

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2005–2006 гг.

Под редакцией *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2006

ББК 22.25
Т78

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. И. Сливкер* (Гипростроймост, ПГУПС)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

**Труды семинара «Компьютерные методы в ме-
Т78 ханике сплошной среды». 2005–2006 гг. /** Под ред.
А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. — СПб.: Изд-во С.-Петерб.
ун-та, 2006. — 136 с.
ISBN 5-288-03941-0

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

© А. Л. Смирнов, Е. Ф. Жигалко,
сост., 2006

© Издательство С.-Петербургского
университета, 2006

ISBN 5-288-03941-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой сборник результатов исследований группы молодых научных работников. Заметная глазу концентрированная общность этих работ является характерной отличительной особенностью сборника. Причем таковое объединение проявляется сразу в нескольких аспектах: в тематической общности, в методологической общности, в организационной общности (результаты всех работ доложены и обсуждены в одном и том же месте), и даже в возрастной общности авторов.

В сущности все 9 статей этого сборника (и 8 статей первого выпуска сборника трудов семинара) посвящены численным методам в решении задач устойчивости равновесия и свободных колебаний тонкостенных конструкций, т. е. в прикладных проблемах механики твердого деформируемого тела. Мы не будем здесь останавливаться на постабстрактном обсуждении работ сборника, хотя многие из них заслуживают и персонального внимания, а сосредоточимся на сборнике в целом.

Объединяющим началом всех работ служит гармоничное сочетание асимптотических методов и численных процедур. Надо сказать, что по сложившейся практике, ставшей уже почти традицией, большинство распространенного инженерного программного обеспечения основано на прямом применении метода конечных элементов (МКЭ). Такое превалирующее значение, придаваемое МКЭ, ставшее заметным уже и в педагогической практике, несет определенные издержки, вызывающие негативные последствия. В инженерных кругах бытует достаточно распространенное мнение, что МКЭ чуть ли не всесилен, а вместе с его изобретением и победным шествием на ниве разработки программного обеспечения остальные методы и подходы должны уступать дорогу и считаться чуть-ли

не анахронизмом. Понятно, что многие здравомыслящие ученые, в том числе и те, кто внес существенный вклад в развитие самого МКЭ, далеки от подобной, можно сказать недальновидной, точки зрения.

Одно из главных достоинств предлагаемого к опубликованию сборника научных работ заключается в том, что в нем опосредованно, но ясно и аргументированно этот взгляд опровергается. Более того, убедительно показано, что разумное и изобретательное сочетание асимптотических (т.е. в определенной мере аналитических) методов и чисто численных по типу МКЭ при использовании достоинств каждого из них способно породить вполне конкурентоспособные методы расчетов. Поэтому публикация настоящей книги не только полезна обнаружением конкретных научных результатов, но и поучительна в более широком аспекте.

Надо сказать, что руководители семинара, под редакцией которых и подготовлен настоящий сборник научных работ, по существу предприняли важную, а для нынешней ситуации в России тем более актуальную, благородную попытку создания специализированной научной школы, нацеленной в первую очередь на воспитание и поддержку научной молодежи. Нет сомнения в том, что выпуск в свет научных трудов семинара послужит серьезным стимулом как для продолжения работы семинара, так и для приглашения к участию в нем новой молодой поросли, в которой столь остро нуждается российская наука.

Рекомендуя настоящий сборник к опубликованию, хочу одновременно поздравить его составителей А.Л. Смирнова и Е.Ф. Жигалко с успешным завершением важного этапа в работе организуемой ими научной школы в форме семинара для молодых ученых Санкт-Петербурга.

В.И. Сливкер, профессор, доктор технических наук

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ОФТАЛЬМОЛОГИИ

Е. В. Краковская

Доклад на семинаре 25 октября 2005 г.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются две задачи о напряженно-деформированном состоянии сопряженных сферических оболочек. Проводится сравнение численных и аналитических решений задачи о прогибе диска зрительного нерва, находящегося под действием внутреннего давления в сопряжении со склерой и отдельно от нее. Оболочки рассматриваются однородные и изотропные.

Вторая задача моделирует напряженно-деформированное состояние роговицы глаза в сопряжении со склерой под действием внутреннего давления. Оболочки считаются изотропными и однородными. Проводится анализ изменения напряженно-деформированного состояния роговицы после рефракционных операций, меняющих толщину и кривизну роговицы¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются две простые модели разных офтальмологических процессов, которые объединены единым механическим подходом. Глаз человека представляет собой сложную структуру. Внешняя оболочка глаза — корнеосклеральная оболочка — состоит из роговицы и склеры, причем склера занимает 93% оболочки, поэтому в задачах, связанных с изменением объема глазного яблока под действием внутреннего давления, биомеханические свойства склеры играют решающую роль, и в таких задачах обычно оболочка глаза рассматривается как сферическая [1].

Однако в некоторых случаях, когда важно понять, например, как изменяется напряженно-деформированное состояние внешней оболочки глаза после рефракционных операций, меняющих толщи-

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00258 и № 04-01-00257.

ну или кривизну роговицы, необходимо учесть, что в передней части фиброзная капсула глазного яблока переходит в более плотную роговую оболочку (рис. 1). В этом случае глазное яблоко лучше моделировать сопряженными по периметру оболочками — склерой и роговицей.

Недалеко от заднего полюса глаза через склеру выходит зрительный нерв. Участок склеры, через который проходит зрительный нерв, называют решетчатой пластинкой. Сплошного дефекта склеры здесь нет, слой склеры становится намного тоньше и появляется множество мелких отверстий, через которые проходят пучки зрительного нерва, таким образом, механические свойства этой небольшой области существенно отличаются от механических свойств склеры. Решетчатая пластинка играет важную роль в балансе внутриглазного и внутричерепного давления (ВГД и ВЧД). Известно, что атрофия зрительного нерва при глаукоме происходит именно в области решетчатой пластинки глаза в результате ее деформации, если отношение ВГД и ВЧД увеличивается по сравнению с нормальным для конкретного пациента значением. Таким образом, задача о напряженно-деформированном состоянии решетчатой пластинки также может быть рассмотрена как задача о деформировании сопряженных оболочек, склеры и решетчатой пластинки.

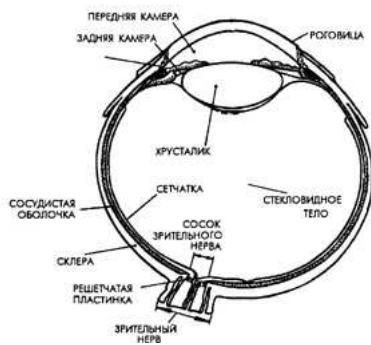


Рис. 1. Схема глаза.

В данной работе изучается влияние деформации склеры на величину прогиба решетчатой пластинки. В задаче о сопряженных оболочках решетчатая пластинка считается полой оболочкой того же радиуса, что и склера, но ее толщина примерно в 5 раз меньше толщины склеры. Решетчатая пластинка предполагается однородной и изотропной. В силу разреженности модуль упругости решетчатой пластинки значительно меньше модуля упругости склеры и можно положить $E_1/E_2 = 10$ (здесь E_1 — модуль упругости склеры, E_2 — модуль упругости решетчатой пластинки). Ранее подобная задача рассматривалась в прикладном пакете ADINA [2]; представляет интерес сравнение аналитических и численных результатов.

Задача о напряженно-деформированном состоянии двух сопряженных по окружности сферических сегментов, находящихся под действием нормального внутриглазного давления, позволяет оценить максимальный прогиб и изменение запаса прочности роговицы после рефракционных операций LASIK (laser in situ keratomileusis, то есть лазерный кератомилез) и ФПК (фоторефрактивная кератэктомия), проводимых по поводу миопии и миопического астигматизма. В результате рефракционных операций изменяется толщина и кривизна роговицы. В работе [3] вопрос о напряженно-деформированном состоянии роговицы рассматривался в предположении, что склера является значительно более жесткой, чем роговица. Таким образом, роговица моделировалась как жестко зацементированная полая оболочка. Однако в литературе имеются разные данные о соотношении модулей упругости склеры и роговицы. В работе [4] полагается, что $E_1/E_2 = 5$, а в работе [5] в результате экспериментов получено, что $E_1/E_2 = 3$. Здесь E_1 — модуль упругости склеры, E_2 — модуль упругости роговицы. В данной работе задача рассматривается при различных отношениях E_1/E_2 .

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

2.1. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки

Напряженно-деформированное состояние изотропной однород-

ной оболочки может быть описано уравнениями В. В. Новожилова [6] в сферических координатах (φ — угол, образуемый нормалью к срединной поверхности с осью оболочки, θ — угол, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге (рис. 2)). В случае осесимметричной деформации дифференциальные уравнения в комплексных усилиях для сферической оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{N}_1}{R} + \frac{\tilde{N}_2}{R} - ic\Delta\tilde{N} &= q, \\ \frac{1}{R} \frac{d\tilde{N}_1}{d\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R} (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) + \frac{ic}{R^2} \frac{d\tilde{N}}{d\theta} &= 0, \\ \tilde{N} &= \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2, \\ \tilde{N}_1 &= N_1 - \frac{i}{c} \frac{M_2 - \mu M_1}{1 - \mu^2}, \quad \tilde{N}_2 = N_2 - \frac{i}{c} \frac{M_1 - \mu M_2}{1 - \mu^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}$; q — ВГД, $\Delta(\dots) = \frac{1}{R^2} \frac{d^2(\dots)}{d\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2} \frac{d(\dots)}{d\theta}$ — оператор Лапласа для нашего случая; N_1, N_2 — усилия; M_1, M_2 — моменты, возникающие в оболочке; h, R, μ — толщина, радиус, коэффициент Пуассона оболочки соответственно.

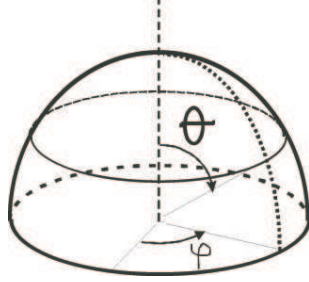


Рис. 2. Сферическая оболочка.

Решение системы (1) для склеры как незамкнутой оболочки, полученное методом асимптотического интегрирования [6], имеет

вид (2):

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \sqrt[4]{3(1-\mu_1^2)} \sqrt{\frac{R_1}{h_1}} (\theta - \theta_0), \quad c_1 = \frac{h_1}{\sqrt{12(1-\mu_1^2)}}, \\
 N_1^{(1)} &= -\sqrt{\frac{c_1}{2R_1}} \operatorname{ctg} \theta ((A-B) \cos \beta_1 - (A+B) \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \frac{qR_1}{2}, \\
 N_2^{(1)} &= (A \cos \beta_1 - B \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \frac{qR_1}{2}, \\
 M_2^{(1)} &= \mu_1 M_1^{(1)}, \\
 M_1^{(1)} &= -c_1 (B \cos \beta_1 + A \sin \beta_1) e^{-\beta_1}, \\
 Q_1^{(1)} &= -\sqrt{\frac{c_1}{2R_1}} ((A-B) \cos \beta_1 - (A+B) \sin \beta_1) e^{-\beta_1}, \\
 w^{(1)} &= \frac{R_1}{E_1 h_1} (A \cos \beta_1 - B \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \frac{R_1^2 q (1-\mu_1)}{2E_1 h_1}, \\
 u^{(1)} &= C \sin \theta, \\
 \vartheta^{(1)} &= \frac{1}{E_1 h_1} \sqrt{\frac{R_1}{2c_1}} ((A+B) \cos \beta_1 + (A-B) \sin \beta_1) e^{-\beta_1},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где θ_0 — угол, определяющий край оболочки; h_1, E_1, R_1, μ_1 — толщина, модуль упругости, радиус, коэффициент Пуассона оболочки соответственно; A, B, C — константы интегрирования, причем C фиксирует начало отсчета осевого смещения оболочки. В нашем случае константа $C = 0$.

2.2. Напряженно-деформированное состояние пологой сферической оболочки

В задаче о напряженно-деформированном состоянии сопряженных сферических оболочек вторая сопряженная со склерой оболочка (роговица или решетчатая пластинка) рассматривается как пологая оболочка.

В этом случае r и φ полярные координаты (рис. 3). Используя уравнения теории пологих оболочек в комплексной форме, приведенные А. А. Назаровым [7], можно получить дифференциальное уравнение (3) для комплексной функции напряжений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^4} \Delta_\alpha^2 \sigma + \frac{i4f\sqrt{3(1-\mu_2^2)}}{k^2 h_2} \Delta_\alpha \sigma &= -\frac{q}{D}, \\
k^2 &= \frac{h_2}{4f\sqrt{3(1-\mu_2^2)}}, \quad f = \frac{1}{2R_2}, \\
D &= \frac{E_2 h_2^3}{12(1-\mu_2^2)}, \\
\Delta_\alpha(\cdot) &= \frac{d^2(\cdot)}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d(\cdot)}{d\alpha},
\end{aligned} \tag{3}$$

где D — жесткость на изгиб; Δ_α — оператор Лапласа; q — равномерно распределенное давление, в нашем случае с обратным знаком (ВГД). $\sigma = w + i\frac{2\sqrt{3(1-\mu_2^2)}}{E_2 h_2} F$ — комплексная функция (где F — функция напряжения, w — прогиб оболочки); E_2 , h_2 , R_2 , μ_2 — модуль упругости, толщина, радиус и коэффициент Пуассона оболочки соответственно; α — безразмерная переменная ($r = k\alpha$).

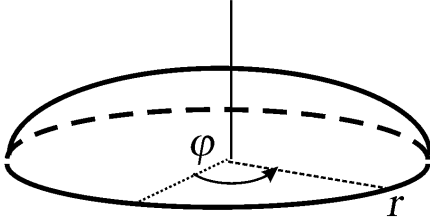


Рис. 3. Пологая сферическая оболочка.

Решение системы (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
N_1^{(2)} &= \frac{q}{4f} + \frac{2fE_2 h_2}{\alpha} (B_1 I_1' + A_1 I_2'), \\
N_2^{(2)} &= \frac{q}{2f} - N_1^{(2)} - 2fE_2 h_2 (A_1 I_1 + B_1 I_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1^{(2)} &= \frac{D}{k^2} \left(A_1 \left(I_2 + \frac{1-\mu_2}{\alpha} I_1' \right) - B_1 \left(I_1 - \frac{1-\mu_2}{\alpha} I_2' \right) \right), \\
 M_2^{(2)} &= \frac{D(1+\mu_2)}{k^2} (A_1 I_2 - B_1 I_1) - M_1^{(2)}, \\
 Q_1^{(2)} &= \frac{D}{k^3} (A_1 I_2' - B_1 I_1'), \\
 w^{(2)} &= C_1 + A_1 I_1 + B_1 I_2, \\
 u^{(2)} &= \frac{(1-\mu_2)kq\alpha}{4fE_2h_2} + 2fk(1+\mu_2) \left(\frac{C_1}{1+\mu_2} \alpha + A_1 I_2' - B_1 I_1' \right), \\
 \vartheta^{(2)} &= -\frac{1}{k} \frac{dw^{(2)}}{d\alpha} + \frac{u^{(2)}}{R_2},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где I_1, I_2, I_1', I_2' — значения действительной, мнимой составляющей функций Бесселя нулевого порядка и их производные соответственно.

2.3. Условия сопряжения

На линии сопряжения оболочек выполняются шесть условий непрерывности перемещений, момента, усилий и угла поворота [8]:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= u^{(2)} \cos \gamma - w^{(2)} \sin \gamma, \\
 N_1^{(1)} &= N_1^{(2)} \cos \gamma - Q_1^{(2)} \sin \gamma, \\
 Q_1^{(1)} &= Q_1^{(2)} \cos \gamma + N_1^{(2)} \sin \gamma, \\
 w^{(1)} &= w^{(2)} \cos \gamma + u^{(2)} \sin \gamma, \\
 M_1^{(1)} &= M_1^{(2)}, \quad \vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)},
 \end{aligned} \tag{5}$$

здесь γ — угол между касательными к оболочкам 1 и 2. Индекс 1 относится к склере, 2 — к роговице или решетчатой пластинке (рис. 4).

Третье уравнение для усилий выполняется по умолчанию. Для определения неизвестных коэффициентов интегрирования A, B, A_1, B_1, C_1 решается система (5) совместно с (2) и (4). В точке сопряжения используется формула перехода

$$r = R_2 \sin \varphi, \quad \varphi_0 = \arcsin \left(\frac{R_1}{R_2} \sin \theta_0 \right),$$

где φ_0, θ_0 — углы, определяющие края оболочек в точке сопряжения.

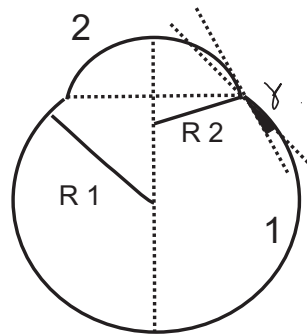


Рис. 4. Сопряженные оболочки.

3. ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНКИ

Приведем решения для задачи о напряженно-деформированном состоянии сопряженных оболочек — склеры и решетчатой пластинки. На систему оболочек действует ВГД. Будем рассматривать склеру как незамкнутую изотропную однородную сферическую оболочку, для описания ее напряженно-деформированного состояния используется система (2). Решетчатая пластинка рассматривается как однородная изотропная пологая оболочка, ее поведение описывается системой (4). Склера и решетчатая пластинка одного радиуса кривизны, поэтому в условиях сопряжения (5) угол между касательными к оболочкам $\gamma = 0$.

Приведем результаты расчетов при следующих параметрах: среднее внутриглазное нормальное давление $q = 15$ мм рт. ст., радиус основания решетчатой пластинки $a = 1$ мм, модуль упругости $E_2 = 1.43 \times 10^6$ Н/м², толщина пластинки $h_2 = 0.25$ мм. Коэффициент Пуассона и радиус кривизны для склеры и решетчатой пластинки: $\mu = 0.45$ и $R = 12$ мм. Модуль упругости склеры, как уже отмечалось, принимается в 10 раз больше модуля упругости решетчатой пластинки, толщина склеры $h_1 = 1$ мм.

Прогиб в центре решетчатой пластинки $w_3 = 13.652 \times 10^{-3}$ мм.

На рис. 5 представлены графики зависимости прогиба и усилий

сопряженных оболочек от угла оболочки θ .

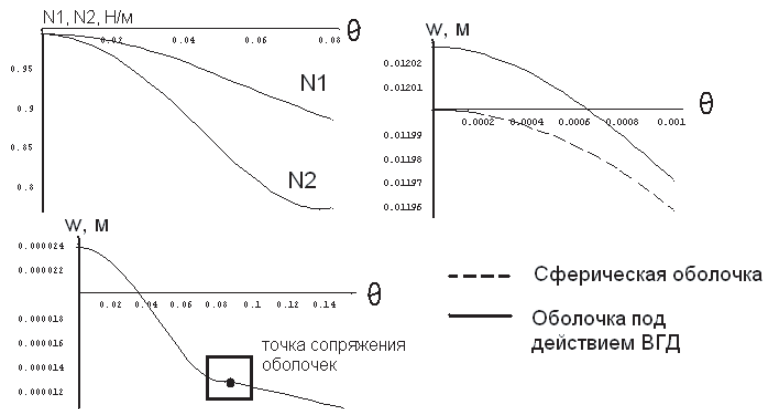


Рис. 5. Графики усилий и прогиба сопряженной сферической оболочки.

При удалении от точки сопряжения решение становится безмоментным. Изменение радиуса склерального кольца, как и ожидалось, на порядок меньше прогиба: $r = \Delta_x = w^{(2)} \sin \theta_0 = 1.13767 \times 10^{-3}$ мм.

Для оценки влияния склеры на решетчатую пластинку глаза решим задачу о напряженно-деформированном состоянии решетчатой пластинки как пологой оболочки с жесткой заделкой. Условия на концах оболочки имеют вид: $u|_{r=\alpha} = 0, w|_{r=\alpha} = 0, w'|_{r=\alpha} = 0$. Максимальный прогиб пологой оболочки в центре решетчатой пластинки $w_1 = 13.052 \times 10^{-3}$ мм.

На рис. 6 представлена зависимость прогиба и усилий от угла θ .

Сравним ранее полученные решения задачи с прогибом в центре решетчатой пластинки как пластины с жестким закреплением: $w_2 = \frac{q(a-r)^4}{64D}$. В табл. 1 представлены значения прогибов решетчатой пластинки с жесткой заделкой, представленной как полая оболочка w_1 и пластина w_2 , а также прогиб решетчатой пластинки, находящейся в сопряжении со склерой w_3 . Также в табл. 1 приведены изменения радиуса склерального кольца Δr для различных

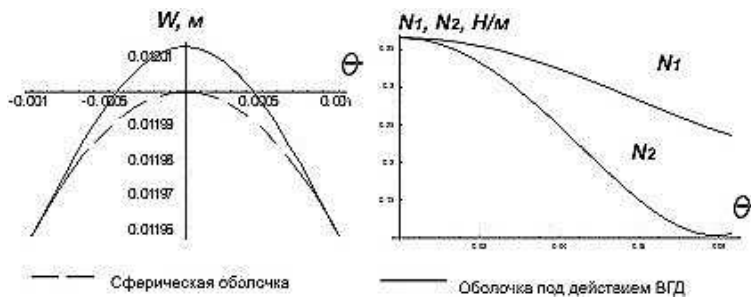


Рис. 6. Графики усилий и прогиба пологой сферической оболочки.

величин ВГД.

Таблица 1. Прогобы сферической оболочки (асимптотические методы)

q , мм рт.ст.	15	30	40	50	60	80
$w_1, 10^{-3}$ мм	13.05	26.1	34.8	43.05	52.21	69.61
$w_2, 10^{-3}$ мм	13.38	26.76	35.68	44.6	53.53	71.36
$w_3, 10^{-3}$ мм	13.65	27.3	36.4	45.51	54.61	72.8
$\Delta r, 10^{-3}$ мм	1.13	2.27	3.03	3.79	4.55	6.06

В табл. 2 представлены результаты аналогичных задач с иными параметрами оболочек, которые использовались в работе [2]. Были рассмотрены две задачи о деформации составных оболочек. В первом случае предполагалось, что решетчатая пластинка плоская ($w_1, \Delta r_1$), во втором — что пластина слегка выпуклая ($w_2, \Delta r_2$), радиусы кривизны пластины и сферы совпадают. Коэффициент Пуассона для двух сопряженных оболочек принимается $\mu = 0.4$, радиус основания решетчатой пластинки $a = 0.75$ мм, толщина решетчатой пластинки $h_2 = 0.2$ мм.

Из табл. 1 и 2 видно, что изменение радиуса склерального кольца на порядок меньше максимального прогиба решетчатой пластинки. Значения прогиба решетчатой пластинки во всех случаях близки, как и предполагалось.

Таблица 2. Прогибы сферической оболочки (асимптотические методы) из [2]

q , мм рт.ст.	15	30	40	50	60	80
$w_1, 10^{-3}$ мм	8.61	17.21	22.94	28.68	34.4	45.89
$w_2, 10^{-3}$ мм	8.71	17.42	23.22	29.03	34.84	46.45
$w_3, 10^{-3}$ мм	9.06	18.13	24.17	30.2	36.26	48.35
$\Delta r, 10^{-3}$ мм	0.566	1.133	1.51	1.88	2.26	3.02

В табл. 3 приведены результаты, полученные в прикладной программе ADINA [2].

Таблица 3. Прогибы сферической оболочки (программа ADINA)

q , мм рт.ст.	15	30	40	50	60	80
$w_1, 10^{-3}$ мм	8.8	17.5	23.4	29.2	35	46.7
$w_2, 10^{-3}$ мм	8.5	16.9	22.6	28.2	33.9	45.2
$\Delta r_1, 10^{-3}$ мм	0.63	1.25	1.67	2.09	2.50	3.33
$\Delta r_2, 10^{-3}$ мм	0.62	1.25	1.66	2.08	2.49	3.32

Как видно из оценки табл. 2 и 3, различие в результатах прогиба составляет от 6.18 до 6.78% (сравнение задач о сопряженных оболочках для численного и аналитического методов), что является не существенным. Различия в изменениях радиуса склерального кольца более значимы (9.3–10.1%), но порядок полученных результатов совпадает, что подтверждает корректность результатов, найденных ранее при помощи прикладного пакета и полученных аналитическим методом.

4. ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ РОГОВИЦЫ В СОПРЯЖЕНИИ СО СКЛЕРОЙ

Аналогично рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии сопряженных оболочек, склеры и роговицы.

Считаем, что склера изотропная, однородная сферическая оболочка с радиусом кривизны $R_1 = 11$ мм, толщиной $h_1 = 1$ мм, модулем упругости $E_1 = 14.3$ МПа, коэффициентом Пуассона $\mu_1 =$

0.4. Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии оболочки при повышенном внутриглазном давлении. Пусть ВГД 40 мм рт.ст. Задача рассматривается для разных значений отношений модулей упругости роговицы и склеры E_1/E_2 . Напряженно-деформированное состояние склеры, как и раньше, описывает система (2). Примем толщину роговицы $h_2 = 0.52$ мм, радиус кривизны $R_2 = 8$ мм, коэффициент Пуассона $\mu_2 = 0.5$. Роговица рассматривается как пологая оболочка с радиусом, отличным от склеры. Напряженно-деформированное состояние роговицы описывается системой (4), в точках сопряжения оболочек выполняются условия непрерывности (5), где угол γ между касательными к оболочкам отличен от нуля. При расчете прогиб роговицы в центре оболочки $w = 13.052 \times 10^{-3}$ мм.

При удалении от точки сопряжения решение становится безмоментным. Графики прогиба и усилий оболочек в зависимости от угла оболочки θ представлены на рис. 7.

При операции LASIK меняется толщина роговицы, изменение толщины зависит от степени коррекции зрения. Предположим, что толщина роговицы уменьшается на 0.1 мм с 0.52 до 0.42 мм. В этом случае расчеты показывают, что максимальный прогиб роговицы под действием ВГД $w = 130 \times 10^{-3}$ мм.

После операции ФРК изменяются радиус кривизны и толщина роговой оболочки. Предположим, что радиус оболочки уменьшается с 8 до 7 мм, толщина увеличивается до 0.6 мм, а остальные параметры оболочек сохраняют свои значения. В данной постановке задачи максимальный прогиб роговицы принимает значение $w = 68.28 \times 10^{-3}$ мм.

Выясним, как меняется коэффициент запаса прочности после операции LASIK в этом случае. Основные растягивающие напряжения роговицы при воздействии на нее равномерно распределенного ВГД (q): $\sigma_p = \frac{qR_2}{2h_2}$.

Изгибающее усилие рассчитывается при максимальном моменте, возникающем в оболочке: $\sigma_{u3} = \frac{6M_{max}}{h_2^2}$. По сумме напряжений σ_p и σ_{u3} можно оценить запас прочности роговицы: $\eta = \frac{\sigma_*}{\sigma_p + \sigma_{u3}}$.

Разрушающие напряжения для роговицы лежат в диапазоне $\sigma_* = 5.38 \div 9.39 \times 10^6$ Н/м².

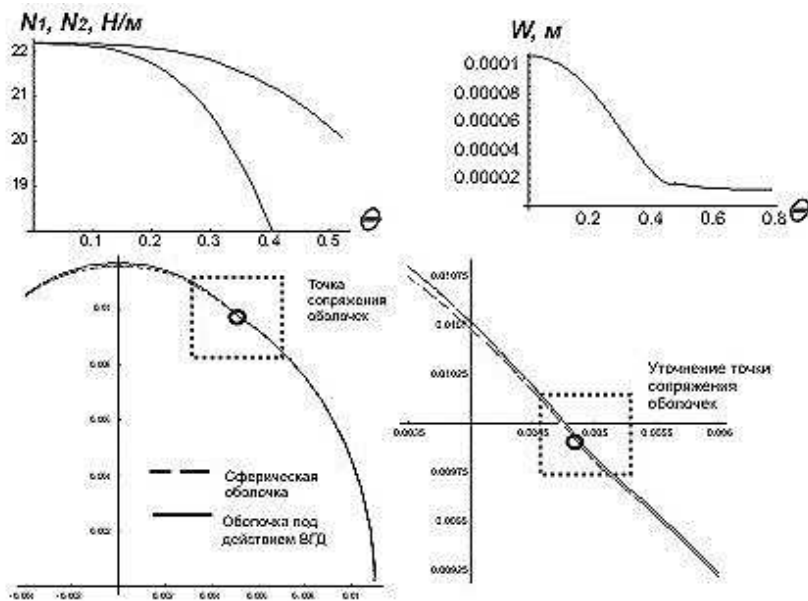


Рис. 7. Графики прогиба и усилия сопряженных склеры и роговицы (под действием ВГД).

На рис. 7 приведены графики зависимости функции прогиба от модуля упругости и толщины роговицы под действием повышенного ВГД 40 мм рт.ст. до и после операции LASIK ($h_1 = 0.52$ мм, $h_1 = 0.42$ мм).

В табл. 4 приведены прогибы роговицы в зависимости от модуля упругости и толщины оболочки под действием повышенного ВГД 40 мм рт.ст. до и после операции LASIK, причем прогибы $w_{max}^{(2)}$ имеют размерность 10^{-3} мм, а напряжения $\sigma_{из}$ — 10^5 Па.

Из табл. 4 видно, что при уменьшении значения модуля упругости роговой оболочки ее коэффициент запаса прочности снижается, подобный результат наблюдается и при уменьшении значения толщины оболочки. Чем больше толщина и модуль упругости роговицы, тем меньше прогиб оболочки под действием ВГД.

Таблица 4. Прогибы роговицы под действием ВГД

Толщина	$h = 0.52$ мм			$h = 0.42$ мм			$\frac{\eta_1}{\eta_2}$
	$w_{\max}^{(2)}$	σ_{u3}	η_1	$w_{\max}^{(2)}$	σ_{u3}	η_2	
$E_2 = E_1/10$	216	0.505	58.72	263	0.534	51.64	1.137
$E_2 = E_1/5$	106	0.468	61.25	130	0.506	53.02	1.155
$E_2 = E_1/3$	63	0.428	64.19	77	0.475	54.71	1.173

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче о напряженно-деформированном состоянии решетчатой пластинки сравнение результатов, полученных для сопряженных оболочек и упрощенных задач, показывает, что увеличение ВГД практически не меняет размеры склерального кольца, разница в значениях максимальных прогибов составляет 4.39–5.4%, а изменение радиуса склерального кольца существенно меньше прогибов и им можно пренебречь. Таким образом, деформацию решетчатой пластинки, по-видимому, можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки. Такой подход может помочь учесть возможные особенности строения решетчатой пластинки — ее анизотропию и неоднородность.

Из сравнения результатов аналитических (табл. 2) и численных решений (табл. 3) видно, что радиус склерального кольца на порядок отличается от прогиба, а различие в полученных прогибах не существенно (4.96–5.12%).

При рассмотрении задачи о напряженно-деформированном состоянии роговицы были найдены усилия и прогибы оболочки в сопряжении со склерой и рассмотрен коэффициент запаса прочности на основании ранее рассчитанных характеристик оболочки и полученных экспериментальных данных.

В табл. 4 приведено сравнение полученных характеристик для роговой оболочки при повышенном ВГД до и после операции LASIK. Изменение коэффициента запаса прочности после операции LASIK также можно увидеть в табл. 4. При уменьшении толщины роговицы на 0.1 мм, после операции LASIK, коэффициент запаса прочности в среднем снижается на 13.41%.

