейного дискретного объекта управления

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{3.1}$$

и регулятора в обратной связи

$$u_k = f_k\big(q(x_0), \dots, q(x_k)\big), \tag{3.2}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — состояние объекта, $u_k \in \mathbb{R}^m$ — управляющее воздействие, A, B — матрицы соответствующих размеров, $q(\cdot)$ — функция кодера. Как видно из (3.2), сигнал управления может зависеть от всей предыстории измерений (от нулевого до текущего k-го моментов времени), что имеет принципиальное значение. Автор [46] подчеркивает: «... значение того, что u может зависеть от всей предыстории измерений, не следует недооценивать. Квантование q превращает отдельное текущее измерение $q(x_k)$ во что-то вроде "частичного наблюдения" состояния x_k, аналогичного частичному наблюдению $y_k = Cx_k$ в линейной теории. Более детально результаты изложены в [12].

Задача оценивания состояния при ограничениях на пропускную способность канала связи сформулирована в [47, 48]. В отличие от принятого в теории оценивания классического подхода, при котором сигнал наблюдений представляется непрерывным процессом, искаженным аддитивным шумом, в [47,48] кроме того считается, что сигнал кодируется и передается через канал связи с ограниченной пропускной способностью. Состояние объекта представляется стохастическим процессом $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ с априорно известной функцией распределения и ограниченными в каждый момент времени первыми и вторыми моментами. Измерения выхода объекта производятся непрерывно, но из-за удаленности объекта данные измерений поступают в систему оценивания через канал связи. В [48] отмечено, что в классической теории информации минимизация асимптотической ошибки при передаче данных через канал связи производится в предположении что отсчеты входного сигнала независимы и одинаково распределены (*independent, identically distributed* — iid). Такой подход приводит к нерекурсивным процедурам кодирования-декодирования. Однако, как отмечено в [47, 48], с точки зрения оценивания состояния динамических систем указанные выше предположения о свойствах выборки входного сигнала и о характере процедуры кодировавния неприемлемы.

В [47, 48] рассматривается $\mathcal{Y}_t$ — множество возможных реализаций процесса x к моменту t, $\mathcal{Y}_t = \{x(s), 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Через c_i обозначено кодовое слово длиной l_i, переданное на шаге i. Через τ_i обозначен момент времени такой, что c_i вычисляется на основе траектории x к моменту τ_i, т. е.

$$\begin{cases} c_i = h_i\big(y(\tau_i)\big), \quad y(\tau_i) \in \mathcal{Y}_{\tau_i}, \\ \tau_i = \tau_{i-1} + l_i\delta, \quad \tau_0 = 0, \quad i \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\delta = 1/R$ — время на передачу одного бита данных по каналу связи. Соответственно скорость передачи данных по каналу $R = 1/\delta$ (бит/с).

В поисках аналогов классической теоремы Шеннона [49] о пропускной способности канала, в [50] ставится задача определить — какова нижняя граница скорости передачи данных по каналу связи, при которой можно обеспечить сходимость процедуры оценивания состояния объекта. Такие задачи возникают при квантовании измерений в цифровых системах управления, а также в децентрализованных системах наблюдения, у которых данные датчиков представляются кодированными (часто — двоичными) сигналами. Эти сигналы передаются по дискретному каналу связи в «центр слияния данных», где производится их обработка и принятие решения. В [50] рассматривается задача оценивания стохастического процесса $x(t)$, удовлетворяющего уравнению первого порядка $\dot{x}(t) = ax(t)$, где $a > 0$ — известный постоянный параметр (интерес представляет именно задача оценки неустойчивого процесса). Начальное состояние x_0 имеет известную плотность распределения вида *смещенного лапласового распределения* $f(x) = \lambda e^{-\lambda|x-\mu|}/2$ с известными математическим ожиданием μ и дисперсией $\sigma^2 = 2/\lambda^2$. Результаты измерений $x(t)$ преобразуются двоичным кодером и передаются в дискретные моменты времени t_k без искажений и потерь по каналу связи. Моменты t_k выражаются соотношением $t_k = k\delta$, где $k = 0, 1, \ldots$, δ — промежуток времени, требуемый для передачи обного бита по каналу связи. Величина $R = 1/\delta$ называется *скоростью передачи данных*. Рекурсивный алгоритм получения оценки $\hat{x}_k$ значений $x_k = x(t_k)$ по переданной двоичной последовательности

$$h(x_k) = \begin{cases} 0, & x_k \in \mathbf{A}, \\ 1, & x_k \in \mathbb{R}\backslash\mathbf{A} \end{cases} \tag{3.4}$$

описан в [48, 50]. Алгоритм основан на рекуррентном изменении *характеристического множества* $\mathbf{A}$ функции кодирования (3.4). Согласно этому алгоритму, для найденного на k-м шаге множества $\mathbf{A}_k$ вычисляется оценка $\hat{x}_k$ по критерию минимума дисперсии. На начальном шаге характеристическое множество $\mathbf{A}_0 = (-\infty, \mu]$. В [50] доказано, что для рассматриваемого стохастического процесса x_k достаточным условием сходимости в среднеквадратическом процедуры кодирования-оценивания работ [48, 50] является выполнение следующего условия на скорость передачи данных:

$$R > \frac{2a}{\ln 2}. \tag{3.5}$$

В последующих работах аналогичное условие получено и для более широкого класса систем.

Оценивание состояния удаленной системы через цифровой канал связи с ограниченной пропускной способностью рассматривается и в [51]. Ставится задача определения минимальной пропускной способности канала связи, при которой можно обеспечить требуемую точность оценивания. В [51] отмечена близость рассматриваемой задачи к исследованию цифровых систем с квантованием по уровню [9, 11–15, 17–19, 22, 23], но обращается внимание и на существенные отличия. Во-первых, в системах с квантованием по уровню характеристика преобразователя (*шаг квантования*), как правило, фиксирована, в то время как при передаче данных по каналу связи единственным ограничением на кодер является количество символов выходного алфавита. Функция кодирования может, кроме того, *меняться во времени*, завися от всех предшествующих измерений. Эта дополнительная степень свободы фундаментально меняет существо рассматриваемой задачи, так как устройство оценивания приобретает возможность эффективно выбирать подлежащие измерению величины путем целенаправленного изменения функции кодирования. Во-вторых, при передаче данных по каналу связи имеется запаздывание, величина которого растет линейно от количества разрядов кодовых слов. Следовательно, начиная с некоторого значения увеличение числа разрядов кодера в действительности приводит к *снижению* точности оценивания из-за устаревания переданных данных. Это ставит под сомнение пригодность методов теории искажения (*rate distortion theory*) и сжатия данных от многих источников (*multiterminal data compression*) [52–54], основанных на объединении информации о процессе в большие блоки перед кодированием для систем реального времени. В отличие от [47, 48, 50], где рассматривались линейные стационарные системы первого порядка, результаты [51] относятся к нелинейным системам вида

$$x_{k+1} = f_k(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.6}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $n \geqslant 1$ — порядок системы, вектор-функция $f_k(\cdot)$ удовлетворяет при каждом $k = 0, 1, \ldots$ условию Липшица с константой L_k. Предполагается, что весь вектор состояния может быть точно измерен на стороне источника данных, и задача состоит в передаче результатов измерений через канал связи с пропускной способностью R битов на шаг дискретного времени. Таким образом, алфавит кодера имеет $M = 2^R$ символов. На каждом шаге k (без искажений и задержки) по каналу связи передается один символ s_k из данного алфавита, причем значение s_k может зависеть от всей предыстории $x_0, \ldots, x_k$ процесса. На основе полученной информации декодер строит оценку $\hat{x}_{k+1}$. Задача заключается в выборе функций кодирования-декодирования по минимуму предельной среднеквадратической ошибки оценивания $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{E}\|x_k - \hat{x}_k\|^2$ (здесь $\boldsymbol{E}$ — операция математического ожидания по множеству начальных значений $\{x_0\}$). Рассматривается и связанная задача — определить наименьшее значение R, обеспечивающее требуемую точность оценивания. В [51] предложены функции кодирования–декодирования для различных видов плотности распределения $p(x_0)$ начальной величины x_0. Так, для $p(x_0)$ с компактным носителем процедура основана на рекуррентном разбиении области, в которой может находиться x_k, начиная с известной области, которой принадлежит начальное состояние x_0, на M^k равных гиперкубов, $k = 0, 1, \ldots$ Индекс соответствующего гиперкуба s_k передается по каналу связи. Для среднеквадратической ошибки оценивания в этом случае в [51] получена следующая верхняя граница:

$$\boldsymbol{E}\|x_k - \hat{x}_k\|^2 \leqslant \phi^2 \left(\frac{\prod\limits_{j=0}^{k} L_j}{M^{\frac{k}{n}}} \right)^2, \tag{3.7}$$

где ϕ — независящая от k константа. Отсюда следует, что выполнения условия

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\prod\limits_{j=0}^{k} L_j}{M^{\frac{k}{n}}} = 0 \tag{3.8}$$

достаточно для получения нулевой предельной ошибки: $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{E}\|x_k - \hat{x}_k\|^2 = 0$. Выражение (3.8) показывает, что если пропускная способность канала связи превышает некоторое пороговое значение, то (при заданной последовательности $\{L_k\}$) можно обеспечить асимптотически точное оценивание состояния. Кроме того из оценки (3.7) следует, что скорость сходимости определяется через $M = 2^R$, поэтому бо́льшие значения R обеспечивают и более высокое быстродействие процесса оценивания. Для линейной стационарной системы выполнено $f(x_k) = Ax_k$, $L_k \equiv L$, где L — норма матрицы A. Тогда выражение (3.8) приводит к неравенству

$$R > n \log_2 L. \tag{3.9}$$

Условие (3.9) развито в последующих работах в виде *теоремы о скорости передачи данных* (*Data Rate Theorem*), рассмотренной далее в разделе 4.

В [55] рассматривается задача оптимизации по интегральному квадратичному критерию линейных стохастических систем при информационных ограничениях, вызванных кодированием измерений выхода объекта. Показано, что принцип разделения остается справедливым, поэтому оптимальным является линейный регулятор по оценке состояния объекта. Для получения требуемого результата вместо процесса наблюдения кодированию и передаче по каналу связи подвергается процесс *обновлений* (*innovations*), который в отличие от процесса наблюдения является гауссовским процессом с независимыми одинаково распределенными значениями, статистические свойства которого не зависят от управления. Это позволяет использовать хорошо развитые процедуры синтеза оптимальных векторных квантователей [56–58]. Кроме того передача процесса обновлений дает возможность учитывать на стороне приемника (декодера) только текущие значения принимаемого сигнала, а не его предысторию, как было бы при передаче сигнала измерений. Другой основной особенностью предлагаемого подхода является *центрóидность* (*centroid property*) оптимального векторного квантователя, которая позволяет рассматривать квантованную переменную как условное ожидание исходной случайной величины по отношению к подходящей σ-подалгебре. Это свойство удобно для использования метода наименьших квадратов.

Более подробно: в [55] рассматривается линейный дискретный объект

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{3.10}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^d$ — вектор состояния; $u_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления; $w_k \in \mathbb{R}^d$ — гауссов белый шум с нулевым средним и матрицей ковариаций Q; A, B — матрицы соответствующих размеров. Для w_k выполнено следующее «*условие неупреждения*»: последовательность $\{w_j, j \geqslant k\}$ не зависит от $\{x_j, u_j, w_{j-1}, j \leqslant k\}$ для всех $k \geqslant 0$. Рассматривается задача нахождения оптимального управления $\{u_k\}$, минимизирующего целевую функцию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{E}(x_k^{\mathrm{T}} G x_k + u_k^{\mathrm{T}} R u_k) \tag{3.11}$$

с заданными положительно полуопределенными матрицами G и R. Считаются выполненными стандартные условия управляемости пары (A, B), наблюдаемости пары $(A, G^{\frac{1}{2}})$ и, кроме того налагается условие на спектральную норму матрицы A: $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A) < 1$, где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наибольшее собственное число матрицы-аргумента. Последнее предположение используется в процедуре оптимизации длины кодового слова, обеспечивающей компромисс между точностью и запаздыванием в передаче данных. Эта процедура включает решение дискретного уравнения Ляпунова с матрицей A^N, где N — запаздывание в передаче данных (*communications delay*), зависящее от длины кодового слова и скорости передачи данных по каналу связи. Заметим, что под процессом обновлений в [55] понимается вынужденная составляющая реакции системы (3.10) на воздействие w_k. Поскольку в работе принято, что вектор состояния x_k измеряется без ошибок, эта составляющая может быть вычислена по результатам измерений.

В [24, 25] рассматривается задача линейно-квадратичного оптимального управления с целевой функцией вида (3.11), $G = G^{\mathrm{T}} \geqslant 0$, $R = R^{\mathrm{T}} > 0$, для объекта (3.10) с гауссовскими возмущениями w_k и начальным состоянім x_0, имеющим нулевое среднее и матрицу ковариаций K_{x_0}. В отличие от классической постановки, следуя [59], считается, что имеются ограничения на мощность сигнала, передаваемого по каналу связи между выходом объекта и регулятором. Показано, что для таких систем принцип разделения справедлив и линейный регулятор является оптимальным. В [24, 25] получено оптимальное соотношение между затратами на управление и затратами на передачу данных по каналу связи. Показано также, что неустойчивость объекта управления тесно связана с требованиями на пропускную способность канала связи: если скорость передачи данных по каналу ниже некоторой границы, то функция потерь неизбежно обращается в бесконечность и систему невозможно даже стабилизировать. В [24] рассматривается канал связи с аддитивным гауссовским белым шумом (*analog additive white Gaussian noise*, AWGN). Канал связи описывается выражением $b_k = a_k + v_k$, где a_k, $b_k \in \mathbb{R}^d$ — векторные входной и выходой сигналы, v_k — аддитивный шум. Считается, что $\{v_k\}$ — гауссовский процесс с независимыми одинаково распределенными значениями, нулевым средним и известной матрицей дисперсий K_v. Вводится *ограничение по мощности* передаваемого по каналу сигнала в виде $\boldsymbol{E}\|a\|^2 < d \cdot P$, где P — заданная величина. Согласно теореме Шеннона достижимая скорость передачи данных R по такому каналу определяется выражением

$$R = \max_{\operatorname{tr}(K_{a,k}) \leqslant d \cdot P} \frac{1}{2d} \log_2 \frac{\|K_{a,k} + K_v\|}{\|K_v\|}, \tag{3.12}$$

где $K_{a,k}$ — матрица ковариаций передаваемого сигнала a. Таким образом, имеется однозначная зависимость между величинами P и R. Оптимизация процесса управления достигается использованием *динамических* («*предсказывающих*») кодеров–декодеров (*устройств с памятью*), в которых строится предсказание значений процесса на основе прошлых измерений. Предсказывающий кодер (*predictive encoder*) давно известен и широко используется для передачи последовательных наборов данных [60]. В таких устройствах кодированию и передаче через канал связи подвергается *сигнал ошибки* между истинным состоянием процесса (объекта) и его наилучшим предсказанием, выработанным декодером. Предполагается выполненным так называемое «*условие равноосведомленности*» (*equi-memory condition*), согласно которому как кодер, так и декодер принимают решения на основе одной и той же информации [60]. Соблюдение этого условия является важным, так как дает возможность кодеру наблюдать за ошибкой между истинным состоянием объекта (известным на стороне кодера) и его оценкой, вырабатываемой декодером. В [24] требуется, чтобы состояние кодера включало значение выхода декодера на предыдущем шаге y_k. Таким образом, кодер должен располагать существенной информацией о состоянии декодера, т. е. должна присутствовать некоторая обратная связь между их выходами. Одной из возможностей является вычисление y_k на стороне кодера. Для этого кодеру должны быть переданы точные значения управляющего воздействия u_k, а закон управления должен быть инвертируемым. Встречаются ситуации, когда условие равноосведомленности оказывается излишним, так как «сам объект может действовать как связь» от регулятора к кодеру [24].

Исследования продолжены в [61], где рассматриваются стохастические системы управления, в которых имеется канал связи между измерительными устройствами и регулятором. Задача состоит в таком синтезе кодера, декодера и регулятора, чтобы обеспечить выполнение заданных целей управления. В частности, исследуется влияние канала связи для классической гауссовской линейно-квадратичной задачи. Приводятся условия, при которых выполнено свойство разделимости задач оценивания состояния и управления для оптимального синтеза. Находятся границы достижимого качества работы системы и показан свойственный для данной задачи компромисс между затратами на управление и затратами на передачу данных. В частности, показано, что оптимальная квадратичная функция потерь разбивается на два слагаемых: функции потерь при полной информации и функции потерь, вызванных ограниченной скоростью передачи данных через канал. [3]

Работа [26] посвящена задаче стабилизации с помощью обратной связи дискретного линейного стационарного детерминированного объекта при квантованных измерениях с насыщением. Указывается, что стандартным предположением в литературе по управлению с квантованием является то, что задан *фиксированный* квантователь, описывающий влияние конечной точности представления данных на поведение системы управления [12, 63, 64]. В [26] используется другая точка зрения: фиксируется только *число уровней* квантования, а другие параметры квантователя могут меняться в процессе работы системы. Именно такой подход позволяет достичь асимптотической стабилизации состояния равновесия системы. В [26] используется статический квантователь $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ с *чувствительностью* $\Delta > 0$ и *уровнем насыщения* $M \in \mathbb{Z}$, имеющий вид

$$q(x) = \begin{cases} M, & \text{если } \ x > (M+1/2)\Delta, \\ -M, & \text{если } \ x \leqslant -(M+1/2)\Delta, \\ \lfloor x/\Delta + 1/2 \rfloor, & \text{если } \ -(M+1/2)\Delta < x \leqslant (M+1/2)\Delta, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$ — функция округления вниз. Функция квантования векторной величины $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}^n$ понимается покомпонентно, т. е. считается, что для каждого компонента вектора состояния x_i имеется квантователь $q_i(x_i)$ с чувствительностью Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$. Отличительной особенностью квантователя (3.13) от описанного в [12] является наличие в (3.13) насыщения M.[4] Вводятся также *равномерные* (*uniform*) квантователи, имеющие одинаковые значения $\Delta_i = \Delta$.

В работе делается акцент на том, что имеется возможность изменять чувствительность квантователя (а не уровень насыщения) на основе текущих данных. В качестве мотивирующего примера приводится фотокамера с масштабированием изображения (*zooming*), имеющая фиксированное число пикселей. Следуя [65], рассматривается задача управления с информационными ограничениями в том смысле, что состояние системы известно не полностью, а известно лишь, к какому из фиксированного числа блоков квантования (гиперпараллелепипедов) принадлежит состояние объекта в данный момент времени. Предложенная в [26] стратегия управления делится на две стадии. На первой из них, поскольку начальное состояние объекта неизвестно, происходит уменьшение масштаба («*zoom out*») — увеличение параметра Δ так, чтобы «захватить» состояние объекта. Вторая стадия заключается в увеличении масштаба («*zoom in*»). На этой стадии параметр чувствительности Δ уменьшается, что

[3] См. также [62], где введены понятия эпсилон-энтропии сообщения, а также скоростей создания сообщений источником в случае, когда в момент восстановления сообщения после передачи его по каналу исходное сообщение известно или до момента времени, совпадающего с определяемым, или до момента времени, предшествующего ему. Такая постановка задачи может возникнуть как в теории передачи информации, так и в проблемах, связанных с управлением. В [62] показано, что для стационарных источников скорость создания сообщений всегда определена и в широком классе случаев реализуется на стационарных парах входного и выходного сообщений.

[4] Как видно из (3.13), величина M задает число элементов (целочисленного) алфавита кодирования сообщения, тем самым — количество битов данных R, передаваемых на каждом шаге.

позволяет асимптотически привести объект в нулевое состояние. Переход между возрастанием и уменьшением параметра Δ задается значением «*переменной масштабирования*» $z \in \{-1, 1\}$. В итоге, в [26] рассматривается следующая *гибридная* система, включающая линейный непрерывный объект и дискретную процедуру изменения чувствительности Δ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu\big(t, q\big(x\,(t)\,\big), \Delta\,(t)\big), \tag{3.14}$$

$$\Delta(t) = G\big(z, \lfloor t/\tau \rfloor\,, q\big(x(\lfloor t/\tau \rfloor\,\tau)\big), \Delta(\lfloor t/\tau \rfloor\,\tau)\big)\,, \tag{3.15}$$

где $\tau > 0$ — фиксированный параметр, шаг дискретности по времени. Уравнение (3.15), описывающее динамику параметра Δ, очевидным образом можно записать в форме разностного уравнения с дискретным временем $k = 0, 1, \ldots$ Поскольку правые части (3.14), (3.15) претерпевают разрыв, решения (3.14), (3.15) понимаются в смысле Филиппова [66, 67].

Рассмотрим закон управления вида

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad t < k_0\tau, \\ -Kq\big(x(t)\big), & \text{иначе}, \end{cases} \tag{3.16}$$

где q — равномерный квантователь с чувствительностью $\Delta(t)$, k_0 — некоторое положительное целое число. В [26] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрица K выбрана так, что все собственные числа матрицы $A - BK$ имеют отрицательные вещественные части. Тогда имеется стратегия управления* (3.15), (3.16) *такая, что при произвольном $x(0)$ и $\Delta(0) = 0$ траектории замкнутой системы* (3.14)–(3.16) *стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

Основная идея, благодаря которой обеспечивается асимптотическая устойчивость системы (3.14)–(3.16), состоит в итеративном уменьшении параметра чувствительности $\Delta = \Delta(t)$ умножением его на выбранный *масштабирующий множитель* (*scaling factor*) $0 < \Omega < 1$. Таким образом, на стадии увеличения масштаба уравнение (3.15) приводит к зависимости $\Delta(t) = \Omega^\nu \Delta(k_0\tau)$, где $(k_0+\nu)\tau < t \leqslant (k_0+\nu+1)\tau$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Множитель Ω и интервал квантования τ рассчитываются в зависимости от уровня насыщения M и максимального и минимального собственных чисел матрицы Q решения уравнения Ляпунова $(A - BK)^{\mathrm{T}}Q + Q(A - BK) = -D$ с некоторой матрицей $D = D^{\mathrm{T}} > 0$. Из доказательства теоремы следует, что сходимость $x(t) \to 0$ носит *экспоненциальный* характер. В начале процесса (на стадии уменьшения масштаба) параметр Δ должен расти, причем со скоростью, превышающей скорость расходимости собственных движений объекта, вызванной неустойчивостью матрицы A. Например можно использовать закон $\Delta(t) = e^{2\|A\|\lfloor t/\tau \rfloor \tau}$. Изложенный выше способ формирования $\Delta(t)$ в виде кусочно-постоянной (на интервалах длительностью τ) функции времени является реализацией так называемой *логики переключений с выдержкой по времени* (*dwell-time switching logic*) [68]. В [26] для систем дискретного времени рассматривается и другой подход, при котором $\Delta(t)$ изменяется каждый раз, когда $\|q(x)\|$ оказывается равной или меньше некоторого заданного уровня.

Описанный способ стабилизации предполагает использование достаточно большого (и фиксированного) уровня насыщения M. В [26] показано также, что обеспечить глобальную асимптотическую стабилизацию объекта (3.14) можно при существенно меньшем M (за счет выбора достаточно малого шага дискретности по времени

τ). При этом используется следующая процедура: если известно, что в данный момент времени состояние объекта принадлежит некоторому гиперпараллелепипеду (*rectilinear box*) и чувствительность Δ выбрана так, что переключающие гиперплоскости делят его на меньшие гиперпараллелепипеды, то на основе соответствующих квантованных измерений можно определить, в каком из меньших параллелепипедов находится состояние системы, т. е. уточнить оценку состояния.

Аналогичные результаты получены в [26] и для задач управления линейными *дискретными* объектами

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, \dots \tag{3.17}$$

Следует заметить, что для дискретного времени возникает дополнительное условие — объект (3.17) не должен быть «слишком неустойчивым», а именно должно выполняться неравенство $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \right) \leqslant 2$.

В [26] отмечено также, что если чувствительность Δ может иметь только конечное множество возможных значений, то можно достичь только *практической устойчивости*, а не глобальной асимптотической устойчивости.

В [26] рассмотрены и задачи *стабилизации по выходу*. Считается, что измеряться и использоваться при формировании управления может не весь вектор состояния x, а только выход объекта $y = Cx$, где C — некоторая $(p \times n)$-матрица, $p < n$. Для таких систем не удается использовать стадию уменьшения масштаба в начале процесса, поэтому для них обеспечена только *локальная* асимптотическая устойчивость. В работе показано, что глобальной стабилизации по выходу можно достичь с помощью более сложных, а именно — динамических законов управления. С этой целью в работе используется обратная связь по *оценке* $\bar{x}$ состояния объекта.

В [26] отдельно рассматриваются непрерывные системы с квантователем, имеющим уровень насыщения $M = 1$. Для таких систем синтезирован закон управления со скользящими режимами, обеспечивающий локальную асимптотическую стабилизацию (подробно рассмотрен случай систем со скалярными входом и выходом). Также в [26] обсуждается возможность перенесения полученных результатов на нелинейные системы.

В [69] предлагается оптимальный статический (*memoryless*) закон управления с квантованием для стабилизации линейных дискретных систем первого порядка. Следуя [70–72], рассматривается неустойчивый скалярный объект

$$x_{k+1} = ax_k + u_{k+1}, \quad |a| > 1, \quad k = 0, 1, \dots \tag{3.18}$$

Обратная связь описывается статической нелинейностью (с запаздыванием на такт):

$$u_{k+1} = \gamma(x_k). \tag{3.19}$$

Здесь $\gamma(\cdot)$ является *функцией квантования*, поскольку $\gamma(\cdot)$ кусочно-постоянна и имеет конечное число N точек разрыва. Ставится задача синтеза регулятора (3.19), такого чтобы почти для всех $x_0 \in [-1, 1]$ (т. е. с вероятностью единица) процесс x_k за конечное время попадал в интервал $[-1/C, 1/C]$ при некотором $C > 1$, названном «*коэффициентом сжатия*» (*contraction rate*), и оставался в этом интервале. В [69] предложено разбиение интервала состояний системы $[-1, 1]$ на N подмножеств, называемых «интервалами квантования» (*quantization interval*), которые необязательно являются интервалами. Усредненный по множеству начальных условий момент времени первого попадания в заданный интервал обозначен через T. Оптимальность понимается в том смысле, что если два параметра из T, N, C заданы, то третий не может быть улучшен (уменьшен). Поскольку в [69] не требуется, чтобы квантователь был интервальным, предложенная стратегия управления обеспечивает лучшее качество системы и связана с меньшей загрузкой канала, чем полученная в [70–72]. В [69] получено необходимое и достаточное условие существования стабилизирующей статической обратной связи с кодером и в качестве примера рассмотрен *демон Максвелла*.

Ряд интересных результатов получен в [73]. В частности, показано, что грубейший (*coarsest*) (или *с минимальной плотностью*) квантователь, который квадратично стабилизирует линейную дискретную систему со скалярным управлением, является *логарифмическим* и может быть получен решением специальной задачи синтеза линейно-квадратичного оптимального управления. Результат распространен на дискретное управление непрерывными системами с постоянным шагом дискретизации. Показано, что оптимальный интервал квантования зависит только от значения суммы неустойчивых собственных значений непрерывной системы и что связанный с этим оптимальный квантователь является *логарифмическим* с основанием, являющимся универсальной и независимой от системы константой. Такая схема дискретизации по времени и квантования по уровню отвечает концепции «наименее назойливого управления» (*minimal attention control*), введенной в [47]. Наконец, с отходом от требования квадратичной стабилизации в [73] показано, как синтезировать логарифмический квантователь с только *конечным* числом уровней квантования, достигая *практической устойчивости* замкнутой системы.

