

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2006–2007 гг.

Под редакцией *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2007

ББК 22.25
Т78

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ, ПГУПС),
д-р техн. наук, проф. *В. И. Сливкер* (Гипростроймост, ПГУПС)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

**Труды семинара «Компьютерные методы в ме-
Т78 ханике сплошной среды». 2006–2007 гг. /** Под ред.
А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. — СПб.: Изд-во С.-Петерб.
ун-та, 2007. — 136 с.
ISBN 5-288-03941-0

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

© А. Л. Смирнов, Е. Ф. Жигалко,
сост., 2007

© Издательство С.-Петербургского
университета, 2007

ISBN 5-288-03941-0

УДЕРЖАТЬСЯ “НА ПЛЕЧАХ ГИГАНТОВ” (вместо предисловия)

Л.Н. Ясницкий

Предлагаемая в качестве вводной статья впервые была опубликована в январском выпуске 2005 г. пермской газеты “Новый компаньон” под названием “По ком звонит ANSYS, или Почему так часто стали падать самолеты, взрываться ракеты, рушиться здания”. Статья вызвала живой интерес, острую критику и длительную дискуссию в сети Интернет. В нашем сборнике статья публикуется с сокращениями, исправлениями и дополнениями, сделанными автором по результатам Интернет-дискуссии и многочисленных обсуждений.

“Когда погибает один человек — это трагедия, когда гибнут тысячи — это уже статистика”. Известное высказывание одного из самых мрачных диктаторов XX в. приходит на ум, когда слушаешь очередную передачу новостей XXI в.

Многие помнят, как в середине 80-х годов мир переживал гибель семи американских астронавтов. На глазах у миллионов телезрителей взорвался космический корабль “Челленджер”. Молодые, веселые астронавты приветливо помахали на прощание перед стартом, а через несколько секунд на экранах телевизоров — взволнованные лица их родственников, наблюдающих за падением осколков “Челленджера”.

Причина разрушения — не выдержал нагрузок твердотопливный ускоритель при возгорании резиновых уплотнителей. Почему не выдержал? Ведь его же рассчитывали на эксплуатационную прочность. Он должен был выдержать. А он не выдержал. Плохо рассчитывали?

Теперь — шаттл “Колумбия”. Краткие теленовости. Тот — при взлете, этот — перед посадкой. Не так красиво и не так подробно. Не показали астронавтов. Не показали лица родственников. На

фоне недавних терактов гибель нескольких астронавтов уж не такая большая трагедия. Причины разрушения “Колумбии” — опять не выдержала конструкция.

А что было между “Челленджером” и “Колумбией”? Десятки и сотни взорвавшихся ракет, упавших самолетов, затонувших кораблей. Был Чернобыль, был “Курск”. Был аквапарк. Были долгие выяснения причин. Были попытки списать все на террористов, на стечение обстоятельств. В качестве одной из возможных причин — “ошибки проектировщиков”.

Причина очень неприятная. Трагедия как бы удваивается. К случившейся трагедии добавляется еще одна — трагедия крайних.

Кто же эти крайние, которые должны быть выявлены и наказаны?

Как ни парадоксально, эти монстры — самые обычные люди. Это ученые, инженеры, конструкторы, технологи, которых множество. Я один из них.

Я инженер-прочник, не раз участвовал в создании сложных технических устройств. Много лет занимаюсь математическими основами методов прочностных расчетов. Я знаю, как ведутся проектные работы в лучших конструкторских бюро мира, и мне кажется, я знаю причину, почему в нашем XXI в. аварии и катастрофы учащаются с катастрофической быстротой.

Первый раз догадка пришла ко мне в 1993 г., когда я участвовал в международной конференции прочников в Саутгемптоне. В Англию тогда съехались ученые и инженеры из многих стран — из Америки, Японии, Франции, Израиля, Испании, Греции. Практически я был единственным представителем страны, которую в то время называли FSU, образованного от слов Former Soviet Union — бывший Советский Союз.

Конференцию проводил директор Уэссекского технологического института, известный специалист в области компьютерного математического моделирования профессор Карлос Бреббиа. На конференции обсуждались и причины недавней гибели “Челленджера”. Оказывается, его рассчитывали с помощью ранних версий программы ANSYS, которая в настоящее время широко применяется на многих российских предприятиях.

Я задал разработчикам “Челленджера” традиционный для со-

ветских прочнистов вопрос: “Как оценивалась погрешность расчетных результатов?” В ответ последовало: “Программа ANSYS сертифицирована, поэтому результаты расчетов погрешности не имеют”.

Как это не имеют? Ведь любой компьютер, какой бы мощный он ни был, имеет ограниченную разрядную сетку. Это значит, что после запятой может храниться ограниченное количество цифр, а те, которые не помещаются, отбрасываются или округляются. Даже самые простейшие вычисления, содержащие операции умножения, деления, возведения в степень, на компьютере обычно не могут быть выполнены абсолютно точно. В сложных компьютерных программах эти операции следуют одна за другой и погрешности округлений накапливаются. Не имеют вычислительной погрешности только математические формулы — до того, как в них подставили цифры и произвели вычисления.

Это прописные истины. Поэтому при всем своем уважении к американским коллегам я им не поверил. Более того, продолжая вести дискуссии с американскими инженерами — пользователями ANSYS, я понял, что они имели весьма смутное представление об элементарной теории погрешностей и поэтому свято верили в то, что им выдавал компьютер. Невероятно, но факт.

Тогда я обратился к организатору конференции профессору К. Бреббия с предложением дать мне возможность публично проанализировать доклады своих коллег и объяснить им причины неудач в освоении космоса.

Начать пришлось с краткого экскурса в историю.

Первыми, кто научились решать дифференциальные уравнения в частных производных и, таким образом, заложили основы современных расчетных методик, были великие французские математики Даламбер и Фурье. На основе их решений строились методики, позволявшие выполнять проектировочные расчеты различных изделий — машин, механизмов, строений. Так появился метод математического моделирования, основанный на решении краевых задач математической физики.

Дальнейшие усилия математиков на протяжении последующих полутора веков сводились к развитию метода Фурье–Даламбера, решению более широкого круга прикладных задач. Каждое новое решение было событием в математическом мире и отмеча-

лось присуждением премий и регалий. Математическое моделирование было доступно весьма ограниченному кругу математиков-профессионалов высочайшего класса, деятельность которых представляла собой творческие изыскания.

Ситуация в корне изменилась с появлением ЭВМ в середине XX в. Оказалось, что если разбить область решения краевой задачи на более мелкие подобласти и для каждой подобласти ввести упрощающие гипотезы, то процесс интегрирования дифференциальных уравнений можно свести к множеству элементарных арифметических операций. Таким образом, краевые задачи математической физики стало возможным решать с помощью ЭВМ “с позиции силы”, выполняя множество арифметических действий, получать решения в виде аналитических формул, а не массивов чисел. На смену классическим аналитическим методам пришли приближенные численные алгоритмы, с помощью которых удалось создать универсальные пакеты программ, оснащенные удобными сервисными средствами. Математическое компьютерное моделирование стало общедоступным, а математики-аналитики, утратив свои позиции, отошли в прошлое.

Последствия этого “прогресса” мы ощущаем с нарастающей частотой, слушая сообщения о падении самолетов, взрывах ракет, авариях на подводных лодках, обрушениях вполне современных зданий, таких как московский аквапарк. Одна из возможных причин этих катастроф — ненадежность результатов компьютерного математического моделирования, связанная с применением непрофессионалами приближенных численных методов решения краевых задач. Поясним эту мысль более подробно.

Американская программа ANSYS, с которой я впервые познакомился в Саутгемптоне, реализует один из численных методов решения краевых задач — метод конечных элементов. Теперь эта программа очень широко распространена в России. Она изучается студентами многих российских вузов. Ею чрезвычайно легко пользоваться. Не надо думать. Не надо делать сложных математических преобразований. Просто садитесь за компьютер, читайте HELP и нажимайте кнопки. Нажали, и компьютер нарисовал сложную конфигурацию тела, подлежащего расчету. Еще несколько кнопок, и введены краевые условия задачи. Рассчитываемое тело автоматиче-

ски разбивается на множество мелких элементов, а затем на экране монитора появляются расчетные результаты — картинки распределения напряжений и деформаций, переливающиеся всеми цветами радуги. Вполне правдоподобное деформированное состояние рассчитываемой конструкции. Вид сбоку, сверху, в разрезе. Красным цветом высвечиваются опасные интенсивности напряжений. Красота. Чувство гордости за развитие цивилизации, ощущение превосходства над великими математиками прошлых веков. Они за всю свою жизнь успевали решить одну-две краевые задачи, да и то для простых областей, а мы — по несколько задач в день. И ведь на этом деньги можно делать.

Я знаю случай, когда два наших бывших студента организовали фирму и выполняли нештучные заказы весьма солидных промышленных предприятий. На вопрос о погрешности расчетных результатов “специалисты” отвечали, совсем как американцы в Саутгемптоне — их программные пакеты имеют соответствующие сертификаты и лицензии. Не упоминая, однако, что в документации к американскому пакету ANSYS теперь имеется приписка о том, что разработчики пакета за правильность расчетных результатов и за возможные последствия ответственности не несут.

Но, может быть, проблема непрофессионального использования численных программных пакетов — это чисто организационная проблема, которую можно решить административными методами? Например, разрешить делать прочностные расчеты только организациям, имеющим соответствующий уровень квалификации.

Но, к сожалению, проблема здесь значительно глубже и сложнее.

Тогда, выступая в Саутгемптоне, я проанализировал возможности оценки погрешности результатов математического моделирования, получаемых численными методами, и сделал вывод, что надежных оценок не существует. Надежные оценки есть для “старых” аналитических методов. Аналитические решения мы всегда можем подставить в дифференциальные уравнения и проверить, насколько они им удовлетворяют. С массивами чисел, полученными “новыми” численными методами, мы этого сделать не можем. Нам остается только наблюдать, куда сходятся численные результаты при измельчении сетки элементов, на которые разбил ком-

пьютер рассчитываемую конструкцию. Здесь приверженцы численных методов обычно ссылаются на теорему, доказывающую сходимость численных результатов к точному решению краевой задачи. Но если посмотреть на доказательство этой теоремы, то можно обнаружить, что оно выполнено без учета того, что с измельчением сетки неизбежно растет спектральное число обусловленности матриц. Это значит, что компьютерные результаты совсем не сходятся к точному решению решаемой краевой задачи. Другими словами, сколько бы нам компьютер ни дробил сетку, сколько бы ни увеличивал точность своих расчетов, его результаты не приближаются к настоящему решению краевой задачи, и, значит, таким компьютерным решениям верить нельзя.

Тогда, в Саутгемптоне и в ходе последующих дискуссий мне постоянно приходилось объяснять, что означает обусловленность системы алгебраических уравнений. Систему линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными “икс” и “игрек” можно интерпретировать геометрически. В координатах икс–игрек каждое уравнение изображается прямой линией, а ее решение — это проекции точки пересечения линий на оси координат. Если определитель системы равен нулю, то линии параллельны, и если линии не сливаются в одну, то решения не существует. Если определитель достаточно большой, то линии пересекаются, и решение есть. Если же определитель маленький и стремится к нулю, то линии пересекаются под очень малым углом. Они почти сливаются. Точку пересечения трудно разглядеть. Она размыта. Метод Гаусса здесь неприменим. Точку пересечения линий мог бы найти итерационный метод. Но беда в том, что положение этой точки крайне нестабильно. Изменение угла наклона одной из линий на тысячные доли градуса приведет к тому, что точка пересечения линий сдвинется на километр. Таким образом, при малейшем изменении коэффициентов систем (возникшем при округлении) линии чуть-чуть сдвигаются, и эти “чуть-чуть” приводят к сильнейшему изменению координат точки пересечения линий. Малейшие погрешности вычисления коэффициентов матрицы (например, округление в сотом знаке после запятой) могут привести к значительным изменениям приближенного решения краевой задачи. В этом случае говорят, что система плохо обусловлена, т.е. коэффициенты системы плохо обуславлива-

ют ее решение. В некоторых книгах по методу конечных элементов, в частности Л.А.Розина [4], приводится формула, согласно которой обусловленность разрешающей системы МКЭ ухудшается пропорционально квадрату уменьшения размеров элемента. Контролировать этот процесс математики пока что не научились. И вряд ли научатся. Поэтому развитие МКЭ, связанное с измельчением сетки, неперспективно.

Неперспективны и другие пути развития МКЭ, потому что обусловленность систем ухудшается:

а) при всяком отклонении формы элементов от классических (от правильных треугольников, правильных многоугольников, правильных многогранников);

б) при стыковке элементов с разными физическими свойствами (коэффициентами Пуассона, модулями Юнга);

в) при ансамблировании сетки из разнородных элементов;

г) при применении МКЭ к системам дифференциальных уравнений более высоких порядков.

Итак, МКЭ — это инструмент для нахождения приближенных решений краевых задач. Его преимущества и недостатки известны. Многие понимают, что полностью доверять МКЭ-результатам нельзя. Но за неимением лучшего методом конечных элементов широко пользуются во всем мире. Кто-то с большей осторожностью, кто-то с меньшей.

Конечно, можно привести много примеров, когда численные компьютерные расчеты совпадают с точными аналитическими решениями простейших задач, называемых тестовыми. Но для таких задач и обусловленность, как правило, хорошая, а для сложных задач точных решений не существует. Можно сравнивать численные результаты с экспериментальными данными, но это обычно сложный и дорогостоящий путь, да и зачем нужны расчеты, которые потом надо обязательно проверять на натурном объекте?

Я далеко не уверен в том, что именно ANSYS виновен в гибели “Челленджера”, как и в том, что во всех мировых авариях и катастрофах виновен именно ANSYS и ему подобные МКЭ-программы. Но я бы хотел обратить ваше внимание и на то, что полностью доверять высоким правительственным комиссиям, расследующим причины катастроф, было бы тоже не совсем правильно. Попро-

буйте поставить себя на место председателя такой комиссии. Во-первых, установить что-нибудь наверняка, изучая обгоревшие обломки, чрезвычайно сложно, если вообще возможно. Возможных причин аварии, как правило, выдвигается несколько, и многие из них вполне правдоподобны. Вам предстоит выбрать одну, которая будет потом официальной. И в зависимости от вашего решения кто-то понесет наказание, чья-то судьба будет сломана. Проектировщиков развалившейся конструкции вы давно знаете как честных и порядочных людей. Вы знакомы с их родственниками. А тут еще “наезды”, намеки, предложения. И вы отчетливо понимаете, что в своем решении вы вполне можете ошибиться, так как у вас не хватает данных (а их и не может хватать). А если вы ошибетесь со своим вердиктом, то из-за вашей ошибки пострадают невинные люди. И стоит ли вам удваивать трагедию, если уже ничего не вернуть.

Чтобы понять, насколько объективны официальные заключения комиссий, я приведу более прозрачный и знакомый всем пример с обрушением московского аквапарка. Согласно официальному заключению правительственной комиссии (данные из Internet на январь 2005 г.) здание аквапарка рухнуло по двум причинам: не хватило одной колонны, поддерживающей крышу, и качество бетона не соответствовало нормам.

Большинство из вас — профессиональные прочнисты, и для вас комментарии излишни. А для тех, кто не видит абсурда, я это заключение прокомментирую.

Из заключения непонятно, кто забыл поставить колонну — проектировщики или строители, или же ее украли террористы. И что-то не верится, что при строительстве тысяч московских зданий десятки лет цемент всегда поставлялся высококачественным, а вот аквапарку достался плохой.

Цемент крали и, вероятно, будут красть всегда. Поэтому во всех расчетах всегда делается поправка “на дурака” — вводится коэффициент запаса прочности. А был ли он у московского аквапарка? Я думаю, что нет.

Давайте вспомним конструкцию аквапарка. Много колонн, массивная крыша, легкие стены-перегородки. Ни одной наклонной растяжки, или стропилы, обеспечивающей жесткость конструкции.

Отказавшись от наклонных растяжек (по-видимому, из эстети-

ческих соображений), проектировщики явно переоценили способность колонн работать на изгиб. Бетон оказался реальным — московским. Не имея наклонных растяжек (треугольников жесткости), конструкция потеряла устойчивость, вероятно, не выдержав боковых нагрузок.

Моя версия — это всего лишь версия, одна из многих. Но, допустим, что я прав. Я думаю, вы согласитесь со мной, что аквапарк спокойно стоял бы и стоял, если бы были наклонные растяжки, образующие треугольники жесткости. Стоял бы еще сто и двести лет, несмотря на московский цемент.

Кстати, четыре месяца спустя, после публикации моей газетной статьи на эту тему, в теленовостях прозвучало новое заключение правительственной комиссии по расследованию причин обрушения аквапарка. В качестве окончательной причины трагедии были признаны ошибки проектировщиков. Тут же было взято интервью у руководителя проекта, который заявил, что не виноват. По его словам, «во всем виновата компьютерная программа», которой он пользовался при расчете прочности колонн, поддерживающих крышу здания аквапарка.

Я не склонен думать, что обвинения в адрес компьютерной программы в дальнейшем будут признаны в качестве окончательной истины. Однако в любом случае все это свидетельствует о том, что проблема действительно существует и что затронутая тема в высшей степени актуальна.

Какой из этого всего следует сделать вывод?

А вывод я бы сделал такой. Увлечшись компьютерами, молодое поколение перестало учиться элементарному сопромату. Отсутствие треугольников жесткости можно увидеть не только в московском аквапарке. Я приглашаю вас посмотреть на конструкции новых торговых центров. Встречаются такие, у которых прозрачная часть крыши, называемая световым фонарем, в поперечном сечении образует треугольник, в котором . . . нет основания.

Вспомните конструкцию русской избы. Стропила крыши обязательно стянуты в нижней части поперечным бревном. Если разрезать поперечное бревно, то стропила разъедутся в разные стороны под тяжестью снега и крыша рухнет.

Конечно же, мне можно возразить, что современное строитель-

ное сооружение — это далеко не бревенчатая изба. Если качество бетона и стали соответствует нормам, то железобетонные стены и перекрытия могут выдерживать довольно значительные нагрузки, и поэтому упомянутые торговые центры в обозримом будущем, по видимому, не упадут. Но ведь металлическая арматура со временем ржавеет, а цемент воруют не только в Москве. Почему бы не взять поправку “на дурака” и не увеличить запас прочности так, как это рекомендует сопромат, — ввести треугольники жесткости путем установки, например, металлических стяжек. Почему-то современные проектировщики этим пренебрегают. Почему? Неужели сопромата не знают?

Если причины обрушения современных зданий, в конце концов, иногда как-то выясняются, то с расследованием причин авиационных катастроф дела обстоят гораздо хуже. Перед членами следственных комиссий, как правило, работниками заводов, создавших рухнувшие самолеты, ставится задача — “не запятнать честь своих коллективов!” В результате, по данным Межгосударственного авиационного комитета [5] в более чем 80-ти процентах случаев виновниками авиакатастроф признаются пилоты. Получается, что более 80-ти процентов пилотов всех разбившихся самолетов были террористами или самоубийцами. Статистические данные Межгосударственного авиационного комитета явно противоречат здравому смыслу. Согласно Интернет-сводкам, авиакатастрофы во всем мире теперь случаются практически каждый день. Каждый день гибнут люди. К сожалению, у нас нет возможности проводить собственные расследования причин авиакатастроф, но соглашаться с тем, что каждый раз виноваты погибшие пилоты, — совершенно очевидная глупость.

Итак, мы вступили в век, в котором аварии, обрушения и катастрофы вошли в нашу повседневную жизнь вместе с компьютерами и сотовыми телефонами. При анализе их причин доля, приходящаяся на технические неполадки и ошибки проектировщиков, значительно выше, чем нам об этом сообщается. А как ведется проектирование подавляющего большинства современных инженерных конструкций? С помощью метода конечных элементов. С помощью пакета ANSYS.

Я не враг методу конечных элементов и не враг пакетам, кото-

рые его реализуют. Метод конечных элементов кормил меня много лет, за что я ему искренне благодарен. В свое время я даже опубликовал около полусотни статей в солидных научных журналах, посвященных развитию этого прекрасного метода. И у меня даже есть подозрение, что некоторые мои идеи попали в ANSYS и успешно работают.

Метод конечных элементов — это, вне всякого сомнения, величайшее достижение XX в. Но есть маленький нюанс. Конечно-элементным решениям краевых задач нельзя доверять. Вернее, нельзя доверять настолько, насколько можно доверять, например, решению Ламе для толстостенного полого цилиндра. Решение Ламе имеется в любом учебнике сопромата. Напряжения и перемещения представлены в аналитическом виде — в виде функций координаты R , которые удовлетворяют (точно, а не приближенно!) как дифференциальным уравнениям, так и граничным условиям. Это как раз то, что называется точным (а не приближенным) аналитическим (а не численным) решением краевой задачи теории упругости. Это решение не имеет погрешности. Этому решению можно верить на сто процентов.

Вот так следовало бы решать краевые задачи в XXI в. Но мы так решать не умеем. Так решали краевые задачи математики-аналитики XIX в., а в XXI в. ничего подобного нет. Не парадокс ли это? Мы даже не пытаемся этого делать, потому что в вузах нас учат, что точные аналитические решения возможны только для простейших краевых задач, а реальные задачи надо решать приближенными численными методами.

Цель моей статьи — обратить внимание на то, что мы занимаемся чем-то не тем. Мне кажется, что “латание дыр” на МКЭ-пакетах — дело бесперспективное. Я совершенно не согласен с расхожим утверждением о том, что “точность решения краевой задачи не должна превышать точность ее постановки”. Мы живем в XXI веке. Да, инженеры ошибаются в формулировках краевых условий. Да, физики не могут точно определить константы материалов. Но то, что у них неразбериха, не оправдывает беспорядка и у нас. Давайте наведем порядок хотя бы в нашей “кухне”. Давайте научимся находить точные аналитические решения любых краевых задач. Давайте сделаем так, чтобы хотя бы к нам, как к авторам реше-

ний краевых задач, не было претензий при расследовании причин катастроф.

После Саутгемптонской конференции, регулярно получая из *Mathematical Reviews* статьи, посвященные попыткам создания методик оценки погрешности численных методов, и выполняя их рецензирование, я все больше и больше убеждался в бесперспективности этих попыток. Я еще более убедился в том, что использование численных методов для расчетов объектов и процессов ответственного назначения изначально несет в себе опасность. Другое дело, когда их применяют в чисто научных целях, например, чтобы разобраться в характере поведения жидкости, чтобы нащупать закономерности физического явления. Но когда по данным численного решения краевых задач проектируют и создают конструкции, от которых зависит жизнь и безопасность людей, стран и цивилизации в целом, становится страшно.

С другой стороны, я думал над тем, как преодолеть проблему неуниверсальности альтернативных аналитических методов, как создать программу, которая бы, подобно профессиональному математику, строила аналитические решения краевых задач и которая бы в то же время не уступала ANSYS в универсальности и уровне сервиса.

Школа математиков-аналитиков, какое-то время сохранявшаяся в СССР, после перестройки практически погибла. А что если попытаться моделировать творческие изыскания математика с помощью все того же компьютера? Ведь существует же отрасль науки, называемая искусственным интеллектом. Есть успехи в компьютерном моделировании творческой деятельности поэтов, музыкантов, шахматистов. Почему бы не попытаться создать искусственного математика-аналитика, раз уж настоящих больше не осталось?

Моя мечта — создать интеллектуальный пакет, способный находить точные аналитические решения любых краевых задач, который бы не уступал ANSYS в универсальности и удобстве пользования. У нас есть небольшой задел в этом направлении [1–3]. Но я понимаю, что в одиночку этого не сделать. Нужен коллектив разработчиков, в который бы входили специалисты по искусственному интеллекту, математики-аналитики, имеющие полноценное математическое образование, владеющие методом разделения переменных

Фурье, методом конформных отображений, теорией функций комплексного переменного, функциональным анализом и проч., нужны программисты-кодеры, специалисты в ANSYS и МКЭ-пакетах. Нужны научные школы, развивающие не только численные, но и аналитические подходы, рождающие математиков нового поколения, которые, слившись с компьютерами, смогли бы удержаться “на плечах гигантов” прошлых веков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ясницкий Л.Н. Введение в искусственный интеллект. М.: Издательский центр “Академия”, 2005. 176с.
2. Гладкий С.Л., Степанов Н.А., Ясницкий Л.Н. Интеллектуальное моделирование физических проблем / Под ред. Л.Н.Ясницкого - М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 200 с.
3. Ясницкий Л.Н. Пермская научная школа искусственного интеллекта и ее инновационные разработки. - Пермь: Перм. пед. гос. ун-т; Перм. техн. гос. ун-т; Перм. гос. ун-т, 2007. 70с.
4. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб: Изд-во. СПбГТУ, 1998.
5. <http://airoubles.boom.ru>

КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С МАЛЫМ УГЛОМ ПРИ ВЕРШИНЕ ПРИ РАЗНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

А. Б. Анисимов

Рассматриваются малые свободные колебания конической оболочки при различных граничных условиях. Предполагается, что угол при вершине конуса является малым параметром. Путем разложения неизвестных функций в ряд по степеням малого параметра получены приближенные формулы для частот и форм колебаний. Для трех вариантов граничных условий найден радиус эквивалентной цилиндрической оболочки, первая частота которой совпадает с первой частотой колебаний конической оболочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы определения частот и форм колебаний [1]-[2] можно условно разделить на три класса: аналитические, приближенные и численные.

В тех случаях, когда отсутствует точное аналитическое решение задачи, можно использовать асимптотические методы [3]-[4]. При этом обычно неизвестные переменные представляются в виде разложения в ряд по степеням малого параметра. В качестве малого параметра в теории оболочек используется безразмерная толщина оболочки.

Наиболее распространенным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ) [5]. Существует множество компьютерных программ, рассчитывающих параметры различных конструкций, в том числе оболочек, с помощью МКЭ. Одним из основных недостатков численных методов является необходимость производить полный пересчет конструкции при изменении какого-либо параметра.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.
Доклад на семинаре 22 ноября 2005 г.
© А. Б. Анисимов, 2007

В данной работе получены асимптотические формулы для определения частот колебаний конической оболочки с малым углом при вершине и проведено сравнение асимптотических и численных результатов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

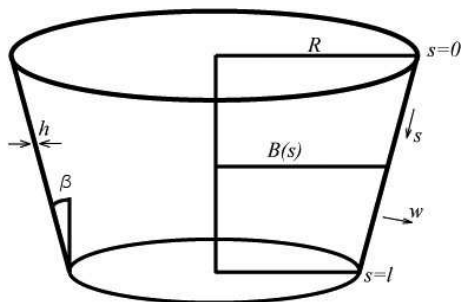


Рис. 1. Оболочка в виде усеченного конуса.

Рассмотрим свободные колебания тонкой конической оболочки, большой радиус которой R . Безразмерная толщина оболочки h (за единицу длины выбран радиус R), высота l , β — угол конусности (угол наклона образующей) (рис.1).

Для конической оболочки расстояние от оси вращения до точки срединной поверхности $B(s) = 1 - s \sin \beta$. Предположим, что угол β мал. Тогда $\sin \beta = \varepsilon \ll 1$. Если $\varepsilon = 0$, то $B(s) = 1$, и оболочка становится цилиндрической.

После разделения переменных система уравнений, описывающая колебания конической оболочки, принимает вид

$$\begin{cases} \mu^4 \Delta^2 w - \Delta_k \Phi - \lambda w = 0, \\ \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \end{cases}$$

$$\Delta w = \frac{1}{B} \frac{d}{ds} \left(B \frac{dw}{ds} \right) - \frac{m^2 w}{B^2}, \quad \Delta_k w = \frac{1}{B} \frac{d}{ds} \left(\frac{B}{R_2} \frac{dw}{ds} \right),$$

где $\mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)}$, w — прогиб, Φ — функция усилий, m — число волн по параллели.

Исключая из системы Φ и считая, что $\Delta \sim m^2 B^{-2}$, получим уравнение

$$\frac{1}{R_2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{B^4}{R_2} \frac{d^2 w}{ds^2} \right) + \left(\frac{\mu^4 m^8}{B^4} - \lambda m^4 \right) w = 0, \quad (1)$$

где $\lambda = \frac{\rho w^2 R^2}{E}$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала.

Принимая во внимание, что $B(s) = 1 - \varepsilon s$, $R_2 = B \cos \beta \sim B$, уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{1}{(1-\varepsilon s)} \frac{d^2}{ds^2} \left((1-\varepsilon s)^3 w'' \right) + \left(\frac{\mu^4 m^8}{(1-\varepsilon s)^4} - \lambda m^4 \right) w = 0. \quad (2)$$

Предполагаем, что на краях оболочки $s = 0$ и $s = l$ заданы однородные граничные условия.

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решения (2) будем искать в виде асимптотических рядов по степеням ε :

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots \end{aligned}$$

В нулевом приближении получим уравнение для определения наименьших частот цилиндрической оболочки:

$$w_0^{(4)} - \alpha^4 w_0 = 0, \quad (3)$$

где $\alpha^4 = m^4 \lambda_0 - \mu^4 m^8$. После определения α приближенное значение параметра частоты λ_0 находится по формуле

$$\lambda_0 = \frac{\alpha^4}{m^4} + \mu^4 m^4.$$

Известно, что решением уравнения (3) является линейная комбинация функций Крылова:

$$w_0(s) = AS(\alpha s) + BT(\alpha s) + CU(\alpha s) + DV(\alpha s), \quad (4)$$

где

$$S(\alpha s) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\alpha s) + \cos(\alpha s)), \quad T(\alpha s) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\alpha s) + \sin(\alpha s)),$$

$$U(\alpha s) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\alpha s) - \cos(\alpha s)), \quad V(\alpha s) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(\alpha s) - \sin(\alpha s)).$$

Уравнение первого приближения

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \quad w_1^{(4)} - 6s w_0^{(4)} - 6w_0''' + \mu^4 m^8 w_1 - \\ - m^4 (\lambda_0 w_1 - 4s \lambda_0 w_0 + \lambda_1 w_0) = 0 \end{aligned}$$

умножим на w_0 и проинтегрируем по s от 0 до l . Получим

$$\begin{aligned} \int_0^l w_1^{(4)} w_0 ds - 6 \int_0^l s w_0^{(4)} w_0 ds - 6 \int_0^l w_0''' w_0 ds + \mu^4 m^8 \int_0^l w_1 w_0 ds - \\ - m^4 \int_0^l (\lambda_0 w_1 w_0 - 4s \lambda_0 w_0^2 + \lambda_1 w_0^2) ds = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Четырехкратное интегрирование по частям равенства (5) с учетом граничных условий и уравнения (3) дает формулу для определения поправки первого приближения к параметру частоты:

$$\lambda_1 = \frac{-6(I_1 + I_2) + 4m^4 \lambda_0 I_3}{I_4},$$

где $I_1 = \int_0^l s w_0^{(4)} w_0 ds$, $I_2 = \int_0^l w_0''' w_0 ds$, $I_3 = \int_0^l s w_0^2 ds$, $I_4 = \int_0^l w_0^2 ds$. Поскольку в силу (3) $I_1 = \int_0^l s w_0^{(4)} w_0 ds = \alpha^4 I_3$, формулу для λ_1 можно записать в виде $\lambda_1 = (4m^4 \lambda_0 I_3 - 6\alpha^4 I_3 - 6I_2) I_4^{-1}$. Принимая во внимание, что

$$I_2 = \int_0^l w_0''' w_0 ds = w_0 w_0'' \Big|_0^l - \int_0^l w_0' w_0'' ds = (w_0 w_0'' - w_0'^2) \Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^l w_0'' w_0' ds = (w_0 w_0'' - w_0'^2 + w_0'' w_0) \Big|_0^l - \int_0^l w_0''' w_0 ds,$$

получаем

$$I_2 = \int_0^l w_0''' w_0 ds = (w_0 w_0'' - \frac{1}{2} w_0'^2) \Big|_0^l.$$

Умножив уравнение (3) на s и продифференцировав полученное равенство по α получим уравнение

$$\frac{\partial^4 w_{0\alpha}}{\partial s^4} s = 4\alpha^3 w_0 s + \alpha^4 w_{0\alpha} s,$$

где $w_{0\alpha} = \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} = \frac{s}{\alpha} w_0'$. Умножение этого уравнения на w_0 с последующим интегрированием по s от 0 до l дает уравнение

$$\int_0^l \frac{\partial^4 w_{0\alpha}}{\partial s^4} w_0 s ds = 4\alpha^3 \int_0^l w_0^2 s ds + \alpha^4 \int_0^l w_{0\alpha} w_0 s ds. \quad (6)$$

Интегрируя по частям уравнение (6) по частям получаем,

$$4\alpha^3 \int_0^l w_0^2 s ds = 4 \int_0^l \frac{s}{\alpha} w_0' w_0''' ds + L,$$

где

$$L = \left(\frac{\partial^3 w_{0\alpha}}{\partial s^3} s w_0 - \frac{\partial^2 w_{0\alpha}}{\partial s^2} (s w_0' + w_0) + \frac{\partial w_{0\alpha}}{\partial s} (2w_0' + s w_0'') - w_{0\alpha} (3w_0'' + s w_0''') \right) \Big|_0^l.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^l \frac{s}{\alpha} w_0' w_0''' ds = \frac{s}{\alpha} w_0 w_0''' \Big|_0^l - \frac{1}{\alpha} \int_0^l w_0 w_0''' ds - \frac{\alpha^4}{\alpha} \int_0^l s w_0^2 ds,$$

$$4\alpha^3 \int_0^l w_0^2 s ds = 4 \left(\frac{s}{\alpha} w_0 w_0''' \Big|_0^l - \frac{1}{\alpha} \int_0^l w_0 w_0''' ds - \alpha^3 \int_0^l s w_0^2 ds \right) + L$$

находим выражение интеграла I_3 через значения функции w_0 и ее производных на концах промежутка $[0, l]$:

$$I_3 = \int_0^l w_0^2 s ds = \frac{1}{2\alpha^3} \left(\frac{s}{\alpha} w_0 w_0''' \Big|_0^l + \frac{1}{4} L - \frac{1}{\alpha} \left(w_0 w_0'' - \frac{1}{2} w_0'^2 \right) \Big|_0^l \right).$$

Аналогичным способом в книге [6] получена формула

$$I_4 = \int_0^l w_0^2 ds = \frac{1}{4\alpha^3} \left(\frac{\partial^3 w_{0\alpha}}{\partial s^3} w_0 - \frac{\partial^2 w_{0\alpha}}{\partial s^2} \frac{\partial w_0}{\partial s} + \frac{\partial w_{0\alpha}}{\partial s} \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} - w_{0\alpha} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} \right) \Big|_0^l.$$

4. СЛУЧАЙ ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ ОБОЛОЧКИ

Если края оболочки шарнирно оперты, то граничные условия для уравнения (3) имеют вид

$$\begin{cases} w_0 = w_0'' = 0 & \text{при } s = 0, \\ w_0 = w_0'' = 0 & \text{при } s = l. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнению (3) и граничным условиям (7) удовлетворяет решение $w_0(s) = \sin(\alpha s)$, где $\alpha = \frac{\pi n}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

В рассматриваемом случае $I_2 = 0$, $I_3 = \frac{l^2}{4}$, $I_4 = \frac{l}{2}$, $I_1 = \alpha^4 I_3$:

$$\lambda_0 = \frac{\alpha^4}{m^4} + \mu^4 m^4, \quad \lambda_1 = \left(2\mu^4 m^4 - \frac{\alpha^4}{m^4} \right) l, \quad \lambda_{\text{кон}} = \lambda_0 + \mu \lambda_1, \quad (8)$$

где наименьшей частоте соответствует $\alpha = \frac{\pi}{l}$.