Все расчеты проведены в программе Mathematica 5.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.
2. *Вауер С.М., Романова А.А., Смирнов А.Л.* On formulation of the problem on deformation of the Lamina Cribrosa // Russian Journal of Biomechanics. Vol. 5. N3. 2001. P. 18–22.
3. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Федорченко М.В., Балашевич Л.И., Качанов А.Б.* Об изменении прочности роговицы после эксимерных лазерных операций по поводу миопии // Биомеханика глаза. Сб. трудов III семинара, Моск. НИИ глазных болезней им. Гельмгольца. М. 2002. С. 55–60.
4. *Srodka W., Asejczyk M., Kasprzak H.* Influence of IOP on the geometrical and biomechanical properties of the linear model of the eye globe-effect of the optical selfadjustment // Proceed. of 13 th Conference of the European Society of Biomechanics. 2002. P. 723.
5. *Iomdina E.N.* A comparative study of biomechanical properties of the cornea and sclera // Proceedings of the congress, European Society of Biomechanics, ESB 2004, abstract 394.
6. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
7. *Назаров А.А.* Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Л., 1966. 303 с.
8. *Филитов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 196 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

И. М. ЛАНДМАН

Доклад на семинаре 8 ноября 2005 г.

РЕЗЮМЕ

В работе представлен алгоритм построения формального асимптотического решения краевой задачи на примере задачи колебаний вращающихся тонких оболочек вращения. Этот алгоритм дает возможность решения системы уравнений для произвольной области параметров с помощью символьных вычислений. Алгоритм основывается на методе асимптотического интегрирования, разработанного Гольденвейзером, Лидским и Товстиком [2].

В данной работе основное внимание уделено применению этого алгоритма к построению асимптотического портрета задачи неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек. В частном случае невращающейся оболочки результат — асимптотический портрет — полностью согласуется с полученным ранее в [2]. Алгоритм построения формального асимптотического решения реализован при помощи прикладного пакета для математических вычислений «Mathematica 5.2». В качестве примера рассмотрена задача нахождения собственных частот в одной из найденных областей для случая шарнирного опирания оболочки¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория тонких оболочек является в настоящее время одним из наиболее актуальных разделов теории упругости, которому уделяется большое внимание, которое вызвано тем, что образованные из тонких оболочек конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что обеспечивает оболочкам широкое применение в самых разнообразных отраслях промышленности. Некоторые детали турбин и двигателей, компрессоров и насосов представляют собой вращающиеся пустотелые или заполненные тонкостенные

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

© И. М. Ландман, 2006

конструкции — «стаканы». Одной из важнейших задач являются исследования критических скоростей вращения таких конструкций, а также условий возникновения резонанса при воздействии внешних периодических сил. В обоих случаях необходимо знание спектра собственных частот колебаний конструкций. Указанные задачи стимулировали развитие исследований собственных частот колебаний вращающихся тонкостенных оболочек различной геометрии и при различных условиях.

Методы решения таких задач, в частности краевых задач теории колебаний и устойчивости оболочек, можно разделить на две группы: численные и аналитические. Среди последних выделяются асимптотические методы, основанные на разложениях решений в ряд по степеням малого параметра. Асимптотический метод позволяет получать приближенные аналитические решения сложных нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, и наиболее просто проанализировать влияние различных параметров на поведение тонкостенной конструкции. При этом точность решения увеличивается при стремлении одного из параметров (например, относительной толщины оболочки) к нулю.

Основной целью данной работы является разработка математического обеспечения, позволяющего алгоритмизировать проведение асимптотического анализа, в частности получение асимптотического портрета — пространственного разделения на области, внутри которых структура корней характеристических уравнений остается одинаковой. Построение асимптотического портрета существенно облегчает задачу нахождения собственных частот и форм колебаний. Фактически данное построение уже подразумевает найденные укороченные уравнения [5], откуда и находятся собственные частоты колебаний.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОРТРЕТ ЗАДАЧИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для описания задачи используются уравнения колебаний вращающихся тонких оболочек вращения в теориях типа Кирхгофа–Лява. Также сделаны следующие, достаточно общие для теории

оболочек предположения: материал оболочки изотропен и подчиняется обобщенному закону Гука, а деформации, перемещения и углы поворота настолько малы, что вторыми степенями этих величин можно пренебречь. Колебания и устойчивость упругих конструкций описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют следующий вид:

$$y'(s) = A(s; \mu, m, \lambda, \Omega)y(s), \quad (1)$$

где y — вектор-функция размером $n \times 1$, A — матрица размером $n \times n$, которая содержит несколько малых параметров, главный из которых — μ — относительная толщина оболочки, λ — частота колебаний, m — число волн по параллели (в окружном направлении), Ω — относительная угловая скорость вращения, s — независимая координата в меридиональном направлении. В зависимости от рассматриваемой задачи уравнение (1) может содержать и другие малые параметры, например P — приложенную внешнюю силу.

Иногда удобнее рассматривать одно уравнение n -го порядка:

$$\sum_{i=1}^n a_i(s; \mu, \lambda, m, \Omega)w^{(i)} = 0, \quad (2)$$

которое будет эквивалентно системе (1).

Асимптотическое решение уравнения (2) будем искать в первом приближении в виде

$$w = w_0 \exp\left(\int_{s_1}^s p(s)ds\right). \quad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получаем

$$\sum_{i=1}^N P_n(p; \lambda, m, \mu, \Omega, s) = \sum_{i=1}^N p^i \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i} \Omega^{\varepsilon_i} a_i(s) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что в (4) $a_i(s)$ не зависит от параметров p, μ, m, λ и Ω , но зависит от s , а i — это число членов в полиноме (4). Назовем изображающими точками точки $M_i = \{k_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i\}$ в пространстве $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$. Каждой точке приписан ее «вес» a_i , с которым данный член входит в полиномиальное уравнение.

В работе получено разбиение пространства параметров $(p, \mu, \lambda, m, \Omega)$ различной структуры корней характеристического уравнения с помощью средств вычислительной геометрии. Задача ограничивается случаем, когда асимптотические представления решения одинаковы внутри каждой из рассматриваемых областей интегрирования, и решения линейно независимы (нет точек поворота и кратных корней).

3. ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим метод исследования характеристического уравнения (4) для задач осесимметричных ($m = 0$) и неосесимметричных ($\Omega \neq 0$) колебаний вращающихся и невращающихся тонких цилиндрических оболочек. В случае задач с одним малым параметром, который будем называть одномерным, этот метод представляет собой метод Ньютона. В общем случае рассмотрения задач с произвольным числом параметров этот алгоритм дает возможность находить корни характеристического уравнения с помощью символьных вычислений. Параметрами для задачи колебаний вращающихся тонких цилиндрических оболочек являются относительная толщина оболочки μ , λ — частота колебаний, m — число волн в окружном направлении, Ω — угловая скорость вращения. В зависимости от рассматриваемой задачи уравнение может содержать и другие малые параметры. Основным малым параметром является относительная толщина оболочки μ . Порядки остальных малых параметров соотносятся с μ следующим образом: $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$, $m = m_0 \mu^{-\tau}$ и $\Omega = \Omega_0 \mu^\varepsilon$. В теориях тонких оболочек типа Кирхгофа–Лява описываются только такие напряженно-деформированные состояния, для которых длина картины деформации существенно больше толщины оболочки. Учитывая этот факт, получаем ограничения на величины параметров λ и m , а именно: $-2 \leq \kappa < \infty$ и $0 \leq -\tau \leq 2$, $\lambda_0 > 0$ и $m_0 \geq 0$. В работе рассматриваются только начальные состояния равновесия с малыми деформациями много меньшими 1. Поскольку начальные деформации пропорциональны Ω^2 , получаем следующее ограничение на Ω : $0 < \varepsilon < \infty$. Заметим, что в зависимости от направления вращения Ω_0 может быть либо положительным, ли-

бо отрицательным. Коэффициент Пуассона ν считаем постоянным и равным 0.3. Следовательно, коэффициенты уравнения, имеющие вид ν , $1 - \nu$, $1 - \nu^2$ и т. д., имеют порядок $O(\mu^0)$.

3.1. Метод исследования характеристического уравнения

Так как в общем случае вид уравнения (4) сложен, то для нахождения аналитического выражения для собственной частоты требуется его упростить. Под упрощением в первом приближении в теории асимптотических методов подразумевается нахождение его главных членов. Для нахождения главных членов характеристического уравнения, описывающего колебания тонких вращающихся цилиндрических оболочек, применяется геометрический подход, который приводит к построению выпуклой оболочки в пространстве степеней малых параметров, включенных в характеристическое уравнение, так как, как было доказано в [3], главные члены полинома определяются точками, лежащими на выпуклой оболочке данного набора изображающих точек.

Более того, целая выпуклая оболочка определяет главные члены полинома для параметров любого порядка, т. е. они могут быть как малыми, так и большими или порядка $O(1)$. Если про некоторые параметры известно, что они малы, то необходимо рассмотреть только часть выпуклой оболочки. Если один параметр — мал, то необходимо рассмотреть только «нижнюю часть» выпуклой оболочки, т. е. те точки, которые видны из точки $(-\infty, 0)$. Например, в случае задачи колебания вращающейся тонкой оболочки вращения параметр относительной толщины μ — мал. Если известно, что два параметра — малы, то необходимо рассмотреть только ту часть выпуклой оболочки, которая видна одновременно из точек $(-\infty, 0)$ и $(0, -\infty)$, другими словами, видимую из начала координат. Все вышесказанное утверждения верны и для случаев более высоких размерностей. Основные алгоритмы построения выпуклой оболочки и история их создания содержатся в работе [1]. Особое внимание уделяется лишь тем методам и алгоритмам, которые используются в данной диссертации для изучения характеристического определителя. К ним относятся такие алгоритмы, как стандартный алгоритм построения выпуклой оболочки в трехмерном пространстве,

основанный на принципе «сканирования Грэма», который, в частности, используется в стандартном пакете прикладных программ «Mathematica 5.2»; алгоритм, разработанный автором данной работы, в основу которого положен принцип «заворачивания подарка» для двумерного и трехмерного случаев, а также алгоритм «быстрого поиска», на основе которого написана программа Qhull и которая используется в данной работе для построения выпуклой оболочки в пространстве четырех и более параметров.

3.2. Методы упрощения характеристических уравнений

Предположим, что задан полином $P(p; \mu, \lambda)$, где p — переменная, а μ и λ — параметры. Тогда, согласно утверждениям параграфа 3.1, главные члены полинома определяются гранями выпуклой оболочки, построенной на точках в пространстве степеней параметров. Для каждой грани главные члены полинома будут разными. Каждая грань определяет соотношение между параметрами λ и μ , которое можно выразить с помощью соотношения $\lambda = \lambda_0 \mu^{\kappa}$, где параметр μ предполагается малым. Набор точек $\{\kappa_i\}$ назовем критическими точками, в каждой из которых можно построить решение укороченного уравнения, т. е. решение уравнения, включающего только главные члены.

Для того чтобы построить решения для промежуточных значений λ , для которых $\kappa \neq \kappa_i$, разделим полную область изменения параметра λ на подобласти, расположив критические точки κ_i на рассматриваемой полной области значений параметра λ . Для любого λ внутри каждой подобласти структура выпуклой оболочки не изменяется, а, следовательно, вид укороченных уравнений сохраняется. Таким образом, зафиксировав только одно произвольное значение величины λ внутри каждой из подобластей, можно получить значения корней и собственных векторов внутри каждой подобласти. Используя это свойство, можно построить решения внутри каждой из подобластей и во всех критических точках. Как только параметр λ известен, количество параметров в характеристическом уравнении уменьшается на единицу.

3.3. Осесимметричные колебания ($m = 0$)

Система уравнений (2) в частном случае для осесимметричных колебаний $m = 0$ расщепляется на две: одна из них описывает продольно-поперечные колебания, а второе уравнение — крутильные колебания. Рассмотрим систему, описывающую продольно-поперечные колебания, для которой характеристическое уравнение (2) принимает следующий вид:

$$P(p; \mu, \lambda) = (1 - \nu^2) \lambda^2 - (1 - \nu^2)^2 \lambda^4 + (1 - \nu^2) p^2 - (1 - \nu^2) \lambda^2 p^2 + (1 - \nu^2) \mu^4 \lambda^2 p^4 + \mu^4 p^6 = 0. \quad (5)$$

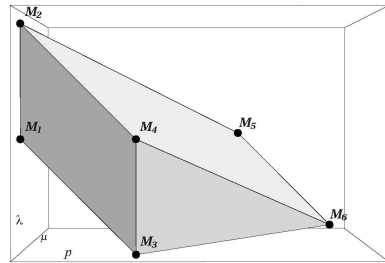
Таким образом, для случая осесимметричных колебаний изображающие точки лежат на плоскости (p, μ) и имеют форму $M_i = \{k_i, \alpha_i + \beta_i k_i\} = \{\{0, 0, 2\}, \{0, 0, 4\}, \{2, 0, 0\}, \{2, 0, 2\}, \{4, 4, 2\}, \{6, 4, 0\}\}$.

Нанесем изображающие точки в системе координат, связанной с трехмерным пространством степеней параметров $(p; \mu, \lambda)$, входящих в уравнение (5). Затем построим трехмерную выпуклую оболочку для точек M_i (рис. 1), каждая грань которой определяет критическую точку. Полный набор критических точек разделит пространство λ на области, которые исследуются вместе с критическими точками (рис. 2).

Так как параметр относительной толщины μ предполагается малым, то в этом случае необходимо оставить только те грани выпуклой оболочки, которые видимы из точки $(0, \infty, 0)$. Для уравнения (4) «нижняя часть» трехмерной выпуклой оболочки содержит три грани: 1: (M_1, M_2, M_3, M_4) ; 2: (M_3, M_4, M_6) ; 3: (M_2, M_4, M_5, M_6) , которая изображена на рис. 1. Порядки всех членов, соответствующих точкам, образующим грань, равны друг другу. Этот факт можно сформулировать с помощью следующих соотношений, из которых могут быть найдены порядки λ для критических случаев:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &\sim \lambda^4 \sim p^2 \sim \lambda^2 p^2, \\ \lambda^2 p^2 &\sim p^2 \sim \mu^4 p^6, \\ \lambda^4 &\sim \lambda^2 p^2 \sim \lambda^2 \mu^4 p^4 \sim \mu^4 p^6. \end{aligned} \quad (6)$$

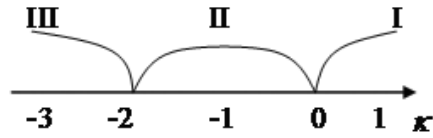
Таким образом, из первого и второго соотношений (6) получаем $\kappa = 0$, а из третьего $\kappa = -2$. Следовательно, все пространство

Рис. 1. Выпуклая оболочка для случая $m = 0$.

для λ по κ делится на три области, внутри которых структура двумерной выпуклой оболочки одинакова. Каждая из этих областей определяется следующим образом:

1. $\kappa > 0$;
2. $0 > \kappa > -2$;
3. $\kappa < -2$.

В дальнейшем, для нахождения главных членов характеристического уравнения в каждой области, нужно иметь в виду, что, используя описанный выше подход, можно выбрать порядки для областей I, II и III произвольным образом, например: $\kappa = 1$, $\kappa = -1$ и $\kappa = -3$ соответственно (рис. 2). Также следует проанализировать случаи критических точек $\kappa = -2$ и $\kappa = 0$. Таким образом, в данной задаче необходимо рассмотреть пять случаев: $\kappa = -3, -2, -1, 0, 1$ соответственно. Учитывая ограничения на параметр λ $\kappa > -2$, случаями III и $\kappa = -2$ можно пренебречь. Случай $\kappa = 0$ является особым, так как в этом случае важен второй член в разложении для p [2]. Таким образом, необходимо рассмотреть решения в областях I, II и критической точке $\kappa = 0$.

Рис. 2. Области κ .

Изображающие точки движутся на плоскости (p, μ) при изменении κ . Особый интерес представляют критические случаи, т. е. когда происходит изменение выпуклой оболочки. Это происходит либо когда одна из внутренних точек достигает выпуклой оболочки, либо когда два или более сегментов образуют прямую.

3.4. Неосесимметричные колебания ($m \neq 0$)

В этом случае, когда $m \neq 0$, система (2) не расщепляется и необходимо найти корни характеристического уравнения восьмого порядка (4), которое можно записать в форме

$$P(p; \mu, \lambda, m) = \sum_i a_i(s) p^{k_i} \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i}. \quad (7)$$

В общем случае в задачах неосесимметричных колебаний тонких невращающихся оболочек порядок m изначально не задан. В этом случае члены характеристического уравнения (7) зависят от трех параметров: малого μ ($0 < \mu \ll 1$), положительных λ ($\lambda > 0$) и m ($m > 0$).

Предположим, что $m = m_0 \mu^{-\tau}$ и $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$, где $m_0 \sim 1$ и $\lambda_0 \sim 1$.

Дальнейшие шаги исследования и решения задачи аналогичны шагам исследования для случая осесимметричных колебаний тонких невращающихся оболочек. Для этого надо:

- построить выпуклую оболочку в четырехмерном пространстве. Грани этой четырехмерной оболочки определяют критические точки на плоскости (λ, m) . Также, используя рассмотренный в предыдущей главе алгоритм, следует найти критические сегменты, которые делят плоскость степеней параметров (λ, m) на области различной структуры корней характеристического уравнения;
- построить все решения в критических точках, критических сегментах и в областях между критическими сегментами;
- найти относительный порядок собственных векторов и подставить их в граничные условия;
- решить получившееся частотное уравнение численно или, если возможно, аналитически и, таким образом, получить выражение для параметра собственной частоты.

Для того чтобы построить четырехмерную выпуклую оболочку в пространстве степеней параметров, используется алгоритм и код Qhull. Так как рассматривается случай малого параметра μ , необходимо для дальнейшего анализа выбрать лишь те грани выпуклой оболочки, которые принадлежат «нижней» ее части, т. е. грани, видимые из точки $(p, \mu, \lambda, m) = (0, -\infty, 0, 0)$. Предполагая, что порядки членов, соответствующих вершинам каждой грани, равны друг другу, можно найти порядки λ и m , т. е. критические точки на плоскости (κ, τ) , которыми в данном случае будут являться точки $(\kappa, \tau) = (-2, 2), (0, 1), (0, 0)$ и $(2, 0)$.

После нахождения критических точек κ_i и τ_i можно построить критические сегменты на плоскости (κ, τ) , на которую нанесем горизонтальные линии $\tau = \tau_i$, проходящие через критические точки (κ_i, τ_i) . Так как найденными критическими точками являются $(\kappa_i, \tau_i) = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (-2, 2)\}$, то горизонтальными линиями являются $\tau = 0, 1, 2$. Эти линии разделяют всю плоскость на три зоны: $0 < \tau < 1$, $1 < \tau < 2$ и $2 < \tau$. Для любого фиксированного τ внутри каждой зоны структуры соответствующих трехмерных выпуклых оболочек одинаковы. Следовательно, можно выбрать произвольную точку внутри каждой из областей и получить

соотношения между κ и τ , которые определяют критические сегменты. Основные результаты этой главы содержатся в работе [3].

Используя данную процедуру, можно найти сегменты, параллельные координатной оси τ , т. е. сегменты вида $\tau = \text{const}$. Для этого необходимо повторить построение для вертикальных зон, полученных с помощью вертикальных линий, проведенных через критические точки, т. е. сегменты $\tau = 0$ и $\tau = 1$. Окончательный вид асимптотического портрета изображен на рис. 3, на котором представлены области, критические точки и сегменты. Представленный результат совпадает с полученным ранее [2]. Так как изначально были сделаны предположения, ограничивающие анализ случаем, где $-2 \leq \kappa \leq 2$ и $-2 \leq \tau \leq 0$, будем называть такое разбиение асимптотическим портретом. Этот термин был предложен Б. Н. Квасниковым [4].

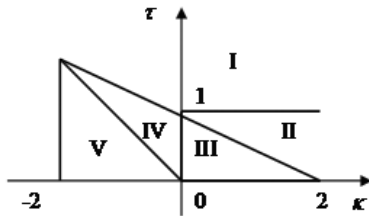


Рис. 3. Асимптотический портрет для неосесимметричных колебаний невращающейся цилиндрической оболочки.

3.5. Неосесимметричные колебания вращающихся цилиндрических оболочек ($m \neq 0$) и ($\Omega \neq 0$). Основной случай

При выводе уравнений колебаний вращающихся оболочек обычно выделяют два случая: основной и особый. В основном случае допускается смещение хотя бы одного из краев оболочки в направлении оси симметрии цилиндра. В особом случае предполагается жесткая заделка в направлении оси цилиндра на обоих краях. В данной статье рассматривается только основной случай, в котором для получения главных членов корней характеристического урав-

нения восьмого порядка вида (4) анализируется следующее уравнение:

$$\sum P_n(p; \lambda, m, \mu, \Omega, s) = \sum_{i=1}^N a_i(s) p^{k_i} \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i} \Omega^{\pi_i} = 0. \quad (8)$$

Для случая неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек и основного случая задания граничных условий изображающие точки $M_i = \{k_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \pi_i\}$ лежат в пятимерном пространстве $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \pi\}$.

Предположим, что $m = m_0 \mu^{-\tau}$, $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$ и $\Omega = \Omega_0 \mu^\varepsilon$, где $m_0 \sim 1$, $\lambda_0 \sim 1$ и $\Omega_0 \sim 1$.

Алгоритм решения задачи аналогичен алгоритму, используемому для решения задачи осесимметричных и неосесимметричных колебаний невращающейся цилиндрической оболочки, в котором размерности всех рассматриваемых объектов с учетом дополнительного параметра Ω повышаются на единицу. Таким образом, сначала необходимо построить выпуклую оболочку в пятимерном пространстве параметров $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \pi\}$. Для данного случая асимптотический портрет будет построен в трехмерном пространстве $\{\kappa, \tau, \varepsilon\}$. Остальные шаги алгоритма остаются без изменений.

Как и ранее, считаем параметр относительной толщины μ — главным и выразим остальные параметры через основной, сделав следующие предположения о порядках параметров: $m = m_0 \mu^{-\tau}$, $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$ и $\Omega = \Omega_0 \mu^\varepsilon$, где $m_0 \sim 1$, $\lambda_0 \sim 1$ и $\Omega_0 \sim 1$. Построим пятимерную выпуклую оболочку, воспользовавшись алгоритмом и кодом Qhull. При условии малости параметра μ необходимо после построения пятимерной выпуклой оболочки выбрать только грани ее «нижней части», т. е. грани, видимые из точки $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \pi\} = (0, -\infty, 0, 0, 0)$. Каждая грань определяется пятью или более точками. Предполагая, что порядки членов, соответствующих вершинам каждой грани, равны друг другу, можно найти порядки λ , m и Ω , т. е. критические точки в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$. После выбора граней «нижней части» выпуклой оболочки составим пропорции, соответствующие каждой грани, и учитывая, что $\varepsilon > 0$, получим следующие критические точки: $(\kappa, \tau, \varepsilon) = \{-2, -2, 0\}, \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{2, 0, 2\}$. Окончатель-

ный набор критических точек для обоих случаев одинаков и равен: $(\kappa, \tau, \varepsilon) = \{-2, -2, 0\}, \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{2, 0, 1\}$.

После нахождения критических точек необходимо построить критические плоскости, которые в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ имеют форму многоугольников. Для этого нанесем в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ горизонтальные и вертикальные плоскости: $\kappa = \kappa_i$, $\tau = \tau_i$ и $\varepsilon = \varepsilon_i$, проходящие через критические точки $(\kappa_i, \tau_i, \varepsilon_i)$. Так как полученными критическими точками являются $(\kappa_i, \tau_i, \varepsilon_i) = \{-2, -2, 0\}, \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{2, 0, 2\}$, то такими горизонтальными плоскостями в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ будут являться $\varepsilon_i = 0, 1, 2$, а вертикальными $\tau_i = 0, 1, 2$ и $\kappa = -2, 0, 2$.

Как уже отмечалось ранее, для параметров задачи сделаны следующие предположения: $-2 \leq \kappa < \infty$, $-2 \leq \tau \leq 0$, $\varepsilon > 0$. Отметим также, что при $\varepsilon > 2$ можно считать рассматриваемую оболочку медленно вращающейся, а проекция асимптотического портрета на (τ, κ) будет эквивалентна полученному для невращающейся оболочки, и для $\varepsilon > 2$ асимптотический портрет $(\varepsilon, \tau, \kappa)$ получается параллельным переносом вертикально вверх проекции асимптотического портрета для $\varepsilon = 2$.

Таким образом, нанесенные в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ горизонтальные и вертикальные плоскости с учетом перечисленных условий разделяют все пространство на восемь зон. Для любого фиксированного набора (ε, κ) внутри каждой зоны структуры соответствующих трехмерных выпуклых оболочек одинаковы. Следовательно, можно выбрать произвольную точку внутри каждой из областей и получить соотношения между τ , κ и ε , которые определяют критические плоскости. Отметим также, что в этом случае при фиксации параметра в (ε, κ) зоны можно объединить таким образом, чтобы критические точки не оказались внутри параллелепипеда, а также не лежали на грани или ребре. В результате для данного случая можно рассмотреть четыре зоны, внутри которых трехмерные выпуклые оболочки, а следовательно, и характеристические уравнения имеют принципиально различную структуру.

Таким образом, окончательный результат построения асимптотического портрета нанесен на рис. 4.

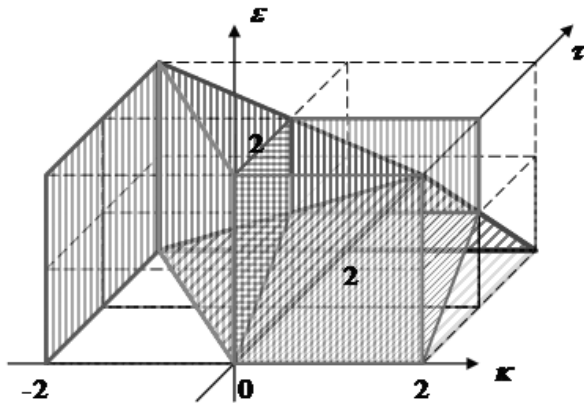


Рис. 4. Асимптотический портрет характеристических уравнений $\varepsilon(\tau, \kappa)$ для основного случая.

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай неосесимметричных низкочастотных колебаний быстровращающейся тонкой цилиндрической оболочки для критического многоугольника $\varepsilon = \kappa + \tau$.

4.1. Пример построения укороченных уравнений

Рассмотрим критический многоугольник, определяемый плоскостью $\varepsilon = \kappa + \tau$ (первая часть плоскости — в области $\kappa > 0$). Для особого случая данный многоугольник делится плоскостью $\varepsilon = 1$ на две части. Укороченные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m^6 (1 - \nu^2) \Omega^2 - \lambda^2 m^4 (1 - \nu^2) + \mu^4 m^8 + p^4 (1 - \nu^2) &= 0, \\ (1 - \nu^2) p^4 + \mu^4 p^8 &= 0. \end{aligned}$$

4.2. Построение собственных векторов

Найдем собственные векторы области критического многоугольника, определяемого той частью плоскости $\varepsilon = \kappa + \tau$, которая определяет низкие частоты и быстрое вращение. Для этой области в основном случае найдены следующие укороченные характеристические уравнения:

$$m^6 (1 - \nu^2) \Omega^2 - \lambda^2 m^4 (1 - \nu^2) + \mu^4 m^8 + p^4 (1 - \nu^2) = 0; \quad (9)$$

$$(1 - \nu^2) p^4 + \mu^4 p^8 = 0. \quad (10)$$

Таким образом, для уравнений (9) и (10) получаем две серии корней

$$\begin{aligned} p_{1-2} &= \pm m \sqrt[4]{\lambda^2 - \frac{\mu^4 m^4}{1 - \nu^2} - m^2 \Omega^2} \\ p_{3-4} &= \pm m \sqrt[4]{\lambda^2 - \frac{\mu^4 m^4}{1 - \nu^2} - m^2 \Omega^2 i}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$p_j = \frac{\varepsilon_j \sqrt[4]{1 - \nu^2}}{\mu}, \quad (12)$$

где $\varepsilon_j = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $j = 5, 6, 7, 8$.

Найдя корни p_i , необходимо определить относительные порядки компонент собственных векторов. Используя стандартный алгоритм нахождения собственных векторов в трехмерном случае, подставим выражения для корней p_i в уравнение. В результате получим систему алгебраических уравнений, каждый из коэффициентов которого можно упростить, используя описанный метод построения выпуклой оболочки. Для данной задачи найдены системы упрощенных уравнений, определяющих амплитудные векторы, а сами амплитудные векторы равны соответственно

$$\{U, V, W\}^T = \left\{ \frac{p}{m^2}, -\frac{1}{m}, 1 \right\} \quad (13)$$

$$\{U, V, W\}^T = \left\{ \frac{\nu}{p}, \frac{(2 + \nu)m}{p^2}, 1 \right\} \quad (14)$$

4.3. Нахождение собственных низких частот для случая шарнирного опирания

В качестве примера рассмотрим построение решения для случая неосесимметричного колебания быстро вращающейся тонкой цилиндрической оболочки. Так как практически наиболее важны низкочастотные колебания, то рассмотрим построение решения на первой части критического многоугольника, определяемого плоскостью $\varepsilon = \kappa + \tau$ для той части, где $0 < \varepsilon < 1$. Найденные корни и собственные векторы собраны в табл. 1.

Таблица 1. Корни и собственные векторы для критического многоугольника $\varepsilon = \kappa + \tau$

	1	2	3	4	5	6	7	8
p	f	$-f$	fi	$-fi$	$\varepsilon_5 g$	$\varepsilon_6 g$	$\varepsilon_7 g$	$\varepsilon_8 g$
U_0	$\frac{p_1}{m^2}$	$\frac{p_2}{m^2}$	$\frac{p_3}{m^2}$	$\frac{p_4}{m^2}$	$\frac{\nu}{p_5}$	$\frac{\nu}{p_6}$	$\frac{\nu}{p_7}$	$\frac{\nu}{p_8}$
V_0	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m}$	$\frac{k}{p_5^2}$	$\frac{k}{p_6^2}$	$\frac{k}{p_7^2}$	$\frac{k}{p_8^2}$
W_0	1	1	1	1	1	1	1	1

Здесь $f(\mu, m, \lambda, \Omega) = m \sqrt[4]{\lambda^2 - \frac{\mu^4 m^4}{1-\nu^2} - m^2 \Omega^2}$, $g(\mu) = \frac{\sqrt[4]{1-\nu^2}}{\mu}$, $k(m) = m(\nu + 2)$ и $\varepsilon_j = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $j = 5, 6, 7, 8$.

Рассмотрим граничное условие типа шарнирного опирания, которое имеет форму

$$u = w = w'' = 0 \quad \text{при } s = 0 \text{ и } s = L.$$

Подставляя линейную комбинацию решений амплитудных векторов (13) и (14) в граничные условия, получаем характеристическое уравнение восьмого порядка, откуда может быть найдено первое приближение для параметра частоты λ . Отметим, что в ходе решения были сделаны дополнительные упрощения частотного определителя, в котором пренебрегаются величины первого, пятого и шестого решений (с $\text{Re } p_i > 0$) на левом краю по сравнению с этими величинами на правом конце, а также величинами второго, седьмого и восьмого (с $\text{Re } p_i < 0$) на правом краю по сравнению с этими

величинами на левом краю. Условие равенства нулю частотного определителя приводит к уравнению

$$-1 + e^{2iLm \left(\frac{\mu^4 m^4 + (\lambda^2 - m^2 \Omega^2)(-1 + \nu^2)}{-1 + \nu^2} \right)^{1/4}} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, полученный параметр собственной частоты:

$$\lambda^2 = \left(\frac{\pi k}{Lm} \right)^4 + \frac{m^4 \mu^4}{1 - \nu^2} + m^2 \Omega^2. \quad (16)$$

Полученная частота совпадает с частотой, полученной в [2] и других источниках.

