

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2004–2005 гг.

Под редакцией *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2005

ББК 22.25
Т78

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. И. Сливкер* (Гипростроймост, ПГУПС)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2004–2005 гг. / Под ред. А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. — 136 с.
ISBN 5-288-03941-0

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

© А. Л. Смирнов, Е. Ф. Жигалко,
сост., предисл., 2005

© Издательство С.-Петербургского
университета, 2005

ISBN 5-288-03941-0

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

И. М. ЛАНДМАН

Доклад на семинаре 8 ноября 2005 г.

РЕЗЮМЕ

В работе представлен алгоритм построения формального асимптотического решения краевой задачи на примере задачи колебаний вращающихся тонких оболочек вращения. Этот алгоритм дает возможность решения системы уравнений для произвольной области параметров с помощью символьных вычислений. Алгоритм основывается на методе асимптотического интегрирования, разработанного Гольденвейзером, Лидским и Товстиком [2].

В данной работе основное внимание уделено применению этого алгоритма к построению асимптотического портрета задачи неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек. В частном случае невращающейся оболочки результат — асимптотический портрет — полностью согласуется с полученным ранее в [2]. Алгоритм построения формального асимптотического решения реализован при помощи прикладного пакета для математических вычислений “Mathematica 5.2”. В качестве примера рассмотрена задача нахождения собственных частот в одной из найденных областей для случая шарнирного опирания оболочки¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория тонких оболочек является в настоящее время одним из наиболее актуальных разделов теории упругости, которому уделяется большое внимание, которое вызвано тем, что образованные из тонких оболочек конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что обеспечивает оболочкам широкое применение в самых разнообразных отраслях промышленности. Некоторые детали турбин и двигателей, компрессоров и насосов представляют собой вращающиеся пустотелые или заполненные тонкостенные

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

© И. М. Ландман, 2005

конструкции — “стаканы”. Одной из важнейших задач являются исследования критических скоростей вращения таких конструкций, а также условий возникновения резонанса при воздействии внешних периодических сил. В обоих случаях необходимо знание спектра собственных частот колебаний конструкций. Указанные задачи стимулировали развитие исследований собственных частот колебаний вращающихся тонкостенных оболочек различной геометрии и при различных условиях.

Методы решения таких задач, в частности краевых задач теории колебаний и устойчивости оболочек, можно разделить на две группы: численные и аналитические. Среди последних выделяются асимптотические методы, основанные на разложениях решений в ряд по степеням малого параметра. Асимптотический метод позволяет получать приближенные аналитические решения сложных нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, и наиболее просто проанализировать влияние различных параметров на поведение тонкостенной конструкции. При этом точность решения увеличивается при стремлении одного из параметров (например, относительной толщины оболочки) к нулю.

Основной целью данной работы является разработка математического обеспечения, позволяющего алгоритмизировать проведение асимптотического анализа, в частности получение асимптотического портрета — пространственного разделения на области, внутри которых структура корней характеристических уравнений остается одинаковой. Построение асимптотического портрета существенно облегчает задачу нахождения собственных частот и форм колебаний. Фактически данное построение уже подразумевает найденные укороченные уравнения [5], откуда и находятся собственные частоты колебаний.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОРТРЕТ ЗАДАЧИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для описания задачи используются уравнения колебаний вращающихся тонких оболочек вращения в теориях типа Кирхгофа–Лява. Также сделаны следующие, достаточно общие для теории

оболочек предположения: материал оболочки изотропен и подчиняется обобщенному закону Гука, а деформации, перемещения и углы поворота настолько малы, что вторыми степенями этих величин можно пренебречь. Колебания и устойчивость упругих конструкций описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют следующий вид:

$$y'(s) = A(s; \mu, m, \lambda, \Omega)y(s), \quad (1)$$

где y — вектор-функция размером $n \times 1$, A — матрица размером $n \times n$, которая содержит несколько малых параметров, главный из которых — μ — относительная толщина оболочки, λ — частота колебаний, m — число волн по параллели (в окружном направлении), Ω — относительная угловая скорость вращения, s — независимая координата в меридианальном направлении. В зависимости от рассматриваемой задачи уравнение (1) может содержать и другие малые параметры, например P — приложенную внешнюю силу.

Иногда удобнее рассматривать одно уравнение n -го порядка:

$$\sum_{i=1}^n a_i(s; \mu, \lambda, m, \Omega)w^{(i)} = 0, \quad (2)$$

которое будет эквивалентно системе (1).

Асимптотическое решение уравнения (2) будем искать в первом приближении в виде

$$w = w_0 \exp\left(\int_{s_1}^s p(s)ds\right). \quad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получаем

$$\sum_{i=1}^N P_n(p; \lambda, m, \mu, \Omega, s) = \sum_{i=1}^N p^i \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i} \Omega^{\varepsilon_i} a_i(s) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что в (4) $a_i(s)$ не зависит от параметров p, μ, m, λ и Ω , но зависит от s , а i — это число членов в полиноме (4). Назовем изображающими точками точки $M_i = \{k_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i\}$ в пространстве $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$. Каждой точке приписан ее “вес” a_i , с которым данный член входит в полиномиальное уравнение.

В работе получено разбиение пространства параметров $(p, \mu, \lambda, m, \Omega)$ различной структуры корней характеристического уравнения с помощью средств вычислительной геометрии. Задача ограничивается случаем, когда асимптотические представления решения одинаковы внутри каждой из рассматриваемых областей интегрирования, и решения линейно независимы (нет точек поворота и кратных корней).

3. ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим метод исследования характеристического уравнения (4) для задач осесимметричных ($m = 0$) и неосесимметричных ($\Omega \neq 0$) колебаний вращающихся и невращающихся тонких цилиндрических оболочек. В случае задач с одним малым параметром, который будем называть одномерным, этот метод представляет собой метод Ньютона. В общем случае рассмотрения задач с произвольным числом параметров этот алгоритм дает возможность находить корни характеристического уравнения с помощью символьных вычислений. Параметрами для задачи колебаний вращающихся тонких цилиндрических оболочек являются относительная толщина оболочки μ , λ — частота колебаний, m — число волн в окружном направлении, Ω — угловая скорость вращения. В зависимости от рассматриваемой задачи уравнение может содержать и другие малые параметры. Основным малым параметром является относительная толщина оболочки μ . Порядки остальных малых параметров соотносятся с μ следующим образом: $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$, $m = m_0 \mu^{-\tau}$ и $\Omega = \Omega_0 \mu^\varepsilon$. В теориях тонких оболочек типа Кирхгофа–Лява описываются только такие напряженно-деформированные состояния, для которых длина картины деформации существенно больше толщины оболочки. Учитывая этот факт, получаем ограничения на величины параметров λ и m , а именно: $-2 \leq \kappa < \infty$ и $0 \leq -\tau \leq 2$, $\lambda_0 > 0$ и $m_0 \geq 0$. В работе рассматриваются только начальные состояния равновесия с малыми деформациями много меньшими 1. Поскольку начальные деформации пропорциональны Ω^2 , получаем следующее ограничение на Ω : $0 < \varepsilon < \infty$. Заметим, что в зависимости от направления вращения Ω_0 может быть либо положительным, ли-

бо отрицательным. Коэффициент Пуассона ν считаем постоянным и равным 0.3. Следовательно, коэффициенты уравнения, имеющие вид ν , $1 - \nu$, $1 - \nu^2$ и т. д., имеют порядок $O(\mu^0)$.