На рис. 2 для ε сплошной линией представлена зависимость λ_0 от числа волн m , пунктирной линией — λ_1 .

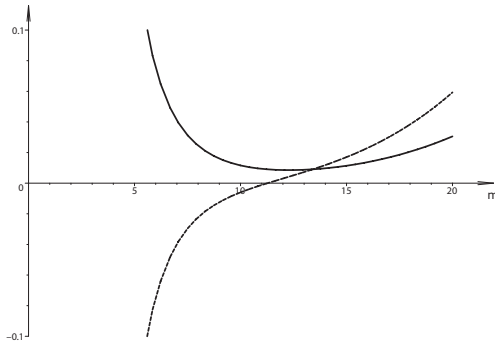


Рис. 2. График зависимости $\lambda_0(-)$, $\lambda_1(-)$ от m .

Число волн по параллели m определяется из условия минимума λ_0 :

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\alpha^4}{m^4} + \mu^4 m^4 \right) = 0. \quad (9)$$

Минимальному значению $\lambda_{min} = 0.009$ соответствует $m = 12.289$, т.е. $m = 12$ (см. рис. 2).

Теперь, положив $E = 2.06 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0.3$, $\rho = 7860$ кг/м³, несложно посчитать и саму частоту колебаний f по формуле

$$f = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{\lambda E}{\rho}} = 76.815 \text{ Гц.}$$

Для упрощения задачи коническую оболочку с малым углом при вершине иногда заменяют эквивалентной цилиндрической оболочкой [7]. При этом неясным остается вопрос о выборе радиуса эквивалентной цилиндрической оболочки. Для задач динамики в качестве критерия выбора радиуса можно использовать равенство первых частот колебаний конической и цилиндрической оболочек.

Найдем радиус цилиндрической оболочки, эквивалентной заданной конической, основываясь на приближенном равенстве параметров их частот.

Приближенное уравнение для определения частот цилиндрической оболочки выглядит так: $w^{(4)} - \alpha^4 w = 0$, где $\alpha^4 = \frac{1}{B^2} \left(\lambda m^4 - \frac{\mu^4 m^8}{B^4} \right)$, $B = 1 - \varepsilon d$. Следовательно,

$$\lambda_{\text{цил}} = B^2 \frac{\alpha^4}{m^4} + \frac{\mu^4 m^4}{B^4}. \quad (10)$$

Приравняв параметры частоты λ конической (8) и цилиндрической (10) оболочек получим уравнение для определения d :

$$(1 - \varepsilon d)^2 \frac{\alpha^4}{m^4} + \frac{\mu^4 m^4}{(1 - \varepsilon d)^4} = \left(\frac{\alpha^4}{m^4} + \mu^4 m^4 \right) + \varepsilon \left(2\mu^4 m^4 - \frac{\alpha^4}{m^4} \right) l,$$

приближенное решение которого имеет вид $d = \frac{l}{2}$.

Таким образом, радиус эквивалентной цилиндрической оболочки $B = 1 - 0.5\varepsilon$ получился равным среднему арифметическому большего и меньшего радиусов конической оболочки.

5. ЗАДЕЛКА И ШАРНИРНОЕ ОПИРАНИЕ

Рассмотрим случай, когда меньший радиус конуса заделан, а большой шарнирно оперт. Тогда граничные условия для уравнения (3) принимают вид

$$\begin{cases} w_0 = w_0'' = 0 & \text{при } s = 0, \\ w_0 = w_0' = 0 & \text{при } s = l. \end{cases} \quad (11)$$

Подстановка решения (5) в граничные условия (11) дает следующее уравнение [6] для определения α :

$$\tan(\alpha l) = \text{th}(\alpha l),$$

наименьший положительный корень которого $\alpha = \frac{3.928}{l} \simeq \frac{5\pi}{4l}$.

С учетом граничных условий (11) получаем следующие выражения для интегралов, входящих в формулу поправки первого при-

ближения к параметру частоты:

$$I_1 = \alpha^4 I_3, \quad I_2 = \frac{1}{2} w_0'^2(0),$$

$$I_3 = -\frac{1}{2\alpha^4} w_0'^2(0) - \frac{l^2}{8\alpha^4} w_0''^2(l), \quad I_4 = -\frac{l}{4\alpha^4} w_0''^2(l).$$

Форма колебаний имеет вид $w_0 = V(\alpha s) - \frac{V(\alpha l)}{T(\alpha l)} T(\alpha s)$. Число m , соответствующее минимальной частоте, находится из условия (9).

Для рассматриваемых значений параметров $\lambda_{min} = 0.013$ соответствует $m = 13.739$, т.е. в данном случае $m = 14$, что подтверждает рис. 3, который иллюстрирует зависимость первых двух приближений параметра частоты λ от числа волн m :

$$\lambda_{кон} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1.$$

Поправка первого приближения к параметру частоты имеет величину:

$$\lambda_0 = 0.013, \quad \lambda_1 = 0.005.$$

Первая частота колебаний $f = 95.843$ Гц.

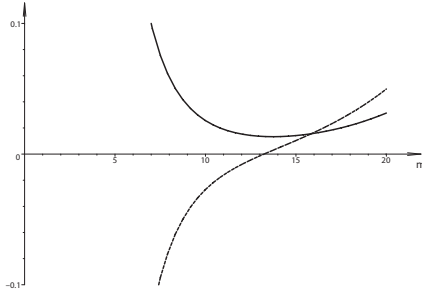


Рис. 3. График зависимости $\lambda_0(-)$, $\lambda_1(-)$ от m .

Приравняв $\lambda_{кон} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1$ к значению $\lambda_{цпл}$, вычисленному по

формуле (10), найдем

$$d = \frac{\lambda_1}{4\mu^4 m^4 - 2\frac{\alpha^4}{m^4}} = 0.276$$

и радиус эквивалентной цилиндрической оболочки:

$$B = 1 - 0.276\epsilon.$$

6. ЗАДЕЛКА И СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Пусть край конической оболочки $s = 0$ свободен, а край $s = l$ заделан. В этом случае

$$\begin{cases} w_0'' = w_0''' = 0 & \text{при } s = 0, \\ w_0 = w_0' = 0 & \text{при } s = l, \end{cases}$$

а величина α является корнем уравнения $\text{ch}(\alpha l) \cos(\alpha l) + 1 = 0$, наименьший положительный корень которого $\alpha = 1.875$.

Подстановка формы колебаний $w_0 = T(\alpha s) - \frac{T(\alpha l)}{S(\alpha l)} S(\alpha s)$ в формулы для интегралов I_2, I_3, I_4 дает следующие равенства:

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha^4 I_3, & I_2 &= w_0''(l) + \frac{1}{2} w_0'^2(0), \\ I_3 &= -\frac{1}{2\alpha^4} w_0'^2(0) - \frac{l^2}{8\alpha^4} w_0''^2(l), & I_4 &= -\frac{l}{4\alpha^4} w_0''^2(l). \end{aligned}$$

Наименьшему параметру частоты $\lambda_0 = 0.003$ соответствуют $m = 9$ и $\lambda_1 = -0.003$. Первая частота колебаний конической оболочки $f = 43.284$ Гц. Значению $d = -0.726$ соответствует радиус цилиндрической оболочки $R = 1 + 0.726\epsilon$, который превосходит наибольший радиус конической оболочки.

7. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача определения первой частоты свободных колебаний тонкой конической оболочки с граничными условиями заделки и сво-

бодного края, рассмотренная в параграфе 2 асимптотическим методом, была решена методом конечных элементов в пакете ANSYS. Сравним результаты, полученные двумя методами.

Относительная погрешность для тонкой цилиндрической оболочки ($\varepsilon = 0$) с граничными условиями заделки и свободного края, вычисленная асимптотическим и численным методами составила 2,2%. Относительная погрешность частоты колебаний тонкой конической оболочки с аналогичными граничными условиями при малом параметре $\varepsilon = 0.1$ составила 2,7%. Это можно интерпретировать как падение точности вычислений асимптотического метода.

На Рис.4 изображена зависимость частоты колебаний тонкой конической оболочки f от числа волн m при малом параметре $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3$ соответственно.

Сплошной линией представлен результат асимптотического метода, точками — численного.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы малые свободные колебания тонкой конической оболочки с малым углом конусности при разных граничных условиях: шарнирное опирание с двух сторон, заделка и шарнирный край, заделка и свободный край.

Наличие малого параметра позволило применить метод возмущения для получения первых двух членов в асимптотической формуле для частот колебаний.

При исследовании динамики конических оболочек с малым углом при вершине целесообразно рассматривать оболочку как цилиндрическую. В связи с этим в работе определен радиус эквивалентной цилиндрической оболочки, имеющей в первом приближении ту же фундаментальную частоту, что и заданная коническая оболочка для трех комбинаций граничных условий.

Поскольку численные методы считаются более точными по сравнению с асимптотическими, то задача о колебаниях тонкой конической оболочки при граничных условиях заделки и свободного края была также решена методом конечных элементов. Сравнение результатов асимптотического и численного методов приведено в последней части работы.

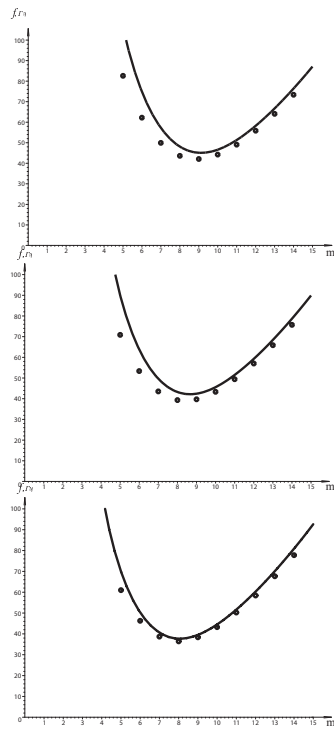


Рис. 4. Графики зависимости $f_{\text{асимп}}(-)$ и $f_{\text{ANSYS}}(o)$ от m при $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979. 384 с.
2. Товстик П.Е. Об определении наименьшей частоты колебаний конической оболочки вращения. //Исслед. по упругости и пластичности, СПб, 1967.
3. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. СПб.:Изд-во СПбГУ, 1995. 188 с.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, Физматлит; 1995. 320 с.
5. Наумова Н.В. Расчет стержневых и оболочечных конструкций методом

конечных элементов в пакетах ADINA и ANSYS: Учеб. пособие. СПб., 2004.

6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

7. Красков А.А. Динамика центробежного обогатительного конуса с принудительной деформируемой эластичной стенкой // Обогащение руд. 2001. №3. С. 34—38.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОТИВООТСЛОЕЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ОФТАЛЬМОЛОГИИ

Е.И.АТРОЩЕНКО

Построена математическая модель циркуляжа широкой силиконовой лентой с учетом эллиптичности формы глаза и рассчитаны численные значения изменения внутриглазного давления и объема.

1. ВВЕДЕНИЕ

В офтальмологии отслойка сетчатки — это такое патологическое состояние, при котором сетчатка теряет контакт с сосудистой оболочкой и отходит от нее внутрь полости глаза. Развитие отслойки приводит к разрыву сетчатки с последующим проникновением под нее внутриглазной жидкости (рис. 1).

В большинстве случаев отслойка сетчатки подлежит хирургическому лечению с эвакуацией жидкости из образовавшейся полости и вдавливанию наружных слоев оболочки глаза до совмещения их с отслоившейся сетчаткой. Особое место среди способов хирургического вмешательства занимает круговое вдавливание или так называемый *циркуляж* — перетягивание глаза силиконовой лентой по экватору (рис. 2).

В данной работе представлена механическая модель циркуляжа широкой силиконовой лентой с учетом отклонения формы глаза от сферической. Склера моделируется как тонкостенная упругая изотропная эллиптическая оболочка постоянной толщины $h=1$ мм, заполненная несжимаемой жидкостью [4].

Рассматривается осесимметричная деформация. Упругие свойства оболочки описываются параметрами $\nu=0.45$ — коэффициент Пуассона и $E=14.3$ МПа — модуль Юнга [1]. Нагрузка от ленты создается путем ее укорочения на заданную величину Δl . При этом,

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.

Доклад на семинаре 19 сентября 2006 г.

© Е.И. Атрощенко, 2007

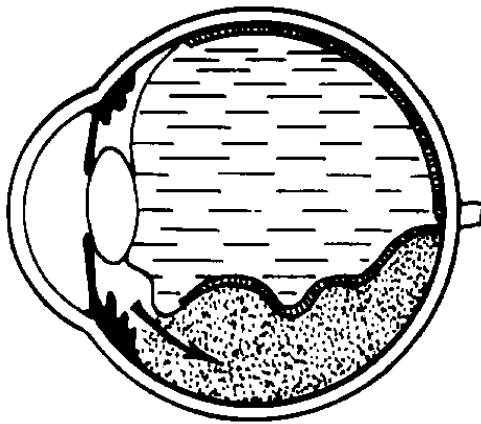


Рис. 1. Отслойка сетчатки.

чтобы избежать увеличения внутриглазного давления выше критического для глаза значения, удаляется жидкость объемом ΔV_1 .

Задача решается в нелинейной постановке по сдвиговой модели Тимошенко [7]. Разрешающая система уравнений записывается в виде, предложенном Новожиловым [5], в проекциях на оси до деформации и интегрируется методом Галеркина с применением тригонометрического базиса.

2. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Введем на недеформированной поверхности систему координат $\{\theta, \varphi\}$: θ — угол между нормалью к поверхности и осью Oz , φ — угол в меридиональной плоскости. Поскольку деформация осесимметрична, в результате также получится оболочка вращения и все рассматриваемые величины являются функциями только угла θ .

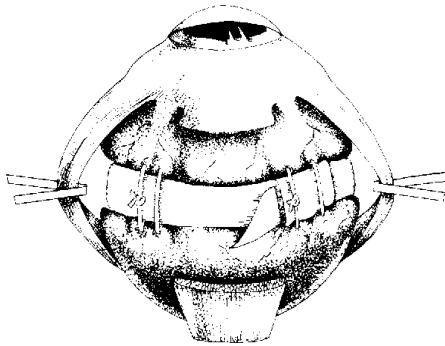


Рис. 2. Циркляж.

Уравнение эллипсоида в данной системе координат примет вид

$$\begin{aligned} r(\theta, \varphi) &= \{x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)\}, \\ x(\theta, \varphi) &= \frac{R_0 \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}}, \\ y(\theta, \varphi) &= \frac{R_0 \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}}, \\ z(\theta, \varphi) &= \frac{b \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}}, \end{aligned}$$

где a, b — полуоси эллипсоида вращения. $R_0 = \frac{a^2}{b}$ — обобщенный радиус, $\delta = \frac{a}{b}$ — показатель отклонения формы оболочки от сферической, причем при $\delta < 1$ — вытянутый эллипсоид, при $\delta > 1$ — сплюснутый и при $\delta = 1$ — сфера.

Коэффициенты Ламе для недеформированной поверхности:

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{\partial r}{\partial \theta} \right| = \frac{R_0}{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}^3}, \\ B &= \left| \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right| = \frac{R_0 \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}}, \end{aligned} \quad (1)$$

кривизны:

$$\begin{aligned} R_1 &= A, & \kappa_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}^3}{R_0}, \\ R_2 &= \frac{B}{\sin \theta}, & \kappa_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \delta^2 \sin^2 \theta}}{R_0}. \end{aligned}$$

Введем местную ортогональную систему координат:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial r}{\partial \theta} = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\}, \\ e_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}, \\ e_3 &= e_1 \times e_2 = \{-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}. \end{aligned}$$

Радиус-вектор поверхности после деформации:

$$r^* = r + U,$$

где перемещение U выражается в проекциях на орты e_1 и e_3 [3]:

$$U = u(\theta)e_1 + w(\theta)e_3.$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial r^*}{\partial \theta} = (1 + \varepsilon_1)e_1 + \omega_1 e_2 - \gamma_1 e_3,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{u'}{A} - \frac{w}{R_1} = \frac{u' - w}{A}, \quad \gamma_1 = -\frac{w'}{A} - \frac{u}{R_1} = -\frac{w' + u}{A},$$

$$\omega_1 = 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2),$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial r^*}{\partial \varphi} = \omega_2 e_1 + (1 + \varepsilon_2)e_2 - \gamma_2 e_3,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B u}{A B} - \frac{w}{R_2} = \frac{u \cos \theta - w \sin \theta}{B}, \quad \omega_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0,$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2.$$

Орты местной системы координат после деформации примут вид [3]:

$$e_1^* = (1 + \varepsilon_1)e_1 - \gamma_1 e_3, \quad e_2^* = (1 + \varepsilon_2)e_2, \quad e_3^* = e_3 + \gamma_1 e_1.$$

Соотношения для усилий и моментов примем в виде [7]:

$$T_1 = \frac{Eh}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad T_2 = \frac{Eh}{1 - \nu^2}(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}(\nu\kappa_1 + \kappa_2),$$

где деформации изгиба κ_1 , κ_2 , согласно модели Тимошенко, выражаются через неизвестный угол сдвига γ [2]:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A}\gamma', \quad \kappa_2 = -\frac{B'}{AB} = -\frac{\gamma \cos \theta}{B}.$$

Перерезывающее усилие [2]:

$$N = \frac{5}{6}Gh\delta_1, \quad \delta_1 = \gamma - \gamma_1,$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ — модуль сдвига.

Разрешающую систему уравнений равновесия запишем в проекциях на оси до деформации [6]:

$$\begin{aligned} (BT_1)' - T_2B' + ABk_1N &= 0, \\ (BN)' + AB(-k_1T_1 - k_2T_2 - Q) &= 0, \\ (BM_1)' - M_2B' - ABN &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где функция нагрузки $Q = Q(\theta) = p_0 - q(\theta)$,

$$q(\theta) = \begin{cases} q_0 f(\theta), & \theta_1 \leq \theta \leq \pi - \theta_1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

причем $q_0 = \frac{E_s h_s \Delta l}{a l} = \frac{E_s h_s \Delta l}{2\pi a^2}$ — амплитуда нагрузки, а $f(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[\frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} \right] \right)$ — функция распределения нагрузки, удовлетворяющая условиям

$$f(\theta_1) = f(\pi - \theta_1) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f'(\theta_1) = f'(\pi - \theta_1) = 0.$$

Здесь $p_0 = 15$ мм рт.ст. — начальное внутреннее давление, Δl — укорочение ленты, $E_s = 1.9$ МПа, $h_s = 0.5$ мм — модуль Юнга и толщина ленты, θ_1 — угол обхвата оболочки лентой, который находится как решение уравнения $z(\theta_1) = \frac{H}{2}$, $H = 9$ мм — ширина ленты, $()'$ — производная по углу θ .

Таким образом, получена система трех уравнений для определения неизвестных перемещений $w(\theta)$, $u(\theta)$ и угла сдвига γ .

Решения системы ищутся ввиду разложения по полной ортогональной системе N функций. Для того чтобы можно было рассматривать задачу на отрезке $\theta \in [0, \pi]$, используется тригонометрический базис с четными коэффициентами:

$$g = \{1, \sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin 4\theta, \cos 4\theta, \dots, \sin 2n\theta, \cos 2n\theta\},$$

$$w(\theta) = \sum_{k=1}^N \xi_k g_k, \quad u(\theta) = \sum_{k=1}^N \eta_k g_k, \quad \gamma(\theta) = \sum_{k=1}^N \zeta_k g_k.$$

Данные разложения подставляются в разрешающую систему (2) с последующим домножением уравнений на каждую базисную функцию, группировкой по неизвестным $\{\xi_k, \eta_k, \zeta_k\}$ и численным интегрированием каждого коэффициента.

Таким образом, получается алгебраическая система $3N$ уравнений для определения $3N$ неизвестных.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМА ОБОЛОЧКИ

Для определения объема деформированной поверхности воспользуемся формулой

$$V^* = \frac{1}{3} \int_{S^*} (x^* \cos(\widehat{e_3^*, x}) + y^* \cos(\widehat{e_3^*, y}) + z^* \cos(\widehat{e_3^*, z})) dS^*,$$

$$dS^* = A^* B^* d\theta d\varphi,$$

где A^* , B^* — коэффициенты Ламе деформированной поверхности, которые находятся из соотношений, аналогичных (1), e_3^* — нормаль деформированной поверхности, $\Delta V_2 = V^* - V_0 < 0$ — изменение

объема за счет циркляжа, $V_0 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ — начальный объем эллипсоида.

Для определения, какому изменению давления соответствует данное изменение объема, исследуем зависимость изменения объема эллипсоида под действием только нормального давления $\Delta V_3 = \Delta V_3(p)$.

Для этого воспользуемся соотношением

$$\delta W = \delta A,$$

где вариация энергии [3]:

$$\delta W = \int_S (T_{01}\varepsilon_1 + T_{02}\varepsilon_2) A B dS. \quad (3)$$

Вариация работы:

$$\delta A = p \Delta V_3.$$

Из линейной зависимости усилий T_{01} , T_{02} от деформаций ε_1 , ε_2 :

$$T_{01} = \frac{E h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_{02} = \frac{E h}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

выразим ε_1 , ε_2 как функции усилий T_{01} , T_{02} и подставим в формулу для вариации энергии (3).

При этом усилия выражаются по формулам [7]:

$$T_{01} = \frac{p R_2}{2}, \quad T_{02} = \frac{p R_2}{2} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right).$$

После численного интегрирования получается линейная зависимость:

$$\Delta V_3(p) = C p,$$

где константа $C > 0$ определяется только геометрическими параметрами эллипсоида.

После завершения трех этапов — удаления жидкости ($\Delta V_1 > 0$), циркляжа ($\Delta V_2 < 0$) и действия нормального давления ($\Delta V_3 > 0$) — для определения изменения давления можно воспользоваться

условием несжимаемости жидкости, которое заключается в том, что суммарное изменение объема оболочки равно нулю:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 0. \quad (4)$$

Так как функция ΔV_3 является функцией давления, то из соотношения (4) следует:

$$p = p_0 - \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{C}.$$

Данное равенство показывает, что результирующее давление возрастает при увеличении нагрузки и уменьшается при увеличении объема удаляемой жидкости.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В табл. 1, 2 и 3 представлены результаты расчетов (прогибы на полюсе и под лентой и результирующее давление) для трех видов эллипсоидов одинакового объема.

Таблица 1. Результаты расчетов, вытянутый эллипсоид, $a = 10.95$ мм, $b = 14.4$ мм ($\delta = 0.76$)

Δl (мм)	ΔV_1 (мм ³)	$w(0)$ (мм)	$w(\pi/2)$ (мм)	p (мм рт. ст.)
12	0	0.027	− 0.074	31.46
18	0	0.041	− 0.115	44.23
24	0	0.056	− 0.156	56.10
30	0	0.072	− 0.197	67.07
30	30	0.072	− 0.197	24.53

Таблица 2. Результаты расчетов, сфера, $a = b = 12$ мм ($\delta = 1$)

Δl (мм)	ΔV_1 (мм ³)	$w(0)$ (мм)	$w(\pi/2)$ (мм)	p (мм рт. ст.)
12	0	0.039	− 0.073	29.94
18	0	0.057	− 0.112	40.84
24	0	0.076	− 0.151	50.47
30	0	0.094	− 0.190	59.02

Таблица 3. Результаты расчетов, сплюснутый эллипсоид, $a = 12.4$ мм, $b = 11.23$ мм ($\delta = 1.1$)

Δl (мм)	ΔV_1 (мм ³)	$w(0)$ (мм)	$w(\pi/2)$ (мм)	p (мм. рт. ст.)
12	0	0.048	-0.073	27.44
18	0	0.068	-0.111	36.37
24	0	0.088	-0.149	44.06
30	0	0.108	-0.187	50.50

Как видно из табл. 1, к укорочению нити на 30 мм можно добавить откачку некоторого объема жидкости, в остальных случаях давление остается в пределах нормы. Наиболее чувствительными к увеличению давления при одинаковой нагрузке оказались вытянутые эллипсоиды, наименее чувствительными — сплюснутые, сфера занимает промежуточное положение.

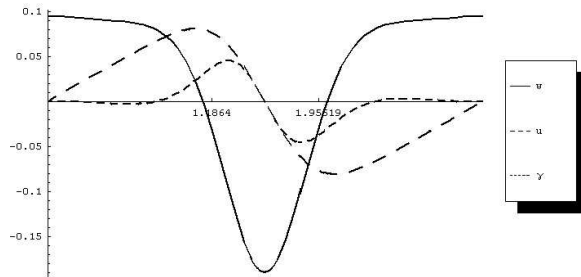


Рис. 3. Прогибы эллиптической оболочки при циркляже.

На рис. 3 представлены зависимости $u(\theta)$, $w(\theta)$, $\gamma(\theta)$. Функции $u(\theta)$, $\gamma(\theta)$ нечетные, обращаются в нуль на полюсах и под лентой, что согласуется с симметричностью деформаций. Функция $w(\theta)$ достигает максимального по модулю значения на экваторе, где нагрузка от ленты максимальна, и становится положительной на полюсах.

На рис. 4 представлены зависимости прогиба $w(\theta)$ для различных укорочений нити. Наблюдается очевидная закономерность: с

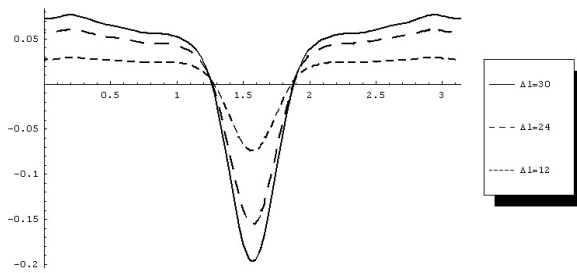


Рис. 4. Зависимость прогиба от укорочения нити.

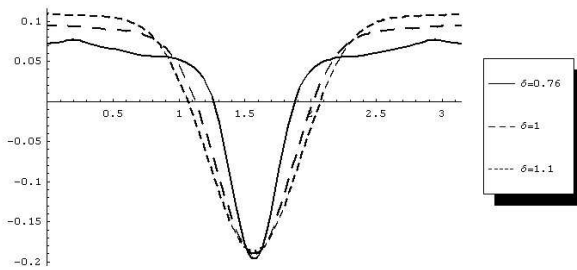


Рис. 5. Зависимость прогиба от типа эллипсоида.

ростом нагрузки ($\sim \Delta l$) увеличивается значение прогиба под лентой и на полюсах.

На рис. 5 представлены зависимости прогиба для трех видов эллипсоидов. Как видно из рис. 3, 4, 5 и табл. 1, 2, 3 наиболее чувствительными к прогибам на экваторе оказываются вытянутые эллипсоиды и сфера, к прогибам на полюсах — наоборот, сплюснутые эллипсоиды.

Таким образом, исследовано изменение формы, объема и давления для различных видов эллипсоидов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.:Изд-во СПбГУ, 2000.
2. *Товстик П.Е.* Соотношения упругости в уравнениях сильного изгиба тонких оболочек // Вестн. С.Петербург.ун-та. 2001. Вып.9. С. 73-82.
3. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.:Наука, 1995. 320 с.
4. *Старков Г.Л.* Патология стекловидного тела. М.:Медицина, 1967.
5. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951.
6. *Мишина Э.Н., Птицина Г.Г.* Деформация эллиптической оболочки при опоясывающей нагрузке // Вестн.С.Петербург. ун-та. Вып.1, 2004. С.96-102
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. Москва. 1963.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Ю. И. Думина

Рассматривается устойчивость тонких цилиндрических оболочек на упругом основании с различной формой срединной поверхности, находящихся в различных условиях нагружения, с использованием классической теории оболочек Кирхгофа–Лява.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения задачи о потере устойчивости тонких пологих оболочек под действием безмоментных усилий в ряде случаев применим так называемый локальный подход. При локальном подходе рассматривается система уравнений с постоянными коэффициентами и прогиб отыскивается в виде двоякопериодической

$$w(x, y) = w_0 \sin(p_0 x) \sin(q_0 y) \quad (1)$$

(или периодической) функции ([2] и [3]). Критическая нагрузка определяется в результате минимизации собственного значения задачи по волновым числам p_0 и q_0 , определяющим форму прогиба. При этом граничные условия не принимаются во внимание.

Применение локального подхода для решения задач о потере устойчивости тонких оболочек по модели Кирхгофа–Лява описывается в книге [3], помимо этого рассматриваются и вопросы, когда локальный подход оказывается не применим. В статье [1] решаются задачи о потере устойчивости тонких пологих оболочек и пластин на упругом основании.

Локальный подход дает полезную информацию при решении многих задач теории устойчивости оболочек. Критическая нагрузка λ_0 , определенная при локальном подходе, служит хорошим приближением для точного значения критической нагрузки λ , которое

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.

Доклад на семинаре 3 октября 2006 г.

© Ю. И. Думина, 2007

в ряде задач может быть представлено в виде асимптотического ряда

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \dots, \quad \mu \simeq \sqrt{h_*}, \quad h_* = \frac{h}{R}$$

по параметру тонкостенности μ . Здесь h — толщина оболочки, $R > 0$ — характерный радиус кривизны.

Локальный подход может быть использован при анализе устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии. Для цилиндрических оболочек под действием внешнего нормального давления локальный подход не применим. В этом случае при локальном подходе получаем $\lambda_0 = 0$, а форма потери устойчивости простирается от одного края оболочки до другого, что влечет за собой необходимость удовлетворения граничным условиям.

2. ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

При наличии основания локальный подход, позволяющий игнорировать граничные условия, оказывается применимым в предположении, что жесткость основания не слишком мала.

Основание и оболочку считаем однородными и изотропными с упругими параметрами (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) E_0, ν_0 и E, ν соответственно.

На оболочку действуют безмоментные начальные усилия T_1^0, T_2^0, S^0 . Считаем, что начальные напряжения в основании отсутствуют, а оболочка находится в жестком контакте с основанием.

Исходим из системы уравнений пологих оболочек

$$-D\Delta\Delta w + \Delta_T w + \Delta_R \Phi + p = 0, \quad (Eh)^{-1} \Delta\Delta \Phi + \Delta_R w = 0, \quad (2)$$

где Φ — функция усилий, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость оболочки, p — реакция основания.

Безмоментные начальные усилия появляются в формулах

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \Delta_R w = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\Delta_T w = T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Здесь R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности оболочки. Нагружение считаем однопараметрическим с параметром нагружения $\lambda > 0$, который вводим по формулам

$$\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda \{t_1, t_2, t_3\},$$

где величины t_i считаем безразмерными и имеющими порядок единицы.

При локальном подходе решение системы (1) ищем в виде

$$w(x, y) = w_0 e^{iz}, \quad \Phi(x, y) = \Phi_0 e^{iz}, \quad z = (px + qy)/R. \quad (3)$$

Согласно [2] реакция основания для прогиба вида (3) следующая:

$$p = -E_0 a k w,$$

где

$$k = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad a = \frac{2(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)}.$$

После подстановки (3) в (2) получаем явное выражение для $\Lambda = \frac{\lambda}{Eh}$ как функцию волновых чисел в безразмерных переменных [2]:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = f(k, \varphi) = \frac{\mu^4 k^4 + \epsilon \mu^{-2} k + f_R(\varphi)}{k^2 f_T(\varphi)}, \quad (4)$$

где

$$f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \sin \varphi \cos \varphi + t_2 \sin^2 \varphi, \quad (5)$$

$$f_R(\varphi) = (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2,$$

$$p = k \cos \varphi, \quad q = k \sin \varphi, \quad \rho_1 = \frac{R}{R_1}, \quad \rho_2 = \frac{R}{R_2},$$

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad e = \frac{E_0 a}{E\sqrt{12(1-\nu^2)}}.$$

Критическое значение $\lambda = \lambda_*$ получаем после минимизации λ по волновым числам p и q или

$$\Lambda_* = \min_{k, \varphi}^{(+)} f(k, \varphi) = f(k_*, \varphi_*), \quad (6)$$

где значок $(+)$ указывает на то, что ищется положительный минимум, а звездочкой отмечаем критические значения соответствующих величин. Предполагается, что величины t_i таковы, что при некоторых значениях угла φ будет $f_T > 0$, т.е. существуют направления, в которых действуют сжимающие начальные усилия. Тогда минимум в (6) ищется по тем φ , для которых $f_T > 0$. Функция $f(k, \varphi)$ содержит малый параметр тонкостенности μ и малый параметр относительной жесткости основания e .

Область применимости локального приближения ограничена двумя неравенствами: длина волны при потере устойчивости $L = \pi R/k$ должна быть существенно больше толщины оболочки h и меньше ее радиуса кривизны R или в безразмерных переменных:

$$\mu^2 \ll k^{-1} \ll 1.$$

При этом предполагается, что закрепление краев не является слабым, ибо только в этом случае можно рассчитывать на то, что влияние граничных условий несущественно.