4.4. Сравнение найденных собственных частот с известным решением для корней $p_i = \frac{\pi k i}{L}$

Решение этой задачи численным способом можно вести несколькими путями. Во-первых, как известно, решение задачи в случае задания граничных условий типа шарнирного опирания на обоих концах оболочки имеет вид $p_i = \frac{\pi k i}{L}$. В дальнейшем будем называть это решение точным. Фиксируем значения параметров таким образом, чтобы они имели порядки рассматриваемой области. Например, фиксируем значение $\nu = 0.3$, а $\mu = 0.01$. Так как рассматриваемая область характеризуется первой частью плоскости $\varepsilon = \kappa + \tau$ для низких частот, т. е. $\kappa > 0$, тогда можно, например, зафиксировать следующие порядки для параметра количества волн по параллели и угловой скорости вращения: $\tau = -1/2$ и $\varepsilon = 1/2$, т. е. $m \sim \mu^{-1/2}$ и $\Omega \sim \mu^{1/2}$. Подставляем их в выражение для самой нижней собственной частоты, полученное с помощью (16). В результате подстановки получается, что самая низшая частота λ равна 0.305, и она достигается при $m \approx 2.49$. Так как m – целое число, то ясно, что низшая частота достигается либо при $m = 2$, либо при $m = 3$. Если при этом подставить зафиксированные параметры в точную формулу, то $\lambda = 0.303$. Очевидно, что чем меньше значение параметра Ω , т. е. чем медленнее вращается оболочка, тем точность аналитической формулы выше.

Параметр Ω входит в асимптотическое выражение (16) для частоты λ в четной степени (в квадрате), т. е. с асимптотической точки зрения знак угловой скорости вращения оболочки на параметр частоты не влияет. На рис. 5 в трехмерном пространстве (m, Ω, λ) изображены три поверхности, две из которых (1 и 3) соответствуют точному значению частоты (известному решению для шарнирного опирания), а поверхность 2 — асимптотическому решению (16).

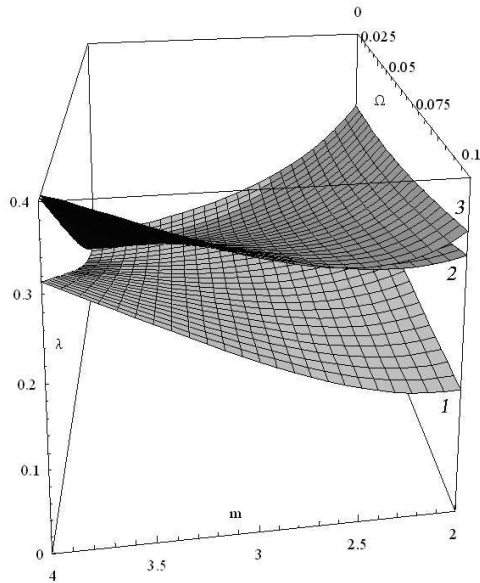


Рис. 5. Сравнение точных (для положительного и отрицательного Ω) и асимптотического решений для собственных частот λ в зависимости от различных значений параметра параметров m и Ω при зафиксированном $\mu = 0.01$.

На рис. 6 изображено сечение поверхностей, изображенных на рис. 5 в плоскости (Ω, λ) при фиксированном значении параметра $m = 3$, соответствующему минимальной частоте.

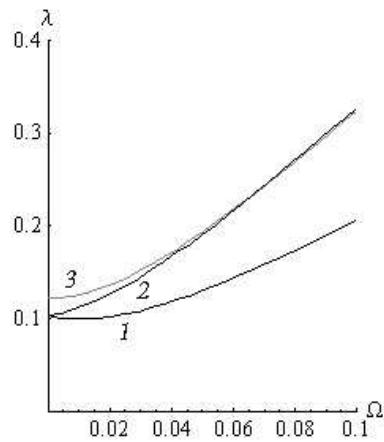


Рис. 6. Сравнение точных (для положительного и отрицательного Ω и асимптотического решений для собственных частот λ в зависимости от различных значений параметра параметров Ω при зафиксированном $\mu = 0.01$ и $m = 3$.

Варьируя параметр μ таким образом, чтобы он оставался порядка 10^{-2} и при этом остальные параметры также оставались в рассматриваемой области, можно составить табл. 2 (см. рис. 6), которая подтверждает тот факт, что, уменьшая значение параметра μ , точность аналитической формулы возрастает.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был представлен алгоритм построения формального асимптотического решения краевой задачи на примере задачи колебаний вращающихся тонких оболочек вращения. Этот алгоритм основывается на методе асимптотического интегрирования, разработанного Гольденвейзером, Лидским и Товстиком [2]. В работе было подробно рассмотрено построение асимптотических портретов задачи осесимметричных и неосесимметричных колебаний вращающейся и невращающейся цилиндрических оболочек. В

Таблица 2. Значения собственных частот для случая $\nu = 0.3$, $t \sim \mu^{-1/2}$ и $\Omega \sim \mu^{1/2}$ для различных значений параметра μ

μ	λ (точный)	λ (асимпт.) (...)	Ошибка, в %
0.01	1.00179	1.00012	0.167
0.02	1.00388	1.00046	0.34
0.03	1.00626	1.00104	0.5
0.04	1.00893	1.00184	0.7
0.05	1.01189	1.00287	0.89
0.06	1.01514	1.00413	1.08

частном случае невращающейся оболочки результат — асимптотический портрет — полностью согласуется с полученным ранее в [2]. Работа алгоритма продемонстрирована на одном из примеров низкочастотных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Препарата Ф.П., Хонг С. Выпуклая оболочка конечного набора точек в 2D и 3D., 1977.
2. Гольденвейзер А.Л., Лидский В. Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких оболочек, М., 1978.
3. Landman I. M. Analysis of characteristic equations by generalized Newton's method// Proceedings of the third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2005. Cambridge. USA. P. 217.
4. Квасников Б. Н. Интегрирование уравнений тонких упругих оболочек с быстро и медленно меняющимися коэффициентами// Прикладная механика. Сб.: Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. Вып.8. Л.: СПбГУ, 1990. С. 163–172.
5. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука; Физматлит, 1998. 288 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КАПСУЛЫ ХРУСТАЛИКА ГЛАЗА ПРИ АККОМОДАЦИИ

О. В. ИВАНОВА

Доклад на семинаре 20 декабря 2005 г.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача о деформации капсулы хрусталика глаза при аккомодации. Согласно классической теории Гельмгольца, в процессе аккомодации принимает участие капсула хрусталика глаза и «поддерживающий аппарат» хрусталика, состоящий из передней и задней порции волокон ресничного пояска. В большинстве ранее представленных работ, посвященных математическому моделированию процесса аккомодации, деформация капсулы хрусталика глаза рассматривалась именно в такой, упрощенной постановке, т. е. без учета влияния стекловидного тела. В настоящей работе при рассмотрении процесса аккомодации добавлено влияние стекловидного тела. В работе рассмотрено несколько конфигураций стекловидного тела и несколько случаев внешнего воздействия. Капсула хрусталика рассмотрена с учетом геометрии, близкой к реальной. Учитывается наличие более жесткого ядра в хрусталике. Получено изменение давления внутри капсулы хрусталика глаза при аккомодации¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс аккомодации является важной проблемой в офтальмологии, его исследование необходимо для представления последствий некоторых аномалий рефракции.

Аккомодация — приспособление глаза к ясному видению предметов, находящихся на различных расстояниях. Капсула хрусталика глаза лежит на гиалоидной мембране. Достигается аккомодация изменением кривизны хрусталика глаза. Ранее считалось, что аккомодация достигалась посредством воздействия на хрусталик глаза только волокон ресничного пояска. Последние исследования поддерживающего аппарата хрусталика установили, что большая пе-

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

© О. В. Иванова, 2006

редняя порция волокон ресничного пояска, направляясь от сумки хрусталика, не прикрепляется непосредственно к ресничному (цилиарному) телу, как это представлялось раньше, а проходит между его отростками и вплетается в хориоидею в районе зубчатой линии (ora serrata) [1, 2] (рис.).



Рис. 1. Механизм аккомодации. (рисунок из работы [3]).

Задняя порция волокон более тонкая и разветвленная, как «паутинка» покрывает купол передней гиалоидной мембраны стекловидного тела (см. рис.). В процессе аккомодации ресничная (цилиарная) мышца сокращается, подтягивая вперед хориоидею. Это, в свою очередь, уменьшает натяжение волокон пояска, и хрусталик, в силу эластичности своей капсулы, стремится принять форму, наиболее близкую к сферической, тем самым увеличивая оптическую силу глаза.

Под действием упругих сил: с одной стороны — упругой капсулы хрусталика, с другой — упругой хориоидеи, зонулярные волокна во всех фазах аккомодации находятся в постоянно натянутом состоя-

нии динамического равновесия, причем степень их натяжения при взгляде вблизи минимальна, а вдале — максимальна. Фактически при аккомодации вдале хрусталик оказывается сдавленным между передней порцией волокон ресничного пояса и дополнительно напряженной от повышения давления в стекловидной камере поверхностью передней гиалоидной мембраны стекловидного тела. Эта напряженность поверхности стекловидной камеры происходит в результате перемещения хрусталика в направлении стекловидного тела. Тем самым повышается давление в стекловидной камере и, собственно, в несжимаемом стекловидном теле, и, как показывают расчеты, в капсуле хрусталика глаза.

1.1. Теоретическое моделирование аккомодации

Классическая теория аккомодации была создана Гельмгольцем. При взгляде вдале, по Гельмгольцу, происходит увеличение натяжения волокон цинковой связки, капсула хрусталика растягивается и уплощается, позволяя более четко видеть предметы, находящиеся вдали, поскольку преломляющая способность поверхностей капсулы и хрусталика в целом при этом становится минимальной. При взгляде вблизи, по Гельмгольцу, происходит ослабление натяжения волокон цинковой связки, в результате чего передняя и задняя поверхности капсулы хрусталика принимают более округлые формы, сокращаясь в силу своих упругих свойств, что позволяет увеличить преломляющую способность хрусталика в целом для улучшения качества изображения на сетчатке глаза тех предметов, которые находятся на более близком расстоянии.

Так как классическая теория аккомодации не была окончательно завершена Гельмгольцем и не могла до последнего времени объяснить ряд фактических наблюдений, то среди исследователей нашлись ученые, которые пытались опровергнуть взгляды Гельмгольца, создавая новые теории аккомодации.

В начале 90-х годов появилось несколько работ Р. Шахара [4, 5], в которых был предложен новый взгляд на процесс аккомодации. Этот исследователь отвергает все теории аккомодации, существовавшие до него, и предлагает принципиально другой механизм

аккомодации. Р. Шахар предполагал, что при взгляде вблизи центральные волокна, натягиваясь в момент сокращения ресничной мышцы, тянут за собой экваториальную зону хрусталика, стягивают его периферийную часть и заставляют внутривнутрихрусталиковые массы обеспечить выпячивание центральной области сумки хрусталика. При этом роль передней и задней порций волокон ресничного пояса только вспомогательная, они натягиваются при взгляде вблизи и расслабляются при взгляде вдаль, т. е. с точностью до наоборот по отношению к теории Гельмгольца. В поддержку своей гипотезы Шахаром была предложена простая физическая модель, представляющая собой баллон, наполненный желатином, а также численные исследования процесса аккомодации [5, 6]. Однако ни Шахар, ни его последователи не смогли объяснить, каким образом при сокращении мышцы увеличивается натяжение волокон.

В опровержение теории Шахара в скором времени появился ряд работ, поддерживающих классическую теорию Гельмгольца. Отметим некоторые из них.

В первую очередь в работах [7, 8] были отмечены ошибочные результаты модели [4], основанной на линейной (малой) деформации капсулы хрусталика глаза. Однако, как и в работе [4], в [7, 8] не учитывалось влияние стекловидного тела, и сила, имитирующая сокращение мышц (растягивающая или сжимающая капсулу хрусталика), действовала в горизонтальной плоскости. Совсем недавно появились работы, в которых сила мышц действует под углом к горизонтальной плоскости. В работе [9] приводятся результаты ряда биомеханических моделей аккомодации, где в рассмотрение введены стекловидная камера и её контакт с хрусталиком. Таким образом, сделана попытка учесть влияние стекловидного тела, но нет связи геометрических построений с реальными данными. Также в работе [9] не учтена несжимаемость внутривнутрихрусталиковых масс. Рассмотрение хрусталика и стекловидного тела с формой, геометрически близкой к реальным данным, позволяет получить более точное описание деформации капсулы хрусталика при аккомодации. Дополнительно, в работе [9] в рассмотрении хрусталика отсутствует более жесткое ядро, что влияет на качественное изменение формы хрусталика и, как следствие, преломляющей силы. Натяжение волокон цинковой связки представлено точечно приложенной под

углом к горизонтальной плоскости силой.

В работе [10] для изучения процесса аккомодации рассматривалась контактная пара с параметрами, отсутствующими в предыдущих работах. Но и здесь не обращено должного внимания на геометрию стекловидного тела.

Известно, что при аккомодации прогибы не являются малыми, и, следовательно, адекватная модель может быть получена только с использованием нелинейной теории оболочек.

В настоящей работе проводится численное исследование аккомодации хрусталика для различной геометрии стекловидного тела и распределенной по поверхности нагрузки. В ранее представленных работах рассматривалась точно приложенная нагрузка.

1.2. Численное моделирование аккомодации

Метод конечных элементов использовался в данной работе для создания уточненной механической модели аккомодирующего глаза с учетом результатов последних углубленных исследований поддерживающего аппарата хрусталика [1, 2]. Для того чтобы теоретические модели давали удовлетворительные результаты, необходимо задание точных геометрических и материальных параметров. В процессе моделирования существует возможность протестировать данные, полученные из различных источников, а также предложить дальнейшие направления экспериментальных исследований.

Хрусталик – одна из частей диоптрического аппарата глаза, представляющая собой внутреннюю линзу глаза с переменным фокусным расстоянием. Хрусталик состоит из сумки, образованной передней и задней капсулами, внутри которой заключены волокна, наслаивающиеся одно на другое.

Капсула хрусталика моделируется как тонкая, осесимметричная оболочка из линейно-упругого материала, деформирующаяся под действием распределенной по поверхности нагрузки и, для сравнения, под действием точно приложенной силы. Для построения геометрии оболочки использовались соотношения, предложенные Шахаром [4]. Точки крепления мышц x_{ja} , x_{jp} также взяты из

работы [4]:

$$\begin{aligned} t_a = 0,37t, \quad t_p = 0,37t, \quad a = 0,1208\ell; \\ \theta_a + \theta_p = 100^0, \quad \theta_a/\theta_p = t_p/t_a, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x_{ja} = 4.016$, $x_{jp} = 4,195$.

Верхняя часть хрусталика (anterior) приближается полиномом 5-й степени вида,

$$Z = 1.3727 - 0.0373134x^2 - 0.0259909x^3 + 0.0102632x^4 - 0.00123879x^5. \quad (2)$$

Пять коэффициентов этого полинома находятся из условий,

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad Z = t_a, \quad Z_{xx} = -1/r_1; \\ \text{при } x = 2.8\text{мм} \quad Z_{xx}/(1 + Zx^2)^{3/2} = -1/r_3; \\ \text{при } x = x_{ja} \quad Z = a \sin \theta_a \quad Z_x = -\cot \theta_a. \end{aligned} \quad (3)$$

Нижняя часть хрусталика (posterior) строится аналогичным образом ($x = 0, Z = 0$).

Форма *стекловидного тела* рассматривалась трех видов:

1. стекловидное тело представлено шаром с радиусом, равным расстоянию до оси вращения, как отмечено в [9, 10] — в среднем 11.7мм;
2. стекловидное тело представлено телом шарообразной формы с выемкой в месте расположения хрусталика;
3. геометрия, близкая к реальной (рис.2).

Здесь кривая 1 строится аналогично построению нижней части хрусталика. Кривая 2 — часть окружности с радиусом 11.7мм. Кривая 3 — часть окружности с радиусом, меньшим на Δ радиуса кривой 2.

Контактная пара с геометрией, приближенной к оригинальной, рассматривалась для двух случаев внешнего воздействия:

- распределенная по части верхней поверхности хрусталика нагрузка. В стекловидном теле запрещено любое перемещение по всем осям для нижней точки;

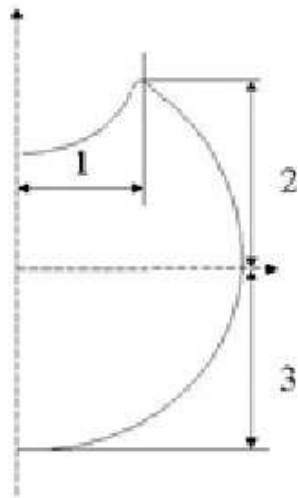


Рис. 2. Геометрическая схема стекловидного тела.

- помимо воздействия на хрусталик глаза, дополнительно прикладывается распределенная нагрузка к нижней полусфере стекловидного тела (по кривой от нижней точки до максимальной по экватору).

В процессе работы над вопросом процесса аккомодации было решено несколько задач и на основе полученных результатов сделаны выводы об изменении формы (и как следствие, преломляющей силы) хрусталика глаза в зависимости от модели стекловидного тела и характера приложенной нагрузки. В данной работе представлены результаты наиболее интересных, по нашему мнению, задач.

2. Модель

Оболочка заполнена гелеобразным веществом, внутренний объем оболочки считается постоянным и дополнительно присутству-

ет более жесткое ядро, полученное пересечением двух сфер. На (рис. 3а) натяжение волокон цинковой связки представлено силой F , приложенной, согласно [4], в точке и направленной под углом α к горизонту. На (рис. 3б) оболочка подвергается деформации под действием распределенной по верхней поверхности нагрузки, имитирующей сокращение мышц, соединяющих капсулу хрусталика со стекловидным телом.

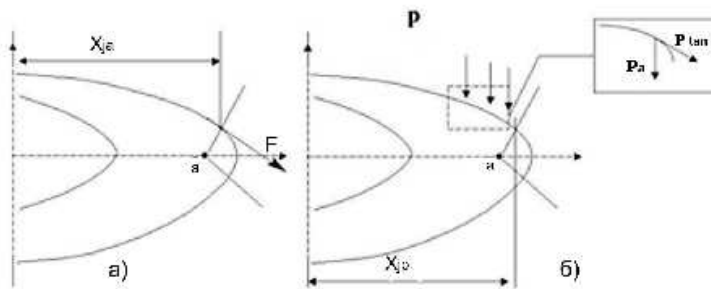


Рис. 3. Геометрические и силовые схемы капсулы хрусталика глаза (в обозначениях [4]).

Стекловидное тело состоит из гелеобразного вещества, сходного с ядром хрусталика.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ

3.1. Контакт с жестким диском

Следует заметить, что порядок рисунков идет согласно расположению на рис. 3, а именно: слева — воздействие точно приложенной силы, справа — распределенной по поверхности нагрузки. В качестве стекловидного тела берем абсолютно жесткий диск. К верхней части хрусталика прикладывается давление, имитирующее сокращение мышц, соединяющих хрусталик со стекловидным телом, и для сравнения в точку x_{ja} [4] прикладывается сила F . После деформации контактная пара выглядит следующим образом

(рис. 4).

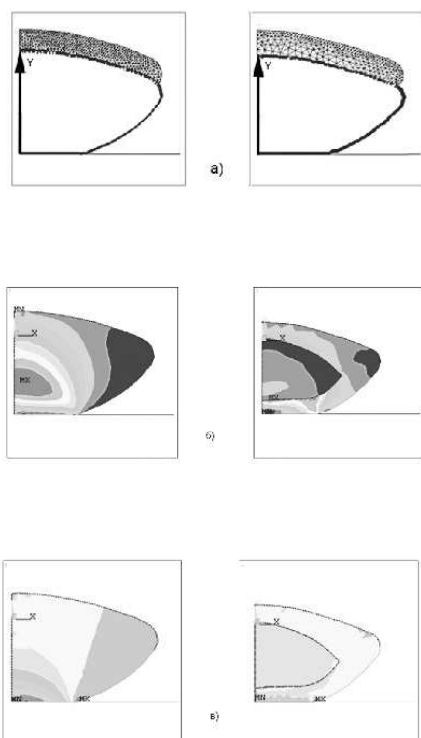


Рис. 4. а — контактная пара после деформации, б — изолинии экваториального напряжения по Мизесу, в — изолинии изменения гидростатического давления.

Из вышеописанной задачи видно, что более информативным является случай с приложением распределенной нагрузки по поверхности хрусталика, поэтому далее будет продемонстрировано решение только этого типа нагрузки для различной геометрии стекловидного тела.

3.2. Контакт с шаром

В качестве стекловидного тела берем шар с радиусом $R = 11.7\text{мм}$. Стекловидное тело состоит из гелеобразного вещества. В статье приведены результаты двух задач для данной формы стекловидного тела.

В первой модели деформация хрусталика происходит посредством приложения распределенной по верхней поверхности хрусталика нагрузки. В стекловидном теле запрещено любое смещение для нижней точки стекловидного тела. Вторая модель помимо воздействия на капсулу хрусталика глаза включает в себя еще и воздействие на стекловидное тело. К нижней полусфере (по кривой от нижней точки до максимальной по экватору) прикладывается распределенная по поверхности нагрузка. Рисунки, отвечающие второй постановке, будут располагаться справа. Напомним, что все механические и геометрические данные для хрусталика глаза остаются без изменений (см. рис. 3). Вид контактной пары после деформации представлен на рис. 5.

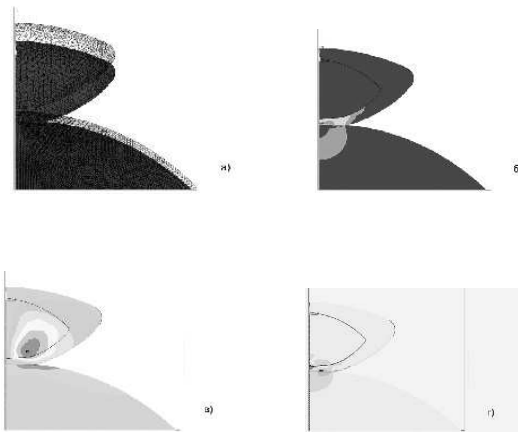


Рис. 5. а — контактная пара после деформации, б — изолинии экваториального напряжения по Мизесу, в — поле перемещений U_x , г — изолинии изменения гидростатического давления.

3.3. Контакт с телом шарообразной формы (геометрия, близкая к реальной)

В этом пункте представлен результат решения самой полной из поставленных задач. Хрусталик остается без изменений (см. рис. 3). Геометрическая схема стекловидного тела была представлена на рис. 2. Деформация хрусталика глаза происходит посредством воздействия как на хрусталик, так и на стекловидное тело. Силовая схема как для капсулы хрусталика, так и для стекловидного тела, аналогична представленной на рис. 3. К хрусталику прикладывается нагрузка, равномерно распределенная по верхней поверхности (по кривой от верхней точки до x_{ja} [4]). К стекловидному телу прикладывается нагрузка, равномерно распределенная по нижней поверхности (от нижней точки до максимальной по экватору). Вид контактной пары после деформации представлен на рис. 6.

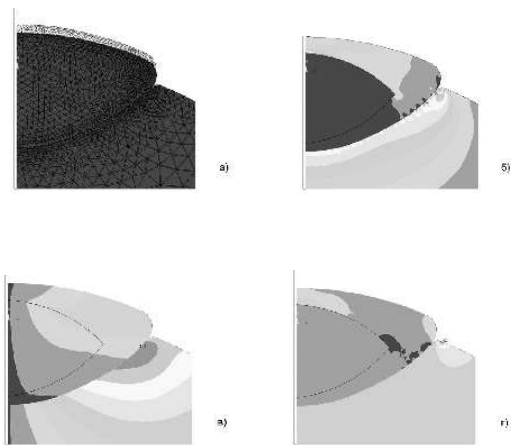


Рис. 6. а — контактная пара после деформации, б — изолинии экваториального напряжения по Мизесу, в — поле перемещений U_x , г — изолинии изменения гидростатического давления.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Целью работы были исследование процесса аккомодации с учётом современных данных о строении человеческого глаза и анализ полученных результатов.

Для этого использовались геометрические параметры из работ Р. Шахара (геометрию для построения хрусталика глаза, точки крепления мышц и т.п. [4]) с некоторыми «улучшениями», такими как: ввод в рассмотрение более жесткого ядра в хрусталике; ввод в рассмотрение стекловидной камеры с геометрией, близкой к оригинальной, и её контакт с хрусталиком; натяжение волокон цинковой связки представлено распределенной по поверхности хрусталика нагрузкой (в дополнение к точно приложенной).

Полученные результаты подтверждают корректность теории Гельмгольца. Расчеты также показывают, что при взгляде вдаль давление внутри хрусталика увеличивается, а при взгляде вблизи — уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Svetlova O. V. and Koshitz I. N. Modern biomechanical ideas about theory of von Helmholtz. Biomechanics of an eye; MNII GB. name of Helmholtz, pages 142–160, 2001.

2. Kotliar K. E., Svetlova O. V. et al. Biomechanical modelling of the accommodative system based on some contemporary conceptions of lens supporting apparatus functioning. Vision Science and its Application, pages 156–164, 1999.

3. A. Glasser. Glasser homepage. <http://www.opt.uh.edu/research/aglasser/>, 1997.

4. Schachar R. A., MD, PhD, Tseng Huang, PhD, and Xin Huang Mathematical Proof of Schachar's Hypothesis of Accommodation// Annals of Ophthalmology. January 1993. Vol. 25, P. 5–9.

5. Schachar R. A. Cause and Treatment of Presbyopia With a Method for Increasing the Amplitude of Accommodation// Annals of Ophthalmology. 1992, Vol.24, P. 445–452.

6. Schachar R. A., Cudmore D. P., Torti R. et al. A physical model demonstrating Schachar hypothesis of accommodation// Annals of Ophthalmology, 26(1):4–9, 1994.

7. Burd H. J., Judge S. J. and Cross J. A. Numerical modelling of the accommodation lens// Vision Research, 42:2235–2251, 2002.

8. Burd H. J., Judge S. J. and Flavell M. J. Mechanics of accommodation of the human eye// Vision Research, 39:1591–1595, 1999.

9. Исполова Е. А., Смольников Б.А., Светлова О.В., Кошиц И.Н. Статистический анализ процесса хрусталиковой аккомодации// Биомеханика глаза: Сборник трудов IV семинара, М., 2004.

10 Ljubimova D., Errikson A., Bauer S. Numerical study of effect of vitreous support on eye accommodation// Acta of bioengineering and biomechanics. 2005. Vol. 5, P. 3–15.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

О. М. Малышева

Доклад на семинаре 6 декабря 2005 г.

РЕЗЮМЕ

В статье решена задача об устойчивости тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. В работе рассматриваются граничные условия заделки и свободного края. С помощью асимптотического метода определены оптимальные расположения шпангоутов и оптимальные значения для поперечного сечения шпангоутов. Также были получены приближенные формулы для критического давления и для размеров поперечного сечения шпангоутов¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимальным расположением будем называть такое расположение, для которого λ имеет наибольшее значение. Определено предельное оптимальное расположение. В [3] показано, что нули формы колебаний неподкрепленной балки совпадают с точками предельного оптимального расположения пружин. Для случая шарнирного опирания, рассмотренного в [2], точки $s_i^* = il/n$ являются узлами форм колебаний и, следовательно, предельное оптимальное расположение является равномерным. В случае жесткой заделки предельное оптимальное расположение найдено в статье [3]. В данной работе рассматриваются граничные условия заделки и свободного края.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

После разделения переменных безразмерная система уравнений,

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

© О. М. Малышева, 2006

описывающая потерю устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления p примет вид [1]:

$$\mu^4 \Delta^2 w - \sigma \Delta_k \Phi - \lambda m^2 w = 0, \quad \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (1)$$

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{ds^2} - m^2 w, \quad \Delta_k w = \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad \sigma = 1 - \nu^2,$$

где s — координата, направленная по образующей, Φ — функция усилий, w — проекция перемещения на направление нормали, m — число волн по параллели, ν — коэффициент Пуассона, $\mu^4 = \frac{h^2}{12}$ — малый параметр, h — толщина оболочки, $\lambda = \frac{p(m)R\sigma}{Eh}$, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга. За единицу длины выбран радиус R основания цилиндра.

Предположим, что граничные условия не допускают изгибаний срединной поверхности оболочки. Тогда критическому давлению соответствуют $\lambda \sim \mu^3$, $m \sim \mu^{-1/2}$. Исключая из системы Φ и считая, что $\Delta \sim m^2$, получим приближенное уравнение [2]

$$w^{IV} - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = (m^6 \lambda - \mu^4 m^8) / \sigma. \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (2) в случае заделки края $s = 0$ и свободного края $s = l$ оболочки имеют вид

$$w(0) = w'(0) = w''(l) = w'''(l) = 0, \quad (3)$$

где l — безразмерная длина оболочки.

На рис. 1 изображена оболочка, подкрепленная одинаковыми круговыми стержнями (шпангоутами) по параллелям с координатами $s = s_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$. Введем функцию $w = w^{(i)}$ при $s \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, причем $s_0 = 0$, $s_n = l$:

$$w^{(i)IV} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута $a \ll \mu$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, выполняются условия сопряжения [2]:

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)'} &= w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, & w^{(i)'''} &= w^{(i+1)'''} = -cw^{(i+1)}, \\ s &= s_i, & i &= 1, 2, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

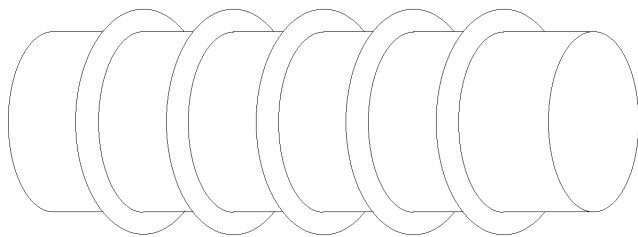


Рис. 1. Подкрепленная оболочка.

где

$$c = m^8 \left(J_x + \frac{e^2 F_c}{1 + \delta} \right), \quad \delta = \frac{F_c (J_k + 2q\mu^4)}{4q^3 \mu^4 m^6 (J_k + q\mu^4)}, \quad q = \frac{(1 - \nu^2)^{1/4}}{\sqrt{2} \mu m^2},$$

$$F_c = \frac{\sigma A_r}{hR}, \quad J_x = \frac{\sigma I_r}{hR^3}, \quad J_k = \frac{\sigma I_k}{hR^3},$$

где e — эксцентриситет шпангоута, A_r — площадь поперечного сечения шпангоута, I_r, I_k — моменты инерции поперечного кручения. Для прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой b величины I_r, I_k, A_r, e можно вычислять по следующим формулам:

$$I_r = \frac{ab^3}{12}, \quad I_k = \frac{a^3b^3}{3(a^2 + b^2)}, \quad A_r = ab, \quad e = \frac{b + h}{2}.$$

3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ШПАНГОУТОВ

Краевая задача (3)–(5) эквивалентна задаче об определении частот поперечных колебаний для балки, удовлетворяющей нашим граничным условиям и подкрепленной пружинами жесткости c в точках $s = s_i$.

Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) имеет вид

$$w_n(s) = U(\alpha_n s) - \eta_n V(\alpha_n s), \quad (6)$$

где

$$U(x) = \operatorname{ch}(x) - \cos(x), \quad V(x) = \operatorname{sh}(x) - \sin(x),$$

$$\alpha_n = \frac{z_n}{l}, \quad \eta_n = \frac{\operatorname{ch}(z_n) + \cos(z_n)}{\operatorname{sh}(z_n) + \sin(z_n)},$$

а величины

$$z_n \simeq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

являются корнями уравнения $\operatorname{ch}(z) \cos(z) = -1$. Численно определяя корни уравнения $w_n(s) = 0$, получим для балки длиной $l = n$ с граничными условиями заделки и свободного края следующие координаты точек предельного оптимального расположения пружин (табл. 1).

Таблица 1. Координаты точек предельного оптимального расположения пружин

n	s_1^*	s_2^*	s_3^*	s_4^*	s_5^*	s_6^*	s_7^*	s_8^*	s_9^*
7	1.158	2.077	3.000	3.923	4.850	5.695	—	—	—
10	1.188	2.131	3.079	4.026	4.974	5.921	6.868	7.816	8.763

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим краевую задачу (3)—(5) о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Воспользуемся методом Рэля. Формулу Рэля для подкрепленной пружинами балки запишем в следующем безразмерном виде:

$$\alpha_1^4 = (I_1 + I_2)/I_0, \quad (8)$$

$$I_1 = \int_0^l (w'')^2 ds, \quad I_2 = c \sum_{i=1}^{n-1} w^2(s_i), \quad I_0 = \int_0^l w^2 ds.$$

Подставим в (8) $w = w_1$, где функция w_1 определяется по формуле (6). Получим

$$\alpha_1^4 = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \frac{\gamma cn}{l}. \quad (9)$$

Здесь z_1 определяется по формуле (7), а функция

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} w_1^2(s_i)$$

зависит от координат пружин s_i .