В [73] рассматриваются стабилизируемые неустойчивые линейные дискретные системы вида (3.17) со скалярным управлением, $\{x\} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Как известно, для них существует линейная статическая обратная связь по состоянию, обеспечивающая существование для замкнутой системы квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ с некоторой положительно определенной матрицей $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ (*квадратичная стабилизируемость* понимается в смысле существования такой функции и в других задачах). Ставится задача найти для заданной матрицы P множество значений управления $\mathcal{U} = \{u_i \in \mathbb{R} : i \in \mathbb{Z}\}$ и нечетную функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ («квантователь»), такие что для всех ненулевых $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\Delta V(x) = V\big(Ax + Bf(x)\big) - V(x) < 0$. Число уровней квантования считается неограниченным. Вводится понятие «*грубости*» («зернистости», *coarseness*) квантователя $f(x)$, характеризующее плотность интервалов разбиения пространства $\mathcal{X}$.[5] Получено, что оптимальным в указанном смысле является логарифмический квантователь, для которого уровни квантования, помимо нулевого, определяются рекуррентным соотношением $u_{i+1} = \rho u_i$, $i \in \mathbb{Z}$, где параметр $0 \leqslant \rho < 1$ вычисляется через матрицы A, B, P. Очевидно, что для устойчивого объекта найдется квадратичная функция Ляпунова, для которой $\rho = 0$. Кроме того параметр ρ инвариантен по отношению к преобразованию базиса уравнений объекта. Сигнал управления, без учета квантования, определяется по антиградиенту функции $V(x)$, что приводит к выражению $u = K_{GD}x$, где $(1 \times n)$-матрица коэффициентов регулятора $K_{GD} = -\dfrac{B^{\mathrm{T}}PA}{B^{\mathrm{T}}PB}$. Вычисленное таким образом воздействие квантуется, и

[5] Для равномерного квантователя такое определение соответствует *бесконечно большой*, а для квантователя с конечным числом уровней — *нулевой* плотности.

сигнал $f(u)$ подается на объект управления. Авторы [73] отмечают, что такой способ управления соответствует интуитивному представлению о том, что чем дальше состояние системы от заданного, тем менее точная информация об этом состоянии требуется. Поэтому чтобы направить движение системы в нужном направлении, достаточно использовать неточное управление. В [73] также замечено, что свойство масштабирования, которое лежит в основе логарифмического квантователя, присуще не только управлению с квадратичными функциями Ляпунова, но и любому другому, задающему полунормы, и, следовательно, результат [73] распространяется на управление по функциям Ляпунова более общего вида.

Полученный результат распространен в [73] на обеспечение устойчивости с *заданным показателем затухания* $0 < \alpha < 1$, которое выражается существованием у замкнутой системы квадратичной функции Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющей неравенству $V(x_{k+1}) < \alpha^2 V(x_k)$.

В [73] показана связь полученного решения с известным результатом по синтезу линейных квадратично-оптимальных регуляторов, согласно которому полюса замкнутой оптимальной системы совпадают с полюсами объекта управления, если последние устойчивы, и инверсны полюсам объекта управления в случае неустойчивости [74].

Рассматривается также задача оценивания состояния объекта (3.17) со скалярным выходом $y_k = Cx_k$. Без учета квантования наблюдатель описывается уравнением

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(C\hat{x}_k - y_k), \tag{3.20}$$

где $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ — оценка состояния объекта x_k, L — $(n \times 1)$-матрица параметров наблюдателя.

Показано, что результаты, полученные для задачи стабилизации, применимы и в этом случае, если также использовать логарифмический квантователь, на вход которого поступает сигнал рассогласования оценки $\varepsilon_k = C\hat{x}_k - y_k$, а не сигнал измерений y_k. Напомним, что аналогичная структура наблюдателя рекомендована в [24, 55] для задач управления с коммуникационными ограничениями. Соответствующие уравнения наблюдателя имеют вид

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + Lh_E(\varepsilon_k), \tag{3.21}$$

где $h_E(\cdot)$ — функция логарифмического квантователя.

Уравнения квантователя в обратной связи по состоянию и наблюдателя с квантованием рассогласования естественным образом приводят к закону стабилизации *по выходу*.

В [73] рассмотрена также задача дискретного управления линейными непрерывными объектами

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \tag{3.22}$$

где F, G — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times 1)$, соответственно, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния. Интервал дискретизации (квантования по времени) T берется постоянным, управление $u(t)$ считается кусочно-постоянным внутри интервалов, ограниченных моментами времени $t_k = kT$, $k = 0, 1, \ldots$ Очевидно, что (3.17) является дискретной моделью объекта (3.22) при $A = e^{FT}$, $G = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau$. В [73] ставится задача нахождения оптимального сочетания интервала дискретности и квантователя, обеспечивающих стабилизацию неустойчивого объекта при «наименьшей плотности» (*least dense*) выборки по времени и квантования измерений. Основание ρ оптимального квантователя для найденной так системы (3.17) зависит от интервала квантования T. В [73] получен следующий результат: оптимальный интервал квантования T^* удовлетворяет уравнению

$$T^* \sum_{\operatorname{Re} \lambda_i(F) > 0} \lambda_i(F) = \ln(1 + \sqrt{2}), \tag{3.23}$$

где $\lambda_i(F)$ — собственные числа матрицы F, а соответствующий оптимальный логарифмический квантователь имеет основание

$$\rho^*(T^*) = \sqrt{2} - 1. \tag{3.24}$$

Выражения (3.23), (3.24) устанавливают наличие «универсальных» (в рамках обсуждаемого подхода) постоянных, не зависящих от объекта: произведения оптимального интервала квантования на сумму неустойчивых полюсов объекта и основания логарифмического квантователя.

В [73] обсуждается и задача использования квантователей с *конечным* числом уровней (*«конечный квантователь»*). Показано, что при его использовании достигается *практическая устойчивость*. Вводится *конечный ρ-логарифмический квантователь* (*Finite ρ-Logarithmic Quantizer*) *порядка* N, у которого множество $\mathcal{U}_N = \{-u_0, -\rho u_0, \ldots, -\rho^{N-1} u_0,\ 0, \rho^{N-1} u_0,\ \ldots,\ \rho u_0,\ u_0\}$, где $0 < \rho < 1$, $u_0 \in \mathbb{R}$. Следуя [75–77], вводится ослабление понятия квадратичной стабилизируемости — *практическая квадратичная стабилизируемость*, согласно которому допускается сходимость траекторий к предельному циклу или хаотическому аттрактору в некоторой окрестности состояния равновесия. Более подробно, система (3.17) называется полуглобально практически стабилизируемой (*semiglobally practically quadratically stabilizable*), если существует квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$, где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ такая, что для любого компактного множества $\mathcal{C}$, содержащего начало координат, и любого β_s имеется статический регулятор в обратной связи по состоянию $f(x)$, зависящий от $\mathcal{C}$ такой, что $V(x_{k+1}) < V(x_k)$ для всех $x_k \in \mathcal{C} \setminus \Omega_s$ и $x_{k+1} \in \Omega_s$ всякий раз, когда $x_k \in \Omega_s$, $\Omega_s \subset \mathcal{C}$, где $\Omega_s = \{x \in \mathcal{X} : V(x) \leqslant \beta_s\}$. В [73] показано, что стабилизируемая система (3.17) является полуглобально практически стабилизируемой с помощью конечного ρ-логарифмического квантователя, имеющего произвольное $\rho < \rho^*$, и достаточно большое значение N. В [73] приводятся соотношения для выбора параметров ρ и N квантователя.

В [78, 79] находится нижняя граница плотности грубейшего (*coarsest*) квантователя, который квадратично стабилизирует линейную дискретную систему с двумя входами. Этот результат показывает, насколько можно улучшить ситуацию (с точки зрения снижения плотности квантования) за счет использования двух входов вместо одного для квадратичной стабилизации системы. Показано также, что оптимальный в указанном смысле квантователь получается как обобщение логарифмического оптимального квантователя работы [73] и является радиально-логарифмическим.

В [80] показана общая эквивалентность между стабилизацией системы с помощью аналогового регулятора в обратной связи, с одной стороны, и передачей данных по каналу с обратной связью на основе предложенного в [81,82] метода, с другой. Показано также, что достижимая скорость передачи данных выражается *интегралом Боде* (*Bode's Sensitivity integral*), которая указывает на фундаментальные ограничения в системах управления с обратной связью. Таким образом, открывается возможность применения методов теории управления при разработке систем передачи данных.

В [83] на основе обобщения результатов [73,84] предлагается метод стабилизации непрерывных линейных систем с постоянными параметрами через канал связи, обладающий ограниченной пропускной способностью. Наличие такого канала приводит к дискретизации сигнала в замкнутом контуре по времени и по уровню — данные, содержащие ограниченное число бит, передаются в дискретные моменты времени. В [83] предлагается способ определения верхней границы скорости передачи данных для стабилизации системы. В частности, решается задача синтеза дискретного регулятора для квадратичной стабилизации системы. Рассматриваются *статические* кодеры (кодеры без памяти — *memoryless*). Авторы [83] подчеркивают, что квадратичная стабилизация обеспечивается и для процессов непрерывного времени, что гарантирует требуемое поведение системы и внутри интервалов квантования. По мнению авторов [83], статические кодеры могут обеспечить не асимптотическую стабилизацию, а только попадание траекторий в ограниченную окрестность начала координат системы.

4. Фундаментальные границы скоростей обмена данными в системах управления и наблюдения

4.1. Математическая постановка задачи

Расмотрим объект, описываемый следующей математической моделью:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \quad x(0) = x_0; \tag{4.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + \chi(t). \tag{4.2}$$

Здесь $t = 0, 1, \ldots$ — время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ — вектор показаний сенсоров, $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ — внешнее воздействие, $\chi(t) \in \mathbb{R}^k$ — вектор шумов в сенсорах и A, B, C — постоянные вещественные матрицы соответствующих размеров. Начальное состояние x_0 неизвестно. Неуправляемый объект (4.1) неустойчив (матрица A имеет собственное число λ с $|\lambda| \geqslant 1$) и его требуется стабилизировать. Рассматриваем также близкую по методам исследования и результатам задачу построения достоверной оценки $\widehat{x}(t)$ текущего состояния $x(t)$. Оценка $\widehat{x}(t)$ строится в реальном времени, т. е. в момент t.

Показания сенсоров $y(t)$ передаются системе стабилизации/наблюдения через *дискретный стационарный канал* (ДСК) связи без памяти [85–88]. Такой канал воспринимает для передачи *дискретные сигналы* (*сообщения*) e из заданного конечного множества $\mathcal{E}$ — *входного алфавита* канала. Поэтому показания сенсора предварительно преобразуются *кодером* в форму, допускающую передачу:

$$e(t) = \mathfrak{E}[t, y(0), \ldots, y(t)] \in \mathcal{E}. \tag{4.3}$$

Это приводит к неизбежной потере данных, так как полное описание вектора $y(t)$ содержит бесконечно много битов информации. При передаче сообщение искажается

$e \mapsto s$, а, возможно, и теряется. Здесь s — элемент (конечного) *выходного алфавита* $\mathcal{S}$ канала связи. (Специальный элемент $\circledast \in \mathcal{S}$ символизирует потерю сообщения.) На основе данных s, полученных к текущему моменту, *декодер-регулятор* формирует управление

$$u(t) = \mathfrak{U}\left[t, s(0), s(1), \ldots, s(t)\right], \tag{4.4}$$

а *декодер-наблюдатель* — оценку текущего состояния

$$\widehat{x}(t) = \mathfrak{X}\left[t, s(0), s(1), \ldots, s(t)\right]. \tag{4.5}$$

Пояснение 4.1. В задаче оценивания регулятор (4.4) задан; для неуправляемого объекта $\mathfrak{U}[\cdot] \equiv 0$.

Как декодер, так и кодер подлежат построению. *Система стабилизации* образована кодером (4.3) и декодером-регулятором (4.4), а *система наблюдения* — кодером (4.3) и декодером-наблюдателем (4.5). Такую систему назовем *состоятельной*, если она обеспечивает достижение требуемой цели: стабилизирует неустойчивый объект (4.1) либо вырабатывает достоверную оценку его состояния. Задача состоит в определении условий (желательно, необходимых и достаточных), при которых построение такой системы возможно.

Эти условия зависят от свойств канала связи. Упоминавшаяся популярная модель такого канала — дискретный канал без памяти — предполагает, что доступны статистические данные о его работе в виде матрицы условных вероятностей

$$W(s|e) = \boldsymbol{P}\left[s(t) = s | e(t) = e\right]. \tag{4.6}$$

Другими словами, $W(s|e)$ — вероятность получить дискретный сигнал s на выходе канала при условия, что послан сигнал e. [6] Искомые условия фактически состоят в описании области стабилизируемости или наблюдаемости в пространстве параметров как объекта (4.1), (4.2), так и канала:

$$\left[A, B, C, \{W(s|e)\}_{e \in \mathcal{E}, s \in \mathcal{S}}\right]. \tag{4.7}$$

Пояснение 4.2. Частным случаем ДСК является дискретный *канал без помех*, т. е. канал, не теряющий и не искажающий сообщений: $\mathcal{E} = \mathcal{S}$, $s(t) = e(t)$; $W(s|e) = 1$ при $s = e$ и $W(s|e) = 0$ при $s \neq e$.[7] Так как «физическая природа» элементов e для рассматриваемых задач несущественна, то в этом случае связанная с каналом часть набора (4.7) сводится к числу элементов $|\mathcal{E}|$ алфавита канала.

4.2. Комментарии к математической постановке задачи

1. Для задачи стабилизации приведенная постановка подразумевает идеальный канал управления. [8] Другими словами, предполагается, что канал управления имеет неограниченную пропускную способность и передает сообщения мгновенно без

[6] Предполагается, что при условии $e(t) = e$ выход канала s независим от шумов в объекте (4.1), (4.2), начального состояния x_0 и сигналов, отправленных в другие моменты времени $\tau < t$.

[7] Из связанных с каналом неидеальностей эта модель принимает во внимание только эффект квантования данных. Другие традиционно учитываемые эффекты — потери, искажения и задержки при передаче.

[8] т. е. канал связи регулятора с актуатором в отличие от *канала наблюдения*, по которому показания сенсора передаются регулятору.

потерь и искажений. Это дает возможность абстрагироваться от подробностей передачи по этому каналу. Такая ситуация может иметь место, если регулятор и актуатор совмещены в пространстве.

2. В более общей постановке канал управления смоделирован явно как ДСК без памяти с входным $\mathcal{E}_u = \{e_u\}$ и выходным $\mathcal{S}_u = \{s_u\}$ алфавитами и матрицей переходных вероятностей $\{W_u(\cdot|\cdot)\}$. Рассматривая кодер этого канала как часть декодера-регулятора, уравнение последнего можно принять в виде

$$e_u(t) = \mathfrak{E}_u\left[t, s(0), s(1), \ldots, s(t)\right]. \tag{4.8}$$

Управление вырабатывается актуатором в соответствии с уравнением вида

$$u(t) = \mathfrak{U}_a\left[t, s_u(0), s_u(1), \ldots, s_u(t)\right]. \tag{4.9}$$

Система стабилизации образована кодером сенсора (4.3), декодером-регулятором (4.8) и декодером актуатора (4.9). Область стабилизируемости выделяется в пространстве наборов (4.7), дополненных матрицей $\{W_u(\cdot|\cdot)\}$ параметров канала управления. Иногда эта более общая постановка задачи сводится к предыдущей (см. комментарий 6 в подразделе 4.4).

3. Далее будет рассмотрен ряд других расширений постановки задачи, например каналы с бесконечным алфавитом, задержками и нестационарные каналы. В частности, коснемся ситуации, когда кодер сенсора извещается о результате текущей передачи $s(t)$ через канал связи.

4. Если не оговорено противное, то в (4.3)—(4.5), (4.8), (4.9) рассматриваются любые неупреждающие преобразования. Это полезно для выявления крайних пределов, достижимых в результате неограниченного наращивания вычислительных ресурсов. Реально доступные ресурсы в ряде случаев можно отразить, ограничивая выбор правой части в (4.3)—(4.5), (4.8), (4.9) принадлежностью к определенному классу. Например, иногда естественно рассматривать только стационарные статические кодеры сенсора и декодеры актуатора: $e(t) = \mathfrak{E}[y(t)]$ в (4.3) и $u(t) = \mathfrak{U}_a[s_u(t)]$ в (4.9).

5. В ряде случаев стабилизируемость/наблюдаемость в классе всех неупреждающих и в классе более реалистичных кодеров и декодеров равносильны (см. комментарий 5 из подраздела 4.4).

6. Математическое описание цели управления/наблюдения и ряд других деталей постановки задачи вариабельны и уточняются в дальнейшем обсуждении.

7. В общих чертах система управления/наблюдения *состоятельна*, если ошибка стабилизации $\|x(t)\|$ /наблюдения $\|x(t) - \widehat{x}(t)\|$ с течением времени остается ограниченной в разумном смысле, уточняемом далее. Для модели без шума $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$ обычно требуется сходимость к нулю при $t \to \infty$.

8. В рамках обсуждаемой темы, модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, во многих случаях стандартно сводятся [89] к модели, основанной на разностном уравнении (4.1), (4.2).

4.3. Общие комментарии к постановке задачи

Традиционный подход к проблеме состоит в разделении ее «управленческих» и «информационных» аспектов. Сначала исследователь абстрагируется от свойств канала, считая его способным передать неограниченный объем информации в единицу времени. Применительно к условиям стабилизируемости это, например, приводит к известному ответу: пара (A, B) должна быть стабилизирумой, а (A, C) — детектируемой. На практике на вход системы стабилизации, разработанной в рамках указанной абстракции, подается не выход сенсора $y(\theta)$, а результат его передачи через канал связи. Передача предусматривает квантование сигнала $y(\theta)$, его кодирование, собственно передачу, и декодирование. В этой части проблема трактуется как общая задача связи и решается методами общего назначения, ориентированными на абстрактные критерии качества передачи. Для учета факторов, обусловленных дискретностью некоторых составляющих контура управления, типично моделирование в виде компонент классической модели, например погрешностей квантования как добавочного шума сенсора (см. раздел 2).

Как уже отмечалось, этот традиционный подход, в целом, долго не давал существенных оснований для поиска альтернативы. В самых общих чертах этот подход, например, вполне уместен, если коммуникационные и вычислительные ресурсы «очень велики» по сравнению с ожидаемой потребностью либо нет существенных ограничений на их выбор и есть возможность для экспериментов, а требование эффективного использования этих ресурсов неактуально.

Ряд теоретических исследований формально высветил некоторые потенциально проблемные места обсуждаемого подхода и необходимость теоретической проработки вопроса о границах его применимости. Уже простое внесение устройства квантования в контур обратной связи способно трансформировать устойчивую динамику в хаотическую [12, 43, 44] и в определенном контексте сделать неприменимыми некоторые классические определения устойчивости [12, 43, 44, 48, 65]. [9] Этот подход может привести к существенной потере качества управления: даже если использован оптимальный (для классической постановки задачи) закон управления, а затем для передачи данных применен оптимальный способ квантования и кодирования, качество управления может оказаться существенно хуже того, что можно достичь в классе всех систем управления вида (4.3), (4.4) [91].[10]

Идея трактовки «информационной» части проблемы как общей задачи передачи информации, подлежащей решению методами "общего назначения", развитыми в теории информации, был подвергнут критическому анализу в ряде работ ([4, 48, 65, 92–100] и др.). Одно из соображений касается адекватности задачам управления традиционной практики и теории кодирования информации, опирающимся в значительной степени на идею блочного кодирования. При использовании блочного кода длины r информация, выбранная в момент t, кодируется в виде цепочки $(e_1, \ldots, e_r)$ сообщений e_i. В течение интервала времени $[t : t + r - 1]$ длительности r эти сообщения передаются друг за другом и инициировать передачу новых данных невозможно до момента $t+r$. Применение такого принципа в контуре обратной связи

[9] В [12], в частности, показано, что даже при идеальном измерении $y(t) = x(t)$ и отсутствии шумов как в объекте $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$, так и в канале связи $\mathcal{E} = \mathcal{S}, s(t) = e(t)$ система стабилизации (4.3), (4.4) с динамическим декодером (4.4) и статическим стационарным кодером (4.3) $e(t) = \mathfrak{E}[x(t)]$ неспособна обеспечить сходимость $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ из стандарного определения асимптотической устойчивости: сходимость отсутствует для всех начальных состояний за исключением точек множества нулевой лебеговой меры.

[10] В [91] рассмотрен аналог классической стохастической линейно-квадратичной задачи оптимизации с гауссовыми шумами в классе управляющих систем вида (4.3), (4.4) со статическими стационарными декодерами $u(t) = \mathfrak{U}[s(t)]$ в (4.4) и каналом связи без помех $\mathcal{E} = \mathcal{S}, s(t) = e(t)$.

означает разрыв контура на время r, что при наличии возмущений может привести к неприемлемым погрешностям стабилизации при большом r. К тому же итогу может привести и уменьшение длины кода r, так как это сопряжено с увеличением вероятности ошибочного декодирования [85, 87]. Здесь просматривается необходимость компромисса. Один из возможных подходов состоит в модификации классических постановок задачи передачи информации с учетом мотивов, навеянных задачами управления. С образцами такого рода можно ознакомиться, например, по [92, 99] и приведенному в них обзору, где исследовалась задача последовательного оптимального квантования марковского стационарного источника в режиме реального времени и применялся «компромиссный» критерий качества. Другой подход представлен в подразделе 4.1: «информационная» часть проблемы вообще не выделена в отдельную задачу и единственным критерием является итоговое качество управления.

Упомянутые обстоятельства и ряд теоретических фактов [98,101,102] делают естественным вопрос о том, в каком отношении и в какой степени традиционные методы кодирования информации адекватны или оптимальны применительно к задачам управления. Требуется ли разработка новых подходов или проблему можно решить за счет правильного применения известных методов «общего назначения»? Проекция этого вопроса в область теории касается, в частности, базовой характеристики канала: пропускной способности по Шеннону [85–88]. Она равна максимальной средней скорости (в битах/единицу времени), на которой можно передавать информацию со сколь угодно малой вероятностью ошибки. (Вероятность ошибки можно сделать сколь угодно малой, если воспользоваться надлежащим блочным кодом адекватной длины.) Одновременно указанная пропускная способность равна максимальной взаимной информации между входом и выходом канала связи:

$$\mathfrak{c} = \max_{\boldsymbol{P}(e)} \boldsymbol{I}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{I} := \sum_{e,s} \boldsymbol{P}(e \wedge s) \log_2 \frac{\boldsymbol{P}(e \wedge s)}{\boldsymbol{P}(e)\boldsymbol{P}(s)} \tag{4.10}$$

и $\boldsymbol{P}(e \wedge s) := W(s|e)\boldsymbol{P}(e), \boldsymbol{P}(s) := \sum_e \boldsymbol{P}(e \wedge s)$, а максимум берется по всем вероятностным распределениям на входном алфавите канала. Для многих стандартных задач, изучаемых классической теорией информации, имеющие отношение к делу свойства канала полностью определяются его пропускной способностью $\mathfrak{c}$. Сохраняется ли эта ситуация для задач управления? Если нет, какие новые характеристики требуются, для чего и за какие возможности отвечает в этой области шенноновская пропускная способность?

4.4. Базовый результат в случае дискретного канала связи без помех

В окончательной форме этот результат сложился как итог ряда работ, в которых используются формально разные постановки и предположения. Вместе с тем суть результата одна. Приведем и обсудим формулировку базового результата, отталкиваясь от случая канала без помех и опуская ряд подробностей. Детализации посвящен подраздел 4.5, в котором также приведен обзор публикаций.

Рассматриваем канал связи без помех: $\mathcal{E} = \mathcal{S}, s(t) = e(t)$. Его пропускная способность равна логарифму числа элементов алфавита канала:

$$\mathfrak{c} = \log_2 |\mathcal{E}| \quad (\text{битов/единицу времени}). \tag{4.11}$$

Всюду далее система управления (4.1), (4.2) предполагается стабилизируемой и детектируемой (в традиционном смысле).

Следующая консолидированная формулировка критерия стабилизируемости/наблюдаемости указывает фундаментальную границу скоростей передачи данных, для которых достижение требуемой цели возможно, и опускает ряд нюансов, разъясняемых далее в подразделе 4.5.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ — собственные числа матрицы A из (4.1)*, перечисленные с учетом их алгебраической кратности, и*

$$\eta(A) := \sum_{j:|\lambda_j|\geqslant 1} \log_2 |\lambda_j|. \tag{4.12}$$

Справедливы следующие утверждения.

i) Для существования стабилизирующих систему кодера (4.3) *и декодера-регулятора* (4.4) *необходимо, чтобы*

$$\eta(A) \leqslant \mathfrak{c}, \tag{4.13}$$

и достаточно, чтобы

$$\eta(A) < \mathfrak{c}; \tag{4.14}$$

ii) Пусть декодер-регулятор (4.4) *задан. Для существования кодера* (4.3) *и декодера-наблюдателя* (4.5)*, генерирующих достоверную оценку $\widehat{x}(t)$ состояния $x(t)$, неравенство* (4.13) *необходимо, а неравенство* (4.14) *достаточно.*

Как уже отмечалось в комментарии 7 из подраздела 4.2, в самых общих чертах неустойчивая система (4.1), (4.2) считается стабилизированной, а оценка ее состояния – достоверной, если погрешность стабилизации $\mathrm{err}(t) := \|x(t)\|$ (соответственно погрешность оценивания $\mathrm{err}(t) := \|x(t) - \widehat{x}(t)\|$) остается ограниченной с течением времени, а при отсутствии шумов $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Встречающиеся в литературе конкретные определения этих понятий вариабельны, зависят от контекста и обсуждаются далее.

Комментарии.

1. Условие (4.14) получается из (4.13) заменой нестрогого неравенства строгим. В этом смысле эти условия близки и тем самым являются необходимыми и почти достаточными условиями стабилизируемости и наблюдаемости. Далее подобные условия будем называть *точными* (*tight conditions*).

2. Строгое неравенство (4.14) не только достаточно, но и необходимо для стабилизируемости объекта в присутствии стохастических шумов в (4.1), (4.2) [97] и для экспоненциальной [103, 104] и асимптотической [105] стабилизируемости объекта без шума.

3. В (4.12) можно ограничиться суммированием только по сильно неустойчивым собственным числам $\lambda_j : |\lambda_j| > 1$.[11] Отметим также, что

$$\eta(A) = \log_2 \left|\det A|_{L_+}\right|,$$

[11] Всюду в статье считаем, что сумма по пустому множеству равна нулю.

где L_+— неустойчивое инвариантное подпространство матрицы A, т. е. инвариантное подпространство, отвечающее спектральному множеству $\sigma_+ := \{\lambda_j : |\lambda_j| \geqslant 1\}$, а $A|_{L_+}$ — сужение оператора A на L_+.

4. Теорема 2 верна не только для канала без помех, но и для целого ряда его обобщений. Хотя для обобщенных моделей канала правая часть $\mathfrak{c}$ неравенств (4.13) и (4.14) уже необязательно определяется согласно (4.11), общий смысл $\mathfrak{c}$ остается неизменным. Это среднее число битов информации, которое можно передать через канал связи за единицу времени.

5. По теореме 2, неравенство (4.13) необходимо для стабилизируемости и наблюдаемости в классе всех неупреждающих алгоритмов кодирования и декодирования. Этот класс содержит алгоритмы неограниченно растущей с течением времени вычислительной сложности (определяемой объемом используемой памяти, количеством операций в единицу времени и т. д.). В большинстве работ достаточность строгого неравенства (4.14) обоснована явным построением системы стабилизации/наблюдения ограниченной (алгебраической) вычислительной сложности.

6. Теорема 2 формально предполагает, что неидеальности канала управления пренебрежимы (предполагается, в частности, что канал имеет неограниченную пропускную способность), в связи с чем он явно не смоделирован. Простые рассуждения [96] позволяют распространить эту теорему на случай задачи стабилизации, в которой оба канала (наблюдения и управления) являются каналами без помех с ограниченной пропускной способностью. (В этом случае система стабилизации описывается сооотношениями (4.3), (4.8) и (4.9).) Утверждение i) теоремы 2 остается в силе, если в (4.13), (4.14) в качестве $\mathfrak{c}$ рассматривать минимальную из пропускных способностей упомянутых двух каналов: $\mathfrak{c} = \min\{\log_2 |\mathcal{E}|; \log_2 |\mathcal{E}_u|\}$.

Обсуждение теоремы 2 и величины $\eta(A)$ из (4.12). Эта величина имеет смысл **скорости роста энтропии** (неопределенности состояния) **разомкнутой системы** $x(t + 1) = Ax(t)$, измеряемой в битах/единицу времени. Точнее, речь идет о средней скорости увеличения объема информации, необходимо заключенного в описании текущего состояния системы с заданной и неизменной точностью. На этом фоне теорема 2 становится весьма прозрачной: для стабилизируемости/наблюдаемости нужно, чтобы канал был способен передавать информацию со скоростью, позволяющей компенсировать рост неопределенности относительно текущего положения системы.

Более подробно: при нарушении необходимого условия из теоремы 2 (т. е. если $\eta(A) > \mathfrak{c}$) канал связи неспособен передавать информацию со скоростью, необходимой для поддержания любой заданной точности описания состояния системы. Поэтому с течением времени представления декодера о текущем состоянии объекта обречены на неизбежное неограниченное ухудшение, вследствие чего неспособность декодера стабилизировать объект и построить состоятельную оценку текущего состояния выглядит совершенно очевидной. При выполнении достаточного условия $\eta(A) < \mathfrak{c}$ возможности канала, в принципе, позволяют удержать представления декодера о положении объекта в пределах ограниченной ошибки. Более того, ввиду некоторой избыточности, вызванной строгим неравенством, есть основания рассчитывать на возможность уменьшения погрешности. В результате вывод о возможности стабилизации объекта и построения состоятельной оценки не является неожиданным.