Полагая в формулах (4)

$$\Lambda = f(k, \varphi) = \mu^2 g(r, \varphi), \quad k = r\mu^{-1}, \quad e = 2\mu^3 \omega,$$

приводим функцию f к виду, содержащему один совмещенный параметр ω :

$$g(r, \varphi, \omega) = \frac{r^4 + 2\omega r + f_R(\varphi)}{r^2 f_T(\varphi)}.$$

3. УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ И ОСЕВОМ СЖАТИИ

3.1. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при отсутствии основания

Напряженное состояние определяется начальными усилиями $T_1^0 < 0$, $T_2^0 = -qR$, в общем случае присутствует начальное усилие сдвига S^0 , мы же ограничиваемся рассмотрением только частного случая, когда $S^0 = 0$. Размеры оболочки: радиус R , длина L_1 . Параметры основания и оболочки E_0, ν_0 и E, ν соответственно предполагаем постоянными. В этой задаче

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad t_3 = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 = \frac{L_1}{R}, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

Тогда из (5) получаем:

$$f_R(\varphi) = \cos^4 \varphi, \quad f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + t_2 \sin^2 \varphi,$$

откуда следует, что

$$g(r, \varphi, \omega) = \frac{r^4 + 2\omega r + \cos^4 \varphi}{r^2(t_1 \cos^2 \varphi + t_2 \sin^2 \varphi)}. \quad (7)$$

Проанализируем полученную в (7) формулу.

Рассмотрим случай, когда $\omega = 0$. При отсутствии основания получаем задачу об устойчивости круговой цилиндрической оболочки, рассмотренную в [3].

3.2. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при $t_2 = 1$

Теперь рассмотрим случай, когда $\omega \neq 0$. Пусть сначала существует особый угол $\varphi = \varphi_*$, при котором $g(r, \varphi, \omega)$ принимает минимальное значение. Проведем численные вычисления, рассматривая два случая.

Полагая для начала $t_2 = 1$, будем искать значения t_1 . Полученные результаты при $\omega = 0.2$, $\omega = 1$ и $\omega = 5$ представлены на рис. 1.

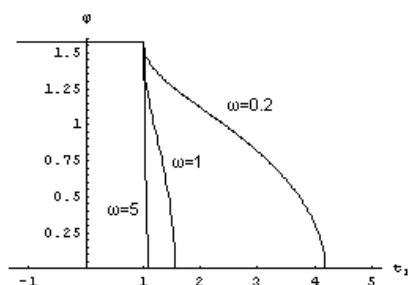


Рис. 1. Особый угол для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии.

Видно, что угол φ с ростом t_1 меняется от $\pi/2$ до 0, что связано с изменением длин волн в окружном и продольном направлениях.

Найдем теперь зависимость $r = \mu k = \mu \sqrt{p^2 + q^2}$ от t_1 . Значение r мы будем брать такое, при котором функция $g(r, \varphi, \omega)$ будет принимать минимальное значение (рис. 2).

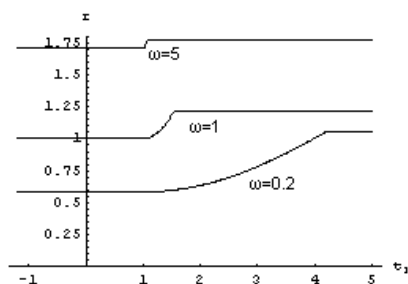


Рис. 2. Волновое число для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии.

Видно, что значения φ и r для каждого значения ω изменяются

на разных интервалах по оси t_1 . Причем за пределами этих интервалов значения φ и r остаются постоянными. Чем больше ω , тем быстрее происходит переход от максимального значения к минимальному у φ и от минимального к максимальному у r .

С помощью полученных результатов построим графики минимальных значений функции g (рис. 3).

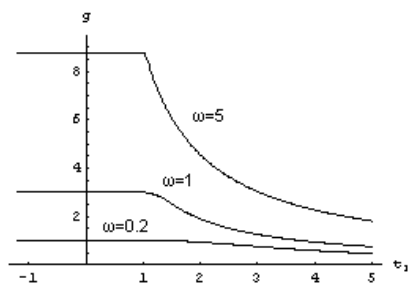


Рис. 3. Значение критической нагрузки для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии.

При $t_1 \leq 1$ критическая нагрузка g не зависит от осевого параметра нагружения. Вмятины образуются от края до края вдоль образующих (рис. 4, *a*).

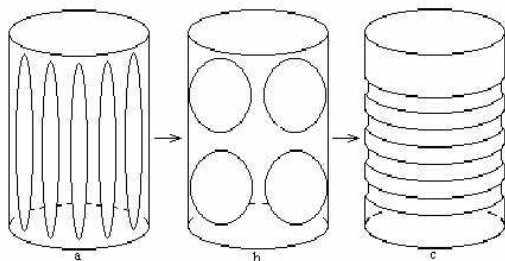


Рис. 4. Формы потери устойчивости для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии.

С ростом t_1 зависимость g от t_1 начинает проявляться. Вмятины начинают менять свою форму (рис. 4, *b*), в итоге они станут кольцевыми (рис. 4, *c*) (при $t_1 \gg t_2$). Что приведет к так называемой осесимметричной потере устойчивости. Чем больше ω , тем быстрее происходит этот переход. Чем больше ω , тем больше значение критической нагрузки. Стрелками на рис. 4 обозначены переходы форм потери устойчивости с возрастанием величины t_1 .

3.3. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при $t_1 = 1$

Теперь положим $t_1 = 1$ и аналогично п. 3.2 вычислим значение t_2 (рис. 5).

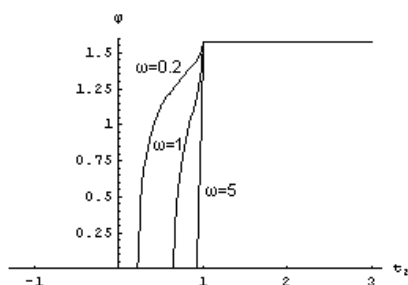


Рис. 5. Особый угол для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при постоянном внешнем давлении и переменном осевом сжатии.

Построим график зависимости волнового числа r от кольцевого параметра нагружения t_2 (рис. 6).

На рис. 7 представлен график для критической нагрузки. В отличие от п. 3.2 в данном случае формы потери устойчивости переходят в обратном направлении. Из рис. 6 видно, что при отрицательном значении параметра, соответствующего кольцевым напряжениям, критическая нагрузка не зависит от него. А при положительных t_2 все зависит от величины ω . С возрастанием ω увеличивается интервал, на котором критическая нагрузка не зависит от параметра t_2 .

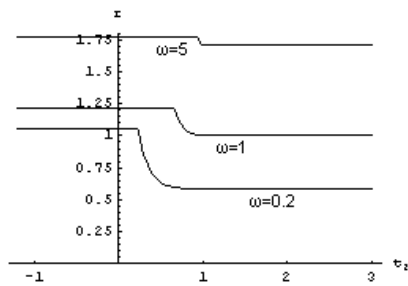


Рис. 6. Волновое число для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при переменном внешнем давлении и постоянном осевом сжатии.

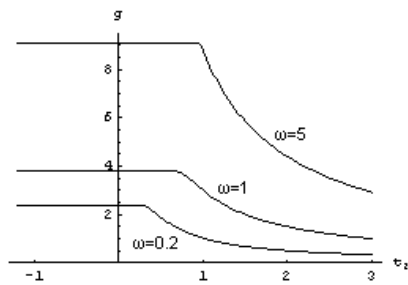


Рис. 7. Значение критической нагрузки для круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при переменном внешнем давлении и постоянном осевом сжатии.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача устойчивости тонкой оболочки, находящейся на упругом основании. Обсуждается возможность применимости локального подхода к задачам устойчивости тонких оболочек. В соответствии с данным принципом граничные условия игнорируются.

В качестве примера рассматривается тонкая круговая цилиндрическая оболочка на упругом основании под действием осевого сжатия и внешнего давления. В работе для данной модели оболоч-

ки получены зависимости значений особого угла, волнового числа и критической нагрузки от параметра упругого основания и способа нагружения.

Автор благодарен проф. П.Е. Тостику за ряд ценных замечаний по представленной работе и А.Л. Смирнову за помощь при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. 188 с.
2. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и оболочек на упругом основании // Изв. АН. Механика твердого тела. 2005. №1. С. 147–160.
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, Физматлит, 1995. 320 с.

НЕКОТОРЫЕ ОПЫТЫ РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ (на грани фола)

Е.Ф. ЖИГАЛКО

В работе обсуждаются особенности результатов, полученных в расчёте двух существенно неоднородных газодинамических процессов — течения, индуцированного пластиной, приведенной импульсивно в движение и сверхзвукового обтекания тела с детерминированным отрывом. Применена численная схема типа “крупных частей”, не обеспечивающая в этих случаях равномерную аппроксимацию.

Нашему семинару, особенно молодым участникам, представляю два в разной мере известных примера расчёта неоднородных газодинамических процессов по численным схемам, не обеспечивающим равномерность аппроксимации. Результаты этих опытов небесполезны, но требуют квалифицированного подхода и осмысления, вследствие нечёткой обоснованности.

В первом примере рассматривается нестационарное течение газа, импульсивно приведенного в равномерное движение около плоской стенки (обобщение первой задачи Стокса) [1]. Эта задача имеет простое формальное описание и допускает асимптотическое решение. Если принять, что y — нормально к стенке, движение инициировано вдоль x , $Pr = 1$ и параметры постоянны на $y = \text{const}$, то выполняется система уравнений (здесь и далее использованы общепринятые обозначения [1])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$
$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-08-00529.
Доклад на семинаре 31 октября 2006 г.
© Е.Ф. Жигалко, 2007

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y},$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = -p \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_y \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$p = (\kappa - 1) \rho e, \quad \mu e_\infty = \epsilon \mu_\infty,$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_y = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

решение которой определяется граничными и начальными условиями:

$$y = 0 : \quad u(t) = v(t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

$$y \rightarrow \infty : \quad u(y, t) = u_\infty, \quad v(y, t) = 0, \quad e(y, t) = e_\infty, \quad \rho(y, t) = \rho_\infty.$$

$$t = 0 : \quad u(y, 0) = u_\infty, \quad v(y, 0) = 0, \quad e(y, 0) = e_\infty, \quad \rho(y, 0) = \rho_\infty.$$

Достаточно ясно видна схема, по которой развивается индуцированное стенкой течение. Слой у стенки, в котором происходит диссипация импульса, производит поршневое действие на газ и по нему от стенки отходит волна сжатия, почти сразу оформляющаяся в скачок уплотнения, затем ослабевающая до нулевой амплитуды. Поскольку область индуцированного течения простирается только до фронта этой волны, то условия на бесконечности можно сносить на фронт.

В расчётах, проведённых вместе с Е.К. Стеглянниковой [2], применен метод типа крупных частиц, в котором осуществляют расщепление по физическим факторам.

На первом шаге рассчитывается эффект сил (включая действие компонентов тензора напряжений и теплопроводность), затем — изменение скорости и на последнем — конвекция. Уверенность в результатах численного решения ограничена, поскольку в нем комбинируются естественная и плохо определяемая вычислительная диссипации. Конечно-разностная схема не обеспечивает равномерную аппроксимацию вследствие особенностей начальной фазы и других градиентных зон симулируемого процесса. В [2] были сделаны выводы о качестве расчёта на основе сравнения его данных

с аналитическим решением. Эти выводы применимы в сфере пригодности аналитического решения:

$$\frac{1}{\text{Re}}, \frac{M^2}{\sqrt{\text{Re}}}, \frac{M^3}{\sqrt{\text{Re}}} \ll 1, \quad (1)$$

и не кажутся противоречивыми, пока речь идет о величинах, явно входящих в решаемые уравнения, выражающие законы сохранения.

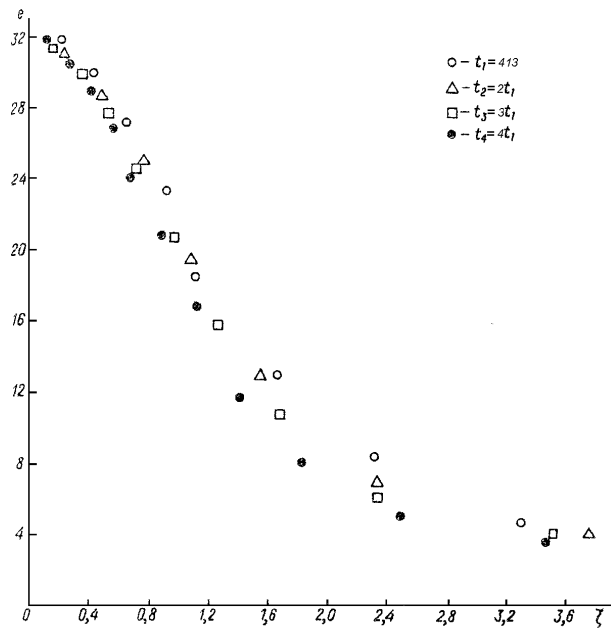
Намного более интригующим является то, что численное решение обладает свойством, неожиданным от приближённого продукта схемы с неравномерной аппроксимацией. На рисунке показаны данные расчёта удельной внутренней энергии в точках развивающегося диссипативного слоя для широкого спектра условий, но в фазах, когда условия (1) ещё не вполне достигнуты.

Для лучшего понимания данных необходимо учесть, что в граничные условия задачи не входит характерная величина, имеющая размерность длины, поэтому такую роль играет hy — шаг по y , а время отнесено к $\frac{hy}{a_\infty}$, $M_\infty = 10$, а при $t = t_4$ $\text{Re} = 1.6510^3$. Величина e на этой диаграмме представлена в зависимости от переменной-аргумента идеального автомоделного решения:

$$\zeta = \frac{\int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy}{2\sqrt{\nu_\infty t}}.$$

Поражает, что совокупность точек, полученных в разных условиях, в частности в самых ранних фазах процесса, группируется около некоторого одномерного континуума. Следовательно, процесс в расчётной модели является автомоделным, и это даже в условиях (ранние фазы), при которых аналитическое автомоделное решение [1] несправедливо. Удивляет не то, что $e(\zeta)$ в ранней фазе, при глубокой интерференции волновых и диссипативных эффектов, близка к автомоделной зависимости, а то, что грубый расчёт в состоянии указать на это обстоятельство.

Во втором примере рассмотрим расчёт течения в компактной срывной зоне. Характерным примером может служить обтекание газом осесимметричной компоновки диск — полубесконечный цилиндр. В широком диапазоне параметров это обтекание принимает



Удельная внутренняя энергия в точках развивающегося диссипативного слоя.

следующую форму. Газ, обтекающий наветренную сторону диска, в окрестности кромки срывается и течет дальше в трубке тока, интерпретируемой в идеализированной модели как “разделяющая линия тока”. Философия разделяющей линии тока очень сложна. Этот объект фактически не существует, и более содержательной моделью является зона весьма неоднородного течения — слой смешения, где принципиальное значение имеет диссипация. В слое смешения контактируют, обмениваясь массой, внешний поток и течение в области между диском и торцом цилиндра. Слой смешения простирается до окрестности кромки цилиндра, и с некоторыми оговорками можно говорить, что такое обтекание компоновки диск-цилиндр происходит с детерминированным отрывом потока у края диска и

присоединением у кромки торца цилиндра.

Известны примеры расчёта такого течения с использованием конечно-разностного представления для системы уравнений газодинамики, в которой пренебрегают эффектами вязкости и теплопроводности ([3]–[4] и многие другие). Конечно-разностная модель не в состоянии обеспечить равномерную аппроксимацию в зонах отрыва и присоединения, а также в слое смешения и в других градиентных областях. Однако анализ результатов расчёта и сопоставление с опытом говорят о том, что ключевые характеристики процесса, такие как структура течения, поля давления плотности и скорости такая расчётная модель передаёт удовлетворительно. В условиях детерминированного отрыва и присоединения, когда важное значение (в расчёте на установление) имеет сама диссипация, а не её интенсивность, вычислительная вязкость эффективно замещает естественную.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М., 1962. 479 с.
2. Жигалко Е.Ф., Стежляникова Е.К. Особенности расчёта течения у пластинки, импульсивно приведенной в равномерное движение методом “жидкость в ячейках” // Газодинамика и теплообмен. Вып. 5. 1977. С. 128–138.
3. Белов И.А., Жигалко Е.Ф. Передняя срывная зона при обтекании тупого тела (расчетная модель) // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981, № 2. С. 84–87.
4. Жигалко Е.Ф. Схема расчета близкого к осесимметричному течения газа и сверхзвуковое обтекание торца цилиндра под небольшим углом атаки // ЖВМиМФ. 1986, № 6.

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ

Р. Ю. Юшин

Характерной особенностью изгиба круговой пластинки с учетом разносопротивляемости материала при сжатии и растяжении является нарушение симметрии развития пластических областей сверху и снизу пластинки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенностью изгиба круговой пластинки (в отличие от изгиба балки) является возможность существования чисто пластического состояния пластинки одновременно по всей ее площади. Рассмотрим круговую пластинку радиуса a или кольцевую пластинку радиусов a и b , находящиеся под действием произвольной нагрузки p , распределенной осесимметрично. Появление пластичности и дальнейшее ее развитие с возрастанием нагрузки p происходит здесь так же, как и у пластинок произвольной формы, следуя [1], [2], [5].

Примем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , плоскость $z = 0$ которой совпадает со средней плоскостью пластинки, а ось z направлена вниз; толщина пластинки обозначена $2h$ и предполагается малой в сравнении с ее радиусом a .

Порядок разных компонент напряжения, возникающих при изгибе пластинки, здесь неодинаков: компоненты σ_z и τ_{zr} в плоскостях, параллельных средней плоскости, малы по сравнению с компонентами σ_r и σ_θ в плоскостях, нормальных к ней. Кроме того, вследствие осевой симметрии

$$\tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.
Доклад на семинаре 14 ноября 2006 г.
© Р. Ю. Юшин, 2007

Напряженное состояние пластинки может быть определено двумя компонентами момента M_r , M_θ , выражающимися через σ_r , σ_θ в виде

$$M_r = 2 \int_0^h \sigma_r z \, dz, \quad M_\theta = 2 \int_0^h \sigma_\theta z \, dz$$

и одной компонентой поперечной силы $Q_r = Q$, связанной с τ_{rz} таким образом:

$$Q = 2 \int_0^h \tau_{rz} \, dz.$$

Для этих компонент используется общепринятое правило знаков. Предельными значениями изгибающих и крутящего моментов являются $M_s = \sigma_s h^2$ и $K = k h^2$, так что

$$M_s = \sqrt{3}K.$$

Равновесие круговой или кольцевой симметрично нагруженных пластинок описывается дифференциальным уравнением, связывающим компоненты M_r , M_θ и Q , следующего вида:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q, \quad (1)$$

а компонента Q определяется при помощи интеграла

$$Q = -\frac{1}{r} \int_0^r pr \, dr. \quad (2)$$

Причем для кольцевой пластинки со свободным внутренним краем нижний предел интеграла должен быть заменен на b .

В случае нагрузки p , равномерно распределенной по всей площади, или сосредоточенной силы P , приложенной в центре, компонента Q имеет вид

$$Q = -\frac{1}{2}pr \quad \text{или} \quad Q = -\frac{P}{2\pi r},$$

А в случае нагрузки p , равномерно распределенной по кругу радиуса d , компонента Q следующая:

$$Q = -\frac{1}{2}p\frac{d^2}{r}$$

при $d \leq r \leq b$.

Упругое состояние описывается следующими уравнениями, записанными в цилиндрических координатах:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r). \quad (3)$$

Интенсивность напряжения τ при

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{rz} = 0$$

получается следующей (если опустить малые выражения компонент деформации τ_{zr} и γ_{zr}):

$$\tau^2 = \frac{1}{3}(\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2),$$

$\tau = k$ – условие текучести Губера–Мизеса [2].

Интенсивность деформации после введения обозначений

$$\sin \mu = \frac{1+\nu}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}, \quad \cos \mu = \frac{\sqrt{3}(1-\nu)}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$$

запишется так:

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{4\cos^2 \mu}(\varepsilon_r^2 - 2\cos 2\mu\varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2).$$

Пластическое состояние определяется уравнениями, составленными в предположении о несжимаемости материала, которые в цилиндрических координатах запишутся так:

$$\sigma_r = \frac{k}{\gamma}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{k}{\gamma}(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r). \quad (4)$$

Интенсивность напряжения τ имеет прежний вид, а интенсивность деформации γ –

$$\gamma^2 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2$$

(выражение получается при $-\varepsilon_z = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$, $\gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0$ после отбрасывания малой компоненты γ_{zr} .)

Заметим, что при $\nu = 1/2$, т.е. когда материал в упругом состоянии также несжимаем, угол $\mu = \pi/3$, а интенсивность $\gamma_0 = \gamma$. Как и в общем случае пластинки произвольной формы, компоненты деформации ε_r и ε_θ выражаются в виде произведений координаты z на параметры искривления средней плоскости пластинки ξ_r и ξ_θ , зависящие только от r , а именно:

$$\varepsilon_r = z\xi_r, \quad \varepsilon_\theta = z\xi_\theta.$$

Введем теперь положительную величину

$$\xi_0^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \mu} (\xi_r^2 - 2 \cos 2\mu \xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2)$$

и аналогичную положительную величину

$$\xi^2 = \xi_r^2 + \xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2.$$

Параметры ξ_r и ξ_θ определяются через прогиб W при помощи классических соотношений линейной теории

$$\xi_r = -\frac{d^2 W}{dr^2}, \quad \xi_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dW}{dr}, \quad (5)$$

которые дают дифференциальное уравнение совместности деформаций

$$\frac{d\xi_\theta}{dr} + \frac{\xi_\theta - \xi_r}{r} = 0. \quad (6)$$

Заменяя компоненты деформации параметрами ξ_r и ξ_θ в уравнениях (3), соответствующих упругому состоянию, получим

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\nu} z(\xi_r + \nu\xi_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu} z(\xi_\theta + \nu\xi_r), \quad (7)$$

а в уравнениях (4), отвечающих пластическому состоянию, будем иметь

$$\sigma_r = \varkappa \frac{k}{\xi} (2\xi_r + \xi_\theta), \quad \sigma_\theta = \varkappa \frac{k}{\xi} (2\xi_\theta + \xi_r). \quad (8)$$

Заметим, что правые части этих равенств имеют в качестве коэффициента знак $\varkappa = \text{sign } z$, но не зависят от величины z .

2. ТРИ ВИДА НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрение изгиба изотропных пластин проводим на основе теории В.В. Соколовского. Различаются три вида напряженных состояний: *чисто упругое*, *упругопластическое* и *чисто пластическое*.

1. *Чисто упругое состояние*. Компоненты момента (1) на основании (7) выражаются через параметры искривления средней плоскости пластинки следующим образом:

$$M_r = D(\xi_r + \nu\xi_\theta), \quad M_\theta = D(\xi_\theta + \nu\xi_r), \quad (9)$$

а коэффициент D есть жесткость пластинки на изгиб:

$$D = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}.$$

2. *Упругопластическое напряженное состояние*. Компоненты момента (1) могут быть представлены через параметры искривления средней плоскости пластинки, если разбить интеграл с пределами от $z = 0$ до $z = h$ на два интервала с пределами от $z = 0$ до $z = \zeta$ и от $z = \zeta$ до $z = h$, затем внести (7) в первый интеграл и (8) во второй. Легко установить, что

$$\begin{cases} M_r = \frac{4G\zeta^3}{3(1-\nu)} (\xi_r + \nu\xi_\theta) + \frac{k}{\zeta} (h^2 - \zeta^2) (2\xi_r + \xi_\theta), \\ M_\theta = \frac{4G\zeta^3}{3(1-\nu)} (\xi_\theta + \nu\xi_r) + \frac{k}{\zeta} (h^2 - \zeta^2) (2\xi_\theta + \xi_r). \end{cases} \quad (10)$$

Так как в упругом слое пластинки интенсивность напряжения

$$\tau = 2G\gamma_0 = 2G|z|\xi_0,$$

а на границах $|z| = \zeta$ между слоями эта интенсивность $\tau = k$, то нетрудно видеть, что

$$\xi_0 = \frac{k}{2G\zeta}.$$

Выразим параметры искривления в двух видах: через ξ и величину ω или через ξ_0 и новую величину ψ так:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_r \\ \xi_\theta \end{array} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{3}\right) = \xi_0 \frac{\cos(\psi \pm \mu)}{\sin \mu},$$

имея в виду, что ψ и ω связаны между собой так:

$$\frac{\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos(\psi + \mu)}{\cos(\psi - \mu)}.$$

Предыдущие формулы дают нам возможность выразить компоненты момента в виде

$$\left. \begin{array}{l} M_r \\ M_\theta \end{array} \right\} = 2k \left[(h^2 - \zeta^2) \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3} \zeta^2 \cos\left(\psi \pm \frac{\pi}{6}\right) \right], \quad (11)$$

а параметры искривления следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_r \\ \xi_\theta \end{array} \right\} = \frac{k}{2G\zeta} \frac{\cos(\psi \pm \mu)}{\sin \mu}. \quad (12)$$

Заметим, что при $\nu = 1/2$ угол $\mu = \pi/3$, а величины ψ и ω совпадают. Это влечет за собой значительное упрощение предыдущих выражений. Так, например, компоненты момента принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} M_r \\ M_\theta \end{array} \right\} = 2k \left(h^2 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right),$$

а параметры искривления следующие:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_r \\ \xi_\theta \end{array} \right\} = \frac{k}{\sqrt{3}G\zeta} \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{3}\right).$$

3. Чисто пластическое напряженное состояние. Компоненты момента вследствие (11) при $\zeta = 0$ представляются в следующей форме:

$$\left. \begin{array}{l} M_r \\ M_\theta \end{array} \right\} = 2K \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right). \quad (13)$$

Граничные условия зависят от характера закрепления краев пластинки. В центре сплошной пластинки компоненты момента равны между собой:

$$M_r = M_\theta \geq 0.$$

На границе между *чисто упругой* и *упругопластической* зонами, т.е. при $\zeta = h$, изогнутая средняя поверхность должна быть непрерывной и иметь непрерывно изменяющуюся касательную плоскость, а вместе с тем непрерывными должны быть также все компоненты момента.

3. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН В ПРОДОЛЬНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Исследуем систему уравнений равновесия, описывающую упругопластическое напряженное состояние изогнутых круговой или кольцевой пластинок. Внося дифференциальное уравнение равновесия (2) в выражение (11) и вводя безразмерную переменную χ при помощи равенства $\zeta = h\chi$, получим

$$r \frac{d}{dr} = \left[(1 - \chi^2) \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3} \chi^2 \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) \right] - \left[(1 - \chi^2) \sin \omega + \frac{2}{3} \chi^2 \sin \psi \right] = \frac{Q}{2K} r, \quad (14)$$

а подставляя в дифференциальное уравнение (6) выражения (12), будем иметь

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\chi} \cos(\psi - \mu) \right] + \frac{2}{\chi} \sin \mu \sin \psi = 0. \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение для вычисления прогиба получается из соотношений (5) и (12) в таком виде:

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{\cos(\psi + \mu)}{\cos(\psi - \mu)} \frac{dw}{dr} \quad (16)$$

или

$$\frac{dw}{dr} = -r \frac{k}{2Gh\chi} \frac{\cos(\psi - \mu)}{\sin \mu}. \quad (17)$$

Приведенные выше уравнения дают возможность решать задачи об упругопластическом изгибе круговой и кольцевой пластинок при различных нагрузках и граничных условиях.

Рассмотрим круговую пластинку, свободно опертую по контуру, находящуюся под действием нагрузки p , равномерно распределенной по всей площади. Определим напряженные состояния пластинки и формы изогнутой средней поверхности при различных p .

Компонента поперечной силы:

$$Q = -\frac{1}{2} pr.$$

Введем новую независимую переменную:

$$\rho^2 = \frac{p}{4K} r^2.$$

Дифференциальное уравнение (14) примет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left[(1 - \chi^2) \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3} \chi^2 \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) \right] - \\ - \left[(1 - \chi^2) \sin \omega + \frac{2}{3} \chi^2 \sin \psi \right] = -\rho^2, \end{aligned} \quad (18)$$

а дифференциальное уравнение (15) переписется так:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\chi} \cos(\psi - \mu) \right] + \frac{2}{3} \sin \mu \sin \psi = 0. \quad (19)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} A_1 \frac{d\chi}{d\rho} + A_2 \frac{d\omega}{d\rho} + A_3 = 0 \\ A_4 \frac{d\chi}{d\rho} + A_5 \frac{d\omega}{d\rho} + A_6 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Левые части могут быть без труда развернуты, а полученные уравнения разрешены относительно производных $d\omega/d\rho$, $d\chi/d\rho$.

В развернутом виде (18), (19) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\rho} &= -\frac{A_1(A_6 A_2 - A_5 A_3) + A_3(A_4 A_2 - A_5 A_1)}{A_2(A_4 A_2 - A_5 A_1)}; \\ \frac{d\chi}{d\rho} &= \frac{A_6 A_2 - A_5 A_3}{A_4 A_2 - A_5 A_1}; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\rho\chi(2\cos(\psi + \pi/6) - 3\cos(\omega + \pi/6)); \\ A_2 &= -3\rho(1 - \chi^2)\sin(\omega + \pi/6) + 2B\chi^2\sin(\psi + \pi/6); \\ A_3 &= 3\rho^2 - 3(1 - \chi^2)\sin\omega - 2\chi^2\sin\psi; \\ A_4 &= 3\rho\cos(\psi - \mu); \quad A_5 = 3\rho B\chi\sin(\psi - \mu); \\ A_6 &= -6\chi\sin\mu\sin\psi; \quad B = \frac{3(1 - \nu)\cos^2\psi}{1 + \nu\cos^2\omega}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти от обозначений В.В. Соколовского к другим, характеризующим не расстояние от нейтральной поверхности до границы упругой и пластической зоны, а от верхней и нижней поверхности до границы упругой и пластической зон.

4. О возможности учёта эффекта SD материала при упругопластической изгибе круглой пластины. Основные соотношения

Рассмотрим задачу упругопластического изгиба круглой трансверсально-изотропной пластины, свободно опертой по контуру и находящейся под действием равномерного давления, учитывая различие между пределами текучести материала при сжатии и растяжении. В отечественной и зарубежной литературе этот эффект встречается под названием эффекта SD (strenght-different). Под эффектом SD мы будем понимать, согласно [4], изменение абсолютных значений компонент напряжений, соответствующих поверхности текучести, при замене знаков всех компонент на противоположные.

На рис. 1. схематично изображена поверхность текучести трансверсально-изотропного материала без учета эффекта SD (пунктирная линия) и с учетом этого эффекта (сплошная кривая).

В [5] предложен критерий текучести ортотропного материала, учитывающий влияние среднего нормального напряжения, а именно:

$$\sqrt{F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2} + \frac{\alpha_1}{3}\sigma_1 + \frac{\alpha_2}{3}\sigma_2 + \frac{\alpha_3}{3}\sigma_3 = 1. \quad (21)$$

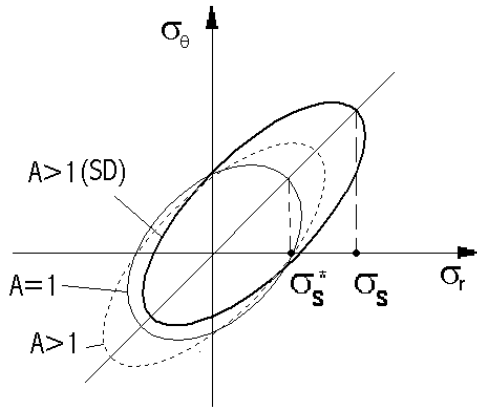


Рис. 1. Критерий текучести.

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные нормальные напряжения, $F, G, H, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – постоянные. Для трансверсально-изотропной пластины при плоском напряженном состоянии выполняются равенства

$$F = G = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sigma_s^p} + \frac{1}{\sigma_s^c} \right)^2; \quad H = \frac{A}{8} \left(\frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)^2;$$

$$A = 2 - \frac{\left(\frac{1}{\sigma_s^p} + \frac{1}{\sigma_s^c} \right)^2}{\left(\frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)^2}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{(\sigma_s^*)^p} - \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right); \quad (22)$$

где $\sigma_s^p, (\sigma_s^*)^p$ – пределы текучести при одноосном растяжении в направлении оси z и плоскости пластины соответственно, $\sigma_s^c, (\sigma_s^*)^c$ – пределы текучести при одноосном сжатии в направлении оси z и плоскости пластины соответственно.

Критерий текучести (21) можно записать для трансверсально-

изотропной пластины в виде [1]:

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} + \beta\sigma = k, \quad (23)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta); \quad \beta = \left(\frac{1}{(\sigma_s^*)^p} - \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right) / \left(\frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right); \quad (24)$$

$$k = 2 / \left(\frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right).$$

При $\sigma_s^p = \sigma_s^c = \sigma_s$, $(\sigma_s^*)^p = (\sigma_s^*)^c = \sigma_s^*$ имеем $\beta = 0$, и критерий (23) переходит в критерий [2]:

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} = \sqrt{3}k^*, \quad k^* = \sigma_s^* / \sqrt{3}. \quad (25)$$

Рассмотрим пластину в упругопластическом состоянии, изображенную на рис. 2. Как и в случае изгиба балок [3] учет среднего нормального напряжения приводит к нарушению симметричного развития пластических областей сверху и снизу пластины. Нейтральная поверхность, т.е. та, на которой напряжения обращаются в нуль, в этом случае уже не совпадает с срединной.

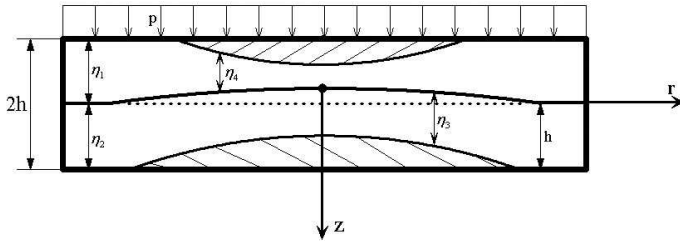


Рис. 2. Упругопластическое состояние.

Неизвестными функциями являются расстояния от нейтральной поверхности до границы зон упругого и пластического состояния материала и расстояние от этой границы до верхней и нижней поверхности пластины: $\eta_1(r)$, $\eta_2(r)$, $\eta_3(r)$, $\eta_4(r)$.

Рассмотрим вопрос о распределении напряжений по толщине в центре пластины при условии, что и на верхней и на нижней грани имеются пластические области. На нейтральной поверхности $z = 0$ при $r = 0$, $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$. В пластической области, расположенной вверху пластины, материал подвергается сжатию и напряжения равны

$$|\sigma_r| = |\sigma_\theta| = (\sigma_s^*)^c \quad (26)$$

при $r = 0$, $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta < 0$, а для пластической зоны, расположенной внизу в зоне растяжения, напряжения равны

$$(\sigma_s^*)^p = \sigma_r = \sigma_\theta, \quad (27)$$

при $\sigma_r > 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Примем для определенности, что предел текучести при растяжении меньше, чем предел текучести при сжатии. Тогда

$$(\sigma_s^*)^p < (\sigma_s^*)^c; \beta \geq 0. \quad (28)$$

Эпюра напряжений показана на рис. 3. Пластические деформации в этом случае развиваются сначала внизу в центре пластины, а потом появляются наверху в центре пластины. Ограничимся теми случаями, когда пластичность от края вообще не появляется.