Значения $\gamma = \gamma_p$ для предельного оптимального и $\gamma = \gamma_r$ для равномерного расположения пружин в случае заделки и свободного края приведены в табл. 2.

Таблица 2. Значения $\gamma = \gamma_p$ для предельного оптимального и $\gamma = \gamma_r$ для равномерного расположения пружин

n	γ_p	γ_r
7	1.0509	0.733014
10	1.0485	0.809039
13	1.0997	0.851440

Задача об устойчивости начального безмоментного напряженного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами и находящейся под действием равномерного внешнего давления p , сводится к краевой задаче на собственные значения, которая мало отличается от краевой задачи, описывающей низкочастотные колебания. Соответствующее критическому давлению приближенное значение λ_1 параметра $\lambda = \frac{\sigma p R}{E h}$ для подкрепленной оболочки с одним краем заделанным и вторым свободным определяется по формуле [2]

$$\lambda_1(\eta) = \min_m \left(\frac{\sigma \alpha^4(\eta, m)}{m^6} + \mu^4 m^2 \right), \quad (10)$$

где α – собственное значение краевой задачи (3)–(5).

Для неподкрепленной оболочки $\eta = 0$, $\alpha = \frac{z_1}{l}$. С помощью дифференцирования по m правой части (9) получаем

$$\lambda_1(0) = 4\mu^3 \frac{z_1}{l} \sqrt[4]{\frac{\sigma}{27}}.$$

Для определения α можно воспользоваться приближенной фор-

мулой (8):

$$\alpha^4 = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \gamma \frac{cn}{l} = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \gamma \eta \frac{\mu^4 m^8}{\sigma}, \quad (11)$$

$$\eta = \frac{cn\sigma}{l\mu^4 m^8} = \frac{12\sigma n I}{h^3 l},$$

где I – момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра.

Рассмотрим случай $e = 0$. Подставив (11) в (10), получим

$$\lambda_1(\eta) = \lambda_1(0)(1 + \gamma\eta)^{3/4}. \quad (12)$$

С увеличением η увеличивается и λ_1 , однако формулой (12) нельзя пользоваться при больших значениях η , так как существует параметр частоты λ_n , который не зависит от η . Действительно, собственное значение α_n краевой задачи (3),(4) одновременно является собственным значением краевой задачи (3)–(5), так как форма колебаний неподкрепленной оболочки $w_n(s)$ удовлетворяет граничным условиям (5). Соответствующий α_n параметр частоты

$$\lambda_n = \min_m \left(\frac{\sigma \alpha_n^4}{m^6} + \mu^4 m^2 \right) = 4\mu^3 \alpha^4 \sqrt{\frac{\sigma}{27}} = \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2 \lambda_1(0)$$

на зависит от η .

Параметр η^* , являющийся корнем уравнения

$$\lambda_1(0)(1 + \gamma\eta)^{3/4} = \lambda_n,$$

называется эффективной жесткостью шпангоута. Увеличение жесткости шпангоута η после достижения ею значения η^* не приводит к увеличению наименьшего параметра частоты. Следовательно,

$$\frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} = \begin{cases} \sqrt[4]{(1 + \gamma\eta)^3}, & \eta \leq \eta^*, \\ \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta > \eta^*. \end{cases} \quad (13)$$

$$\eta^* = \frac{1}{\gamma} \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} - 1 \right). \quad (14)$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ $e = 0$

Рассмотрим задачу о потере устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки под действием внешнего бокового давления. Критическое давление p_0 для гладкой цилиндрической оболочки (с одним краем заделанным, вторым — свободным), имеющей безразмерную длину l и толщину h_0 , можно определить с помощью приближенной формулы Саутуэлла—Папковича

$$p_0 = \frac{4Eh_0^{5/2}1.875}{6^{2/3}l(1-\nu^2)^{3/4}}.$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n - 1$ шпангоут прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой $b = ka$, причем масса подкрепленной оболочки $M_s = M(h) + M_r$, где $M(h) = 2\pi R^3 \rho h l$ — масса обшивки, $M_r = 2\pi R^3 \rho (n - 1)a^2 k$ — масса шпангоутов, совпадает с массой гладкой оболочки $M_0 = M(h_0)$.

Для оболочки с той же массой, подкрепленной равноотстоящими шпангоутами, критическое давление p_1 определим с помощью формулы (13):

$$f_b = \frac{p_1}{p_0} = \begin{cases} d^{5/2} (1 + \gamma\eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta > \eta_*, \end{cases} \quad (15)$$

где $d = \frac{h}{h_0}$, $\eta = \frac{Ba^4}{d^3}$, $B = \frac{\sigma n k^3}{h_0^3 l}$, а η_* определяется по формуле (14).

Из условия $M_s = M_0$ следует, что

$$d = 1 - Aa^2, \quad A = \frac{(n-1)k}{lh_0}, \quad (16)$$

$$f_b(d) = \frac{p_1}{p_0} = \begin{cases} d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & 0 \leq d \leq d_*, \\ d^{5/2} \left[1 + \gamma\beta \frac{(d-1)^2}{d^3}\right]^{3/4}, & d_* \leq d < l, \end{cases} \quad (17)$$

где $\beta = B/A^2$, а $d_* \in [0, 1]$ — корень кубического уравнения

$$d^3 - q(d-1)^2 = 0, \quad q = \beta/\eta^*. \quad (18)$$

Оптимальными будем считать значения параметров подкрепленной оболочки, для которых функция $f_b(d)$ имеет наибольшее значение. Воспользовавшись результатами [2], где рассматривался случай шарнирного опирания, можно показать, что для тонких оболочек эта функция достигает максимума $f_* = (d_*)^{5/2} \left(\frac{2m+1}{3}\right)$ при $d = d_*$. Оптимальное значение a_* параметра a определяется по формуле

$$a_* = \sqrt{(1 - d_*)/A}. \quad (19)$$

В качестве примера рассмотрим подкрепленную оболочку при следующих значениях параметров: $l = 6$, $h_0 = 0.0119$, $\nu = 0.3$, $E_c = E$, $k = 2.1527$. В табл. 3 приведены значения d_* , a_* и f_* . При вычислении η_* использовалось приближенное равенство $\gamma \simeq 1$.

Таблица 3. Значения d_* , a_* и f_* для подкрепленной оболочки

N	d_*	a_*	f_*
6	0.8457791	0.0291980	3.2894
9	0.7802876	0.0284554	3.7647
12	0.7248747	0.0275760	4.0262
15	0.6776083	0.0266995	4.1576

В рассматриваемом примере функция f_* растет с увеличением N . Следовательно, установка большего количества шпангоутов, имеющих эффективную жесткость $\eta = \eta_*$, приводит к наибольшему увеличению критического давления.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА

Рассмотрим случай, когда эксцентриситет e не равен нулю. В работе [4] критическое давление для шарнирно опертой подкрепленной цилиндрической оболочки определяется по следующей формуле:

$$p(m) = \frac{E}{R} \left[\frac{h\alpha^4}{(m^2 - 1 + \frac{\alpha^2}{2})(m^2 + \alpha^2)^2} + \frac{I_c(m^2 - 1)}{R^2 L_r} \right], \quad (20)$$

где E — модуль Юнга, $\alpha = \pi R/L$, L — длина цилиндрической оболочки, $L_r = L/n$ — расстояние между шпангоутами, $n = N + 1$, где N — количество шпангоутов, R — радиус цилиндрической оболочки, m — число волн по параллели, h — толщина оболочки, I_c — момент инерции поперечного сечения шпангоута и сечения части оболочки, заключенной между соседними шпангоутами, относительно их общего центра масс C . Будем называть эту формулу формулой Брайона—Кендрика.

В случае заделки и свободного края в формулу Брайона—Кендрика надо подставить значение $\alpha = \frac{1.875R}{L}$.

Формула (20) получена с помощью замены изгибной жесткости части подкрепленной оболочки, содержащей один шпангоут, жесткостью эквивалентного кольца. Такой подход выглядит вполне разумным с точки зрения здравого смысла. В [4] показано, что при некоторых значениях параметров подкрепленной оболочки результаты, полученные по формуле (20), согласуются с результатами, найденными с помощью более точных моделей.

Предполагая, что шпангоуты и оболочка изготовлены из одинакового материала, и используя теорему о моментах инерции относительно параллельных осей, величину момента I_c для шпангоута с прямоугольным поперечным сечением (рис. 2) можно определить по следующей формуле:

$$I_c = I_r + (e - e_c)^2 A_r + (I_s + A_s e_c^2) / \sigma, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad (21)$$

$$e_c = \frac{e A_r}{A_r + A_s}, \quad e = \frac{b + h}{2}, \quad (22)$$

$$I_s = \frac{h^3 L_r}{12}, \quad A_s = h L_r, \quad I_r = \frac{ab^3}{12}, \quad A_r = ab, \quad (23)$$

где I_r — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно его центра масс C_r , A_r — площадь поперечного сечения шпангоута, e и e_c — расстояния от срединной поверхности оболочки до точек C_r и C , I_s — момент инерции части оболочки, заключенной между соседними шпангоутами, относительно ее центра масс, ν — коэффициент Пуассона.

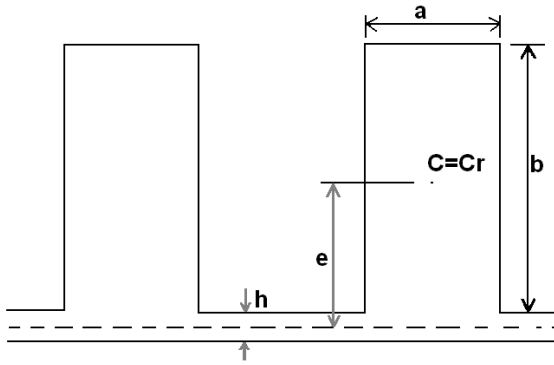


Рис. 2. Фрагмент поперечного сечения подкрепленной оболочки с прямоугольным сечением шпангоута.

Отбрасывание в формуле (20) слагаемых $O(m^{-2})$ по сравнению со слагаемыми $O(1)$ дает приближенную формулу Брайона—Кендрика:

$$p_c = \min_m p(m), \quad p(m) = \frac{E}{R} \left(\frac{h\alpha^4}{m^6} + m^2 \frac{I_c}{R^2 L_r} \right). \quad (24)$$

Перейдем от размерных переменных к безразмерным. Тогда

$$\lambda = \frac{\sigma\alpha^4}{m^6} + \mu^4 m^2 + m^2 \left(\frac{\sigma I_r n}{hl} + \frac{e^2 ab (ab + \sigma h \frac{l}{n})}{(ab + h \frac{l}{n})^2} \right). \quad (25)$$

Для шпангоутов без учета эксцентриситета для параметра λ в безразмерных переменных в [3] было получено равенство

$$\lambda = \frac{\sigma\alpha^4}{m^6} + \mu^4 m^2 + \frac{\sigma I_r n}{hR^3 \mu^4 l} m^2 = \frac{\sigma\alpha^4}{m^6} + \mu^4 m^2 + \eta m^2 \mu^4. \quad (26)$$

С учетом эксцентриситета из (25) можно увидеть, что выражение для параметра η примет следующий вид:

$$\eta = \frac{\sigma I_r n}{\mu^4 hl} + \frac{e^2 ab (ab + \sigma h \frac{l}{n})}{\mu^4 (ab + h \frac{l}{n})^2}, \quad (27)$$

где

$$I_r = \frac{a^4 k^3}{12}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12} = \frac{d^2 h_0^2}{12}, \quad e = \frac{ka + dh_0}{2}. \quad (28)$$

Подставив (27) в (26), получим

$$\eta = \frac{\sigma a^4 k^3 n}{h_0^3 d^3 l} + \frac{\left(\frac{ak+h_0d}{2}\right)^2 a^2 k \left(a^2 k + \sigma \frac{h_0 dl}{n}\right) 12}{\left(a^2 k + \frac{h_0 dl}{n}\right)^2 h_0^2 d^2}. \quad (29)$$

Для нахождения оптимального значения a_* параметра a приравняем (14) и (29) и учтем (19).

В табл. 4 приведены значения d_*, a_*, f_* в случае $l = 6, h_0 = 0.0119, \nu = 0.03$ и $k = 2.1527$ для заделки и свободного края.

Таблица 4. Значения d_*, a_*, f_* для заделки и свободного края

N	d_*	a_*	f_*
6	0.9235654	0.0205554	4.098634
9	0.8822191	0.0208340	5.117281
12	0.842560	0.0208605	5.864680
15	0.8050671	0.0207613	6.396949

Как и в случае $e = 0$, функция f_* растет с увеличением N .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается тонкая подкрепленная шпангоутами цилиндрическая оболочка. На краях оболочки заданы граничные условия заделки и свободного края.

В работе осуществлен переход от гладкой оболочки к оптимальной подкрепленной оболочке с сохранением длины и массы.

Также найдены оптимальные параметры подкрепленной прямоугольными шпангоутами цилиндрической оболочки, позволяющие получить наибольшее значение критического давления в случае отсутствия эксцентриситета и его наличия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы.

М.: Физматлит; Наука, 1995. 320 с.

2. *Филиппов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 196 с.

3. *Филиппов С.Б., Лопатухин А.Л.* Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2001. Вып. 2 (9). С. 84–90.

4. *Gill S.S.* The stress analysis of pressure vessels and pressure components. Oxford: Pergamon Press, 1970. P. 405–511.

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ

М Е Ковченко

Доклад на семинаре 14 февраля 2006 г.

РЕЗЮМЕ

Исследовано напряженно-деформированное состояние прямоугольной и круговой пластин под действием касательных напряжений. Доказано, что результаты, полученные с применением формул теории упругости, при уменьшении ширины пластины переходят в результаты, полученные при рассмотрении пластины как стержня. Найдена погрешность формул теории стержней для некоторых значений ширины пластины. С помощью асимптотических методов изучена устойчивость под действием внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной. В этой задаче величина критического давления зависит от жесткости пластины на изгиб в ее плоскости. Показано, что при уменьшении ширины пластины формула для ее жесткости переходит в формулу для жесткости стержня. Найдена погрешность вычисления параметра нагружения, возникающая при использовании стержневой модели шпангоута вместо более точной пластиночной модели¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории подкрепленных оболочек [1] шпангоуты и стрингеры обычно описываются стержневой теорией. Но если ширина шпангоута велика, то стержневая модель не применима и необходимо использовать более точные формулы теории упругости.

Цель данной работы состоит в том, чтобы показать, что решения, полученные с помощью формул теории упругости, при уменьшении ширины шпангоута переходят в известные решения теории стержней, а также оценить точность стержневых формул в сравнении с формулами теории упругости.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

Были рассмотрены три задачи: напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины под действием приложенных касательных напряжений; напряженное состояние круговой пластины под действием касательных напряжений; устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной, под действием равномерного внешнего давления.

Некоторые задачи, подобные описанным выше, рассмотрены в книге С. П. Тимошенко [2], а именно: изгиб четверти кольца силой, приложенной на конце; напряженное состояние кольца при полярно-симметричной нагрузке; напряженное состояние прямоугольной пластины под действием нормальной нагрузки.

2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

2.1. Постановка и решение задачи при помощи формул теории упругости

Рассмотрим пластину шириной $2c$ и длиной l под действием касательных непрерывно распределенных усилий на верхней и нижней гранях с интенсивностями $\tau_0 \cos \alpha x$ (рис. 1).

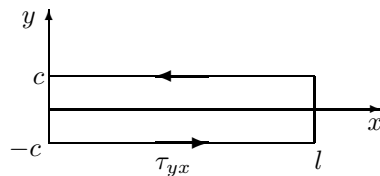


Рис. 1. Прямоугольная пластина под действием касательных напряжений.

Эту плоскую задачу можно решать, используя функцию напряжений $\varphi(x, y)$ [2]. Тогда вместо уравнений равновесия получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения

$\varphi(x, y)$. В прямоугольных координатах оно имеет вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

Функцию φ будем искать в виде

$$\varphi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y), \quad (2)$$

где m — целое число, l — длина пластины. Подставляя (2) в (1) и используя обозначение $\frac{m\pi}{l} = \alpha$, получаем следующее уравнение для определения $f(y)$:

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{(iv)}(y) = 0. \quad (3)$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y.$$

Компоненты напряжений выражаются через функцию напряжений по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sin \alpha x \left[C_1 \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha y \right. \\ &\quad \left. + C_3 \alpha (2 \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) + C_4 \alpha (2 \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) \right], \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y \\ &\quad + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = -\alpha \cos \alpha x \left[C_1 \alpha \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \alpha \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ &\quad \left. + C_3 (\operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) + C_4 (\operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Из граничных условий

$$y = -c \begin{cases} \tau_{yx} = \tau_0 \cos \alpha x \\ \sigma_y = 0 \end{cases} \quad y = c \begin{cases} \tau_{yx} = \tau_0 \cos \alpha x \\ \sigma_y = 0 \end{cases} \\ 0 \leq x \leq l$$

находим произвольные постоянные

$$C_1 = C_4 = 0,$$

$$C_2 = \frac{c\tau_0 \operatorname{ch}(\alpha c)}{\alpha(\operatorname{ch}(\alpha c) \operatorname{sh}(\alpha c) - \alpha c)}, \quad C_3 = -\frac{\tau_0 \operatorname{sh}(\alpha c)}{\alpha(\operatorname{ch}(\alpha c) \operatorname{sh}(\alpha c) - \alpha c)}.$$

Подстановка выражений для C_i в формулы (4) позволяет найти компоненты напряжений. В частности,

$$\sigma_x = \sin \alpha x \left[\tau_0 \frac{\alpha c \operatorname{ch} \alpha c}{\operatorname{ch} \alpha c \operatorname{sh} \alpha c - \alpha c} \operatorname{sh} \alpha y - \tau_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha c}{\operatorname{ch} \alpha c \operatorname{sh} \alpha c - \alpha c} (2 \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \right]. \quad (5)$$

2.2. Решение задачи о прямоугольной пластине с использованием уравнений теории стержней

Рассмотрим консоль толщины $d = 1$ и ширины $y = 2c$ под действием изгибающего момента:

$$M(x) = -h \int_0^x \tau_{xy} dx = -\frac{h\tau_0}{\alpha} \sin \alpha x = -\frac{2c\tau_0}{\alpha} \sin \alpha x. \quad (6)$$

Из уравнения равновесия [3]

$$\frac{EJ}{\rho} = M(x),$$

где E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения, следует, что

$$\frac{E}{\rho} = -\frac{2c\tau_0}{\alpha J} \sin \alpha x.$$

Принимая во внимание, что $J = 2c^3/3$, находим нормальную компоненту напряжения:

$$\sigma_x = \frac{Ey}{\rho} = -3 \frac{y\tau_0}{c^2 \alpha} \sin \alpha x. \quad (7)$$

Получим теперь выражение для σ_x , осуществив предельный переход при уменьшении ширины пластины c в формуле (5). Подставляя в (5) разложения

$$\operatorname{sh} \alpha c = \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots, \quad \operatorname{ch} \alpha c = 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots \quad (8)$$

и пренебрегая членами высшего порядка малости по сравнению с $(\alpha c)^4$, получаем

$$\sigma_x = -\tau_0 \frac{3y}{\alpha c^2} \sin \alpha x,$$

что совпадает с результатом для стержневой модели (7).

Пусть длина балки составляет $l = 1$, $y = c$, $x = l/(2m)$. Для этих значений параметров относительная погрешность стержневой формулы (7) по сравнению с результатом теории упругости (5) в зависимости от ширины пластины c и числа полуволен m представлена в табл. 1.

Таблица 1. Относительная погрешность вычисления напряжения σ_x по формуле (7) по сравнению с формулой (5)

m	$c = 0.01$	$c = 0.025$	$c = 0.05$
3	0.1%	0.7%	2.7%
5	0.32%	2.0%	7.6%

Погрешность формул теории сопротивления материалов в рассматриваемой задаче увеличивается с ростом ширины пластины c и волнового числа m .

2.3. Определение перемещений

В случае плоского напряженного состояния компоненты деформаций связаны с компонентами напряжений соотношениями [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}.$$

Если деформации известны, то перемещения определяются путем интегрирования уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}.$$

Принимая во внимание, что

$$\varepsilon_y = -\frac{\sin \alpha x}{E} \left(C_2 \alpha^2 (1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha y + C_3 [2\alpha \nu \operatorname{sh} \alpha y + \alpha^2 y (1 + \nu) \operatorname{ch} \alpha y] \right),$$

находим

$$v(x, y) = -\frac{\sin \alpha x}{E} \left(C_2 \alpha (1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha y + C_3 [(1 + \nu) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y + (\nu - 1) \operatorname{ch} \alpha y] \right).$$

Используя разложения в ряд по малому параметру (8), в пределе для прогиба получаем

$$v(x, 0) = -\frac{\sin \alpha x}{\alpha E} \frac{3\tau_0}{(\alpha c)^2}. \quad (9)$$

В сопромате для определения прогиба балки под действием изгибающего момента (6) нужно проинтегрировать уравнение упругой линии [3]:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x).$$

Интегрируя это уравнение и полагая произвольные постоянные нулем, получаем формулу для прогиба:

$$w(x) = -\frac{\sin \alpha x}{\alpha E} \frac{3\tau_0}{(\alpha c)^2},$$

что совпадает с предельной формулой (9).

3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ

3.1. Решение плоской задачи теории упругости

Рассматривается круговая пластина под действием касательных напряжений, приложенных на внутреннем и внешнем радиусе пластины и распределенных по гармоническому закону (рис. 2).

Уравнение для функции напряжений плоской задачи в полярных координатах имеет вид [2]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (10)$$

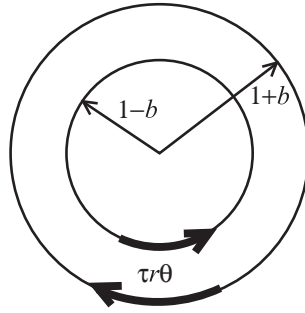


Рис. 2. Круговая пластина под действием касательных напряжений.

Компоненты напряжений выражаются через функцию напряжений по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).$$

Ищем решение уравнения (10) методом разделения переменных. Подставляя в него

$$\varphi = \varphi(r) \sin m\theta,$$

получаем уравнение для функции $\varphi(r)$:

$$\varphi^{(IV)}(r) + \frac{2}{r} \varphi'''(r) - \frac{2m^2 + 1}{r^2} \varphi''(r) + \frac{1 + 2m^2}{r^3} \varphi'(r) + \frac{m^4 - 4m^2}{r^4} \varphi(r) = 0.$$

Замена переменной $r = e^t$ сводит это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\varphi^{(IV)}(t) - 4\varphi'''(t) + \varphi''(t)(4 - 2m^2) + \varphi'(t)(4m^2) + \varphi(t)(m^4 - 4m^2) = 0.$$

Характеристический полином последнего уравнения

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + (4 - 2m^2)\lambda^2 + 4m^2\lambda + m^4 - 4m^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2 - m$, $\lambda_2 = -m$, $\lambda_3 = m$, $\lambda_4 = m + 2$.

Следовательно, решение уравнения (10) имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \sin m\theta (C_1 r^{2-m} + C_2 r^{-m} + C_3 r^m + C_4 r^{m+2}).$$

Для компонент напряжений справедливы формулы

$$\sigma_r = \sin m\theta \left[C_1(-m^2 - m + 2)r^{-m} + C_2(-m^2 - m)r^{-m-2} + C_3(-m^2 + m)r^{m-2} + C_4(-m^2 + m + 2)r^m \right],$$

$$\sigma_\theta = \sin m\theta \left[C_1(m^2 - 3m + 2)r^{-m} + C_2(m^2 + m)r^{-m-2} + C_3(m^2 - m)r^{m-2} + C_4(m^2 + 3m + 2)r^m \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \cos m\theta \left[C_1(m^2 - m)r^{-m} + C_2(m^2 + m)r^{-m-2} - C_3(m^2 - m)r^{m-2} - C_4(m^2 + m)r^m \right].$$

Неизвестные постоянные находятся из граничных условий:

$$r = R : \begin{cases} \tau_{r\theta} = \tau_0 \cos m\theta, \\ \sigma_r = 0, \end{cases} \quad r = r_0 : \begin{cases} \tau_{r\theta} = \tau_0 \cos m\theta, \\ \sigma_r = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $r_0 = 1 - b$ — внутренний радиус пластины, $R = 1 + b$ — внешний радиус пластины ($2b$ — ширина пластины).

В случае малой ширины пластины используем разложения в ряд по степеням малого параметра:

$$(1 + b)^m = 1 + mb + \frac{m(m-1)}{2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} b^3 + \dots$$

Удерживая члены вплоть до третьего порядка малости и полагая $r = 1 + z$, получаем следующее выражение для нормальной компоненты напряжения:

$$\sigma_\theta = -\frac{3z\tau_0}{b^2 m} \sin m\theta. \quad (12)$$

3.2. Использование формул сопряжения

При малой ширине пластины ее можно рассматривать как круговой стержень. Для кривых стержней нормальное напряжение вы-

числяется по формуле [3]

$$\sigma_{\theta} = \frac{M}{S} \frac{z}{\rho},$$

где z — расстояние до нейтральной оси, S — статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси, $\rho = r + z$ (r — радиус кривизны нейтрального слоя), M — приложенный момент. Пластина имеет прямоугольное сечение, поэтому

$$S = \frac{J}{R_0}, \quad r = R_0 \left(1 - \frac{(2b)^2}{12R_0^2} \right),$$

где R_0 — радиус кривизны стержня. В нашем случае $R_0 = 1$, следовательно

$$r = 1 - \frac{b^2}{3}, \quad S = \frac{2}{3} b^3.$$

Принимая во внимание, что изгибающий момент

$$M = -2b \int_0^{\theta} \tau_0 \cos m\theta \, d\theta = -\frac{2b\tau_0}{m} \sin m\theta,$$

получаем формулу для нормальной компоненты напряжения:

$$\sigma_{\theta} = -\frac{3z\tau_0 \sin m\theta}{mb^2(1 - b^3/3 + z)} \approx -\frac{3z\tau_0}{mb^2} \sin m\theta,$$

совпадающую с формулой (12).

Сравним результаты применения теории стержней и теории упругости к решению задачи о круговой пластине. Положим $m = 5$, $\theta = \pi/10$, $z = b$. Результаты расчета относительной погрешности представлены в табл. 2.

Таблица 2. Относительная погрешность вычисления нормальной компоненты напряжения σ_{θ} по теории стержней в сравнении с теорией упругости

m	$b = 0.01$	$b = 0.025$	$b = 0.05$
5	4.6%	4.9%	5.0%

Пусть цилиндрическая оболочка имеет безразмерную толщину h , кольцевая пластина — толщину a . Безразмерная длина цилиндра $l = s_2 - s_1$.

Уравнения устойчивости конической оболочки можно использовать для описания потери устойчивости как цилиндрической оболочки, так и кольцевой пластины. После разделения переменных систему уравнений устойчивости конической оболочки запишем в безразмерном виде [1, 5]:

$$\begin{aligned} T_1' + \frac{B'}{B}(T_1 - T_2) + \frac{m}{B}S &= 0, \\ S' + 2\frac{B'}{B}S - \frac{m}{B}T_2 + \frac{Q_2}{R_2} + 2H' &= 0, \\ Q_1' + \frac{B'}{B}Q_1 + \frac{m}{B}Q_2 - \frac{T_2}{R_2} + \frac{\lambda}{B} [m\vartheta_2 R_2 - (B\vartheta_1 t_1)'] &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по s для цилиндра (по x для пластины), m — число волн по параллели; $B(s)$ — расстояние от точки срединной поверхности оболочки до оси вращения, $R_2(s)$ — главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, $\lambda = \sigma p / (Eh)$ — искомый параметр нагружения, $\sigma = (1 - \nu^2)$, E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона, u, v, w — проекции перемещений точек срединной поверхности на направления касательной к меридиану, касательной к параллели и внешней нормали к поверхности оболочки соответственно, ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота элемента срединной поверхности вокруг тангенциальных осей, T_1, T_2, S — нормальные и сдвигающие усилия, H — крутящий момент.

Будем обозначать величины, характеризующие цилиндрическую оболочку, буквами с верхним индексом (1), а величины, характеризующие кольцевую пластину, буквами с верхним индексом (2). Тогда

$$B^{(1)} = R_2^{(1)} = 1, \quad B^{(2)}(x) = x, \quad 1/R_2^{(2)} = 0. \quad (14)$$

Предположим, что край оболочки $s = s_1$ заделан, а край пластины $x = 1 + b$ свободен. Тогда

$$\begin{aligned} u^{(1)} = v^{(1)} = w^{(1)} = \vartheta_1^{(1)} &= 0, \quad s = s_1, \\ T_1^{(2)} = M_1^{(2)} = S^{(2)} = Q_1^{(2)} &= 0, \quad x = 1 + b. \end{aligned}$$

Кроме того, для цилиндрической оболочки и кольцевой пластины на параллели сопряжения $s = s_2$, $x = 1$ должны быть выполнены условия непрерывности перемещений, усилий, угла поворота ϑ_1 и момента M_1 [1]:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= w^{(1)}, \quad w^{(2)} = -u^{(1)}, \quad T_1^{(2)} = \frac{h}{a}Q_1^{(1)}, \quad Q_1^{(2)} = -\frac{h}{a}T_1^{(1)}, \\ v^{(2)} &= v^{(1)}, \quad \vartheta_1^{(2)} = \vartheta_1^{(1)}, \quad M_1^{(2)} = \frac{h}{a}M_1^{(1)}, \quad S^{(2)} = \frac{h}{a}S^{(1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения критического давления воспользуемся асимптотическим методом интегрирования уравнений устойчивости [5]. Приближенное уравнение для определения критического внешнего давления цилиндрической оболочки имеет вид

$$\frac{d^4 v_0}{ds^4} - \alpha^4 v_0 = 0, \quad (16)$$

где $\alpha^4 = \frac{\lambda_0 - \mu^4 m^8}{1 - \nu^2}$, причем

$$u_0 = v_0', \quad T_{10} = (1 - \nu^2)v_0'', \quad S_0 = -\sigma v_0'''.$$

Здесь v_0, u_0, T_{10} и S_0 — главные члены в асимптотических разложениях перемещений и усилий.

Для того чтобы получить граничные условия для уравнения (16) на подкрепленном крае $s = s_2$, необходимо разделить исходные условия краевой задачи на главные и дополнительные. Критерий, по которому следует проводить разделение простейших граничных условий на краях оболочки, описан в работе [5]. В некоторых случаях для получения главных и дополнительных условий необходимо составлять линейные комбинации исходных граничных условий. Из главных условий, путем отбрасывания второстепенных членов, получают приближенные граничные условия для уравнения (16).

4.2. Задача о деформации пластины в ее плоскости

Для того чтобы получить граничные условия сопряжения оболочки с пластиной, надо решить задачу о деформации пластины (рис. 4).

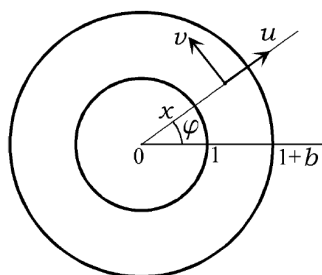


Рис. 4. Система координат на кольцевой пластине.