3.1. Метод исследования характеристического уравнения

Так как в общем случае вид уравнения (4) сложен, то для нахождения аналитического выражения для собственной частоты требуется его упростить. Под упрощением в первом приближении в теории асимптотических методов подразумевается нахождение его главных членов. Для нахождения главных членов характеристического уравнения, описывающего колебания тонких вращающихся цилиндрических оболочек, применяется геометрический подход, который приводит к построению выпуклой оболочки в пространстве степеней малых параметров, включенных в характеристическое уравнение, так как, как было доказано в [3], главные члены полинома определяются точками, лежащими на выпуклой оболочке данного набора изображающих точек.

Более того, целая выпуклая оболочка определяет главные члены полинома для параметров любого порядка, т. е. они могут быть как малыми, так и большими или порядка $O(1)$. Если про некоторые параметры известно, что они малы, то необходимо рассмотреть только часть выпуклой оболочки. Если один параметр — мал, то необходимо рассмотреть только “нижнюю часть” выпуклой оболочки, т. е. те точки, которые видны из точки $(-\infty, 0)$. Например, в случае задачи колебания вращающейся тонкой оболочки вращения параметр относительной толщины μ — мал. Если известно, что два параметра — малы, то необходимо рассмотреть только ту часть выпуклой оболочки, которая видна одновременно из точек $(-\infty, 0)$ и $(0, -\infty)$, другими словами, видимую из начала координат. Все вышеприведенные утверждения верны и для случаев более высоких размерностей. Основные алгоритмы построения выпуклой оболочки и история их создания содержатся в работе [1]. Особое внимание уделяется лишь тем методам и алгоритмам, которые используются в данной диссертации для изучения характеристического определителя. К ним относятся такие алгоритмы, как стандартный алгоритм построения выпуклой оболочки в трехмерном пространстве,

основанный на принципе “сканирования Грэма”, который, в частности, используется в стандартном пакете прикладных программ “Mathematica 5.2”; алгоритм, разработанный автором данной работы, в основу которого положен принцип “заворачивания подарка” для двумерного и трехмерного случаев, а также алгоритм “быстрого поиска”, на основе которого написана программа Qhull и которая используется в данной работе для построения выпуклой оболочки в пространстве четырех и более параметров.

3.2. Методы упрощения характеристических уравнений

Предположим, что задан полином $P(p; \mu, \lambda)$, где p — переменная, а μ и λ — параметры. Тогда, согласно утверждениям параграфа 3.1, главные члены полинома определяются гранями выпуклой оболочки, построенной на точках в пространстве степеней параметров. Для каждой грани главные члены полинома будут разными. Каждая грань определяет соотношение между параметрами λ и μ , которое можно выразить с помощью соотношения $\lambda = \lambda_0 \mu^{\kappa}$, где параметр μ предполагается малым. Набор точек $\{\kappa_i\}$ назовем критическими точками, в каждой из которых можно построить решение укороченного уравнения, т. е. решение уравнения, включающего только главные члены.

Для того чтобы построить решения для промежуточных значений λ , для которых $\kappa \neq \kappa_i$, разделим полную область изменения параметра λ на подобласти, расположив критические точки κ_i на рассматриваемой полной области значений параметра λ . Для любого λ внутри каждой подобласти структура выпуклой оболочки не изменяется, а, следовательно, вид укороченных уравнений сохраняется. Таким образом, зафиксировав только одно произвольное значение величины λ внутри каждой из подобластей, можно получить значения корней и собственных векторов внутри каждой подобласти. Используя это свойство, можно построить решения внутри каждой из подобластей и во всех критических точках. Как только параметр λ известен, количество параметров в характеристическом уравнении уменьшается на единицу.

3.3. Осесимметричные колебания ($m = 0$)

Система уравнений (2) в частном случае для осесимметричных колебаний $m = 0$ расщепляется на две: одна из них описывает продольно-поперечные колебания, а второе уравнение — крутильные колебания. Рассмотрим систему, описывающую продольно-поперечные колебания, для которой характеристическое уравнение (2) принимает следующий вид:

$$P(p; \mu, \lambda) = (1 - \nu^2) \lambda^2 - (1 - \nu^2)^2 \lambda^4 + (1 - \nu^2) p^2 - (1 - \nu^2) \lambda^2 p^2 + (1 - \nu^2) \mu^4 \lambda^2 p^4 + \mu^4 p^6 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, для случая осесимметричных колебаний изображающие точки лежат на плоскости (p, μ) и имеют форму $M_i = \{k_i, \alpha_i + \beta_i \kappa_i\} = \{\{0, 0, 2\}, \{0, 0, 4\}, \{2, 0, 0\}, \{2, 0, 2\}, \{4, 4, 2\}, \{6, 4, 0\}\}$.

Нанесем изображающие точки в системе координат, связанной с трехмерным пространством степеней параметров $(p; \mu, \lambda)$, входящих в уравнение (5). Затем построим трехмерную выпуклую оболочку для точек M_i (рис. 1), каждая грань которой определяет критическую точку. Полный набор критических точек разделит пространство λ на области, которые исследуются вместе с критическими точками (рис. 2).

Так как параметр относительной толщины μ предполагается малым, то в этом случае необходимо оставить только те грани выпуклой оболочки, которые видимы из точки $(0, \infty, 0)$. Для уравнения (4) “нижняя часть” трехмерной выпуклой оболочки содержит три грани: 1: (M_1, M_2, M_3, M_4) ; 2: (M_3, M_4, M_6) ; 3: (M_2, M_4, M_5, M_6) , которая изображена на рис. 1. Порядки всех членов, соответствующих точкам, образующим грань, равны друг другу. Этот факт можно сформулировать с помощью следующих соотношений, из которых могут быть найдены порядки λ для критических случаев:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &\sim \lambda^4 \sim p^2 \sim \lambda^2 p^2, \\ \lambda^2 p^2 &\sim p^2 \sim \mu^4 p^6, \\ \lambda^4 &\sim \lambda^2 p^2 \sim \lambda^2 \mu^4 p^4 \sim \mu^4 p^6. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, из первого и второго соотношений (6) получаем $\kappa = 0$, а из третьего $\kappa = -2$. Следовательно, все пространство

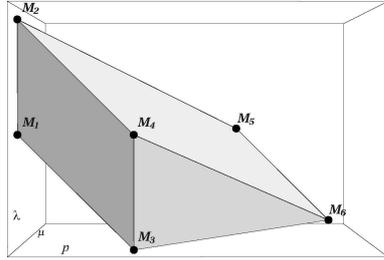


Рис. 1: Выпуклая оболочка для случая $m = 0$.

для λ по κ делится на три области, внутри которых структура двумерной выпуклой оболочки одинакова. Каждая из этих областей определяется следующим образом:

1. $\kappa > 0$;
2. $0 > \kappa > -2$;
3. $\kappa < -2$.

В дальнейшем, для нахождения главных членов характеристического уравнения в каждой области, нужно иметь в виду, что, используя описанный выше подход, можно выбрать порядки для областей I, II и III произвольным образом, например: $\kappa = 1$, $\kappa = -1$ и $\kappa = -3$ соответственно (рис. 2). Также следует проанализировать случаи критических точек $\kappa = -2$ и $\kappa = 0$. Таким образом, в данной задаче необходимо рассмотреть пять случаев: $\kappa = -3, -2, -1, 0, 1$ соответственно. Учитывая ограничения на параметр λ $\kappa > -2$, случаями III и $\kappa = -2$ можно пренебречь. Случай $\kappa = 0$ является особым, так как в этом случае важен второй член в разложении для p [2]. Таким образом, необходимо рассмотреть решения в областях I, II и критической точке $\kappa = 0$.