Интерпретацию величины $\eta(A)$ можно оправдать, отталкиваясь от понятия дифференциальной энтропии случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ с плотностью вероятности $p_X(x)$:

$$h(X) := -\boldsymbol{E} \log_2 p_X(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} p_X(x) \log_2 p_X(x)\, dx. \tag{4.15}$$

Эту энтропию можно рассматривать как меру информации, необходимой для описания вектора X с заданной точностью (на фоне известной плотности). Примерно $h(X) + nb + \log_2 \mathbf{Vol} B_0^1$ битов требуется для описания с точностью 2^{-b} [106]. Здесь $\mathbf{Vol} B_0^1$ — объем (мера Лебега) единичного шара B_0^1 пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть начальное состояние x_0 — случайный вектор, имеющий плотность распределения вероятности и конечную дифференциальную энтропию. Предположим для простоты, что матрица A не имеет устойчивых собственных чисел $|\lambda_j| \geqslant 1\ \forall j$. Элементарные вычисления (см., например, [97, 107]) приводят к следующим формулам, оправдывающим приведенную интерпретацию величины $\eta(A)$:

$$h[x(t+1)] = h[x(t)] + \eta(A), \qquad \text{где} \quad x(t+1) = Ax(t),\ t = 0, 1, \ldots \tag{4.16}$$

Приведенный аргумент подразумевает вероятностную модель объекта, а при наличии как неустойчивых, так и устойчивых собственных чисел опирается на согласие учитывать только неустойчивую часть системы.[12] Менее обременителен в этом отношении альтернативный подход, который апеллирует к понятию энтропии детерминированной динамической системы, инициированному работами Колмогорова [108, 109] и развитому впоследствии в нескольких направлениях (см. например, обзоры в [110–112]). В частности, в [113] метрическая энтропия Колмогорова трансформирована в более общее понятие топологической энтропии. В [114] последнее понятие адаптировано к контексту задач управления через каналы связи ограниченной пропускной способности и в терминах этой энтропии даны условия локальной стабилизируемости нелинейного объекта. Сходная программа реализована в [115], где за основу взята метрическая энтропия в виде, приданном этому понятию в [116], и установлены необходимые и достаточные условия стабилизируемости (в том числе робастной) и наблюдаемости нелинейного объекта. Вклад работ [114, 115] обсуждается в подразделе 4.7, посвященном нелинейным системам. Сейчас ограничимся фрагментом из [115], иллюстрирующим обсуждаемую величину $\eta(A)$.

Рассмотрим нелинейную (неуправляемую) динамическую систему:

$$x(t+1) = F\big[x(t), \omega(t)\big], \quad x(t) \in \mathfrak{X}, \qquad t = 0, 1, \ldots, \qquad x(0) \in \mathfrak{X}_0, \tag{4.17}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $\omega(t) \in \Omega$ — вектор, отражающий динамические неопределенности в системе, а $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$ и Ω — заданные множества. Эти множества и функция $F(\cdot)$ известны; начальное состояние x_0 и векторы $\omega(t)$ неизвестны; множество $\mathfrak{X}_0$ выражает априорные сведения о начальном состоянии. Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим через $\mathfrak{X}_k$ множество всевозможных[13] процессов $[x(0), \ldots, x(k)]$ в системе

[12] В общем случае $h[x(t+1)] = h[x(t)] + \log_2 |\det A|$ и $\log_2 |\det A| \neq \log_2 |\det A|_{L_+}| = \eta(A)$ (предполагаем, что $\det A \neq 0$). Однако рассматривая спектральный проектор π_+ на L_+ и «неустойчивую часть» $x^+(t) := \pi_+ x(t)$ вектора состояния, имеем $x^+(t+1) = A|_{L_+} x^+(t) \Rightarrow h[x^+(t+1)] = h[x^+(t)] + \eta(A)$.

[13] Т. е. отвечающих всевозможным $x(0) \in \mathfrak{X}_0$ и $\omega(t) \in \Omega$ и удовлетворяющих условию $x(t) \in \mathfrak{X}\ \forall t \in [0 : k]$.

(4.17); это множество выражает априорные знания о процессе. Множество $Q \subset \mathcal{X}_k$ назовем (k, ϵ)-сетью ($\epsilon > 0$), если любой процесс $x_a(\cdot) \in \mathcal{X}_k$ можно ϵ-аппроксимировать процессом $x_b(\cdot) \in Q$, т. е. $\|x_a(t) - x_b(t)\| < \epsilon \ \forall t = 0, \ldots, k$. Наименьшую мощность (число элементов) такого множества обозначим через $q(k, \epsilon)$. Если на фоне априорных знаний требуется довести точность описания процесса до ϵ, вопрос можно свести к описанию ближайшего элемента априорно вычислимого множества Q, для чего требуется $\log_2 q(k, \epsilon)$ битов информации. Если само описание рассматривать как процесс на интервале времени $[0 : k]$, то в среднем потребуется $(k+1)^{-1} \log_2 q(k, \epsilon)$ битов на шаг времени. Предел этой величины при $k \to \infty$ и $\epsilon \to +0$ назван в [115] *топологической энтропией* системы (4.17):

$$H\big[F(\cdot, \cdot), \mathcal{X}_0, \mathcal{X}, \Omega\big] := \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k+1} \log_2 \big[q(k, \epsilon)\big]. \tag{4.18}$$

Этот предел указывает среднее за шаг увеличение объема информации, необходимо содержащейся в описании текущего процесса с заданной точностью. Нужная интерпретация величины $\eta(A)$ обоснована следующим фактом [115]: для произвольной матрицы A, компактного множества $\mathcal{X}_0$, содержащего 0 внутри себя, и для $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ топологическая энтропия линейной системы $x_{t+1} = Ax_t$ равна $\eta(A)$:

$$H(A, \mathcal{X}_0, \mathbb{R}^n) = \eta(A). \tag{4.19}$$

4.5. Детали, модификации и обзор литературы

К первым работам, отчетливо обозначившим наличие фундаментальных границ скоростей передачи данных в задачах управления и оказавших существенное влияние на дальнейшее развитие этого направления, относятся [48, 65, 117, 118]. Содержание [65] охарактеризуем подробнее. Это представляет интерес, в частности, потому, что изученная там постановка задачи дополняет постановки многих последующих работ. Задача состояла в стабилизации неустойчивого линейного незашумленного объекта с непрерывным временем:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ t \in [0, \infty), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t). \tag{4.20}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ — измерение. Каналы наблюдения и управления передают сообщения e, выбираемые из алфавитов одинакового размера D, без искажений и с одинаковой скоростью: одно сообщение за время $\delta > 0$. В дискретные моменты времени r_i статический кодер $c_i = h[y(r_i)]$ трансформирует текущее измерение в последовательность $c_i = [e_1, \ldots, e_{l_i}]$ сообщений длины $l_i = l(c_i)$, выбираемой кодером. В момент $r_i + \delta l(c_i)$ последовательность c_i полностью достигает статического декодера-регулятора, который преобразует ее $d_i = g(c_i)$ в последовательность d_i (возможно, другой длины $l(d_i)$), отправляемую по каналу управления. В момент $r_{i+1} := r_i + \delta l(c_i) + \delta l(d_i)$ преобразованная последовательность достигает статического актуатора и используется для смены управления $u(r_{i+1} + 0) := k(d_i)$. Моменты r_i априори не заданы, для распознавания конца передачи применяется префиксное кодирование. Стабилизируемость понимается как возможность построения системы управления $h(\cdot), g(\cdot), k(\cdot)$, удерживающей траектории системы в любом априорно заданном шаре с центром в нуле при условии, что эти траектории начинаются достаточно близко от нуля.[14]

[14] Это свойство названо *containability*.

В [65] установлено, что для существования такой системы необходимо выполнение неравенств:

$$\sum_{i=0}^{\infty} D^{-m_i} \leqslant 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} D^{-n_i} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \tau^{-m_i-n_i},$$

где $m_i := l(c_i), n_i := l(d_i)$ и $\tau := \left|\det e^{\delta A}\right|$. (Первые два условия связаны с префиксным кодированием и представляют собой известное неравенство Крафта [87].) Если последовательности $\{m_i\}$ и $\{n_i\}$ имеют одинаковый набор элементов, то из указанных условий вытекает ([65, следствие 1]), что

$$\log_2 \left|\det e^{2\delta A}\right| \leqslant \log_2 D. \tag{4.21}$$

Это неравенство аналогично условию (4.13), если учесть, что правая часть равна объему информации, который можно передать от сенсора актуатору по имеющимся каналам связи за время 2δ, а левая часть указывает, насколько за это время возрастает топологическая энтропия разомкнутой системы.[15] Установленные в [48, 65] достаточные условия относятся к более специальной ситуации и, вообще говоря, не близки к (4.21).

В [117, 118] (более развернутое изложение представлено в [15]) показано, что для скалярного $x = y, u \in \mathbb{R}$ объекта (4.1), (4.2) без шума $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$ с дискретной моделью времени нестрогое неравенство (4.13) необходимо и достаточно для существования статических кодера (4.3) $e(t) = \mathfrak{E}[x(t)]$ и декодера-регулятора $u(t) = \mathfrak{U}[e(t)]$, обеспечивающих локальную устойчивость замкнутой системы в следующем (более слабом по сравнению с [48,65]) смысле: существует такое ограниченное множество S в фазовом пространстве системы и такое его непустое открытое подмножество $M \subset S$, что начинающиеся в M траектории не покидают S.[16] В случае многомерного линейного объекта с вещественно диагонализуемой матрицей A, скалярного управления $u \in \mathbb{R}$ и бинарного канала $\mathfrak{c} = 1$ установлены достаточные условия в виде следующего усиления неравенства (4.14): $n \max_j \log_2 |\lambda_j| < 1$.

В общем случае многомерного линейного объекта точные условия стабилизируемости/наблюдаемости через каналы связи без помех и с ограниченной пропускной способностью в разных постановках установлены в [28,51,96,97,99,104,119–122]. Этапные достижения серии исследований [28, 51, 96, 97, 104, 120, 121] в изучении задачи стабилизации в развернутой форме представлены в [96, 97, 104]; работы [51, 120, 121] предлагают связанные аналогичные результаты для задачи оценивания. Далее ограничимся характеристикой работ по стабилизации. Для этой серии характерна стохастическая постановка вопроса: начальное состояние x_0 из (4.1) — случайный вектор (необязательно ограниченный) с конечным вероятностным моментом; исследуется моментная устойчивость. В [96] рассмотрен скалярный процесс авторегрессии-скользящего среднего (*auto-regressive moving average*) при отсутствии шумов и при специальных начальных условиях (обнуление процесса в моменты, предшествующие началу эксперимента). В модели (4.1) последнему обстоятельству соответствует распределение начального состояния по специальному одномерному подпространству. Полученные точные условия асимптотической стабилизируемости $\boldsymbol{E}\|x(t)\|^r \to 0$ при

[15] Точнее, энтропия ассоциированной дискретной системы $x(t_{i+1}) = e^{2\delta A}x(t_i), t_i := 2\delta i$, в случае, когда A не имеет устойчивых собственных чисел.

[16] Это свойство названо в [15, 117, 118] *boundability*.

$t \to \infty$ не тождественны (4.14), хотя и имеют сходный смысл. Расхождение естественно связать с тем, что ограничение начального состояния подпространством размерности единица делает динамику разомкнутой системы без шума фактически одномерной и тем самым формулы (4.16), (4.19) — подлежащими коррекции. В [104] изучена экспоненциальная стабилизируемость в смысле достижения экспоненциальной моментной устойчивости $\sigma^{-rt}\boldsymbol{E}\|x(t)\|^r \to 0$ при $t \to \infty$ для общего многомерного объекта (4.1), (4.2) без шума $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$. Здесь $r > 0, \sigma > 0$ — заданные константы. Необходимые и достаточные условия стабилизируемости установлены в виде

$$\sum_{j:|\lambda_j|>\sigma} \log_2 \left|\frac{\lambda_j}{\sigma}\right| < \mathfrak{c}.$$

При $\sigma = 1$ это неравенство переходит в условие (4.14), а по модулю замены переменных $x(t) := \sigma^{-t}x(t), u(t) := \sigma^{-t}u(t), y(t) := \sigma^{-t}y(t)$ и параметров $A := \sigma^{-1}A$, $B := \sigma^{-1}B$ равносильно этому условию. В [97] установлен фундаментальный теоретический факт: квадратичная стабилизируемость $\sup_{t=0,1,2,\dots} \boldsymbol{E}\|x(t)\|^2 < \infty$ общего многомерного объекта (4.1), (4.2) со стохастическими шумами $\xi(t), \chi(t)$ равносильна, при выполнении ряда естественных технических предположений, выполнению строгого неравенства (4.14).

В [99, 122] изучены детерминистические постановки задачи. В частности, начальное состояние x_0 — неизвестный вектор из заданного открытого множества Λ_0. При отсутствии шумов $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$ система стабилизации/оценивания считается состоятельной, если соответствующая ошибка $\mathrm{err}(t) := \|x(t)\|$ (соответственно, $\mathrm{err}(t) := \|x(t) - \widehat{x}(t)\|$), во-первых, равномерно мала для малых начальных состояний $\lim_{x_0 \to 0} \sup_t \mathrm{err}(t) = 0$ и, во-вторых, с течением времени равномерно стремится к нулю $\lim_{t\to\infty} \sup_{x_0:\|x_0\|\leqslant r} \mathrm{err}(t) = 0\ \forall r > 0$. Также рассмотрен случай объекта с ограниченным возмущением $\sup_t \|\xi(t)\| < \infty$ и точным измерением $\chi(t) \equiv 0$. В этом случае требуется ограниченность ошибки $\sup_t \sup_{x_0:\|x_0\|\leqslant r} \mathrm{err}(t) < \infty$. Показано, что нестрогое неравенство (4.13) необходимо как для стабилизируемости, так и для наблюдаемости как возмущенного, так и невозмущенного объекта. Для объектов обоих типов в случае полного измерения $y(t) = x(t)$ и ограниченного (знание границы или ее оценки необязательно) множества Λ_0 установлена достаточность строгого неравенства (4.14) для стабилизируемости и наблюдаемости. В случае неуправляемого ($u(t) \equiv 0$) неустойчивого ($\exists j : |\lambda_j| > 1$) объекта (4.1) без шума ($\xi(t) \equiv 0$) показано, что система наблюдения со статическим стационарным кодером $e(t) = \mathfrak{E}[y(t)]$ неспособна обеспечить ограниченность ошибки наблюдения при $|\mathcal{E}| < \infty$. Для задачи стабилизации ситуация иная. В случае полного и точного наблюдения $y(t) = x(t)$ и ограниченной неопределенности начального состояния $\sup_{x_0\in\Lambda_0} \|x_0\| < \infty$ объект без шума можно стабилизировать, используя статический стационарный кодер, при условии, что пропускная способность канала достаточно велика [122].

Аналогичные постановки были исследованы в [119], где, однако, рассмотрен линейный объект с непрерывным временем (4.20) без устойчивых мод ($\Re\lambda_j \geqslant 0\ \forall j$). Управление изменяется в моменты t_i, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots, t_i \xrightarrow{i\to\infty} \infty$; шаг $t_{i+1} - t_i$ не постоянен и не ограничен никакими требованиями. В течение любого интервала $[t_i, t_{i+1}]$ передается (без искажений) один бит информации. [17] Как и в [99,122], начальное состояние x_0 неизвестно и принадлежит ограниченному множеству Λ_0 ненулевой

[17] Переходя к разностной модели, описывающей смену состояний $x(t_i)$ в моменты t_i, получаем в

меры. Показано, что для существования динамических кодера и декодера, обеспечивающих равномерную ограниченность ошибки стабилизации, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{\ln 2}\sum_j \lambda_j \leqslant \varliminf_{i\to\infty}\frac{i}{t_i}. \tag{4.22}$$

В случае диагональной матрицы A это неравенство одновременно достаточно, а замена в нем знака $\leqslant$ на $<$ дает достаточное условие равномерной асимптотической стабилизируемости $\lim_{t\to\infty}\sup_{x_0\in\Lambda_0}\operatorname{err}(t)=0$. Достаточность этого неравенства продемонстрирована и для объекта с ограниченным шумом.

Условие (4.22) аналогично по смыслу условию (4.13). Действительно, его левую часть

$$\frac{1}{\ln 2}\sum_j \lambda_j = \sum_j \log_2\left|e^{\lambda_j}\right| \xlongequal{(4.13),(4.19)} H(e^A,\Lambda_0,\mathbb{R}^n)$$

естественно интерпретировать как скорость роста энтропии разомкнутой системы $\dot{x}=Ax$, в то время как правая часть представляет собой среднюю пропускную способность канала связи.

В [97, 105, 122] также рассмотрен случай, когда доступная на данном шаге пропускная способность канала нестационарна: в дискретный момент t канал способен передать (мгновенно и без искажений) $R(t)$ битов информации. Тогда в (4.13), (4.14) в качестве $\mathfrak{c}$ следует взять среднюю пропускную способность канала $\mathfrak{c} := \lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{t=0}^{T-1}R(t)$. Подробнее: в [105] установлены точные условия равномерной асимптотической стабилизируемости $\lim_{t\to\infty}\sup_{x_0:\|x_0\|\leqslant r}\operatorname{err}(t)=0$ в форме (4.13), (4.14) для объекта без шумов $\xi(t)\equiv 0$, $\chi(t)\equiv 0$ с вещественно диагонализируемой матрицей A. В [97] получены точные условия квадратичной стабилизируемости $\sup_t \boldsymbol{E}\|x(t)\|^2<\infty$ объекта с шумами и произвольной матрицей A. В [122] установлена достаточность строгого неравенства (4.14) для наблюдаемости объекта без шума в случае точного и полного измерения $y(t)=x(t)$.[18]

Еще более общая детерминистическая модель канала связи рассмотрена в [103], где приняты во внимание не только возможные колебания доступной на данном шаге пропускной способности канала, но и задержки, потери и искажения данных при передаче.[19] Канал связи рассматривается как устройство, передающее сообщения с задержками и потерями. Пусть $b^+(t_0,t_1)$ — максимально возможное количество информации (в битах), переносимой передачами, инициированными и завершенными в течение интервала времени $[t_0 : t_1]$. В свою очередь, пусть $b^-(t_0,t_1)$ — то количество информации, которое гарантированно можно передать в течение этого ин-

---

отличие от [99,122] модель вида (4.1), (4.2) с нестационарными матрицей A и пропускной способностью канала $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}_i=(t_{i+1}-t_i)^{-1}$.

[18] В [105,122] свойства канала были ограничены существованием предела $\lim_{T\to\infty}T^{-1}\sum_{t=0}^{T-1}R(t)$. На взгляд авторов обзора, предложенные доказательства достаточных условий фактически использовали незначительные усиления этого свойства, не сформулированные явно. В [97] необходимые условия стабилизируемости даны в терминах $\liminf_{T\to\infty}T^{-1}\sum_{t=0}^{T-1}R(t)$. При обосновании достаточных условий алфавит канала выбран периодическим по времени.

[19] Последний фактор принят во внимание в ограниченном объеме: предполагается, что меры по его компенсации (например, в виде исправляющего ошибки кода) уже приняты и проявляются лишь в виде уменьшения фактической средней пропускной способности канала, т. е., в итоге, сообщения либо теряются, либо передаются без искажений.

тервала независимо от складывающейся ситуации. Основное требование к каналу из [103] — стабилизация средних значений этих двух величин к общему пределу $\exists \lim_{t_1 - t_0 \to \infty} (t_1 - t_0)^{-1} b^+(t_0, t_1) = \lim_{t_1 - t_0 \to \infty} (t_1 - t_0)^{-1} b^-(t_0, t_1) = \mathfrak{c}$. В терминах этого предела, имеющего смысл средней пропускной способности канала, получены точные условия экспоненциальной стабилизируемости объекта без шума в форме (4.14). В [103, 123] приведена серия примеров каналов, удовлетворяющих указанному требованию, и вычислена их средняя пропускная способность $\mathfrak{c}$. В частности, показано, что ограниченные временные задержки (в том числе нестационарные) в передаче данных не влияют на величину $\mathfrak{c}$, а потому и на условия (4.13), (4.14) стабилизируемости.[20]

В [124, 125] рассмотрена стохастическая модификация скалярного объекта (4.1) $x, u \in \mathbb{R}, A = a, B = b \in \mathbb{R}$ без шума $\xi(t) \equiv 0$ с точным измерением $y(t) = x(t)$: коэффициенты уравнения из (4.1) определяются $a = a[z(t)], b = b[z(t)]$ текущим состоянием $z(t) \in \{z_1, \dots, z_k\}$ несократимой стационарной цепи Маркова с конечным фазовым пространством и матрицей переходных вероятностей $T = (\boldsymbol{P}[z(t+1) = i | z(t) = j])_{i,j=1}^k$. Начальное состояние x_0 — случайная величина; текущее состояние цепи $z(t)$ известно кодеру и декодеру. При определенных технических предположениях установлено, что такой объект асимптотически стабилизируем по η-му моменту $\boldsymbol{E}|x(t)|^\eta \to 0$ при $t \to \infty$ через канал связи без шумов пропускной способности $\mathfrak{c}$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{c} > \eta^{-1} \log_2 \rho(\mathcal{A}^\eta T)$. Здесь $\mathcal{A}$ — диагональная матрица с элементами $|a(z_1)|, \dots, |a(z_k)|$ на диагонали и $\rho(\cdot)$ — наибольшее неотрицательное собственное число матрицы (существование которого гарантирует теорема Фробениуса–Перрона [126, гл. XIII, § 2]).

Работы [12, 15, 26, 61, 127–130] хотя и не сфокусированы на основной теме раздела — выявлении точной границы области стабилизируемости/наблюдаемости — проливают на нее дополнительный свет, освещая ситуацию вплоть до или в непосредственной близости от границы с одной из сторон. Некоторые из этих работ (например, [26, 127, 130]) к тому же внесли признанный вклад методического характера в указанную тему. В целом содержание многих из упомянутых работ выходит за рамки данного подраздела. Поэтому ограничимся лишь их соответствующей частью, а к некоторым работам возвратимся далее под другим углом зрения.

В [26, 127] для объекта без шума $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$ и канала без помех получены достаточные условия глобальной асимптотической стабилизируемости, а также наблюдаемости. В определенных случаях эти условия выходят на указанную в (4.13), (4.14) границу. Аналогичные исследования для объекта с внешним возмущением и применительно к усиленной устойчивости, учитывающей требование робастности по этому возмущению,[21] выполнены в [128]. В [130] получены достаточные условия ста-

[20] Это не противоречит хорошо известной возможной потере устойчивости вследствие внесения в контур обратной связи временнóй задержки (при заданном регуляторе). Так как речь идет не об устойчивости, а о стабилизируемости, изменение свойств канала (например, появление задержек) означает изменение условий задачи, что подразумевает возможность смены динамического регулятора. Приведенные в [103] аргументы показывают, что при выполнении строгого неравенства (4.14) возможно построение системы управления, стабилизирующей объект в присутствии произвольных и априорно неизвестных задержек передачи данных, ограниченных сверху известной константой. Отметим также, что задержки могут негативно отразиться на достижимом качестве стабилизации.

[21] Замкнутая система признается устойчивой, если существуют такие непрерывные, возрастающие и неограниченные функции $\gamma_i(\cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty), i = 1, 2, 3$, что $\gamma_i(0) = 0$, $\|x(t)\| \leqslant \gamma_1(\|x_0\|) + \gamma_2(\sup_t \|\xi(t)\|)$ и $\limsup_{t \to \infty} \|x(t)\| \leqslant \gamma_3 (\limsup_{t \to \infty} \|d(t)\|)$. Данные неравенства должны выполняться для любой траектории, момента времени и независимо от начальных условий. Обсуж-

билизируемости и предложена «асинхронная» схема стабилизации, согласно которой передача сообщений через канал связи и генерирование управлений производится с разной частотой.

Относящиеся к случаю скалярного объекта и статических стационарных кодера и декодера $e(t) = \mathfrak{E}[y(t)], u(t) = \mathfrak{U}[e(t)]$ разъяснения, касающиеся достижимых форм стабилизации скалярного объекта без шума, в том числе при приближении параметров системы к границе области стабилизируемости [15], можно найти в [12, 15, 117, 118, 129]. Опуская подробности, отметим, что в связи с конечностью множества используемых управлений в этом случае классическая асимптотическая устойчивость $\mathrm{err}(t) \to 0$ недостижима. Достижим лишь его ослабленный аналог: траектории, начинающиеся в некотором ограниченном множестве S, стремятся к меньшему инвариантному подмножеству $L \subset S$; в пределах последнего характерна хаотическая динамика. Результаты [15] указывают на то, что при приближении к границе области стабилизируемости множества S и L неизбежно сближаются, а хаотизация распространяется на всю «стабилизированную» часть фазового пространства S. Точнее, в [15] проведен анализ ситуации на границе области стабилизируемости в случае точного измерения $y(t) = x(t)$, канала без помех и статических стационарных кодера и декодера $e(t) = \mathfrak{E}[y(t)], u(t) = \mathfrak{U}[e(t)]$ со связными множествами уровня $\{y : \mathfrak{E}[y] = e\}$, $e \in \mathcal{E}$. Упомянутая граничная ситуация означает, что неравенство (4.13) выполнено со знаком равенства. Показано, что стабилизирующая система однозначно (с точностью до тривиальностей) определяется максимальным и минимальным значениям задействованных управлений $u : \mathbf{Vol}\{y : \mathfrak{U}[\mathfrak{E}(y)] = u\} \neq 0$, использует равномерное квантование состояния и обеспечивает инвариантность интервала с концами, определяемыми и пропорциональными упомянутым значениям, причем вне интервала траектории не ограничены. Этот интервал является минимальным инвариантным множеством, причем внутри него динамика замкнутой системы эргодическая. Отметим, что в менее стесненных обстоятельствах (т. е. в отдалении от границы) равномерное квантование в общем случае не является оптимальным выбором [73, 92, 99]. Например, с определенной точки зрения более предпочтительна логарифмическая шкала [73].

В [61] для линейного стационарного объекта с гауссовым шумом и дискретного канала связи без помех (а также стационарного непрерывного канала с аддитивным гауссовским шумом) исследованы ограничения, которые конечная пропускная способность канала накладывает не только на саму возможность стабилизации, но и на достижимое качество стабилизации в случае, когда она возможна. Попутно исследован вопрос о достижимом качестве наблюдения. Использованы стандартные среднеквадратические критерии качества. В технической части изучен поднимавшийся ранее в этом разделе вопрос: с какой скоростью растет с течением времени объем информации, необходимый для постоянного поддержания заданной среднеквадратичной точности D описания состояния разомкнутой линейной системы. При этом в отличие от охарактеризованных ранее асимптотических (по D) постановок вопроса, ответ получен для заданного D.

В случае шума в объекте (4.1) в [97, 119, 122] достаточность установленной границы области стабилизируемости была обоснована в ситуации, когда известны определенные характеристики шума (равномерные оценки [119, 122] или оценки вероятност-

дение этого определения можно найти в [131].

ных моментов [97]). В [132] показано, что это ограничение несущественно: в пределах указанной границы всегда возможно построение «универсальной» по отношению к шуму системы стабилизации. Она не зависит от параметров шума и обеспечивает ограниченную ошибку при любом равномерно ограниченном шуме. При этом точность стабилизации зависит от уровня шума. Для определенной подобласти внутри указанной границы аналогичная система, обеспечивающая робастную по внешнему возмущению стабилизацию, предложена и исследована в [128].

4.6. Стохастический канал связи

4.6.1. Вводные замечания

В предыдущем подразделе рассматривался случай, когда модель канала связи принимает во внимание только эффекты квантования и задержки при передаче данных. Третий традиционно учитываемый фактор — искажения при передаче — считался несущественным. Такой подход естествен на начальном этапе развития теории, но вместе с тем он контрастирует с классической теорией информации и связи, где ряд фундаментальных результатов касается искажений при передаче данных. Их учет при постановке задачи управления/наблюдения выглядит неизбежным шагом в развитии теории.