Жесткость тонкой пластины на изгиб мала по сравнению с ее жесткостью на растяжение-сжатие и сдвиг, поэтому ограничимся исследованием уравнений, описывающих деформацию пластины в ее плоскости [4]:

$$T_1' + \frac{1}{x}(T_1 - T_2) + \frac{m}{x}S = 0, \quad S' + \frac{2}{x}S - \frac{m}{x}T_2 = 0,$$

$$T_1 = u' + \nu \left(\frac{m}{x}v + \frac{u}{x} \right), \quad T_2 = \frac{m}{x}v + \frac{u}{x} + \nu u', \quad (17)$$

$$S = \frac{1-\nu}{2} \left(v' - \frac{v}{x} - \frac{m}{x}u \right).$$

После замены переменной $x = e^t$ в (17) получим систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u - \gamma m^2 u + \delta m \frac{dv}{dt} - (1 + \gamma)mv = 0,$$

$$\gamma \frac{d^2v}{dt^2} - \gamma v - m^2 v + \delta m \frac{du}{dt} - (1 + \gamma)mu = 0, \quad (18)$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
 u^{(2)} &= C_1 x^{m-1} + C_2 \left(-1 + \frac{2\gamma}{\delta m} \right) x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + \\
 &+ C_4 \left(1 + \frac{2\gamma}{\delta m} \right) x^{-m+1}, \\
 v^{(2)} &= -C_1 x^{m-1} + C_2 \left(1 + \frac{2}{\delta m} \right) x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + \\
 &+ C_4 \left(1 - \frac{2}{\delta m} \right) x^{-m+1},
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $\gamma = \frac{1-\nu}{2}$, $\delta = \frac{1+\nu}{2}$.

Подстановка выражений (19) в формулы (17) дает формулы для усилий:

$$\begin{aligned}
 T_1^{(2)} &= 2C_1 \gamma (m-1) x^{m-2} - 2C_2 \gamma \frac{(m+1)(m-2)}{m} x^m - \\
 &\quad - 2\gamma (m+1) C_3 x^{-m-2} - 2C_4 \gamma \frac{(m+1)(m-2)}{m} x^{-m}, \\
 S^{(2)} &= -2C_1 \gamma (m-1) x^{m-2} + 2C_2 \gamma (m+1) x^m - \\
 &\quad - 2\gamma (m+1) C_3 x^{-m-2} - 2C_4 \gamma (m-1) x^{-m}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

4.3. Граничные условия в задаче об устойчивости цилиндра, подкрепленного пластиной

Рассмотрим условия, которые должны выполняться на параллели сопряжения цилиндрической оболочки и пластины. Опираание на мембрану (шарнирный край) предполагает, что жесткость пластины на изгиб равна нулю, а жесткость на растяжение бесконечна. В этом случае $M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0$, $v^{(1)} = w^{(1)} = 0$ и граничные условия на краю $s = s_2$ цилиндрической оболочки имеют вид

$$v^{(1)} = w^{(1)} = T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0.$$

Будем считать, что пластина не сопротивляется изгибу, но имеет конечную жесткость на растяжение. Тогда, как и в случае опирания на мембрану, из равенств $M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0$ следуют условия

$$T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0, \tag{21}$$

но

$$w^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad S^{(1)} = \frac{a}{h} S^{(2)}, \quad Q_1^{(1)} = \frac{a}{h} T_1^{(2)}. \quad (22)$$

На свободном крае пластины при $x = 1 + b$

$$T_1^{(2)} = S^{(2)} = 0. \quad (23)$$

Из первых двух равенств (22) и из условий (23) находим произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 , выраженные через перемещения оболочки.

Граничные условия для уравнения (16) при $s = s_2$ определяются после выделения двух главных условий из условий (21) и двух последних условий (22). В рассматриваемой задаче условие

$$T_1^{(1)} = 0 \quad (24)$$

является главным. В качестве второго главного условия возьмем линейную комбинацию условий $S^{(1)} - mQ_1^{(1)} = 0$, сохраняя в ней только главные члены.

Принимая во внимание, что

$$S^{(1)} - mQ_1^{(1)} \simeq S_0^{(1)} m^{-3}, \quad w^{(1)} \simeq w_0^{(1)}, \quad w_0^{(1)} \simeq -v_0^{(1)},$$

получим второе главное условие в виде

$$S_0^{(1)} + cv_0 = 0, \quad (25)$$

где выражение для жесткости c имеет вид

$$c = -\frac{2am^4\gamma\delta[fm(1-d^2) + f\gamma(d-1)^2 + b(2+b)dm^2(2+2b\delta + b^2\delta)]}{h[\gamma(4d + f\delta(d-1)^2) + \delta(f(1+d)^2 + m^2b^2d\delta(b+2)^2)]}, \quad (26)$$

$$f = (1+b)^2, \quad d = (1+b)^{2m}.$$

При уменьшении b формула (26) переходит в формулу, соответствующую стержневой модели шпангоута [1]:

$$c_b = \frac{m^8 \sigma a^4 k^3}{3h}, \quad (27)$$

где $k = b/a$, b — ширина шпангоута, a — его толщина, а при увеличении ширины — в формулу, полученную для бесконечной пластины [4]:

$$c_p = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} \frac{a}{h} m^5.$$

Следовательно, условие (25) является главным как при малых, так и при больших значениях ширины пластины b . Для того чтобы выяснить, является ли это условие главным при всех значениях b , требуется дополнительное исследование. Тем не менее полученные результаты позволяют оценить погрешность, возникающую при использовании стержневой модели шпангоута (27) вместо более точной пластиночной модели (26).

4.4. Пример расчета

Условия сопряжения (24), (25) цилиндрической оболочки с пластиной отличаются от условий сопряжения цилиндра со стержнем только значением постоянной в условии (25), поэтому для определения приближенного значения критической нагрузки можно использовать алгоритм из [1].

Общее решение уравнения (16) ищем в виде линейной комбинации функций Крылова:

$$v_0 = AS(z) + BV(z) + CU(z) + DT(z), \quad z = \alpha(s - s_1). \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S(z) &= \operatorname{ch} z + \cos z, & V(z) &= \operatorname{sh} z - \sin z, \\ U(z) &= \operatorname{ch} z - \cos z, & T(z) &= \operatorname{sh} z + \sin z. \end{aligned}$$

Подставим (28) в граничные условия жесткой заделки левого края оболочки $s = s_1$:

$$v_0 = v'_0 = 0$$

и условия сопряжения (24), (25) и приравняем нулю определитель системы линейных алгебраических уравнений с неизвестными A, B, C, D . Получим уравнение для определения α , которое можно представить в виде

$$\sigma \alpha^3 (\cos z + \operatorname{ch}^{-1} z) = c (\operatorname{th} z \cos z - \sin z), \quad (29)$$

где $z = \alpha l$. После определения наименьшего корня z_1 уравнения (29) искомое значение параметра нагружения находим по формуле

$$\lambda \simeq \min_m \left(\frac{\sigma \alpha_1^4}{m^6} + \mu^4 m^2 \right), \quad \alpha_1 = \frac{z_1}{l}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12}.$$

Рассмотрим конструкцию со следующими параметрами:

$$h = 0.01, \quad l = 3.0, \quad \nu = 0.3,$$

число волн по параллели m выбиралось таким образом, чтобы параметр нагружения был наименьший.

Относительная погрешность вычисления критического давления с помощью стержневой модели для шпангоутов разной ширины представлена в табл. 3.

Таблица 3. Относительная погрешность вычисления критического давления с использованием стержневой модели

a	$b = 0.01$	$b = 0.025$	$b = 0.05$
0.001	0.05%	0.9%	6.1%
0.002	0.1%	1.6%	8.5%
0.003	0.15%	2.3%	1.9%
0.004	0.2%	2.9%	1.5%

С увеличением толщины и ширины пластины растет погрешность вычисления критического давления с помощью стержневой модели шпангоута. Уменьшение погрешности при $a = 0.003, b = 0.05$, а также при $a = 0.004, b = 0.05$ связано с тем, что параметр нагружения принимает минимальное значение при другом значении числа волн по параллели m .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано напряженно-деформированное состояние прямоугольной и круговой пластин под действием касательных напряжений. Показано, что результаты, полученные с применением формул теории упругости, при уменьшении ширины пластины переходят в результаты, полученные при рассмотрении пластины как

стержня. Найдена погрешность формул теории стержней для некоторых значений ширины пластины. С увеличением ширины пластины эта погрешность растет. С помощью асимптотических методов изучена устойчивость под действием внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной. Показано, что при уменьшении ширины пластины формула для ее жесткости переходит в формулу для жесткости стержня. Найдена погрешность вычисления параметра нагружения, возникающая при использовании стержневой модели шпангоута вместо более точной пластиночной модели. С увеличением толщины и ширины пластины растет погрешность вычисления по стержневой формуле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб., 1999.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М., 1951.
4. Макаренко И.Н., Филиппов С.Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 1. С. 94–102.
5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

М. А. НАРБУТ*†

Доклад на семинаре 28 марта 2006 г.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются алгоритмы решения задач деформационной теории пластичности (нелинейной теории упругости) для сред с упрочнением и задач нелинейной фильтрации, основанные на итерационных процессах, предложенных и обоснованных А.И. Кошелевым. Алгоритмы реализованы в системе компьютерной математики MATLAB¹.

Цель данной работы заключается в построении вычислительных алгоритмов, реализующих метод последовательных приближений для решения задач нелинейной теории упругости в средах с упрочнением, а также нелинейных задач фильтрации. При решении стационарных задач теории упругости мы используем универсальный итерационный процесс

$$\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(n)} - \varepsilon \left(\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(n)}) + \mathbf{f} \right), \quad (1)$$

предложенный и обоснованный в работах А.И. Кошелева (см., например, монографию [1]), а также метод упругих решений — также в редакции А.И. Кошелева. В формуле (1) Δ — оператор Лапласа, \mathbf{u} — поле перемещений, которое следует найти в заданной ограниченной области $\Omega \in R^m$ ($m \geq 2$), на границе которой выполняется условие

$$\mathbf{u} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

\mathbf{A} — оператор нелинейной задачи, \mathbf{f} — вектор объемных сил. Если параметр $\varepsilon > 0$ достаточно мал, итерационный процесс (1) сходит-

^{*1}Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00053 и № 06-01-00321).

†© М.,А. Нарбут, 2006

ся к обобщенному решению $\mathbf{u}(x)$ в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$. Доказано [1], что при дополнительных ограничениях на спектр матрицы эллиптичности оператора \mathbf{A} решение $\mathbf{u}(x)$ оказывается гельдеровым, а значит, и непрерывным. Для задач линейной теории упругости параметр $\varepsilon > 0$ не должен превосходить величины $2\mu/(m\lambda + 2\mu)^2$, где λ и μ — параметры Ламе, при этом оптимальная скорость сходимости достигается при $\varepsilon = \mu/(m\lambda + 2\mu)^2$. Для нелинейных задач теории упругости, постановка которых в условиях активного нагружения во всех точках области Ω совпадает с постановкой задач деформационной теории пластичности [2], для допустимых значений $\varepsilon > 0$ можно получить оценки, используя лемму 4.2.1 из книги [1]. Однако на практике удобнее начинать со значений параметра $\varepsilon > 0$, полученных для линейной задачи.

Для обращения оператора Лапласа в (1) воспользуемся системой компьютерной математики MATLAB [3]. Решение уравнений в частных производных в плоских областях $\Omega \in R^2$ выполняется в модуле ToolBox PDE методом конечных элементов. Разбиение заданной области Ω на конечные элементы, в качестве которых выбраны треугольники, производится программой автоматически, имеется возможность измельчения сетки элементов для достижения требуемой точности.

Как известно, при использовании метода конечных элементов задача для системы уравнений Пуассона

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

сводится к решению системы линейных уравнений вида

$$\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (3)$$

где \mathbf{C} — матрица жесткости, \mathbf{U} — вектор узловых перемещений, а вектор правой части \mathbf{R} вычисляется на сетке конечных элементов по \mathbf{F} . В рассматриваемом нами случае численной реализации итерационного процесса (1) для вычисления \mathbf{F} , на первый взгляд, нужно знать вторые производные перемещений $\mathbf{u}^{(n)}$, найденных в узлах сетки конечных элементов на предыдущем шаге процесса. Эти значения можно определить, используя двумерные кубические

сплайны, техника работы с которыми также поддерживается системой MATLAB. Однако более эффективным оказывается подход, при котором задача (1) сводится к системе уравнений

$$\mathbf{C}\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{C}\mathbf{U}^{(n)} - \varepsilon \left(\sum_e \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^{(n)})_{\text{mes}(\omega_e)} - \mathbf{R} \right), \quad (4)$$

где \mathbf{B} — матрица градиентов [4], $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$ — вектор напряжений на элементе; суммирование в формуле (4) ведется по конечным элементам ω_e . Алгоритм решения нелинейной задачи, основанный на формуле (4), требует вычисления компонент деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$, т. е. фактически производных первого порядка от перемещений, которые для выбранной схемы метода конечных элементов в пределах каждого элемента постоянны и $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}$.

Система уравнений (4) может быть получена следующим образом. Запишем уравнение (1) в интегральной форме, умножив обе его части на произвольную достаточно гладкую векторную функцию $\mathbf{v}(x)$ и проинтегрировав по области Ω :

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{(n+1)} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{(n)} \mathbf{v} \, dx - \varepsilon \int_{\Omega} (\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(n)}) + \mathbf{f}) \mathbf{v} \, dx.$$

Интегрируя по частям с учетом условия (2), получим интегральное тождество

$$\int_{\Omega} D\mathbf{u}^{(n+1)} D\mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} D\mathbf{u}^{(n)} D\mathbf{v} \, dx - \varepsilon \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{(n)}) D\mathbf{v} \, dx + \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, dx. \quad (5)$$

На конечно-элементной сетке векторная функция $\mathbf{v}(x)$ задается своими узловыми значениями \mathbf{V} , а ее производные в пределах каждого элемента вычисляются как произведения матрицы градиентов \mathbf{B} на соответствующий вектор узловых перемещений. В результате тождество (5) сводится к матричному уравнению

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C}\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{V}^T \mathbf{C}\mathbf{U}^{(n)} - \varepsilon \mathbf{V}^T \left(\sum_e \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^{(n)})_{\text{mes}(\omega_e)} - \mathbf{R} \right). \quad (6)$$

Поскольку вектор \mathbf{V} может принимать произвольные значения, тождество (6) эквивалентно системе (4).

При проведении расчетов ограничимся плоскими задачами нелинейной теории упругости для изотропных упрочняющихся сред. Рассмотрим цилиндрическую область D с осью x_3 и поперечным сечением $\Omega = \{(x_1, x_2)\}$. В случае плоской деформации предполагается, что поле перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ и объемные силы $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ не зависят от x_3 и $u_3 = f_3 = 0$. Поэтому

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0,$$

а $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ не зависят от x_3 .

Предположим, что на боковой поверхности цилиндра $\partial\Omega$ выполняется краевое условие (2). Что же касается граничных условий на торцах цилиндра $x_3 = 0$ и $x_3 = h$, то здесь следует принять

$$u_3 \Big|_{x_3=0} = u_3 \Big|_{x_3=h} = 0. \quad (7)$$

Кроме того, на торцах цилиндра в случае плоской деформации изотропной среды обращаются в нуль касательные напряжения:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (8)$$

Условия же полного закрепления на торцах

$$\mathbf{u} \Big|_{x_3=0} = \mathbf{u} \Big|_{x_3=h} = 0,$$

вообще говоря, не совместимы с требованием плоской деформации цилиндра.

Заметим, что вместо условий смешанного типа (7), (8) можно задавать на торцах напряжения, при этом условия (8) сохраняются, а величина σ_{33} , как и в случае линейно-упругой среды, определяется после решения двумерной задачи. Однако в обоих рассмотренных случаях вопрос о существовании и единственности регулярного решения нелинейной задачи теории упругости в цилиндрической области D остается открытым. Что же касается собственно двумерной задачи о плоской деформации в области $\Omega \subset R^2$, то существование

и единственность ее решения удается доказать при некоторых ограничениях на определяющие соотношения упрочняющейся среды [5].

Для записи определяющих соотношений мы исходим из того, что в соответствии с постулатами деформационной теории пластичности относительное изменение объема $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ пропорционально среднему давлению $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$:

$$\sigma = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta, \quad (9)$$

где λ и μ — постоянные Ламе, а компоненты девиатора напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ пропорциональны соответствующим компонентам девиатора деформаций $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij}$:

$$s_{ij} = \Psi e_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (10)$$

при этом величина $\Psi = 2g(\Gamma)$ является функцией интенсивности деформаций сдвига

$$\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}} = \sqrt{\sum_{j<l} \left[\frac{2}{3} (D_j u_j - D_l u_l)^2 + (D_j u_l + D_l u_j)^2 \right]}.$$

Умножая равенство (10) на себя почленно и выполняя суммирование по повторяющимся индексам, нетрудно проверить, что для интенсивности касательных напряжений

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\sum_{j<l} \left[\frac{1}{6} (\sigma_{jj} - \sigma_{ll})^2 + \sigma_{jl}^2 \right]}$$

выполняется равенство

$$T = g(\Gamma) \Gamma. \quad (11)$$

Остается заметить, что из равенств (9) — (11) следует, что

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3} (\mu - g) \right) \theta \delta_{ij} + 2g e_{ij}. \quad (12)$$

При $g = \mu$ формула (12) дает закон Гука для изотропной линейно-упругой среды.

Ряд авторов вместо введенных выше величин T и Γ используют интенсивности напряжений $\sigma_0 = T\sqrt{3}$ и деформаций $e_0 = \Gamma/\sqrt{3}$, при этом соотношение (11) записывается в виде

$$\sigma_0 = \Phi(e_0) \equiv 3\mu(1 - \omega(e_0))e_0, \quad (13)$$

причем дифференцируемая почти всюду функция ω удовлетворяет неравенствам

$$\inf(1 - \omega - \omega'e_0) > 0, \quad \omega \geq 0, \quad \omega' \geq 0.$$

Сравнивая формулы (11) и (13), видим, что

$$g(\Gamma) = \mu(1 - \omega(e_0)) = \mu(1 - \omega(\Gamma/\sqrt{3})).$$

Что же касается соотношения (12), то его можно переписать в виде

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\omega\right)\theta\delta_{ij} + 2\mu(1 - \omega)\varepsilon_{ij}. \quad (14)$$

Из формул (12), (14) следует, что в случае плоской деформации

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (15)$$

всюду в области D , а остальные компоненты тензора напряжений не зависят от x_3 . Поэтому дифференциальные уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{cases} D_1\sigma_{11} + D_2\sigma_{12} + f_1 = 0, \\ D_1\sigma_{12} + D_2\sigma_{22} + f_2 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где f_1, f_2 — заданные объемные силы.

Подставляя выражение (12) в (16) и учитывая, что $\varepsilon_{ij} = (D_i u_j + D_j u_i)/2$, получим систему уравнений нелинейной задачи в перемещениях

$$A_j(\mathbf{u}) + f_j = 0, \quad (j = 1, 2), \quad (17)$$

которую будем решать при граничном условии (2).

Для решения нелинейных задач теории упругости мы должны конкретизировать функцию $g(\Gamma) = \mu(1 - \omega)$ из (11). Остановимся на билинейной зависимости

$$T = \begin{cases} \mu\Gamma, & \Gamma \leq \Gamma_*, \\ \mu\Gamma_* + \alpha(\Gamma - \Gamma_*), & \Gamma > \Gamma_*, \end{cases} \quad (18)$$

где параметр упрочнения $\alpha \in [0, \mu]$.

Зависимости (18) соответствует функция

$$\omega(e_0) = \begin{cases} 0, & e_0 \leq e_*, \\ \omega_1 \left(1 - \frac{e_*}{e_0}\right), & e_0 > e_*, \end{cases}$$

причем $e_* = \Gamma_*/\sqrt{3}$, $\omega_1 = 1 - \alpha/\mu$.

В качестве модельного примера рассмотрим задачу (17) в прямоугольной области $\Omega = [-1, 1] \times [-0.5, 0.5]$. Плотность объемных сил зададим формулами

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (\lambda + 6\mu)\pi^2 \sin \pi x_1 \sin 2\pi x_2, \\ f_2(x) &= -2(\lambda + \mu)\pi^2 \cos \pi x_1 \cos 2\pi x_2, \end{aligned} \quad x = (x_1, x_2), \quad (19)$$

выбранными с таким расчетом, чтобы точное решение задачи линейной теории упругости с параметрами Ламе λ и μ имело вид

$$u_1(x) = \sin \pi x_1 \sin 2\pi x_2, \quad u_2(x) = 0.$$

О сходимости итерационного процесса (1) будем судить по величине сеточных норм $a = \|u_1^{(n+1)} - u_1^{(n)}\|/\|u_1^{(n)}\|$, $b = \|u_2^{(n+1)} - u_2^{(n)}\|/\|u_1^{(n)}\|$. Вычислительный эксперимент показал, что для достижения точности $a = O(10^{-3})$ при значениях упругих параметров $\mu = 1$ и $\lambda = 0$ требуется около 30 итераций.

Более высокая скорость сходимости обеспечивается применением метода упругих решений

$$\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} + \text{grad div } \mathbf{u}^{(n+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \text{grad div } \mathbf{u}^{(n)} - \varepsilon \left(\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(n)}) + \mathbf{f} \right) \quad (20)$$

с тем же граничным условием (2). Теперь на каждом шаге итерационного процесса решается линейная задача теории упругости с параметрами Ламе $\mu = 1$ и $\lambda = 0$. Доказано [1], что процесс (20) сходится в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$, при этом оптимальная скорость сходимости в случае линейно-упругой задачи достигается при $\varepsilon = 4\mu/(m\lambda + 2\mu)^2$.

Решение плоских задач линейной теории упругости также реализовано в PDE ToolBox, поэтому для обращения оператора Ламе в

(20) мы снова обратимся к системе MATLAB. Как и в предыдущем параграфе, мы переходим к интегральной формулировке задачи, умножая скалярно равенство (20) на произвольную гладкую функцию $\mathbf{v}(x)$ и интегрируя по области Ω :

$$\int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} + \text{grad div } \mathbf{u}^{(n+1)}) \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u}^{(n)} + \text{grad div } \mathbf{u}^{(n)}) \mathbf{v} dx - \varepsilon \int_{\Omega} (\mathbf{A}(\mathbf{u}^{(n)}) + \mathbf{f}) \mathbf{v} dx.$$

После интегрирования по частям и простых преобразований приходим к интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{(n+1)})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})dx = \int_{\Omega} 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{(n)})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})dx - \varepsilon \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(n)})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})dx - \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{v} dx. \quad (21)$$

Интегральному тождеству (21) в формализме метода конечных элементов отвечает система

$$\mathbf{C}\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{C}\mathbf{U}^{(n)} - \varepsilon \left(\sum_e \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^{(n)}) \text{mes}(\omega_e) - \mathbf{R} \right), \quad (22)$$

аналогичная системе (4) с тем отличием, что матрица жесткости \mathbf{C} теперь строится для случая плоской деформации линейно-упругой среды.

Метод упругих решений позволяет рассматривать также задачи с неоднородными граничными условиями, например, на границе области $\partial\Omega$ с нормалью \mathbf{n} могут быть заданы напряжения

$$\sigma_{ij}n_j = T_i, \quad (i, j = 1, 2). \quad (23)$$

Естественно потребовать выполнения граничных условий (23) на каждом шаге итерационного процесса (20). Однако вопрос о сходимости процесса к решению неоднородной задачи нелинейной теории упругости (деформационной теории пластичности) в теоретическом плане остается открытым. Вычислительные эксперименты проводились для задачи упругопластического изгиба балки-полоски и для задачи об упругопластической деформации цилиндрической трубы под действием внутреннего давления. Результаты

расчетов свидетельствуют о сходимости метода упругих решений и полностью соответствуют данным, полученным посредством программного комплекса ANSYS.

Решение важных прикладных задач геомеханики, возникающих при разработке нефтегазовых месторождений, связано с исследованием уравнения нелинейной фильтрации [6]:

$$D_i p - D_i(a(|\text{grad } p|)D_i p) = f(x, p) \quad (24)$$

для величины порового давления $p(x, t)$, которое мы будем решать в цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ при краевых условиях

$$p|_{t=0} = \varphi(x), \quad p|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0.$$

Что же касается функции $a(|\text{grad } p|)$, то она принимается в виде

$$a = \alpha - \frac{\beta}{1 + |\text{grad } p|^2}, \quad (25)$$

при этом $a(0) = \alpha - \beta > 0$, $a(\infty) = \alpha > 0$, $\beta > 0$.

Для решения нестационарной задачи (24) применим итерационный процесс

$$\varepsilon D_i p^{(n+1)} - \Delta p^{(n+1)} = -\Delta p^{(n)} + \varepsilon \left[D_i \left(a(|\text{grad } p^{(n)}|) D_i p^{(n)} \right) + f(x, p) \right], \quad (26)$$

который сходится к обобщенному решению рассматриваемой задачи в пространстве $W_2^{(1,0)}(Q)$ как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = (\Lambda - \lambda)/(\Lambda + \lambda)$, при этом $\varepsilon = 2/(\Lambda + \lambda)$ [1]. Здесь Λ и λ — соответственно точная верхняя и точная нижняя границы собственных значений матрицы параболитности \mathbf{A} с компонентами

$$A_{ij} = a\delta_{ij} + a' \frac{p_i p_j}{|\text{grad } p|}, \quad (i, j = 1, 2), \quad p_i = D_i p.$$

Для функции (25) $\Lambda = \alpha$, $\lambda = \alpha - \beta$, $q = \beta/(2\alpha - \beta)$, $\varepsilon = 2/(2\alpha - \beta)$.

Программная реализация итерационного процесса (26) выполнена в системе MATLAB с учетом того обстоятельства, что в пакете программ PDE Toolbox решение линейного параболического

уравнения сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M \frac{d\mathbf{P}}{dt} + C\mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (27)$$

относительно значений давления $\mathbf{P}(t)$ в узлах конечно-элементной сетки, при этом по известным правилам вычисляются компоненты матриц M , C и вектора \mathbf{R} . Модификация системы (27) под итерационный процесс приводит к системе

$$M \frac{d\mathbf{P}^{(n+1)}}{dt} + C\mathbf{P}^{(n+1)} = C\mathbf{P}^{(n)} - \varepsilon \left[\sum_e a(\mathbf{B}\mathbf{P}^{(n)}) \mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{P}^{(n)} \text{mes}(\omega_e) - \mathbf{R} \right],$$

где \mathbf{B} — матрица градиентов, отвечающая задаче (27). Тестирование программы проводилось для решения $p = e^{-t} \sin \pi x_1 \sin 2\pi x_2$ уравнения (24) в прямоугольнике $\Omega = [-1, 1] \times [-0.5, 0.5]$ для значений $\alpha = 1.0, \beta = 0.5$ и ряда аналогичных примеров. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что итерационный процесс сходится за 7 — 8 итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошелев А.И., Челкак С.И. Регулярность решений некоторых краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 356 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. 376 с.
3. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 736 с.
4. Кошелев А.И., Нарбут М.А. Лекции по механике деформируемого твердого тела. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 276 с.
5. Кошелев А.И., Нарбут М.А. Плоские задачи нелинейной теории упругости упрочняющейся среды // Нелинейные граничные задачи, т.16, 2006, с. 156-161.
6. Баренблатт Г. И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЛАУКОМЫ

Е. Б. Воронкова^{‡§}

Доклад на семинаре 14 марта 2006 г.

РЕЗЮМЕ

Задачей данной работы являются построение математических моделей, адекватно описывающих поведение решетчатой пластинки диска зрительного нерва при изменении внутриглазного давления, оценка влияния механических характеристик, неоднородности пластины, центрального отверстия на характер деформации пластины, оценка предрасположенности различных решетчатых пластин к глаукоматозным повреждениям¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы математического моделирования находят все большее применение в биологии и медицине. Они позволяют лучше понять механизм и суть физиологических и патологических процессов в биологических системах.

Среди причин слепоты глаукома занимает одно из первых мест. Патологические механизмы, приводящие к возникновению и прогрессированию глаукомы, до сих пор не до конца изучены.

В середине XIX века практически одновременно возникли две различные точки зрения на процесс развитие глаукоматозной атрофии зрительного нерва: одна из них предполагала сосудистую природу заболевания (E. Jaeger, D.O. Harington, А.П. Нестеров), другая говорила о механической природе развития атрофии зрительного нерва (A. von Graefe, J. Emery, R. Radius, D. Minckler, В.В. Волков).

В настоящее время сохраняются обе эти точки зрения, однако “роль механического фактора” признается и сторонниками сосудистой концепции: общепринятыми становятся биомеханические

^{‡1}Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00258.

[§]© Е. Б. Воронкова, 2006

факторы течения глаукомы, связанные с изменением соотношения внутриглазного и внутричерепного давления.

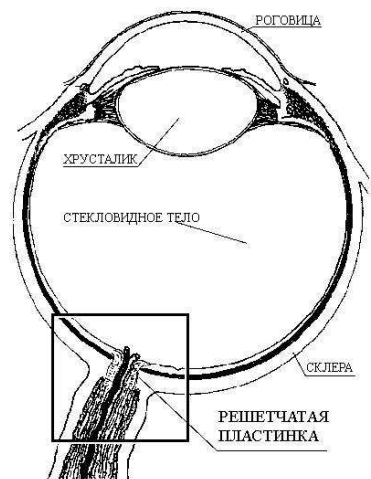


Рис. 1. Строение глаза.

В месте выхода зрительного нерва из полости глаза склеральная оболочка глаза (склера) очень тонкая и имеет отверстия в области, называемой решетчатой пластинкой (*lamina cribrosa* — LC) (*lat. cribrum* — решето) (рис. 1).

По определению В.В. Волкова [1], глаукома — это прежде всего специфическое нарушение зрительных функций от сдавливания нервных волокон, обусловленное выпячиванием решетчатой мембраны из полости глаза.

В своих исследования Н. Quigley, E. Addicks [2] предположили, что неоднородность решетчатой пластинки глаза на разных участках служит предпосылкой к появлению ее экскавации (прогиба).

Все это делает важным исследование деформации решетчатой пластинки глаза при различных соотношениях внутриглазного и внутричерепного давлений, оценку влияния механических характеристик, неоднородности пластины на характер деформации пласти-

ны, предрасположенность различных решетчатых пластин к глаукоматозным повреждениям.

В [3] рассмотрен ряд механических моделей развития глаукомы. Однако при построении моделей не учитывалось влияние отверстия в центре пластины; исследование устойчивости симметричных форм равновесия пластины не закончено.

2. ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ И ДЕФОРМИРОВАНИЯ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНКИ

Основной проблемой на пути аналитического исследования деформирования решетчатой пластины (РП) является отсутствие точных данных о ее механических характеристиках.

Опорная оболочка глаза, склера, является существенно неоднородной и анизотропной [4]. Решетчатая пластинка — это склера, ослабленная большим числом отверстий (400–500), занимающими $2/3$ площади всей пластины (рис. 2). Отверстия распределены по поверхности РП неравномерно: как по радиусу — при движении от центра пластины к ее краю пластинка становится более разряженной, так и по углу — “височная и носовая” четверти пластины (горизонтальная область) имеют более плотную структуру, чем верхняя и нижняя (вертикальная область) [1].

При расчетах напряженно-деформированного состояния перфорированных пластин обычно последние заменяют некоторыми сплошными пластинами с приведенными параметрами [5].

На основе сравнения собственных частот колебаний пластин, перфорированных круговыми отверстиями разных диаметров, получено соотношение [5]

$$D^* = \mu D; \quad \mu = \left(1 - \frac{S_0}{S}\right)^{7/3},$$

где S — площадь пластины, S_0 — площадь, занимаемая отверстиями, D и D^* — цилиндрические жесткости сплошной и перфорированной пластин соответственно, позволяющее оценить модуль упругости решетчатой пластинки:

$$E/E_1 \simeq 10,$$

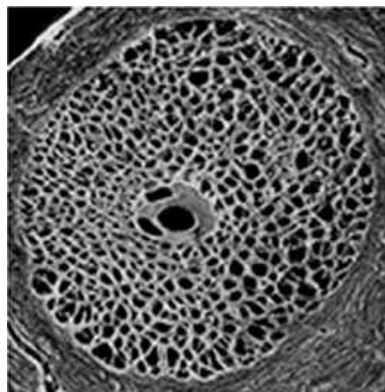


Рис. 2. Решетчатая пластинка диска зрительного нерва

где E — модуль упругости склеры ($E = 14.3$ МПа), E_1 — модуль упругости РП.