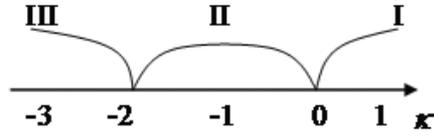


Рис. 2: Области κ .

Изображающие точки движутся на плоскости (p, μ) при изменении κ . Особый интерес представляют критические случаи, т. е. когда происходит изменение выпуклой оболочки. Это происходит либо когда одна из внутренних точек достигает выпуклой оболочки, либо когда два или более сегментов образуют прямую.

3.4. Неосесимметричные колебания ($m \neq 0$)

В этом случае, когда $m \neq 0$, система (2) не расщепляется и необходимо найти корни характеристического уравнения восьмого порядка (4), которое можно записать в форме

$$P(p; \mu, \lambda, m) = \sum_i a_i(s) p^{k_i} \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i}. \quad (7)$$

В общем случае в задачах неосесимметричных колебаний тонких невращающихся оболочек порядок m изначально не задан. В этом случае члены характеристического уравнения (7) зависят от трех параметров: малого μ ($0 < \mu \ll 1$), положительных λ ($\lambda > 0$) и m ($m > 0$).

Предположим, что $m = m_0 \mu^{-\tau}$ и $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$, где $m_0 \sim 1$ и $\lambda_0 \sim 1$.

Дальнейшие шаги исследования и решения задачи аналогичны шагам исследования для случая осесимметричных колебаний тонких невращающихся оболочек. Для этого надо:

- построить выпуклую оболочку в четырехмерном пространстве. Грани этой четырехмерной оболочки определяют критические точки на плоскости (λ, m) . Также, используя рассмотренный в предыдущей главе алгоритм, следует найти критические сегменты, которые делят плоскость степеней параметров (λ, m) на области различной структуры корней характеристического уравнения;
- построить все решения в критических точках, критических сегментах и в областях между критическими сегментами;
- найти относительный порядок собственных векторов и подставить их в граничные условия;
- решить получившееся частотное уравнение численно или, если возможно, аналитически и, таким образом, получить выражение для параметра собственной частоты.

Для того чтобы построить четырехмерную выпуклую оболочку в пространстве степеней параметров, используется алгоритм и код Qhull. Так как рассматривается случай малого параметра μ , необходимо для дальнейшего анализа выбрать лишь те грани выпуклой оболочки, которые принадлежат “нижней” ее части, т. е. грани, видимые из точки $(p, \mu, \lambda, m) = (0, -\infty, 0, 0)$. Предполагая, что порядки членов, соответствующих вершинам каждой грани, равны друг другу, можно найти порядки λ и m , т. е. критические точки на плоскости (κ, τ) , которыми в данном случае будут являться точки $(\kappa, \tau) = (-2, 2), (0, 1), (0, 0)$ и $(2, 0)$.

После нахождения критических точек κ_i и τ_i можно построить критические сегменты на плоскости (κ, τ) , на которую нанесем горизонтальные линии $\tau = \tau_i$, проходящие через критические точки (κ_i, τ_i) . Так как найденными критическими точками являются $(\kappa_i, \tau_i) = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (-2, 2)\}$, то горизонтальными линиями являются $\tau = 0, 1, 2$. Эти линии разделяют всю плоскость на три зоны: $0 < \tau < 1$, $1 < \tau < 2$ и $2 < \tau$. Для любого фиксированного τ внутри каждой зоны структуры соответствующих трехмерных выпуклых оболочек одинаковы. Следовательно, можно выбрать произвольную точку внутри каждой из областей и получить

соотношения между κ и τ , которые определяют критические сегменты. Основные результаты этой главы содержатся в работе [3].

Используя данную процедуру, можно найти сегменты, параллельные координатной оси τ , т. е. сегменты вида $\tau = \text{const}$. Для этого необходимо повторить построение для вертикальных зон, полученных с помощью вертикальных линий, проведенных через критические точки, т.е. сегменты $\tau = 0$ и $\tau = 1$. Окончательный вид асимптотического портрета изображен на рис. 3, на котором представлены области, критические точки и сегменты. Представленный результат совпадает с полученным ранее [2]. Так как изначально были сделаны предположения, ограничивающие анализ случаем, где $-2 \leq \kappa \leq 2$ и $-2 \leq \tau \leq 0$, будем называть такое разбиение асимптотическим портретом. Этот термин был предложен Б. Н. Квасниковым [4].

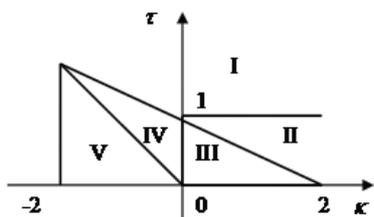


Рис. 3: Асимптотический портрет для неосесимметричных колебаний невращающейся цилиндрической оболочки.

3.5. Неосесимметричные колебания вращающихся цилиндрических оболочек ($m \neq 0$) и ($\Omega \neq 0$). Основной случай

При выводе уравнений колебаний вращающихся оболочек обычно выделяют два случая: основной и особый. В основном случае допускается смещение хотя бы одного из краев оболочки в направлении оси симметрии цилиндра. В особом случае предполагается жесткая заделка в направлении оси цилиндра на обоих краях. В данной статье рассматривается только основной случай, в котором

для получения главных членов корней характеристического уравнения восьмого порядка вида (4) анализируется следующее уравнение:

$$\sum P_n(p; \lambda, m, \mu, \Omega, s) = \sum_{i=1}^N a_i(s) p^{k_i} \mu^{\alpha_i} \lambda^{\beta_i} m^{\gamma_i} \Omega^{\pi_i} = 0. \quad (8)$$

Для случая неосесимметричных колебаний вращающихся цилиндрических оболочек и основного случая задания граничных условий изображающие точки $M_i = \{k_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \pi_i\}$ лежат в пятимерном пространстве $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \pi\}$.

Предположим, что $m = m_0 \mu^{-\tau}$, $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$ и $\Omega = \Omega_0 \mu^\varepsilon$, где $m_0 \sim 1$, $\lambda_0 \sim 1$ и $\Omega_0 \sim 1$.

Алгоритм решения задачи аналогичен алгоритму, используемому для решения задачи осесимметричных и неосесимметричных колебаний невращающейся цилиндрической оболочки, в котором размерности всех рассматриваемых объектов с учетом дополнительного параметра Ω повышаются на единицу. Таким образом, сначала необходимо построить выпуклую оболочку в пятимерном пространстве параметров $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \pi\}$. Для данного случая асимптотический портрет будет построен в трехмерном пространстве $\{\kappa, \tau, \varepsilon\}$. Остальные шаги алгоритма остаются без изменений.

Как и ранее, считаем параметр относительной толщины μ — главным и выразим остальные параметры через основной, сделав следующие предположения о порядках параметров: $m = m_0 \mu^{-\tau}$, $\lambda = \lambda_0 \mu^\kappa$ и $\Omega = \Omega_0 \mu^\varepsilon$, где $m_0 \sim 1$, $\lambda_0 \sim 1$ и $\Omega_0 \sim 1$. Построим пятимерную выпуклую оболочку, воспользовавшись алгоритмом и кодом Qhull. При условии малости параметра μ необходимо после построения пятимерной выпуклой оболочки выбрать только грани ее “нижней части”, т. е. грани, видимые из точки $\{k, \alpha, \beta, \gamma, \pi\} = (0, -\infty, 0, 0, 0)$. Каждая грань определяется пятью или более точками. Предполагая, что порядки членов, соответствующих вершинам каждой грани, равны друг другу, можно найти порядки λ , m и Ω , т. е. критические точки в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$. После выбора граней “нижней части” выпуклой оболочки составим пропорции, соответствующие каждой грани, и учитывая, что $\varepsilon > 0$, получим следующие критические точки:

$(\kappa, \tau, \varepsilon) = \{-2, -2, 0\}, \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{2, 0, 2\}$. Окончательный набор критических точек для обоих случаев одинаков и равен: $(\kappa, \tau, \varepsilon) = \{-2, -2, 0\}, \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{2, 0, 1\}$.