Классическая теория информации традиционно трактует канал связи как стохастическую систему, в простейшем случае без памяти, описываемую условной вероятностью распределения выхода канала при заданном входе.[22] Определение пропускной способности канала, т. е. количества информации, которое можно передать за единицу времени, имеет статус задачи. Классическая теория предлагает несколько ответов. Базовый из них — пропускная способность (*channel capacity*) по Шеннону (4.10). Она равна максимальной средней скорости, на которой можно передавать информацию со сколь угодно малой вероятностью ошибки. Другая характеристика — пропускная способность при отсутствии ошибок $\mathfrak{c}_0$ (*zero error capacity*) равна максимальной средней скорости, на которой можно передавать информацию с нулевой вероятностью ошибки [133, 134]. Известны другие понятия пропускной способности канала (см. например, [135, 136]), обслуживающие специальные случаи и потребности. Достаточно ли этих понятий для суждения о возможности стабилизации объекта и достоверной оценки его состояния? Если да, то за какие возможности отвечают те или иные понятия; если нет, то какие новые характеристики канала связи требуются?

Для канала связи с шумом традиционный интерес представляет изучение возможностей, вытекающих из наличия вспомогательного канала обратной связи, используемого для извещения кодера о результате передачи через основной канал [85,137,138]. В идеале канал обратной связи передает исчерпывающее извещение без искажений и задержек. Тогда уравнение кодера (4.3) принимает вид

$$e(t) = \mathfrak{E}[t, y(0), \dots, y(t), s(0), \dots, s(t-1)] \in \mathcal{E}. \tag{4.23}$$

Наличие совершенного канала информационной обратной связи позволяет кодеру быть в курсе текущих действий и представлений декодера, например, путем его

[22] Матрицей переходных вероятностей $W(\cdot|\cdot)$ в случае конечных входного и выходного алфавитов канала.

моделирования в соответствии с (4.4), (4.5). Это дает основание надеяться на возможность компенсации ошибок канала. Вместе с тем обсуждаемая обратная связь не позволяет увеличить скорость, на которой информация может передаваться со сколь угодно малой вероятностью ошибки по основному каналу без памяти (т. е. его шенноновскую пропускную способность) [49,139].[23] В то же время эта обратная связь способна поднять скорость безошибочной передачи [134], увеличить так называемую функцию надежности [142] и упростить процедуру кодирования информации [138]. Подробный обзор данной темы приведен в [138]. Общее обсуждение роли информационной обратной связи в задачах управления можно найти в [24, 99, 122, 143, 144].

Совершенный «обратный» канал может моделировать ситуацию, когда связь между кодером и декодером основного канала двусторонняя, причем мощность сигнала декодера существенно выше мощности кодера, что дает основание пренебречь ошибками передачи по обратному каналу. Примеры включают связь между спутником и наземной станцией или подводными автономными сенсорами и базовой станцией. Для управляемых систем передача информации от декодера кодеру не требует специальных средств (отдельного канала связи), так как произвольный объем информации может быть передан посредством управляющих воздействий на объект [101, 102, 107, 143, 145–147].

В отношении модели стохастического канала связи работы по определению фундаментальной границы скорости передачи данных в системах стабилизации/наблюдения можно разделить на две группы. В [98,101,102,107,132,143,146–151] рассматривалась общая модель стохастического канала, заимствованная из классической теории информации. Частные случаи такой модели рассматривались в [93,143,152–159]: в [143,152–154] — канал со стиранием (*erasure channel*), в [93,155,156] — двоичный симметричный канал (*bynary symmetric channel*) и в [157–159] — канал, теряющий случайное число заключительных битов в R-битовом пакете («канал с усечением», *truncation channel*).[24] Близкая к последнему случаю модель изучалась в [160] (канал, безошибочно передающий случайное число битов информации). Уже ввиду стохастической модели канала процесс в системе стабилизации/наблюдения является случайным и уместно применение вероятностных критериев: устойчивость с вероятностью единица (почти наверное), моментная устойчивость и устойчивость по вероятности. Результаты, относящиеся к этим трем случаям, имеют ряд индивидуальных особенностей и далее рассматриваются раздельно.

Для простоты изложения далее в данном подразделе считаем, что в задаче наблюдения рассматривается неуправляемый объект: $\mathfrak{U}(\cdot) \equiv 0$ в (4.4). В противном случае необходимо обсуждение нюансов, связанных с наличием или отсутствием информационной обратной связи.

4.6.2. Стабилизируемость и наблюдаемость с вероятностью единица

Объект без шума. В (4.1), (4.2) $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$, начальное состояние x_0 — случайный вектор, независимый от канала связи. Требуется обеспечить сходимость к нулю $\mathrm{err}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ ошибки $\mathrm{err}(t) := \|x(t)\|$, соответственно $\mathrm{err}(t) := \|x(t) - \widehat{x}(t)\|$ стабилизации/оценивания с вероятностью единица (почти наверное).

[23] В случае канала с памятью такая возможность, вообще говоря, имеется [137, 140, 141].

[24] Канал с усечением — обобщение классического канала со стиранием (*erasure channel*).

В этом случае *утверждения* i) *и* ii) *теоремы* 2 *остаются в силе, если в* (4.13), (4.14) $\mathfrak{c}$ — *шенноновская пропускная способность канала связи* [107, 143, 147, 148].

В [143] необходимость неравенства (4.13) установлена в случае общего канала с последействием, кодеров (4.3) без информационной обратной связи и в предположении конечности дифференциальной энтропии начального состояния x_0. Канал в этом случае задан входным и выходным алфавитами $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ (вообще говоря, бесконечными) и системой условных вероятностных распределений $\boldsymbol{P}(dw_t|v_0, \ldots, v_t, w_0, \ldots, w_{t-1}), t = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $\boldsymbol{P}(dw_t|v_0, \ldots, v_t, w_0, \ldots, w_{t-1})$ задает вероятность получения в момент t сигнала w_t на выходе канала при условии, что в моменты $\theta = 0, 1, \ldots, t$ посланы сигналы $v_0, \ldots, v_t$ и ранее получены сигналы $w_0, \ldots, w_{t-1}$ в моменты $\theta = 0, 1, \ldots, t-1$ соответственно. В (4.13), (4.14)

$$\mathfrak{c} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathfrak{C}_T, \qquad \mathfrak{C}_T := \max_{\boldsymbol{P}(V_0^T)} I(V_0^T; W_0^T),$$

где $V_0^T = (v_0, \ldots, v_T), W_0^T = (w_0, \ldots, w_T)$, $I(\cdot;\cdot)$ — взаимная информация и максимум берется по всем допустимым вероятностным распределениям на множестве $\mathcal{V}^{T+1} = \{V_0^T\}$.[25] Достаточность неравенства (4.14) установлена в [143] только для специального стационарного канала без памяти: канала со стиранием и полной информационной обратной связью. Такой канал с вероятностью $1-p$ передает R-битовое сообщение без искажений, а с дополнительной вероятностью p его теряет, причем потери независимы во времени и кодер о потерях извещается. Шенноновская пропускная способность этого канала $\mathfrak{c} = (1-p)R$. Сходный результат установлен в [154] при более сильном предположении о равномерной сходимости средней частоты потерь в канале со стиранием к пределу. Это предположение делает модель из [154] частным случаем рассмотренной в [103].

В [107, 147, 148] как необходимая, так и достаточная часть условий (4.13), (4.14) обоснована в общем случае дискретного стационарного канала связи без памяти с конечными входным и выходным алфавитами. (Шенноновскую пропускную способность такого канала дает формула (4.10).) Необходимость неравенства (4.13) обоснована для произвольного начального состояния, имеющего плотность распределения, и кодеров как с информационной обратной связью (4.23), так и без нее (4.3). В итоге показано, что эта связь не оказывает видимого влияния на области стабилизируемости и наблюдаемости объекта без шума. Необходимость обсуждаемого неравенства обоснована и для более слабых форм стабилизируемости/наблюдаемости. Например, неравенство (4.13) выполнено всякий раз, когда среднюю по времени погрешность стабилизации/наблюдения можно сделать ограниченной с ненулевой вероятностью $\boldsymbol{P}\big[\sup_T (T+1)^{-1}\sum_{t=0}^T \mathrm{err}(t) < \infty\big] > 0$. Необходимость неравенства $\mathfrak{c} \leqslant \eta(A)$ подчеркивает и тот факт, что при его нарушении $\mathfrak{c} > \eta(A)$ любой алгоритм стабилизации/наблюдения экспоненциально расходится с вероятностью единица, т. е. $\exists \alpha > 1 : \overline{\lim}_{t\to\infty} \alpha^{-t}\mathrm{err}(t) = \infty$ почти наверное, а вероятность значительной ошибки ограничена снизу величинами, независящими от выбора системы стабилизации/наб-

[25] В случае конечного алфавита $\mathcal{V}$ допустимы все распределения. В случае гауссова канала с аддитивным белым шумом ($\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}^s, \boldsymbol{P}(w_t|V_0^t, W_0^{t-1})$ — нормальное распределение со средним v_t и заданной матрицей ковариаций K) допустимы распределения, удовлетворяющие ограничению на мощность входного сигнала $\boldsymbol{E}\|v_\theta\|^2 \leqslant \rho\ \forall\theta = 0, \ldots, t$, где константа ρ задана. Другие случаи в [143] не разъяснены.

людения:
$$\varliminf_{t\to\infty} \boldsymbol{P}\Big[\mathrm{err}(t) \geqslant b(t)\Big] \geqslant 1 - \frac{\mathfrak{c}}{\eta(A)},$$
где $b(t) > 0, t = 0, 1, \ldots,$ — произвольная последовательность, для которой $\frac{\log_2 b(t)}{t} \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того

$$\boldsymbol{P}\Big[\mathrm{err}(t) \geqslant b\Big] \geqslant 1 - \frac{\mathfrak{c}}{\eta(A)} - \frac{1}{t} \times \frac{1 - h(x_0) + \mathfrak{c} + \frac{n}{2}\log_2\left(2\pi e \max\{b^2, b_0^2\}\right)}{\eta(A)} \quad \forall b > 0, t \geqslant 1.$$

Последняя оценка верна для объекта (4.1) без устойчивых мод $|\lambda_j| \geqslant 1\ \forall j$ в случае, когда начальное состояние имеет конечную дифференциальную энтропию $h(x_0)$ и ограничено $\|x_0\| \leqslant b_0$ (почти наверное). Аналогичное неравенство можно вывести из леммы 3.2 работы [143].

Хотя достаточность неравенства $\mathfrak{c} > \eta(A)$ для стабилизируемости/наблюдаемости обоснована в [107,147,148] при отсутствии канала информационной обратной связи, с этим каналом связан ряд нюансов в задаче наблюдения. При отсутствии такой связи можно добиться сходимости к нулю погрешности оценивания со сколь угодно высокой вероятностью. Однако это достигается за счет последовательного применения блочных кодов переменной и неограниченно растущей длины, что требует неограниченно растущих ресурсов памяти и быстродействия.[26] Данный недостаток преодолевается при наличии совершенной информационной обратной связи, т. е. в классе кодеров (4.23). В этом случае и при выполнении неравенства $\mathfrak{c} > \eta(A)$ можно построить систему наблюдения ограниченной (алгебраической) сложности, основанную на применении блочного кода фиксированной длины и обеспечивающей сходимось к нулю погрешности оценивания с вероятностью единица. Такая система описана явным образом за исключением блочного кода. Дело в том, что пригоден любой код, передающий данные на скорости ниже шенноновской пропускной способности канала с вероятностью ошибки не выше требуемой. Классическая теория информации гарантирует существование такого кода; конструирование кодов с характеристиками, близкими к теоретически достижимой границе, — стандартная задача теории кодирования (см., например, [161,162]). Таким образом, при наличии информационной обратной связи асимптотически точное оценивание можно обеспечить с вероятностью единица с помощью реалистичного наблюдателя равномерно ограниченной алгебраической сложности, использующего стандартные алгоритмы «общего назначения» блочного кодирования информации для передачи по каналу связи.

Этот вывод остается в силе и для задачи стабилизации, причем при отсутствии канала информационной обратной связи. В качестве предварительного результата в [107,147] показано, что для построения системы стабилизации ограниченной алгебраической сложности, основанной на блочном коде фиксированной длины и обеспечивающей асимптотическую стабилизацию объекта $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ с вероятностью единица, достаточно канала обратной связи со сколь угодно малой средней скоростью передачи информации.[27] Затем показано, что какие-либо специальные средства (канал связи) для этой передачи не требуются, так как обратную связь уже́ можно

[26]Следует подчеркнуть, что система наблюдения генерирует асимптотически точную оценку $\lim_{t\to\infty} \|\widehat{x}(t) - x(t)\| = 0$ в реальном времени, т. е. оценка $\widehat{x}(t)$ состояния $x(t)$ в момент t вырабатывается именно в этот момент.

[27] Достаточно, чтобы канал безошибочно передавал один бит за сколь угодно большое время.

организовать, в силу того что декодер-регулятор влияет на движение объекта, а сенсор наблюдает это движение. В результате декодер-регулятор способен закодировать сообщение, придав движению объекта определенную особенность, а кодер сенсора способен принять сообщение, детектировав и дешифровав эту особенность. Помимо [107, 147], различные схемы передачи информации[28] на основе этого принципа предложены в [101, 102, 143, 146].[29] В частности, в [146] показано, что таким образом можно передать произвольный объем информации в единицу времени, если шумы в объекте ограничены и известны их оценки.

Очевидно, обсуждаемые схемы передачи информации следует использовать с осторожностью, так как они несут потенциал противоречия основной цели управления. Например, наилучший результат стабилизации — точное удержание объекта в требуемой позиции, в то время как передача информации обсуждаемым методом требует отклонения от этой позиции. Зафиксированная в [107, 147] потребность в передаче сколь угодно малого объема информации в единицу времени обозначает направление к возможному компромиссу.

Эти результаты согласуются с результатами подраздела 4.4 ужé в силу того что использованная в подразделе 4.4 формула (4.11) дает шенноновскую пропускную способность канала связи без шумов. В целом, все эти результаты означают, что при условии пренебрежимой малости неопределенностей либо в канале связи, либо в объекте большинство представляющих практический интерес каналов, в принципе, способно обеспечить устойчивость в сильном смысле (т.е. с вероятностью единица).[30]

Объект с шумом. Последний вывод меняется на противоположный в более реалистичной ситуации, когда зашумлен как объект, так и канал связи. На фоне погрешностей канала сколь угодно (равномерно) малые аддитивные возмущения объекта неизбежно аккумулируются и рано или поздно приводят к сколь угодно большой погрешности стабилизации/наблюдения с вероятностью 1. Это верно для любой неупреждающей системы стабилизации/наблюдения, в том числе с полной информационной обратной связью (4.23) и неограниченной памятью, и для большинства представляющих практический интерес каналов. Впрочем, существуют и такие каналы, с помощью которых устойчивость с вероятностью единица все же можно обеспечить. Способность зашумленного канала связи обеспечить такую устойчивость тождественна его способности передавать информацию с нулевой вероятностью ошибки [151]. Числовой характеристикой последней способности служит пропускная способность при отсутствии ошибок [134]. К сожалению, для многих каналов она равна нулю [133].

Переходя к подробностям, уточним ситуацию. В (4.1), (4.2) последовательности шумов $\{\xi(t)\}$ и $\{\chi(t)\}$ независимы друг от друга, каждая образована взаимно независимыми и одинаково распределенными векторами, причем распределение шума в объекте $\xi(t)$ имеет плотность, начальное состояние x_0 — случайный вектор,

[28] В том числе в присутствии ограниченных шумов в объекте.

[29] Имеются в виду схемы, предназначенные для обслуживания систем стабилизации/наблюдения через каналы связи ограниченной пропускной способности. Вне этого контекста идея передачи информации посредством управляющих воздействий на объект выявляема и в более ранних работах, например посвященных проблеме децентрализованного управления линейным объектом [145, 163–165]

[30] Так как это большинство имеет ненулевую шенноновскую пропускную способность [138].

независимый от шумов, стохастический канал связи независим от объекта управления (т. е. от шумов и начального состояния). Шумы равномерно ограничены $\boldsymbol{P}\big[\sup_t \|\xi(t)\| \leqslant D\big] = 1, \boldsymbol{P}\big[\sup_t \|\chi(t)\| \leqslant D_\chi\big] = 1$, где $0 < D < \infty$ и $0 \leqslant D_\chi < \infty$. Требуется обеспечить ограниченность ошибки стабилизации/оценивания с вероятностью единица: $\boldsymbol{P}\big[\sup_t \mathrm{err}(t) < \infty\big] = 1$.

В этом случае *теорема* 2 *остается в силе, если в* (4.13)*,* (4.14) $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0$ *— пропускная способность канала связи при отсутствии ошибок*[31] [151].

Более того если неравенство (4.13) нарушено, $\eta(A) > \mathfrak{c}_0$, то для любой неупреждающей системы стабилизации/оценивания $\overline{\lim}_{t\to\infty} \mathrm{err}(t) = \infty$ с вероятностью единица [151]. Это верно при равномерно сколь угодно малых возмущениях объекта $D \approx 0$ и даже если нет шумов в сенсоре $D_\chi = 0$. Хотя существует каналы связи с ненулевой пропускной способностью при отсутствии ошибок, для многих практически важных каналов $\mathfrak{c}_0 = 0$ [133, 138].[32] Через такой канал неустойчивый линейный объект ($\exists j : |\lambda_j| > 1$) с вероятностью единица невозможно стабилизировать или наблюдать с ограниченной ошибкой. Если, напротив, выполнено неравенство (4.14) (при $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0$), то можно добиться равномерной ограниченности ошибки $\exists D_\infty < \infty : \boldsymbol{P}\big[\sup_t \|\mathrm{err}(t)\| \leqslant D_\infty\big] = 1$ (для ограниченного начального состояния) [166, §§ 7.7, 7.8].

Для некоторых каналов информационная обратная связь увеличивает пропускную способность при отсутствии ошибок: $\mathfrak{c}_{0F} > \mathfrak{c}_0$ [134]. Здесь правая и левая части — пропускные способности канала без такой связи и при наличии полной связи.[33] В условиях стабилизируемости (4.13), (4.14) всегда фигурирует пропускная способность $\mathfrak{c} := \mathfrak{c}_{0F}$ канала с обратной связью. Причины этого уже обсуждались: всегда есть возможность передавать информацию от декодера-регулятора кодеру сенсора путем управляющих воздействий на объект. Для задачи наблюдения (за состоянием неуправляемого объекта: $\mathfrak{U}(\cdot) \equiv 0$ в (4.4)) ситуация проще: в (4.13), (4.14) фигурирует пропускная способность $\mathfrak{c}_0$ в отсутствие канала обратной связи или при его наличии $\mathfrak{c}_{0F}$ в зависимости от того, есть ли он на самом деле (т. е. какое соотношение, (4.3) или (4.23), описывает кодер). Как следствие: для каналов с $\mathfrak{c}_{0F} > \mathfrak{c}_0$ существуют линейные объекты, которые при отсутствии специального канала информационной обратной связи можно стабилизировать, но нельзя наблюдать в разомкнутом состоянии (с ограниченной погрешностью).

Основной результат, рассмотренный здесь, был предварительно установлен в [152, 153] для канала со стиранием как с конечным [153], так и с бесконечным [152] алфавитами. Этот канал передает сообщение без искажения с вероятностью $1 - p$ и теряет его с вероятностью $p \in (0, 1)$, причем потери независимы во времени. Пропускная способность при отсутствии ошибок у этого канала равна нулю. Соответственно в [152,153] показано, что через такой канал неустойчивый линейный объект с вероятностью единица невозможно стабилизировать или наблюдать с ограниченной ошибкой. Причины этого в обсуждаемом случае прозрачны: так как отказы канала независимы во времени, по закону больших чисел с вероятностью единица рано или поздно возникает последовательность непрерывных отказов произвольно большой длины. В

[31] Краткие сведения, касающиеся этого понятия, приведены в Приложении 1.

[32] Некоторые примеры приведены в Приложении 1.

[33] Т. е. результат передачи по каналу связи $s(t)$ становится известен кодеру к моменту $t+1$ начала следующей передачи.

течение соответствующего интервала времени канал управления/наблюдения разомкнут, что в условиях непредсказуемых внешних возмущений объекта неизбежно приводит к большой погрешности стабилизации/наблюдения. В общем случае канала с произвольной формой искажения данных при передаче требуется более сложная аргументация [151].

Факт, созвучный обсуждаемому здесь, установлен в [157, 158] для специального канала связи, который передает двоичные пакеты фиксированной номинальной длины, но при этом теряет случайное число заключительных символов (канал с усечением). Впрочем в отличие от рассматриваемого здесь, в [157,158] изучен линейный объект без шума $\xi(t) \equiv 0, \chi(t) \equiv 0$ и усиленная, а именно равномерная устойчивость $\sup_t \sup_{x_0} \|\mathrm{err}(t)\| < \infty$, где второй sup взят по начальным состояниям из единичного шара. Показано, что для стабилизируемости объекта в этом смысле необходимо, чтобы $r_{\min} > \eta(A)$. Здесь $r_{\min}$ — максимальное число бит, которое не теряется в любой ситуации, т. е. с вероятностью единица. Так как $r_{\min}$ — пропускная способность безошибочной передачи расматриваемого канала, это условие совпадает с условием стабилизируемости, рассмотренным в данном подразделе. Вместе с тем есть и существенное различие, вызванное отличиями в модели объекта и концепции устойчивости. Для иллюстрации заметим, что потеря равномерной устойчивости не исключает, что большие погрешности стабилизации реализуются с очень малой вероятностью. Более того, именно эта ситуация имеет место, если необходимое условие $\eta(A) < r_{\min}$ из [157,158] нарушено, но $\eta(A)$ все же меньше шенноновской пропускной способности канала. Тогда $\lim_{t\to\infty} \mathrm{err}(t) = 0$ с вероятностью единица для надлежащей системы стабилизации [107]. Как следствие, вероятность равномерной стабилизации $\boldsymbol{P}\big[\sup_t \|\mathrm{err}(t)\| < d\big]$ в смысле [157, 158] можно сделать сколь угодно близкой к единице за счет выбора достаточно большого d. Результат [151] утверждает, что в этой ситуации для любой неупреждающей системы стабилизации $\overline{\lim}_{t\to\infty} \|\mathrm{err}(t)\| = \infty$ с вероятностью единица, если на объект действуют сколь угодно малые возмущения $\sup_t \|\xi(t)\| \leqslant \varepsilon \approx 0$ (почти наверное).[34]

В связи с невозможностью обеспечить ограниченную погрешность стабилизации/оценивания фокус критического анализа можно направить на: 1) модель канала или 2) критерий устойчивости. Первое направление в известной степени сопряжено с отходом от моделей, популярных в классической теории информации; с некоторыми примерами можно ознакомиться в [167–169]. Далее в данном подразделе сосредоточимся на обзоре второго направления и рассмотрим объект с шумом.

4.6.3. Моментная стабилизируемость и наблюдаемость

Эти понятия означают существование системы стабилизации/наблюдения, обеспечивающей ограниченность вероятностного момента ошибки $\sup_t \boldsymbol{E}\|\mathrm{err}(t)\|^\eta < \infty$. Выбор показателя η в классической «линейной» теории часто не играет существенной роли и определяется предположениями о шумах и начальном состоянии, а также соображениями удобства. Например, в задаче стабилизации системы (4.1), (4.2) линейным стационарным регулятором $u = Ky$ при квадратично суммируемых шумах и начальном состоянии $\sup_t \boldsymbol{E}\|\xi(t)\|^2 < \infty, \sup_t \boldsymbol{E}\|\chi(t)\|^2 < \infty, \boldsymbol{E}\|x_0\|^2 < \infty$ естественно потребовать $\sup_t \boldsymbol{E}\|\mathrm{err}(t)\|^2 < \infty$. Впрочем, можно выдвинуть формально более

[34] И при этом шумы $\xi(t)$ одинаково распределены в соответствии с некоторой плотностью.

слабое требование $\sup_t \boldsymbol{E}\|\mathrm{err}(t)\|^\eta < \infty$, где $\eta < 2$, однако это не изменит множества решений $\{K\}$.

В задаче стабилизации[35] через стохастический канал связи показатель η приобретает черты количественной оценки достижимой степени устойчивости. Это проявляется, например, в том, что для ряда дискретных каналов линейный объект с равномерно ограниченными (и, значит, имеющими ограниченные моменты любого порядка) шумами и начальным состоянием стабилизируем по η-му моменту лишь до некоторого предельного значения $\eta = \eta_*$ [98,101,102]. При смене канала или объекта η_* меняется. Увеличение η подразумевает улучшение асимптотики убывания вероятности больших уклонений $\|\mathrm{err}\| > d$ с ростом уровня толерантности $d \to \infty$. На фоне закона больших чисел это дает основания надеяться, что неизбежные (в силу результатов подраздела 4.6.2) большие систематические погрешности стабилизации встречаются реже и в этом смысле система стабилизирована лучше. Таким образом, предельное значение η_* можно интерпретировать как характеристику достижимого качества стабилизации. Область моментной стабилизируемости в пространстве параметров объекта и канала зависит от показателя момента η [98,101,102]. (В Приложении 2 изложенные в данном абзаце факты разъясняются на простом примере.)

В случае общего дискретного канала связи без памяти точные условия моментной стабилизируемости/наблюдаемости скалярного объекта получены в [98,101,102,170] в терминах введенного в [98] нового параметрического понятия пропускной способности канала, названного *anytime capacity*. Здесь второе слово означает «емкость», «производительность», «способность» (в текущем контексте — «пропускная способность»), а первое состоит из *any* («любой») и *time* («время, момент времени»). Дать краткий и одновременно адекватный перевод этого термина на русский язык затруднительно. Поэтому далее будем пользоваться термином «AT-емкость».

AT-емкость. В [98, 101, 102, 170] рассмотрен частный случай поставленной в подразделе 4.1 задачи: неустойчивый ($|\lambda| > 1$) скалярный объект

$$x(t+1) = \lambda x(t) + u(t) + \xi(t) \in \mathbb{R}; \quad x(0) = 0; \quad |\xi(t)| \leqslant D; \quad y(t) = x(t) \tag{4.24}$$

с известным уровнем шума D. Пакеты передаются от кодера декодеру через дискретный стационарный канал связи без памяти с входным $\mathcal{E}$ и выходным $\mathcal{S}$ алфавитами и матрицей переходных вероятностей $W(s|e), s \in \mathcal{S}, e \in \mathcal{E}$. В модели учтены только случайности, связанные с каналом; возмущения $\xi(t)$ рассматриваются как детерминированные. Обьект назовем *η-стабилизируемым/наблюдаемым*, если существует система стабилизации/наблюдения, для которой $\sup_t \boldsymbol{E}|\mathrm{err}(t)|^\eta \leqslant \Phi < \infty$ при любом возмущении $|\xi(\theta)| \leqslant D$.

Согласно [98, 101, 102, 170] η-стабилизируемость/наблюдаемость (почти) равносильна существованию системы передачи информации с определенными свойствами. Эта система и свойства нетрадиционны. Вместе с тем такая информационная система «извлекается» из любой η-стабилизирующей объект системы. И наоборот, имея такую информационную систему, можно η-стабилизировать объект.

Рассматриваемые в [98,101,102] системы передачи информации через канал связи состоят, как обычно, из кодера и декодера и устроены следующим образом.

[35] В задаче наблюдения ситуация аналогична.

- Из внешнего источника информации на вход кодера в каждый момент времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ поступает R-битовый пакет $P(t)$.

- В каждый момент времени t кодер посылает сообщение $e(t)$ через канал. Это сообщение формируется на основе всей доступной кодеру информации.[36]

- В каждый момент $t = 0, 1, 2, \ldots$ декодер строит оценки $\widehat{P}(\theta|t)$ всех ранее отправленных пакетов $P(\theta), \theta = 0, \ldots, t$ исходя из поступивших по каналу сообщений $s(0), \ldots, s(t)$.

Таким образом, работа с данным пакетом $P(\theta)$ продолжается номинально бесконечное время $t \geqslant \theta$, а его текущую версию разрешено пересматривать бесконечно много раз. Этим данная схема отличается от, например, блочного кодирования, при котором работа с пакетом ограничена временем обработки кодирующего пакет блока, а полученная в результате версия окончательна.

Рассматриваемая система *достигает* (*равномерного*) *уровня надежности* $\alpha > 0$, если ошибка неверного декодирования фиксированного пакета убывает α-экспоненциально с ростом времени:

$$\boldsymbol{P}\Big[\exists \theta \leqslant \tau : \widehat{P}(\theta|t) \neq P(\theta)\Big] \leqslant K 2^{-\alpha(t-\tau)} \qquad \forall t, \tau : \tau \leqslant t. \tag{4.25}$$

Здесь константа K не зависит от t, τ и $P(\theta)$. Супремум $C_{any}(\alpha)$ скоростей R [37], на которых информацию можно передать с уровнем надежности α, назван в [98, 101, 102] αAT-емкость (α-*anytime capacity*) канала. (Если такая передача невозможна, то $C_{any}(\alpha) := 0$.)