В [6] решена задача о деформации составной оболочки (склеры и решетчатой пластинки) и отдельно задача о деформации пластинки под действием нормального давления с использованием прикладной программы ADINA (900 nodes). Сравнение результатов, полученных для составных оболочек и упрощенных задач, в которых влияние сферической оболочки игнорируется, показывает, что разница в значениях максимальных прогибов не превосходит 2%.

Таким образом, деформацию решетчатой пластинки можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки, что существенно облегчает учет особенностей строения РП — ее анизотропию и неоднородность.

Классическая теория пластин и оболочек, разработанная для изотропных структур, безразличная к соотношениям типа E_i/G_{iz} , E_i/E_k и т.д. ($i, k = x, y$, E_i, E_k, G_{iz} — модули упругости и сдвига) и при сильной анизотропии $E_i \gg E_k$, $E_i \gg G_{iz}$ не дает корректные результаты.

Уточненные теории, учитывающие деформацию сдвига (общая уточненная теория С.А. Амбарцумяна [7], новая уточненная итера-

ционная теория анизотропных пластин, представленная в монографии В.А. Родионовой, Б.Ф. Титаева, К.Ф. Черныха [8]), позволяют построить модель деформации пластины, учитывающую поперечные сдвиги, поперечные нормальные напряжения, повороты волокон, а также изменение их длины.

Рассмотрим задачу о прогибе трансверсально-изотропной неоднородной круглой пластины радиуса R и толщины h , нагруженной на верхней и нижней поверхностях равномерно распределенными давлениями p^- (внутриглазным) и p^+ (внутричерепным). В центре пластины имеется отверстие радиуса δ .

Материал пластины подчиняется обобщенному закону Гука:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{\nu}{E_1}\sigma_\theta - \frac{\nu'}{E_2}\sigma_z, & e_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G'}, \\ e_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E_1} - \frac{\nu}{E_1}\sigma_r - \frac{\nu'}{E_2}\sigma_z, & e_{\theta z} &= \frac{\tau_{\theta z}}{G'}, \\ e_z &= \frac{\sigma_z}{E_2} - \frac{\nu''}{E_1}\sigma_r - \frac{\nu''}{E_1}\sigma_\theta, & e_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G}, \\ \nu''E_2 &= \nu'E_1, & G &= \frac{E_1}{2(1+\nu)}. \end{aligned}$$

Здесь за координатную плоскость принята срединная поверхность пластины: r, θ — полярные координаты, z — расстояние по нормали до срединной поверхности, E_1, E_2 — модули Юнга для направлений в плоскости пластины и перпендикулярных к ней соответственно, ν — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, ν' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном этой плоскости, ν'' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии, при растяжении в плоскости изотропии, G, G' — модули сдвига для плоскости изотропии и плоскостей, нормальных к плоскости изотропии соответственно.

Система уравнения изгиба трансверсально-изотропной неоднородной пластинки в рамках теории С.А. Амбарцумяна относитель-

но функций $w(r, \theta)$, $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -P \\
& -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - \frac{\partial D}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - \\
& - \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{h^2 D}{10G'} (\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{h^3}{12} \varphi, \\
& -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w - (1-\nu) \frac{\partial D}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] + \frac{h^2 D}{10G'} \left(\Phi_3 - \frac{1-\nu}{2} \Phi_4 \right) = \frac{h^3}{12} \psi,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $w(r, \theta)$ — нормальная составляющая перемещения точки срединной поверхности пластины, функции $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ связаны с касательными напряжениями в плоскости, перпендикулярной поверхности пластины, соотношениями

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \varphi(r, \theta), \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \psi(r, \theta),$$

операторы $\Phi_1(\phi, \psi)$, $\Phi_2(\phi, \psi, G')$, $\Phi_3(\phi, \psi)$, $\Phi_4(\phi, \psi, G')$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \\
\Phi_2 &= \frac{\partial}{\partial r} (g_1 \varphi + \nu g_2 \psi) + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (g_1 \psi + g_2 \varphi) + \frac{1-\nu}{r} (g_1 \varphi - g_2 \psi), \\
\Phi_3 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \\
\Phi_4 &= \frac{\partial}{\partial r} (g_1 \psi + g_2 \varphi) + \frac{2}{r} (g_1 \psi + g_2 \varphi) + \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (g_2 \psi + \nu g_1 \varphi),
\end{aligned}$$

причем

$$D(r) = \frac{E_1(r)h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad g_1(r, \theta) = \frac{1}{G'} \frac{\partial G'}{\partial r}, \quad g_2(r, \theta) = \frac{1}{rG'} \frac{\partial G'}{\partial \theta}.$$

При выводе системы (1) предполагалось, что

$$E_1 = E_1(r, \theta), \quad G' = G'(r, \theta), \quad \frac{E_1(r, \theta)}{G'(r, \theta)} = \text{const.}$$

Внешний край пластины $r = R$ предполагается жестко заделанным, внутренний $r = \delta$ можно положить свободным, так как ткань зрительного нерва, проходящего через центр пластинки, существенно мягче склеральной ткани:

$$\begin{aligned} r = R, \quad w = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\varphi}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) &= 0, \quad \psi = 0. \\ r = \delta, \quad N_r = 0, \quad M_r = 0, \quad H_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Случай неоднородной по радиусу пластины $E = E(r)$ рассмотрен в [9].

Для исследования влияния неоднородности пластины на величину и форму прогиба расчеты проводились при различных законах изменения модуля упругости в плоскости изотропии, но при сохранении постоянного среднего значения:

$$E_{cp} = \frac{1}{\pi(1 - \delta^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\delta}^1 E_1(r) r dr = \text{const.}$$

Если увеличение отверстий незначительно, то можно принять

$$E_1(r) = E_{\varepsilon}(1 - \varepsilon_1 r),$$

где ε_1 — малый параметр.

В большинстве реальных решетчатых пластин при движении от центра к краю пластина становится существенно более разреженной. В этом случае можно принять

$$E_1(r) = E_{q_1} e^{-q_1 r}, \quad E_1(r) = E_{q_2} e^{-q_2 r^2}.$$

Одной из особенностей развитой глаукомы является принятие решетчатой пластинкой характерной формы, так называемой, “U-shape”.

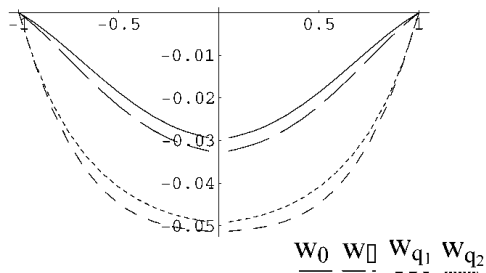


Рис. 3. Прогиб решетчатой пластины при различных законах изменения модуля упругости.

На рис. 3 представлен прогиб решетчатой пластинки при различных законах изменения модуля упругости.

Видно, что существенное увеличение неоднородности, присущее большинству реальных решетчатых пластин, ведет к большему прогибу (экскавации) диска зрительного нерва, способствует “вдавливанию” решетчатой пластины из полости глаза, тем самым увеличивая вероятность развития глаукомы.

У большинства людей решетчатая пластина имеет неравномерное по углу строение: в поперечном направлении (от виска к носу) прочность РП выше, чем в продольном (верхней и нижней долях пластины) [1, 2] (рис. 4).

Аналитически подобную структуру РП можно передать модулем упругости вида

$$E(r, \theta) = E_1(r) + E_2(r) \cos 2\theta.$$

Если увеличение плотности отверстий незначительно, то можно принять

$$E_1(r, \theta) = E_0(1 + \varepsilon_2 \cos 2\theta),$$

где ε_2 — малый параметр, $E_0 = E_{cp}$.

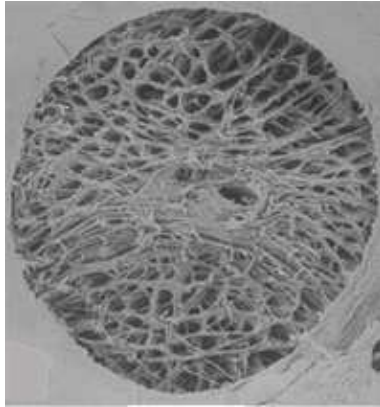


Рис. 4. Структура решетчатой пластины (неоднородная по углу).

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta) &= w_0(r) + \varepsilon_2 w_2(r) \cos 2\theta, \\
 \varphi(r, \theta) &= \varphi_0(r) + \varepsilon_2 \varphi_2(r) \cos 2\theta, \\
 \psi(r, \theta) &= \varepsilon_2 \psi_2(r) \sin 2\theta,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где $w_0(r)$, $\varphi_0(r)$ — решения, найденные в [9] для случая однородной пластины.

По-прежнему считаем, что $G'(r)$ меняется по закону, аналогичному $E_1(r)$, и $E_1(r)/G'(r) = \text{const}$. Тогда, учитывая

$$g_2(r) \approx -\frac{2}{r} \varepsilon_2 \sin 2\theta,$$

подставляем соотношения (3) в уравнения (1) и граничные условия (2), приравниваем коэффициенты при ε_2 , получаем систему урав-

нений для нахождения w_2 , φ_2 , ψ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dr} + \frac{1}{r}\varphi_2 + \frac{2}{r}\psi_2 &= 0, \\ D_0 \frac{d}{dr} \Delta_2 w_2 + \frac{h^2 D}{10G'} \frac{1-\nu}{r} \left[\frac{2}{r}\varphi_2 + \frac{1}{r}\psi_2 + \frac{d\psi_2}{dr} \right] - \\ - \frac{h^2 D}{10G'} \frac{2(1-\nu)}{r^2} \varphi_0 &= -\frac{h^3}{12}\varphi_2, \\ \frac{2D_0}{r} \Delta_2 w_2 + \frac{2D_0}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{dw_2}{dr} + \nu \frac{d^2 w_2}{dr^2} \right] - \frac{h^2 D}{10G'} \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{2}{r}\varphi_0 \right) + \frac{4\varphi_0}{r^2} \right] \\ - \frac{h^2 D}{10G'} \frac{1-\nu}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{2}{r}\varphi_2 + \frac{1}{r}\psi_2 + \frac{d\psi_2}{dr} \right] &= -\frac{h^3}{12}\psi_2, \end{aligned}$$

где $\Delta_2 w_2 = \frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_2}{dr} - \frac{4}{r^2} w_2$ при граничных условиях

$$r = R, \quad w_2 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \frac{dw_2}{dr} = \frac{h^2}{8G'_0} \varphi_2,$$

$$r = \delta, \quad \varphi_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_2}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \left[\frac{dw_2}{dr} - \frac{4}{r^2} w_2 \right] &= -\frac{h^2}{10G'_0} \left[\frac{d\varphi_2}{dr} + \nu \left(\frac{\varphi_2}{r} + \frac{2}{r}\psi_2 \right) \right], \\ \frac{w_2}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{dw_2}{dr} &= \frac{h^2}{40G'_0} \left[\frac{d\psi_2}{dr} - \frac{\psi_2}{r} - \frac{2}{r}\varphi_2 - \frac{2}{r}\varphi_0 \right]. \end{aligned}$$

Офтальмологи отмечают, что после достижения прогибом пластины определенного значения наступает побледнение диска зрительного нерва [1]. Сравнивая рис. 5, на котором представлены линии уровня функции φ ($\varphi = \text{const}$) при $\varepsilon_2 = 0.4$, с картинками, иллюстрирующими сужение поля зрения при глаукоме (рис. 6, 7), можно предположить, что при достижении касательными усилиями некоторого критического значения происходят изменения поля зрения при глаукоме.

Это подтверждает механическую концепцию развития глаукомы и показывает, что большая неоднородность по углу ведет к большей предрасположенности к глаукоматозным повреждениям.

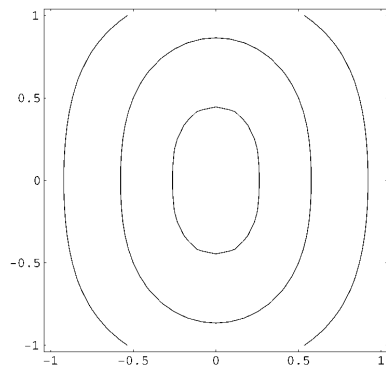


Рис. 5. Линии уровня функции φ .

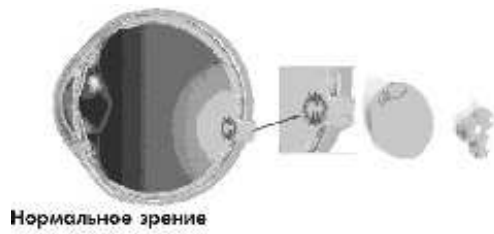


Рис. 6. Поле зрения здорового человека.

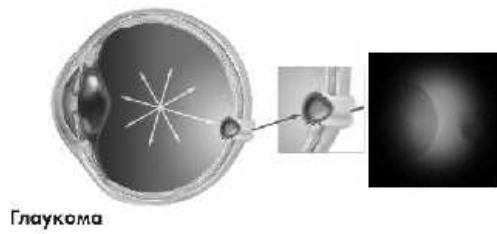


Рис. 7. Поле зрения при глаукоме.

Исследование напряженно-деформированного состояния пластины методом конечных элементов проведено в [10]. Материал пластины предполагается неоднородным, то есть в разных точках поверхности, задавались различные значения модуля упругости, аппроксимируя неоднородность пластины.

Полученные в [10] результаты для изменения поля зрения согласуются с данными, полученными аналитическим путем.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Атрофия аксонов зрительного нерва при глаукоме происходит вначале только в узкой зоне по наружному краю решетчатой пластинки с появлением в этой области отека диска зрительного нерва и образованием складок [11]. Причиной этих явлений может быть локальная потеря устойчивости симметричных форм равновесия решетчатой пластины.

На рис. 8 представлены в безразмерном виде графики окружных и радиальных усилий однородной трансверсально-изотропной пластинки, находящейся под действием нормального давления [3, 9]. Видно, что усилие T_θ в окрестности края является сжимающим и это может привести к бифуркации пластины в неосесимметричное состояние [12, 13].

Существование несимметричного решения задачи о прогибе круглой пластины доказано в [13]. Задача о потере устойчивости круглой изотропной пластиной рассмотрена в [12]. Показано, что при достижении давлением некоторого критического значения p_0 происходит потеря осесимметричной формы равновесия с образованием на краю пластины 8 волн.

3.1. Уравнения больших деформаций неоднородной круглой пластины

Как было уже сказано выше, решетчатая пластина диска зрительного нерва в окрестности края является более разреженной [1, 11].

Представим модуль упругости пластины $E(r) = E_0 f(r/R)$, где

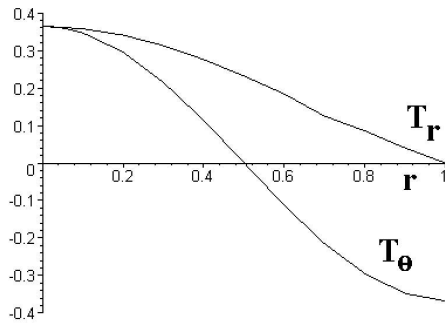


Рис. 8. Окружное и радиальное усилия.

$f(r/R)$ — убывающая функция.

Безразмерные уравнения деформации изотропной неоднородной пластинки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{f(r)}{12(1-\nu^2)} \frac{E_0}{E_{cp}} \left[\Delta \Delta w - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} L_1(w) + \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} L_2(w) \right] &= p + L(w, F), \\ \Delta \Delta F - \frac{L_1(F)}{f} \frac{df}{dr} + \left[2 \left(\frac{1}{f} \frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} \right] L_3(F) &= -\frac{E_0 f}{E_{cp}} \frac{L(w, w)}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где F — функция усилий

$$T_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad T_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad S = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right),$$

а операторы $L(w, F)$, $L_1(w)$, $L_2(w)$, $L_3(F)$ и оператор Лапласа Δ

равны

$$\begin{aligned}\Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ L(w, F) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ L_1(w) &= \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \\ L_2(w) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ L_3(F) &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right).\end{aligned}$$

Безразмерные величины связаны с размерными соотношениями

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad p^* = \frac{pR^4}{E_{cp}h^4}, \quad F^* = \frac{F}{E_{cp}h^3}.$$

Полагаем, что пластина закреплена по контуру от поворотов, но точки контура свободно смещаются в радиальном и окружном направлениях:

$$\begin{aligned}r = 1, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0.\end{aligned} \quad (5)$$

3.2. Потеря устойчивости однородной изотропной пластины

Рассмотрим сначала изотропную однородную пластину и определим нормальное давление, при котором возможна бифуркация в неосесимметричное состояние.

В изотропном случае при $E = E_0 = E_{cp}$ система уравнений (4) принимает вид

$$\frac{\Delta\Delta w}{12(1-\nu^2)} = p + L(w, F),$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{1}{2}L(w, w).$$
(6)

Следуя [12], выберем аппроксимирующее выражение для прогиба, удовлетворяющее двум первым граничным условиям в виде

$$w(r, \theta) = A(1-r^2)^2 + Br^4(1-r^2)^2 \cos n\theta.$$
(7)

Используя соотношение (7), из второго уравнения (6) можно определить

$$F(r, \theta) = F_0(r) + F_1(r) \cos n\theta + F_2(r) \cos 2n\theta,$$

где F_0, F_1, F_2 – функции r, A, B .

Подставляя в первое уравнение (6) выражения для w, F , умножая полученные равенства один раз на $drd\theta$, а второй раз на $r^4 \cos n\theta drd\theta$ и интегрируя по r от 0 до 1 и по θ от 0 до 2π , получим уравнения

$$A^3 K_1 + pK_2 + AB^2 K_3 + AK_4 = 0,$$

$$B^3 K_5 + A^2 B K_6 + BK_7 = 0,$$
(8)

где $K_i = K_i(A, B, n), i = 1 \dots 7$.

Система (8) имеет 2 решения, соответствующие симметричной и несимметричной формам равновесия.

При $B = 0$ имеют место симметричные формы равновесия пластины.

$$p = -\frac{K_1}{K_2} A^3 - \frac{K_4}{K_2} A.$$

Случай $B \neq 0$ соответствует несимметричной форме равнове-

сия. Исключая B из системы (8), имеем

$$B^2 = -\frac{K_7}{K_5} - \frac{K_6}{K_5}A^2, \quad (9)$$

$$p = \left(\frac{K_3K_6}{K_2K_5} - \frac{K_1}{K_2}\right)A^3 + \left(\frac{K_3K_7}{K_2K_5} - \frac{K_4}{K_2}\right)A.$$

Из первого выражения (9) следует, что амплитуда поперечных складок B при несимметричных прогибах будет иметь вещественные значения в случае, если

$$-\frac{K_7}{K_5} - \frac{K_6}{K_5}A^2 \geq 0.$$

Заметим, что $A = \xi$, где ξ — перемещение центра пластинки.

Таким образом, исследуя полученные зависимости перемещения центра пластинки от давления, получаем, что при малых давлениях пластинка имеет только симметричные формы равновесия. Затем при безразмерных давлении и прогибе в центре пластины, соответственно равным

$$p = 771.48, \quad \xi = 9.19$$

происходит бифуркация в неосесимметричное состояние с образованием 8 волн на краю пластины.

3.3. Потеря симметричной формы равновесия неоднородной изотропной пластины

Форма прогиба пластины существенно зависит от закона изменения ее модуля упругости [9]. Возьмем аппроксимирующее выражение для прогиба в виде

$$w(r, \theta) = A(1 - r^2)^\alpha(1 + r^2)^\beta + Br^4(1 - r^2)^2 \cos n\theta.$$

Для удовлетворения граничным условиям на краю пластины (5) полагаем $\alpha > 1$, $\beta > 0$.

Параметры α , β выбираются из условия наиболее точного приближения осесимметричного (докритического) прогиба пластинки [9].

$$M(\alpha, \beta) = \min \int_S |w_0(r) - y(r)| dS,$$

где $y(r) = (1-r^2)^\alpha(1+r^2)^\beta$, $w_0(r)$ — докритический прогиб пластинки, определенный в [9] для случая изотропной, но неоднородной пластинки, S — площадь пластины.

По аналогии со случаем однородной пластины можно получить систему двух уравнений для определения A , B , подобную (8):

$$A^3 \bar{K}_1 + p \bar{K}_2 + AB^2 \bar{K}_3 + A \bar{K}_4 = 0,$$

$$B^3 \bar{K}_5 + A^2 B \bar{K}_6 + B \bar{K}_7 = 0,$$

где $\bar{K}_i = \bar{K}_i(A, B, n, \alpha, \beta)$, $i = 1 \dots 7$.

В таблице (1) и на рис. 9 приведены значения критической нагрузки при различных законах изменения модуля упругости.

Таблица 1. Зависимость критической нагрузки от параметра неоднородности пластины

$f(r) = e^{-qr}$	$q = 0$	$q = 0.1$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
n	8	8	7	7	7	7
w_0	9.19	9.48	9.13	8.86	9.24	10.9
p	771.48	767.35	468.22	307.4	211.76	39.28

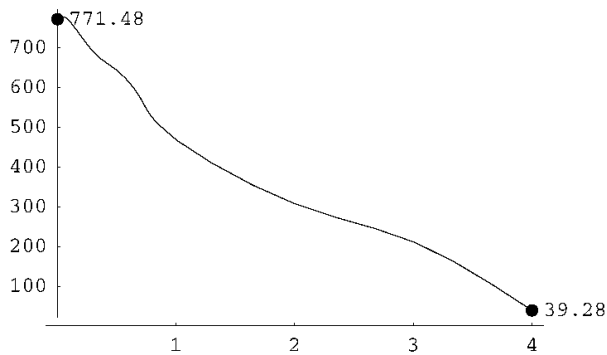


Рис. 9. Степень неоднородности — критическая нагрузка.

Видно, что, чем быстрее убывает модуль упругости пластины, тем ниже становится величина критической нагрузки.

Для однородной пластинки радиуса $R = 1$ мм, толщиной $h = 0.1$ мм и модулем упругости $E_{cp} = 1.43 \cdot 10^6$ мм рт.ст. безразмерное критическое давление соответствует 827,62 мм рт.ст.

Это нереальные значения для внутриглазного давления, однако неоднородность пластины снижает критическую нагрузку: для пластинки, модуль упругости которой изменяется по закону $E = E_0 e^{-4r}$ при сохранении среднего значения $E_{cp} = 1.43 \cdot 10^6$ мм рт.ст., при радиусе $R = 1$ мм и толщине $h = 0.1$ мм, критическое давление $p = 39.28$ соответствует 42.1 мм рт.ст. Такие значения давлений наблюдаются в глазу человека.

Таким образом, одной из возможных причин образования складок по краю решетчатой пластины глаза может быть потеря устойчивости осесимметричной формы равновесия.

4. ДЕФОРМАЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

В монографии [1] автор отмечает, что "... как проминацию ДЗН в полость глаза, так и прогибание его поверхности в обратном направлении, т.е. из глаза ... можно рассматривать в виде функции градиента давления на уровне опорной структуры ДЗН, его решетчатой мембраны". Решетчатая пластина, будучи продолжением склеральной оболочки глаза, не является абсолютно плоской. В связи с этим представляет интерес изучение влияния начальной кривизны решетчатой пластины на ее деформацию и устойчивость.

Рассмотрим задачу об осесимметричной деформации пологой изотропной неоднородной по радиусу сферической панели постоянной толщины h , радиуса R_c и радиуса основания R , нагруженной равномерно распределенным внешним давлением.

Система уравнений осесимметричной деформации относительно функции нормального прогиба $w(r)$ и функции усилий $F(r)$ имеет

вид [14]

$$\begin{aligned}
 & D \left[r \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] + \\
 & + r \frac{dD}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{Pr^2}{2} + \left[\frac{dw}{dr} + \frac{r}{R_c} \right] \frac{dF}{dr}, \\
 & \frac{1}{Eh} \left[r \frac{d^3 F}{dr^3} + \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right] - \\
 & - \frac{r}{E^2 h} \frac{dE}{dr} \left(\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{dF}{dr} \right) = \left[\frac{1}{2} \frac{dw}{dr} + \frac{r}{R_c} \right] \frac{dw}{dr},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $D(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$.

Предполагается, что край панели жестко закреплен по контуру от поворотов, но точки контура свободно смещаются в радиальном направлении:

$$r = R, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = 0.$$

Представим модуль упругости решетчатой пластины в виде $E(r) = E_0 f(r/R)$, где $f(r/R)$ — убывающая функция. Введем безразмерные переменные:

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad P^* = \frac{PR^4}{E_{cp}h^4}, \quad F^* = \frac{F}{E_{cp}h^3}, \quad \alpha = \frac{R^2}{R_ch}.$$

Обозначим

$$X^*(r) = \frac{dw^*}{dr^*} + \alpha r^*, \quad Y^*(r) = \frac{dF^*}{dr^*}.$$

Тогда система уравнений (10) перейдет в уравнения (11) (символ

” * ” опускаем):

$$\begin{aligned}
& r \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{dX}{dr} - \frac{X}{r} + \frac{1}{f} \frac{df}{dr} \left(r \frac{dX}{dr} + \frac{\nu}{X} \right) = \\
& = \frac{1}{f(r)} \left[\alpha r (1 + \nu) \frac{df}{dr} + \frac{1}{\beta} \frac{E_{cp}}{E_0} \left(XY + \frac{Pr^2}{2} \right) \right], \\
& r \frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} - \frac{\nu}{Y} \right) = -\frac{f(r)}{2} \frac{E_0}{E_{cp}} [X^2 - \alpha^2 r^2],
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\beta = \frac{1}{12(1 - \nu^2)}$.

Граничные условия для функций $X(r)$, $Y(r)$ имеют вид

$$r = 1, \quad X = \alpha, \quad Y = 0,$$

а в центре купола должны выполняться условия

$$r = 0, \quad X = 0, \quad Y = 0.$$

4.1. Деформация однородной панели

Если принять, что отверстия распределены по поверхности решетчатой пластины равномерно, то система уравнений (11) примет вид [14]:

$$\begin{aligned}
\beta \left[r \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{dX}{dr} - \frac{X}{r} \right] &= XY + \frac{Pr^2}{2} \\
r \frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} &= -\frac{1}{2} [X^2 - \alpha^2 r^2] = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned}
r = 1, \quad X = \alpha, \quad Y = 0, \\
r = 0, \quad X = 0, \quad Y = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично [14] представим искомые функции $X(r)$, $Y(r)$ в виде рядов по степеням r :

$$X(r) = \sum_{k=1}^n x_k r^{2k-1}, \quad Y(r) = \sum_{k=1}^n y_k r^{2k-1}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в систему (12), имеем

$$x_2 = \frac{2x_1y_1 + P}{16\beta}, \quad y_2 = \frac{\alpha^2 - x_1^2}{16},$$

$$x_k = \frac{1}{4\beta k(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} x_i y_{k-i}, \quad y_k = -\frac{1}{8k(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{k-i} \text{ для } k > 2. \quad (15)$$

Эти формулы позволяют выразить все коэффициенты x_k, y_k через x_1, y_1 .

Выражения (14) удовлетворяют условиям в центре панели, а по (13) получаем

$$\sum_{k=1}^n x_k - \alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^n y_k r^{2k-1} = 0. \quad (16)$$

С учетом (15) уравнения (16) принимают вид

$$G_1(x_1, y_1) = 0, \quad G_2(x_1, y_1) = 0, \quad (17)$$

где G_1, G_2 — нелинейные функции x_1, y_1 .

Уравнения (17) позволяют построить график “нагрузка — стрела прогиба” для панелей, имеющих различную начальную кривизну.

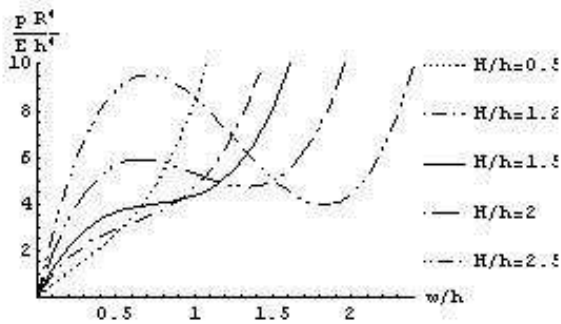


Рис. 10. Нагрузка — стрела прогиба.

Из рис. 10 видно, что для весьма пологих панелей ($H/h < 1.5$, где H – начальная стрела подъема панели), график “нагрузка – стрела прогиба” монотонно возрастает. Для панелей большей кривизны появляется предельная точка и становится возможным потеря устойчивости: “процелкивание” оболочки в новое осесимметричное состояние.

Решетчатая пластина является весьма пологой (отношение $H/h \leq 1$). При уменьшении градиента давлений на уровне решетчатой пластины (увеличении внутричерепного давления) она постепенно прогибается внутрь, что характеризует начальную стадию развития застойного диска, и далее принимает вогнутую форму – “продавливается” внутрь глаза, описывая резко выраженный застойный диск (рис. fig11).

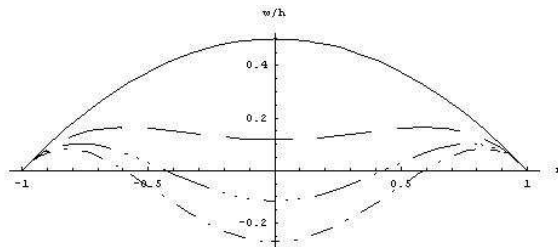


Рис. 11. Деформация РП при увеличении внутричерепного давления.

Форма прогиба панели при различных соотношениях геометрических параметров, но при одинаковом значении безразмерного давления представлены на рис. 12 и 13.

Для панели с радиусом основания $R = 1.2$ мм, толщиной $h = 0.1$ мм и радиусе склеральной оболочки $R_c = 10$ мм ($\alpha = 1.44$, $H/h = 0.7$) безразмерное давление $p = 3$ соответствует 1.6 мм рт.ст. при модуле упругости $E = 1.43$ МПа.

При радиусе основания панели $R = 0.75$ мм, толщине $h = 0.1$ мм и радиусе склеральной оболочки $R_c = 12$ мм ($\alpha = 0.47$, $H/h = 0.23$) безразмерное давление $p = 3$ соответствует 10 мм рт.ст. при модуле упругости $E = 1.43$ МПа.

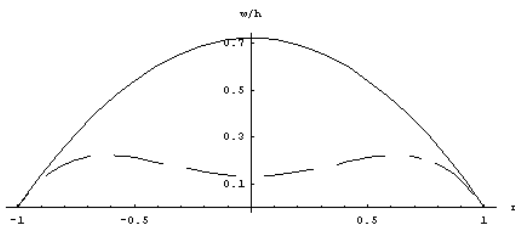


Рис. 12. Форма прогиба пластины при $\alpha = 1.44$, $H/h = 0.7$.

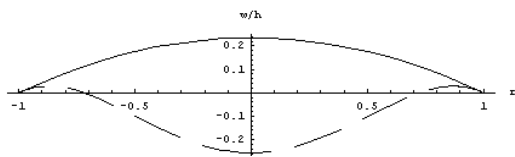


Рис. 13. Форма прогиба пластины при $\alpha = 0.47$, $H/h = 0.23$.

4.2. Деформация неоднородной сферической панели

Если принять, что увеличение числа пор и их диаметра при движении от центра к краю решетчатой пластины незначительно, то можно принять $f(r) = 1 - \varepsilon r$, где ε — малый параметр.

Используя метод возмущения, представим искомые функции $X(r)$, $Y(r)$ в виде рядов:

$$X(r) = X_0(r) + \varepsilon X_1(r) = \sum_{k=1}^n x_k^{(0)} r^{2k-1} + \varepsilon \sum_{k=1}^n x_k^{(1)} r^{2k},$$

$$Y(r) = Y_0(r) + \varepsilon Y_1(r) = \sum_{k=1}^n y_k^{(0)} r^{2k-1} + \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k^{(1)} r^{2k}.$$

Для коэффициентов $x_k^{(0)}$, $y_k^{(0)}$ справедливы соотношения (15).