После нахождения критических точек необходимо построить критические плоскости, которые в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ имеют форму многоугольников. Для этого нанесем в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ горизонтальные и вертикальные плоскости: $\kappa = \kappa_i$, $\tau = \tau_i$ и $\varepsilon = \varepsilon_i$, проходящие через критические точки $(\kappa_i, \tau_i, \varepsilon_i)$. Так как полученными критическими точками являются $(\kappa_i, \tau_i, \varepsilon_i) = \{-2, -2, 0\}, \{0, -1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{2, 0, 2\}$, то такими горизонтальными плоскостями в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ будут являться $\varepsilon_i = 0, 1, 2$, а вертикальными $\tau_i = 0, 1, 2$ и $\kappa = -2, 0, 2$.

Как уже отмечалось ранее, для параметров задачи сделаны следующие предположения: $-2 \leq \kappa < \infty$, $-2 \leq \tau \leq 0$, $\varepsilon > 0$. Отметим также, что при $\varepsilon > 2$ можно считать рассматриваемую оболочку медленно вращающейся, а проекция асимптотического портрета на (τ, κ) будет эквивалентна полученному для невращающейся оболочки, и для $\varepsilon > 2$ асимптотический портрет $(\varepsilon, \tau, \kappa)$ получается параллельным переносом вертикально вверх проекции асимптотического портрета для $\varepsilon = 2$.

Таким образом, нанесенные в пространстве $(\kappa, \tau, \varepsilon)$ горизонтальные и вертикальные плоскости с учетом перечисленных условий разделяют все пространство на восемь зон. Для любого фиксированного набора (ε, κ) внутри каждой зоны структуры соответствующих трехмерных выпуклых оболочек одинаковы. Следовательно, можно выбрать произвольную точку внутри каждой из областей и получить соотношения между τ , κ и ε , которые определяют критические плоскости. Отметим также, что в этом случае при фиксации параметра в (ε, κ) зоны можно объединить таким образом, чтобы критические точки не оказались внутри параллелепипеда, а также не лежали на грани или ребре. В результате для данного случая можно рассмотреть четыре зоны, внутри которых трехмерные выпуклые оболочки, а следовательно, и характеристические уравнения имеют принципиально различную структуру.

Таким образом, окончательный результат построения асимптотического портрета нанесен на рис. 4.

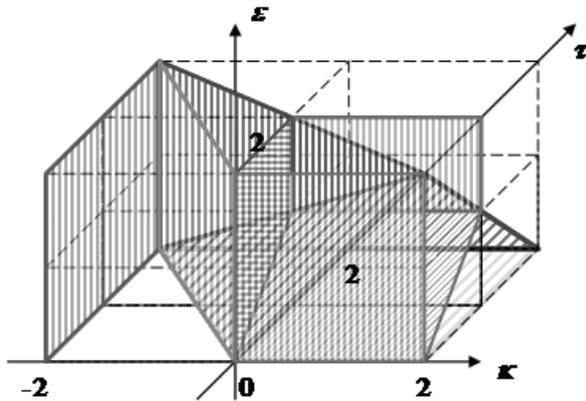


Рис. 4: Асимптотический портрет характеристических уравнений $\varepsilon(\tau, \kappa)$ для основного случая.

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай неосесимметричных низкочастотных колебаний быстро вращающейся тонкой цилиндрической оболочки для критического многоугольника $\varepsilon = \kappa + \tau$.

4.1. Пример построения укороченных уравнений

Рассмотрим критический многоугольник, определяемый плоскостью $\varepsilon = \kappa + \tau$ (первая часть плоскости — в области $\kappa > 0$). Для особого случая данный многоугольник делится плоскостью $\varepsilon = 1$ на две части. Укороченные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m^6 (1 - \nu^2) \Omega^2 - \lambda^2 m^4 (1 - \nu^2) + \mu^4 m^8 + p^4 (1 - \nu^2) &= 0, \\ (1 - \nu^2) p^4 + \mu^4 p^8 &= 0. \end{aligned}$$

4.2. Построение собственных векторов

Найдем собственные векторы области критического многоугольника, определяемого той частью плоскости $\varepsilon = \kappa + \tau$, которая определяет низкие частоты и быстрое вращение. Для этой области в основном случае найдены следующие укороченные характеристические уравнения:

$$m^6 (1 - \nu^2) \Omega^2 - \lambda^2 m^4 (1 - \nu^2) + \mu^4 m^8 + p^4 (1 - \nu^2) = 0; \quad (9)$$

$$(1 - \nu^2) p^4 + \mu^4 p^8 = 0. \quad (10)$$

Таким образом, для уравнений (9) и (10) получаем две серии корней

$$\begin{aligned} p_{1-2} &= \pm m \sqrt[4]{\lambda^2 - \frac{\mu^4 m^4}{1 - \nu^2} - m^2 \Omega^2} \\ p_{3-4} &= \pm m \sqrt[4]{\lambda^2 - \frac{\mu^4 m^4}{1 - \nu^2} - m^2 \Omega^2 i}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$p_j = \frac{\varepsilon_j \sqrt[4]{1 - \nu^2}}{\mu}, \quad (12)$$

где $\varepsilon_j = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $j = 5, 6, 7, 8$.

Найдя корни p_i , необходимо определить относительные порядки компонент собственных векторов. Используя стандартный алгоритм нахождения собственных векторов в трехмерном случае, подставим выражения для корней p_i в уравнение. В результате получим систему алгебраических уравнений, каждый из коэффициентов которого можно упростить, используя описанный метод построения выпуклой оболочки. Для данной задачи найдены системы упрощенных уравнений, определяющих амплитудные векторы, а сами амплитудные векторы равны соответственно

$$\{U, V, W\}^T = \left\{ \frac{p}{m^2}, -\frac{1}{m}, 1 \right\} \quad (13)$$

$$\{U, V, W\}^T = \left\{ \frac{\nu}{p}, \frac{(2 + \nu)m}{p^2}, 1 \right\} \quad (14)$$

4.3. Нахождение собственных низких частот для случая шарнирного опирания

В качестве примера рассмотрим построение решения для случая неосесимметричного колебания быстро вращающейся тонкой цилиндрической оболочки. Так как практически наиболее важны низкочастотные колебания, то рассмотрим построение решения на первой части критического многоугольника, определяемого плоскостью $\varepsilon = \kappa + \tau$ для той части, где $0 < \varepsilon < 1$. Найденные корни и собственные векторы собраны в табл. 1.