Предположим, что имеет место полная информационная обратная связь. Если объект (4.24) *η-стабилизируем* ($\eta > 0$), *то* $C_{\text{any}}(\eta \log_2 |\lambda|) \geqslant \log_2 |\lambda|$. *Обратно если это неравенство выполнено в усиленной форме* $\exists \varepsilon > 0 : C_{any}(\eta \log_2 |\lambda| + \varepsilon) > \log_2 |\lambda|$, *то объект* (4.24) *$\eta$-стабилизируем* [98, 101, 102].

В [98,170] сходные результаты установлены для задачи наблюдения. В [98,101,102] указано на возможность ослабления предположения о наличии полной информационной обратной связи.

Информационная система, достигающая (в пределе) необходимого уровня надежности $\eta \log_2 |\lambda|$ на требуемой скорости $\geqslant \log_2 |\lambda|$, в определенном смысле «содержится» в любой η-стабилизирующей объект системе, а предложенные в [98, 101, 102] доказательства основаны на ее явном «извлечении». Наоборот, предложенная η-стабилизирующая объект система непосредственно использует обсуждаемую нетрадиционную схему передачи информации. Хотя построение такой схемы — задача нетрадиционная, по постановке она ближе к классическим задачам теории передачи информации, чем исходная задача стабилизации неустойчивого объекта. Это дает основание надеяться на возможность адаптации и применения методического потенциала классической теории информации. С образцами можно ознакомиться в [98], где,

[36] Она включает $P(0), \ldots, P(t)$, а в случае полной информационной обратной связи еще и $s(0), \ldots, s(t-1)$.

[37] Напомним, что каждый пакет $P(t)$ содержит R битов. Расширенное определение AT-емкости «работает» не только с целыми, но и с дробными скоростями R; определенная таким образом пропускная способность может принимать любые вещественные значения $c \geqslant 0$. Для краткости соответствующие детали в данном тексте опущены.

например, использован адаптированный классический метод случайного кодирования [171, 172].

Известно [98, 170], что $\mathfrak{c}_0 \leqslant C_{any}(\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$ и $C_{any}(\alpha) \to \mathfrak{c}$ при $\alpha \to +0$, где $\mathfrak{c}$ — шенноновская пропускная способность канала и $\mathfrak{c}_0$ — его пропускная способность при отсутствии ошибок. AT-емкость вычислена для канала со стиранием[38], передающим R-битовые пакеты, $C_{any}(\alpha) = \frac{R\alpha}{\alpha + \log_2[(1-p)(1-2^{\alpha}p)^{-1}]}$ и канала с аддитивным белым гауссовым шумом и ограничением на мощность входного сигнала, для которого AT-емкость не зависит от уровня надежности α и равна шенноновской пропускной способности. AT-емкость также найдена для некоторых каналов, комбинирующих черты указанных двух [173, 174], и простейшего канала с памятью: канала с аддитивным белым гауссовым шумом, ограничением на мощность входного сигнала и марковским процессом перехода из одного из двух возможных состояний канала в другое (модель Гильберта-Эллиотта) при полной информационной обратной связи, охватывающей состояние канала [175]. В случае общего дискретного канала связи без памяти AT-емкость связана с экспонентой вероятности ошибки для блочных кодов $E(R)$[39] формулой $C_{any}[E(R)\log_2 e] \geqslant R\log_2 e \ \forall R < \mathfrak{c}$ [98], которая может быть использована для оценки $C_{any}(\cdot)$ снизу, если функция $E(\cdot)$ известна.

В общем случае формула[40] для $C_{any}(\cdot)$ отсутствует; идеи практической реализации ограничены применением классического метода случайного кодирования и подразумевают доступ кодера и декодера к общему источнику случайности. В рассматриваемом контексте присущая случайным кодам повышенная сложность усугубляется необходимостью работы с массивами данных неограниченной длины. По своему определению, предложенная система передачи информации имеет неограниченно растущую с течением времени вычислительную сложность: растущие память и число операций, выполняемых в единицу времени (и связанных с обработкой неограниченно растущего файла оценок ранее полученных пакетов). В общем случае и явным образом возможности по ограничению сложности не изучены.[41]

Конструктивная моментная стабилизация и оценивание. В [93,155,156] рассматривалась задача оценивания состояния $x(t) \in \mathbb{R}$ неустойчивого $|\lambda| > 1$ неуправляемого $u(t) \equiv 0$ скалярного линейного объекта (4.24) через двоичный симметричный канал связи. Этот канал передает однобитовые пакеты $e(t) = 0, 1$ без искажения с вероятностью $p \in (0, 1)$ и с дополнительной вероятностью $1 - p$ инвертирует их $s(t) = e(t) + 1 \mod 2$. Инверсии независимы во времени; кодер о них извещается. Предложенные алгоритмы оценивания описаны явно во всех деталях и используют

[38] Его описание дано в Приложении 2. В случае полной обратной связи формула для AT-емкости вытекает из основного факта, изложенного в Приложении 2, и основного результата данного подраздела.

[39] Напомним, что $E(R) = \overline{\lim}_{N\to\infty} -\frac{\ln p_{\text{err}}(N)}{N}$, где $p_{\text{err}}(N)$ — наилучшая (т. е. наименьшая) вероятность неверного декодирования при передаче информации со скоростью R, достижимая с помощью блочных кодов длины N.

[40] Например, аналогичная (4.10), т. е. сводящая вычисление AT-емкости к решению конечномерной экстремальной задачи.

[41] При выполнении (4.25) пакеты в конце концов декодируются правильно, т. е. $\forall \theta \ \exists \ t_\theta \geqslant \theta$: $P(\theta) = \widehat{P}(\theta|t) \ \forall t \geqslant t_\theta$ с вероятностью единица, а ожидаемая длина $\boldsymbol{E} d_t$ подлежащей дальнейшим исправлениям части файла оценок $d_t := \min\{d : \widehat{P}(\theta|t) = P(\theta) \ \forall \theta \leqslant t - d\}$ ограничена по t. Некоторые соображения, касающиеся распознавания d_t декодером, изложены в [98] для канала со стиранием (определение которого дано в Приложении 2).

вспомогательный файл, длина которого меняется с течением времени и формально не ограничена. В [93] выведены условия на параметры объекта и канала, при выполнении которых алгоритм обеспечивает ограниченность ожидаемых значений ошибки $\boldsymbol{E}|x(t) - \widehat{x}(t)|$ и длины вспомогательного файла.

В [157–159] точные конструктивные условия моментной стабилизируемости получены для скалярного объекта и канала связи с усечением. Модель канала мотивирована в [159] приложениями, относящимися к мобильной радиосвязи. По каналу отправляются $\overline{r}$-битовые пакеты $e = (b_1, \ldots, b_{\overline{r}}), b_i = 0, 1$, адресата достигает случайное число $r(t) \in [r_{\min}, \overline{r}]$ первых битов $s = (b_1, \ldots, b_{r(t)})$, а последующие биты теряются. Канал стационарен и не имеет памяти: величины $r(t)$ независимы и одинаково распределены. В (4.24) $\lambda = \lambda(t)[1 + z_a(t)]$ и $\xi(t) = d(t) + z_f(t)$. Здесь $z_a(t)$ и $d(t)$ — случайные ограниченные возмущения $|z_a(t)| \leqslant \overline{z}_a < 1, |d(t)| \leqslant \overline{d}$, величины $\lambda(t)$ взаимно независимы и одинаково распределены и $\{z_f(t)\}$ — выход каузального нелинейного оператора с входом $\{x(t)\}$, удовлетворяющего условию $|z_f(t)| \leqslant \overline{z}_f \sup_{\theta=t-\rho,\ldots,t} |x(\theta)|\ \forall t$ с некоторыми $\overline{z}_f < 1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. Оценки $\overline{z}_a, \overline{d}, \overline{z}_f$ и ρ известны; в момент t кодеру становится известно $x(t), \lambda(t)$ и $r(t-1)$. Последнее означает, что имеет место полная информационная обратная связь. Исследуется моментная робастная устойчивость, означающая, что $\sup_t \boldsymbol{E} \sup_{x(0)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |x(t)|^\eta < \infty$, причем $\boldsymbol{E} \sup_{x(0)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |x(t)|^\eta \to 0$ при $t \to \infty$, если $\overline{d} = \overline{z}_f = 0$, т. е. в объекте (4.24) нет аддитивного шума. При определенных технических предположениях установлены условия стабилизируемости. В случае $\overline{z}_a = \overline{d} = \overline{z}_f = 0$ (т. е. для объекта $x(t+1) = \lambda(t)x(t) + u(t)$) эти условия необходимы и достаточны и сводятся к неравенству

$$\boldsymbol{E}r(t) > \underbrace{\boldsymbol{E}\log_2|\lambda(t)|}_{\mathfrak{c}} + \frac{1}{\eta}\log_2\left[\boldsymbol{E}2^{\eta[\boldsymbol{E}r(t)-r(t)]}\right] + \frac{1}{\eta}\log_2\left[\boldsymbol{E}2^{\eta[\log_2|\lambda(t)|-\mathfrak{c}]}\right]. \tag{4.26}$$

В общем случае установлена достаточность усиленного и дополненного условия (4.26). Система робастной стабилизации, включая код для передачи данных по каналу, описана явно и имеет равномерно ограниченную алгебраическую сложность. Необходимые условия стабилизируемости распространены на некоторые многомерные стохастические системы (4.1) без аддитивного шума (в (4.1) $A = A(t)$ — случайная матрица со специальными свойствами).

4.6.4. Стабилизируемость и наблюдаемость по вероятности

Эти свойства означают возможность обеспечить ограниченность ошибки стабилизации/оценивания по вероятности: для любого $p \in (0, 1)$ найдется уровень толерантности $B = B(p) > 0$, соблюдаемый с вероятностью не ниже p в любой момент времени: $\boldsymbol{P}\big[\|\mathrm{err}(t)\| < B\big] \geqslant p\ \forall t$. Определение созвучно стандартному понятию сходимости по вероятности и описывает слабейшую из рассмотренных форм устойчивости.[42] Вместе с тем это определение правильно разделяет устойчивые и неустойчивые системы при классической линейной постановке задачи [132, 149].[43]

[42] Ограниченность ошибки почти наверное или в смысле вероятностного момента влечет ее ограниченность по вероятности.

[43] Например, при естественных технических предположениях линейная обратная связь $u = Kx$ стабилизирует объект (4.1) по вероятности в том и только в том случае, когда собственные числа

Применительно к стабилизируемости и наблюдаемости по вероятности утверждения i) и ii) теоремы 2 *остаются в силе, если в* (4.13), (4.14) $\mathfrak{c}$ — *шенноновская пропускная способность канала связи* [98, 101, 102, 132, 149].

Для скалярных линейных объектов (4.24) с шумом, равномерно ограниченным известной границей, этот факт установлен в [98, 101, 102] в рамках уже обсуждавшейся теории AT-емкости. Дополнительно показано, что при наличии канала совершенной информационной обратной связи для существования системы стабилизации со свойством $\boldsymbol{P}\big[\|\mathrm{err}(t)\| > B\big] \leqslant f(B)\ \forall t, B \geqslant 0$, где $f(\cdot)$ — заданная функция, определяющая желаемую скорость убывания вероятности большой ошибки, необходимо выполнение при некотором $K > 0$ неравенства $C_{g-any}(g) \geqslant \log_2 |\lambda|$, где $g(d) := f(K|\lambda|^d)$. Величина $C_{g-any}(g)$ определена аналогично $C_{any}(\alpha)$ с заменой в (4.25) правой части на $g(t-\tau)$. Обратно, при выполнении указанного неравенства можно построить систему стабилизации, для которой $\boldsymbol{P}\big[\|\mathrm{err}(t)\| > B\big] \leqslant g(K + \log_{|\lambda|} B)\ \forall t, B > 0$, при некотором K. Упомянутые результаты основаны на применении «*anytime*» кодеров и декодеров, которые определены как системы неограниченно растущей вычислительной сложности.[44]

В [132, 149] рассмотрен общий случай многомерного линейного объекта с шумом (4.1), (4.2). Необходимое условие (4.13) стабилизируемости/наблюдаемости установлено в классе всех неупреждающих кодеров и декодеров. Одновременно показано, что при выполнении достаточного условия (4.14) стабилизацию и достоверное наблюдение можно обеспечить с помощью системы равномерно ограниченной алгебраической вычислительной сложности, использующей традиционные процедуры блочного кодирования информации для передачи через канал. Соответствующие системы описаны явным образом за исключением кода передачи данных через канал. Дело в том, что пригоден любой код, передающий данные на скорости ниже шенноновской пропускной способности канала с вероятностью ошибки не выше требуемой. Классическая теория информации гарантирует его существование; конструирование кодов с характеристиками, близкими к теоретически достижимым, — стандартная задача теории кодирования [161, 162]. В случае совершенной информационной обратной связи и неограниченных шумов предложенная система стабилизации/наблюдения универсальна в том смысле, что обеспечивает ограниченную по вероятности ошибку при любых шумах, имеющих конечный и ограниченный по времени вероятностный момент известного порядка; знание оценки уровня шума необязательно. Показано, что в случае равномерно ограниченного шума с известной верхней границей можно обойтись без специального канала информационной обратной связи; в этом случае стабилизация гарантирована только при соблюдении упомянутой границы.

4.7. Обобщение условий (4.13), (4.14) *на нелинейные системы*

Это обобщение требует аналога величины $\eta(A)$ из (4.12). Ее определение, приведенное в (4.12), обслуживает только линейные системы. Вместе с тем, как отмечалось в подразделе 4.4 при обсуждении теоремы 2, $\eta(A)$ имеет смысл скорости роста энтропии разомкнутой линейной системы. Отталкиваясь от разработанных ранее концепций энтропии нелинейной динамической системы[45] и адаптируя их к контексту

динамической матрицы $A + BK$ замкнутой системы лежат в открытом единичном диске [132].

[44] См. дискуссию в подразделе 4.6.3.

[45] Подробнее см. обсуждение теоремы 2 в подразделе 4.4.

задач управления и наблюдения через каналы связи ограниченной пропускной способности, в [114, 115] установлены аналоги теоремы 2 в общем случае нелинейной динамической системы.

В [115] рассмотрена задача оценивания состояния неопределенной нелинейной системы (4.17). Ее топологическая энтропия задана формулой (4.18). Считается, что канал передачи данных от сенсора системе оценивания мгновенно и безошибочно передает b-битовые пакеты $h(jT)$ в моменты, кратные заданному $T > 0$; символ $\mathfrak{C}_R$ обозначает класс всех таких каналов со скоростью передачи данных $b/T \leqslant R$. В моменты jT, кратные T, кодер формирует пакет $h(jT)$ на основе наблюдений $x(0), x(1), \ldots, x(jT)$. Исходя из полученных пакетов $h(0 \cdot T), h(1 \cdot T), \ldots, h(j \cdot T)$ декодер-наблюдатель строит оценки $\widehat{x}(t)$ состояния для $t = (j-1)T+1, \ldots, jT$. Система (4.17) называется *наблюдаемой посредством каналов класса* $\mathfrak{C}_R$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется канал (определяемый величинами b и T) этого класса, а также кодер и декодер-наблюдатель, обеспечивающие оценивание с равномерной точностью ϵ:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|_\infty < \epsilon \quad \forall t = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.27}$$

Данное соотношение должно выполняться для любого решения системы (4.17). Для наблюдаемости в указанном смысле необходимо выполнение неравенства $H := H\big[F(\cdot,\cdot), \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}, \Omega\big] \leqslant R$ и достаточно выполнения неравенства $H < R$ [115]. Здесь величина $H\big[F(\cdot,\cdot), \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}, \Omega\big]$ определена в (4.18). В [115] установлено, что $H = 0$ для робастно устойчивых систем (4.17), $H = \eta(A)$ для линейных систем, а также указаны условия, при которых неизбежно $H = \infty$. Отталкиваясь от последнего результата, показано, что при естественных технических предположениях неопределенные системы вида

$$x(t+1) = [A + B\omega(t)]\, x(t) + b, \qquad x(1) \in \mathfrak{X}_1, \tag{4.28}$$

с неустойчивой матрицей A (есть собственное число λ с $|\lambda| > 1$) при $b = 0$ и с произвольной матрицей A при $b \neq 0$ ненаблюдаемы. Здесь $\omega(t) \in \Omega$ — матрица-функция неопределенных параметров, множества $\mathfrak{X}_1$ и Ω заданы, причем первое из них компактно, а второе является окрестностью нуля. Более того, независимо от скорости передачи данных по каналу R ошибка любой системы оценивания асимптотически бесконечна: супремум по t левой части из (4.27) равен $+\infty$. В случае $b = 0$, устойчивой матрицы A и $\Omega = \{\omega : \|\omega\| \leqslant c\}$ неопределенная система (4.28) наблюдаема посредством каналов сколь угодно малой пропускной способности R при выполнении дискретного аналога кругового критерия

$$\max_{z \in \mathbb{C}: |z|=1} \|(zI - A)^{-1} B\| < \frac{1}{c}.$$

В [176] в русле обсуждаемого подхода получены достаточные условия робастной наблюдаемости/стабилизируемости системы, описываемой дифференциальным уравнением с известной линейной частью и нелинейностью, удовлетворяющей неравенству Липшица с известной константой.[46] Робастность означает, что система должна обеспечить наблюдаемость/стабилизацию сразу для всех нелинейностей, липшицевых с указанной константой. Достаточные условия аппелируют к разрешимости

[46] Это условие представляет собой частный случай секторного ограничения теории абсолютной устойчивости [177].

пары алгебраических уравнений Лурье-Рикатти в классе положительно определенных матриц и содержат требование, аналогичное по смыслу условию $H < R$. Обобщения на случай монотонных нелинейностей предложены в [178]. Дополнение и развитие результатов [176] для задачи оценивания можно найти в [179], где, в частности, исследованы более общие классы нелинейностей.

В [114] исследована задача стабилизации нелинейного управляемого объекта

$$x(t+1) = F[x(t), u(t)] \qquad t = 0, 1, 2, \dots \tag{4.29}$$

Здесь состояние $x(t)$ и управление $u(t)$ — элементы топологического пространства $\mathfrak{X}$ и множества U соответственно; функция $F[\cdot, u] : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ непрерывна для всех u. Зависимость правой части уравнения (4.29) от свободного параметра $u(t)$ не позволяет непосредственно применить стандартное определение топологической энтропии непрерывного отображения на компактном инвариантном множестве $K \subset \mathfrak{X}$ [110–113]. Эта проблема устраняется замыканием системы обратной связью с последующей инфимизацией энтропии замкнутой системы по возможным обратным связям. Соответствующий инфимум характеризует исходную разомкнутую систему и назван *топологической энтропией с учетом обратной связи* (*Topological Feedback Entropy*).

В [114] предложены две подобные конструкции, близкие по смыслу. Переходя к деталям, остановимся на более простой и на результатах, основанных на этой конструкции. Рассматриваем систему (4.29) на компактном подмножестве $K \subset \mathfrak{X}$ фазового пространства $\mathfrak{X}$; внутренность K непуста. Подмножество «потенциально» инвариантно в следующем смысле: существует такое компактное подмножество $K' \subset \operatorname{int} K$, что из любого состояния $x_0 \in K$ можно за один шаг попасть внутрь этого подмножества $\exists u \in U : x_1 = F(x_0, u) \in \operatorname{int} K'$. Рассматриваются пары $p = [\alpha, G]$, где α — открытое покрытие множества K (т. е. семейство открытых подмножеств $A \subset \mathfrak{X}$, объединение которых содержит K), а G сопоставляет каждому элементу $A \in \alpha$ последовательность управлений $u_A(0), \dots, u_A(\tau_p - 1) \in U$ длины τ_p, разной для различных пар p. Ограничим поле зрения только теми парами p, для которых порожденная этой последовательностью траектория системы (4.29) за один шаг попадает во внутренность некоторого компактного подмножества $K' \subset \operatorname{int} K$ и удерживается там: $x(1), \dots, x(\tau_p) \in \operatorname{int} K'$. Это должно выполняться для любого начального состояния $x(0) \in A$ и любого элемента A покрытия α, от которых множество K' не зависит. (Описанная инвариантность K гарантирует наличие таких пар.) Для заданной пары p любая последовательность элементов покрытия $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_k\}$ порождает

$$\{u(t)\}_{t=i\tau_p}^{(i+1)\tau_p - 1} := G(A_i), \quad i = 0, \dots, k-1$$

— последовательность управлений $\{u(t)\}_{t=0}^{k\tau_p - 1}$, которая, в свою очередь, конвертирует каждое начальное состояние $x(0) = \overline{x}$ в траекторию $x_{\overline{x},\mathcal{A},p}(0), \dots, x_{\overline{x},\mathcal{A},p}(k\tau_p)$. Пусть $B_{\mathcal{A},p}$ — множество всех начальных состояний $\overline{x}$, для которых $x_{\overline{x},\mathcal{A},p}(i\tau_p) \in A_i,\ i = 0, \dots, k$. Совокупность $\mathcal{B}_{p,k}$ всех таких множеств, отвечающих всевозможным последовательностям $\mathcal{A}$ заданной длины k, образует открытое покрытие K [114]. Из него можно извлечь конечное подпокрытие ввиду компактности K. Выберем подпокрытие с наименьшим числом элементов, которое обозначим через $\beta_{p,k}$. *Топологическая энтропия системы* (4.29) *на* K *с учетом обратной связи* – это величина

$$h(F, K, U) := \inf_p \lim_{k \to \infty} \frac{\log_2 \beta_{p,k}}{k\tau_p},$$

где предел существует [114]. Показано, что для существования системы управления, обеспечивающей инвариантность множества K и использующей для передачи данных от сенсора регулятору канал связи без шумов с ограниченной пропускной способностью R, необходимо выполнение неравенства

$$R \geqslant h(F, K, U).$$

Соответствующее строгое неравенство достаточно для существования такой системы.

Охарактеризованное понятие было использовано для анализа локальной асимптотической стабилизируемости системы в окрестности положения равновесия x_*. (Точнее, предполагается, что $x_* = F[x_*, u_*]$ для некоторого управления $u_* \in U$.) При дополнительных технических предположениях, включающих метризуемость $\mathfrak{X}$ и наличие метрики в U, введено понятие *локальной топологической энтропии системы* (4.29) *в точке* (x_*, u_*) *с учетом обратной связи*:

$$h(F, x_*, u_*) := \lim_{\delta \to +0} \overline{\lim_{\varepsilon \to +0}} \, h\left(F, B_{x_*}^{\varepsilon}, B_{u_*}^{\delta}\right). \tag{4.30}$$

Здесь B_z^r — шар радиуса r с центром z. Показано, что неравенство $R \geqslant h(F, x_*, u_*)$ необходимо, а $R > h(F, x_*, u_*)$ достаточно для локальной асимптотической стабилизируемости. В случае, когда $\mathfrak{X}$ и U — эвклидовы пространства, функция F непрерывно дифференцируема и пара $[F'_x(x_*, u_*), F'_u(x_*, u_*)]$, где F'_x, F'_u — матрицы соответствующих частных производных, вполне управляема, локальная энтропия (4.30) равна величине $\eta\left[F'_x(x_*, u_*)\right]$ из (4.12) [114].

5. Стабилизация и наблюдение через коммуникационные сети ограниченной пропускной способности

Многие современные системы управления реализованы как комплексы распределенных в пространстве множественных сенсоров, регуляторов и актуаторов, обменивающихся данными через цифровую сеть ограниченной пропускной способности. В разделе 4 вопрос о фундаментальных границах скоростей передачи данных был рассмотрен в случае простейшей сети, состоящей из одного или двух каналов связи. Здесь рассматриваются обобщения на случай более сложных сетей. Большинство известных результатов относится к задаче стабилизации.

В [103] рассмотрена задача централизованной экспоненциальной стабилизации многосенсорной линейной системы без шума. Каждому сенсору выделен отдельный канал связи ограниченной пропускной способности для передачи данных единому центральному регулятору; каналы обратной передачи и обмена данными между сенсорами отсутствуют. Состояние системы, вообще говоря, недетектируемо в классическом смысле по показаниям отдельного сенсора, но детектируемо по их совокупности. Фактически решается задача кооперации возможностей отдельных сенсоров с целью стабилизации объекта в условиях ограничений на скорость передачи данных. Установлены необходимые и достаточные условия стабилизируемости, а при их выполнении определена достижимая степень экспоненциальной устойчивости.

Конкретно рассматривались линейные управляемые системы вида:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t); \qquad x(0) = x_0; \qquad y_j(t) = C_j x(t), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, k — число сенсоров, $y_j(t) \in \mathbb{R}^{n_{y,j}}$ — показание j-го сенсора, матрица A имеет собственное число λ с $|\lambda| \geqslant 1$. Модель канала связи, учитывающая колебания его мгновенной пропускной способности, задержки, потери и искажения данных при передаче, обсуждалась в подразделе 4.5. Основные требования: передачи по каналу от j-го сенсора, инициированные и завершенные в течение интервала времени $[t_0 : t_1]$, переносят не более $b_j^+(t_0, t_1)$ битов информации, независимо от ситуации с их помощью можно передать не менее $b_j^-(t_0, t_1)$ битов, средние значения этих оценок стабилизируются к общему пределу $\exists \lim_{t_1 - t_0 \to \infty} (t_1 - t_0)^{-1} b_j^{\pm}(t_0, t_1) =: \mathfrak{c}_j$.

Кодер j-го сенсора в каждый момент времени $t = 0, 1, \ldots$ формирует пакет $e_j(t) \in \mathcal{E}_j$, отправляемый по каналу связи регулятору

$$e_j(t) = \mathfrak{E}_j[t, y_j(0), \ldots, y_j(t)]. \tag{5.2}$$

На основании совокупности пакетов $\overline{\boldsymbol{e}}(t)$, полученных по всем каналам к моменту t, декодер строит управление $u(t) = \mathcal{U}\left[t, \overline{\boldsymbol{e}}(t)\right]$. Система стабилизации, образованная k кодерами и декодером, *экспоненциально стабилизирует* объект с показателем $\mu \in (0, 1)$, если $\|x(t)\| \leqslant K_x(d)\mu^t$, $\|u(t)\| \leqslant K_u(d)\mu^t$ $\forall t \geqslant 0$ при $\|x_0\| \leqslant d$ и любом $d > 0$.

Пара (A, B) считается стабилизируемой в классическом смысле. Вводится неустойчивое подпространство $M_{\text{unst}}(A)$ матрицы A, а также ненаблюдаемое и недетектируемое подпространства j-го сенсора:

$$L_j^{-o} := \{x \in \mathbb{R}^n : C_j A^\nu x = 0 \; \forall \nu \in [0 : n-1]\}, \qquad L_j^- := M_{unst}(A) \cap L_j^{-o}.$$

Условия стабилизируемости имеют вид системы неравенств, которые, в принципе, нумеруемы группами сенсоров $J \subset [1 : k]$. Неравенство зависит от группы посредством подпространства, недетектируемого этой группой $L(J) := \bigcap_{j \in J} L_j^-$. (Ради единообразия обозначим: $L(\emptyset) := M_{unst}(A)$, где $\emptyset$— пустое множество.) Так как разные группы J могут порождать общее подпространство $L(J)$, выгодно пронумеровать неравенства непосредственно элементами множества $\mathfrak{L} = \{L = L(J) : J \subset [1 : k]\}$.

При дополнительном техническом предположении показано, что экспоненциальная стабилизируемость объекта (с некоторым $\mu \in (0, 1)$) равносильна выполнению для всех $L \in \mathfrak{L}$ неравенства

$$\log_2 |\det A|_L| < \sum_{j \notin J(L)} \mathfrak{c}_j, \quad \text{где } J(L) := \{j \in [1 : k] : C_j x = 0 \quad \forall x \in L\}. \tag{5.3}$$

Здесь $A|_L$ — сужение оператора A на инвариантное подпространство L, а сумма взята по сенсорам, которые не игнорируют L полностью. Если эти неравенства выполнены и матрица A не имеет устойчивых собственных чисел, то достижимая степень μ^0 экспоненциальной устойчивости (инфимум достижимых μ) равна

$$\log_2 \mu^0 = \max_{L \in \mathfrak{L}} \frac{1}{\dim L} \left(\log_2 |\det A|_L| - \sum_{j \notin J(L)} \mathfrak{c}_j \right). \tag{5.4}$$

Явная формула для μ^0 установлена и в общем случае матрицы с устойчивыми собственными числами.