Отметим, что как и в случае изгиба балок [3], при изгибе пластины выполняются соотношения

$$\begin{cases} \eta_1 + \eta_2 = 2h, \\ (\eta_1 - \eta_4)(\sigma_s^*)^c + \frac{1}{2}\eta_4(\sigma_s^*)^c = (\eta_2 - \eta_3)(\sigma_s^*)^p + \frac{1}{2}\eta_3(\sigma_s^*)^p. \end{cases} \quad (29)$$

Второе соотношение (29) представляет собой требование равенства площадей заштрихованной фигуры над нейтральной осью и под ней (рис. 3).

5. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ.

Перейдем к зависимости между деформациями и напряжениями в упругой и пластических областях пластины.

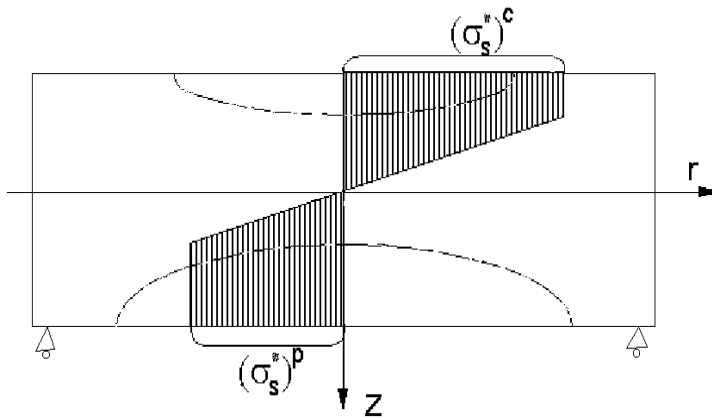


Рис. 3. Эпюра напряжений.

В упругой области справедливы соотношения закона Гука. В пластических областях выполняется [6]:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{k}{\sqrt{3}(2-A)} \left(\frac{1}{\Phi} (2\varepsilon_r + A\varepsilon_\theta) - \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \right), \\ \sigma_\theta = \frac{k}{\sqrt{3}(2-A)} \left(\frac{1}{\Phi} (2\varepsilon_\theta + A\varepsilon_r) - \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \right). \end{cases} \quad (30)$$

Найдем Φ . Подставим (30) в (23) и, пренебрегая членами порядка β^2 по сравнению с единицей, приведем уравнение к виду

$$M_1\Phi^2 + M_2\Phi + M_3 = 0, \quad (31)$$

где $M_1 = 9(2-A)^2$, $M_2 = 0$, $M_3 = -(4-A^2)(\varepsilon_r^2 + A\varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2)$.

Имеем решение квадратного уравнения:

$$\Phi_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{3(2-A)}{2+A} (\varepsilon_r^2 + A\varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2)}. \quad (32)$$

В [2] показано, что тут следует принять знак "+", так как $\Phi > 0$. По аналогии с [1] введем ξ так, чтобы

$$\Phi = |z|\xi. \quad (33)$$

Переходим к исследованию напряженного состояния и условия равновесия трансверсально-изотропной пластины при учете эффекта SD.

6. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА SD

Напряженное состояние пластины можно определить двумя моментами:

$$M_r = \int_{-\eta_1}^{\eta_2} \sigma_r z dz; \quad M_\theta = \int_{-\eta_1}^{\eta_2} \sigma_\theta z dz \quad (34)$$

и поперечной силой

$$Q = -\frac{1}{2}pr. \quad (35)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q. \quad (36)$$

Преобразуем соотношения (34). Разобьем интегрирование по схеме

$$M_i = \int_{-\eta_1}^{-\eta^4} \sigma_i z dz + \int_{-\eta^4}^0 \sigma_i z dz + \int_0^{\eta^3} \sigma_i z dz + \int_{\eta^3}^{\eta^2} \sigma_i z dz; \quad i = r, \theta. \quad (37)$$

В первый и четвертый интеграл подставим соотношения закона Гука, а в третий и четвертый — упругопластические соотношения.

Срединная поверхность не совпадает с нейтральной поверхностью, поэтому систему координат (r, θ, z) вводим не на срединной поверхности, как раньше, а на нейтральной. Запишем все соотношения относительно нейтральной поверхности. Моменты приобре-

тают вид

$$M_r = \frac{2Gh^2}{3(1-\nu)} ((\xi_r^+ + \nu\xi_\theta^+)\chi_3^3 + (\xi_r^- + \nu\xi_\theta^-)\chi_4^3) + \frac{kh^2}{2\sqrt{3}(2-A)} \times \\ \times \left(\frac{2\xi_r^- + A\xi_\theta^-}{\xi} + \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \right) (\chi_1^2 - \chi_4^2) + \left(\frac{2\xi_r^+ + A\xi_\theta^+}{\xi} - \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \right) (\chi_2^2 - \chi_3^2), \quad (38)$$

$$M_\theta = \frac{2Gh^2}{3(1-\nu)} ((\xi_\theta^+ + \nu\xi_r^+)\chi_3^3 + (\xi_\theta^- + \nu\xi_r^-)\chi_4^3) + \frac{kh^2}{2\sqrt{3}(2-A)} \times \\ \times \left(\frac{2\xi_\theta^- + A\xi_r^-}{\xi} + \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \right) (\chi_1^2 - \chi_4^2) + \left(\frac{2\xi_\theta^+ + A\xi_r^+}{\xi} - \frac{2\beta}{\sqrt{3}} \right) (\chi_2^2 - \chi_3^2). \quad (39)$$

Здесь через χ_1, \dots, χ_4 обозначены величины

$$\chi_i = \frac{\eta_i}{h}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (40)$$

Индексы (-) и (+) обозначают параметры искривления в зонах сжатия и растяжения пластины.

Введем в рассмотрение величину Φ_0 по аналогии с [1]:

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{2+A}{12 \cos^2 \mu_0}} (\xi_r^2 - 2 \cos 2\mu_0 \xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2), \quad (41)$$

где μ_0 определяется соотношениями

$$\sin \mu_0 = \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\frac{2-A}{1-A\nu+\nu^2}}, \quad \cos \mu_0 = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{\frac{2+A}{1-A\nu+\nu^2}}. \quad (42)$$

Введем величину $\xi_0 = \frac{\Phi_0}{|z|}$. Очевидно, что выполнено равенство

$$2\sqrt{3}G\Phi_0 = 2\sqrt{3}G\xi_0|z| = k - \beta\sigma; \quad \Phi_0 = \frac{k - \beta\sigma}{2\sqrt{3}G}. \quad (43)$$

Представим параметры искривления нейтральной поверхности в двух видах: через ξ и ω , а также через ξ_0 и ψ :

$$\left. \begin{array}{l} \xi_r \\ \xi_\theta \end{array} \right\} = \frac{2\sqrt{3}\xi \cos(\omega \pm \alpha)}{2+A} = \sqrt{\frac{3}{2+A}} \frac{\xi_0 \cos(\psi \pm \mu_0)}{\sin \mu_0} \quad (44)$$

где μ_0 определяется соотношениями (42), α – соотношениями

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2+A}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2-A}}{2}.$$

и между ω и ψ имеет место зависимость $\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \mu_0$. При $A = 1$, $\nu = 1/2$ имеем

$$\alpha = \pi/3, \quad \omega = \psi. \quad (45)$$

Остановимся особо на определении ξ_0 . Эту величину нужно определить из условия непрерывности деформаций на границе между упругой и пластической областями. Из (43) имеем

$$\xi_0 = \frac{k - \beta\sigma}{2G|z|\sqrt{3}}. \quad (46)$$

Подставим сюда соотношения для закона Гука. Получим

$$\xi_0 = \frac{k}{2G|z|\sqrt{3}} - \frac{\beta z (1 + \nu)}{3(1 - \nu)} (\xi_r + \xi_\theta). \quad (47)$$

Воспользуемся теперь представлением (44) и приведем (47) к виду

$$\xi_0 = \frac{k}{2\sqrt{3}G|z|(1 + t \cos \psi \operatorname{sign} z)}. \quad (48)$$

На границе упругой и пластической областей в верхней части пластины выполнено $|z| = h\chi_4$, $\operatorname{sign} z = -1$, тогда

$$\xi_0 = \frac{k}{2\sqrt{3}G\chi_4(1 - t \cos \psi)}. \quad (49)$$

Для нижней части пластины в зоне растяжения, рассуждая аналогичным образом и используя условие $|z| = h\chi_3$, справедливо $\operatorname{sign} z = 1$:

$$\xi_0 = \frac{k}{2\sqrt{3}G\chi_3(1 + t \cos \psi)}. \quad (50)$$

Теперь подставим (44), (49) и (50) в соотношения для моментов (38), (39). Получаем

$$\left. \begin{aligned} M_r \\ M_\theta \end{aligned} \right\} = \frac{2kh^2}{\sqrt{3}\sqrt{2-A}} (\cos \psi \mp F \sin \psi) \left(\frac{\chi_3^2}{1+t \cos \psi} + \frac{\chi_4^2}{1-t \cos \psi} \right) + \frac{2kh^2}{\sqrt{3}\sqrt{2-A}} ((\cos \omega \mp F \sin \omega + t) (\chi_1^2 - \chi_4^2) + (\cos \omega \mp F \sin \omega - t) (\chi_2^2 - \chi_3^2)), \quad (51)$$

где $F = \sqrt{\frac{2-A}{2+A}}$, $t = \frac{2\beta}{3\sqrt{2-A}}$

Из условий $2h = \text{const}$ и распределения момента M_r по вертикали следуют соотношения

$$\begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 2, \\ (\sigma_s^*)^c (\chi_1 - \chi_4/2) = (\sigma_s^*)^p (\chi_2 - \chi_3/2). \end{cases} \quad (52)$$

Используя (52), выразим χ_1 и χ_2 через χ_3 и χ_4 , то есть:

$$\begin{cases} \chi_1 = 2(1 - C_1) - 1/2\chi_3C_2 + 1/2\chi_4C_1, \\ \chi_2 = 2C_1 + 1/2\chi_3C_2 - 1/2\chi_4C_1. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь $C_1 = \frac{(\sigma_s^*)^c}{(\sigma_s^*)^p - (\sigma_s^*)^c}$, $C_2 = \frac{(\sigma_s^*)^p}{(\sigma_s^*)^p + (\sigma_s^*)^c}$.

Подставим (53) в выражения для моментов (51), а затем полученные выражения – в уравнение равновесия (36) и приведем уравнение равновесия, используя новую безразмерную переменную

ρ ($\rho^2 = \frac{p\sqrt{2+A}}{4kh^2} r^2$) к виду

$$A_0 \frac{d\chi_3}{d\rho} + A_1 \frac{d\chi_4}{d\rho} + A_2 \frac{d\omega}{d\rho} + A_3 = 0. \quad (54)$$

Коэффициент при $\frac{d\chi_3}{d\rho}$ записывается так:

$$A_0 = \rho \left(\frac{2\chi_3}{3} \frac{(\cos \psi - F \sin \psi)}{(1+t \cos \psi)} + \frac{(C_2\chi_2 - 2\chi_3)}{2} (\cos \omega - F \sin \omega - t) - \frac{C_2\chi_1}{2} (\cos \omega - F \sin \omega + t) \right),$$

коэффициент при $\frac{d\chi_4}{d\rho}$:

$$A_1 = \rho \left(\frac{2\chi_4}{3} \frac{(\cos \psi - F \sin \psi)}{(1 - t \cos \psi)} + \frac{(C_1 \chi_1 - 2\chi_4)}{2} (\cos \omega - F \sin \omega + t) - \frac{C_1 \chi_2}{2} (\cos \omega - F \sin \omega - t) \right),$$

а при $\frac{d\omega}{d\rho}$:

$$A_2 = -\rho B_1 \left(\frac{\chi_3^2 (\sin \psi + F \cos \psi + tF)}{3(1 + t \cos \psi)^2} + \frac{\chi_4^2 (\sin \psi + F \cos \psi - tF)}{3(1 - t \cos \psi)^2} \right) - \frac{1}{2} (\sin \omega + F \cos \omega) (\chi_1^2 + \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2),$$

причем $B_1 = \frac{(1 - \nu)(2 + A) \cos^2 \psi}{(1 + \nu)(2 - A) \cos^2 \omega}$. Оставшийся коэффициент

$$A_3 = \frac{\rho^2}{2F} - (F \sin \omega - 2t)(\chi_1^2 - \chi_4^2) - (F \sin \omega + 2t)(\chi_2^2 - \chi_3^2) - \frac{2F \sin \psi}{3} \left(\frac{\chi_3^2}{1 + t \cos \psi} + \frac{\chi_4^2}{1 - t \cos \psi} \right).$$

Перейдем к выводу уравнения совместности деформаций. Подставим (44) с учетом (49) и (50) в уравнение совместности деформаций, которое в данном случае распадается на два уравнения, а именно:

$$\begin{cases} A_4 \frac{d\chi_4}{d\rho} + A_5 \frac{d\omega}{d\rho} + A_6 = 0 \text{ для верхней части пластины,} \\ A_7 \frac{d\chi_3}{d\rho} + A_8 \frac{d\omega}{d\rho} + A_9 = 0 \text{ для нижней части пластины,} \end{cases} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} A_4 &= \rho \cos(\psi + \mu_0)(1 - t \cos \psi); \\ A_5 &= \rho B_1 \chi_4 (\sin(\psi + \mu_0) - t \sin \mu_0); \\ A_6 &= -2\chi_4 (1 - t \cos \psi) \sin \psi \sin \mu_0; \\ A_7 &= \rho \cos(\psi + \mu_0)(1 + t \cos \psi); \\ A_8 &= \rho B_1 \chi_3 (\sin(\psi + \mu_0) + t \sin \mu_0); \\ A_9 &= -2\chi_3 (1 + t \cos \psi) \sin \psi \sin \mu_0. \end{aligned}$$

Если теперь объединить (54) и (55) в систему, то получаем систему дифференциальных уравнений, содержащую три уравнения и три неизвестные функции $\chi_3(\rho)$, $\chi_4(\rho)$ и $\omega(\rho)$. Система имеет третий порядок, нелинейные коэффициенты и особую точку $\rho = 0$.

Она может быть реализована численно. Изложим последовательность решения: Необходимо перейти от переменных χ_3, χ_4 к переменным

$$a_1 = \chi_1 - \chi_4, a_2 = \chi_2 - \chi_3. \quad (56)$$

Численная реализация проводится разностным методом с шагом по ρ , начиная вблизи центра пластины ($\rho = 0$ – особая точка.) В результате расчета строятся зависимости $\omega_i(\rho_i)$, $a_3(\rho_i)$, $a_4(\rho_i)$ на каждом шаге. Расчет имеет промежуточную точку $a_3 = 0$, после чего принимается $a_3 \equiv 0$ и расчет продолжается для a_4 .

Значение ρ_i^B при $a_3 = 0$ фиксируется и определяет безразмерный радиус пластической области на верхней поверхности пластины. При достижении условия $a_4 = 0$ фиксируется значение ρ_i^H , определяющее безразмерный радиус пластической области на нижней поверхности пластины.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА.

Рассмотрим зависимость $a_3(\rho)$, $a_4(\rho)$. Во всех приведенных случаях мы строим ее для различных нагрузок, но одинаковой начальной глубины пластической области $a_1^0(0)$ сверху пластины. Результаты были получены при шаге $h = 0.001$ и начальных глубинах $a_1^0(0) = 0.1$, $a_1^0(0) = 0.25$.

На рис. 4 показано развитие пластических зон в изотропном и трансверсально-изотропном случае. Зоны пластичности сверху и снизу пластин симметричны. Точками обозначена граница упругой и пластической зоны в трансверсально-изотропном случае. Линиями – в изотропном случае, ρ – безразмерный радиус пластины. Видно, что пластическая область в трансверсально-изотропном случае больше на 8 – 9%, когда пределы текучести отличались на 20%. То есть в трансверсально-изотропном случае большее количество материала переходит из упругого состояния в пластическое. По сравнению с изотропной пластиной рост ω происходит быстрее, следо-

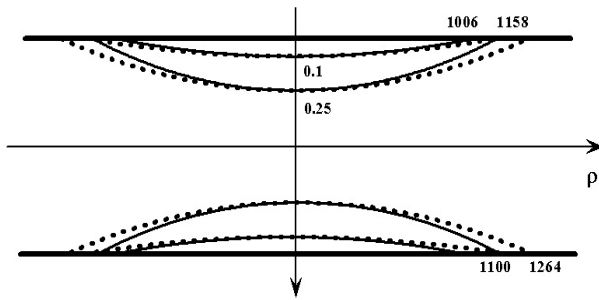


Рис. 4. Зоны пластичности в изотропном и трансверсально-изотропном случае.

вательно, быстрее искажается картина простого нагружения, которая реализуется точно только в центре пластины и вблизи центра с небольшой погрешностью.

На рис. 5 показано развитие пластических областей у пластины с эффектом SD и трансверсально-изотропной пластины с эффектом SD. Точками обозначена граница упругой и пластической зоны в трансверсально-изотропном случае с эффектом SD, линиями – в изотропном случае с эффектом SD, ρ – безразмерный радиус пластины.

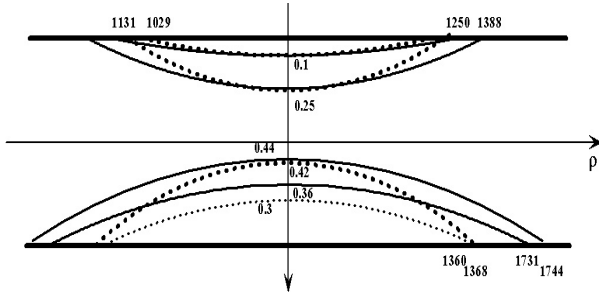


Рис. 5. Зоны пластичности в случае изотропии с эффектом SD и трансверсальной изотропии с эффектом SD.

Зоны пластичности несимметричны: зоны сверху пластины меньше, чем зоны снизу. При глубине пластической зоны сверху пластины, равной 0.1, в изотропном случае с эффектом SD глубина нижней пластической области равна 0.36, а в случае трансверсальной изотропии с эффектом SD – 0.3. При глубине пластической зоны сверху пластины, равной 0.25, в изотропном случае с эффектом SD глубина нижней пластической области равна 0.44, а в случае трансверсальной изотропии с эффектом SD – 0.42.

Если принять нагрузку на пластину в изотропном случае за единицу, то в анизотропном случае, для получения точно такой же пластической области, на пластину должна действовать нагрузка $1/\sqrt{2 - A}$, где A определяется формулой (22). Эта нагрузка должна быть больше примерно на 30%, но в это же время при одинаковой глубине пластичной зоны сверху, в трансверсально-изотропном случае пластическая область снизу немного меньше, чем в изотропном.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павилайнен Г.В.* Упругопластический изгиб круглой трансверсально-изотропной пластинки. // Вестн. Ленингр. ун-та. 1983, № 13, С. 70–75.
2. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. С. 607.
3. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Высшая школа, 1958. С. 318.
4. *Бекофен В.* Процессы деформации. М., 1977, С. 288.
5. *Рыбакина О.Г.* Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности. // Вестн. Ленингр. ун-та., 1982, №14 С. 132–142.
6. *Матвеева Е.В. Павилайнен Г.В.* Учет эффекта разносопротивляемости материала при изгибе пластин. Вторые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб., 2000., С. 294–304.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛАВУЧИХ ОБЪЕКТОВ

И. Е. Капранов, И. Н. Скрябин

В работе рассматриваются современные вычислительные подходы, реализованные в инженерных пакетах для решения задач расчета конфигурации свободной поверхности и динамики плавучего объекта, погруженного в тяжелую жидкость. Приведены результаты моделирования динамики буйа, обладающего положительной плавучестью при погружении и всплытии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Плавающие на поверхности тяжелой жидкости объекты представляют особый случай для вычислительного моделирования. Дело в том, что традиционные классические методы решения таких задач основаны на систематическом использовании ряда упрощений. Волновые процессы описываются обычно в рамках модели идеальной жидкости, предполагается потенциальность течения, это позволяет использовать для получения конечных характеристик интегральные методы [1]-[2]. Для описания нестационарных движений в жидкости тела, увлекающего в движение окружающую среду, весьма продуктивным является вводимое для этих задач понятие присоединенной массы. Применение таких подходов, учитывающих особенности задачи, основано на существенном упрощении постановки, которое состоит как в упрощении системы уравнений, так и в особой формулировке граничных условий.

В случае использования пакетов общего назначения отпадает необходимость вводить ряд традиционных ограничений, которые применялись при постановке задач плавающего тела, при этом появляется возможность учесть и проанализировать некоторые новые, интересные для приложений факторы. Таким образом, можно

ожидать, что применение пакетов для задач этого класса даст возможность получить новые, ранее недоступные результаты.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для отработки моделирования динамики плавающего тела была подготовлена задача погружения некоторого объекта, наподобие буя, в тяжелую жидкость. Предполагалось наличие у этого объекта положительной плавучести. Задача исследовалась в плоской постановке, в связи с этим тело имеет три степени свободы: две поступательные и одну вращательную. При подготовке к моделированию был проведен расчет инерционных характеристик данного объекта, а именно массы и осевого момента инерции. Геометрия задачи приведена на рис. 1.

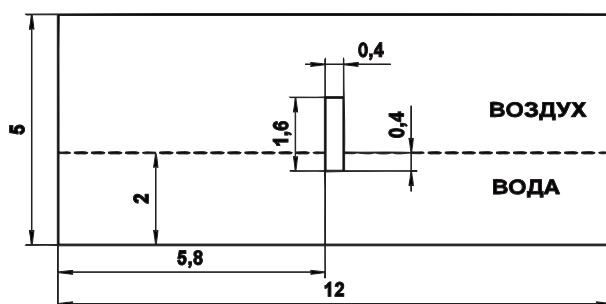


Рис. 1. Геометрические характеристики задачи (все размеры в метрах).

3. АСПЕКТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проведения расчетов средствами сеточного генератора Gambit была подготовлена расчетная сетка, которая строилась на основе треугольных ячеек. Данный тип элементов позволяет использовать разнообразные технологии перестроения и модификации сеточной структуры, что является важным элементом при моделировании задач динамики тела. На рис. 2 приведен общий вид расчетной сетки, её размерность составила 14 260 элементов.

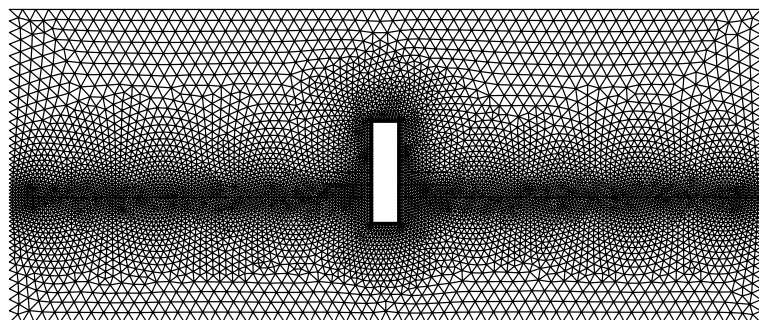


Рис. 2. Общий вид расчетной сетки.

Вдоль границы плавающего буя был построен пограничный слой прямоугольных ячеек, который жестко связан с телом и не деформируется. Использование такого приема, когда применяется гибридная сетка, состоящая из различных типов элементов, позволяет сочетать преимущества по точности прямоугольных сеток и возможности перестроения и модификации в области треугольной сетки. На рис. 3 приводится фрагмент сеточной структуры в области границы буя.

При построении сетки использовалась функция размера, с помощью которой создавалась зона уплотнения сеточной структуры вокруг границы буя и в области, где располагается свободная поверхность. В качестве источников элементов при использовании функции размера задавались граница буя и линия, совпадающая с начальным положением свободной поверхности.

Моделирование осуществлялось на основе нестационарных плоских несжимаемых уравнений Навье–Стокса, т.е. рассчитывалось ламинарное течение. В расчете задавался постоянный шаг по времени, равный 0,001 с. Рассчитывался интервал физического времени в 15 с. Задача решалась в двухфазной постановке. Применялась модель многофазности Volume Of Fluid (VOF), специализированная для решения задач со свободной поверхностью. В качестве первой фазы был взят воздух, в качестве второй — вода.

Использовался подход последовательного (Segregated) решения

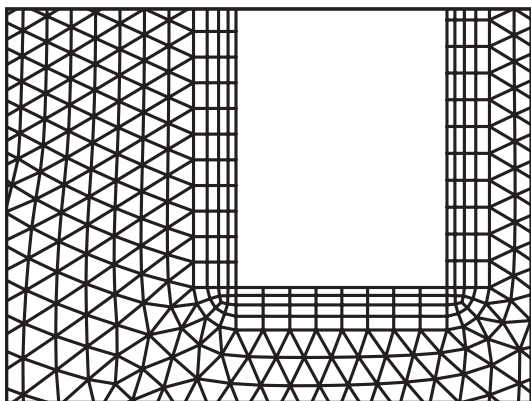


Рис. 3. Фрагмент сеточной структуры в области границы буй.

уравнений [3]. В рамках этого подхода применялась схема неитерационного смещения по времени (non-iterative time advancement), которая хорошо зарекомендовала себя для решения задач подобного класса и с помощью которой удастся значительно сократить время расчета и обеспечить его стабильность.

Расчет градиентов параметров осуществлялся с использованием теоремы Грина–Гауса на основе значений в расчетных узлах. Такой выбор метода расчета градиентов обусловлен тем, что он дает большую точность по сравнению с методом расчета на основе значения в расчетных ячейках, особенно при наличии треугольных элементов.

При моделировании был использован алгоритм коррекции давления PISO, который рекомендуется применять в нестационарных задачах и в случаях, когда задается большой шаг по времени. При настройке решателя для коэффициентов релаксации устанавливались значения, равные 0,1. Для интерполяции давления использовалась схема Body Force Weighted, которая может эффективно работать при моделировании многофазных задач с помощью модели Volume Of Fluid. Её преимуществом перед схемой PRESTO! является то, что она более устойчива при использовании режима неите-

рационального смещения по времени. Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых уравнений импульсов применялась противопоточная схема второго порядка. При решении уравнения объемной доли фазы для интерполяции переменных в конвективных членах в рамках явного подхода использовалась схема HRIC, которая является низкодиссипативной и обеспечивает высокую точность при расчете конфигурации свободной поверхности. При таких настройках обеспечивается большая устойчивость расчетного процесса по сравнению с применением схемы Geo-Reconstruct.

Левая и правая границы расчетной области определялись как открытые границы выходного типа. На этих границах задавался уровень свободной поверхности, равный 2 м. В данной задаче использовались открытые граничные условия для того, чтобы создаваемые буем при погружении волны могли уйти из расчетной области, не отражаясь и не внося возмущений. Верхняя и нижняя границы расчетной области задавались как непроницаемые стенки.

В ходе подготовки задачи к расчету с помощью пользовательской функции задавались инерционные характеристики плавающего объекта. Для плоского случая пользователю требуется задавать массу и один осевой момент инерции. Масса определялась с учетом того, что плотность материала буя меньше плотности воды в 2 раза, ее значение составило 320 кг. Момент инерции рассчитывался на основе геометрических характеристик буя и его массы, величина этой характеристики составила 72 кг·м². При настройке решающего модуля задавались начальные данные для центра масс объекта, координаты его положения, угол и значения линейной и угловой скорости. Начальные координаты центра масс определялись следующим образом: координата x — 6 м, координата y — 2,4 м. Остальные характеристики задавались равными нулю.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В результате моделирования получены положения границ расчетной области и конфигурация свободной поверхности в каждый момент времени (рис. 4).

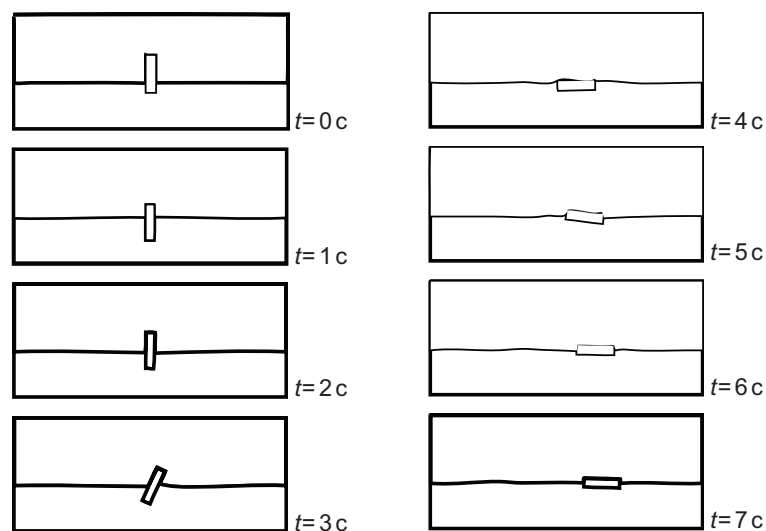
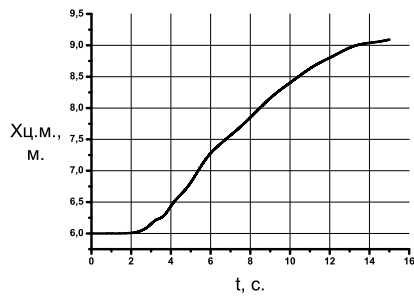


Рис. 4. Конфигурация свободной поверхности и границ расчетной области.

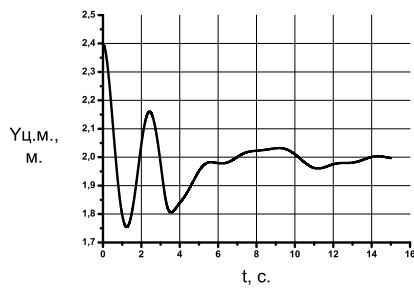
Данные результаты позволяют проанализировать динамику погружения, всплытия плавучего буйа, а также оценить возмущения, создаваемые буюм на свободной поверхности. Для исследуемой задачи характерное время перехода буйа в горизонтальное положение равно 4 с, а приблизительно через 7-8 с после начала погружения силы, действующие на буй, взаимно компенсируются и центр масс буйа незначительно отклоняется от положения устойчивого равновесия в связи с возмущениями, присутствующими на свободной поверхности.

В ходе моделирования процесса погружения буйа в воду осуществлялась запись основных кинематических характеристик, таких как положение центра масс по оси x и по оси y , а также угловое отклонение объекта. Ниже приводятся распределения во времени этих параметров. На рис. 5 представлен график, отражающий изменение во времени x координаты центра масс плавающего объекта.

Монотонный характер изменения этого параметра говорит о

Рис. 5. Положение центра масс, координата x , м.

плавном смещении буя в положительном направлении оси x . График изменения во времени y координаты центра масс представлен на рис. 6.

Рис. 6. Положение центра масс, координата y , м.

Данное распределение отражает процесс перехода буя из неустойчивого состояния к устойчивому, когда достигается баланс между выталкивающей силой и силой тяжести.

На рис. 7 представлен график изменения величины углового отклонения плавающего объекта с течением времени.

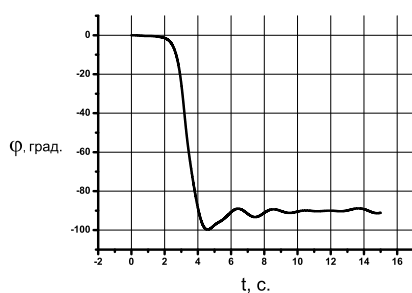


Рис. 7. Угловое отклонение объекта, град.

Видно, что при переходе к устойчивому состоянию буй поворачивается на -90° (что соответствует повороту по часовой стрелке) и занимает горизонтальное положение.

Для данной задачи интересным является тот факт, что в идеальном случае вероятности “заваливания”, буя при всплытии вправо и влево равны, т.е. при моделировании можно было бы ожидать отсутствие поворота буя и его постоянное пребывание в вертикальном положении. Однако в силу наличия таких факторов, как неоднородность сеточной структуры, определенное направление обхода узлов при работе вычислительного алгоритма, отсутствие идеальной симметрии в начальном распределении фаз, приводят к тому, что вероятности поворота вправо и влево незначительно отличаются. В данном случае совокупность вышеперечисленных факторов привела к тому, что буй стал поворачиваться вправо.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для получения решения задач, подобных рассмотренной в данной работе, в среде пакета требуется выполнить тонкую настройку решающего модуля. Это можно сделать только при достаточном опыте решения тестовых задач с проработкой различных комбинаций модельных опций. Исходя из полученных результатов, пред-

ставляется возможным промоделировать в среде пакетов достаточно сложные трехмерные случаи динамики объектов, обладающих сложной пространственной конфигурацией и имеющих положительную плавучесть.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985. 368 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ФМ, 1961. 824 с.
3. FLUENT 6.3 User's Guide. 2006.

ОБ АППЛАНАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ИЗМЕРЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

С.М. БАУЭР

Обсуждаются две математические модели аппланационных методов измерения внутриглазного давления. В обеих моделях глаз рассматривается как две сопряженные оболочки с разными механическими и геометрическими параметрами (роговица и склера). В первой аналитической модели роговица рассматривается как мягкая безмоментная оболочка, склера — как сферический или эллиптический сегмент. Обе оболочки рассматриваются как изотропные. Во второй конечно-элементной модели роговица и склера рассматриваются как два трансверсально-изотропных сферических сегмента.

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1], изданной в 1991 г., отмечается, что в истории развития тонометрии традиционно выделяют четыре периода.

Первый, *начальный*, период (1862–1884), в течение которого измерение внутриглазного давления (ВГД) носило экспериментальный характер.

Впервые, по-видимому, важное значение измерения ВГД подчеркнул Альбрехт фон Грефе в 1862 г., изучая причины возникновения глаукомы [1–3]. Он определил повышение офтальмотонуса при глаукоме как кардинальный симптом, он также создал первый тонометр импрессионного типа. Чем мягче глаз, т.е. чем ниже ВГД, тем больше он деформируется под влиянием одной и той же силы. При импрессионном методе на глаз производят давление концом некоторого штифта небольшого диаметра, а о деформации судят по глубине образуемой пологой ямки. После тонометра А. Грефе появились и другие импрессионные приборы, как правило очень неточные.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.