Таблица 1. Корни и собственные векторы для критического многоугольника $\varepsilon = \kappa + \tau$

	1	2	3	4	5	6	7	8
p	f	$-f$	fi	$-fi$	$\varepsilon_5 g$	$\varepsilon_6 g$	$\varepsilon_7 g$	$\varepsilon_8 g$
U_0	$\frac{p_1}{m^2}$	$\frac{p_2}{m^2}$	$\frac{p_3}{m^2}$	$\frac{p_4}{m^2}$	$\frac{\nu}{p_5}$	$\frac{\nu}{p_6}$	$\frac{\nu}{p_7}$	$\frac{\nu}{p_8}$
V_0	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{1}{m}$	$\frac{k}{p_5^2}$	$\frac{k}{p_6^2}$	$\frac{k}{p_7^2}$	$\frac{k}{p_8^2}$
W_0	1	1	1	1	1	1	1	1

Здесь $f(\mu, m, \lambda, \Omega) = m \sqrt[4]{\lambda^2 - \frac{\mu^4 m^4}{1-\nu^2} - m^2 \Omega^2}$, $g(\mu) = \frac{\sqrt[4]{1-\nu^2}}{\mu}$, $k(m) = m(\nu + 2)$ и $\varepsilon_j = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $j = 5, 6, 7, 8$.

Рассмотрим граничное условие типа шарнирного опирания, которое имеет форму

$$u = w = w'' = 0 \quad \text{при } s = 0 \text{ и } s = L.$$

Подставляя линейную комбинацию решений амплитудных векторов (13) и (14) в граничные условия, получаем характеристическое уравнение восьмого порядка, откуда может быть найдено первое приближение для параметра частоты λ . Отметим, что в ходе решения были сделаны дополнительные упрощения частотного определителя, в котором пренебрегаются величины первого, пятого и шестого решений (с $\Re p_i > 0$) на левом краю по сравнению с этими величинами на правом конце, а также величинами второго, седьмого и восьмого (с $\Re p_i < 0$) на правом краю по сравнению с этими

величинами на левом краю. Условие равенства нулю частотного определителя приводит к уравнению

$$-1 + e^{2iLm \left(\frac{\mu^4 m^4 + (\lambda^2 - m^2 \Omega^2)(-1 + \nu^2)}{-1 + \nu^2} \right)^{1/4}} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, полученный параметр собственной частоты:

$$\lambda^2 = \left(\frac{\pi k}{Lm} \right)^4 + \frac{m^4 \mu^4}{1 - \nu^2} + m^2 \Omega^2. \quad (16)$$

Полученная частота совпадает с частотой, полученной в [2] и других источниках.

4.4. Сравнение найденных собственных частот с известным решением для корней $p_i = \frac{\pi k i}{L}$

Решение этой задачи численным способом можно вести несколькими путями. Во-первых, как известно, решение задачи в случае задания граничных условий типа шарнирного опирания на обоих концах оболочки имеет вид $p_i = \frac{\pi k i}{L}$. В дальнейшем будем называть это решение точным. Фиксируем значения параметров таким образом, чтобы они имели порядки рассматриваемой области. Например, фиксируем значение $\nu = 0.3$, а $\mu = 0.01$. Так как рассматриваемая область характеризуется первой частью плоскости $\varepsilon = \kappa + \tau$ для низких частот, т. е. $\kappa > 0$, тогда можно, например, зафиксировать следующие порядки для параметра количества волн по параллели и угловой скорости вращения: $\tau = -1/2$ и $\varepsilon = 1/2$, т. е. $m \sim \mu^{-1/2}$ и $\Omega \sim \mu^{1/2}$. Подставляем их в выражение для самой нижней собственной частоты, полученное с помощью (16). В результате подстановки получается, что самая низшая частота λ равна 0.305, и она достигается при $m \approx 2.49$. Так как m – целое число, то ясно, что низшая частота достигается либо при $m = 2$, либо при $m = 3$. Если при этом подставить зафиксированные параметры в точную формулу, то $\lambda = 0.303$. Очевидно, что чем меньше значение параметра Ω , т. е. чем медленнее вращается оболочка, тем точность аналитической формулы выше.

Параметр Ω входит в асимптотическое выражение (16) для частоты λ в четной степени (в квадрате), т. е. с асимптотической точки зрения знак угловой скорости вращения оболочки на параметр частоты не влияет. На рис. 5 в трехмерном пространстве (m, Ω, λ) изображены три поверхности, две из которых (1 и 3) соответствуют точному значению частоты (известному решению для шарнирного опирания), а поверхность 2 — асимптотическому решению (16).

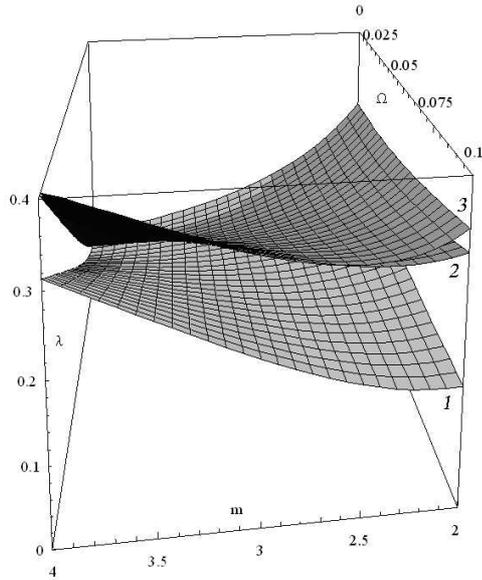


Рис. 5: Сравнение точных (для положительного и отрицательного Ω) и асимптотического решений для собственных частот λ в зависимости от различных значений параметра параметров m и Ω при зафиксированном $\mu = 0.01$.

На рис. 6 изображено сечение поверхностей, изображенных на рис. 5 в плоскости (Ω, λ) при фиксированном значении параметра

$m = 3$, соответствующему минимальной частоте.

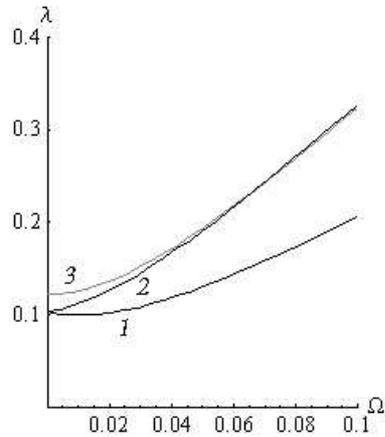


Рис. 6: Сравнение точных (для положительного и отрицательного Ω и асимптотического решений для собственных частот λ в зависимости от различных значений параметра параметров Ω при зафиксированном $\mu = 0.01$ и $m = 3$.

Варьируя параметр μ таким образом, чтобы он оставался порядка 10^{-2} и при этом остальные параметры также оставались в рассматриваемой области, можно составить табл. 2 (см. рис. 6), которая подтверждает тот факт, что, уменьшая значение параметра μ , точность аналитической формулы возрастает.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был представлен алгоритм построения формального асимптотического решения краевой задачи на примере задачи колебаний вращающихся тонких оболочек вращения. Этот алгоритм основывается на методе асимптотического интегрирования, разработанного Гольденвейзером, Лидским и Товстиком [2]. В работе было подробно рассмотрено построение асимптотических

Таблица 2. Значения собственных частот для случая $\nu = 0.3$, $m \sim \mu^{-1/2}$ и $\Omega \sim \mu^{1/2}$ для различных значений параметра μ

μ	λ (точный)	λ (асимпт.) (...)	Ошибка, в %
0.01	1.00179	1.00012	0.167
0.02	1.00388	1.00046	0.34
0.03	1.00626	1.00104	0.5
0.04	1.00893	1.00184	0.7
0.05	1.01189	1.00287	0.89
0.06	1.01514	1.00413	1.08

портретов задачи осесимметричных и неосесимметричных колебаний вращающейся и невращающейся цилиндрических оболочек. В частном случае невращающейся оболочки результат — асимптотический портрет — полностью согласуется с полученным ранее в [2]. Работа алгоритма продемонстрирована на одном из примеров низкочастотных колебаний вращающейся цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Препарата Ф.П., Хонг С.* Выпуклая оболочка конечного набора точек в 2D и 3D., 1977.
2. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В. Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких оболочек, М., 1978.
3. *Landman I. M.* Analysis of characteristic equations by generalized Newton's method// Proceedings of the third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2005. Cambridge. USA. P. 217.
4. *Квасников Б. Н.* Интегрирование уравнений тонких упругих оболочек с быстро и медленно меняющимися коэффициентами// Прикладная механика. Сб.: Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. Вып.8. Л.: СПбГУ, 1990. С. 163–172.
5. *Бруно А. Д.* Степенная герметрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука; Физматлит, 1998. 288 с.