Централизованная стабилизация многосенсорных систем также была исследована в [99] в предположении, что каждый сенсор мгновенно и без помех передает сообщения регулятору по выделенному каналу связи ограниченной пропускной способности и что текущее управление известно кодерам всех сенсоров. Использованная аргументация подразумевает, что система приводима к вещественно-диагональной форме, причем так, что соответствующие «моды» состоят в простых отношениях с сенсорами. Последнее означает, что «мода» либо вообще не влияет на выход сенсора, либо однозначно по нему определяется.[47] В [99] предложена система стабилизации, навеянная аналогиями с классической задачей кодирования данных от зависимых источников [180], и установлены условия, при которых система обеспечивает устойчивость. Эти условия сводятся к разрешимости системы линейных неравенств в натуральных числах, имеющих смысл количества уровней квантования отдельных мод. В [181] обсуждаемый результат перенесен на случай, когда сообщения сенсоров передаются регулятору по сети каналов связи без помех с фиксированной топологией.

В [182] исследована задача децентрализованной стабилизации линейной вещественно-диагональной неустойчивой системы без шумов с множественными сенсорами и актуаторами:

$$x(t+1) = \mathbf{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n)x(t) + \sum_{i=1}^{l} B_i u_i(t), \quad y_j(t) = C_j x(t), j \in [1:k], \quad t = 0, 1, \dots.$$

Здесь u_i — управляющее воздействие i-го актуатора и y_j — показание j-го сенсора. Сенсоры связаны с актуаторами прямыми выделенными каналами связи переменной во времени пропускной способности: в момент t сенсор j имеет возможность мгновенно и без искажений переслать i-му актуатору сообщение, выбранное из заданного конечного алфавита $S_{j\to i}(t)$. (Отсутствию канала соответствует $|S_{j\to i}(t)| \equiv 1 \ \forall t$.) Усредненная пропускная способность такого канала характеризуется величиной

$$\underline{\mathfrak{c}}_{j\to i} := \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \log_2 |S_{j\to i}(t)|. \tag{5.5}$$

Кодер (5.2) j-го сенсора в момент времени t формирует набор $e_j(t) = [e_{j\to 1}(t), \dots, e_{j\to l}(t)]$ сообщений $e_{j\to i}(t) \in S_{j\to i}(t)$ всем актуаторам. Декодер i-го актуатора генерирует управление на основании всех полученных сообщений $u_i(t) = \mathcal{U}_i[t, e_{\to i}(0), \dots, e_{\to i}(t)]$, где $e_{\to i}(\theta) := [e_{1\to i}(\theta), \dots, e_{k\to i}(\theta)]$. *Децентрализованная система стабилизации*, образованная всеми кодерами и декодерами $\mathcal{E}_1[\cdot], \dots, \mathcal{E}_k[\cdot], \mathcal{U}_1[\cdot], \dots, \mathcal{U}_l[\cdot]$, обеспечивает *равномерную асимптотическую устойчивость*, если $\sup_{\|x(0)\|\leqslant d} \|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $d > 0$. В предположении

[47] Другими словами, недопустима ситуация, аналогичная двумерной системе $x_1(t+1) = \lambda x_1(t), x_2(t+1) = \lambda x_2(t)$, наблюдаемой тремя сенсорами $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2$ и $y_3 = x_1$. Здесь второй и третий сенсоры состоят в простых отношениях с обеими «модами» x_1 и x_2, а первый — нет: «мода» x_i влияет на показание y_1 сенсора, но определить ее исходя из показаний этого сенсора невозможно. При любой линейной замене фазовых переменных как минимум один сенсор имеет этот «дефект». Отметим, что для приведенной в [99] аргументации принципиально, чтобы система могла быть представлена как ансамбль независимых линейных подсистем, состояния которых находятся в простых отношениях с сенсорами. Приводимость к вещественно-диагональной форме менее существенна. Случай, когда обсуждаемое предположение простоты отношений сенсоров и мод нарушено, рассматривался в [103]. В этом случае синтез стабилизирующего регулятора принципиально усложняется.

$\eta_\alpha \neq \eta_\beta \ \forall \alpha \neq \beta$, а также наблюдаемости и управляемости исходной системы всей совокупностью сенсоров и актуаторов установлены необходимые, а также (не близкие к необходимым) достаточные условия равномерной асимптотической стабилизируемости. Необходимые условия состоят в выполнении неравенства

$$\sum_{h\in H} \log_2 |\eta_h| < \sum_{(i,j): i-\text{й актуатор влияет на хотя бы одну переменную } x_h \text{ с } h\in H} \underline{\mathfrak{c}}_{j\to i} \tag{5.6}$$

для любого непустого подмножества $H \subset \{h \in [1:n] : |\eta_h| \geqslant 1\}$ «неустойчивой части спектра» матрицы A. Сумма в правой части берется по всем (i,j), для которых h-я строка матрицы B_i отлична от нуля при некотором $h \in H$. Эта сумма имеет смысл суммарной пропускной способности всех каналов связи, по которым получают данные актуаторы, влияющие на динамику рассматриваемой части вектора состояния $x_H := \{x_h\}_{h\in H}$. (Таким образом, проигнорированы каналы, заведомо бесполезные для управления вектором x_H.) Слева в (5.6) записана топологическая энтропия (4.19) разомкнутой системы, описывающей динамику x_H. В свете этих наблюдений необходимость (5.6) вытекает из (4.13), где нестрогое неравенство заменено строгим на основании комментария 2 к теореме 2.

Может показаться естественной идея проигнорировать в правой части (5.6) не только каналы к актуаторам i, не влияющим на x_H, но и каналы от сенсоров j, нечувствительных к x_H (т. е. таких, что h-й столбец матрицы C_j равен нулю для всех $h \in H$). Именно это сделано в условии (5.3), касающемся централизованной стабилизации. Однако в случае децентрализованного управления эта идея неприменима. Дело в том, что нечувствительный к x_H сенсор j может тем не менее получить информацию о x_H косвенным образом, именно: анализируя влияние на доступные ему измерения действий актуаторов $i \in I_{observing\, x_H}$, имеющих «непосредственный» доступ к x_H, т. е. соединенных каналами связи с чувствительными к x_H сенсорами. Если «круг общения» j-го сенсора $I_{j\to} := \{i : \text{есть канал связи между } j \text{ и } i\}$ содержит актуатор $i_* \notin I_{observing\, x_H}$ (что заведомо невозможно в случае централизованного управления), пересылка указанной «косвенной» информации от сенсора j актуатору i_* может иметь смысл, особенно если актуаторы $i \in I_{observing\, x_H}$ неспособны влиять на x_H (хотя и «наблюдают» x_H), а актуатор i_* способен (хотя и лишен возможности «непосредственного наблюдения» за x_H). Отмеченный эффект итерируем: i_* может разобранным способом передать полученные данные другим актуаторам i_{**}.

Приведенные соображения сводятся к указанию на уже обсуждавшийся феномен переноса информации управлениями, который означает, что, помимо явно указанных в постановке задачи каналов передачи информации, в системе управления есть «скрытые» каналы. Для децентрализованной стабилизации могут быть важны, вообще говоря, все каналы, в связи с чем топология коммуникаций может оказаться сложнее, чем кажется на первый взгляд. Простой иллюстративный пример приведен на рис. 1. Рис. 1

Система с двумя неустойчивыми «модами» x_1, x_2 наблюдается двумя сенсорами $S1, S2$ и управляется двумя актуаторами $A1, A2$. Отношения наблюдаемости и управляемости отражены пунктирными стрелками. Сплошными стрелками изображены «явные» каналы связи. Таким образом актуатор Ai управляет модой x_i, но не имеет о ней «непосредственной» информации. Вместе с тем если пунктирные стрелки интерпретировать как каналы передачи данных, $A2$ может получить данные о x_2

по маршруту $a \to b \to c \to d \to e$, в котором задействованы оба «явных» канала. Аналогичным образом $A1$ может получить информацию о x_1. В итоге если «явные» каналы имеют пропускную способность, достаточную для одновременной передачи необходимых потоков данных $x_1 \to A1$ и $x_2 \to A2$, стабилизация рассматриваемой системы оказывается возможной [166, гл. 9].

Конструктивные схемы использования управлений для передачи информации в задачах сетевой децентрализованной стабилизации линейных систем в условиях ограниченной пропускной способности каналов связи предложены в [166, гл. 9].

Авторы [182] сознательно не принимали во внимание перенос информации управлениями. В результате полученные в [182] достаточные условия стабилизируемости не близки к необходимым. Эти достаточные условия состоят в разрешимости следующей системы линейных неравенств относительно $p_{h,i,j} \geqslant 0$

$$\sum_{(i,j):\begin{cases} i\text{−й актуатор влияет на } x_h \\ j\text{−й сенсор чувствителен к } x_h \end{cases}} p_{h,i,j} > \log_2 |\eta_h| \quad \forall h : |\eta_h| \geqslant 1,$$

$$\sum_{h:\begin{cases} i\text{−й актуатор влияет на } x_h \\ j\text{−й сенсор чувствителен к } x_h \end{cases}} p_{h,i,j} < \underline{\mathfrak{c}}_{j\to i} \quad \forall (i,j). \tag{5.7}$$

Здесь $\underline{\mathfrak{c}}_{j\to i}$ определено согласно (5.5), а $p_{h,i,j}$ имеет смысл средней скорости передачи информации о x_h через канал связи $j \to i$.

Как уже отмечалось, в общем случае необходимое (5.6) и достаточное (5.7) условия не близки друг к другу. Тем не менее эти условия близки в частном случае, когда каждый актуатор влияет на все неустойчивые «моды» $x_h : |\eta_h| \geqslant 1$, а каждый сенсор чувствителен ко всем таким «модам» [182].

Общий случай децентрализованной сетевой системы управления линейным процессом изучен в [166, гл. 9]. Предполагается, что сеть состоит из *элементов*, обменивающихся данными и наделенных вычислительными возможностями, используемыми для трансформации входящих потоков данных в исходящие. Некоторые из элементов (сенсоры) непосредственно измеряют параметры внешнего процесса, а некоторые другие элементы (актуаторы) непосредственно на процесс воздействуют. Прочие элементы функционируют как ретрансляторы и промежуточные процессоры (регуляторы), участвуя децентрализованным образом в распределенной трансформации сигналов сенсоров в управляющие воздействия на неустойчивый процесс. За счет надлежащего синтеза алгоритмов обработки данных на всех элементах требуется добиться устойчивости замкнутой системы, состоящей из внешнего (для сети) процесса и элементов, взаимодействующих через коммуникационную сеть.

Считается, что сеть задана, т. е. указано, от каких элементов к каким может передаваться информация, на каких скоростях, [48] и каким образом. Передаваемые по сети сообщения могут задерживаться, теряться и искажаться, в частности ввиду коллизий друг с другом. [49] Топология коммуникаций произвольна и может динамически изменяться авторизованными элементами. Простейшим примером служит ситуация, когда канал связи двух элементов сети (абонентов канала) переключается на обслуживание другой пары абонентов. Решение о переключении вырабатывается

[48] В сети могут присутствовать каналы как конечной, так и бесконечной пропускной способности.

[49] Для учета этих эффектов использована детерминистическая модель.

специальным элементом (супервизором канала) на основании доступной ему информации; построение соответствующего алгоритма (протокола) — часть рассматриваемой задачи стабилизации.

Система алгоритмов обработки данных регуляторами выбирается из априорно оговоренного в постановке задачи класса. С его помощью можно, например, отразить возможности цифровых процессоров, обслуживающих регуляторы: ограничения на объем памяти, скорость, номенклатуру выполняемых операций и т.п. В свою очередь, упомянутый класс не стеснен никакими требованиями и в этом смысле произволен. В частности, возможна ситуация, когда для данного регулятора этот класс предлагает единственный алгоритм обработки данных, т. е. не исключено, что в сети некоторые регуляторы заданы априори. Примером может служить сеть, содержащая элемент — запоминающее устройство, обслуживаемое в соответствии с априорно заданным протоколом. Другой пример — сеть с переключаемым каналом и заданным протоколом переключения. Вместе с тем на выбор алгоритмов обработки данных сенсорами и актуаторами подобное ограничение не накладывается.

Внешний (по отношению к сети) неустойчивый процесс описывается линейным разностным уравнением; в объекте и сенсоре присутствуют ограниченные шумы. В [166, гл. 9] найдены условия, при которых процесс можно стабилизировать, т. е. для элементов сети можно так подобрать допустимые алгоритмы обработки данных, что замкнутая система устойчива. В случае выполнения этих условий дано конструктивное описание стабилизирующих алгоритмов.

Точнее, проблема стабилизации сведена к традиционной задаче передачи данных в многотерминальных информационных сетях в следующей стандартной постановке. В заданных пунктах сети расположено N источников информации, для каждого из которых определен пункт, куда требуется передать информацию. Так как рассматривается детерминистическая модель сети, применен нерандомизированный критерий качества передачи: после декодирования в пункте назначения полученный пакет должен совпасть с отправленным (с вероятностью единица). Условия стабилизируемости даны в терминах области $\mathfrak{R}$ всех наборов $(r_1, r_2, \dots, r_N)$ скоростей r_i, на которых можно передавать данные из i-го источника в соответствующий пункт назначения одновременно для всех $i = 1, \dots, N$ (при имеющихся ограничениях на допустимые алгоритмы обработки данных элементами сети). Упомянутые условия точны: для стабилизируемости процесса необходимо и достаточно, чтобы определенный вектор, характеризующий степень неустойчивости внешнего процесса, принадлежал области $\mathfrak{R}$ и ее внутренности соответственно. Синтез системы стабилизации сведен к построению системы передачи данных на скоростях $(r_1, r_2, \dots, r_N)$, соответствующих компонентам этого вектора.

Важно подчеркнуть, что затронутая область $\mathfrak{R}$ связана не с сетью из постановки задачи стабилизации, а с модификацией этой сети. Модификация состоит во внесении в сеть дополнительных вершин (элементов) и каналов связи неограниченной пропускной способности. Дополнительные элементы и каналы являются «воображаемыми», а сама модификация — вычислительным приемом. Добавляются каналы трех типов. Каналы первого типа передают данные от каждого актуатора всем сенсорам, которые способны детектировать действия этого актуатора. Эти каналы явным образом выражают упоминавшуюся ранее возможность передачи информации посредством управляющих воздействий на объект. (В ситуации с рис. 1 таких каналов два: они представлены верхней и нижней парами пунктирных стрелок.) Каналы второго типа передают данные от «воображаемых» источников информации, ассоциированных с неустойчивыми «модами» внешнего процесса; для «размещения» каждого источника в сеть вводится дополнительная «воображаемая» вершина. Исходящий из этой вершины канал является широковещательным и передает данные одновременно всем сенсорам, способным наблюдать соответствующую «моду». Наконец, каналы третьего типа — каналы с многими пользователями, вещественным алфавитом и аддитивной интерференцией передаваемых сигналов. Каждый из этих каналов передает данные в дополнительную «воображаемую» вершину: пункт приема информации в модифицированной сети. Эти вершины также находятся во взаимно-однозначном соответствии с неустойчивыми «модами» внешнего процесса (и при этом отличны от аналогичных вершин, связанных с каналами второго типа). «Пользователями» канала, ведущего к данной «моде», являются все актуаторы, способные на нее влиять. Обсуждаемая область $\mathcal{R}$ дает ответ на вопрос: на каких скоростях можно одновременно передавать данные по модифицированной сети от каждого из введенных «воображаемых» источников информации в пункт приема, связанный с той же неустойчивой «модой», что и источник? При этом модифицированная сеть рассматривается в изоляции от внешнего процесса, который требуется стабилизировать.

6. Учет информационных ограничений — нелинейные системы

В [183] рассматривается задача стабилизации нелинейных аффинных систем со скалярным управлением и квантованием в обратной связи. Рассматриваются объекты управления вида

$$\dot{x} = f(x) + d(x)u, \quad f(0) = 0, \tag{6.1}$$

где функции f, g принадлежат классу $\mathcal{C}^l$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}$.

На основе метода функций Ляпунова для системы (6.1) синтезируются стабилизирующий квантователь (*stabilizing quantizer*) и *робастно стабилизирующий квантователь* (*robustly stabilizing quantizer*). Для решения задачи используется логарифмический квантователь. Представлено применение предложенных схем квантования к управлению траекториями движения одноколесных транспортных средств.

В [178] рассмотрена задача асимптотической стабилизации по выходу нелинейных систем, представленных в форме Лурье с неубывающими нелинейностями при ограниченной пропускной способности канала связи. Погрешности и запаздывания в канале, внешние возмущения и неточности измерений не учитываются. Для оценивания состояния объекта использован наблюдатель работы [184]. В кодере и декодере используется вектор поправок оценки состояния, передаваемый в дискретные моменты времени через канал связи. Для обоснования результата использованы методы теории абсолютной устойчивости [66, 177] (частотная теорема, критерий Попова) и аппарат линейных матричных неравенств. Коэффициент масштабирования кодера вычисляется по рекуррентным соотношениям. Показано, что при достаточно высокой пропускной способности канала связи возможен выбор параметров кодера и декодера, обеспечивающий глобальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Задачи стабилизации нелинейных систем при информационных ограничениях относительно заданной точки расмотрены и в [114,127,185–189]. Однако, результат [114] носит локальный характер, а [127, 185–189] посвящены только задаче стабилизации состояния равновесия системы. Эти результаты непосредственно неприменимы к задачам *синхронизации*, в которых требуется обеспечить сходимость траекторий к некоторому множеству (многобразию) в пространстве состояний системы, а не к заданной точке. Первые результаты по синхронизации нелинейных систем при ограничениях на скорость передачи данных получены в [190, 191], где рассмотрена так называемая *синхронизация на основе наблюдателей* (*observer-based synchronization*) (см. [192–199]). Рассматривался класс кодеров первого порядка с экспоненциальным (по времени) масштабированием. Метод синхронизации работ [190, 191] приводит к обратно пропорциональной зависимости предельной ошибки синхронизации от скорости передачи данных по каналу связи.

Статья [200] посвящена задаче *управляемой* синхронизации через канал связи ограниченной пропускной способности. В отличие от [190,191] в [200] рассматривается управляемая синхронизация нелинейных систем с обратной связью по выходу, в которой сигнал управления вычисляется на основе измерений сигнала ошибки между ведущей и ведомой системами, передавапемого по каналу связи. Закон управления синтезируется на основе *теоремы о пассификации* [196, 197, 201, 202]. Показано, что для идеального случая (возмущения, помехи измерений и искажения в канале связи отсутствуют) обеспечивается асимптотическое стремление к нулю ошибки синхронизации, если скорость передачи данных по каналу выше некоторого порогового значения. Ключевым методом, используемым в [200] при исследовании управляемой синронизации, является сравнение рассматриваемой гибридной (непрерывно-дискретной) системы со вспомогательной непрерывной системой (так называемой *непрерывной моделью*), обладающей требуемыми свойствами устойчивости и пассивности. Этот подход систематически развивался в 1970-х г. под названием «*метода непрерывных моделей*» [203, 204].

В [190, 191, 196, 205–211] исследована задача синхронизации для класса нелинейных систем при неопределенности параметров и ограниченной скорости передачи информации в канале связи между ведущей и ведомой системами. Предложен метод адаптивной синхронизации, основанный на использовании адаптивных наблюдателей и нестационарных кодеров с памятью. Для адаптивной синхронизации систем Чуа получены численные характеристики процесса синхронизации при различной загрузке канала связи и показана возможность использования полученных результатов для передачи информации модулированием хаотического сигнала. Результаты распространены на задачу синхронизация нелинейных систем через сети связи с топологической структурой «дерево» в [211, 212].

В [213] рассматривается гибридная система управления (система стабилизации состояния равновесия), включающая непрерывный нелинейный объект (аффинный по управлению) и дискретный линейный динамический регулятор. Выход регулятора (управляющее воздействие) подвергается квантованию. Объект управления задается уравнениями состояния:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) + K\bar{u}(t), \\ &\bar{u}(t) = \bar{u}_k, \quad t \in [k, k+1), k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, полученный в результате фиксации на интервал дискретности $T = 1$ выхода квантователя, на вход которого поступает управление u_k, вырабатываемое дискретным регулятором. Функция $f(x) \in \mathbb{R}^n$ в (6.2) считается непрерывно дифференцируемой, $f(0) = 0$. Полученные результаты аналогичны результатам метода непрерывных моделей [203, 204]. Именно, в [213] установлено, что равномерная асимптотическая устойчивость состояния равновесия дискретной системы следует из экспоненциальной устойчивости ее идеализированной линеаризованной модели. Показано, что если состояние равновесия (*trivial solution*) линеаризованной системы без квантования («идеализированная система») асимптотически устойчиво, то при наличии квантования решения равномерно предельно ограничены (*uniformly ultimately bounded*), причем размер предельного множества может быть обеспечен как угодно малым за счет уменьшения шага квантования. Показано также, что уменьшением шага квантования можно асимптотически достичь произвольно малого отклонения между траекториями идеализированной системы и системы с квантованием. Отмечено, что методология, использованная при доказательстве, применима и к более общим случаям, например для систем с нелинейными дискретными регуляторами, систем с нелинейными измерениями выхода объекта и т. д.

7. Некоторые другие постановки задач и подходы

В статье [214], посвященной управлению микродвигателями через сеть связи с ограниченной пропускной способностью, отмечается, что зачастую основным препятствием к повышению качества управления в распределенных системах является не ограниченность вычислительных ресурсов, а время, имеющееся для обмена данными между датчиками, управляющим компьютером и исполнительными органами (актуаторами) через общую сеть связи. В [214] рассматривается последовательная (гирляндная, *daisy-chain*) конфигурация сети, при которой сигнал распространяется между узлами последовательно. Для такой сети в каждый момент времени может выполняться только одна операция передачи данных. Важно поэтому определить, какие переменные являются наиболее существенными с точки зрения качества работы системы, чтобы отвести для их передачи наибольшее время. В работе рассматриваются линейные дискретные модели с различными частотами дискретизации для разных контуров управления, но считается, что данные поступают и передаются по сети с неограниченным числом разрядов.

В [215] рассматривается задача минимизации среднеквадратической ошибки в передаче по аналоговому каналу связи векторного сигнала при ограничениях как на общую мощность сигнала в канале, так и на мощность отдельных компонент передаваемого сигнала. Динамика источника сигнала и особенности, возникающие в задачах с обратной связью не рассматриваются. Оптимальные кодер и декодер ищутся в виде линейных статических операторов.

Ограниченность отношения сигнал/шум в качестве причины, ограничивающей скорость передачи информации в системах управления, рассматривается также в [216–218]. В [216,217] исследуется стабилизируемость неустойчивого линейного объекта (непрерывного или дискретного) линейным стационарным регулятором в обратной связи через зашумленный канал связи при ограничении на отношение сигнал/шум. Следуя классическим работам [49, 85], здесь используются понятия располагаемой мощности сигнала P, мощности шума N, ширины полосы пропускания канала W, на основе которых через известную формулу $C = \log_2(1 + P/N)$ определяется пропускная способность C канала связи в битах в секунду. Тем самым ограничения на скорость передачи данных выражаются в терминах отношения сигнал/шум и полосы пропускания канала. Получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости объектов через канал связи при обратной связи как по состоянию, так и по выходу объекта. В частности показано, что неминимальнофазовость объекта приводит к появлению дополнительных ограничений. Интересным результатом [217] является сравнение найденных границ с неравенством (4.13). Для этого в [217] найдена пропускная способность канала связи при заданном отношении сигнал/шум для гауссовского зашумленного канала связи с неограниченной полосой пропускания. Показано, что для стабилизации объекта с обратной связью по состоянию с помощью линейного регулятора с постоянными параметрами требуемая пропускная способность канала эквивалентна (по количеству битов в секунду) минимальной скорости передачи данных, которая дается неравенством (4.13). Если же измерению доступен только выход неминимальнофазового объекта, то наименьшее требуемое отношение оказывается больше, чем при стабилизации по состоянию и превосходит указанную в теореме 2 границу. В [218] излагается подход, позволяющий трактовать результаты [216, 217] с точки зрения общей концепции решения линейно-квадратичной задачи оптимизации.

Говоря о связи теории управления и теории информации, следует упомянуть и о работах, в которых теоретико-информационные термины (энтропия, относительная энтропия, анизотропия, взаимная информация и т. д.) используются, чтобы выразить цель управления, критерий качества или ограничения [219–225]. Подобные подходы позволяют дать новую интерпретацию оптимальным и адаптивным системам, расширить класс синтезируемых систем и снабдить их новыми свойствами. Однако в перечисленных работах в постановках задач отсутствуют каналы связи, т. е. не рассматриваются информационные процессы как таковые.

Отметим еще один подход к учету вычислительных ограничений, основанный на представлении вычислительного устройства как преобразователя информации [226], эквивалентного идеальному вычислителю, соединенному последовательно с некоторым каналом связи. При этом ограниченность производительности компьютера соответствует ограниченной пропускной способности канала. Пропускная способность R_c эквивалентного канала может быть оценена как информационная производительность вычислителя: максимальное количество информации, создаваемое вычислителем за единицу времени, в простейшем случае равное произведению разрядности вычислителя ν на число ω элементарных операций, выполняемых за ту же единицу времени:

$$R_c = \nu\omega.$$

Рассуждения, аналогичные [96] (см. комментарий 6 к теореме 2), показывают, что в случае каналов в измерении и управлении без помех с пропускной способностью R и учете ограниченной вычислительной производительности регулятора R_c справедлив результат, аналогичный теореме 2 при $\mathfrak{c} = \min\{R, R_c\}$. Аналогичные оценки верны и для задач синхронизации нелинейных систем и сетей типа дерева [209, 211]: эквивалентная пропускная способность сети считается равной минимуму из пропускных способностей всех ее каналов и информационных производительностей всех вычислителей.

8. Прикладные задачи

Как отмечено в [65, 227], в прикладных задачах обычно было принято отделять коммуникационный аспект системы управления от ее динамических свойств, так как это упрощает исследование и обычно успешно используется в классических задачах управления. Ситуация существенно меняется, когда одно устройство управления (принятия решений) управляет многими подсистемами через канал связи с ограниченной пропускной способностью. К подобным системам относятся мобильные сенсорные сети, самоорганизующиеся мобильные кооперативные группы мобильных роботов, в частности группы беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) или орбитальных кластеров, беспроводные сенсорные среды, используемые для задач мониторинга поверхности, системы управления операциями; системы управления мощностью сигнала в мобильной сетевой телефонии; системы управления ансамблями микродвигателей (*arrays of microactuators*) [214] и группами автономных роботов; системы управления гибкими энергетическими сетями, управления производственными системами и транспортными потоками; системы управления ансамблями нанороботов. В этих и подобных системах последовательное взаимодействие со всеми подсистемами может оказаться невозможным из-за физических ограничений. Например, для БПЛА условия скрытности могут являться препятствием для осуществления непрерывной связи с центральным пунктом управления. Удаленность от Земли роботов-планетоходов и ограниченность их бортовых энергетических ресурсов приводят к разреженности передаваемых данных (*sparse communication patterns*). Кроме того когда число подсистем превосходит некоторый порог, как в задачах управления множеством микродвигателей, связь со скоростью, потребной для управления в реальном времени, может быть неосуществимой.

В научной литературе описано применение изложенных выше методов управления и оценивания к решению прикладных задач. Основное внимание уделяется задачам наблюдения за движущимися объектами.

В [228] рассмотрена задача управления работой сенсоров и передачей данных при слежении за маневрирующей целью. В частности, рассматриваются следующие две типичные ситуации. В первой антенна с управляемым лучом используется для слежения за несколькими целями (предполагается взаимная независимость движений целей). Рассматривается задача: какую из целей в каждый момент должно выбирать устройство визирования, чтобы оптимизировать заданный целевой функционал? Другая ситуация возникает, когда несколько сенсоров подключены через мультиплексор к каналу связи с ограниченной пропускной способностью для передачи данных о движении цели компьютеру, выполняющему слежение за целью на основе данных от различных сенсоров. В этом случае надо выбрать способ наилучшего переключения потоков данных, передаваемых от сенсоров по каналу связи так, чтобы при заданной ограниченной скорости передачи данных по каналу связи было достигнуто «оптимальное» слежение за целью. Движение цели в [228] представляется линейным разрывным марковским процессом (*jump Markov linear system*). Рассматривается квадратичная функция потерь, задача оптимизации которой сформулирована как задача стохастического динамического программирования.В статье предложены субоптимальные, реализуемые с вычислительной точки зрения алгоритмы: алгоритм, основанный на интерактивной мультимодели, адаптирующейся к сенсорам (*Sensor Adaptive Interacting Multiple Model Algorithm*, SAIMM-алгоритм) и алгоритм вероятностной интегрированной ассоциации данных, адаптирующейся к сенсорам (*Sensor Adaptive Integrated Probabilistic Data Association Algorithm*, SAIPDA-алгоритм).