Доклад на семинаре 27 февраля 2007 г.

© С. М. Бауэр, 2007

Второй, *ранний клинический*, период (1884–1913), связан с созданием А.Н. Маклаковым тонометра, положившего начало развития апланационной тонометрии [4].

При апланационной тонометрии глаз деформируется грузом с плоским основанием, в результате чего образуется “кружок сплющивания или апланации” [2–3]. Измерение ВГД может производиться по величине деформации при одинаковой силе давления на глаз либо по величине давления на глаз при одной и той же зоне контакта. В тонометре Маклакова использовались грузы весом 5 или 10 граммов. В период 1884–1913 гг. тонометр Маклакова (1884), а с 1905 г. импрессионный тонометр Шиотца начали применяться в клинической практике, но, как отмечается в [1], “недостаточно разработанными оставалась теория тонометрии и принципы стандартизации и калибровки тонометров”.

Третий, *научно-клинический*, период (1913–1950), связывают “с широким внедрением тонометрии в повседневную практику”.

Четвертый период — “Современный период, ознаменовавшийся завершением калибровки и стандартизации импрессионного тонометра Шиотца, апланационного тонометра Маклакова и созданием апланационного тонометра Гольдмана (1954)” [1]. Тонometr Г. Гольдмана, названный по имени швейцарского офтальмолога Ганса Гольдмана (1899–1991), который его изобрел, быстро стал международным стандартом в офтальмологии. Данные, получаемые этим тонометром, стали называть золотым эталоном. При измерении ВГД по Гольдману создается небольшая зона контакта (в первых тонометрах диаметр зоны сплющивания составлял 2.03 мм [2], позже 3.06 мм), и о величине ВГД судят по силе, которая требуется, чтобы сделать плоской эту часть роговицы. При такой малой зоне контакта предполагалось, что влияние сил упругости роговицы очень мало, и тогда можно считать, что сила, вызывающая сплющивание роговицы, деленная на площадь контакта, будет равна давлению внутри мягкой оболочки. Диаметр апланации 3.06 мм был выбран в связи с тем, что он обеспечивает соотношение, когда внешнее давление на роговицу в 1.0 г соответствует внутриглазному давлению в 10 мм рт. ст.

По-видимому, сейчас (после 1991 г.) можно выделить пятый период развития тонометрии, связанный с развитием рефракцион-

ной хирургии. “Завершение калибровки” тонометров было основано на экспериментальных данных, на выявлении “средних” показателей [1].

Как отмечается во многих книгах по офтальмологии, например, в [3], “основными факторами, определяющими ВГД, являются: продукция камерной влаги и сопротивление оттоку ее из глаза”. Однако, как отмечено в работе С.Ю. Кальфа еще в 1928 г. [5], “если мы обратимся к методике исследования ВГД, то мы должны признать, что наши тонометрические определения не столько дают нам заключение о внутриглазном давлении, сколько о реакции глазных оболочек на приложение к глазу тонометра”. При создании калибровочных таблиц для тонометра Маклакова [6–8] и при калибровке тонометра Гольдмана предполагалось, что в среднем все глаза имеют примерно один и тот же объем, и роговицы глаз имеют примерно одни и те же геометрические и механические параметры. Диаметр глазного яблока человека действительно варьируется в очень малых пределах и в среднем равен примерно 24 мм. Толщина роговицы переменна, но в центральной зоне минимальна и в среднем равна 0.52 мм [8–10].

Тонометр Гольдмана полвека считался одним из самых надежных классических методов измерения внутриглазного давления. Однако последнее время появились приборы, которые позволяют при обследовании пациента точнее определить геометрические параметры роговицы, и, как следствие, появилось много работ, в которых обсуждается чувствительность показателей тонометра Гольдмана к толщине роговицы в центральной зоне [9–13]. Особенно эта зависимость может сильно проявляться после кераторефракционных операций [14–15]. В настоящее время для коррекции зрения иногда при операциях существенно меняется толщина роговицы в средней зоне или кривизна роговицы. В работе [15] представлены результаты определения уровня внутриглазного давления с использованием различных методик измерения после различных кераторефракционных операций, меняющих толщину и кривизну роговицы. Были отмечены значительные расхождения значений ВГД, полученных различными тонометрами на одном и том же глазу (до 12 мм рт. ст.), объясняемые анатомическими особенностями оперированных глаз, измененным профилем роговицы и ее сниженной

жесткостью.

Понятно поэтому, что в настоящее время вновь стали актуальными вопросы теории тонометрии, создание моделей, позволяющих оценить влияние различных параметров глаза на показатели ВГД.

2. ОСНОВЫ АППЛАНАЦИОННОЙ ТОНОМЕТРИИ

Роговица глаза близка к мягкой оболочке (т.е. к оболочке, не сопротивляющейся изгибу). Известно, что модули упругости и склеры и роговицы в тангенциальном направлении на два порядка больше модуля упругости в направлении толщины оболочки [16–17]. При измерении ВГД аппланационными методами (рис. 1) различают тонометрическое давление: $p_t = W/S$, где W — вес, прилагаемого груза (или прикладываемая сила), S — площадь зоны контакта.

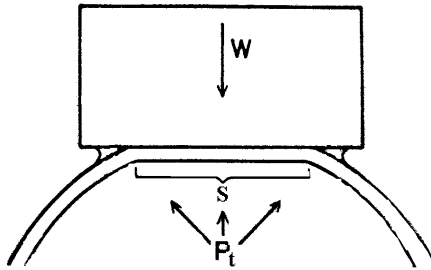


Рис. 1. ТонOMETрическое давление.

При этом истинное внутриглазное давление (давление в глазу до нагружения) связано с тонометрическим соотношением [3],[8]

$$p = p_t + N - M = \frac{W}{S} + N - M, \quad (1)$$

где M — влияние сил упругости роговицы, уменьшающее зону контакта, а N — силы, увеличивающие зону контакта, за счет прикладываемого груза. На увеличение зоны контакта может также

повлиять след слезы (см. рис 1). Понятно, что силы M и N трудно оценить, тем более для конкретного глаза.

В настоящее время истинное внутриглазное давление при использовании тонометра Маклакова определяют с помощью специальных таблиц, в основе которых для определения внутриглазного давления лежат эмпирические формулы, связанные с величиной изменения внутриглазного давления $p_t - p$ при нагружении глаза тонометром и объем ΔV сегмента роговицы, основание которого равно кругу, совпадающему с площадью контакта тонометра и роговицы. Объем ΔV называют объемом смещенной жидкости. В 1918 г. Ремер, основываясь на малости объема ΔV по отношению к объему глаза, предложил использовать линейную связь [3],[8]:

$$p_t - p = K\Delta V, \quad K = \text{const.}$$

Величина константы K в этом соотношении полагалась зависящей только от упругих свойств оболочки, и для ее определения предлагалось сделать два измерения с разными грузами. Однако позже эксперименты показали, что величина K зависит и от груза. В 1937 г. Фриденвальд на основе большого количества экспериментальных данных, проведенных на выделенных глазах, показал, что достаточно хорошо связь между изменением давления и введенным в глаз дополнительным объемом ΔV^* описывается соотношением

$$\ln p_1 - \ln p_0 = A\Delta V^*, \quad A = \text{const}, \quad (2)$$

где p_0, p_1 — внутриглазное давление в начале опыта и после введения в глаз объема жидкости ΔV^* ; величину A называют ригидностью оболочки [8]. Фриденвальд предложил использовать соотношение (1) для определения внутриглазного давления p_0 и ригидности оболочки глаза A на основе опытов по нагружению глаза тонометром, предполагая, что изменение давления внутри глаза при нагружении его тонометром равно изменению давления в том же глазу, если в него ввести дополнительный объем жидкости ΔV^* , равный объему сферического сегмента ΔV , основание которого равно зоне контакта тонометра и роговицы.

Так это соотношение легло в основу стандартных таблиц для тонометрического определения внутриглазного давления [7–8]. Однако для получения лучшего соответствия опытным данным в это

соотношение вводилось много разных поправок, связанных со слезой и др. Никаких аналитических моделей при этом не рассматривалось.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АППЛАНАЦИОННОЙ ТОНОМЕТРИИ

3.1. Тоннометр Маклакова

В работе [18] были рассмотрены две модельные задачи. В одной (рис. 2) глаз моделировался как мягкая (безмоментная) сферическая оболочка. В другой (рис. 3) глаз рассматривался как две сопряженные оболочки с разными свойствами — роговица и склера.

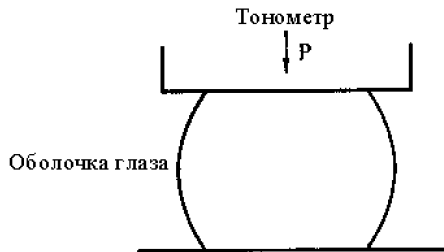


Рис. 2. Мягкая сферическая оболочка.

Предполагалось, что склера и роговица имеют форму сферических сегментов разного радиуса. В работе [18] проводился анализ влияния упругих и геометрических свойств склеры и роговицы на изменение давления в глазу при его нагружении.

В обоих случаях предполагалось, что глаз до нагружения заполнен несжимаемой жидкостью с давлением p_0 . Во второй модели роговица, которая при нагружении испытывает большие деформации (рис. 3, справа), также предполагалась безмоментной мягкой оболочкой. (Известно, что модуль упругости роговицы E_r в несколько раз меньше модуля упругости склеры E_s .) В этом случае по зоне контакта легко определялось давление внутри нагруженной обо-

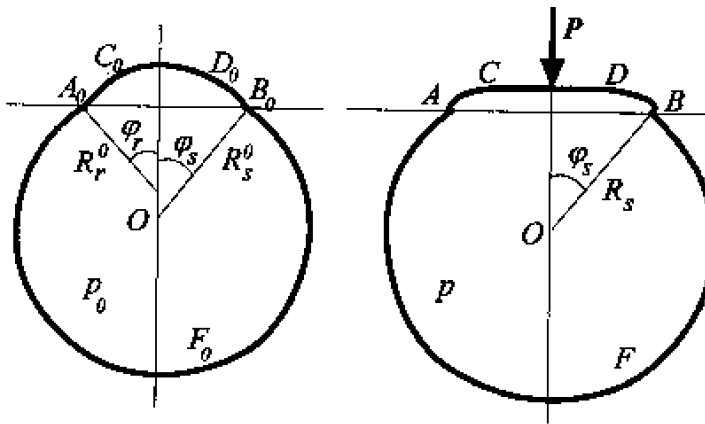


Рис. 3. Модель двух сопряженных сферических сегментов.

лочки p ($p = p_t = P/S$). Предполагалось также, что линия действия приложенной к оболочке внешней силы (веса груза) проходит через центры обоих сферических сегментов и что в результате действия груза склера деформируется так, что угол φ_s , под которым из центра склеры видна линия контакта, остается неизменным, а сферический сегмент, моделирующий склеру, остается сферическим сегментом, но с измененным радиусом — R_s . Деформация роговицы, так же как и деформация оболочки в первой модели, описывались нелинейными уравнениями. Полагалось, что уменьшение объема ΔV под сегментом $ACDB$ в результате действия груза:

$$\Delta V = \pi \int_0^{s_0} (r_0^2 \sin \varphi_0 - r^2 \lambda_1 \sin \varphi) ds_0,$$

компенсируется растяжением склеры:

$$\Delta V = \Lambda(p - p_0), \quad \Lambda = \frac{3(1 - \nu_s)R_s^0}{2E_s h_s} V_s.$$

Здесь основная переменная s_0 — длина дуги образующей оболочки в ненагруженном состоянии, отсчитываемая от оси симметрии;

$r' = \lambda_1$; r , φ — расстояние до оси симметрии и угол между нормалью к оболочке и осью симметрии; Λ — податливость оболочки при повышении давления.

На основе расчетов, проведенных в [18] для многих параметров, отмечается, что используемая на практике связь между истинным внутриглазным давлением и диаметром плоской части области деформации роговицы глаза при измерении по методу Маклакова удовлетворительно описывается решениями модельных задач. Отмечается, что связь $p_0 = f(d)$ слабо зависит от упругих свойств оболочек глаза. Однако отмечалось, что утверждение о том, что изменение давления внутри оболочки при ее нагружении совпадает с изменением давления в той же оболочке после введения в нее дополнительного объема жидкости, равного количеству “смещенной жидкости”, не согласуется с точными решениями для модельных задач. Отмечалось также, что на истинное значение ВГД оказывают влияние параметры не только роговицы, но и склеры.

Известно, что у людей с миопией (близорукостью) и гиперметропией (дальзорукостью) глаз имеет форму эллипсоида, полуоси которого могут существенно отличаться. Причем у людей с миопией длина “передне-задней оси” и объем глаза больше, чем у людей с эмметропией (нормальным зрением) и у людей с гиперметропией. В связи с этим в работе [19], продолжая исследования [18], также обсуждалась математическая модель измерения ВГД по методу Маклакова. При этом глазное яблоко моделировалось сопряженными оболочками. Роговица по-прежнему моделировалась сферическим сегментом, а склера — сегментом более общей формы — эллипсоидальным (рис. 4).

Расчеты проводились, как и в [18], при различных параметрах, характеризующих роговицу и склеру (варьировались модули упругости роговицы E_r и склеры E_s , толщины оболочек и радиус кривизны роговицы).

Если принять, что объем эллипсоидального сегмента с полуосями a и b равен объему сферического сегмента радиуса R_s , то можно получить зависимость истинного ВГД от соотношения полуосей эллипсоидального сегмента.

На рис. 5 приведена зависимость истинного ВГД от соотношения полуосей $\beta = b/a$ при диаметре зоны контакта $d = 4.5$ мм.

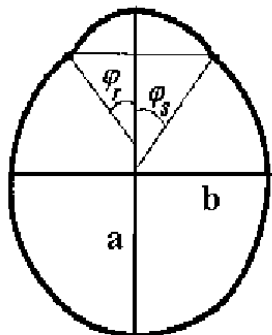


Рис. 4. Модель, учитывающая форму склеральной оболочки.

Вес тонометра $P = 5$ г; $E_s = 12$ МПа; $h_s = 0.5$ мм; $E_r = 2.4$ МПа; $h_r = 0.5$ мм; $R_s = 12$ мм. Параметр $\beta = 1/2$ соответствует близоруким глазам, $\beta = 1$ — сферическому сегменту склеры, а $\beta = 2$ — дальнозорким глазам. Расчеты, проведенные при различных параметрах, показали, что одинаковой зоне контакта груза и роговицы в дальнозорких глазах соответствует несколько большее ВГД, чем в глазах с нормальным зрением, в близоруких глазах истинное значение ВГД очень незначительно (меньше, чем на 1 мм. рт. ст.), ниже, чем в глазах с нормальным зрением (см. рис. 5). Однако, если мы будем учитывать, что у людей с миопией объем глаза больше, чем у людей с эмметропией и у людей с гиперметропией, то можно получить зависимость, представленную на рис. 6, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными [19]. На рис. 6 ПЗО — длина “передне-задней оси” = $2a$, $b = 12$ мм, вес тонометра $P = 10$ г.

Таким образом, в зоне реального внутриглазного давления ($p = 14–20$ мм. рт. ст.) модель сопряженных оболочек хорошо описывает зависимость показателей ВГД, полученных методом Маклакова, от объема глаза. Результаты показали также, что показатели ВГД, полученные при $P = 10$ г. (этот груз наиболее часто используется

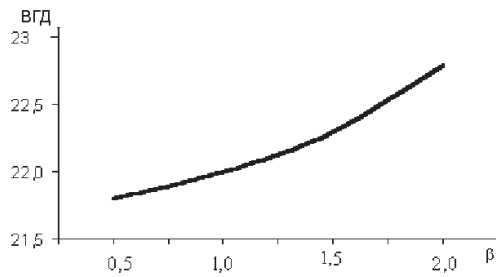


Рис. 5. Зависимость истинного ВГД от отношения полуосей.

в наших медицинских учреждениях), слабо зависят от толщины роговицы.

3.2. Тонometr Гольдмана

Как отмечалось выше, при аппланационной тонометрии измерение ВГД может производиться по величине деформации при заданном грузе (по методу Маклакова) либо по величине давления на глаз при одной и той же зоне контакта (по методу Гольдмана). С точки зрения математики это прямая и обратная задачи при одной и той же механической модели. То есть описанная выше и подробно представленная в [18–19] модель сопряженных оболочек может быть использована и для описания тонометра Гольдмана. Однако и в этом случае, так как роговица рассматривалась как мягкая оболочка, результаты расчетов говорят о том, что показатели ВГД должны быть не чувствительны к толщине роговицы. Но это не соответствует данным офтальмологов. В настоящее время во многих работах [9–15] обсуждается чувствительность показателей тонометра Гольдмана к толщине роговицы в центральной зоне.

В работе [20] на основе анализа группы из 1100 пациентов предлагалось в зависимости от толщины роговицы, полученной при помощи кератопахиметрии — процедуры измерения толщины рогови-

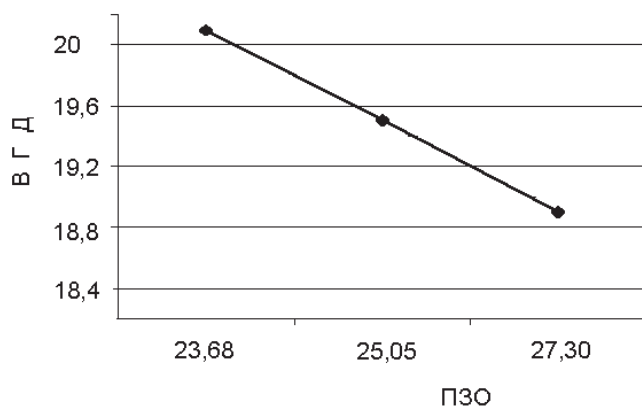


Рис. 6. Зависимость истинного ВГД от объема глаза.

цы в центральной зоне, выделить 5 условных групп: I — “ультратонкие”, II — “тонкие”, III — “нормальные”, IV — “толстые”, V — “ультратолстые” роговицы.

С учетом данных [20] в работе [21] в каждой условной группе проведен сравнительный анализ показателей ВГД, полученных на одних и тех же глазах разными методами. Анализ подверглась большая группа пациентов. Результаты показали (рис. 7), что данные ВГД, полученные методом Маклакова существенно менее чувствительны к значению толщины роговицы, чем данные, полученные тонометром Гольдмана.

Видно, что при измерении ВГД по Гольдману влияние толщины роговицы на показатели ВГД существенно больше, чем при измерении ВГД тонометром Маклакова.

Роговица, как и склера, близка к мягкой оболочке, но упругими свойствами обладает и при изгибе. По данным [16–17], и склера, и роговица близки к трансверсально-изотропным оболочкам, у которых модуль упругости в направлении толщины оболочки на два порядка меньше тангенциального модуля. В связи с этим было вы-

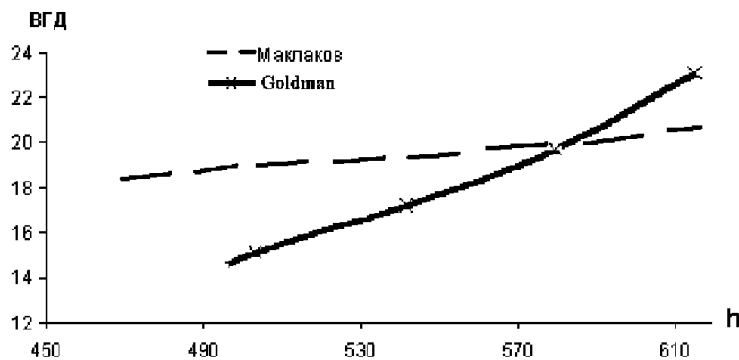


Рис. 7. Показатели ВГД, полученные тонометром Гольдмана и тонометром Маклакова.

полнено конечно-элементное моделирование задачи в программном пакете ANSYS-версия 9.0 [21]. Конечно-элементные модели измерения ВГД по Гольдману представлены в ряде работ. Упругая система роговица — склера представляет собой сопряжение двух сферических оболочек с разными диаметрами и разными упругими свойствами. Расчеты показывают, что возмущение, вносимое в упругую систему (роговица — склера) тонометром Гольдмана, локализовано вблизи области контакта и на стыке роговицы со склерой уже достаточно мало, т. е. в этом случае деформирование роговицы в основном зависит от упругих свойств и геометрии роговицы. Поэтому без потери точности система роговица — склера в ряде работ заменена трансверсально-изотропной сферической оболочкой постоянной толщины, имеющей радиус роговицы. Однако при моделировании измерения ВГД тонометром Маклакова, особенно грузом 10 г, т. е. в случае, когда зона контакта оказывается значительно большей, оболочка склеры может оказывать существенное влияние на процесс деформирования. В связи с этим в [21] корнеосклеральная оболочка моделируется сопряженными оболочками. Задача решалась в

предположении осевой симметрии. Предварительные расчеты показали, что можно ограничиться лишь рассмотрением верхней половины шарового слоя склеры и на экваториальной плоскости также ставить условия симметрии. Проведены многочисленные расчеты при разных параметрах. Значения упругих модулей растяжения-сжатия и модулей сдвига менялись в широком диапазоне.

На рис. 8–10 представлено распределение контактных напряжений при измерении ВГД разными тонометрами для корнеосклеральной оболочки, у которой модуль упругости в направлении толщины оболочки в 20 раз меньше тангенциального модуля, модули роговицы в 3 раза меньше, чем модули склеры. Истинное внутреннее давление во всех случаях 15 мм рт.ст.

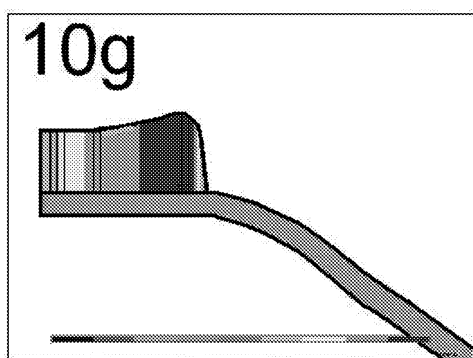


Рис. 8. Распределение контактных напряжений, груз 10 г.

Расчеты показывают, что чем меньше зона контакта груза и оболочки (за счет величины груза или внутреннего давления), тем больше доля усилий, идущих на изгибные деформации (это видно и по рис. 8–10). Толщина роговицы существенно влияет именно на изгибные деформации оболочки. Таким образом, так как при измерении ВГД тонометром Гольдмана диаметр зоны контакта 3.06 мм, а при измерении тонометром Маклакова (5 и 10 г) при “средних” давлениях (от 10 до 30 мм рт.ст.) диаметр зоны контакта больше, то показатели ВГД при измерении тонометром Гольдмана существенно более чувствительны к изменению толщины роговицы, чем

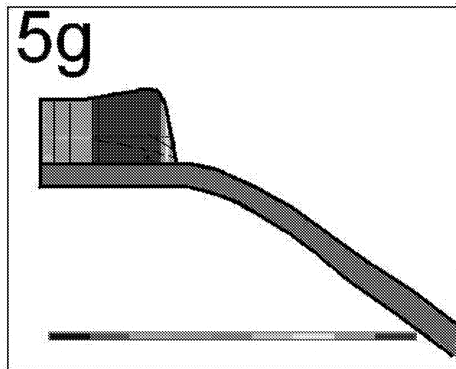


Рис. 9. Распределение контактных напряжений, груз 5 г.

показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова. Более того, расчеты показывают также, что влияние толщины роговицы на показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова весом 5 г. больше, чем на показатели ВГД при измерении тонометром весом 10 г. Это подтвердили и клинические данные [21]. Анализу подвергалась небольшая группа пациентов. Толщина роговицы пациентов менялась от 0.456 до 0.608 мм. Проводился анализ показателей ВГД, полученных на одном и том же глазу тонометрами Маклакова весом 5 и 10 граммов. Показатели ВГД, полученные тонометром 10 г., менялись в диапазоне от 18 до 20 мм. рт. ст. Показатели ВГД, полученные на тех же глазах тонометром 5 г., менялись в диапазоне от 12 до 17 мм рт. ст.

Кроме того, результаты расчетов при разных модулях упругости показали, что на деформации оболочек, а значит, и на показатели ВГД наиболее существенное влияние оказывает модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной к поверхности, а этот модуль в трансверсально-изотропной оболочке не зависит от тангенциального модуля упругости. Для роговицы, состоящей из нескольких сло-

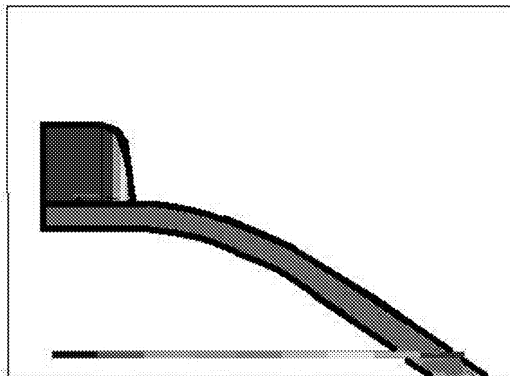


Рис. 10. Распределение контактных напряжений, тонометр Гольдмана.

ев, этот модуль характеризует связь этих слоев, и известно только, что этот модуль имеет малое значение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение результатов расчетов, полученных по двум математическим моделям аппланационных методов измерения ВГД, подробнее представленных в работах [18],[21], с клиническими данными показывают, что для более точного описания влияния толщины роговицы на показателем ВГД необходимо учитывать анизотропию роговицы и учитывать ее жесткость на изгиб.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вургафт М.Б., Вургафт Я.М. Тонметрические методы исследования внутриглазного давления и гидродинамика глаза при глаукоме. Казань, 1991. 112 с.
2. Краснов М.М. Микрохирургия глауком М.: Медицина, 1980. 248 с.
3. Волков В.В. Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей. М.: Медицина, 2001. 352 с.
4. Маклаков А.Н. Офтальмотонометрия // Мед. обозрение. 1884. Т. 24. С.1092—1095.

5. *Кальфа С.Ю.* Эластометрия глаза // Русский офтальмологический журнал 1928, Т. VIII, N 2, с.250-262.
6. *Вургафт М.Б.* О калибровке тонометров Маклакова разного веса // Офтальмологич.журн. № 6. 1965. С.446-448.
7. *Нестеров А.П., Вургафт М.Б.* Калибровочные таблицы для эластонометра Филатова-Кальфа // Вестн. офтальмологии. 1972. № 2. С.20-25.
8. *Нестеров А.П., Бунин Ф.Я., Канцельсон Л.А.* Внутриглазное давление. Физиология и патология. М.: Наука, 1974. 381 с.
9. *Whitacre M.M., Stein R.A., Hassanein K.* The effect of corneal thickness on applanation tonometry // American Journal of Ophthalmology, 1993;115(5):592-596.
10. *Feltgen N., Leifert D., Funk J.* Correlation between central corneal thickness, applanation tonometry, and direct intracameral IOP readings // Br. J. Ophthalmol., 2001. v. 85. P.85-87.
11. *Shimizu M., Ross A.J., Moy A., Mostafavi R.* Intraocular pressure, Goldmann applanation tension, corneal thickness, and corneal curvature in Caucasians, Asians, Hispanics, and African Americans // American Journal of Ophthalmology, 2003; 136(4):603-613.
12. *Stodtmeister R.* Applanation tonometry find correction on corneal thickness // Acta Ophthalmol., 1998. v. 76. P. 319-324.
13. *Doughty M.J., Zaman M.L.* Human corneal thickness and its impact on intraocular pressure measures: a review and meta-analysis approach // Surv. Ophthalmol. 2000, 44. P. 367-408.
14. *Faucher A., Gregoire J., Blondeau P.* Accuracy of Goldmann tonometry after refractive surgery // J. Cataract. Refract. Surg., 1997; 23: P. 832-838.
15. *Тарутта Е.П., Еричев В.П., Ларина Т.Ю.* Контроль уровня ВГД после кераторефракционных операций // Биомеханика глаза. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца, 2004. С.120-122.
16. *Battaglioli J.L., Kamm R.D.* Measurements of the compressive properties of scleral tissue // Invest. Ophthalm. Vis. Sci. 1984. Vol.25. N 1. P. 59-65.
17. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: Автореф. докт. дис. М., 2000. 32 с.
18. *Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е.* Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. N 1, С.24-39.
19. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Колесник У.Н., Качанов А.Б., Любимов Г.А.* О математическом моделировании измерения внутриглазного давления при тонометрии по методу Маклакова // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции Моск. НИИ глазных болезней им. Гельмгольца. 2005. С.121-123.
20. *Балашевич Л.И., Качанов А.Б., Новак Я.Н., Бауэр С.М., Зимин Б.А.* О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления // Офтальмохирургия. 2005. N 1. С.29-31.
21. *Бауэр С.М., Качанов А.Б., Семенов Б.Н., Слесорайтите Е.* О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении

ВГД аппланационными методами // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции, Моск. НИИ глазных болезней им. Гельмгольца. 2007. С.119–124

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ЗАДАЧИ О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

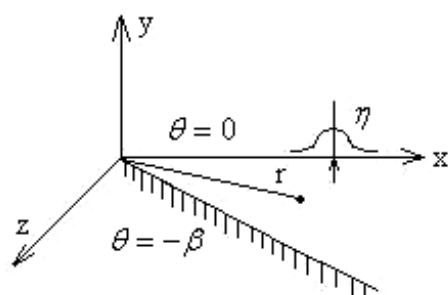
А. Н. БЕСТУЖЕВА

Рассматривается волновое движение идеальной несжимаемой жидкости в клиновидной области, ограниченной свободной поверхностью и плоским наклонным дном. Волновое движение вызывается различного вида возмущениями. Решение строится с помощью собственных функций. Статья посвящена анализу результатов исследований собственных функций в задачах о волновых движениях жидкости над наклонным дном, проводимых докладчиком и другими исследователями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается волновое движение идеальной несжимаемой жидкости в клиновидной области, ограниченной свободной поверхностью и плоским наклонным дном. Волновое движение вызывается либо начальным возмущением свободной поверхности, либо возмущением, приложенным к свободной поверхности, либо источником, расположенным в жидкости, либо подвижкой дна. Исследуется поведение функции φ , описывающей потенциал скорости.

Постановка краевой задачи, описывающей движение жидкости со свободной поверхностью в рамках линейной дисперсионной модели, дана в работах [1]–[2] и содержит уравнение Лапласа (в общем случае уравнение Пуассона) для потенциала скоростей $\varphi(x, y, z, t)$ с краевыми условиями смешанного (третьего) типа и углом наклона дна $\beta = \pi/2n$, $n = 1, 2, \dots$. Специфика задачи состоит во втором граничном условии, выписанном для равномерно понижающегося дна (клиновидная область) (рис. 1).

Рис. 1. Клиновидная область с углом наклона β .

Метод решения задачи состоит в определении собственных функций задачи, а затем с помощью интегральных преобразований и разложением искомой функции по собственным функциям находится решение задачи. Следует заметить, что собственные функции существенным образом зависят от вида граничного условия на дне. Будем считать, что наклонное дно — жесткое. Рассматриваются периодические по времени t и координате z колебания поверхности жидкости.

При попытке графического изображения решений различных задач, полученных в аналитическом виде (как правило, в решении возникают трехкратные и четырехкратные интегралы), не только возникли трудности вычислительного характера, но и появились сомнения по поводу правильности получения самих собственных функций.

2. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ

Для определения собственных функций пространственной задачи [3] рассматривалась задача Штурма–Лиувилля, которая была сформулирована для функции $\Phi(r, \theta)$: $\varphi = \exp\{i(pz + \sqrt{sgt})\}\Phi(r, \theta)$, где p, s — вещественные положительные параметры:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(r\Phi_r)_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} - p^2\Phi &= 0, & 0 < r < \infty, & -\beta < \theta < 0, \\ \frac{1}{r}\Phi_\theta - s\Phi &= 0, & \theta &= 0, \\ \Phi_\theta &= 0, & \theta &= -\beta, \\ \Phi &\rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, & \Phi < \infty & \text{ при } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Уравнение и краевые условия записаны в цилиндрической системе координат r, θ, z . Здесь t — время, g — ускорение свободного падения.

В [2] была рассмотрена подобная задача для частного случая $s/p > 1$. Полная система собственных функций была найдена в [3] для произвольного значения отношения s/p . Было установлено, что система собственных функций содержит как непрерывный спектр собственных функций, так и дискретный спектр. Там же была доказана теорема разложения кусочно-непрерывной абсолютно интегрируемой функции с ограниченной вариацией по системе непрерывного и дискретного спектров собственных функций.

Впервые получение собственных функций при рассмотрении задачи о распространении неустановившихся волн над наклонным дном в рамках линейной дисперсионной модели рассматривалось в [4]. В этой работе была исследована пространственная задача Коши–Пуассона для частного случая угла наклона плоскости дна к невозмущенной свободной поверхности $\beta = \pi/4$ и приведена формула разложения произвольной функции в интеграл, ядром которого являются граничные значения (на свободной поверхности) собственных функций краевой задачи теории потенциала для клиновидной области при граничном условии третьего рода на свободной поверхности и условии непроницаемости на дне. Формула разложения, предложенная М.В. Келдышем, содержит интегральное и сумматорное слагаемые, первое из которых соответствует непрерывной части спектра, второе — дискретной части спектра соб-

ственных значений, при ее построении использовались потенциалы стоячих волн Ламба и Стокса. Плоская задача Коши–Пуассона для случая $\beta = \pi/4$ рассматривалась в [5], где получена формула разложения, содержащая лишь интегральную часть и представляющая собой частный случай формулы [4], при этом использовалось выражение для потенциала стоячих волн, предложенное Стокером [1]. Там же выполнен численный анализ интегрального представления решения, получены асимптотические зависимости. В [6] аналогичным методом получено решение задачи для случаев $\beta = \pi/2\lambda$, где $\lambda = 3, 4, 5, 6$.

Наиболее общий вид формулы разложения произвольной функции в интеграл, содержащий соответствующие результаты работ [1],[5]–[6], получен в [7], посвященной исследованию стационарных задач теории теплопроводности.

Также в [5] исследовалась плоская задача для случая произвольного натурального λ путем сведения ее к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с ядром, зависящим от произведения аргументов, изменяющихся в полубесконечном интервале. Интегральное уравнение решалось путем применения интегрального преобразования Меллина, что позволило получить асимптотическое представление решения в случае, когда первоначальное возмущение сосредоточено в окрестности точки пересечения дна и свободной поверхности.