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ

М Е Ковченко

Доклад на семинаре 14 февраля 2006 г.

РЕЗЮМЕ

Исследовано напряженно-деформированное состояние прямоугольной и круговой пластин под действием касательных напряжений. Доказано, что результаты, полученные с применением формул теории упругости, при уменьшении ширины пластины переходят в результаты, полученные при рассмотрении пластины как стержня. Найдена погрешность формул теории стержней для некоторых значений ширины пластины. С помощью асимптотических методов изучена устойчивость под действием внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной. В этой задаче величина критического давления зависит от жесткости пластины на изгиб в ее плоскости. Показано, что при уменьшении ширины пластины формула для ее жесткости переходит в формулу для жесткости стержня. Найдена погрешность вычисления параметра нагружения, возникающая при использовании стержневой модели шпангоута вместо более точной пластиночной модели¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории подкрепленных оболочек [1] шпангоуты и стрингеры обычно описываются стержневой теорией. Но если ширина шпангоута велика, то стержневая модель не применима и необходимо использовать более точные формулы теории упругости.

Цель данной работы состоит в том, чтобы показать, что решения, полученные с помощью формул теории упругости, при уменьшении ширины шпангоута переходят в известные решения теории стержней, а также оценить точность стержневых формул в сравнении с формулами теории упругости.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

© М Е Ковченко, 2005

Были рассмотрены три задачи: напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины под действием приложенных касательных напряжений; напряженное состояние круговой пластины под действием касательных напряжений; устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной, под действием равномерного внешнего давления.

Некоторые задачи, подобные описанным выше, рассмотрены в книге С. П. Тимошенко [2], а именно: изгиб четверти кольца силой, приложенной на конце; напряженное состояние кольца при полярно-симметричной нагрузке; напряженное состояние прямоугольной пластины под действием нормальной нагрузки.

2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

2.1. Постановка и решение задачи при помощи формул теории упругости

Рассмотрим пластину шириной $2c$ и длиной l под действием касательных непрерывно распределенных усилий на верхней и нижней гранях с интенсивностями $\tau_0 \cos \alpha x$ (рис. 1).

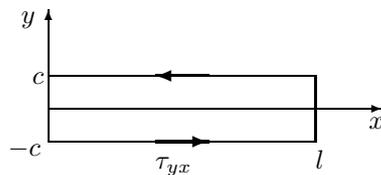


Рис. 7: Прямоугольная пластина под действием касательных напряжений.

Эту плоскую задачу можно решать, используя функцию напряжений $\varphi(x, y)$ [2]. Тогда вместо уравнений равновесия получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения

$\varphi(x, y)$. В прямоугольных координатах оно имеет вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (17)$$

Функцию φ будем искать в виде

$$\varphi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y), \quad (18)$$

где m — целое число, l — длина пластины. Подставляя (18) в (17) и используя обозначение $\frac{m\pi}{l} = \alpha$, получаем следующее уравнение для определения $f(y)$:

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{(iv)}(y) = 0. \quad (19)$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y.$$

Компоненты напряжений выражаются через функцию напряжений по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \sin \alpha x \left[C_1 \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha y \right. \\ &\quad \left. + C_3 \alpha (2 \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) + C_4 \alpha (2 \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) \right], \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\alpha^2 \sin \alpha x (C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y \\ &\quad + C_3 y \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \operatorname{sh} \alpha y), \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} &= -\alpha \cos \alpha x \left[C_1 \alpha \operatorname{sh} \alpha y + C_2 \alpha \operatorname{ch} \alpha y \right. \\ &\quad \left. + C_3 (\operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) + C_4 (\operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из граничных условий

$$y = -c \begin{cases} \tau_{yx} = \tau_0 \cos \alpha x \\ \sigma_y = 0 \end{cases} \quad y = c \begin{cases} \tau_{yx} = \tau_0 \cos \alpha x \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

находим произвольные постоянные

$$C_1 = C_4 = 0,$$

$$C_2 = \frac{c\tau_0 \operatorname{ch}(\alpha c)}{\alpha(\operatorname{ch}(\alpha c) \operatorname{sh}(\alpha c) - \alpha c)}, \quad C_3 = -\frac{\tau_0 \operatorname{sh}(\alpha c)}{\alpha(\operatorname{ch}(\alpha c) \operatorname{sh}(\alpha c) - \alpha c)}.$$

Подстановка выражений для C_i в формулы (20) позволяет найти компоненты напряжений. В частности,

$$\sigma_x = \sin \alpha x \left[\tau_0 \frac{\alpha c \operatorname{ch} \alpha c}{\operatorname{ch} \alpha c \operatorname{sh} \alpha c - \alpha c} \operatorname{sh} \alpha y - \tau_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha c}{\operatorname{ch} \alpha c \operatorname{sh} \alpha c - \alpha c} (2 \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) \right]. \quad (21)$$

2.2. Решение задачи о прямоугольной пластине с использованием уравнений теории стержней

Рассмотрим консоль толщины $d = 1$ и ширины $y = 2c$ под действием изгибающего момента:

$$M(x) = -h \int_0^x \tau_{xy} dx = -\frac{h\tau_0}{\alpha} \sin \alpha x = -\frac{2c\tau_0}{\alpha} \sin \alpha x. \quad (22)$$

Из уравнения равновесия [3]

$$\frac{EJ}{\rho} = M(x),$$

где E — модуль Юнга, J — момент инерции поперечного сечения, следует, что

$$\frac{E}{\rho} = -\frac{2c\tau_0}{\alpha J} \sin \alpha x.$$

Принимая во внимание, что $J = 2c^3/3$, находим нормальную компоненту напряжения:

$$\sigma_x = \frac{Ey}{\rho} = -3 \frac{y \tau_0}{c^2 \alpha} \sin \alpha x. \quad (23)$$

Получим теперь выражение для σ_x , осуществив предельный переход при уменьшении ширины пластины c в формуле (21). Подставляя в (21) разложения

$$\operatorname{sh} \alpha c = \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots, \quad \operatorname{ch} \alpha c = 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots \quad (24)$$

и пренебрегая членами высшего порядка малости по сравнению с $(\alpha c)^4$, получаем

$$\sigma_x = -\tau_0 \frac{3y}{\alpha c^2} \sin \alpha x,$$

что совпадает с результатом для стержневой модели (23).

Пусть длина балки составляет $l = 1$, $y = c$, $x = l/(2m)$. Для этих значений параметров относительная погрешность стержневой формулы (23) по сравнению с результатом теории упругости (21) в зависимости от ширины пластины c и числа полуволн m представлена в табл. 1.