Задача минимизации информационных потоков о движении цели при слежении несколькими сенсорами рассмотрена в [229]. Минимизация достигается за счет имеющейся корреляции между измерениями разных сенсоров.

В [38] метод адаптивной настройки кодера, заключающийся в автоматическом изменении масштаба на основе текущей информации о процессе, продемонстрирован для передачи данных по каналу с ограниченной пропускной способностью при слежении за движущимся объектом. Результативность метода экспериментально проверена на лабораторном стенде «Вертолет» [37].

Задача перехвата движущейся цели при получении информации о ней со стороны различных (движущихся и неподвижных) источников при информационных ограничениях подробно исследована в [230].

9. Заключение

Прошедшее десятилетие характеризовалось взрывом интереса к области на перекрестке теории управления и теории информации, и описанные выше задачи и результаты далеко не исчерпывают все, что известно к настоящему времени. Более подробно изложен круг вопросов, связанных с теоремой о скорости передачи данных (раздел 4). Важность этой теоремы определяется тем, что она связывает центральные понятия теории информации и теории управления и говорит, что цель управления достигается, когда скорость передачи информации по каналам связи превосходит скорость производства информации (неопределенности) объектом управления. Заметим, что в такой интерпретации теорема — не что иное, как обобщенная дифференциальная форма *закона необходимого разнообразия* У. Р. Эшби [231], который был весьма популярен на раннем этапе развития кибернетики. Математическая детализация различных версий этой теоремы обнаруживает целый ряд нюансов и проблем, возникающих при попытках получить математически корректные формулировки в сложных ситуациях. В частности, шенноновское определение пропускной способности канала иногда оказывается недостаточным. Полученные результаты становятся вехами на трудном пути сближения теории информации и теории управления, символизирующими возврат к первоначальному целостному пониманию кибернетики как науки об управлении и связи [232].

Центр тяжести дальнейших исследований перемещается к задачам управления нелинейными и сетевыми системами и к учету вычислительных ограничений. Несколько подходов к учету последних были представлены в обзоре.

Как и в любой развивающейся теории, в представленной области имеются неясные вопросы и парадоксальные ситуации. В обзоре подробно проанализирован один из таких парадоксов: при наличии сколь угодно малого шума как в объекте, так и в канале связи стабилизация в большинстве практических случаев невозможна, если речь идет о стабилизации с вероятностью единица (см. подраздел 4.6.2), но возможна (при выполнении условий соответствующей теоремы о скорости передачи данных), стабилизация «по вероятности» (см. подраздел 4.6.3). Другой парадокс связан с возможностью стабилизации неустойчивых объектов при отсутствии (т.е. при нулевой пропускной способности) каналов связи. Действительно, результаты классических работ А. Стефенсона [233,234], П. Л. Капицы [235], Н. Н. Боголюбова [236] и их последователей [237–239] показывают, что при некоторых условиях неустойчивые нелинейные объекты (например, перевернутый маятник, управляемый перемещением точки подвеса) могут быть стабилизированы периодическим программным воздействием достаточно высокой частоты (вибрационная стабилизация). Таким образом, наличие канала обратной связи не является необходимым условием стабилизируемости, что, на первый взгляд, вступает в противоречие с теоремой о скорости передачи данных. Анализ этого и других парадоксов — дело будущего.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пропускная способность канала связи при отсутствии ошибок

Рассматриваем дискретный канал без памяти с конечными входным $\mathcal{E} = \{e\}$ и выходным $\mathcal{S} = \{s\}$ алфавитами и матрицей переходных вероятностей $W(s|e)$.

Канал без информационной обратной связи. *Блочный код* длины N — набор из M входных слов канала $E^1, \dots, E^M, E^\nu = (e_0^\nu, \dots, e_{N-1}^\nu)$ длины N. Пересылкой слова E^ν в течение N временных тактов информант извещает о выборе ν-й возможности из M априорно оговоренных. Отношение $R := \frac{\log_2 M}{N}$ — *скорость* кода. *Правило декодирования* $\mathfrak{D}$ сопоставляет определенное ν каждому выходному N-слову: $\mathfrak{D} : \mathcal{S}^N \to [1 : M]$. Это правило *безошибочно*, если $\mathfrak{D}(S) = \nu$ для любого ν и любого слова $S = (s_0, \dots, s_{N-1})$, вероятность получения которого отлична от нуля $\boldsymbol{P}(S|E^\nu) = \prod_{i=0}^{N-1} W(s_i|e_i^\nu) > 0$ при условии, что послано E^ν. *Пропускная способность при отсутствии ошибок* $\mathfrak{c}_0 := \sup R$, где sup взят по всем блочным кодам произвольной длины, допускающим безошибочное декодирование [134]. Одновременно $\mathfrak{c}_0 = \sup_N \frac{1}{N} M_{\max}(N) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} M_{\max}(N)$ [133], где $M_{\max}(N)$ — максимальное число различимых входных слов длины N. (Слова E' и E'' *различимы*, если равна нулю вероятность порождения ими общего выходного слова S канала, т.е. $\{S : \boldsymbol{P}(S|E') > 0\} \cap \{S : \boldsymbol{P}(S|E'') > 0\} = \emptyset$.)

Канал с полной информационной обратной связью. В этом случае результат $s(t)$ передачи через канал становится известен кодеру к моменту $t+1$ следующей передачи. *Блок-функция* длины N — рекурсивное правило генерации входного слова длины N исходя из индекса $\nu = 1, \dots, M$:

$$(\text{П}1.1)\quad e(t) = \mathfrak{E}_*[t, e(0), \dots, e(t-1), s(0), \dots, s(t-1), \nu],\ t = 1, \dots, N-1, \quad e(0) = \mathfrak{E}_*[0, \nu].$$

Это слово по-прежнему используется для извещения о выборе ν-й возможности из M оговоренных. Прочие детали определения неизменны; соответствующая пропускная способность обозначается символом $\mathfrak{c}_{0F}$.

В некоторых случаях информационная обратная связь увеличивает пропускную способность при отсутствии ошибок $\mathfrak{c}_{0F} > \mathfrak{c}_0$ [134]. Общая формула для $\mathfrak{c}_0$ отсутствует [133], для $\mathfrak{c}_{0F}$ она хорошо известна: $2^{-\mathfrak{c}_{0F}} = \min \max_{s\in\mathcal{S}} \sum_{e\in\mathcal{E}_s} \boldsymbol{P}(e)$ [134]. Здесь min взят по всем вероятностным распределениям $\{\boldsymbol{P}(e)\}$ на входном алфавите канала $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_s$ — множество всех входных символов $e \in \mathcal{E}$, порождающих данный выходной символ s с ненулевой вероятностью $W(s|e) > 0$. Приведенная формула для $2^{-\mathfrak{c}_{0F}}$ верна, если существует пара e', e'' различимых входных символов: $W(s|e')W(s|e'') = 0$

$\forall s$; иначе $\mathfrak{c}_{0F} = \mathfrak{c}_0 = 0$. Более того, $\mathfrak{c}_{0F} > 0 \Leftrightarrow \mathfrak{c}_0 > 0 \Leftrightarrow$ существует пара различимых входных символов [134].

В силу последнего факта $\mathfrak{c}_{0F} = \mathfrak{c}_0 = 0$ для многих каналов, представляющих практический интерес [133]. Приведем ряд простейших примеров.

Канал со стиранием и конечным алфавитом $\mathcal{E}$ (мощности $K \geqslant 2$) передает сообщение $e \in \mathcal{E}$ без искажения с вероятностью $1-p$ и теряет его с вероятностью $p \in (0,1)$. Выходной алфавит $\mathcal{S} = \mathcal{E} \cup \{\circledast\}$ (где $s(t) = \circledast \Leftrightarrow$ сообщение $e(t)$ потеряно). Так как $W(\circledast|e) = p > 0\, \forall e$, любые два входных символа неразличимы и поэтому $\mathfrak{c}_{0F} = \mathfrak{c}_0 = 0$. Шенноновская пропускная способность этого канала $\mathfrak{c} := (1-p)\log_2 K > 0$ [85].

Двоичный симметричный канал передает символ $e = 0, 1$ правильно $s = e$ с вероятностью $p \in (0,1)$ и инверсирует его $s = e + 1 \mod 2$ с вероятностью $1 - p$. Так как $W(1|0) = 1 - p > 0$ и $W(1|1) = p > 0$, символы 0 и 1 неразличимы и поэтому $\mathfrak{c}_{0F} = \mathfrak{c}_0 = 0$. Шенноновская пропускная способность канала $\mathfrak{c} = 1 + p\log_2 p + (1 - p)\log_2(1-p) > 0$ при $p \neq 1/2$ [85].

Канал с ненулевыми переходными вероятностями $W(s|e) > 0 \forall s, e$ также имеет нулевую пропускную способность при отсутствии ошибок. Более того, $\exists s\colon W(s|e) > 0$ $\forall e \Rightarrow \mathfrak{c}_{0F} = \mathfrak{c}_0 = 0$.

Противоположным примером зашумленного канала с ненулевой пропускной способностью при отсутствии ошибок служит любой канал с *характеристическим графом*, изображенным на рис. 2. Вершины такого графа отождествлены с входными символами канала $e \in \mathcal{E}$, а (неориентированными) ветвями соединены неразличимые символы. Пропускная способность при отсутсвии ошибок полностью определена характеристическим графом [134]. Для каналов с графом, изображенным на рис. 2, $\mathfrak{c}_0 = \frac{1}{2}\log_2 5 > 0$ [240]. Рис. 2

В [134] вычислена пропускная способность при отсутствии ошибок для каналов с входным алфавитом мощности $\leqslant 4$. С подробным обзором данной области можно ознакомиться в [133].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Моментная стабилизируемость скалярного линейного объекта через дискретный канал со стиранием и полной информационной обратной связью[50]

Канал связи либо мгновенно передает R-битовое сообщение без искажений, либо теряет его. Потери независимы во времени, их вероятность постоянна $p \in (0,1)$, кодер извещается о потере пакета с задержкой на один такт времени. Рассматриваем неустойчивый $|\lambda| > 1$ скалярный объект

$$x(t+1) = \lambda x(t) + u(t) + \xi(t); \quad x(0) = 0; \quad |\xi(t)| \leqslant D; \quad y(t) = x(t)$$

с известным уровнем шума D. В момент t кодер посылает пакет $e(t) = \mathfrak{E}[t, y(0), \ldots, y(t), I(0), \ldots, I(t-1)]$, где $I(\theta) = 1$, если пакет $e(\theta)$ потерян $s(\theta) = \circledast$,

[50] Материал основан на [98].

иначе $I(\theta) = 0, s(\theta) = e(\theta)$. Декодер функционирует согласно (4.4). Обьект назовем *равномерно η-стабилизируемым*, если существуют кодер и декодер, для которых $\sup_t \boldsymbol{E} \sup |x(t)|^\eta < \infty$. Второй sup взят по всем шумам $|\xi(\theta)| \leqslant D$ (при заданных $I(\theta)$).

Рассматриваемый объект равномерно η-стабилизируем ($\eta \in [1, \infty)$) в том и только в том случае, если выполнены следующие строгое и нестрогое неравенства, соответственно [98]:

$$(\text{П}2.1) \qquad \varphi(\eta) := |\lambda|^\eta \Big[2^{-\eta R}(1-p) + p \Big] < 1, \qquad \varphi(\eta) \leqslant 1.$$

Элементарный анализ функции $\varphi(\cdot)$ показывает, что она принимает значения меньше единицы при $\eta \geqslant 0$, если только $\log_2 |\lambda| < \mathfrak{c} := (1-p)R$. Здесь $\mathfrak{c}$ — шенноновская пропускная способность рассматриваемого канала [85], т. е. само неравенство — это условие (4.14). Далее его считаем выполненным. Тогда уравнение $\varphi(\eta) = 1$ имеет два неотрицательных корня $\eta = 0$ и $\eta = \eta_* = \eta_*(|\lambda|, R, p) > 0$, причем $\varphi(\eta) < 1$ при $\eta \in (0, \eta_*)$ и $\varphi(\eta) > 1$ при $\eta > \eta_*$. В итоге, условия (П2.1) можно переписать в виде:

$$\eta \leqslant \eta_*(|\lambda|, R, p), \qquad \eta < \eta_*(|\lambda|, R, p).$$

Также несложно убедиться, что функция $\eta_*(a, R, p)$ строго убывает по $a > 1$, $p \in [0,1]$ и строго возрастает по R. Отсюда следует, что область η-стабилизируемости $\big\{(\lambda, R, p) : \eta_*(|\lambda|, R, p) < \eta\big\}$ зависит от показателя момента η.

Отметим также, что $\lim_{R \to \infty} \eta_*(|\lambda|, R, p) = -\frac{\log_2 p}{\log_2 |\lambda|}$. (Предельный переход соответствует трансформации алфавита канала из конечного в бесконечный.) Как следствие $\eta_*(|\lambda|, R, p) \leqslant -\frac{\log_2 p}{\log_2 |\lambda|}$, т.е. независимо от размера R передаваемых пакетов (а значит, и шенноновской емкости канала) обеспечить моментную устойчивость с показателем выше $-\frac{\log_2 p}{\log_2 |\lambda|}$ невозможно.

Набросок доказательства условий (П2.1). Необходимость. В случае k потерь (в фиксированные моменты времени) на интервале $[0 : t]$ вторая сумма в формуле

$$x(t) = \sum_{\theta=0}^{t-1} \lambda^{t-1-\theta} d(\theta) - \sum_{\theta=0}^{t-1} -\lambda^{t-1-\theta} u(\theta)$$

принимает не более $M := 2^{R(t+1-k)}$ значений q в силу (4.4). Когда $\xi(\theta)$ пробегает область $|\xi(\theta)| \leqslant D$, первая сумма зачерчивает интервал $\Big[-\frac{|\lambda|^t - 1}{|\lambda| - 1} D, \frac{|\lambda|^t - 1}{|\lambda| - 1} D\Big]$. При любой расстановке M точек q этот интервал содержит элемент z с $|z - q| \geqslant M^{-1} D \frac{|\lambda|^t - 1}{|\lambda| - 1} \geqslant$

$M^{-1}D|\lambda|^{t-1}$. Значит, $\sup_{\xi(\cdot)}|x(t)| \geqslant 2^{-R(t+1-k)}|\lambda|^t D_1$, где $D_1 := D|\lambda|^{-1}$. Поэтому

$$\boldsymbol{E}\sup|x(t)|^\eta = \sum_{k=0}^{t+1}\boldsymbol{E}\Big[\sup|x(t)|^\eta\Big|k \text{ потерь}\Big]\boldsymbol{P}\big[k \text{ потерь}\big] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{t+1} 2^{-\eta R(t+1-k)}|\lambda|^{\eta t}D_1^\eta\boldsymbol{P}\big[k \text{ потерь}\big] =$$

$$= D_1^\eta 2^{-\eta R(t+1)}|\lambda|^{\eta t}\sum_{k=0}^{t+1}2^{\eta Rk}\boldsymbol{P}\big[k \text{ потерь}\big] = D_1^\eta 2^{-\eta R(t+1)}|\lambda|^{\eta t}\sum_{k=0}^{t+1}2^{\eta Rk}C_{t+1}^k p^k(1-p)^{t+1-k} =$$

$$= D_1^\eta|\lambda|^{\eta t}2^{-\eta R(t+1)}\big[1-p+2^{\eta R}p\big]^{t+1} = D_1^\eta|\lambda|^{-\eta}\cdot\Big[|\lambda|^\eta\left(2^{-\eta R}(1-p)+p\right)\Big]^{t+1} \overset{\text{(П2.1)}}{=\!=}$$

$$\overset{\text{(П2.1)}}{=\!=} D_1^\eta|\lambda|^{-\eta}\cdot\Big[\varphi(\eta)\Big]^{t+1}.$$

Так как $\boldsymbol{E}\sup|x(t)|^\eta$ ограничено по t, справедливо второе неравенство (П2.1).

Достаточность. Декодер рекурсивно $\delta(t+0) := \mathfrak{F}[\delta(t-0), s(t)], \delta(0) = \delta_0 > 0$ строит оценку $\delta(t) > 0$ точности стабилизации $|x(t)| \leqslant \delta(t-0)$. Ввиду информационной обратной связи в момент t кодер узнает $s(t-1)$ и имеет возможность дублировать вычисление $\delta(t-0)$. В этот момент он делит интервал $[-\delta(t-0), \delta(t-0)] \ni x(t)$ на 2^R подынтервалов равной длины $2^{-(R-1)}\delta(t-0)$ и посылает по каналу номер подынтервала, содержащего состояние $x(t)$, закодировав этот номер в виде R-битового пакета. Если пакет достигает декодера, последний принимает середину соответствующего интервала как оценку $\widehat{x}(t)$ текущего состояния $|x(t)-\widehat{x}(t)| \leqslant 2^{-R}\delta(t-0)$. Управление $u(t)$ выбирается так, чтобы $\widehat{x}(t) \xrightarrow{u(t)} x(t+1) = 0$ при $\xi(t) = 0$, т.е. $u(t) := -\lambda\widehat{x}(t)$. Фактически

$$|x(t+1)| = |\lambda x(t) + u(t) + \xi(t)| \leqslant |\lambda||x(t) - \widehat{x}(t)| + D \leqslant 2^{-R}|\lambda|\delta(t-0) + D$$

и поэтому

$$\delta(t+0) := 2^{-R}|\lambda|\delta(t-0) + D \quad \text{при} \quad I(t) = 0.$$

В случае потери пакета $u(t) := 0$ и поэтому

$$|x(t+1)| = |\lambda x(t) + \xi(t)| \leqslant |\lambda||x(t)| + D \leqslant |\lambda|\delta(t-0) + D,$$
$$\delta(t+0) := |\lambda|\delta(t-0) + D \quad \text{при} \quad I(t) = 1.$$

Построение гарантирует, что $|x(t)| \leqslant \delta(t-0)\ \forall t$.

Применяя элементарное неравенство $(a+b)^\eta \leqslant (1+\varepsilon)a^\eta + \alpha(\varepsilon,\eta)b^\eta\ \forall a,b \geqslant 0$ (где $\varepsilon > 0$ — малый параметр) к рекурсии

$$\delta(t+0) = \underbrace{|\lambda|\Big[2^{-R}[1-I(t)] + I(t)\Big]\delta(t-0)}_{a} + \underbrace{D}_{b},$$

и учитывая, что $I(t)$ независимо от $\delta(t-0)$, получаем:

$$\delta^\eta(t+0) \leqslant (1+\varepsilon)|\lambda|^\eta\Big[2^{-R\eta}[1-I(t)] + I(t)\Big]\delta^\eta(t-0) + \alpha(\varepsilon,\eta)D^\eta,$$

$$\boldsymbol{E}\delta^\eta(t+0) \leqslant (1+\varepsilon)\underbrace{|\lambda|^\eta\Big[2^{-R\eta}[1-p]+p\Big]}_{=\varphi(\eta)<1 \text{ в силу (П2.1)}}\boldsymbol{E}\delta^\eta(t-0) + \alpha(\varepsilon,\eta)D^\eta.$$

Выбирая ε достаточно малым, добиваемся неравенства $(1+\varepsilon)\varphi(\eta) < 1$ и, следовательно, ограниченности $\boldsymbol{E}\delta(t-0)^\eta$, а значит и ограниченной погрешности стабилизации $\boldsymbol{E}|x(t)|^\eta \leqslant \boldsymbol{E}\delta(t-0)^\eta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nair G. N., Fagnani F., Zampieri S., Evans R.* Feedback control under data rate constraints: An overview // Proc. IEEE. 2007. V. 95. No. 1. p. 108–137.

2. *Baillieul J., Antsaklis P. J.* Control and communication challenges in networked real-time systems // Proc. IEEE. Spec. Issue on Technology of Networked Control Syst. 2007. V. 95. No. 1. p. 9–28.

3. *Hespanha J., Naghshtabrizi P., Xu Y.* A survey of recent results in networked control systems // *Proc. IEEE.* Spec. Issue on Technology of Networked Control Syst. 2007. V. 95. No. 1. p. 138–162.

4. Control in an information rich world: report of the panel on future directions in control, dynamics, and systems / Ed. R. Murray. Pasadena: Caltech, 2002. http://www.cds.caltech.edu/˜murray/cdspanel/.

5. *Widrow B.* Statistical analysis of amplitude-quantized sampled-data systems // Trans. AIEE. 1961. V. 79. No. 2. p. 555–567.

6. *Лиу Б., Канеко Т.* Анализ погрешностей цифровых фильтров, реализуемых арифметическими операциями с плавающей запятой // *ТИИЭР.* 1969. Т. 57, № 10. С. 49—63.

7. *Лиу Б.* Влияние конечной длины слова на точность цифровых фильтров // *Зарубежная радиоэлектроника.* 1973. № 6.

8. Введение в цифровую фильтрацию / Под ред. Р. Богнера и А. Константинидиса. М.: Мир, 1976.

9. *Аренс В. Д., Федоров С. М., Хитрик М. С., Лучко С. В.* Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами / Под ред. М. С. Хитрика и С. М. Федорова. Изд. 2-е. М: «Машиностроение», 1976.

10. *Gray R. M., Neuhoff D. L.* Quantization // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. p. 2325–2383.

11. *Delchamps D. F.* Extracting state information from a quantized output record // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. p. 365–372.

12. *Delchamps D. F.* Stabilizing a linear system with quantized state feedback //IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. V. 35. No. 8. p. 916–924.

13. *Koplon R., Sontag E. D.* Linear systems with sign-observations // SIAM J. Control Optim. 1993. V. 31. No. 5. p. 1245–1266.

14. *Feely O.* A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos and their application to sigma-delta modulators // Int. J. Circuit Theory Applicat. 1997. V. 25. p. 347–367.

15. *Baillieul J.* Feedback coding for information-based control: Operating near the data rate limit / Proc. 41st IEEE Conf. on Decision Control. V. ThP02-6. Las Vegas, Nevada, USA, 2002. Dec. p. 3229–3236.

16. *Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.* Теория нелинейных импульсных систем. M: «Наука», 1973.

17. *Tou J. T.* Optimum Design of Digital Control Systems. N.Y.: Academic, 1963.

18. *Lewis J. B., Tou J. T.* Optimum sampled-data systems with quantized control signals // Trans. AIEE. 1965. V. 82. No. 2. p. 195–201.

19. *Larson R. E.* Optimum quantization in dynamic systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. V. 12. p. 162–168.

20. *Marleau R. S., Negro J. E.* Comments on "Optimum quantization in dynamic systems" // IEEE Trans. Automat. Contr. 1972. V. 4. p. 273–274.

21. *Fischer T. R.* Optimal quantized control // IEEE Trans. Automat. Contr. 1982. V. 27. No. 4. p. 996–998.

22. *Larson R. E., Tse E.* Author's reply // IEEE Trans. Automat. Contr. 1972. V. 4. p. 274–275.

23. *Curry R. E.* A separation theorem for nonlinear measurements // IEEE Trans. Automat. Contr. 1969. V. 14. p. 561–569.

24. *Tatikonda S., Sahai A., Mitter S.* Control of LQG systems under communication constraints // Proc. 37th IEEE Conf. on Decision Control. V. WP04. Tampa, Florida USA, IEEE, 1998. p. 1165–1170.

25. *Tatikonda S., Sahai A., Mitter S.* Control of LQG systems under communication constraints // Proc. Amer. Control Conf. San Diego, California USA, AACC. 1999. p. 2778–2782.

26. *Brockett R. W., Liberzon D.* Quantized feedback stabilization of linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2000. V. 45. No. 7. p. 1279–1289.

27. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Optimal state estmation in networked systems with asynchronous communication channels and switched sensors // Proc. 40th IEEE Conf. on Decision Control. V. TuM13. Orlando, Florida USA, IEEE, 2001. p. 825–830.

28. *Nair G. N., Evans R. J.* Mean square stabilisability of stochastic linear systems with data rate constraints // Proc. 41st IEEE Conf. on Decision Control. V. WeM02. Las Vegas, Nevada USA, IEEE, 2002. p. 1632–1637.

29. *Williamson D.* Finite wordlength design of digital Kalman filters for state estimation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1985. V. AC-30. No. 10. p. 930–939.

30. *Goodman D. J., Gersho A.* Theory of an adaptive quantizer // IEEE Trans. Commun. 1974. V. COM-22. No. 8. p. 1037–1045.

31. *Zhang S. D., Lockhart G. B.* Design and simulation of an efficient adaptive delta modulation embedded coder // IEE Proc. Vis. Image Signal Process. 1995. V. 142. No. 3. p. 155–160.

32. *Zierhofer C. M.* Adaptive sigma-delta modulation with one-bit quantization // IEEE Trans. Circuits Syst. II. 2000. V. 47. No. 5. p. 408–415.

33. *Aldajani M. A., Sayed A. H.* Stability and performance analysis of an adaptive sigma-delta modulator // IEEE Trans. Circuits Syst. II. 2001. V. 48. No. 3. p. 233–244.

34. *Venayagamoorthy G. K., Zha W.* Comparison of nonuniform optimal quantizer designs for speech coding with adaptive critics and particle swarm // IEEE Trans. Industry Applications. 2007. V. 43. No. 1. p. 238–244.

35. *Golding L. S., Schultheiss P. M.* Study of an adaptive quantizer // Proc. IEEE. 1967. V. 55. No. 3. p. 293–297.

36. *Gomez-Estern F., Canudas de Wit C., Rubio F., Fornés J.* Adaptive delta-modulation coding for networked controlled systems // Proc. Amer. Contr. Conf. N.Y., USA, 2007. Jul. 11–13. FrA20.6.

37. *Andrievsky B., Fradkov A. L., Peaucelle D.* State estimation over the limited-band communication channel for pitch motion control of LAAS Helicopter benchmark // Proc. 17th IFAC Symp. Aut. Contr. Aerospace (ACA'2007). Toulouse, France, 2007.

38. *Andrievsky B.* Adaptive coding for transmission of position information over the limited-band communication channel // Proc. 9th IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP'2007). Saint Petersburg, Russia: IFAC, 2007. Aug. 29–31.

39. *Zheng J., Duni E. R., Rao B. D.* Analysis of multiple-antenna systems with finite-rate feedback using high-resolution quantization theory // IEEE Trans. Signal Processing. 2007. V. 55. No. 4. p. 1461–1475.

40. *Rotea M. A., Williamson D.*. Optimal realizations of finite wordlength digital filters and controllers // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1995. V. 42. No. 2. p. 61–72.

41. *Гольденберг Л. М., Левчук Ю. П., Поляк М. Н.* Цифровые фильтры. М.: Связь, 1974.

42. *Ushio T., Hirai K.* Chaos in non-linear sampled-data control systems // Int. J. Contr. 1983. V. 38. No. 5. p. 1023–1033.

43. *Ushio T., Hsu C.* Chaotic rounding error in digital control systems // IEEE Trans. Circuits Syst. 1987. V. 34. p. 133–139.

44. *Ushio T., Hirai K.* Chaotic behavior in piecewise-linear sampled-data control systems // Int. J. Nonlinear Mech. 1985. V. 20. No. 5/6. p. 493–506.

45. *Delchamps D. F.* Some chaotic consequences of quantization in digital filters and digital control systems // Proc. ISCAS '89. 1989. p. 602–605.

46. *Delchamps D. F.* The ‘stabilization’ of linear systems with quantized feedback / Proc. 27th IEEE Conf. on Decision Control. V. WP1. Austin, Texas, USA, IEEE, 1988. p. 405–410.

47. *Wong W. S., Brockett R. W.* State estimation with finite communication bandwidth constraints // Proc. 34th IEEE Conf. on Decision Control. New Orleans, LA: 1995. p. 1400–1401.

48. *Wong W. S., Brockett R. W.* Systems with finite communication bandwidth constraints – part I: state estimation problems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. 42. No. 9. p. 1294–1299.

49. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication // *Bell Syst. Tech. J.* 1948. V. 27. p. 379–423, 623–656. (Рус. пер. *Шеннон К.* Математическая теория связи / Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 243–332.)

50. *Li X., Wong W. S.* State estimation with communication constraints // Systems & Control Letters. 1996. V. 28. p. 49–54.

51. *Nair G. N., Evans R. J.* State estimation via a capacity-limited communication channel // Proc. 36th IEEE Conf. on Decision Control. V. WM09. San Diego, Califomia USA, IEEE, 1997. p. 866–871.

52. *Zhang Z., Berger T.* Estimation via compressed information // IEEE Trans. Inform. Theory. 1989. V. 34. No. 2. p. 198–211.