Подставляя выражения для X, Y в (12), находим для $x_k^{(1)}, y_k^{(1)}$:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1+\nu}{3}(\beta x_1^{(0)} - \alpha), \quad y_1^{(1)} = -\frac{(1-\nu)}{3}y_1^{(0)}, \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{15\beta} \left[\frac{P}{2} + (3+\nu)\beta x_2^{(0)} + x_1^{(0)}y_1^{(0)} + x_1^{(0)}y_1^{(1)} + x_1^{(1)}y_1^{(0)} \right], \\y_2^{(1)} &= -\frac{3-\nu}{15}y_2^{(0)} + \frac{1}{30} \left[(x_1^{(0)})^2 - 2x_1^{(0)}x_1^{(1)} - \alpha^2 \right],\end{aligned}$$

для $k \geq 3$:

$$\begin{aligned}x_k^{(1)} &= \frac{(2k-1+\nu)}{(4k^2-1)}x_k^{(0)} + \frac{1}{(4k^2-1)\beta} \sum_{i=1}^{k-1} \left[x_i^{(0)}y_{k-i}^{(0)} + \right. \\&\quad \left. x_i^{(0)}y_{k-i}^{(1)} + x_{k-i}^{(1)}y_i^{(0)} \right], \\y_k^{(1)} &= -\frac{2k-1-\nu}{4k^2-1}y_k^{(0)} + \frac{1}{2(4k^2-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \left[x_i^{(0)}x_{k-i}^{(0)} - 2x_i^{(0)}x_{k-i}^{(1)} \right].\end{aligned}$$

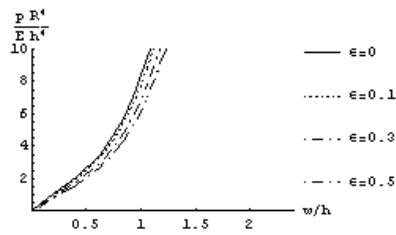
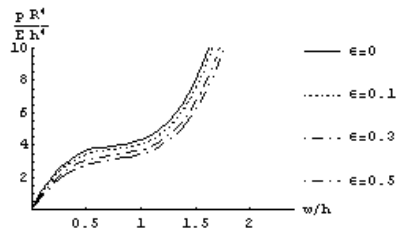
Выражая, с учетом (15), коэффициенты $x_k^{(0)}, y_k^{(0)}, x_k^{(1)}, y_k^{(1)}$ через $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}$ и подставляя полученные выражения в граничные условия (13), получаем систему нелинейных уравнений

$$\bar{G}_1(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, \varepsilon) = 0, \quad \bar{G}_2(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, \varepsilon) = 0.$$

Графики "нагрузка-стрела прогиба" для панелей, имеющих различную начальную кривизну и степень неоднородности, представлены на рис. 14–16.

Видно, что, как и в случае однородной панели, для панелей с $(H/h < 1.5)$, где H — начальная стрела подъема панели, график "нагрузка-стрела прогиба", монотонно возрастает. Для панелей большей кривизны появляется предельная точка и становится возможным переход в новое осесимметричное состояние. При этом критическая нагрузка, соответствующая появлению предельной точки, снижается с ростом неоднородности панели.

Появление предельной точки, т.е. переход панели из одного равновесного состояния в другое, может привести к появлению отеков

Рис. 14. Нагрузка–стрела прогиба при $H/h = 0.5$.Рис. 15. Нагрузка–стрела прогиба при $H/h = 1.5$.

диска зрительного нерва и в дальнейшем — к потере глазом зрительных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков В.В. Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей. М.: Медицина, 2001. 350 с.
2. Quigley H.A., Addicks E.M. Regional Differences in the Structure of the Lamina Cribrosa and Their Relation to Glaucomatous Optic Nerve Damage// Arch. Ophthalmol. 1981. Vol. 99. Jan. P.137–143.
3. Bauer S.M. Mechanical Models of the Development of Glaucoma// Advances in Mechanics of Solids, 2006, Series on Stability, Vibration and Control of Systems. Series B. Vol. 15. P.153–181.
4. Downs J.C., Suh F.J-K., Thomas K.A., Bellezza A.J., Hart R.T., Burgoyne C.F. Viscoelastic Material Properties of the Peripapillary Sclera in Normal and Early-Glaucoma Monkey Eyes// Invest. Ophthalmol. Vis. Sci, 2005; 46. P.540–546.
5. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.

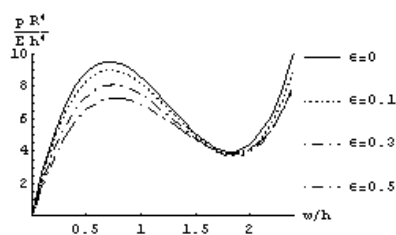


Рис. 16. Нагрузка–стрела прогиба при $H/h = 2.5$.

6. *Bauer S.M., Romanova A.A., Smirnov A.L.* On formulation of the problem on deformation of the Lamina Cribrosa// Russian Journal of Biomechanics. Vol. 5. N 3. 2001. P. 18–22.

7. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.

8. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 280 с.

9. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure// Russian Journal of Biomechanics. Vol. 5., N 1. 2001. P. 73–82.

10. *Burgoyne C.F., Downs J.C., Bellezza A.J., Sun F.J-K., Hart R.T.* The optic nerve head as a biomechanical structure: a new paradigm for understanding the role of IOP-related stress and strain in the pathophysiology of glaucomatous optic nerve head damage// Progress in Retinal and Eye Research. 2005; 24. P. 39–73.

11. *Нестеров А.П.* Основные принципы диагностики первичной открытоугольной глаукомы// Вестник офтальмологии. 1998, N 2. С. 3–6.

12. *Панов Д.Ю., Феодосьев В.И.* О равновесии и потере устойчивости полых оболочек при больших прогибах. ПММ, т. XII, 1948. С. 389–406.

13. *Морозов Н.Ф.* К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой// Изв. высш. уч. заведений, Математика, N 2. 1961. С. 126–129

14. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

ДЕФОРМАЦИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Л. А. ЗАМУРАЕВ^{¶||}

Доклад на семинаре 25 апреля 2006 г.

РЕЗЮМЕ

Построено решение задачи о прогибе трансверсально-изотропного сферического слоя под действием внутреннего и внешнего давления. На основе этого решения рассматривается задача определения изменения внутреннего давления в трансверсально-изотропной сферической оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости.¹

1. ДЕФОРМАЦИЯ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Решение задачи Ламе о напряженно-деформированном состоянии изотропного сферического слоя, находящегося под действием внутреннего и внешнего давления, представлено, например, в монографиях [1, 2]. Однако эта задача представляет интерес и в случае, если материал слоя является трансверсально-изотропным. Например, склеральная оболочка глаза в первом приближении может быть рассмотрена как сферическая оболочка, причем известно, что модуль упругости склеры в направлении ее толщины на два порядка меньше модуля упругости в тангенциальном направлении [3, 4]. В связи с этим рассмотрим задачу трехмерной теории упругости о деформации сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 ($R_1 < \rho < R_2$), находящегося под действием внутреннего давления P_1 и внешнего давления p_2 . Как и в [1, 2], из соображений симметрии положим, что в сферической системе координат (ρ, φ, θ) справедливы выражения для компонентов тензора

^{¶1}Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00258.

^{||}© Л. А. Замураев, 2006

напряжений $\{\sigma_{ij}\}$:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \sigma_{\varphi\varphi}(\rho),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho}(\rho)$$

и

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\varphi\theta} = 0.$$

В этом случае уравнения равновесия слоя приводятся к одному уравнению:

$$\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot (2 \cdot \sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta} \cdot \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (1)$$

Закон упругости для трансверсально-изотропного тела в сферических координатах имеет вид [5] ($\{\varepsilon_{ij}\}$ -компоненты тензора деформации):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \cdot \sigma_{\theta\theta}) - \frac{\nu'}{E'} \cdot \sigma_{\rho\rho} & \varepsilon_{\rho\varphi} &= \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{G'} & , \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{\theta\theta} - \nu \cdot \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\nu'}{E'} \cdot \sigma_{\rho\rho} & \varepsilon_{\theta\rho} &= \frac{\sigma_{\theta\rho}}{G'} & , \\ \varepsilon_{\rho\rho} &= -\frac{\nu'}{E'} \cdot (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{E'} \cdot \sigma_{\rho\rho} & \varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{\sigma_{\varphi\theta}}{G} & . \end{aligned}$$

Число упругих коэффициентов в этом случае равно пяти: E и E' — соответственно модули Юнга при растяжении–сжатии в поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; ν и ν' — коэффициенты Пуассона; G' — модуль сдвига для любой плоскости, перпендикулярной к поверхности изотропии; модуль сдвига для поверхности изотропии G определяется соотношением

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}.$$

Упругие коэффициенты удовлетворяют системе неравенств [5]:

$$|\nu'| < \sqrt{\frac{E'}{E}}, \quad \nu < 1 - \frac{2 \cdot \nu'^2 \cdot E}{E'}.$$

Предполагается также, что компоненты вектора перемещения удовлетворяют соотношениям

$$u_{\varphi} = u_{\theta} = 0, \quad u_{\rho} = u_{\rho}(\rho).$$

В силу этого компоненты тензора деформаций в сферической системе координат примут следующий вид:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{du_\rho}{d\rho}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{u_\rho}{\rho}, \varepsilon_{\rho\varphi} = \varepsilon_{\rho\theta} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0.$$

Выразим компоненты тензора напряжений через компоненты тензора деформаций и компоненты вектора перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= A \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} + B \cdot \varepsilon_{\rho\rho} = A \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} + B \cdot \varepsilon_{\rho\rho}, \\ \sigma_{\rho\rho} &= C \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} + D \cdot \varepsilon_{\rho\rho} = C \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} + D \cdot \varepsilon_{\rho\rho}, \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{E \cdot E'}{(E' \cdot (1-\nu) - 2 \cdot (\nu')^2 \cdot E)}, B = A \cdot \nu', C = 2 \cdot A \cdot \nu', D = A \cdot (1-\nu) \cdot \frac{E'}{E}.$$

При подстановке этих компонент в уравнение равновесия (1) получается дифференциальное уравнение.

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{2 \cdot E \cdot (\nu' - 1)}{E' \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{u_\rho}{\rho^2} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями.

$$\sigma_{\rho\rho}(R_1) = -P_1; \sigma_{\rho\rho}(R_2) = -P_2 \quad (3)$$

Решение уравнения (2) имеет вид.

$$u_\rho(\rho, P_1, P_2) = \frac{C_1(P_1, P_2)}{\rho^{m+1}} + C_2(P_1, P_2) \cdot \rho^m,$$

где

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4 \cdot \beta}}{2}, \\ \beta &= \frac{2 \cdot E \cdot (1-\nu')}{E' \cdot (1-\nu)}. \end{aligned}$$

Из граничных условий (3) можно получить

$$C_1 = \frac{P_1 - P_2 \cdot \psi^{m-1}}{E'} \cdot \frac{R_1^{m+2}}{(1-\psi^{2m+1})} \cdot \frac{[(1-\nu) \cdot E' - 2 \cdot \nu'^2 \cdot E]}{[(m+1) \cdot (1-\nu) \cdot E' - 2 \cdot \nu' \cdot E]},$$

$$C_2 = \frac{P_1 \cdot \psi^{m+2} - P_2}{E'} \cdot \frac{1}{R_2^{m-1} \cdot (1-\psi^{2m+1})} \cdot \frac{[(1-\nu) \cdot E' - 2 \cdot \nu'^2 \cdot E]}{[m \cdot (1-\nu) \cdot E' + 2 \cdot \nu' \cdot E]},$$

где

$$\psi = \frac{R_1}{R_2}.$$

Перейдем к безразмерным коэффициентам:

$$\overline{C}_1 = \frac{C_1}{R_1^{m+2}}, \quad \overline{C}_2 = C_2 \cdot R_2^{m-1},$$

тогда для прогиба оболочки получим.

$$u_\rho(\rho, P_1, P_2) = \frac{\overline{C}_1(P_1, P_2) \cdot R_1^{m+2}}{\rho^{m+1}} + \frac{\overline{C}_2(P_1, P_2) \cdot \rho^m}{R_2^{m-1}}$$

где

$$\overline{C}_1 = \frac{P_1 - P_2 \cdot \psi^{m-1}}{E'} \cdot \frac{1}{(1 - \psi^{2m+1})} \cdot \frac{(1 - \nu) \cdot E' - 2 \cdot \nu'^2 \cdot E}{[(m+1) \cdot (1 - \nu) \cdot E' - 2 \cdot \nu' \cdot E]},$$

$$\overline{C}_2 = \frac{P_1 \cdot \psi^{m+2} - P_2}{E'} \cdot \frac{1}{(1 - \psi^{2m+1})} \cdot \frac{[(1 - \nu) \cdot E' - 2 \cdot \nu'^2 \cdot E]}{[m \cdot (1 - \nu) \cdot E' + 2 \cdot \nu' \cdot E]}.$$

Отметим, что в изотропном случае $m = 1$, так как $E = E'$, $\nu = \nu'$, $\beta = 2$, и, следовательно

$$\overline{C}_1 = \frac{P_1 - P_2}{E \cdot (1 - \psi^3)} \cdot \frac{(1 + \nu)}{2},$$

$$\overline{C}_2 = \frac{(P_1 \cdot \psi^3 - P_2) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{E \cdot (1 - \psi^3)}.$$

Выражение для перемещения в изотропном случае примет вид

$$u_\rho(\rho, P_1, P_2) = \frac{(P_1 - P_2) \cdot (1 - \nu) \cdot R_1^3}{2 \cdot E \cdot (1 - \psi^3) \cdot \rho^2} + \frac{(P_1 \cdot \psi^3 - P_2) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \rho}{E \cdot (1 - \psi^3)}.$$

Если слой оболочки является тонким, т.е. толщина слоя $h = R_2 - R_1$ много меньше внутреннего радиуса слоя, то $\psi = 1 - \frac{h}{R_2}$ и можно положить

$$1 - \psi^3 \cong 1 - \left[1 - \frac{3 \cdot h}{R_2}\right] = \frac{3 \cdot h}{R_2}.$$

Полагая в этом случае $R_1 \approx R_2 \approx R$, для прогиба слоя получим

$$u_\rho(\rho, P_1, P_2)|_{\rho=R} = W = \frac{(P_1 - P_2) \cdot R^2 \cdot (1 - \nu)}{2 \cdot h \cdot E}, \quad (4)$$

которое совпадает с уравнением прогиба срединной поверхности сферической оболочки, полученным по классической теории оболочек. Отметим, что и для трансверсально-изотропной оболочки, если мы будем рассматривать оболочку постоянной толщины, мы получим соотношение (4), учитывающее только модуль упругости в поверхности изотропии [6].

2. ИЗМЕНЕНИЕ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ИНТРАСКЛЕРАЛЬНЫХ ИНЪЕКЦИЯХ

Рассмотрим задачу о кратковременном изменении внутриглазного давления при введении интрасклеральных инъекций. Изменение объема исходной сферы, находящейся под действием давления P , можно определить по следующему соотношению:

$$\Delta V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_1 + u_\rho(R_1, P_1))^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_1)^3.$$

а отсюда можно вывести и обратную зависимость $P_1 = f(\Delta V)$, характеризующую изменение внутреннего давления от дополнительно введенного объема жидкости. Для сферического слоя с параметрами $R_1 = 11.75$ мм, $R_2 = 12.25$ мм, $E = 14.3$ МПа, $\nu = 0.4$ - реальными параметрами склеральной оболочки эмметропического глаза (глаза с нормальным зрением), полученными в экспериментальных исследованиях [3, 7] и при начальном значении ВГД=15 мм.рт.ст., при различных соотношениях E/E' для инъекции 0.1 мл получен некоторый диапазон изменения коэффициента Пуассона. Результаты расчетов ВГД для некоторых ν' приведены в табл. 1.

Данные табл. 1 показывают, какое существенное значение имеет учет соотношения трансверсального и нормального модулей упругости склеры. Отметим, что результаты, представленные в предпоследней строке таблицы наиболее соответствуют экспериментальным данным, полученным при интраоперационном измерении ВГД

Таблица 1. Изменение ВГД при введении инъекции 0.1 мл

Соотношение E/E'	Коэффициент Пуассона ν'	ВГД (мм.рт.ст.)
1	0.40	70.2
2	0.30	68.8
10	0.15	60.6
100	0.01	56.3
200	0.0075	47.4

тонометром Шиотца сразу после инъекции 0.1 мл препарата (тримцинолон) [8].

Также по соотношению для нормального перемещения можно получить изменение толщины слоя склеры под действием давления P (рис. 1):

$$\Delta h = u_\rho(R_2, P) - u_\rho(R_1, P).$$

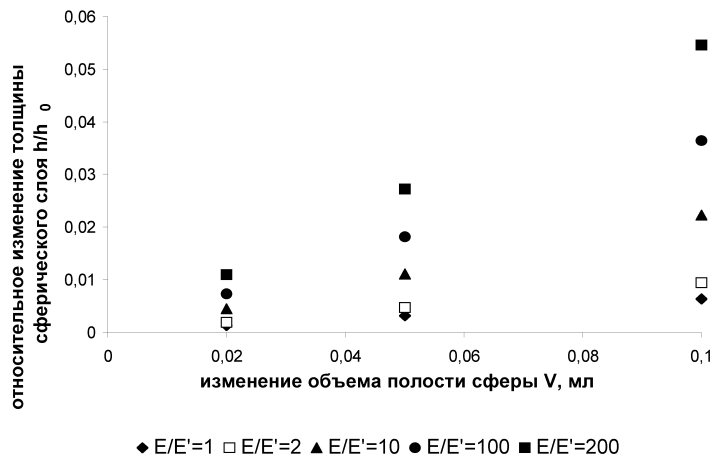


Рис. 1. Зависимость изменения толщины склеральной оболочки от объема введенной несжимаемой жидкости.

На рис. 1. представлена рассчитанная по представленной математической модели зависимость относительного изменения толщи-

ны склеральной оболочки от объема введенной несжимаемой жидкости. Изменение толщины склеральной оболочки при увеличении ВГД, как один из результатов представленного моделирования, согласуется с имеющимися данными о том, что при открытоугольной глаукоме, глазном заболевании, сопровождающемся, как правило, повышенным уровнем ВГД, также наблюдается уменьшение толщины склеры [9]. Необходимость учета трансверсальной анизотропии корнеосклеральной оболочки глаза для конкретных задач моделирования физиологических и патологических процессов в глазу, а также возрастные зависимости значения $\frac{E}{E_T}$ в норме и при патологиях глаза предстоит еще изучить. Первые результаты моделирования изменения ВГД при интрасклеральных инъекциях показали, что представленный математический аппарат может быть использован для адекватной оценки роста ВГД в результате инъекции для глаз, имеющих форму, близкую к сферической по известным биометрическим данным. Представленные результаты для сферического слоя являются основой для решения более общей задачи оценки изменения внутреннего давления после инъекций в гиперметропических (дальнозорких) и миопических (близоруких) глазах. В основе этой оценки лежит предположение, что на изменение внутриглазного давления наиболее существенно влияет не геометрическая форма оболочки (глаза), а начальный объем глаза (начальный внутренний радиус). Следовательно, можно заменить исследуемую эллипсоидальную оболочку (рис. 2) сферическим слоем такого же объема:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_{sphere}^3,$$

$$a = R_{sphere},$$

$$b = \frac{APA}{2}$$

где АРА — так называемая передняя-задняя ось (см. 2).

Экспериментальные данные показывают, что обычно глаза с миопией имеют больший объем, чем глаза людей с эметропией (людей с нормальным зрением) и гиперметропией.

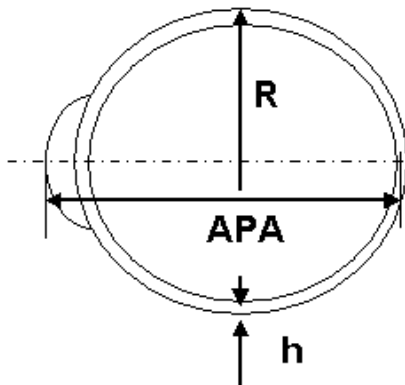


Рис. 2. Сферический слой и его основные геометрические параметры.

Таблица 2. Значения основных параметров глаз у людей с различными типами заболеваний

Миопия	Эмметропия	Гиперметропия
Эллипсоид	Сфера	Эллипсоид
$R = 13.5$ мм	$R = 12$ мм	$R = 10.5$ мм
$APA = 28$ мм	$APA = 23.5$ мм	$APA = 19$ мм
$E = 12.4$ МПа	$E = 14.3$ МПа	$E = 14.3$ МПа

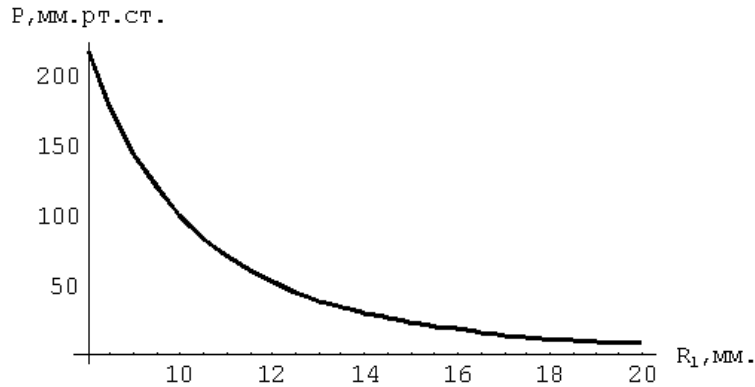
Учитывая начальные данные, приведенные в табл. 2, и используя описанную выше модель, можно получить следующие результаты, собранные в табл. 3

Эти результаты довольно хорошо соотносятся с имеющимися экспериментальными данными, что говорит о правильности сделанного предположения и построения математической модели.

Для исследования миопии и гиперметропии представляется интересным рассмотреть зависимость давления от начального объема (начального внутреннего радиуса). Естественно, если начальный объем оболочки больше, то доля относительного увеличения объема за счет инъекции меньше, а значит, и давление будет увеличиваться меньше, что следует из рис. 3.

Таблица 3. Результаты вычислений по представленной модели

	$\frac{E}{E'} = 100$	$\frac{E}{E'} = 200$
Гиперметропия	90.5	62.8
Эмметропия	56.3	40.5
Миопия	32.5	20.1

Рис. 3. График зависимости внутриглазного давления (P) от внутреннего радиуса (R_1).

Эту зависимость легко получить, фиксируя изменение внутреннего объема (рассмотрен случай, когда $\Delta V = 0.1$ мл) и полагая, что $R_2 - R_1 = 0.5$ мм. Сравнивая эти данные с результатами экспериментов, можно полагать, что значение начального объема (относительная доля введенного объема) оказывает большее влияние на изменение внутреннего давления, чем небольшие изменения формы глаза.

Как уже говорилось, на изменение давления влияют и параметры упругости. Модули Юнга и коэффициент Пуассона в касательной плоскости изучались в некоторых экспериментальных работах [3, 4], а вот на другой коэффициент Пуассона (в перпендикулярной плоскости) есть только ограничения из законов механики [5],

которые в случае $R_1 = 11.75$ мл, $R_2 = 12.25$ мл, $E = 14.3$ МПа, $\nu = 0.4$ и дают следующий интервал для изменения: $\nu' \in [0; 0.0547]$, поэтому представляет интерес в соответствующем диапазоне тоже проследить эту зависимость, что и представлено на рис. 4:

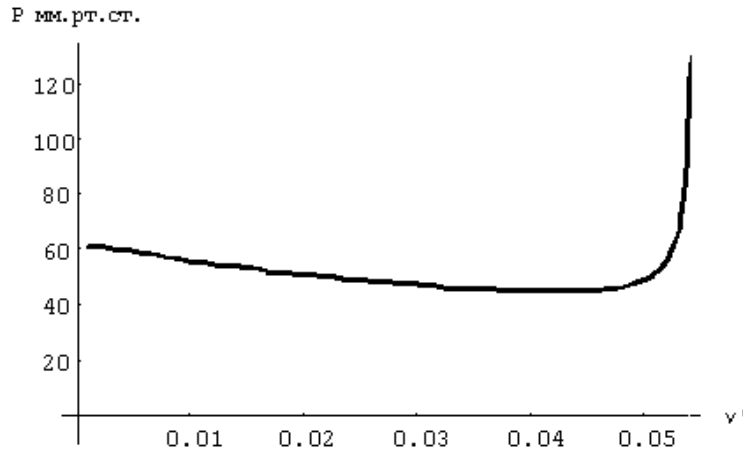


Рис. 4. График зависимости внутриглазного давления (P) от коэффициента Пуассона в перпендикулярной плоскости (ν').

Таким образом, исходя из построенной зависимости, внутреннее давление P может принимать значения из диапазона $[40; 100]$ мм. рт. ст., когда ν' принимает значения из диапазона $[0; 0.0547]$.

3. Выводы

Представленная модель успешно решает задачу определения изменения внутреннего давления в трансверсально-изотропной сферической оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости. Более того, ее можно распространить и на оболочку эллипсоидальной формы. И можно получить оценку изменения внутреннего давления при изменении внутреннего объема оболочки эллипсоидальной

формы, а следовательно, иметь возможность в каждом конкретном случае (для людей с различными патологиями зрения) оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для отдельного пациента, а также, возможно, на основе этих данных рекомендовать уменьшенную дозу препарата для отдельных больных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
2. Атанацкович Т., Гуран А. Лекции по теории упругости, - СПб., 2003. 400 с.
3. Иомдина Е.Н. Биомеханические свойства склеры и возможности ее укрепления при миопии. Автореф. дис. канд. М., 1984. 24 с.
4. Battaglioli J.L., Kamm R.D. Measurements of the compressive properties of scleral tissue. Invest. Ophthalm. Vis. Sci. 1984. P. 59-65.
5. Родионова В.А., Тутаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб., Изд-во СПбГУ. 1996. 278с.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., 1974. 448 с.
7. Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб., Изд-во СПбГУ. 2000. 92 с.
8. Maier M., Bauer S.M., Lanzl I.M., Feucht N., Fisher E., Winkler von Mohrenfels C., Lohmann C., Kotliar K.E. Effect of Intravitreal Injections and Volume Change on Intraocular Pressure — a Biomechanical model //Ophthalmic research 2005, 37 (Suppl.1), p. 197.
9. Нестеров А.П. Глаукома. М., Медицина. 1995. 256 с.

О ЗАДАЧЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА СКЛЕРАЛЬНОЙ ТКАНИ

А. Н. МИРОНОВ**††

Доклад на семинаре 5 сентября 2006 г.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача конструирования упругого потенциала корнеосклеральной оболочки глаза. В качестве модели используется нелинейная трансверсально-изотропная сферическая оболочка постоянной толщины, деформационное изменение площади срединной поверхности которой предполагается малым, а материал оболочки – несжимаемым.

На основании эмпирических зависимостей, полученных при малых деформациях, построена функция упругого потенциала. Из условий перехода потенциала в закон Гука и экспериментальных данных получены значения констант.

Проведен графический анализ экспериментальной зависимости «напряжение—деформация» при одноосном растяжении образца склеральной ткани вплоть до разрыва. Получены условия существования решения и ограничения на константы упругого потенциала. Построен график функции упругого потенциала и графики зависимости нагрузки от деформации для симметричного двухосного, одноосного растяжений и сдвига.¹

1. БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКЛЕРЫ

Глаз человека представляет собой сложную биомеханическую структуру. Оболочка глаза состоит из трех основных слоев: корнеосклеральной оболочки (склеры, сопряженной с роговицей), сосудистой оболочки и сетчатки. Склера вместе с роговицей являются самыми жесткими оболочками глаза и выполняют каркасную функцию.

Склеральную ткань можно отнести к разряду мягких биологических тканей [1]. Механические свойства этих тканей являются важным диагностическим параметром при оценке их состояния.

^{**1}Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00258.

^{††}© А. Н. Миронов, 2006

Мягким биологическим тканям присуще общее свойство — способность к большим — до 200% — деформациям, а также некоторые другие общие черты в механическом поведении, например релаксация напряжений при постоянной деформации, анизотропия и нелинейность механических свойств. Однако в практических расчетах мягкие биологические ткани (в том числе и склеру) можно рассматривать как несжимаемые трансверсально-изотропные тела, что существенно упрощает модельные аналитические зависимости между напряжениями и деформациями.

Нелинейность упругих свойств является важным фактором, существенно влияющим на расчет напряженно-деформированного состояния оболочки. Ниже предлагается способ построения нелинейного упругого потенциала склеральной ткани, позволяющий адекватно описывать поведение оболочки при моделировании различных хирургических операций.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА

Глаз будем рассматривать как нелинейную тонкую упругую сферическую оболочку постоянной толщины. Для построения напряженно-деформированного состояния оболочки будем использовать обозначения и соотношения из книги [2]. В качестве материальных координат примем длину дуги меридиана $\overset{\circ}{s}$ и угол $\overset{\circ}{\theta}$ недеформированной оболочки.

Запишем основные соотношения для осесимметрично-деформируемой оболочки [2]:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x} &= \overset{\circ}{r}(\overset{\circ}{s}) \cos \overset{\circ}{\theta}, & \overset{\circ}{y} &= \overset{\circ}{r}(\overset{\circ}{s}) \sin \overset{\circ}{\theta}, & \overset{\circ}{z} &= \overset{\circ}{z}(\overset{\circ}{s}), \\ x &= r(\overset{\circ}{s}) \cos \overset{\circ}{\theta}, & y &= r(\overset{\circ}{s}) \sin \overset{\circ}{\theta}, & z &= z(\overset{\circ}{s}). \end{aligned}$$

Главные кратности удлинений вдоль меридионального и окружного направлений:

$$\lambda_s = \frac{ds}{d\overset{\circ}{s}}, \quad \lambda_\theta = \frac{r}{\overset{\circ}{r}}.$$

Компоненты метрического тензора срединной поверхности:

$$\overset{\circ}{a}_{11} = 1, \quad \overset{\circ}{a}_{22} = \overset{\circ}{r}^2, \quad \overset{\circ}{a}_{12} = \overset{\circ}{a}_{21} = 0;$$

$$a_{11} = \lambda_s^2, \quad a_{22} = \dot{r}^2 \lambda_\theta^2, \quad a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$a_{\langle 11 \rangle} = \lambda_s^2, \quad a_{\langle 12 \rangle} = a_{\langle 21 \rangle} = 0, \quad a_{\langle 22 \rangle} = \lambda_\theta^2.$$

Безмоментные уравнения равновесия:

$$\frac{d(\dot{r}T_s)}{d\dot{s}} - \cos \varphi T_\theta + \dot{r} \lambda_s \lambda_\theta q_s = 0,$$

$$-\sin \varphi T_\theta - \dot{r} \frac{d\varphi}{d\dot{s}} T_s + \dot{r} \lambda_s \lambda_\theta q_n = 0.$$

Связь между усилиями T_s , T_θ и кратностями удлинений определяется видом упругого потенциала материала оболочки Φ_0 , который может быть задан как функция инвариантов тензора деформаций. Для рассматриваемой трансверсально-изотропной несжимаемой биологической мембраны:

$$\Phi_0 = \Phi_0(\Psi_1^0, \Psi_2^0),$$

где

$$\Psi_1^0 = a_{\langle 11 \rangle} + a_{\langle 22 \rangle}, \quad \Psi_2^0 = a_{\langle 11 \rangle} a_{\langle 22 \rangle} - a_{\langle 12 \rangle} a_{\langle 21 \rangle},$$

– значения главных инвариантов тензора деформаций на срединной поверхности оболочки.

Если считать, что кратность изменения площади срединной поверхности

$$\Delta = \sqrt{\frac{a}{\dot{a}}} = \sqrt{\Psi_2^0}$$

– малая величина [2], то следует вводить инвариант Ψ_2^0 в упругий потенциал простейшим – линейным – образом:

$$\Phi_0 = A\chi(\Psi_1^0) + C\Psi_2^0. \quad (1)$$

Здесь $A, C, \chi(\Psi_1^0)$ – постоянные и функции материала.