3. ЗАДАЧА КОШИ–ПУАССОНА

В [3] был установлен смешанный спектр собственных функций задачи о волновых движениях жидкости над наклонным дном, найдена полная система собственных функций, соответствующих непрерывному и дискретному спектру, и получено точное решение задачи Коши–Пуассона. Ниже приведены результаты автора под руководством А. А. Дорфмана решения задачи Коши–Пуассона. Решение записано в форме, пригодной для дальнейшего анализа и графического изображения.

Форма свободной поверхности $\eta = -\frac{1}{g}\Phi_t(\theta = 0)$ рассчитывается по формуле $\eta = \eta^c + \eta^d$, где η^c и η^d — непрерывная и дискрет-

ная части решения, которые определяются граничными значениями собственных функций непрерывного и дискретного спектров соответственно:

$$\eta^c = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \eta_0(\xi, \zeta) N^c(r, \xi, z, \zeta, t) d\xi d\zeta, \quad (1)$$

$$\eta^d = \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \eta_0(\xi, \zeta) N_l^d(r, \xi, z, \zeta, t) d\xi d\zeta, \quad (2)$$

где

$$N^c = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos pz \cos p\zeta \cos \sqrt{g\sqrt{p^2 + q^2}t} Q(q, p, r) Q(q, p, \xi) dp dq,$$

$$N_l^d = \int_0^{\infty} \cos pz \cos p\zeta \cos \sqrt{gp \cos l\beta t} Q_l(pr) Q_l(p\xi) p dp,$$

$$\varepsilon_l = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[2(1 + \cos l\beta)^{2(n-1)} \sin l\beta \prod_{\sigma=1, \sigma \neq l}^{n-1} \sin(\sigma+l)\beta \sin(\sigma-l)\beta \right]^{-1}.$$

Граничные значения собственных функций непрерывного и дискретного спектров получены в [3].

Граничные значения собственных функций непрерывного спектра:

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j, \chi=0}^1 \sum_{k=1}^n B_k^{(\chi)} \exp A_{kj}^{(\chi)}, \quad (3)$$

где

$$B_k^{(\chi)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(p + \sqrt{p^2 + q^2})^{n-1}} \prod_{\sigma=1}^{n-1} (p^2 \sin^2 \sigma\beta + q^2)^{-1/2} \times$$

$$\prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} (p^2 \sin^2 \sigma\beta + q^2) \prod_{\sigma=1}^{n-k} \cot \sigma\beta \left[\frac{1}{2} p^2 \sin 2\sigma\beta + (-1)^{\chi} i q \sqrt{p^2 + q^2} \right],$$

$$A_{kj}^{(\chi)} = -r \sqrt{p^2 + q^2} \sin 2(k-j)\beta +$$

$$+ (-1)^{\chi} i \left[-rq \cos 2(k-j)\beta + \frac{\pi}{4}(n-1) \right].$$

Граничные значения собственных функций дискретного спектра:

$$Q_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{m-s} (B_{m-s-k+2,2s} + B_{m-s-k+1,2s}) \right. \\ \left. \exp(-rp \cos(2k-1)\beta) + B_{1,2s} \exp(-rp \cos(2(m-s)+1)\beta) \right), \quad (4)$$

$$Q_{2s-1} = 0 \quad s = 1, \dots, m, \quad (5)$$

где

$$B_{kl} = (-1)^{n-k} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} \sin(\sigma-l)\beta \sin(\sigma+1)\beta \times \\ \times \prod_{\sigma=1}^{n-k} \cot \sigma \beta \sin(\sigma+l)\beta \cos(\sigma-l)\beta.$$

Амплитудный множитель ε_l играет роль весовой функции для соответствующей собственной функции дискретного спектра при вкладе этой функции в решение задачи.

На основе аналитического исследования свойств и характера функций дискретного спектра [8] было показано (из теоремы разложения), что система включает конечное число функций дискретного спектра, описывающих береговые волны, которые соответствуют краевому эффекту. При угле наклона дна $\beta = \pi/2n$, $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, \dots$ в спектре ровно m собственных функций. Именно собственная функция дискретного спектра с номером m (последняя в спектре) известна в литературе как волна Стокса. При $m = 1$ (угол наклона $\beta = \pi/6$) в спектре будет только одна эта волна. При уменьшении угла наклона дна число собственных функций дискретного спектра (береговых волн) увеличивается.

Теоретически предполагалось, что при $r \rightarrow 0$ (береговая зона) среди всех краевых (береговых) волн определяющую роль играет волна Стокса. Но графическое построение собственных функций дискретного спектра опровергло это утверждение, и впоследствии была получена асимптотическая оценка отношения волны Стокса и последующей за ней береговой волны:

$$\frac{\overline{Q}_{n-1}}{\overline{Q}_{n-3}} \approx -\frac{3\pi^2}{2n^2} e^\pi \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

При $m = 9$ последующая волна за волной Стокса в береговой зоне начинает занимать лидирующее положение (при графическом построении это уже происходит при $m = 6$) (по модулю). Это означает, что вычислять возвышение свободной поверхности приходится с учетом всех дискретных составляющих. С другой стороны, такое поведение собственных функций дискретного спектра положило первое сомнение в правильности получения самих собственных функций.

4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В связи с появившимися сомнениями было проведено сравнение вышеизложенных результатов с результатами, полученными другими авторами, в первую очередь с результатами, приведенными в работах [1]–[2], [4]–[5]. В решении (1), (2) стоят трехкратные и четырехкратные интегралы. Понизить кратность интегралов можно за счет вида функции η_0 — формы начального возвышения свободной поверхности.

В частном случае дельтовидной формы начального возвышения свободной поверхности $\eta_0 = \eta^0 \delta(r - r_0, z)$ решение задачи примет следующий вид:

$$\eta^c = \frac{\eta^0}{\pi} N^c(r, r_0, z, 0, t), \quad \eta^d = \frac{\eta^0}{\pi} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l N_l^d(r, r_0, z, 0, t).$$

Результат интегрирования функции N_l^d может быть выражен через специальную функцию $w(z)$:

$$N_l^d(r, r_0, z, 0, t) = \frac{1}{16} \sum_{j, j'=0}^1 \sum_{k, k'=1}^{n-l} B_{kl} B_{k'l'} \frac{1}{\Lambda^4} \left(2 \cos 4\gamma - \frac{3\Omega_l t}{\Lambda} (u \cos 5\gamma - v \sin 5\gamma) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_l t}{\Lambda} \right)^2 \cos 6\gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_l t}{\Lambda} \right)^3 (u \cos 7\gamma - v \sin 7\gamma) \right),$$

$$w(z) = e^{-z^2} \int_0^{\infty} e^{x^2} dx,$$

$$w = u + iv, \quad u, v = u, v \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega_l t}{\Lambda}, \gamma \right), \quad \Omega_l = \sqrt{gp \cos l \beta},$$

$$\Lambda = [(r \sin(2(k-j) + l)\beta + r_0 \sin(2(k' - j') + l)\beta)^2 + z^2]^{1/4},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{r \sin(2(k-j) + l)\beta + r_0 \sin(2(k' - j') + l)\beta}.$$

В дальнейшем будем называть волнами непрерывного и дискретного спектров возвышение свободной поверхности, обусловленное граничными значениями собственных функций непрерывного и дискретного спектров соответственно. Графическое построение решения (возвышения свободной поверхности) в береговой зоне не опровергает качественно предполагаемых теоретических утверждений. Например, на рис. 2 показано поведение волн дискретного спектра в отдельных точках по нормали к берегу на расстояниях $r = 0, 10, 50$ условных единиц при следующих начальных условиях: угол наклона $\beta = \pi/6$, начальное возвышение свободной поверхности высотой $\eta_0 = 10$ условных единиц расположено на расстоянии $r_0 = 100$ условных единиц от линии берега.

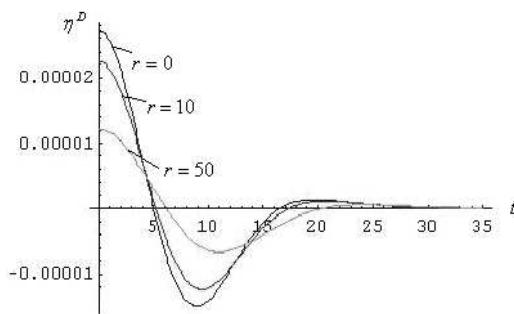


Рис. 2. Зависимость амплитуды волн дискретного спектра от времени в отдельных точках свободной поверхности, расположенных на нормали к берегу.

Ненулевые значения η по линии берега ($r = 0$) могут интерпретироваться как либо накат волн на берег, либо откат волн с

берега. При численном вычислении интегралов в решении можно наблюдать их медленную сходимость, на что указывали еще в своих работах Д.Д. Стокер и Б.Н. Румянцев.

Перейдем к рассмотрению волн непрерывного спектра. Аналитическое выражение этих волн для $\eta_0 = \eta^0 \delta(r - r_0, z)$ таково:

$$\eta^c = \frac{\eta^0}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos pz \cos \sqrt{g \sqrt{p^2 + q^2} t} Q(q, p, r) Q(q, p, r_0) dp dq.$$

Подынтегральная функция при угле наклона $\beta = \pi/6$ и по нормали к берегу ($z = 0$) принимает следующий вид:

$$\frac{2}{\pi} \frac{q^2(p^2 + q^2) \cos \sqrt{g \sqrt{p^2 + q^2} t}}{(p^2 + 4q^2)(3p^2 + 4q^2)(p + \sqrt{p^2 + q^2})^4} F(r) F(r_0),$$

где

$$F(x) = -\sqrt{3} p^2 \cos qx - 4q \sqrt{p^2 + q^2} \sin qx + \\ + 2e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{p^2 + q^2} x} \left(\sqrt{3}(p^2 + 2q^2) \cos \frac{qx}{2} - 2q \sqrt{p^2 + q^2} \sin \frac{qx}{2} \right).$$

Ее поведение представлено на рис. 3 при следующих данных: $g = 9.81$, $t = 20$, $r = 100$, $r_0 = 10$ (условных единиц).

Численное интегрирование этой функции представляет определенные трудности в системе Mathematica. Появляется предупреждение, что функция осциллирующая, система советует применить опцию Method -> Oscillatory в функции NIntegrate. Ее применение приводит к отказу системы считать, так как эта опция используется исключительно при численном интегрировании одномерных интегралов. Если рассмотреть поведение этой функции на плоскостях, параллельных координатным плоскостям, то видно, что зависимость по q осциллирующая (рис. 4, 5).

Проведено сравнение результатов, полученных А.А. Дорфманом, и других авторов, в первую очередь Д.Д. Стокера, М.В. Келдыша, Л.Н. Сретенского и Б.Н. Румянцева.

Из теоремы разложения [3] следует, что при $p = 0$ собственные функции непрерывного и дискретного спектров пространственной

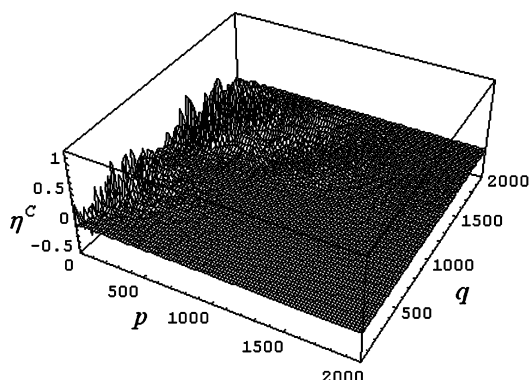


Рис. 3. Поведение функции $F(x)$ в зависимости от параметров p и q .

задачи вырождаются в собственные функции плоской задачи (остается лишь непрерывный спектр). Как уже говорилось, плоская задача достаточно хорошо изучена. При этом собственные функции содержат только непрерывный спектр. Эти функции приведены в работах [1]–[2]. В полярной системе координат и обозначениях [3] они выглядят следующим образом:

Л.Н. Сретенский:

$$\varphi(x, y, t) = C \cos \sigma t \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{4}\pi i(2k-n+1)} \cot \beta \cot 2\beta \dots \cot k\beta e^{\lambda_k(x+iy)},$$

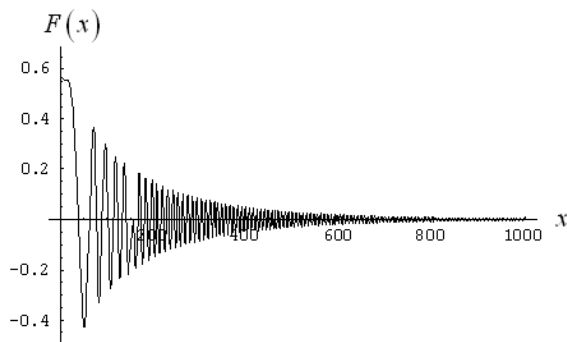
$$\lambda_k = -i \frac{\sigma^2}{g} e^{-2\beta k i}, \quad x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

Д.Д. Стокер:

$$\varphi = C \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\sigma=1}^k \cot \sigma \beta e^{-qr \sin(2k\beta - \theta)} \times$$

$$\times \cos \left(qr \cos(2k\beta - \theta) - \frac{\pi}{4}(2k - n + 1) \right).$$

Если в выражении для граничных значений собственных функций пространственной задачи, полученных в работе [3], положить $p = 0$,

Рис. 4. Поведение функции $F(x)$ при $q = 500$.

то приходим к собственным функциям плоской задачи, содержащим только непрерывный спектр. Так как формулы в общем виде имеют очень громоздкий вид, то сравнение приведем для частного случая угла наклона 45° , тем более, что и в работах [2], [4]–[5] приемлемые решения выписаны только для такого угла:

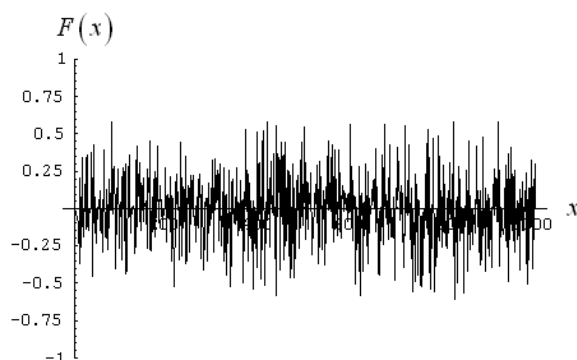
$$Q^K(q, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-qr} + \cos qr - \sin qr) \quad (\text{М.В. Келдыш}),$$

$$Q^P(q, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-qr} + \cos qr - \sin qr) \quad (\text{Б.Н. Румянцев}),$$

$$Q^D(q, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-qr} + \cos qr - \sin qr) \quad (\text{А.А. Дорфман}).$$

В пространственном случае для сравнения собственных функций, полученных А.А. Дорфманом, имеется формула разложения, приведенная М.В. Келдышем. Ниже даны аналитические выражения этих функций, асимптотики этих функций совпадают:

$$Q^K = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2q^2}} \left(q e^{-\sqrt{p^2 + q^2} r} + q \cos qr - \sqrt{p^2 + q^2} \sin qr \right),$$

Рис. 5. Поведение функции $F(x)$ при $p = 1$.

$$Q^D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q + \sqrt{p^2 + q^2}}{p + \sqrt{p^2 + q^2}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2q^2}} \times \\ \times (qe^{-\sqrt{p^2 + q^2}r} + q \cos qr - \sqrt{p^2 + q^2} \sin qr).$$

На рис. 6 и 7 представлено графическое поведение собственных функций непрерывного спектра при угле наклона дна $\beta = \pi/6$, полученных в [3], и при угле наклона дна $\beta = \pi/4$, полученных в [4], которые демонстрируют совпадение с теоретическими выводами, что при $q = 0$ собственные функции непрерывного спектра исчезают.

Так как наблюдается расхождение результатов, необходимо вернуться к получению собственных функций и проверить вывод формул разложения произвольной функции по граничным значениям собственных функций непрерывного и дискретного спектров, сделанных в [3] и [4].

Собственные функции (3), (4), (5) были получены методом, разработанным в теории теплопроводности [9]–[10]. Он заключается в применении к задаче Штурма–Лиувилля интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и сведении к функциональному уравнению. Применив к решению этого функционального уравне-

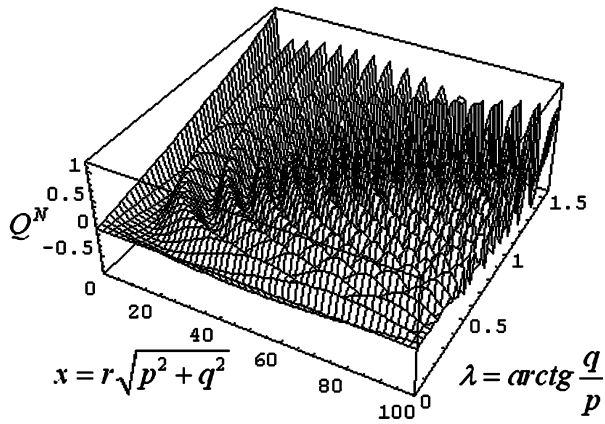


Рис. 6. Собственные функции непрерывного спектра, полученные А.А.Дорфманом, при угле наклона $\beta = \pi/2$.

ния формулу обращения Конторовича–Лебедева, было найдено выражение для собственных функций:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j,\chi=0}^1 \sum_{k=1}^n C^{(\chi)} b_k^\chi \exp(-r[\sqrt{p^2 - \mu^2} \sin a_{kj} + (-1)^\chi \mu \cos a_{kj}]),$$

$$b_k^\chi = (-1)^{n-k} \prod_{\sigma=1}^{n-k} \cot \sigma\beta \frac{0.5p^2 \sin 2\sigma\beta + (-1)^\chi \mu \sqrt{p^2 - \mu^2}}{p^2 \sin^2 \sigma\beta - \mu^2},$$

$$a_{kj} = (-1)^j \theta + 2(k-j)\beta, \quad Q = \Phi(\theta = 0).$$

При значениях $\mu = iq$ константы $C^{(\chi)}$ определялись из условия согласования с выражением для собственных функций соответствующей плоской задачи:

$$C^{(\chi)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[(-1)^\chi i \frac{\pi}{4} (n-1)\right] \prod_{\sigma=1}^{n-1} (p^2 \sin^2 \sigma\beta + q^2)^{1/2} \times \\ \times [(p + \sqrt{p^2 + q^2})^{n-1}]^{-1}.$$

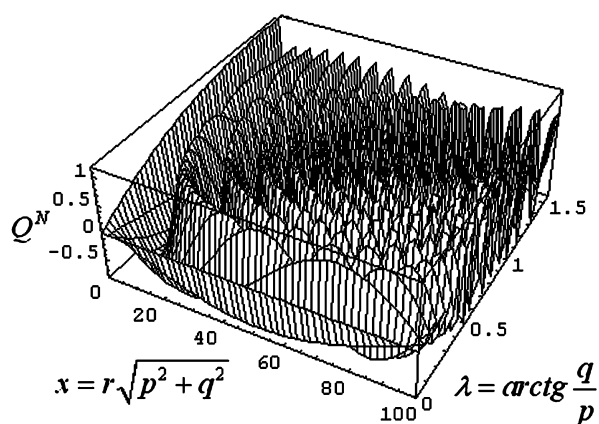


Рис. 7. Собственные функции непрерывного спектра, полученные М.В. Келдышем, при угле наклона $\beta = \pi/2$.

Вот здесь и кроется причина несовпадения результатов А.А. Дорфмана с результатами М.В. Келдыша.

Были попытки исправить этот коэффициент так, чтобы собственные функции совпадали, но тогда в теореме разложения весовой коэффициент в общем случае оказывался комплексным, хотя при угле наклона 45° было полное совпадение с формулой разложения [4].

5. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Теорема разложения [3] в своем доказательстве опиралась на уже найденные собственные функции. Далее, при доказательстве предполагалось, что собственные функции обладают равномерной асимптотикой по μ . Это предположение следует уточнить. При доказательстве теоремы использовалось выражение для асимптотики

$$Q(q \rightarrow \infty, p, x) = Q_\infty(qx) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(qx + \frac{n-1}{4}\pi\right).$$

В плоскости μ (рис. 8), где $\mu = \sqrt{p^2 + q^2} \exp(i\delta)$, $\delta \in [+ \pi/2, -\pi/2]$, выражение для асимптотики примет следующий вид:

$$Q(\sqrt{p^2 + q^2} \rightarrow \infty, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(\sqrt{p^2 + q^2} x \sin \delta + \alpha(\delta)),$$

$\alpha(\delta) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \delta}}$, которая уже не будет равномерной по μ .

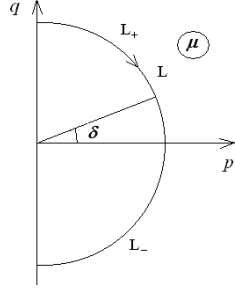


Рис. 8. Плоскость μ .

В силу симметричности по q этой неравномерной асимптотики приходим к результату, отличающемуся от приведенного в [3] слагаемыми, стремящимися к нулю:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(L)} Q_{\infty}(\mu x) Q_{\infty}(\mu \xi) d\mu = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin T(x - \xi)}{x - \xi} + \\ & + \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin T(x + \xi)}{x + \xi} - \frac{2}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} T \int_0^1 \frac{\cos Tu(x + \xi)}{1 + u^2} du - \\ & - \frac{2i}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} T \int_0^1 \frac{u^2 \sin Tu(x + \xi)}{(1 + u^2)\sqrt{1 - u^2}} du = \delta(x - \xi), \\ & T = \sqrt{p^2 + q^2}, u = \sin \delta. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых равны нулю в силу теоремы Римана об абсолютно интегрируемых функциях.

6. О ФОРМУЛЕ РАЗЛОЖЕНИЯ М.В.КЕЛДЫША

Переходим к результатам М.В. Келдыша. В [4] была приведена формула разложения произвольной функции, удовлетворяющей заданным условиям, по граничным значениям собственных функций непрерывного и дискретного спектра при угле наклона 45° .

Пусть $f(x, y)$ — функция, определенная при $x > 0$ и удовлетворяющая условию $\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty |f(x, y)| dy < \infty$ и условию представимости обычным интегралом Фурье. При этих предположениях имеет место тождество

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dpdq}{p+2q^2} \int_{-\infty}^\infty \cos p(y-\eta) d\eta \int_0^\infty f(\xi, \eta) \left((qe^{-\sqrt{p^2+q^2}x} + q \cos qx - \sqrt{p^2+q^2} \sin qx)(qe^{-\sqrt{p^2+q^2}\xi} + q \cos q\xi - \sqrt{p^2+q^2} \sin q\xi) + 2p^2 e^{-\frac{p}{\sqrt{2}}(x+\xi)} \right) d\xi.$$

Доказательства в статье нет, хотя о нем немного сказано: “Доказательство приведенной формулы получается следующим путем. Рассматривается внешний двойной интеграл по области $0 < p < n, 0 < q < m$, и ядро интеграла преобразуется так, чтобы интеграл отличался от обычного интеграла Дирихле членами, стремящимися к нулю при m и n , стремящимися к бесконечности”. Попытки повторить это доказательство привели к следующему. Был выделен интеграл Дирихле:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^m \int_0^n dpdq \int_{-\infty}^\infty \cos p(y-\eta) \int_0^\infty f(\xi, \eta) \times \\ \times \cos q(x-\xi) d\xi d\eta + \frac{2}{\pi^2} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^m \int_0^n K(p, q, x, y) dpdq, \\ K(p, q, x, y) = \int_{-\infty}^\infty \cos p(y-\eta) \int_0^\infty f(\xi, \eta) F(p, q, x, \xi) d\xi d\eta,$$

$$\begin{aligned}
F(p, q, x, \xi) = & \frac{1}{2} \cos q(x - \xi) + \frac{1}{p^2 + 2q^2} (q^2 (e^{-\sqrt{p^2 + q^2}(x + \xi)} + \\
& + \cos q \xi e^{-\sqrt{p^2 + q^2}x} + \cos qx) e^{-\sqrt{p^2 + q^2}\xi} - q \sqrt{p^2 + q^2} \times \\
& \times (\sin q \xi e^{-\sqrt{p^2 + q^2}x} + \sin qx e^{-\sqrt{p^2 + q^2}\xi} + \sin q(x + \xi)) - \\
& - \frac{1}{2} p^2 \cos q(x + \xi) + 2p^2 e^{-\frac{p}{\sqrt{2}}(x + \xi)}.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое должно стремиться к нулю при m и n , стремящихся к бесконечности. На рис. 9 приведено поведение функции $F(p, q, x, \xi)$ при $x = 1, \xi = 2$.

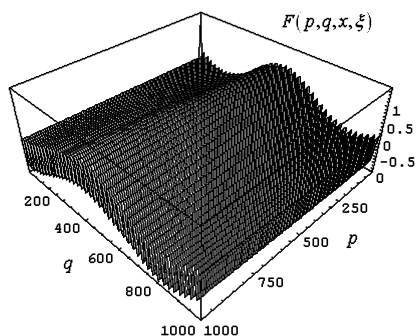


Рис. 9. Поведение функции $F(p, q, x, \xi)$ при $x = 1, \xi = 2$.

Обнадеживает осциллирующий характер функции $F(p, q, x, \xi)$ по переменной q (рис. 10), так как функция $f(\xi, \eta)$ в интеграле $K(p, q, x, y)$ абсолютно интегрируема и удовлетворяет условию представимости обычным интегралом Фурье.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в работе, обсуждались на городском акустическом семинаре, где были высказаны конструктивные замечания и предложения о построении собственных функций смешанного спектра в задачах о волновых движениях жидкости в области наклонного дна. В частности, о необходимости проверки ортонормированности собственных функций и анализа потока энергии

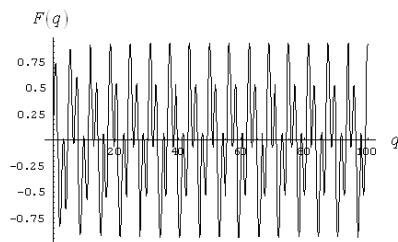


Рис. 10. Поведение функции $F(p, q, x, \xi)$ при $p = 10, x = 1, \xi = 2$.

для каждой собственной функции. Автор выражает благодарность Д.П. Коузову за высказанные замечания и надеется на разрешение вышеописанных трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Д.Д. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1973.
3. Дорфман А.А. Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 104-112.
4. Келдыш М.В. К задаче об отражении волн на поверхности тяжелой жидкости // Труды конф. по теории волнового сопротивления. М.: Изд-во ЦАГИ. 1937. С. 140-142.
5. Румянцев Б.Н. К теории волн Коши-Пуассона у наклонного берега // Докл. АН СССР. Т. 135. 1960. № 2. С. 287-289.
6. Чаудхури К. Неустановившиеся волны на отлогом берегу // Гр. Амер. О-ва инж.-мех. Прикл.механика. Серия Е. Т. 8. 1971. № 3. С. 118-120.
7. Васильев Б.А. Решение стационарной задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничном условии 3-го рода // Дифференциальные уравнения. Т. 6. 1970. № 3. С. 531-537.
8. Бестужева А.Н. Собственные функции в клиновидной области для волновых движений жидкости // Третьи Поляховские чтения: Избранные труды международной научной конференции по механике. СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ. 2003. С. 185-190.
9. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на клине конечной проводимости. // ЖТФ. 1962. Т. 32. Вып. 10. С. 1174-1183.
10. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Некоторые задачи теории теплопроводности для клиновидных тел // ЖТФ, 1964. Т. 34. Вып. 9, С. 1556-1565.

КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, АРМИРОВАННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИМИСЯ ВОЛОКНАМИ

Н.В. НАУМОВА, Д.Н. ИВАНОВ

Построена математическая модель среды, локальные свойства которой резко меняются, и введены усредненные характеристики такой среды. Исследуются колебания неоднородной пластины, состоящей из периодически повторяющейся структуры (ячейки). Ячейка представляет собой параллелепипед, в центре которого располагается цилиндрическое волокно. Рассматривается влияние различного количества волокон и их расположения на частоты и формы собственных колебаний данной пластины. Проводится сравнение частот и форм собственных колебаний многоволоконистой пластины, полученных в результате применения различных методов расчета.

1. ОСНОВНЫЕ ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

В настоящее время практически во всех областях техники применяются композитные материалы, состоящие из чередующихся объемов веществ, обладающих различными свойствами. В данной работе построена математическая модель среды, локальные свойства которой резко меняются, и введены усредненные характеристики такой среды. В дальнейшем предполагается исследовать колебательные процессы в средах с периодически повторяющейся структурой. Такие процессы описываются дифференциальными уравнениями с быстро осциллирующими коэффициентами. Будет применена методика асимптотической теории по осреднению возникающих уравнений и построена модель среды, описываемая уже более простыми дифференциальными уравнениями, которые называются усредненными. Согласно применяемой теории асимптотических методов, усредненные уравнения позволяют с большой точ-

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.

Доклад на семинаре 27 марта 2007 г.

© Н.В. Наумова, Д.Н. Иванов, 2007

ностью определить эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения, — близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений. На этом этапе планируется сравнение численных и асимптотических результатов. Численные расчеты проведены с использованием пакета ANSYS.

Последнее время становится особенно важным проведение проектировочных расчетов различных изделий (машин, механизмов, строений) аналитическими методами, ценность которых состоит в том, что они позволяют получать точные аналитические решения краевых задач, т. е. решения в виде математических формул, которые, вообще говоря, не имеют погрешности. В данной работе предпочтение отдается фундаментальным аналитическим, в частности асимптотическим, методам, которые являются достаточно трудоемкими, а также проводятся численные расчеты рассматриваемой конструкции.

В результате выполнения данной работы будет создана новая математическая модель, описывающая поведение рассматриваемой пластины, а также разработан пакет алгоритмов и программ, на основе которых проведенные исследования позволят детально изучить свойства композиционных материалов. Результаты работы могут быть также в дальнейшем использованы:

- при конструировании композиционных материалов с заданными свойствами, а также при оптимизации свойств материалов по каким-либо характеристикам;
- при выборе материалов при проектировании различных оболочечных конструкций, что позволит сократить дорогостоящие экспериментальные исследования.

2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБАХ

Рассмотрим квадратную пластину длины L и толщины h . Толщина пластины мала по сравнению с ее размерами в плоскости

($\frac{h}{L} < 0.1$). Принимая за исходную срединную поверхность пластины, введем декартову систему координат $OXYZ$, как показано на рис. 1.

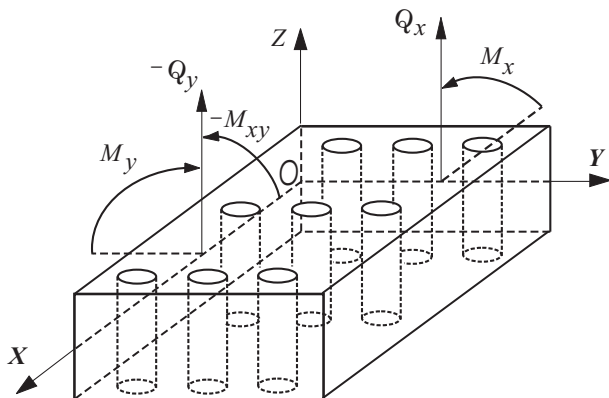


Рис. 1. Фрагмент пластины, армированной периодически повторяющимися волокнами.

При построении математической модели рассматриваемой пластины принимаются две основные гипотезы [3]. Первая гипотеза, принадлежащая Кирхгофу, предполагает, что нормаль к срединной поверхности пластины остается нормалью к ней после деформации. Вторая гипотеза утверждает, что напряженное состояние в точках пластины является двусосным, т.е. нормальными и касательными напряжениями в площадках, перпендикулярных оси z , можно пренебречь. Выпишем уравнение равновесия элемента пластины:

$$dQ_y dx + dQ_x dy = -\rho h dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь перерезывающие усилия Q_x и Q_y взяты с противоположным знаком. Разделим (1) на $dx dy$ и обозначим инерционную силу $-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ за q , тогда условие равновесия сил по оси z примет вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q. \quad (2)$$

Условие равновесия для моментов приводит к двум уравнениям:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (1) — (3) описывает поперечные колебания элемента пластины. Здесь введены следующие обозначения для удельных (на единицу длины) изгибающих M_x , M_y и крутящих M_{xy} моментов:

$$M_x = D(w_{xx} + \mu w_{yy}), \quad M_y = D(w_{yy} + \mu w_{xx}), \quad M_{xy} = D(1 - \mu)w_{xy}. \quad (5)$$

Величина D называется жесткостью единицы длины пластины:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ РАССМАТРИВАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ

Решение системы (1) — (3) ищется в виде

$$Q_x = \hat{Q}_x(x, y) \cdot \sin \omega t,$$

$$Q_y = \hat{Q}_y(x, y) \cdot \sin \omega t,$$

$$w = \hat{w}(x, y) \cdot \sin \omega t.$$

Введем безразмерные переменные \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{w} , \tilde{Q}_x , \tilde{Q}_y , \tilde{M}_x , \tilde{M}_{xy} , \tilde{M}_y :

$$w(x, y) = h\tilde{w}(L\tilde{x}, L\tilde{y}), \quad Q_x = \frac{Dh}{L^3}\tilde{Q}_x, \quad Q_y = \frac{Dh}{L^3}\tilde{Q}_y,$$

$$M_x = \frac{Dh}{L^2}\tilde{M}_x, \quad M_y = \frac{Dh}{L^2}\tilde{M}_y, \quad M_{xy} = \frac{Dh}{L^2}\tilde{M}_{xy}.$$

Далее введенный для безразмерных переменных знак " \sim " опускается. Для удобства дальнейших математических преобразований координаты (x, y) заменим на (x_1, x_2) соответственно. После перехода к безразмерным переменным уравнения (1) — (3) примут вид

$$\frac{\partial Q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{x_2}}{\partial x_2} + \lambda w = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{x_1 x_2}}{\partial x_2} + Q_{x_1} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial M_{x_1 x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{x_2}}{\partial x_2} + Q_{x_2} = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= w_{x_1 x_1} + \mu w_{x_2 x_2}, & M_{x_2} &= w_{x_2 x_2} + \mu w_{x_1 x_1}, \\ M_{x_1 x_2} &= (1 - \mu) w_{x_1 x_2}, & Q_{x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_1} (w_{x_1 x_1} + w_{x_2 x_2}), \\ Q_{x_2} &= -\frac{\partial}{\partial x_2} (w_{x_1 x_1} + w_{x_2 x_2}), & \lambda &= \frac{\rho \omega^2 L^4}{Eh^2}. \end{aligned}$$

На рис. 2 показан элемент пластины, прилежащий к границе включения Γ . Элемент длины кривой Γ обозначен ds , $\vec{\gamma}$ и \vec{t} — нормальный и касательный вектора к ds .