Таблица 1. Относительная погрешность вычисления напряжения σ_x по формуле (23) по сравнению с формулой (21)

m	$c = 0.01$	$c = 0.025$	$c = 0.05$
3	0.1%	0.7%	2.7%
5	0.32%	2.0%	7.6%

Погрешность формул теории сопротивления материалов в рассматриваемой задаче увеличивается с ростом ширины пластины c и волнового числа m .

2.2. Определение перемещений

В случае плоского напряженного состояния компоненты деформаций связаны с компонентами напряжений соотношениями [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}.$$

Если деформации известны, то перемещения определяются путем интегрирования уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}.$$

Принимая во внимание, что

$$\varepsilon_y = -\frac{\sin \alpha x}{E} \left(C_2 \alpha^2 (1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha y + C_3 [2\alpha \nu \operatorname{sh} \alpha y + \alpha^2 y (1 + \nu) \operatorname{ch} \alpha y] \right),$$

находим

$$v(x, y) = -\frac{\sin \alpha x}{E} \left(C_2 \alpha (1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha y + C_3 [(1 + \nu) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y + (\nu - 1) \operatorname{ch} \alpha y] \right).$$

Используя разложения в ряд по малому параметру (24), в пределе для прогиба получаем

$$v(x, 0) = -\frac{\sin \alpha x}{\alpha E} \frac{3\tau_0}{(\alpha c)^2}. \quad (25)$$

В сопромате для определения прогиба балки под действием изгибающего момента (22) нужно проинтегрировать уравнение упругой линии [3]:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x).$$

Интегрируя это уравнение и полагая произвольные постоянные нулем, получаем формулу для прогиба:

$$w(x) = -\frac{\sin \alpha x}{\alpha E} \frac{3\tau_0}{(\alpha c)^2},$$

что совпадает с предельной формулой (25).

3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ

3.1. Решение плоской задачи теории упругости

Рассматривается круговая пластина под действием касательных напряжений, приложенных на внутреннем и внешнем радиусе пластины и распределенных по гармоническому закону (рис. 2). Уравнение для функции напряжений плоской задачи в полярных координатах имеет вид [2]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (26)$$

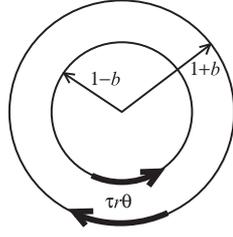


Рис. 8: Круговая пластина под действием касательных напряжений.

Компоненты напряжений выражаются через функцию напряжений по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).$$

Ищем решение уравнения (26) методом разделения переменных. Подставляя в него

$$\varphi = \varphi(r) \sin m\theta,$$

получаем уравнение для функции $\varphi(r)$:

$$\varphi^{(IV)}(r) + \frac{2}{r} \varphi'''(r) - \frac{2m^2 + 1}{r^2} \varphi''(r) + \frac{1 + 2m^2}{r^3} \varphi'(r) + \frac{m^4 - 4m^2}{r^4} \varphi(r) = 0.$$

Замена переменной $r = e^t$ сводит это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\varphi^{(IV)}(t) - 4\varphi'''(t) + \varphi''(t)(4 - 2m^2) + \varphi'(t)(4m^2) + \varphi(t)(m^4 - 4m^2) = 0.$$

Характеристический полином последнего уравнения

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + (4 - 2m^2)\lambda^2 + 4m^2\lambda + m^4 - 4m^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2 - m$, $\lambda_2 = -m$, $\lambda_3 = m$, $\lambda_4 = m + 2$.

Следовательно, решение уравнения (26) имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \sin m\theta (C_1 r^{2-m} + C_2 r^{-m} + C_3 r^m + C_4 r^{m+2}).$$

Для компонент напряжений справедливы формулы

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sin m\theta \left[C_1(-m^2 - m + 2)r^{-m} + C_2(-m^2 - m)r^{-m-2} + \right. \\ &\quad \left. + C_3(-m^2 + m)r^{m-2} + C_4(-m^2 + m + 2)r^m \right], \\ \sigma_\theta &= \sin m\theta \left[C_1(m^2 - 3m + 2)r^{-m} + C_2(m^2 + m)r^{-m-2} + \right. \\ &\quad \left. + C_3(m^2 - m)r^{m-2} + C_4(m^2 + 3m + 2)r^m \right], \\ \tau_{r\theta} &= \cos m\theta \left[C_1(m^2 - m)r^{-m} + C_2(m^2 + m)r^{-m-2} - \right. \\ &\quad \left. - C_3(m^2 - m)r^{m-2} - C_4(m^2 + m)r^m \right].\end{aligned}$$

Неизвестные постоянные находятся из граничных условий:

$$r = R : \begin{cases} \tau_{r\theta} = \tau_0 \cos m\theta, \\ \sigma_r = 0, \end{cases} \quad r = r_0 : \begin{cases} \tau_{r\theta} = \tau_0 \cos m\theta, \\ \sigma_r = 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $r_0 = 1 - b$ — внутренний радиус пластины, $R = 1 + b$ — внешний радиус пластины ($2b$ — ширина пластины).

В случае малой ширины пластины используем разложения в ряд по степеням малого параметра:

$$(1 + b)^m = 1 + mb + \frac{m(m-1)}{2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} b^3 + \dots$$

Удерживая члены вплоть до третьего порядка малости и полагая $r = 1 + z$, получаем следующее выражение для нормальной компоненты напряжения:

$$\sigma_\theta = -\frac{3z\tau_0}{b^2 m} \sin m\theta. \quad (28)$$

3.2. Использование формул сопряжения

При малой ширине пластины ее можно рассматривать как круговой стержень. Для кривых стержней нормальное напряжение вычисляется по формуле [3]

$$\sigma_\theta = \frac{M}{S} \frac{z}{\rho},$$

где z — расстояние до нейтральной оси, S — статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси, $\rho = r + z$ (r — радиус кривизны нейтрального слоя), M — приложенный момент. Пластина имеет прямоугольное сечение, поэтому

$$S = \frac{J}{R_0}, \quad r = R_0 \left(1 - \frac{(2b)^2}{12R_0^2} \right),$$

где R_0 — радиус кривизны стержня. В нашем случае $R_0 = 1$, следовательно

$$r = 1 - \frac{b^2}{3}, \quad S = \frac{2}{3} b^3.$$

Принимая во внимание, что изгибающий момент

$$M = -2b \int_0^\theta \tau_0 \cos m\theta \, d\theta = -\frac{2b\tau_0}{m} \sin m\theta,$$

получаем формулу для нормальной компоненты напряжения:

$$\sigma_\theta = -\frac{3z\tau_0 \sin m\theta}{mb^2(1 - b^3/3 + z)} \approx -\frac{3z\tau_0}{mb^2} \sin m\theta,$$

совпадающую с формулой (28).

Сравним результаты применения теории стержней и теории упругости к решению задачи о круговой пластине. Положим $m = 5$, $\theta = \pi/10$, $z = b$. Результаты расчета относительной погрешности представлены в табл. 2.

Таблица 2. Относительная погрешность вычисления нормальной компоненты напряжения σ_θ по теории стержней в сравнении с теорией упругости

m	$b = 0.01$	$b = 0.025$	$b = 0.05$
5	4.6%	4.9%	5.0%

4. Цилиндрическая оболочка, сопряженная с кольцевой пластиной

4.1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим задачу о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной по краю кольцом, под действием равномерного бокового внешнего давления p (рис. 3). Предположим, что оболочка и кольцевая пластина изготовлены из одного и того же материала, кольцо имеет прямоугольное поперечное сечение.