53. *Han T. S., Amari S.* Parameter estimation with multiterminal data compression // IEEE Trans. Inform. Theory. 1995. V. 41. No. 6. p. 1802–1833.

54. *Han T. S., Amari S.* Statistical inference under multiterminal data compression // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. No. 6. p. 2300–2324.

55. *Borkar V. S., Mitter S. K.* LQG Control with Communication Constraints / Research report LIDS-P-2326. 1995. Dec. P. 12.

56. *Shoham Y., Gersho A.* Efficient bit allocation for an arbitrary set of quantizers //IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1988. V. 36. No. 9. p. 1445–1453.

57. *Gersho A.* Optimal nonlinear interpolative vector quantization // IEEE Trans. Comput. 1990. V. 38. No. 9. p. 1285–1287.

58. *Zeger K., Vaisey J., Gersho A.* Globally optimal vector quantizer design by stochastic relaxation // IEEE Trans. Signal Processing. 1992. V. 40. No. 2. p. 310–322.

59. *Bansal R., Basar T.* Simultaneous design of measurement and control strategies for stochastic systems with feedback // Automatica. 1989. V. 25. No. 5. p. 679–694.

60. *Gabor G., Gyorfi Z.* Recursive Source Coding. NY: Springer-Verlag, 1986.

61. *Tatikonda S., Sahai A., Mitter S.* Stochastic linear control over a communication channel // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49. No. 9. p. 1549–1561.

62. *Горбунов А. К., Пинскер М. Ш.* Эпсилон-энтропия и скорость создания сообщений без предвосхищения и с прогнозом // Пробл. передачи информ. 1973. Т. 9. № 3, С. 12–21.

63. *Chou J., Chen S., Horng I.* Robust stability bound on linear time-varying uncertainties for linear digital control systems under finite wordlength effects // *JSME Int. J. Ser. C.* 1996. V. 39. p. 767–771.

64. *Feng X., Loparo K.* Active probing for information in control systems with quantized state measurements: a minimum entropy approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. 42. p. 216–238.

65. *Wong W. S., Brockett R. W.* Systems with finite communication bandwidth constraints – II: stabilization with limited information feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44. No. 5. p. 1049–1053.

66. *Гелиг А. Х, Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

67. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // *Матем. сб.* 1960. Т. 51. № 1. С. 99–128.

68. *Morse A. S.* Supervisory control of families of linear set-point controllers – Part 1: Exact matching // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. V. 41. No. 10. p. 1413–1431.

69. *Delvenne J.-C.*. An optimal quantized feedback strategy for scalar linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2006. V. 51. No. 2. p. 298–303. http://www.inma.ucl.ac.be/ delvenne/delvenne.ps.

70. *Fagnani F.* Chaotic quantized feedback stabilizers: the scalar case // Communicat. informat. syst. 2004. V. 4. No. 1. p. 53–72.

71. *Fagnani F., Zampieri S.* Stability analysis and synthesis for scalar linear systems with a quantized feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. V. 48. No. 9. p. 1569–1584.

72. *Fagnani F., Zampieri S.* Quantized stabilization of linear systems: complexity versus performance // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49. No. 9. p. 1534–1548.

73. *Elia N., Mitter S. K.* Stabilization of linear systems with limited information // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. 46. No. 9. p. 1384–1400.

74. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

75. *Isidori A.* Semiglobal robust regulation of nonlinear systems // Lecture Notes Control Informat. Sci. 1996. V. 215. P. 27.

76. *Khalil H. K., Esfandiari F.* Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 1993. V. 38. p. 1412–1415.

77. *Lin Z., Saberi A.* Robust semiglobal stabilization of minimumphase input-output linearizable systems via partial state and output feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 1995. V. 40. p. 1029–1041.

78. *Elia N.* Coarsest quantizer density for quadratic stabilization of two-input linear systems // Proc. 10th Mediterranean Conf. on Control and Automat. (MED2002). Lisbon, Portugal, 2002.

79. *Elia N., Frazzoli E.* Quantized stabilization of two-input linear systems: a lower bound on the minimal quantization density / HSCC 2002, LNCS 2289 / Ed. C. J. Tomlin, M. R. Greenstreet. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. p. 179–193.

80. *Elia N.* Control-oriented feedback communication schemes / Proc. 42nd IEEE Conf. on Decision Control. V. ThA03. Maui, Hawaii, USA, 2003. p. 3161–3166.

81. *Schalkwijk J. P. M.* A coding scheme for additive noise channels with feedback – II: bandlimited signals // IEEE Trans. Inform. Theory. 1966. V. IT-12. No. 2. p. 183–189.

82. *Schalkwijk J. P. M., Kailath T.* A coding scheme for addtive noise channels with feedback – I: no bandwidth constraint // IEEE Trans. Inform. Theory. 1966. V. IT-12, No. 2. p. 172–182.

83. *Ishii H., Francis B. A.* Quadratic stabilization of sampled-data systems with quantization // Automatica. 2003. V. 39. p. 1793–1800.

84. *Ishii H., Francis B. A.* Stabilizing a linear system by switching control with dwell time // IEEE Trans. Automat. Contr. 2002. V. 47. No. 12. p. 1962–1973.

85. *Shannon C. E., Weaver W.* The Mathematical Theory of Communication. Urbana: Univer. of Illinois Press, 1949.

86. *Тартаковский Г. П.*. Теория информационных систем. М.: Физматкнига, 2005.

87. *Фано Р.* Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965.

88. *Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш.* Курс теории информации. М.: Наука, 1982.

89. *Острем К., Виттенмарк Б. В.* Системы управления с ЭВМ / Пер. с англ. под ред. С.П. Чеботарева. М. Мир. 1987.

90. *Curry R. E.* Estimation and Control with Quantized Measurements. Cambridge, MA: MIT Press, 1970.

91. *Matveev A. S., Savkin A. V.* The problem of LQG optimal control via a limited capacity communication channel // Syst. & Control Lett. 2004. V. 53. p. 51–64.

92. *Borkar V., Mitter S., Tatikonda S.* Optimal sequential vector quantization of Markov sources // SIAM J. Control Optimization. 2001. V. 1. No. 40. p. 135–148.

93. *Şimşek T., Jain R., Varaiya P.* Scalar estimation and control with noisy binary observations // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49. No. 9. p. 1598–1603.

94. *Mitter S. K.* Control with limited information: the role of systems theory and information theory. ISIT 2000 plenary talk // IEEE Information Theory Society Newsletter. 2000. p.1–23.

95. *Mitter S. K.* Control with limited information // *Europ. J. Control.* 2001. V. 7. p. 122–131.

96. *Nair G. N., Evans R. J.* Stabilization with data-rate-limited feedback: tightest attainable bounds // Syst. & Control Lett. 2000. V. 41. p. 49–56.

97. *Nair G. N., Evans R. J.* Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates // SIAM J. Control Optim. 2004. V. 43. No. 2. p. 413–436.

98. *Sahai A.* Anytime Information Theory, PhD Thesis. Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2001. P. 175. http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/8770.

99. *Tatikonda S.* Control Under Communication Constraints. Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2000. P. 225. PhD Thesis. http://hdl.handle.net/1721.1/16755.

100. *Witsenhausen H.* On the structure of real-time source coders // Bell Syst. Tech. J. 1979. V. 58. p. 1437–1451.

101. *Sahai A.* The necessity and sufficiency of anytime capacity for control over a noisy communication link // Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision Control. V. WeB02. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE, 2004. p. 1896–1901.

102. *Sahai A., Mitter S.* The necessity and sufficiency of anytime capacity for stabilization of a linear system over a noisy communication link. Part I: scalar systems // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. No. 8. p. 3369–3395. (preprint: arXiv: cs.IT/0601007).

103. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Multirate stabilization of linear multiple sensor systems via limited capacity communication channels // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 44. No. 2. p. 584–618.

104. *Nair G. N., Evans R. J.* Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates // Automatica. 2003. V. 39. p. 585–593.

105. *Nair G. N., Evans R. J., Caines P. E.* Stabilising decentralised linear systems under data rate constraints // Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision Control. V. ThC10. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE, 2004. p. 3992–3997.

106. *Dembo A., Cover T. M., Thomas J. A.* Information theoretic inequalities // IEEE Trans. Inform. Theory. 1991. V. 37. No. 6. p. 1501–1518.

107. *Matveev A. S., Savkin A. V.* An analogue of Shannon information theory for detection and stabilization via noisy discrete communication channels // SIAM J. Contr. Optimizat. 2007. V. 46. No. 4. p. 1323–1361.

108. *Колмогоров А. Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. № 5. С. 861–864.

109. *Колмогоров А. Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 754–755.

110. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.*. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

111. *Мартин Н., Инглевд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.

112. *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.

113. *Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H.* Topological entropy // Trans. Amer. Mathemat. Society. 1965. Vol. 114. No. 2. p. 309–319.

114. *Nair G. N., Evans R. J., Mareels I., Moran W.* Topological feedback entropy and nonlinear stabilization // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49. No. 9. p. 1585–1597.

115. *Savkin A. V.* Analysis and synthesis of networked control systems: topological entropy, observability, robustness, and optimal control // Automatica. 2006. V. 42. No. 1. p. 51–62.

116. *Bowen R.* Equilibrium States and Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

117. *Baillieul J.* Feedback designs for controlling device arrays with communication channel bandwidth constraints // Proc. 4th ARO Workshop on Smart Structures. Ed. B. Pasik-Duncan. Ser. Lecture Notes in Control and Informat. Sci. New York: Springer-Verlag, 2002. p. 35–57.

118. *Baillieul J.* Feedback designs in infomation-based control // Proc. Workshop Stochastic Theory and Control. Ed. B. Pasik-Duncan. Ser. Lecture Notes in Control and Informat. Sci. New York: Springer-Verlag, 2002. p. 35–57.

119. *Hespanha J. P., Ortega A., Vasudevan L.* Towards the control of linear systems with minimum bit-rate // Proc. Int. Simp. Mathemat. Theory of Networks and Syst. Notre Dame, USA, 2002. P. 15.

120. *Nair G. N., Evans R. J.* State estimation under bit-rate constraints // Proc. 37th IEEE Conf. on Decision Control. V. WA09. Tampa, Florida USA, IEEE, 1998. p. 251–256.

121. *Nair G. N., Evans R. J.* A finite-dimensional coder-estimator for rate-constrained state estimation / Proc. 14th IFAC World Congress. Beijing, China, 1999. p. 19–24.

122. *Tatikonda S., Mitter S.* Control under communication constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49. No. 7. p. 1056–1068.

123. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Stabilization of multisensor networked control systems with communication constraints // Proc. 5th Asian Control Conf. Melbourne, Australia, 2004. p. 1905–1913.

124. *Nair G. N., Dey S., Evans R. J.* Communication-limited stabilizability of jump linear systems // Proc. 15th Int. Symp. Mathemat. of the Networked Syst. USA, Univ. of Notre Dame, 2002.

125. *Nair G. N., Dey S., Evans R. J.* Infimum data rates for stabilising Markov jump linear systems // Proc. 42nd IEEE Conf. on Decision Control. V. TuP06. Maui, Hawaii USA, IEEE, 2003. p. 1176–1181.

126. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

127. *Liberzon D.* Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals // Automatica. 2003. V. 39. p. 1543–1554.

128. *Liberzon D., Nešić D.*. Input-to-state stabilization of linear systems with quantized state measurements // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V. 52. No. 2. p. 767–781.

129. *Verriest E., Egerstedt M.* Control with delayed and limited information: a first look / Proc. 41st IEEE Conf. on Decision Control. Las Vegas, N.V., 2002. p. 1231–1236.

130. *Petersen I. R., Savkin A. V.* Multi-rate stabilization of multivariable discrete-time linear systems via a limited capacity communication channel // Proc. 40th IEEE Conf. on Decision Control. V. TuA11. Orlando, Florida USA, IEEE, 2001. p. 304–309.

131. *Sontag E. D., Wang Y.* New chracterizations of input-to-state stability // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. V. 41. No. 9. p. 1283–1294.

132. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Stabilization of stochastic linear plants via limited capacity stochastic communication channels // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision Control. San Diego, C.A., 2006. p. 484–489.

133. *Körner J., Orlitsky A.* Zero-error information theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. No. 6. p. 2207–2229.

134. *Shannon C. E.* The zero error capacity of a noisy channel // *IRE Trans. Informat. Theory.* 1956. Vol. IT-2. p. 8–19. (Рус. перев. *Шеннон К. Э.* Пропускная способность канала с шумом при нулевой ошибке / Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 464–487.)

135. *Ahlswede R., Cai N., Zhang Z.* Erasure, list, and detection zero-error capacities for low noise and a relation to identification // IEEE Trans. Inform. Theory. 1996. V. 42. No. 1. p. 55–62.

136. *Csiszar I., Narayan P.* Secrecy capacities for multiple terminals // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. V. 50. No. 2. p. 3047–3061.

137. *Овсеевич И. А.* Пропускная способность случайных каналов с обратной связью и согласование источников с такими каналами // Пробл. передачи информ. 1968. Т. 4. С. 52–59.

138. *Verdú S.* Fifty years of Shannon theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. No. 6. p. 2057–2078.

139. *Добрушин Р. Л.* Передача информации по каналу с обратной связью // Теория вероятн. и ее примен. 1958. Т. 3, 4. С. 395–412.

140. *Ebert P. M.* The capacity of the gaussian channel with feedback // Bell Syst. Tech. J. 1970. V. 49. p. 1705–1712.

141. *Пинскер М. С., Добрушин Р. Л.* Память увеличивает пропускную способность // *Пробл. передачи информ.* 1969. Т. 5. С. 94–95.

142. *Зигангиров К. Ш.* Верхние оценки вероятности ошибки для каналов с обратной связью // *Пробл. передачи информ.* 1970. Т. 6. № 2. С. 87–92.

143. *Tatikonda S., Mitter S.* Control over noisy channels // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. V. 49. No. 7. p. 1196–1201.

144. *Witsenhausen H.* Separation of estimation and control for discrete time systems // Proc. IEEE. 1971. V. 59. No. 11. p. 1557–1566.

145. *Kobayashi H., Hanafusa H., Yoshikawa T.* Controllability under decentralized information structure // IEEE Trans. Automat. Contr. 1978. V. 23. p. 182—-188.

146. *Matveev A. S., Savkin A. V.* On a problem related to application of digital networked communication technology to stabilization of noisy plants over noisy channels // Proc. IEEE Conf. on Control Appl. Munich, Germany, 2006. p. 2072–2077.

147. *Matveev A. S., Savkin A. V.* An analogue of Shannon information theory for networked control systems. Stabilization via a noisy discrete channel // Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision Control. V. FrA11. Atlantis, Paradise Island Bahams, IEEE, 2004. p. 4491–4496.

148. *Matveev A. S., Savkin A. V.* An analogue of Shannon information theory for networked control systems: State estimation via a noisy discrete channel // Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision Control. V. FrA11. Atlantis, Paradise Island Bahams, IEEE, 2004. p. 4485–4490.

149. *Matveev A. S.* State estimation via limited capacity noisy communication channels // *Mathematics of Control, Signals, and Systems.* 2008. V. 20. No. 1. p. 1–35.

150. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Zero error capacity as the border of the domain of almost sure observability over noisy channels // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision Control and Europ. Control Conf. CDC-ECC'05. Seville, Spain, 2005. p. 3219–3224.

151. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Shannon zero error capacity in the problems of state estimation and stabilization via noisy communication channels // Int. J. Control. 2007. V. 80. No. 2. p. 241–255.

152. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Almost sure nonobservability and nonstabilizability of unstable noisy plants via communication channels with packet losses // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control and Europ. Control Conf. CDC-ECC'05. Seville, Spain, 2005. p. 7338–7341.

153. *Matveev A. S., Savkin A. V.* Comments on "Control over noisy channels" and relevant negative results // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 12. p. 2105–2110.

154. *Ling Q., Lemmon M. D.* Stability of quantized control systems under dynamic bit assignment // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 5. p. 734–740.

155. *Şimşek T., Varaiya P.* Noisy data-rate limited estimation: renewal codes // Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control. V. ThA03. Maui, Hawaii USA, IEEE, 2003. p. 3148–3154.

156. *Jain R., Şimşek T., Varaiya P.* Control under communication constraints // Proc. 41st IEEE Conf. on Decision Control. V. ThP02. Las Vegas, Nevada, USA, IEEE, 2002. p. 3209–3216.

157. *Martins N. C., Dahleh M. A., Elia N.* Feedback stabilization of uncertain systems using a stochastic digitat link // Proc. 43rd IEEE Conf. on Declsion Control. V. WeB02. Atlantis, Paradise Island, Bahamas, IEEE, 2004. p. 1889–1895.

158. *Martins N. C., Dahleh M. A., Elia N.* Feedback stabilization of uncertain systems in the presence of a direct link // IEEE Trans. Automat. Contr. 2006. V. 51. No. 3. p. 438–447.

159. *Martins N. C.*. Information theoretic aspects of the control and mode estimation of stochastic systems. PhD Thesis. MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2004.

160. *Minero P., Franceschetti M., Dey S., Nair G.* Data rate theorem for stabilization over fading channels // Proc. 45th Ann. Allerton Conf. on Communic., Control and Comput. Urbana-Champaign, USA: Uni. of Illinois, 2007.

161. *Хэмминг Р. В.* Теория кодирования и теория информации. М.: Радио и связь, 1983.

162. *Сидельников В. М.* Теория кодирования. М.: Физматлит, 2008.

163. *Gong Zh., Aldeen M.* Stabilization of Decentralized Control Systems // *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control.* 1997. Vol. 7, no. 1. pp. 1–16.

164. *Anderson B. D. O., Moore J. B.* Time-varying feedback laws for decentralized control // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1981. Vol. 26, no. 5. pp. 1133-1138.

165. *Lee S., Meerkov M., Runolfsson T.* Vibrational Feedback Control: Zero placement capabilities // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1987. Vol. 52, no. 5. pp. 604-611.

166. *Matveev A. S., Savkin A. V.* State Estimation and Control over Communication Networks. Boston: Birkhäuser, 2009.

167. *Nahi N. E.* Optimal recursive estimation with uncertain observations // IEEE Trans. Inform. Theory. 1969. V. 15. p. 457–462.

168. *Yu M., Wang L., Chu T., Xie G.* Stabilization of networked control systems with data packet dropout and network delays via switching system approach // Proc. IEEE Conf. on Decision Control. Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004. p. 3539–3544.

169. *Xiong J., Lam J.* Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss // Automatica. 2007. V. 43. p. 80–87.

170. *Sahai A.* Source coding and channel requirements for unstable processes. 2007. http//:www.eecs.berkeley.edu/| sahai/Papers/anytime.pdf.

171. *Feinstein A.* A new basic theorem of information theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1954. V. 4. No. 4. p. 2–22.

172. *Файнстейн А.* Основы теории информации. М.: ИЛ, 1960.

173. *Sahai A., Xu Q.* The anytime reliability of constrained packet erasure channels with feedback // Proc. 42nd Allerton Conf. on Communicat., Control, and Computat. Monticello, IL: 2004. p. 200–209.

174. *Sahai A., Xu Q.* The anytime reliability of the AWGN+erasure channel with feedback / Proc. 42nd Allerton Conf. on Communicat., Control, and Computat. Monticello, IL: 2004. p. 300–309.

175. *Sahai A., Avestimehr S., Minero P.* Anytime communication over the Gilbert–Elliott channel with noiseless feedback // Proc. IEEE Int. Simp. on Informat. Theory. Adelaide, Australia, 2005. p. 1783–1787.

176. *Savkin A. V.* Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision Control and the Europ. Control Conf. CDC-ECC'05. Seville, Spain, 2005. p. 8174–8178.

177. *Якубович В. А.*. Методы исследования нелинейных систем управления. Гл. 2, 3. М.: Наука, 1975.

178. *Cheng T. M., Savkin A. V.* Output feedback stabilisation of nonlinear networked control systems with non-decreasing nonlinearities: a matrix inequalities approach // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2007. V. 17. p. 387–404.

179. *Malyavej V., Savkin A. V.* The problem of optimal robust Kalman state estimation via limited capacity digital communication channels / V. Malyavej, A. V. Savkin // Syst. & Control Lett. 2005. V. 54. p. 283–292.

180. *Slepian D., Wolf J. K.* Noiseless coding for correlated information sources // IEEE Trans. Inform. Theory. 1973. V. 19. No. 4. p. 471–480.

181. *Tatikonda S. C.* Some scaling properties of large distributed control systems // Proc. 42nd IEEE Conf. on Decision Control. Maui, Hawaii, USA, 2003. p. 3142–3147.

182. *Nair G. N., Evans R. J.* Stabilizing decentralized linear systems under data rate constraints // Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision Control. Atlantis, Bahamas, 2004. p. 3992–3997.

183. *Liu J., Elia N.* Quantized control with applications to mobile vehicles // Proc. 41st IEEE Conf. on Decision Control. V. ThA01. Las Vegas, Nevada USA, IEEE, 2002. p. 2391–2396.

184. *Arcak M., Kokotovic P. V.* Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis // Automatica. 2001. V. 37. No. 12. p. 1923–1930.

185. *Liberzon D., Hespanha J. P.* Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 6. p. 910–915.

186. *De Persis C.* n-Bit stabilization of n-dimensional nonlinear systems in feedforward form // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 3, p. 299–311, 2005.

187. *De Persis C.* On stabilization of nonlinear systems under data rate constraints using output measurements // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2006. V. 16, p. 315–332.

188. *De Persis C., Nešić D.* Practical encoders for controlling nonlinear systems under communication constraints // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision Control and Europ. Control Conf. CDC-ECC'05. V. MoA13.3, Seville, Spain, Dec. 2005, p. 434–439.

189. *Savkin A. V., Cheng T. M.* Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V. 52. No. 4, pp. 730–735.

190. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Chaotic observer-based synchronization under information constraints // Physical Review E. 2006. V. 73. P. 066209.

191. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Adaptive observer-based synchronization of chaotic systems with first-order coder in presence of information constraints // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2008. V. 55. No. 6. p. 1685–1694.

192. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, p. 821.

193. *Fradkov A. L., Nijmeijer H., Markov A.* Adaptive observer-based synchronization for communications // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. No. 12, p. 2807–2814.

194. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

195. *Управление мехатронными вибрационными установками* / Б.Р. Андриевский, И.И. Блехман, Ю.А. Борцов и др. Под ред. И.И. Блехмана и А.Л. Фрадкова. Санкт-Петербург: Наука, 2001.

196. *Фрадков А. Л., Андриевский Б. Р.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, наблюдения и синхронизации / Сб.: «Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства». Под ред. А. Х. Гелига, Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова. М.: Физматлит, 2008. С. 452–499.

197. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // А и Т, 2006. №11. С. 33–37.

198. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999.

199. *Андриевский Б. Р. Фрадков А. Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab (уч. пос). СПб.: Наука, 2001.

200. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Synchronization of passifiable Lurie systems via limited-capacity communication channel // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2009. V. 56. No. 2. p. 430–439.

201. *Фрадков А. Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // А и Т. 1974. Т. 35, №12. С. 96–103.

202. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.

203. *Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л.* Исследование дискретных адаптивных систем управления непрерывными объектами с помощью непрерывных моделей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1975. Т. 5. С. 93–99.

204. *Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.

205. *Фрадков А. Л., Андриевский Б. Р.* Адаптивная синхронизация нелинейных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 10. С. 17–23.

206. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Controlled synchronization of one class of nonlinear systems under information constraints. 2007. Dec. http://arxiv.org/abs/0712.0636v1.

207. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Andrievsky A.* Observer-based synchronization of discrete-time chaotic systems under communication constraints // Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea, IFAC, 2008. http://www.ifac-papersonline.net/.

208. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Адаптивная синхронизация нелинейных систем одного класса при ограниченной пропускной способности канала связи / Управление большими системами. Вып. 25. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 48–83.

209. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Chaotic observer-based synchronization under information constraints // *Physical Review E.* 2008. V. 78. p. 036210 (1–6).

210. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Hybrid quantised observer for multi-input-multi-output nonlinear systems // Proc. 2008 IEEE Multi-conf. on Syst. and Control. USA, 2008. FrB03.3.

211. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Synchronization of nonlinear systems under information constraints // *Chaos.* 2008. V. 18, No. 3. p. 037109.

212. *Fradkov A. L., Andrievsky B.* Application of Passification Method to controlled synchronization of tree networks under information constraints // Proc. 3rd IEEE Multi-conf. on Syst. and Control (MSC 2009), St.Petersburg, Russia, 2009. p. 513–518.

213. *Hou L., Michel A. N., Ye H.* Some qualitative properties of sampled-data control systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. 42. No. 12. p. 1721–1725.

214. *Brockett R. W.* Stabilization of motor networks // Proc. 34th IEEE Conf. on Decision Control. 1995. Dec. p. 1484–1488.

215. *Lee K.-H., Petersen D. P.* Optimal linear coding for vector channels // IEEE Trans. Commun. 1976. V. COM-24. No. 12. p. 1283–1290.

216. *Braslavsky J. H., Middleton R. H., Freudenberg J. S.* Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels // Proc. 2004 Amer. Control Conf. Boston, MA, 2004. V. 6. p. 4903–4908.

217. *Braslavsky J. H., Middleton R. H., Freudenberg J. S.* Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V. 52, No. 8. p. 1391–1403.

218. *Freudenberg J. S., Braslavsky J. H., Middleton R. H.* Control over signal-to-noise ratio constrained channels: stabilization and performance // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision Control and Europ. Control Conf. CDC-ECC'05. Seville, Spain, 2005. p. 191–196.

219. *Zaborsky J.* An information theory viewpoint for the general identification problem // IEEE Trans. Autom. Contr. 1966. V. 11. No. 1. p. 130–131.

220. *Saridis G. N.* Entropy Formulation of Optimal and Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Contr. 1988. V. 33. No. 8. p. 713–721.

221. *Tsai Y. A., Casiello F. A., Loparo K. A.* Discrete-time entropy formulation of optimal and adaptive control problems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1992. V. 37. p. 1083–1088.

222. *Saridis G. N.* Entropy in Control Engineering. Singapore: World Scientific, 2001.

223. *Владимиров И. Г., Курдюков А. П., Семенов А. В.* Стохастическая проблема H_∞-оптимизации // Доклады РАН. 1995. Т. 343. №5. С. 607–609.

224. *Курдюков А. П., Максимов Е. А.* Решение стохастической задачи H_∞-оптимизации для линейных систем с параметрической неопределённостью // А и Т. 2006. №8. С. 112–141.

225. *Petersen I. R., James M. R., Dupuis P.* Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. V. 45. p. 398–412.

226. *Фрадков А. Л.* К единой теории управления, вычислений и связи. Доклад на сессии Научного совета РАН по теории управляемых процессов и автоматизации. ИПУ РАН, 3.04.2008 г. (совместно с Б. Р. Андриевским, А. С. Матвеевым). www.ipme.ru/ipme/labs/ccs/alf/f_apr08.pdf

227. *Hristu D., Morgansen K.* Limited communication control // Syst. & Control Lett. 1999. V. 37. No. 4. p. 193–205.

228. *Evans R., Krishnamurthy V., Nair G., Sciacca L.* Networked sensor management and data rate control for tracking maneuvering targets // IEEE Trans. Signal Processing. 2005. V. 53. No. 6. p. 1979–1991.

229. *La Scala B. F., Evans R. J.* Minimum necessary data rates for accurate track fusion // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision Control and Europ. Control Conf. CDC-ECC'05. 2005. V. ThIA20. Seville, Spain, IEEE, 2005. p. 6966–6971.

230. *Malyavej V., Manchester I. R., Savkin A. V.* Precision missile guidance using radar/multiple-video sensor fusion via communication channels with bit-rate constraints // Automatica. 2006. V. 42. p. 763–769.

231. *Эшби У. Р.* Введение в кибернетику. М.: Изд-во ИЛ. 1959.

232. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Сов. радио, 1958, 2-е изд. М.: Сов. радио, 1968, 3-е изд. М.: Наука, 1983.

233. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Memoirs & Proc. Manchester Literary Philosophical Soc. 1908. V. 52. No. 8. p. 1–10.

234. *Stephenson A.* On induced stability // Philos. Mag. 1909. V. 17. p. 765-–766.

235. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т.21. № 5. С. 588–597.

236. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике. // Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР. 1950 (14), С. 9-34.

237. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.

238. *Мееркова С. М.* Вибрационное регулирование // А и Т. 1973. №2. С. 34–43.

239. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: СПбГУ, 2005.

240. *Lovász L.* On the Shannon capacity of a graph // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. IT-25. p. 1–7.

Рис. 1. Система двумя сенсорами и актуаторами

Рис. 2. Характеристический граф.

Список иллюстраций