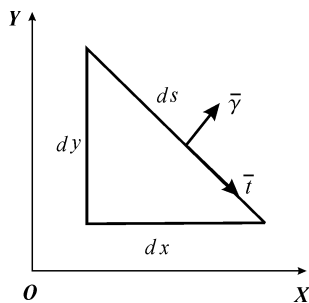


Рис. 2. Элемент пластины, прилежащий к границе включения Γ .

Выпишем проекции равнодействующей перерезывающей силы на направление нормали к плоскости пластины Q_b и суммарного

удельных изгибающих и крутящих моментов $\mathbf{M}_s ds$, действующих в плоскости пластины. Направление векторов \mathbf{Q}_x , \mathbf{Q}_y , \mathbf{M}_x , \mathbf{M}_y , \mathbf{M}_{xy} показано на рис. 1.

$$\mathbf{Q}_y dx + \mathbf{Q}_x dy = Q_b ds, \quad \widetilde{\mathbf{M}}_y dx + \widetilde{\mathbf{M}}_x dy = M_s ds.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{M}}_y$ обозначен вектор с координатами (M_{xy}, M_y) , а $\widetilde{\mathbf{M}}_x = (M_x, M_{xy})$. Рассматриваемая нами пластина представляет собой среду с периодически повторяющейся структурой (элемент волокна цилиндрической формы, помещенный в параллелепипед с размерами $\varepsilon \times \varepsilon \times h$). На границе сопряжения включения и матрицы должны выполняться следующие граничные условия:

$$[w]_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \vec{\gamma}} \right]_\Gamma = 0, \quad [DM_t]_\Gamma = 0, \quad [DQ_b]_\Gamma = 0, \quad (9)$$

где M_t — проекция вектора \mathbf{M}_s на направление \vec{t} .

Далее применяется метод многих масштабов [1]. Наряду с переменными x_1, x_2 вводятся так называемые *быстрые* переменные ξ_1, ξ_2 ($\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$). При этом элементарная ячейка, параллелепипед с размерами $(0, \varepsilon) \times (0, \varepsilon) \times (0, h)$ перейдет в параллелепипед $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, h)$ в переменных ξ_1, ξ_2 , и каждая из неизвестных функций, зависящая от переменных x_1, x_2 , формально станет зависящей и от переменных ξ_1, ξ_2 :

$$f(x_1, x_2) = \widetilde{f}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2).$$

Учитывая правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\widetilde{f}}{dx_1} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{d^2 \widetilde{f}}{dx_1^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^2 \widetilde{f},$$

выпишем выражения для \widetilde{Q}_{x_1} , $\widetilde{M}_{x_1 x_1}$, $\widetilde{M}_{x_1 x_2}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_{x_1} = & -p_{x_1} \left[(p_{x_1} + \varepsilon^{-1} p_{\xi_1})^2 + (p_{x_2} + \varepsilon^{-1} p_{\xi_2})^2 \right] \widetilde{w} - \\ & - \varepsilon^{-1} p_{\xi_1} \left[(p_{x_1} + \varepsilon^{-1} p_{\xi_1})^2 + (p_{x_2} + \varepsilon^{-1} p_{\xi_2})^2 \right] \widetilde{w}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\widetilde{M}_{x_1x_1} = \left[(p_{x_1} + \varepsilon^{-1}p_{\xi_1})^2 + \mu (p_{x_2} + \varepsilon^{-1}p_{\xi_2})^2 \right] \widetilde{w}, \quad (11)$$

$$\widetilde{M}_{x_1x_2} = (1 - \mu) (p_{x_1} + \varepsilon^{-1}p_{\xi_1}) (p_{x_2} + \varepsilon^{-1}p_{\xi_2}) \widetilde{w}. \quad (12)$$

Для краткости записи здесь были введены следующие обозначения:

$$p_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad p_{\xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad p_{\xi_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Выражения для \widetilde{Q}_{x_2} , $\widetilde{M}_{x_2x_2}$ могут быть получены из (10) — (12) заменой x_1, ξ_1 на x_2, ξ_2 соответственно.

Асимптотическое разложение для функции \widetilde{w} представим в виде ряда

$$\begin{aligned} \widetilde{w} &= \widetilde{w}_0(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) + \varepsilon \widetilde{w}_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) + \\ &+ \varepsilon^2 \widetilde{w}_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) + \varepsilon^3 \widetilde{w}_3(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

После подстановки выражений (13) в (10) — (12), а затем в систему (6) — (8) и приравнявая в левых частях полученных уравнений к нулю коэффициенты при последовательных степенях параметра ε , получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_0 \widetilde{w}_0 &= 0, \\ L_1 \widetilde{w}_0 + L_0 \widetilde{w}_1 &= 0, \\ L_2 \widetilde{w}_0 + L_1 \widetilde{w}_1 + L_0 \widetilde{w}_2 &= 0, \\ L_3 \widetilde{w}_0 + L_2 \widetilde{w}_1 + L_1 \widetilde{w}_2 + L_0 \widetilde{w}_3 &= 0, \\ (L_4 + \lambda_0) \widetilde{w}_0 + L_3 \widetilde{w}_1 + L_2 \widetilde{w}_2 + L_1 \widetilde{w}_3 + L_0 \widetilde{w}_4 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Дифференциальные операторы L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 в системе (14) имеют вид

$$\begin{aligned} L_0 &= \Delta_\xi^2, \quad L_1 = 4 [\Delta_\xi p_{x_1} p_{\xi_1} + \Delta_\xi p_{x_2} p_{\xi_2}], \\ L_2 &= p_{x_1}^2 [6p_{\xi_1}^2 + 2p_{\xi_2}^2] + p_{x_2}^2 [6p_{\xi_2}^2 + 2p_{\xi_1}^2] + 2p_{x_1} p_{x_2} p_{\xi_1} p_{\xi_2}, \\ L_3 &= 4 [\Delta_x p_{x_1} p_{\xi_1} + \Delta_x p_{x_2} p_{\xi_2}], \\ L_4 &= \Delta_x^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Считая формально x_1 , x_2 и ξ_1 , ξ_2 независимыми переменными, соотношения (14) можно рассматривать как рекуррентную цепочку дифференциальных уравнений по переменным ξ_1 и ξ_2 с неизвестной функцией $w_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ и параметрами x_1, x_2 . Каждую из неизвестных функций w_0, w_1, w_2, w_3 , согласно [2], будем искать в виде (16).

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0 &= v_0(x_1, x_2), \quad \tilde{w}_1 = N_1 p_{x_1} v_0(x_1, x_2) + N_2 p_{x_2} v_0(x_1, x_2), \\ \tilde{w}_2 &= M_1 p_{x_1}^2 v_0(x_1, x_2) + M_2 p_{x_1} p_{x_2} v_0(x_1, x_2) + M_3 p_{x_2}^2 v_0(x_1, x_2), \\ \tilde{w}_3 &= F_1 p_{x_1}^3 v_0 + F_2 p_{x_1}^2 p_{x_2} v_0 + F_3 p_{x_1} p_{x_2}^2 v_0 + F_4 p_{x_2}^3 v_0,\end{aligned}\tag{16}$$

где $N_1, N_2, M_1, M_2, M_3, F_1, F_2, F_3, F_4$ — функции, зависящие только от переменных ξ_1 и ξ_2 . Подставляя (16) в (14), приходим к системе дифференциальных по переменным ξ_1, ξ_2 уравнений относительно неизвестных девяти функций. Граничные условия для системы (17) получаются путем подстановки (13) с учетом (16) в исходные граничные условия (9). В результате численного интегрирования системы (17) методом конечных разностей определяются все зависящие от ξ_1 и ξ_2 неизвестные функции. Затем их нужно будет последовательно подставить в (16) и (13).

Полная система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $N_1, N_2, M_1, M_2, M_3, F_1, F_2, F_3, F_4$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_\xi^2 N_1 &= 0, \quad \Delta_\xi^2 N_2 = 0, \quad \Delta_\xi^2 M_1 + 4\Delta_\xi p_{\xi_1} N_1 = 0, \\ \Delta_\xi^2 M_2 + 4\Delta_\xi (p_{\xi_1} N_2 + p_{\xi_2} N_1) &= 0, \quad \Delta_\xi^2 M_3 + 4\Delta_\xi p_{\xi_2} N_2 = 0, \\ \Delta_\xi^2 F_1 + \Delta_\xi p_{\xi_1} M_1 + (6p_{\xi_1}^2 + 2p_{\xi_2}^2) N_1 &= 0, \\ \Delta_\xi^2 F_2 + \Delta_\xi (p_{\xi_1} M_2 + p_{\xi_2} M_1) + 2p_{\xi_1} p_{\xi_2} N_1 + (6p_{\xi_1}^2 + 2p_{\xi_2}^2) N_2 &= 0, \\ \Delta_\xi^2 F_3 + \Delta_\xi (p_{\xi_1} M_3 + p_{\xi_2} M_2) + 2p_{\xi_1} p_{\xi_2} N_2 + (6p_{\xi_1}^2 + 2p_{\xi_2}^2) N_1 &= 0, \\ \Delta_\xi^2 F_4 + \Delta_\xi p_{\xi_2} M_3 + (6p_{\xi_1}^2 + 2p_{\xi_2}^2) N_2 &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Здесь и далее введены следующие обозначения:

$$\Delta_\xi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right), \quad \Delta_\xi^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right)^2,$$

$$p_{\xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad p_{\xi_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad p_{\xi_1}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}, \quad p_{\xi_2}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}.$$

Γ — граница области включений, которая представляет собой окружность, задаваемую уравнением $\xi_1^2 + \xi_2^2 - R^2 = 0$, n_1 и n_2 — координаты касательного вектора к кривой Γ , $m_1 = n_1^2$, $m_2 = n_1 \cdot n_2$, $m_3 = n_2^2$. В данном случае

$$n_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\Gamma_{\xi_2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}},$$

$$n_2(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\Gamma_{\xi_1}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = -\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}.$$

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как уже отмечалось выше, для определения неизвестных функций $N_1, N_2, M_1, M_2, M_3, F_1, F_2, F_3, F_4$ из системы дифференциальных уравнений (17) необходимо задать дополнительные условия на границе Γ :

непрерывность смещений w :

$$[N_1]_\Gamma = [N_2]_\Gamma = 0, \quad [M_1]_\Gamma = [M_2]_\Gamma = [M_3]_\Gamma = 0,$$

$$[F_1]_\Gamma = [F_2]_\Gamma = [F_3]_\Gamma = [F_4]_\Gamma = 0;$$

равенство углов поворота:

$$[(-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) N_1]_\Gamma = 0, \quad [(-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) N_2]_\Gamma = 0,$$

$$[-n_2 N_1 + (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) M_1]_\Gamma = 0,$$

$$[-n_2 N_2 + n_1 N_1 + (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) M_2]_\Gamma = 0,$$

$$[n_1 N_2 + (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) M_3]_\Gamma = 0,$$

$$\begin{aligned}
[-n_2 M_1 + (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) F_1]_{\Gamma} &= 0, \\
[n_1 M_1 - n_2 M_2 (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) F_2]_{\Gamma} &= 0, \\
[-n_2 M_3 + n_1 M_2 + (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) F_3]_{\Gamma} &= 0, \\
[n_1 M_3 + (-n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) F_4]_{\Gamma} &= 0;
\end{aligned}$$

равенство моментов:

$$\left[((m_1 + \mu m_2) p_{\xi_1}^2 + (m_2 + \mu m_1) p_{\xi_2}^2 + m_3 (1 - \mu) p_{\xi_1} p_{\xi_2}) DN_1 \right]_{\Gamma} = 0, \quad (18)$$

$$\left[((m_1 + \mu m_2) p_{\xi_1}^2 + (m_2 + \mu m_1) p_{\xi_2}^2 + m_3 (1 - \mu) p_{\xi_1} p_{\xi_2}) DN_2 \right]_{\Gamma} = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
D(m_1 + \mu m_2) + Z_{11} N_1 + \left(m_1 D(p_{\xi_1}^2 + \mu p_{\xi_2}^2) \right) M_1 + \\
+ \left(m_2 D(p_{\xi_2}^2 + \mu p_{\xi_1}^2) + m_3 D(1 - \mu) p_{\xi_1} p_{\xi_2} \right) M_1 |_{\Gamma} &= 0, \\
D(\mu m_1 + m_2) + Z_{12} N_2 + \left(m_1 D(p_{\xi_1}^2 + \mu p_{\xi_2}^2) \right) M_3 + \\
+ \left(m_2 D(p_{\xi_2}^2 + \mu p_{\xi_1}^2) + m_3 D(1 - \mu) p_{\xi_1} p_{\xi_2} \right) M_3 |_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned}$$

$$[Z_{01} N_1 + Z_{11} M_1 + L_0^M F_1]_{\Gamma} = 0,$$

$$[Z_{01} N_2 + Z_{02} N_1 + Z_{11} M_2 + Z_{12} M_1 + L_0^M F_2]_{\Gamma} = 0,$$

$$[Z_{02} N_2 + Z_{03} N_1 + Z_{11} M_3 + Z_{12} M_2 + L_0^M F_3]_{\Gamma} = 0,$$

$$[Z_{03} N_2 + Z_{12} M_1 + L_0^M F_4]_{\Gamma} = 0;$$

равенство усилий:

$$[D(n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) \Delta_{\xi} N_1]_{\Gamma} = 0,$$

$$[D(n_2 p_{\xi_1} + n_1 p_{\xi_2}) \Delta_{\xi} N_2]_{\Gamma} = 0,$$

$$\left[D(B_1 N_1 + L_0^Q M_1) \right]_{\Gamma} = 0,$$

$$\left[D(B_1 N_2 + B_2 N_1) + L_0^Q M_2 \right]_{\Gamma} = 0,$$

$$\left[D(B_2 N_2 + L_0^Q M_3) \right]_{\Gamma} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left[D \left(n_2 + C_1 N_1 + G_1 M_1 + L_0^Q F_1 \right) \right]_{\Gamma} = 0, \\ & \left[D \left(n_1 + (C_2 N_1 + C_1 N_2) + (G_1 M_2 + G_2 M_1) + L_0^Q F_2 \right) \right]_{\Gamma} = 0, \\ & \left[D \left(n_2 + (C_2 N_2 + C_3 N_1) + (G_2 M_2 + G_1 M_3) + L_0^Q F_3 \right) \right]_{\Gamma} = 0, \\ & \left[D \left(n_1 + C_3 N_2 + G_2 M_3 + L_0^Q F_4 \right) \right]_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

После определения неизвестных функций $N_1, N_2, M_1, M_2, M_3, F_1, F_2, F_3, F_4$ можно перейти к решению осредненного уравнения колебаний рассматриваемой пластины:

$$\int_0^1 \int_0^1 D \left[\frac{\partial \tilde{Q}_{3x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{Q}_{3x_2}}{\partial x_2} - \lambda_0 w_0 \right] d\xi_1 d\xi_2 = 0. \quad (20)$$

В настоящее время решение уравнения (20) пока не может быть выписано в явном виде.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Для проведения численных результатов частот и форм колебаний рассматриваемой пластины методом конечных элементов в пакете ANSYS необходимо задать свойства материалов, составляющих пластину. В табл. 1 приведены значения модулей Юнга, коэффициента Пуассона и плотности материалов, которые были взяты для исследования.

Таблица 1. Свойства материалов, составляющих пластину

Название материала	Модуль Юнга, $E, 10^{11} \text{ Н/м}^2$	Плотность, $\rho, \text{ кг/м}^3$	Коэффициент Пуассона, ν
Сталь	2.09	7850	0.29
Титан	1.00	4650	0.36
Резина	0.03	1150	0.499
Никель	1.08	8490	0.31
Алюминий	0.76	2720	0.34

В первом расчете рассматривалась квадратная пластина размерами (L) 1 м \times 1 м, толщиной (h) 1 см и радиусом волокна (r) 5 см. Волокна располагались равномерно по толщине пластины, и их количество составляло 5 по длине (m) и 5 по ширине (n) пластины. Согласно результатам, представленным в табл. 2, 3, 4, можно сделать вывод, что наличие волокон из материала меньшей жесткости, чем материал основной пластины (матрицы), не оказывает существенного влияния на значения первых двух частот колебаний.

Таблица 2. Частоты колебаний пластин, армированных волокнами $L = 1$, $h = 0.01$, $r = 0.05$, $n = 5$, $m = 5$

Матрица	Волокно	Первая частота, Гц	Вторая частота, Гц
Сталь	Титан	85.227	174.21
Сталь	Резина	84.951	173.85
Сталь	Никель	85.369	174.17
Сталь	Алюминий	85.182	174.22
Титан	Сталь	77.040	156.74
Титан	Никель	76.958	156.49

Таблица 3. Частоты колебаний пластины с отверстиями

$L = 1$, $h = 0.01$, $r = 0.05$, $n = 5$, $m = 5$

Матрица	Волокно	Первая частота, Гц	Вторая частота, Гц
Сталь	Отверстие	85.750	175.06
Титан	Отверстие	78.344	160.08

Таблица 4. Частоты колебаний сплошной пластины $L = 1$, $h = 0.01$

Матрица	Волокно	Первая частота, Гц	Вторая частота, Гц
Сталь	Сталь	89.542	182.65
Титан	Титан	82.929	169.15

Так, например, сплошная стальная пластина (см. табл. 4) имеет частоту 89.542 Гц, стальная с титановыми волокнами (см. табл. 2)

– 85.227 Гц, стальная с отверстием (см. табл. 3) – 85.750 Гц. Формы колебаний во всех рассмотренных случаях аналогичны форме колебаний, представленной на рис. 3.

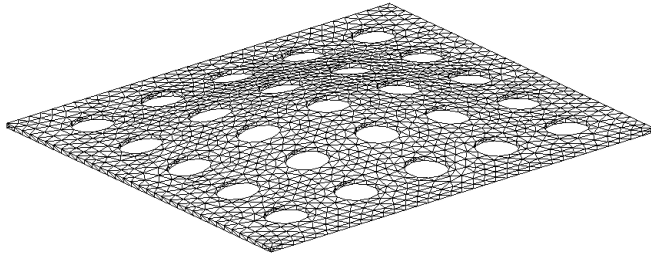


Рис. 3. Первая форма колебаний пластины с отверстиями.

Если же, наоборот, основной материал менее жесткий по сравнению с материалом волокон (например, матрица из титана, а волокна из стали (табл. 2)), то частоты колебаний уменьшаются. Формы же колебаний остаются прежними. Уменьшение количества волокон (табл. 5) или увеличение радиуса волокон (табл. 6) не оказывают существенного влияния на частоты и формы колебаний.

Таблица 5. Частоты колебаний пластин, армированных волокнами $L = 1$, $h = 0.01$, $r = 0.05$, $n = 3$, $m = 3$

Матрица	Волокно	Первая частота, Гц	Вторая частота, Гц
Сталь	Титан	85.531	173.99
Сталь	Резина	85.484	173.50
Сталь	Никель	85.399	174.12

Таблица 6. Частоты колебаний пластины, армированной волокнами $L = 1$, $h = 0.01$, $r = 0.1$, $n = 3$, $m = 3$

Матрица	Волокно	Первая частота, Гц	Вторая частота, Гц
Сталь	Никель	84.973	173.01

Авторы выражают благодарность А.Л. Смирнову и С.Б. Филиппову за ценные замечания и предложения, высказанные в процессе работы над данной статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аргатов И.И.* Асимптотическое моделирование в механике. СПб., 2004. 270 с.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984. 512 с.
3. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. М., 1994. 352 с.

ДВУХФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРОТОЧНЫХ ТРАКТАХ ЭНЕРГОУСТАНОВОК

И. В. ЯКИМОВА

Проводится исследование внутренних двухфазных течений в околосопловом пространстве. Рассматриваются предсопловые объемы с утопленным во внутреннюю полость входом в сопло. Используются криволинейные согласованные с границами области системы координат и порожденные ими криволинейные разностные сетки. Отличительной чертой данной работы являются детальное описание всех особенностей геометрии расчетной области, учет реального распределения частиц по размерам и их представительства в потоке, учет турбулентности внутреннего течения, а также реальные схемы подвода газа в систему от массоподводящих поверхностей, моделирующих горение. Созданы эффективные вычислительные схемы для массовых траекторных расчетов частиц в построенном газовом поле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенностью внутренних двухфазных течений в проточных трактах энергоустановок являются сложная структура потока и наличие нежелательного выброса частиц конденсированной фазы на ограничивающие поверхности. Построение средств математического моделирования таких течений представляет интерес для задач параметрической оптимизации геометрических характеристик таких конструкций [1].

Особенностью развиваемой здесь системы моделирования является стремление получить достаточно экономичную с точки зрения объема вычислительной работы модель процессов, в то же время достаточно хорошо отражающую основные особенности течения и позволяющую отразить конкретное влияние таких геометрических проектных параметров, как радиусы скругления геометрических элементов, их удлинения и зазоры гидродинамических трактов.

Доклад на семинаре 10 апреля 2007 г.

© И. В. Якимова, 2007

Процессы в околосопловой области рассматриваются с позиции возможности их описания в рамках квазистационарной постановки [2]. Исследования определяются теми схемными решениями и вариантами оформления проточной части, которые присущи современным двигателям. Рассматриваются движение и эволюция частиц в газовом поле, полученном без учета обратного влияния частиц.

2. СООТНОШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

На основе оценок, решений модельных задач, а также анализа экспериментальных данных было установлено, что во многих случаях достаточно хорошее описание потоков сложной структуры дает модель, в которой пренебрегают эффектами вязкости. Весьма важным обстоятельством, определяющим адекватность решений реальным течениям, является тот факт, что для границ с массоподводом граничные условия для идеальной жидкости имеют ту же форму, что и граничные условия для вязкой жидкости.

Из-за малых скоростей в протоках и предсопловом объеме ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ) течение на этих участках можно рассматривать как несжимаемое. Сжимаемость среды оказывает влияние только на поверхности сопла – образуется приграничный слой, который можно рассчитать отдельно.

Условия нормальности вдува порождают вихрь скорости, который конвективно сносится внутрь расчетной области и формирует вихревые профили скорости. Условия в протоках РДТТ, в которых течение формируется вдувом от стенок, весьма хорошо вписываются в такую модель, что и определяет успешное применение модели вихревого течения невязкой жидкости для расчета течений сложной структуры.

Уравнение переноса вихря, в котором отсутствуют вязкие члены, допускает простой интеграл, в силу которого значение вихря во внутренней точке может быть определено через его значение на границе области в точке, соответствующей той же линии тока. Это обстоятельство послужило основой создания эффективных вычислительных схем, в которых первое приближение строится на основе модели эффективно невязкой жидкости, представленной в

переменных функция тока–вихрь скорости (ψ – ω):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\omega r, \quad \frac{\omega}{r} = \left(\frac{\omega(\psi)}{r} \right)_w, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \rho u r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v r, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность несущей среды, u и v — проекции вектора скорости несущей среды на оси декартовой системы координат (x, r) . Второе уравнение в (1) отражает условие сохранения интенсивности вихревых трубок в осесимметричном течении идеальной несжимаемой жидкости. Такая модель составляет первый этап решения задачи. Полученное в рамках этой модели решение в дальнейшем уточняется, учитываются сжимаемость среды и вязкие эффекты в поле течения.

Другим обстоятельством, определяющим привлекательность этой модели, явилось то, что в расчетной модели с большой подробностью можно представить сложную геометрию расчетной области, характерную для современных РДТТ. При моделировании области сложной геометрии применяется подход, основанный на использовании криволинейных, согласованных с границами области систем координат и порожденных ими криволинейных разностных сеток. Такие криволинейные координатные системы создаются на основе решения систем уравнений эллиптического типа, определяющих координатные линии. Использование управляющих параметров и блочного подхода позволяет построить криволинейные сетки с приемлемыми для решаемой задачи характеристиками (отсутствие сильно скошенных и вытянутых ячеек, удовлетворительные свойства якобиана и метрических коэффициентов, ортогонализация линий сетки в выделенных областях и т.д.).

Уравнения для функции тока и для вихря скорости в криволи-

нейной системе координат (ξ, η) принимают следующий вид:

$$g_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{J}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = -J^2 r \omega,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + V \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{v}{J^2} \left[g_{22} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right] -$$

$$- \frac{v}{J^2} \left[\frac{J}{r} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{J^2 \omega}{r^2} \right] + \frac{v \omega}{r}.$$

Здесь для вихря скорости записано уравнение, учитывающее его вязкую диссипацию и применяющееся для уточнения поля вихрей во внутреннем течении. Производная по времени используется для реализации метода установления, J – якобиан преобразования координат, g_{ij} – компоненты метрического тензора, а U и V – контравариантные проекции скорости:

$$U = \frac{1}{Jr} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad V = -\frac{1}{Jr} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат выражаются через функцию тока следующим образом:

$$u = \frac{1}{Jr} \left(-x_\eta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + x_\xi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right), \quad v = \frac{1}{Jr} \left(-r_\eta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + r_\xi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right).$$

Граничные значения для функции тока на массоподающих поверхностях легко находятся из интегрирования соотношений для условий вдува, что приводит в постановке на этих участках границы условий первого рода. На границах, где происходит вытекание жидкости из рассматриваемой расчетной области, ставились различные варианты (дифференциальные и алгебраические) условий гладкого вытекания.

Трудность выставления граничных значений для вихря скорости состоит в том, что физическая постановка задачи дает ясные формулировки граничных значений для составляющих скорости, а вихрь, являющийся дифференциальной кинематической характеристикой поля скорости, из этих условий определен быть не может. Обычно для выставления граничных значений вихря используются

локализованные условия, выражающие в дифференциальном виде условие совместности в пристенной области полей вихря и функции тока. Такие условия в значительной мере усложняются при использовании неортогональных криволинейных систем координат. Поэтому для формулировки граничного условия для вихря скорости на поверхности вдува здесь используется подход, основанный на привлечении теоремы Стокса о циркуляции скорости:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} dS = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ — вихрь скорости; L — замкнутый жидкий контур; S — поверхность, натянутая на жидкий контур; $d\mathbf{l}$ и dS — элементы жидкого контура и поверхности соответственно; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S .

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Расчет поля течения в околосопловой области РДТТ рассматриваемого класса можно представить как последовательность следующих этапов:

- построение для выбранного момента времени геометрии границ расчетной области и генерация криволинейной, согласованной с границами, системы координат. Выделение в этой координатной системе области, прилежащей к поверхности сопла, и локализованное измельчение в ней сетки;
- решение гидродинамической задачи о течении эффективно невязкой несжимаемой жидкости в этой области. Для расчета вихря используется алгебраическое соотношение, выражающее интеграл уравнения переноса вихрей. Граничные условия для вихря на поверхностях горения строятся на основе локализованного применения теоремы Стокса;
- уточнение полученного решения, которое состоит в учете сжимаемости и вязкости на основе использования уравнений для вязкого сжимаемого течения и применения в вычислениях алгоритма с итерациями по нелинейностям. Как правило, такое уточнение имеет малые отклонения от решения первого приближения. Картина

линий тока и пример сетки с блоком сгущения у поверхности сопла приводятся на рис. 1 и 2.

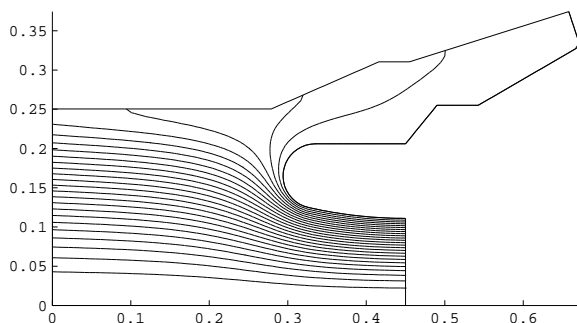


Рис. 1. Линии тока в околосопловой области.

Далее происходит уточнение поля течения в области сопловой поверхности, строится местный сеточный блок с более подробной структурой и производится пересчет поля течения в этой области. Наглядно сеточный блок представлен на рис. 2.

Характеристики газового поля, координаты узлов сетки, метрические коэффициенты и якобианы преобразования координат приписываются узлам сетки. Интерполяция параметров на любую внутреннюю точку ячейки осуществляется с помощью билинейной интерполяции по площадям. Аргументом для такой интерполяции являются относительные координаты точки в вычислительном пространстве.

В основе расчета движения среды с конденсированными включениями в данной работе положен лагранжев подход [3]. Предполагается, что отсутствует обратное влияние частиц на газовое поле. Траектория движения каждой частицы находится из интегрирования

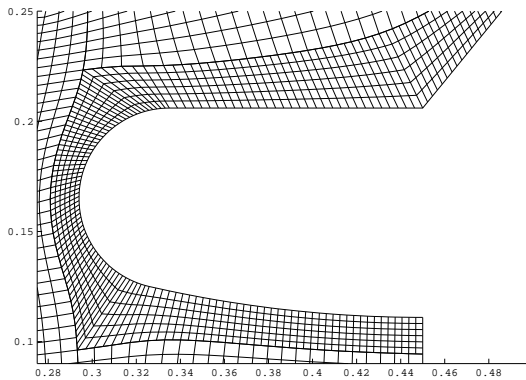


Рис. 2. Сетка с местным сеточным блоком.

ее уравнений движения. Из сил, действующих на частицу, учитываются лишь сила сопротивления, принимаемая как сопротивление сферической частицы, и массовая сила, определяемая действием гравитационного поля и следствием ускоренного движения изделия. Траектория каждой частицы отслеживается одновременно как в физической, так и в вычислительной областях. Каждая из этих областей выполняет свою функцию в организации эффективного вычислительного процесса. В физической плоскости интегрируется уравнение движения и определяются физические компоненты вектора скорости индивидуальной частицы, а в вычислительной области находится положение частицы, определяемое ее вычислительными координатами, пересечение траекторией частицы стенки сопла, выход ее из расчетной области.

Уравнение движения частицы в физическом пространстве имеет вид

$$m_p \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{2} c_D \rho |\mathbf{v} - \mathbf{u}| (\mathbf{v} - \mathbf{u}) S_p + (\mathbf{g} + \mathbf{a}_r) m_p.$$

Здесь m_p — масса частицы, ρ — плотность частицы, \mathbf{u} — вектор скорости частицы, \mathbf{v} — вектор скорости несущей среды, c_D — коэффициент сопротивления частицы, S_p — площадь поверхности частицы, \mathbf{g} — вектор силы тяжести, \mathbf{a}_r — вектор силы, возникающей

в результате ускоренного движения изделия в целом.

Траектория частицы определяется из интегрирования уравнений в вычислительном пространстве:

$$\frac{d\xi_p}{dt} = \frac{1}{J} (r_\eta u_p - x_\eta v_p), \quad \frac{d\eta_p}{dt} = \frac{1}{J} (r_\xi u_p - x_\xi v_p).$$

Такая организация вычислений позволяет легко устанавливать факт выпадения частиц на стенку криволинейной поверхности сопла.

В процессе вычислений происходит непрерывный обмен данными между этими областями, физические скорости переводятся в контравариантные компоненты скорости частицы, необходимые для интегрирования траектории в вычислительном пространстве, а вычислительные координаты переводятся в физические, которые будут определять реальную траекторию частицы.

Имея подготовленное газовое поле, проводится расчет серии траекторий частиц и определение потоков выпадения на поверхность сопла. Предлагаемый вариант расчета движения среды с конденсированными включениями основан на следующих положениях:

- конденсированная фракция представляется набором частиц-представительниц, каждая из которых определяет частицы, лежащие в некотором заданном диапазоне функции распределения частиц по размерам, и индивидуализирует те частицы, которые на входе в расчетную область расположены в заданной трубке тока. Каждая такая частица соответствует массовому расходу конденсированной фазы, отвечающему представительству этого размера частицы в функции распределения;
- выпадение частицы на стенку сопла означает вынос в эту область сопла всего массового расхода, который приписан данной частице;
- влияние турбулентности на движение частиц учитывается путем введения в расчет мгновенного значения скорости газа, пульсации которого моделируются исходя из местных характеристик турбулентности [4].

Траектории частиц в околосопловом пространстве показаны на рис. 3.

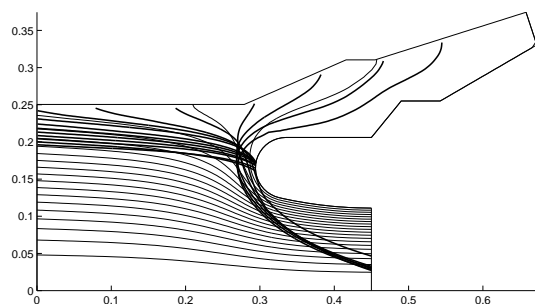


Рис. 3. Траектории частиц.

Здесь приведены траектории частиц достаточно крупного размера (диаметр частиц 30 мкм), геометрия расчетной области соответствует начальным временам работы двигателя.

Массовый поток на стенку сопла показан на рис. 4.

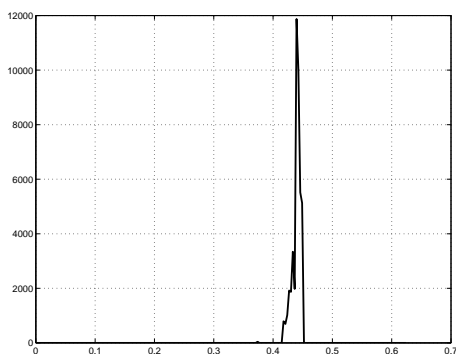


Рис. 4. Поток частиц на стенку.

Из рис. 3 и 4 видно, что областью выпадения конденсированной фазы высокого фракционного состава является лобовая часть сопла.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данного подхода проведены исследования двухфазных течений, и выявлены их основные закономерности. Наибольшее влияние на картину выпадения конденсата оказывает изменяющаяся в процессе работы геометрия массоподающих поверхностей двигательной установки. Каждому моменту времени на поверхности горения соответствуют определенные участки, отвечающие за инерционный вынос на поверхность сопла той или иной фракции конденсата. Многообразие форм реального геометрического оформления тракта двигателя определяет специфику инерционного выноса частиц на поверхность установки и распределение конденсата в поперечном сечении сопла.

Таким образом, разработана совокупность модулей, которая представляет собой систему математического моделирования течения газа в околосопловом пространстве двигателя осесимметричной компоновки и движения конденсированной фазы. Она позволяет исследовать особенности инерционного выпадения частиц на стенки сопла и влияние на массовые потоки выпадения геометрических и расходных факторов.