Безмоментные усилия, отвечающие закону упругости (1), будут иметь вид

$$S_s = T_s = 2\dot{h}\lambda_s \left[A\chi'(\lambda_s^2 + \lambda_\theta^2) + C\lambda_\theta^2 \right],$$

$$S_\theta = T_\theta = 2\dot{h}\lambda_\theta \left[A\chi' (\lambda_s^2 + \lambda_\theta^2) + C\lambda_s^2 \right].$$

3. СИММЕТРИЧНОЕ ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Симметричное двухосное растяжение рассматриваемой оболочки происходит при повышении внутреннего давления. В офтальмологической литературе величину, связывающую изменение внутриглазного давления (ВГД) с соответствующим ему изменением объема глазного яблока, принято называть коэффициентом ригидности (КР) глаза. Friedenwald [3] предложил для вычисления КР формулу, определяющую изменение ВГД как показательную функцию от изменений объема глаза:

$$K = \frac{\ln p - \ln p_0}{\Delta V},$$

или для бесконечно малых Δp , ΔV :

$$\frac{dp}{dV} = Kp.$$

В дальнейшем McEwen и St. Helen [4] предложили унифицированную формулу

$$\frac{dp}{dV} = ap + b \tag{2}$$

для человеческих, кошачьих и кроличьих глаз. Для глаза человека $a = 0.015 - 0.027 \text{ мм}^{-3}$ и $b = 0.03 - 0.31 \text{ мм.рт.ст./мм}^3$ ($4.0 - 41.36 \text{ Па/мм}^3$). Данные исследования подтверждаются и другими результатами [5, 6].

Экспериментально установлено наличие четкой отрицательной корреляции между КР и объемом глаза [7]. Связь же КР с механическими показателями склеры оказалась слабой и статистически незначимой вследствие высокой погрешности измерения КР, а также потому, что на его величину, помимо биомеханических свойств корнеосклеральной капсулы, оказывают влияние размеры глаза, уровень офтальмотонуса и реакция внутриглазных сосудов [7, 8].

Несмотря на вышеуказанные ограничения, измерение ригидности в течение длительного времени оставалось практически единственным (хотя и косвенным) методом исследования биомеханических характеристик склеральной капсулы в клинических условиях.

Как использование самого термина «ригидность глаза», так и то, что это понятие основано исключительно на эмпирическом подходе вне связи с фундаментальными законами механики, было предметом критики некоторых ученых [9, 10]. Применение эмпирических зависимостей при построении напряженно-деформированного состояния оболочки глаза было рассмотрено в работе [11] на примере изотропной линейной сферической модели. Упрочнение материала оболочки при растяжении рассматривалось как изменяющийся модуль Юнга, а для построения зависимости изменения модуля Юнга от радиуса оболочки было использовано уравнение (2).

Это же уравнение будем использовать для построения упругого потенциала (1). Интегрируя уравнение (2) при начальном условии

$$p(\dot{V}) = 0, \quad \dot{V} = \frac{4}{3}\pi\dot{R}^3,$$

получим

$$p = \frac{b}{a} \left(e^{a(V - \dot{V})} - 1 \right).$$

При равномерном расширении сферической оболочки под действием внутреннего давления

$$\lambda_s = \lambda_\theta = \lambda, \quad \Psi_1^0 = \lambda_s^2 + \lambda_\theta^2 = 2\lambda^2, \quad \lambda = \left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{1/2},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (\dot{R}\lambda)^3 = \frac{4}{3}\pi\dot{R}^3 \left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{3/2},$$

откуда

$$p = \frac{b}{a} \left(e^{a \frac{4}{3}\pi\dot{R}^3 \left(\left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{3/2} - 1 \right)} - 1 \right).$$

С другой стороны,

$$p = \frac{2T_s}{\dot{R}\lambda^2} = \frac{4\dot{h}}{\dot{R}\lambda} \left[A\chi'(\Psi_1^0) + C\lambda^2 \right].$$

Сравнивая правые части полученных выражений, можно прийти к выводу, что

$$A\chi'(\Psi_1^0) = \frac{b\dot{R}}{4a\dot{h}} \left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{1/2} \left[e^{\frac{4}{3}\pi\dot{R}^3 \left(\left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{3/2} - 1 \right)} - 1 \right] - \frac{C}{2}\Psi_1^0. \quad (3)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим функцию упругого потенциала (1):

$$A\chi(\Psi_1^0) = \frac{b}{4\pi a^2 \dot{h} \dot{R}^2} \left[e^{\frac{4}{3}\pi\dot{R}^3 \left(\left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{3/2} - 1 \right)} - 1 \right] - \frac{b\dot{R}}{3a\dot{h}} \left(\frac{\Psi_1^0}{2} \right)^{3/2} - \frac{C}{4} (\Psi_1^0)^2.$$

Условия перехода закона упругости (1) в закон Гука при малых деформациях имеют вид

$$A = \frac{\bar{E}_1(1 - \bar{\nu}_{12})}{4\chi'(2)}, \quad C = -\frac{\bar{E}_1(1 - \bar{\nu}_{12})}{4}, \quad \frac{\chi''(2)}{\chi'(2)} = \frac{1}{1 - \bar{\nu}_{12}}.$$

Полагая $\bar{\nu}_{12} = 0.45$, $\dot{R} = 12$ мм, $\dot{h} = 1$ мм (см. [12]); $a = 0.02$ мм⁻³, $b = 0.24$ мм рт.ст./мм³ (см. [6]), определим значения констант:

$$C = -\frac{\pi b \dot{R}^4}{2\dot{h}} \frac{1 - \bar{\nu}_{12}}{1 + \bar{\nu}_{12}} = -2965.18 \text{ мм рт.ст.} = -0.395 \text{ МПа},$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{4C}{1 - \bar{\nu}_{12}} = \frac{2\pi b \dot{R}^4}{\dot{h}(1 + \bar{\nu}_{12})} = 21564.93 \text{ мм.рт.ст.} = 2.875 \text{ МПа}.$$

Заметим, что расчетный модуль Юнга $\bar{E}_1 = 2.875$ МПа меньше, чем определенный экспериментально $E = 14.3$ МПа, при больших ($\lambda = 1.3$) растяжениях [12].

Запишем безмоментное решение уравнений равновесия при нагружении оболочки равномерным внутренним давлением:

$$q_s = 0, \quad q_n = p,$$

$$\lambda_s = \lambda_\theta = \lambda = \left(1 + \frac{3}{4a\pi\dot{R}^3} \ln \left(\frac{a}{b} p + 1 \right) \right)^{1/3}, \quad \varphi = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R},$$

$$M_s^{\bar{b}} = M_\theta^{\bar{b}} = T_{sn}^{\bar{b}} = 0, \quad T_s^{\bar{b}} = T_\theta^{\bar{b}} = \frac{1}{2} \dot{R} \lambda^2 p;$$

перемещения:

$$u^{\bar{b}} = 0, \quad w^{\bar{b}} = \dot{R}(\lambda - 1);$$

изменение объема:

$$\Delta V^{\bar{b}} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{b} p + 1 \right).$$

Следует иметь в виду, что эмпирическая зависимость (2) была получена при усреднении экспериментальных данных и поэтому не является точной. Так, формула изменения объема, которая следует из (2), не зависит явно от размеров оболочки, что, в свою очередь, противоречит результатам других исследований. Таким образом, нужно подразумевать, что коэффициенты a и b должны зависеть от размеров глазного яблока.

Формула (2) была получена при изменении ВГД в физиологическом диапазоне: 10 – 100 мм рт.ст (0.013 - 0.133 МПа). Изменение объема при таких нагрузках составляет до 100 мм³, что соответствует изменению λ до 1.005.

4. ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Подробные данные биомеханических исследований склеральной ткани, подкрепленные результатами биохимических и морфологических исследований, приведены в докторской диссертации Е.Н. Иомдиной [1].

Для определения механических характеристик склеральной ткани проводились испытания полосок шириной $b = 4$ мм и длиной $a = 10$ мм в режиме одноосного нагружения вплоть до разрыва. Кривую «напряжение – деформация» [1] условно можно разделить на три участка.

Начальный нелинейный участок, на котором напряжение с увеличением деформации меняется по экспоненциальному закону (как считают некоторые исследователи [13, 14]), соответствует физиологическому диапазону функционирования мягких биологических тканей. Как подчеркивает автор, этот участок возникает не из-за неточности установки или проскальзывания образца в зажимах испытательной машины, а вследствие особенностей строения склеральной ткани, состоящей из переплетенных фибриллярных структур. Такой эффект значительных деформаций при небольших растягивающих напряжениях связан, по мнению Г. Бранкова [15], с распрямлением S-образных групп молекул. Чем выше степень извитости волокон, чем больше выражены хаотичность и рыхлость их взаиморасположения, тем протяженнее данный участок диаграммы. С увеличением степени деформации возможность смещения волокон относительно друг друга снижается, и на процесс макродеформации образца существенное влияние начинает оказывать деформация самих волокон склеры. Этот этап деформирования на диаграмме растяжения характеризуется линейным участком. Как показывает эксперимент, в данной области нагрузок деформации склеральной ткани являются обратимыми, т.е. снятие нагрузки через некоторое время, сравнимое со временем растяжения, приводит склеру в исходное состояние. Необратимая деформация начинается в окрестности второй точки перехода, т.е. там, где с увеличением нагрузки начинается третий протяженный нелинейный участок диаграммы. Затем, с увеличением деформации, в некоторой точке напряжение достигает максимума и происходит разрыв структурных элементов.

Для образцов, вырезанных из экваториальной области, были получены следующие данные: величина предельной продольной деформации: $85.3 \pm 5.8\%$, предел прочности: $\sigma = 14.1 \pm 0.9$ МПа.

Для рассматриваемого упругого потенциала (1) при одноосном

растяжении пластины с размерами $\overset{\circ}{a} \times \overset{\circ}{b} \times \overset{\circ}{h}$ силой P имеют место следующие соотношения [2]:

$$a_{\langle 11 \rangle} = \lambda_1^2, \quad a_{\langle 12 \rangle} = 0, \quad a_{\langle 22 \rangle} = \lambda_2^2, \quad \Psi_1^0 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad \Psi_2^0 = \lambda_1^2 \lambda_2^2,$$

$$S_{\langle 11 \rangle} = \frac{P}{\overset{\circ}{a}}, \quad S_{\langle 22 \rangle} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda,$$

$$\frac{P}{2\overset{\circ}{a}\overset{\circ}{h}} = C\lambda(\lambda_2^2 - \lambda^2), \quad A\chi'(\lambda^2 + \lambda_2^2) + C\lambda^2 = 0. \quad (4)$$

Рассматривая упругий потенциал (1) при больших растяжениях, проведем графический анализ экспериментальной кривой [1].

После компьютерной обработки (перевод данных в векторный формат и масштабирование в соответствии с экспериментальными данными) получим график зависимости напряжения $\sigma = \frac{P}{\overset{\circ}{b}\overset{\circ}{h}}$

от кратности удлинения λ . Пересчитывая ординаты $y_i = \frac{\sigma_i \overset{\circ}{b}}{2\lambda_i \overset{\circ}{a}}$, построим зависимость величины $C(\lambda_2^2 - \lambda^2)$ от λ (рис. 1).

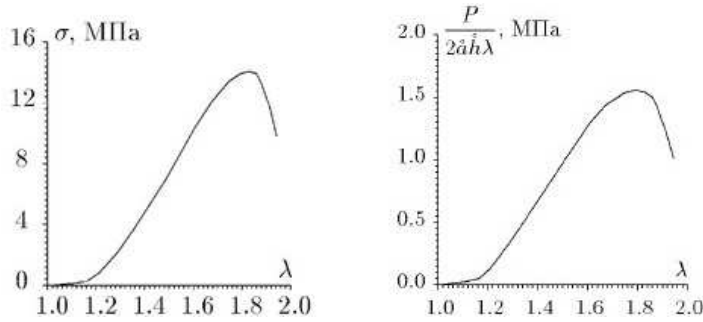


Рис. 1. Зависимость напряжения от удлинения (слева) и нагрузки от удлинения (справа).

Полагая $\lambda_2 = 0$, получим ограничение, которому должна удовлетворять константа C (рис. 2).

Как видно из рис. 2, при $-0.515 \lesssim C < 0$ МПа, при одноосном растяжении будет существовать область (выше кривой $\lambda_2 = 0$), где

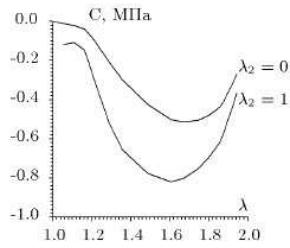


Рис. 2. Область существования решения.

$\lambda_2 < 0$, что противоречит физическому смыслу. В области ниже кривой $\lambda_2 = 0$ выполняется соотношение $\lambda_2 < \lambda$. При этом не существует такого значения константы C , при котором выполнялось бы соотношение $0 < \lambda_2 < 1$ на всем интервале деформирования.

Положим $C = -0.6$ МПа, и, рассматривая график (см. рис. 2) как способ неявного задания функции $A\chi(\Psi_1^0)$ упругого потенциала (1), используя уравнения (4), получим зависимости, характеризующие распределение различных величин на всем интервале деформирования.

На графике (рис. 3) приведено распределение кратностей удлинений λ_2 и $\lambda_\xi = \frac{1}{\lambda\lambda_2}$.

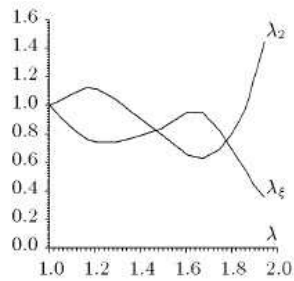


Рис. 3. Распределение кратностей удлинений.

На начальном этапе растяжения λ_2 растет, затем (в окрестности первой точки перехода) начинает уменьшаться, достигает минимума в окрестности второй точки перехода, после этого наблюдается быстрый рост этого параметра.

На рис. 4 представлен вид функции $A\chi'(\Psi_1^0)$.

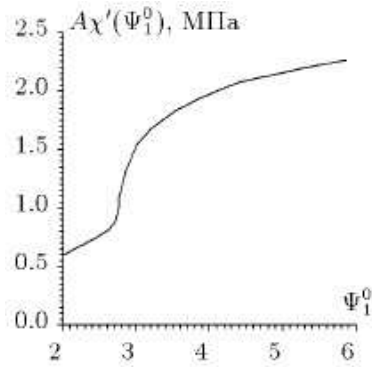


Рис. 4. Функция упругого потенциала.

Это функция постоянного роста, имеющая характерный излом при значении $\Psi_1^0 \approx 2.7$, соответствующем первой точке перехода.

На рис. 5 показано распределение нагрузки при:

1) симметричном двухосном растяжении (кривая 1), для которого (см. [2])

$$\frac{P_1}{\dot{a}} = \frac{P_2}{\dot{b}} = S_{\langle 11 \rangle} = S_{\langle 22 \rangle}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

$$\frac{P_1}{2\dot{a}\dot{h}} = \frac{P_2}{2\dot{b}\dot{h}} = A\chi'(2\lambda^2)\lambda + C\lambda^3;$$

2) одноосном растяжении (кривая 2);

3) чистом сдвиге (кривая 3), для которого

$$\frac{P}{\dot{a}} = S_{\langle 11 \rangle}, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 1, \quad \frac{P}{2\dot{a}\dot{h}} = A\chi'(1 + \lambda^2)\lambda + C\lambda.$$

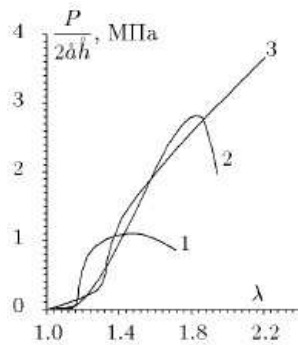


Рис. 5. Распределение нагрузки при двухосном, одноосном растяжениях и сдвиге.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

На основании эмпирической формулы (2) построен упругий потенциал (1), (3). Зависимость изменения объема оболочки от роста давления носит логарифмический характер и хорошо согласуется с экспериментальными данными [16].

При одноосном нагружении упругий потенциал (1), (3) дает экспоненциальный рост нагрузки в зависимости от деформации и не имеет точки перехода в линейный участок, как это наблюдается в эксперименте.

Таким образом, применение упругого потенциала (1), (3) возможно только при малых деформациях, соответствующих физиологическим нагрузкам. С другой стороны, практически все прикладные задачи (см., например, [12, 17]) посвящены исследованию поведения склеры именно в этом диапазоне нагрузок и деформаций.

Для упругого потенциала вида (1) проведен графический анализ экспериментальной зависимости «напряжение–деформация» при одноосном растяжении образца склеральной ткани вплоть до разрыва. Получены условия существования решения и ограничения на константы упругого потенциала (см. рис. 3). Построен график

функции упругого потенциала (см. рис. 5). Приведены графики зависимости нагрузки от деформации для симметричного двухосного, одноосного растяжений и сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: Докт. дис., М., 2000. 319 с.
2. *Кабриц С.А., Михайловский Е.И., Товстиж П.Е. и др.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 388 с.
3. *Friedenwald J.S.* Contribution to the theory and practice of tonometry // *Am. J. Ophthalmol.*, 1937, 20 (Pt 2), 985 – 1024.
4. *McEwen W.K., St. Helen R.* Rheology of the human sclera: unifying formulation of ocular rigidity // *Ophthalmologica*, 1965, 105, 321 – 346.
5. *Woo S. L., Kobayashi A.S., Lawrence C. et al.* Mathematical model of the corneo-scleral shell as applied to intraocular pressure-volume relations and applanation tonometry // *Ann. Biomed. Eng.*, 1972, 1, 87 – 98.
6. *Hibbard R.R., Lyon C.S., Shepherd M.D. et al.* Immediate rigidity of an eye // *Exp. Eye Res.*, 1970, 9, 137 – 143.
7. *Ахпатров А.И.* Коэффициент ригидности глаза: Автореф. канд. дис. М., 1984. 17 с.
8. *Нестеров А.П., Бунин А.Я., Кацнельсон Л.А.* Внутриглазное давление. М., 1974. 381 с.
9. *White O.W.* Ocular Elasticity? [letter] // *Ophthalmology*, 1990, 97, 1092 – 1094.
10. *Kalenak J.W.* More Ocular Elasticity? [letter] // *Ophthalmology*, 1991, 98, 411 – 412.
11. *Purslow P.P., Karwatowski W.S.* Ocular elasticity. Is engineering stiffness a more useful characterization parameter than ocular rigidity? // *Ophthalmology*, 1996 Oct, 103(10), 1686 – 1692.
12. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Миронов А.Н. и др.* Построение изменений модели глаза при наложении циркулярного шва // Повреждение органа зрения у детей. Сб. науч. трудов/Под ред. Е.Е. Сомова. СПб., 1991. С. 57 – 64.
13. *Дашевский А.И., Львовский В.М.* Применение теории оболочек к исследованию физических основ тонометрии глаза // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Изд-во. «Будивельник», 1975. С. 7 – 14.
14. *Graebel W.P., van Alphen G.W.H.M.* The elasticity of sclera and choroid of the human eye, its implications on scleral rigidity and accommodation // *J. Biomech. Eng.*, 1977, 99, 203 – 208.
15. *Бранков Г.* Основы биомеханики. М.: Мир, 1981. 254 с.
16. *Johnson M.W., Han D.P., Hoffman K.E.* The effect of scleral buckling on ocular rigidity // *Ophthalmology*, 1990 Feb; 97(2), 190 – 195.
17. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстиж П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ О ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Доклад на семинаре 27 сентября 2005 г.

П.С. АКСЕНОВ

РЕЗЮМЕ

В работе методом конечных элементов получены решения ряда задач статики сферических оболочек, связанных с моделированием процессов в офтальмологии.

Исследована деформация круговой пластины, сопряженной по краю со сферической оболочкой. Прогобы пластины сравнивались с известным аналитическим решением для пластины, защемленной по контуру. Определены соотношения между параметрами пластины и оболочки, для которых напряженно-деформированное состояние пластины мало отличается от состояния, описываемого аналитическим решением. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач о деформации решетчатой пластины глаза.

Найдены перемещения сферической оболочки под действием растягивающих усилий, приложенных к ее экватору. Изучено влияние параметров оболочки, наличия жидкости внутри оболочки, характера приложенной нагрузки на перемещения оболочки. Аналогичная задача решена для оболочки, состоящей из двух одинаковых сферических сегментов. Результаты расчетов позволили оценить изменение кривизны оболочки, которое имеет существенное значение в задаче об аккомодации хрусталика глаза.

Устойчивость тонких прямоугольных сопряженных пластин

Доклад на семинаре 11 октября 2005 г.

М.В. Кликушина

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ
ТОНКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОВОЛОЧКИ
ПРИ РАЗНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

Доклад на семинаре 22 ноября 2005 г.

А.Б. Анисимов

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются колебания тонких упругих замкнутых круговых конических оболочек с малым углом конусности. Наличие этого малого параметра позволяет применить метод возмущения для получения первых двух членов в асимптотической формуле для фундаментальной частоты колебаний. Рассматривается вопрос о конструировании эквивалентной (приведенной) цилиндрической оболочки, имеющей в первом приближении ту же фундаментальную частоту, что и заданная коническая оболочка. Эта задача рассматривается для разных граничных условий, в том числе и для несимметричных.

**БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ
ПРИ ХИРУРГИЧЕСКОМ ЛЕЧЕНИИ ГЛАЗКОМЫ**

Доклад на семинаре 28 февраля 2006 г.

С. А. Красницкая

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕХАНИКА,
КОМПЬЮТЕРНЫЙ ИНЖИНИРИНГ,
ГЛОБАЛЬНЫЙ АУТСОРСИНГ**

Доклад на семинаре 11 апреля 2006 г.

А.И. Боровков

РЕЗЮМЕ

За последние годы сотрудники Лаборатории компьютерной механики (CompMechLab) успешно выполнили многочисленные контракты в областях прикладной механики, динамики и прочности машин и конструкций, вычислительной механики и компьютерного инжиниринга по заказам ведущих мировых промышленных фирм: Boeing, General Electric Power Systems, General Electric Oil and Gas, General Motors, Ford Motor Company, Schlumberger, Caterpillar, Ferrari, Renault, AM General, Japan Industrial Technology Association, LG Electronics, а также других высокотехнологичных фирм.

В докладе рассмотрены актуальные проблемы механики и машиностроения, вопросы организации учебного процесса и подготовки специалистов в области прикладной механики, вычислительной механики и компьютерного инжиниринга (Computer-Aided Engineering, CAE).

Представлены современные подходы и многочисленные результаты конечно-элементного решения сложных промышленных задач машиностроения, атомной энергетики, автомобилестроения, авиа- и судостроения.

Особое внимание уделено современным вопросам глобального аутсорсинга инженерных услуг.

ОБ АВТОРАХ

Аксенов Петр Сергеевич — окончил математико-механический факультет СПбГУ, получив диплом магистра с отличием по специальности «Механика. Прикладная математика» (2004), а также Технологический университет г. Лаппенранты (Финляндия), получив диплом магистра (Master of Science) по специальности «Информационные технологии» (Information Technology) (2004). Год стажировался в компании LG (Сеул, Корея).

Анисимов Антон Борисович — окончил математико-механический факультет СПбГУ в 2005 г., получив диплом по специальности «Механика». В настоящее время аспирант СПбГУ.

Боровков Алексей Иванович — профессор кафедры «Механика и процессы управления» СПбПУ, заведующий лабораторией «Вычислительная механика» (CompMechLab), организованной им в 1987 г. Автор многочисленных статей, опубликованных в журналах «Int. J. Computers & Structures», «Int. J. Computational Civil and Structural Engineering», «Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)», «Проблемы прочности», «Strength of Materials», «Проблемы прочности и пластичности», «Вопросы динамики и прочности», «IEEE Transactions on Magnetics», «Plasma Devices and Operations» и др.

Воронкова Ева Боруховна — выпускница кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ (диплом с отличием магистра по специальности «Механика. Прикладная математика»). Автор 8 опубликованных работ. Неоднократно выступала с докладами на «Поляховских чтениях» и на семинарах в Институте Гельмгольца (Москва). В 2006 г. защитила в СПбГУ диссертацию на степень кандидата физико-математических наук. В настоящее время работает ассистентом кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ.

Замураев Леонид Александрович — окончил математико-механический факультет СПбГУ в 2006 г., получив диплом с отличием по специальности «Механика». Автор 1 опубликованной работы. В настоящее время аспирант СПбГУ.

Иванова Ольга Викторовна — окончила математико-механический факультет СПбГУ, получив диплом магистра с отличием по специальности «Прикладная математика» (2002) и аспирантуру СПбГУ в 2005 г. Автор 1 печатной работы.

Кликушина Мария Владимировна — окончила с отличием магистратуру СПбГУ по специальности «Механика. Прикладная математика» в 2002 г. В 2005 г. защитила в СПбГУ диссертацию на степень кандидата физико-математических наук. Автор шести опубликованных работ.

Кобченко Мая Евгеньевна — окончила математико-механический факультет СПбГУ, получив диплом бакалавра по специальности «Механика. Прикладная математика» (2005). В настоящее время студентка магистратуры СПбГУ.

Краковская Елена Викторовна — окончила математико-механический факультет СПбГУ, получив дипломы бакалавра по специальности «Механика. Прикладная математика» (2003), и магистра по специализации «Биомеханика» (2005).. Автор 2 опубликованных работ. В настоящее время аспирантка СПбГУ.

Красницкая Светлана Андреевна — студентка 5 курса кафедры «Механика и процессы управления» физико-механического факультета СПбГУ. Участница семинара в Институте Гельмгольца (Москва).

Ландман Ирина Марковна — окончила с отличием бакалавриат (1999 г.) и магистратуру СПбГУ (2000 г.) по специальности «Механика. Прикладная математика». Имеет степень Master of Science, полученную в Concordia University, Montreal (2001). Окончила аспирантуру СПбГУ. Автор 6 опубликованных работ. Неоднократно выступала с докладами на международных конференциях, включая CSME Forum (Montreal, 2000), CANCAM (Hamilton, 1999), «Поляховские чтения» (2003), VI Всероссийский симпозиум по ППМ (2005), MIT Conference (Boston, 2005). Обладатель приза за лучшую студенческую исследовательскую работу на съезде SECTAM XX, Alabama, USA.

Мальшева Оксана Михайловна — окончила математико-механический факультет СПбГУ, получив диплом по специальности «Механика» (2005). В настоящее время аспирантка СПбГУ.

Мионов Андрей Николаевич — окончил математико-механический факультет СПбГУ, получив диплом по специальности «Механика», и очную аспирантуру математико-механического факультета СПбГУ по специальности «Механика деформируемого твердого тела». Неоднократно выступал с докладами на всероссийских и международных конференциях. Опубликовал 13 работ, посвященных применению теории оболочек для анализа напряженно-деформированного состояния оболочек глаза при различных хирургических операциях. В настоящее время работает программистом в ООО «Параметр».

Нарбут Михаил Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики и информатики СПбГУ. Автор многочисленных публикаций по различным вопросам механики сплошной среды и ряда учебных пособий, в том числе книги «Лекции по механике деформируемого твердого тела», написанной совместно с А.И. Кошелевым.

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2005–2006 г. г.**

Воронкова Ева Боруховна — канд физ.-мат. наук, СПбГУ, 2006. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр.

Кликушина Мария Владимировна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2005. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов.

Макаренко Ирина Николаевна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2005. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов.

Черняев Степан Петрович — канд физ.-мат. наук, СПбГУ, 2006. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>Е. В. Краковская. Приложение теории сопряженных оболочек к задачам офтальмологии</i>	—
1. Введение	—
2. Аналитическое решение задач	—
2.1. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки	—
2.2. Напряженно-деформированное состояние пологой сферической оболочки	—
2.3. Условия сопряжения	—
3. Задача о напряженно-деформированном состоянии решетчатой пластинки	—
4. Задача о напряженно-деформированном состоянии роговицы в сопряжении со склерой	—
5. Заключение	—
<i>И. М. Ландман. Асимптотический анализ колебаний вращающихся оболочек</i>	—
1. Введение	—
2. Асимптотический портрет задачи неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек	—
3. Интегралы уравнений колебаний тонких цилиндрических оболочек	—
3.1. Метод исследования характеристического уравнения	—
3.2. Методы упрощения характеристических уравнений	—
3.3. Осесимметричные колебания	—
3.4. Неосесимметричные колебания ($m \neq 0$)	—
3.5. Неосесимметричные колебания вращающихся цилиндрических оболочек ($m \neq 0$) и ($\Omega \neq 0$). Основной случай	—
4. Пример решения краевой задачи	—
4.1. Пример построения укороченных уравнений	—
4.2. Построение собственных векторов	—
4.3. Нахождение собственных низких частот для случая шарнирного опирания	—
4.4. Сравнение найденных собственных частот с известным решением для корней $p_i = \frac{\pi k i}{L}$	—

5. Заключение	—
<i>О. М. Малышева. Определение оптимальных параметров для подкрепленной оболочки</i>	—
1. Введение	—
2. Постановка задачи	—
3. Вычисление собственных значений для задачи об устойчивости подкрепленной оболочки	—
4. Определение оптимальных параметров подкрепленной оболочки при $e = 0$	—
5. Определение оптимальных параметров подкрепленной оболочки с учетом эксцентриситета	—
6. Заключение	—
<i>О. В. Иванова Моделирование деформации капсулы хрусталика глаза при аккомодации</i>	—
1. Введение	—
1.1. Теоретическое моделирование аккомодации	—
1.2. Численное моделирование аккомодации	—
2. Модель	—
3. Практическая реализация задач	—
3.1. Контакт с жестким диском	—
3.2. Контакт с шаром	—
3.3. Контакт с телом шарообразной формы (геометрия, близкая к реальной)	—
4. Результаты и выводы	—
<i>М. Е. Кобченко. О предельном переходе решений плоских задач теории упругости</i>	—
1. Введение	—
2. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины под действием касательных напряжений	—
2.1. Постановка и решение задачи при помощи формул теории упругости	—
2.2. Решение задачи о прямоугольной пластине с использованием уравнений теории стержней	—
2.3. Определение перемещений	—
3. Напряженное состояние круговой пластины под действием касательных усилий	—
3.1. Решение плоской задачи теории упругости	—

3.2. Использование формул сопромата	—
4. Цилиндрическая оболочка, сопряженная с кольцевой пластиной	—
4.1. Постановка задачи и основные уравнения	—
4.2. Задача о деформации пластины в ее плоскости	—
4.3. Граничные условия в задаче об устойчивости цилиндра, подкрепленного пластиной	—
4.4. Пример расчета	—
5. Заключение	—
<i>М. А. Нарбут. Итерационные процессы решения нелинейных задач механики.</i>	—
<i>Е. Б. Воронкова. Математические модели глаукомы.</i>	—
1. Введение	—
2. Особенности строения и деформирования решетчатой пластинки	—
3. Устойчивость симметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин	—
3.1. Уравнения больших деформаций неоднородной круглой пластины	—
3.2. Потеря устойчивости однородной изотропной пластины	—
3.3. Потеря симметричной формы равновесия неоднородной изотропной пластины	—
4. Деформация сферической панели	—
4.1. Деформация однородной панели	—
4.2. Деформация неоднородной сферической панели	—
<i>Л. А. Замураев. Деформация трансверсально-изотропного сферического слоя.</i>	—
1. Деформация сферического слоя	—
2. Изменение внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях	—
3. Выводы	—
<i>А. Н. Миронов. О задаче конструирования упругого потенциала склеральной ткани.</i>	—
1. Биомеханические свойства склеры	—
2. Нелинейная модель оболочки глаза	—

3. Симметричное двухосное растяжение при малых деформациях.....	—
4. Одноосное растяжение при больших деформациях.....	—
5. Результаты и выводы.....	—
Доклады, не вошедшие в сборник.....	—
Об авторах.....	—

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ».**

2005–2006 гг.

Под ред. *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторг*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать 24.03.2006. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,9. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41