Созданы эффективные вычислительные схемы для массовых траекторных расчетов частиц в построенном газовом поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численный эксперимент в теории РДТТ / А.М. Липанов, В.П. Бобрышев, А.В. Алиев и др.; Под ред. А.М. Липанова. Екатеринбург: Наука, 1994. 301 с.
2. Липанов А.М., Ерохин Б.Т. Нестационарные и квазистационарные режимы работы РДТТ. М.: Машиностроение, 1977. 200 с.
3. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
4. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Влияние турбулентности на движение конденсированных продуктов сгорания твердого топлива // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и в ствольных системах (ИСОС-99). Труды Третьей международной конф. (Ижевск, 7–9 июля 1999 г.). Ижевск: ИПМ УрО РАН, 2000. С. 142–157.

ЧИСЛЕННЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

П. А. АБАКУМОВ, А. Л. СМИРНОВ

Рассматриваются свободные осесимметричные колебания тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки. Для различных граничных условий проводится анализ частот, полученных с помощью асимптотических и численных методов и исследуется характер вырождения краевой задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Свободные осесимметричные колебания тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки описываются следующей системой 6-го порядка в безразмерных переменных [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} - \nu \frac{dw}{ds} \right) + \lambda u &= 0, \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{ds} - w \right) - \mu^4 \frac{d^4 w}{ds^4} + \lambda w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho \omega^2 R^2}{E}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}.$$

Здесь u , w — проекции перемещения на направления образующей и нормали к срединной поверхности оболочки, ω — частота колебаний, ρ — плотность, E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, μ — малый параметр толщины, λ — параметр частоты. В уравнении (1) используются перемещения и переменная s , отнесенные к радиусу оболочки R , таким образом,

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00250.

Доклад на семинаре 24 апреля 2007 г.

© П. А. Абакумов, А. Л. Смирнов, 2007

переменная s изменяется в пределах $[0, l]$, где $l = L/R$, а L — длина оболочки.

На краях оболочки следует задать граничные условия, которые являются элементами следующего множества, имеющего вид прямого произведения условий:

$$\{u, u' - \nu w\} \times \{w, w'''\} \times \{w', w''\} = 0.$$

Из восьми возможных видов граничных условий будем рассматривать два, которые описывают:

1) шарнирное опирание края:

$$\frac{du}{ds} = w = \frac{d^2w}{ds^2} = 0, \quad (2)$$

2) его жесткую заделку:

$$u = w = \frac{dw}{ds} = 0. \quad (3)$$

Из возможных 36 вариантов закрепления краев оболочки (с учетом ее симметрии) в дальнейшем рассматриваются только условия вида 1-1, 2-2 и 1-2.

При $\mu = 0$ исходная система уравнений (1) вырождается в безмоментную систему уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{d^2u}{ds^2} - \nu \frac{dw}{ds} \right) + \lambda u &= 0, \\ \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{du}{ds} - w \right) + \lambda w &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В связи с тем, что при этом порядок системы уравнений уменьшается с 6 до 2 из трех граничных условий, следует оставить только одно:

1') для шарнирно опертого края:

$$\frac{du}{ds} - w = 0, \quad (5)$$

2) при жесткой заделке края:

$$u = 0. \quad (6)$$

Цель настоящей работы — исследование вырождения задачи (1) в задачу (4) при $\mu \rightarrow 0$.

2. КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ С ШАРНИРНО ОПЕРТЫМИ КРАЯМИ

Рассмотрим задачу с шарнирным опиранием на обоих концах. Решение и полной и безмоментной задач имеет вид

$$u = u_0 \cos(k_n s), \quad w = w_0 \sin(k_n s), \quad k_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Подстановка (7) в (1) приводит к квадратному уравнению для определения параметра частоты:

$$\left(\lambda - \frac{k_n^2}{1 - \nu^2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{1 - \nu^2} - \mu^4 k_n^4 \right) - \frac{\nu^2 k_n^2}{(1 - \nu^2)^2} = 0, \quad k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad (8)$$

откуда определяются две серии частот:

$$\lambda_{1,n} = \frac{1 + k_n^2}{2(1 - \nu^2)} + \frac{1}{2} k_n^4 \mu^4 + d_n,$$

$$\lambda_{2,n} = \frac{1 + k_n^2}{2(1 - \nu^2)} + \frac{1}{2} k_n^4 \mu^4 - d_n,$$

$$d_n = \frac{\sqrt{(1 + k_n^2 - k_n^4 \mu^4)(1 - \nu^2)^2 - 4(k_n^2 + k_n^6 \mu^4)(1 - \nu^2)}}{2(1 - \nu^2)}.$$

Частоты для вырожденной задачи соответственно

$$\lambda_{1,n}^0 = \frac{1 + k_n^2}{2(1 - \nu^2)} + d_n^0,$$

$$\lambda_{2,n}^0 = \frac{1 + k_n^2}{2(1 - \nu^2)} - d_n^0,$$

$$d_n^0 = \frac{\sqrt{(1 + k_n^2)(1 - \nu^2)^2 - 4k_n^2(1 - \nu^2)}}{2(1 - \nu^2)}.$$

При $n \rightarrow \infty$ два первых члена разложения частот вырожденной задачи в ряд по k_n имеют вид

$$\lambda_{1,n}^0 = \frac{\nu^2 + k_n^2}{1 - \nu^2} + O(k_n^{-2}),$$

$$\lambda_{2,n}^0 = 1 - \frac{\nu^2}{k_n^2} + O(k_n^{-4}).$$

При фиксированном $\mu \neq 0$ и $n \rightarrow \infty$ главные члены частот имеют различный вид в зависимости от соотношения порядков k_n и μ . Обозначив $\varepsilon = 1/k_n$ и подставив в уравнение (8), получим уравнение для λ , содержащее два малых параметра: μ и ε . Построив многогранник Ньютона [1], обнаружим, что критическими точками являются $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \mu$ и $\varepsilon = \mu^2$. При этих соотношениях параметров меняется конфигурация диаграммы Ньютона. В таблице 1 приведены главные члены разложения частот $\lambda_{i,n}$ при различных значениях $k_n \sim \mu^{-\alpha}$

Таблица 1. Главные члены разложения частот $\lambda_{i,n}$

	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3/2$	$\alpha = 2$	$\alpha = 5/2$
$i = 1$	$\frac{k_n^2}{1-\nu^2}(1)$	$\frac{k_n^2}{1-\nu^2}(2)$	$\frac{k_n^2}{1-\nu^2}(3)$	$k_n^4 \mu^4(4)$	$k_n^4 \mu^4(5)$
$i = 2$	$1(0)$	$1 + \mu^4 k_n^4(0)$	$\mu^4 k_n^4(2)$	$\frac{k_n^2}{1-\nu^2}(4)$	$\frac{k_n^2}{1-\nu^2}(6)$

При фиксированном n частоты полной и вырожденной задач связаны соотношением

$$\lambda_{1,n} = \lambda_{1,n}^0 + \mu^4 \lambda_{1,n}^1 + \mu^8 \lambda_{1,n}^2 + O(\mu^{12})$$

$$\lambda_{2,n} = \lambda_{2,n}^0 + \mu^4 \lambda_{2,n}^2 + \mu^8 \lambda_{2,n}^2 + O(\mu^{12})$$

причем это разложение неравномерно по k_n . Действительно, при больших k_n старшие члены $\lambda_{i,n}^j$ таковы

При $i = 1$ третий член разложения имеет тот же порядок, что и первый при $k_n \sim \mu^{-4}$, а при $i = 2$ второй член разложения имеет тот же порядок, что и первый при $k_n \sim \mu^{-1}$.

Таблица 2. Старшие члены $\lambda_{i,n}^j$ при больших k_n .

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	$k_n^2/(1-\nu^2)$	$k_n^2\nu^2$	$k_n^4\nu^2(1-\nu^2)$
$i = 2$	1	k_n^4	$-k_n^4\nu^2(1-\nu^2)$

При $\mu = 0$ для форм колебаний с частотами $\lambda_{1,n}^0$ при больших k_n справедливо соотношение $u_0 \sim k_n w_0/\nu$, т.е. $u_0 \gg w_0$, такие колебания называются квазитангенциальными. Для частот $\lambda_{2,n}^0$ при больших k_n справедливо соотношение $w_0 \sim -k_n u_0/\nu$, т.е. $|w_0| \gg |u_0|$, такие колебания называются квазиперечными. В данной работе будем рассматривать только колебания с частотами, близкими к 1. Большинство таких колебаний являются квазиперечными.

На рис. 1 сплошными линиями изображена зависимость первой частоты λ_1 и шести первых частот $\lambda_{2,n}$ от параметра тонкостенности μ . Пунктирные линии соответствуют безмоментным частотам.

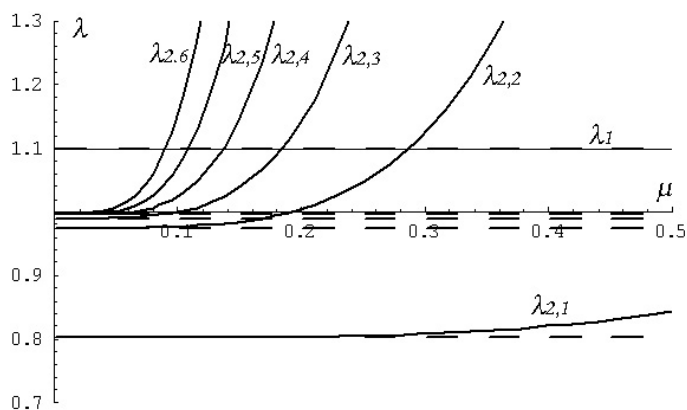


Рис. 1. Влияние параметра тонкостенности на частоты колебаний оболочки.

Заметим, что параметр μ оказывает слабое влияние на частоты квазитангенциальных колебаний, в то время как зависимость от μ

квазипоперечных колебаний существенна.

3. КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКО ЗАДЕЛАННЫМИ КРАЯМИ

Исследуем теперь спектр частот свободных осесимметричных колебаний тонкой круговой цилиндрической оболочки с жестко закрепленными краями. Полная краевая задача состоит из системы уравнений (1) и граничных условий (3) на обоих краях. Ее решение будем сравнивать с решением вырожденной задачи (4) с граничными условиями (6). Решение вырожденной задачи следует искать в виде

$$u = u_0 \sin(k_n s), \quad w = w_0 \cos(k_n s), \quad k_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

При этом спектр частот собственных колебаний безмоментной оболочки определяется из уравнения (8) и совпадает с частотами шарнирно опертой оболочки, а форма колебаний такова:

$$u_0 = 1, \quad w_0 = \nu k_n (1 - (1 - \nu^2) \lambda^0). \quad (10)$$

Полная краевая задача в рассматриваемом случае не имеет простого решения типа (9), удовлетворяющего всем граничным условиям (3). Поэтому построим сначала общее решение системы (1):

$$u = \sum_{k=1}^6 C_k u_k e^{p_k s}, \quad w = \sum_{k=1}^6 C_k w_k e^{p_k s}, \quad (11)$$

где C_k — произвольные постоянные, а u_k и w_k связаны соотношением

$$(p_k^2 + (1 - \nu^2) \lambda) u_k - \nu p_k w_k = 0,$$

причем p_k удовлетворяют уравнению шестой степени

$$\mu^4 p^6 + (1 - \nu^2) \lambda \mu^4 p^4 + (1 - \lambda) p^2 + \lambda (1 - (1 - \nu^2) \lambda) = 0. \quad (12)$$

Пусть сначала $\lambda \neq 1$. Тогда это уравнение имеет два корня $p_k \sim 1$ ($k = 1, 2$). Для оставшихся четырех корней $p_k \sim \mu^{-1}$ ($k = 3, 4, 5, 6$),

причем, если $\lambda < 1$, все корни имеют отличную от нуля вещественную часть и этим корням соответствуют интегралы краевого эффекта. Если же $\lambda > 1$, два из корней p_k , ($k = 3, 4$) — чисто мнимые и им соответствуют осциллирующие интегралы. С различным поведением интегралов при $\lambda < 1$ и при $\lambda > 1$ связаны особенности спектра в этих областях.

Асимптотическое решение этой задачи содержится в [1]. В частности, оказывается, что при $\lambda < 1$ полная краевая задача регулярно вырождается в безмоментную задачу [2], в то время как при $\lambda > 1$ спектр состоит из двух частей. Уравнение

$$\sin bl = 0 \quad b^2 = \frac{\lambda(1 - (1 - \nu^2)\lambda)}{1 - \lambda}, \quad (13)$$

дает корни $b = n\pi/l$, совпадающие с собственными значениями безмоментной задачи, а уравнение

$$\cos(cl/\mu) = 0, \quad c^4 = \lambda - 1 \quad (14)$$

определяет дополнительные собственные значения

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{(2n+1)\pi\mu}{2l} \right)^4, \quad n = 1, 2, \dots,$$

аналога которым безмоментная задача не имеет. Заметим, что при $\lambda - 1 \mu^{4/3}$ приведенные формулы не верны для частот близких к точке сгущения следует использовать формулу (4.38) из [1].

Результаты, полученные по асимптотическим формулам, сравнивались с численными результатами, полученными с использованием метода ортогональной прогонки по Годунову. Вычислительные сложности возникают в окрестности точки сгущения частот, что объясняется как быстрой изменяемостью решений, так и высокой плотностью частот. Уменьшение шага интегрирования по s и увеличение точек, в которых применяется ортогонализация Грамма–Шмидта позволили увеличить точность вычисления частот. В частности, оказалось, что для достижения требуемой точности (5 знаков после запятой), интервал интегрирования следует разбить на 6 отрезков, на границе которых следует выполнить ортогонализацию, а на самих отрезках вести интегрирование с шагом 0,001.

В табл. 3 приведены значения первых 14 частот (λ) осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки в зависимости от величины толщины оболочки (μ). В качестве базового значения относительной толщины выбрано $h/R = 0,01$, тогда при $\nu = 0,3$ параметр тонкостенности $\mu = 0,055$.

Частоты вычисляются методом прогонки (Числ.) и по асимптотической формуле (4.38) из [1]. Большинство частот соответствуют квазипоперечным колебаниям. Выделенные частоты соответствуют квазипродольным колебаниям, они не описываются формулой (4.38). С уменьшением толщины частоты квазипоперечных колебаний монотонно уменьшаются и их плотность в окрестности 1 растет. Частоты соответствующие квазипродольным колебаниям зависят от толщины слабо и с уменьшением толщины стремятся (немонотонно) к соответствующим безмоментным частотам (4.26).

Таблица 3. Зависимость частоты колебаний от толщины оболочки

$\mu = 0,06$		$\mu = 0,055$		$\mu = 0,05$		$\mu = 0,04$		$\mu = 0$
Числ	(4.38)	Числ	(4.38)	Числ	(4.38)	Числ	(4.38)	(4.26)
0,8234	0,9355	0,8215	0,9340	0,8197	0,9325	0,8161	0,9296	0,8027
0,9830	0,9868	0,9821	0,9859	0,9813	0,9852	0,9798	0,9838	0,9749
0,9975	0,9984	0,9960	0,9968	0,9948	0,9956	0,9931	0,9938	0,9901
1,0077	1,0085	1,0041	1,0047	1,0014	1,0018	0,9980	0,9983	0,9946
1,0220	1,0230	1,0146	1,0152	1,0090	1,0094	1,0019	1,0021	0,9966
1,0427	1,0450	1,0298	1,0310	1,0197	1,0203	1,0067	1,0070	0,9977
1,0754	1,0774	1,0553	1,0540	1,0353	1,0361	1,0134	1,0137	0,9983
1,0884	—	1,0767	1,0864	1,0558	1,0583	1,0225	1,0229	0,9987
1,1310	1,1232	1,1028	—	1,0872	1,0886	1,0349	1,0354	0,9990
1,1818	1,1858	1,1283	1,1307	1,0921	—	1,0507	1,0520	0,9992
1,2727	1,2691	1,1934	1,1896	1,1341	1,1289	1,0726	1,0734	...
1,3627	1,3771	1,2606	1,2659	1,1784	1,1810	1,0880	—	1,0989
1,4872	—	1,3655	1,3629	1,2498	1,2472	1,1079	1,1005	...
1,5171	1,5144	1,4443	1,4840	1,3231	1,3299	1,1332	1,1344	1,5013

4. ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Интересно исследовать влияние граничных условий на спектр

собственных частот. Рассмотрим несимметричные граничные условия, при котором один конец оболочки жестко заделан (условия (2)), а второй конец оперт (3). В этом случае спектр частот безмоментной задачи определяется уравнением

$$\cos(bl) = 0. \quad (15)$$

В табл. 4 проведено сравнение 14 низших частот осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки при разных граничных условиях: жесткой заделки обоих краев (2)-(2), шарнирного опирания обоих краев (3)-(3) и условия, при котором один край заделан, а второй оперт (2)-(3). Очевидно, что при ослаблении граничных условий частота колебаний падает. В последнем столбце таблицы приведены значения безмоментных частот для оболочки с граничными условиями вида (2)-(3), к которым стремятся низшие частоты ($\lambda < 1$) при уменьшении μ . Характер поведения частот при $\lambda > 1$ представляет предмет дальнейшего изучения.

Таблица 4. Зависимость частоты колебаний от граничных условий

$\mu = 0,055$			$\mu = 0$
(2)-(2)	(2)-(3)	(3)-(3)	(2)-(3)
0.82150	0.2672	0	0.265517
0.98210	0.9524	0.8027	0.946925
0.99600	0.9879	0.975	0.985118
1.00410	0.9966	0.9906	0.992869.
1.01460	1.0023	0.9963	
1.02980	1.0106	1.0011	
1.05270	1.0232	1.0076	
1.07670	1.0419	1.0178	
1.10280	1.0686	1.0334	
1.12830	1.1031	1.0563	
1.19340	1.1289	1.0887	
1.26060	1.1637	1.133	
1.36550	1.2289	1.1919	
1.44430	1.3143	1.2682	

ЛИТЕРАТУРА

1. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твердого тела. Ижевск. Издат. рег. и стохаст. динамики. 2007.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77). С. 3–122.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ И ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ОТ ЕЕ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ

Доклад на семинаре 17 октября 2006 г.

А.В. МИХЕЕВ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается оболочка сферической формы из ортотропного материала на упругом основании, подвергнутая действию сил однородного сжатия и кручения. Варьируя параметры ортотропного материала оболочки, получена зависимость критической нагрузки и параметров волнообразования (величина вмятин и угол наклона) от соотношений модулей Юнга и коэффициентов сдвига в касательном и трансверсальном направлениях. Для удобства сравнительного анализа полученные результаты представлены как в графической, так и табличной формах.

**РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ
МЕТОДАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Доклад на семинаре 28 ноября 2006 г.

А.А. ХАРУНЖИЙ

РЕЗЮМЕ

Теория коммутирующих дифференциальных и разностных операторов зародилась в начале XX века с выявления того факта, что некоторые особые пары таких операторов порождают решения уравнения Кортвегера-де Фриза. Позже она развилась в подраздел теории нелинейных дифференциальных уравнений при этом в значительной степени используя аппарат топологии и римановой геометрии. Современными достижениями в этой области являются работы И.М. Кричевера и С. П. Новикова, в которых построены некоторые решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и высших рангов уравнений двумеризованной цепочки Тода. Доклад посвящен истории развития теории коммутирующих операторов, её достижениям и стоящим перед ней задачам, в том числе и задачам механики.

**Численные методы вычисления
Ляпуновских экспонент**

Доклад на семинаре 13 февраля 2007 г.

К.С. ИВАНОВ

РЕЗЮМЕ

Локальная неустойчивость (при глобальной ограниченности) основная особенность хаотических систем и мера чувствительности к начальным данным, каковым является характеристический показатель (ляпуновская экспонента) в некотором направлении — самый естественный индикатор хаотичности. Интерес представляет старший ляпуновский показатель, так как его положительность вдоль траектории, плотной в аттракторе. В докладе рассматриваются методы вычисления ляпуновских экспонент: метод Вольфа, заключающийся в непосредственном вычислении среднего экспоненциального роста вдоль опорной траектории; метод решения уравнения в вариациях, который близок к методу Вольфа, но вычисления преимущественно ведутся в линеаризованной системе: алгоритм Бенеттина, являющийся итерационным процессом, основанным на ортогонализации Грамма-Шмидта и позволяющий получить значения сразу всех ляпуновских экспонент и все вектора ляпуновского базиса и другие методы. В качестве примеров рассмотрены классические задачи нелинейной динамики (уравнение Лоренца, уравнение Чуа, уравнение Багулы и др.) причем, полученные разными методами результаты хорошо согласуются с классическими.

ОБ АВТОРАХ

Абакумов Павел Андреевич — окончил математико-механический факультет СПбГУ в 2007 г., получив диплом по специальности «Механика». Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов.

Анисимов Антон Борисович — окончил математико-механический факультет СПбГУ в 2005 г., получив диплом по специальности «Механика». В настоящее время аспирант СПбГУ. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов.

Атрощенко Елена Игоревна — выпускница математико-механического факультета СПбГУ. Имеет степени (с отличием) бакалавра и магистра по специализации «Механика. Прикладная математика». Автор одной опубликованной работы. Аспирантка СПбГУ и University of Waterloo (Canada). Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр и Prof. S. Potapenko.

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидроупругости СПбГУ, член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, автор многочисленных публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций и биомеханики.

Бестужева Алла Николаевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ПГУПС. Автор статей, посвященных задачам о волновых движениях жидкости в области переменной глубины, опубликованных в журналах «Океанология», «Прикладная математика и механика», «Прикладная математика и техническая физика» и др.

Думина Юлия Игоревна — выпускница математико-механического факультета СПбГУ (2006). Имеет степени бакалавра и магистра (с отличием) по специализации «Механика. Прикладная математика». В настоящее время аспирантка СПбГУ. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик.

Жигалко Евгений Фаддеевич — заведующий кафедрой прикладной математики ПГУПС, профессор, доктор физико-математических наук, автор многочисленных работ по вопросам гидромеханики и прикладной математики.

Иванов Денис Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, автор 10 статей и одного учебного пособия по вопросам устойчивости и динамики тонкостенных конструкций.

Иванов Кирилл Сергеевич — окончил математико-механический факультет СПбГУ в 2007 г., получив диплом по специальности «Механика». Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов.

Капранов Илья Евгеньевич — окончил магистратуру БГТУ-Военмеха в 2006г., аспирант 1го курса БГТУ-Военмеха, отмечен дипломом «Лучший доклад» на Всероссийской конференции по теплообмену (Москва, 2006). Научный руководитель — проф. В.Н. Емельянов.

Михеев Артем Валерьевич — выпускник математико-механического факультета СПбГУ. Имеет диплом по специализации «Математика». Окончил аспирантуру СПбГУ по специальности механика деформируемого твердого тела. Опубликовал 2 работы. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик

Наумова Наталья Владимировна — кандидат физико-математических, доцент кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, автор 16 статей и 3 учебных пособий по вопросам устойчивости и динамики тонкостенных конструкций.

Скрябин Илья Николаевич — магистр БГТУ-Военмеха. Научный руководитель — проф. В.Н. Емельянов.

Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, автор публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций.

Харунжий Александр Александрович — студент магистратуры математико-механического факультета СПбГУ. Окончил бакалавриат механико-математического факультета Новосибирского государственного университета по кафедре геометрии и топо-

логии. Занимался исследованиями в области теории коммутирующих дифференциальных операторов.. Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов.

Юшин Роман Юрьевич — окончил бакалавриат ПМ-ПУ и магистратуру математико-механического факультета СПбГУ, получив диплом магистра по специальности “Механика. Прикладная математика” по специализации “аэрогидроупругость” (2004). Направление научных исследований — нелинейные задачи теории пластичности. В настоящее время аспирант СПбГУ. Научный руководитель — доц. Г.В. Павилайнен.

Якимова Ирина Владимировна — аспирантка БГТУ-Военмеха. Окончила БГТУ-Военмех в 2005 г. Творческие интересы сосредоточены в области численного моделирования сложных движений сплошных сред. Автор ряда научных статей и докладов на конференциях. Научный руководитель — проф. В.Н. Емельянов.

Ясницкий Леонид Нахимович — доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Пермского государственного университета, председатель Пермского отделения Научного Совета РАН по методологии искусственного интеллекта. Автор печатных работ в области программирования, в т.ч. книг “Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред”, “Введение в искусственный интеллект”, “Интеллектуальное моделирование физических проблем” др.

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2006–2007 г. г.**

Миронов Андрей Николаевич — канд физ.-мат. наук,
СПбГУ, 2007. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр.

Лебедева Елена Александровна — канд техн. наук,
СПбГЭТУ, 2007. Научный руководитель — проф. П.И. Бегун.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>А. Б. Анисимов</i> Колебания конической оболочки с малым углом при вершине при разных граничных условиях	—
1. Введение	—
2. Постановка задачи	—
3. Асимптотика решения краевой задачи	—
4. Случай шарнирного опирания оболочки	—
5. Заделка и шарнирное опирание	—
6. Заделка и свободный край	—
7. Численный метод решения	—
8. Заключение	—
<i>Е. И. Атрощенко</i> Моделирование противоотслоечных операций в офтальмологии	—
1. Введение	—
2. Построение системы уравнений равновесия	—
3. Определение изменения объема оболочки	—
4. Заключение	—
<i>Ю. И. Думина</i> Устойчивость цилиндрических оболочек на упругом основании	—
1. Введение	—
2. Локальная устойчивость пологой оболочки на упругом основании	—
3. Устойчивость безмоментного напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки на упругом основании при внешнем давлении и осевом сжатии	—
4. Заключение	—
<i>Е. Ф. Жигалко</i> Некоторые опыты расчёта критических газодинамических процессов	—
<i>Р. Ю. Юшин</i> Упругопластический изгиб трансверсально-изотропных пластин с учетом эффекта разносопротивляемости	—
1. Введение	—
2. Три вида напряженных состояний	—

3. Расположение пластических зон в продольных сечениях	—
4. О возможности учёта эффекта SD материала при упругопластической изгибе круглой пластины. Основные соотношения	—
5. Зависимость между деформациями и напряжениями	—
6. Вывод уравнения равновесия и уравнений совместности деформаций при учете эффекта SD	—
7. Заключение. Анализ результатов расчета	—
И. Е. Капранов, И. Н. Скрабин Моделирование динамики плавающих объектов	—
1. Введение	—
2. Физическая постановка задачи	—
3. Аспекты вычислительного моделирования	—
4. Результаты расчетов	—
5. Заключение	—
С. М. Бауэр Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления	—
1. Введение	—
2. Основы аппланационной тонометрии	—
3. Математические модели аппланационной тонометрии	—
4. Заключение	—
А. Н. Бестужева Некоторые замечания о собственных функциях задачи волновых движениях жидкости в области переменной глубины	—
1. Введение	—
2. Собственные функции задачи	—
3. Задача Коши–Пуассона	—
4. Сравнительный анализ	—
5. О доказательстве теоремы разложения	—
6. О формуле разложения М. В. Келдыша	—
7. Заключение	—
Н. В. Наумова, Д. Н. Иванов Колебания прямоугольной пластины армированной периодически повторяющимися волокнами	—
1. Основные цели и задачи работы	—
2. Общая теория тонких пластин при конечных прогибах	—

3. Исследование частот и форм колебаний рассматриваемой пластины	—
4. Граничные условия	—
5. Численные результаты и выводы	—
5. Численные результаты и выводы	—
<i>И. В. Якимова</i> Двухфазные течения в проточных трактах энергоустановок	—
1. Введение	—
2. Соотношения математической модели	—
3. Вычислительное моделирование	—
4. Заключение	—
<i>П. А. Абакумов, А. Л. Смирнов</i> Анализ осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки	—
1. Постановка задачи	—
2. Колебания оболочки с шарнирно опертыми краями	—
3. Колебания оболочки с жестко заделанными краями	—
4. Зависимость частот от граничных условий	—
Доклады, не вошедшие в сборник	—
Об авторах	—

РЕФЕРАТЫ

УДК 534.1

А б а к у м о в П. А., С м и р н о в А. Л. Анализ осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Рассматриваются свободные осесимметричные колебания тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки. Для различных граничных условий проводится анализ частот, полученных с помощью асимптотических и численных методов и исследуется характер вырождения краевой задачи.

Библиогр. 5 назв. Ил. 1. Табл. 1.

УДК 534.1

А н и с и м о в А. Б. Колебания конической оболочки с малым углом при вершине // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Рассматриваются малые свободные колебания конической оболочки при различных граничных условиях. Предполагается, что угол при вершине конуса является малым параметром. Путем разложения неизвестных функций в ряд по степеням малого параметра получены приближенные формулы для частот и форм колебаний. Для трех вариантов граничных условий найден радиус эквивалентной цилиндрической оболочки, первая частота которой совпадает с первой частотой колебаний конической оболочки.

Библиогр. 7 назв. Ил. 4. Табл. 0.

УДК 539.3, 51-76

А т р о щ е н к о Е. И. Моделирование противоотслоечных операций в офтальмологии // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Построена математическая модель циркуляжа широкой силиконовой лентой с учетом эллиптичности формы глаза и рассчитаны численные значения изменения внутриглазного давления и объема.

Библиогр. 7 назв. Ил. 5. Табл. 3.

УДК 539.3, 51-76

Б а у э р С. М. Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Обсуждаются две математические модели аппланационных методов измерения внутриглазного давления. В обеих моделях глаз рассматривается как две сопряженные оболочки с разными механическими и геометрическими параметрами (роговица и склера). В первой аналитической модели роговица рассматривается как мягкая безмоментная оболочка, склера — как сферический или эллиптический сегмент. Обе оболочки рассматриваются как изотропные. Во второй конечно-элементной модели роговица и склера рассматриваются как два трансверсально-изотропных сферических сегмента. Библиогр. 21 назв. Ил. 10. Табл. 0.

УДК 532.592, 532.592

Б е с т у ж е в а А Н. Собственные функции задачи о волновых движениях жидкости // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Рассматривается волновое движение идеальной несжимаемой жидкости в клиновидной области, ограниченной свободной поверхностью и плоским наклонным дном. Волновое движение вызывается различного вида возмущениями. Решение строится с помощью собственных функций. Статья посвящена анализу результатов исследований собственных функций в задачах о волновых движениях жидкости над наклонным дном, проводимых докладчиком и другими исследователями.

Библиогр. 10 назв. Ил. 10. Табл. 0.

УДК 539.3

Д у м и н а Ю. И. Устойчивость цилиндрических оболочек на упругом основании // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Рассматривается устойчивость тонких цилиндрических оболочек на упругом основании с различной формой срединной поверхности, находящихся в различных условиях нагружения, с использованием классической теории оболочек Кирхгофа–Лява.

Библиогр. 3 назв. Ил. 7. Табл. 0.

УДК 532.517.2

Ж и г а л к о Е.Ф. Некоторые опыты расчёта критических газодинамических процессов // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

В работе обсуждаются особенности результатов, полученных в расчёте двух существенно неоднородных газодинамических процессов — течения, индуцированного пластиной, приведенной импульсивно в движение и сверхзвукового обтекания тела с детерминированным отрывом. Применена численная схема типа “крупных частей”, не обеспечивающая в этих случаях равномерную аппроксимацию.

Библиогр. 4 назв. Ил. 1. Табл. 0.

УДК 532.322

К а п р а н о в И.Е., С к р я б и н И.Н. Моделирование динамики плавучих объектов // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

В работе рассматриваются современные вычислительные подходы, реализованные в инженерных пакетах для решения задач расчета конфигурации свободной поверхности и динамики плавучего объекта, погруженного в тяжелую жидкость. Приведены результаты моделирования динамики буя, обладающего положительной плавучестью при погружении и всплытии.

Библиогр. 3 назв. Ил. 7. Табл. 0.

УДК 539.3

Н а у м о в а Н.В., И в а н о в Д.Н. Колебания периодически армированной пластины // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Построена математическая модель среды, локальные свойства которой резко меняются, и введены усредненные характеристики такой среды. Исследуются колебания неоднородной пластины, состоящей из периодически повторяющейся структуры (ячейки). Ячейка представляет собой параллелепипед, в центре которого располагается цилиндрическое волокно. Рассматривается влияние различного количества волокон и их расположения на частоты и формы собственных колебаний данной пластины. Проводится сравнение частот и форм собственных колебаний многоволоконистой пластины, полученных в результате применения различных методов расчета.

Библиогр. 3 назв. Ил. 3. Табл. 6.

УДК 539.3

Ю ш и н Р.Ю. Упругопластический изгиб трансверсально-изотропных пластин // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Характерной особенностью изгиба круговой пластинки с учетом разнородности материала при сжатии и растяжении является нарушение симметрии развития пластических областей сверху и снизу пластинки.

Библиогр. 6 назв. Ил. 5. Табл. 0.

УДК 629.7.036.54

Я к и м о в а И.В. Двухфазные течения в проточных трактах энергоустановок // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Проводится исследование внутренних двухфазных течений в околосопловом пространстве. Рассматриваются предсопловые объемы с утопленным во внутреннюю полость входом в сопло. Используются криволинейные согласованные с границами области системы координат и порожденные ими криволинейные разностные сетки. Отличительной чертой данной работы являются детальное описание всех особенностей геометрии расчетной области, учет реального распределения частиц по размерам и их представительства в потоке, учет турбулентности внутреннего течения, а также реальные схемы подвода газа в систему от массоподводящих поверхностей, моделирующих горение. Созданы эффективные вычислительные схемы для массовых траекторных расчетов частиц в построенном газовом поле.

Библиогр. 4 назв. Ил. 4. Табл. 0.

УДК 539.3

Я с н и ц к и й Л.Н. Удержаться “на плечах гигантов” // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2006–2007 гг. С. 00–00.

Предлагаемая статья впервые была опубликована в январском выпуске 2005 г. пермской газеты “Новый компаньон” под названием “По ком звонит ANSYS, или Почему так часто стали падать самолеты, взрываться ракеты, рушиться здания”. Статья вызвала живой интерес, острую критику и длительную дискуссию в сети Интернет. В сборнике статья публикуется с сокращениями, исправлениями и дополнениями, сделанными автором по результатам Интернет-дискуссии и многочисленных обсуждений.

Библиогр. 5 назв. Ил. 0. Табл. 0.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ».**

2006–2007 гг.

Под ред. *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейцторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать 24.03.2006. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,9. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41