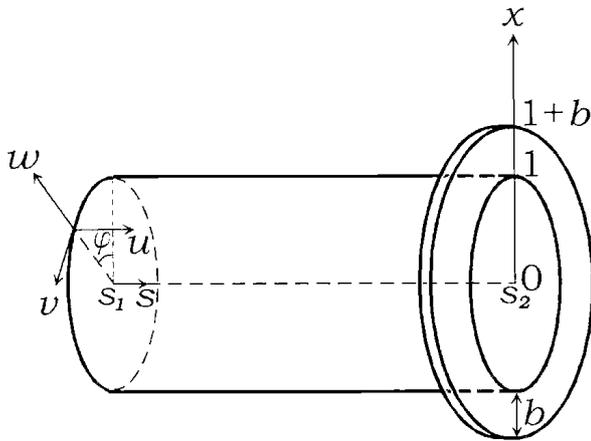


Рис. 9: Цилиндрическая оболочка, подкрепленная кольцом.

Примем за единицу длины радиус цилиндрической оболочки R . В качестве безразмерных криволинейных координат на срединной поверхности оболочки выберем длину дуги меридиана $s \in [s_1, s_2]$ и угол в окружном направлении φ . На поверхности пластины используется полярная система координат $x \in [1, 1 + b]$ и φ , где b — безразмерная ширина кольцевой пластины. Окружность $s = s_2$, $x = 1$ является параллелью сопряжения оболочки и пластины.

Пусть цилиндрическая оболочка имеет безразмерную толщину

h , кольцевая пластина — толщину a . Безразмерная длина цилиндра $l = s_2 - s_1$.

Уравнения устойчивости конической оболочки можно использовать для описания потери устойчивости как цилиндрической оболочки, так и кольцевой пластины. После разделения переменных систему уравнений устойчивости конической оболочки запишем в безразмерном виде [1, 5]:

$$\begin{aligned} T_1' + \frac{B'}{B}(T_1 - T_2) + \frac{m}{B}S &= 0, \\ S' + 2\frac{B'}{B}S - \frac{m}{B}T_2 + \frac{Q_2}{R_2} + 2H' &= 0, \\ Q_1' + \frac{B'}{B}Q_1 + \frac{m}{B}Q_2 - \frac{T_2}{R_2} + \frac{\lambda}{B} [m\vartheta_2 R_2 - (B\vartheta_1 t_1)'] &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по s для цилиндра (по x для пластины), m — число волн по параллели; $B(s)$ — расстояние от точки срединной поверхности оболочки до оси вращения, $R_2(s)$ — главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, $\lambda = \sigma p / (Eh)$ — искомый параметр нагружения, $\sigma = (1 - \nu^2)$, E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона, u, v, w — проекции перемещений точек срединной поверхности на направления касательной к меридиану, касательной к параллели и внешней нормали к поверхности оболочки соответственно, ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота элемента срединной поверхности вокруг тангенциальных осей, T_1, T_2, S — нормальные и сдвигающие усилия, H — крутящий момент.

Будем обозначать величины, характеризующие цилиндрическую оболочку, буквами с верхним индексом (1), а величины, характеризующие кольцевую пластину, буквами с верхним индексом (2). Тогда

$$B^{(1)} = R_2^{(1)} = 1, \quad B^{(2)}(x) = x, \quad 1/R_2^{(2)} = 0. \quad (30)$$

Предположим, что край оболочки $s = s_1$ заделан, а край пластины $x = 1 + b$ свободен. Тогда

$$\begin{aligned} u^{(1)} = v^{(1)} = w^{(1)} = \vartheta_1^{(1)} &= 0, \quad s = s_1, \\ T_1^{(2)} = M_1^{(2)} = S^{(2)} = Q_1^{(2)} &= 0, \quad x = 1 + b. \end{aligned}$$

Кроме того, для цилиндрической оболочки и кольцевой пластины на параллели сопряжения $s = s_2$, $x = 1$ должны быть выполнены условия непрерывности перемещений, усилий, угла поворота ϑ_1 и момента M_1 [1]:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= w^{(1)}, \quad w^{(2)} = -u^{(1)}, \quad T_1^{(2)} = \frac{h}{a}Q_1^{(1)}, \quad Q_1^{(2)} = -\frac{h}{a}T_1^{(1)}, \\ v^{(2)} &= v^{(1)}, \quad \vartheta_1^{(2)} = \vartheta_1^{(1)}, \quad M_1^{(2)} = \frac{h}{a}M_1^{(1)}, \quad S^{(2)} = \frac{h}{a}S^{(1)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для определения критического давления воспользуемся асимптотическим методом интегрирования уравнений устойчивости [5]. Приближенное уравнение для определения критического внешнего давления цилиндрической оболочки имеет вид

$$\frac{d^4 v_0}{ds^4} - \alpha^4 v_0 = 0, \quad (32)$$

где $\alpha^4 = \frac{\lambda_0 - \mu^4 m^8}{1 - \nu^2}$, причем

$$u_0 = v_0', \quad T_{10} = (1 - \nu^2)v_0'', \quad S_0 = -\sigma v_0'''.$$

Здесь v_0, u_0, T_{10} и S_0 — главные члены в асимптотических разложениях перемещений и усилий.

Для того чтобы получить граничные условия для уравнения (32) на подкрепленном крае $s = s_2$, необходимо разделить исходные условия краевой задачи на главные и дополнительные. Критерий, по которому следует проводить разделение простейших граничных условий на краях оболочки, описан в работе [5]. В некоторых случаях для получения главных и дополнительных условий необходимо составлять линейные комбинации исходных граничных условий. Из главных условий, путем отбрасывания второстепенных членов, получают приближенные граничные условия для уравнения (32).

4.2. Задача о деформации пластины в ее плоскости

Для того чтобы получить граничные условия сопряжения оболочки с пластиной, надо решить задачу о деформации пластины (рис. 4).

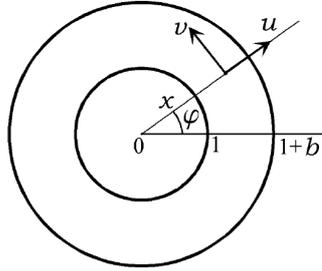


Рис. 10: Система координат на кольцевой пластине.

Жесткость тонкой пластины на изгиб мала по сравнению с ее жесткостью на растяжение-сжатие и сдвиг, поэтому ограничимся исследованием уравнений, описывающих деформацию пластины в ее плоскости [4]:

$$\begin{aligned}
 T_1' + \frac{1}{x}(T_1 - T_2) + \frac{m}{x}S &= 0, \quad S' + \frac{2}{x}S - \frac{m}{x}T_2 = 0, \\
 T_1 &= u' + \nu \left(\frac{m}{x}v + \frac{u}{x} \right), \quad T_2 = \frac{m}{x}v + \frac{u}{x} + \nu u', \\
 S &= \frac{1-\nu}{2} \left(v' - \frac{v}{x} - \frac{m}{x}u \right).
 \end{aligned} \tag{33}$$

После замены переменной $x = e^t$ в (33) получим систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2u}{dt^2} - u - \gamma m^2 u + \delta m \frac{dv}{dt} - (1 + \gamma)mv &= 0, \\
 \gamma \frac{d^2v}{dt^2} - \gamma v - m^2 v + \delta m \frac{du}{dt} - (1 + \gamma)mu &= 0,
 \end{aligned} \tag{34}$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= C_1 x^{m-1} + C_2 \left(-1 + \frac{2\gamma}{\delta m} \right) x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + C_4 \left(1 + \frac{2\gamma}{\delta m} \right) x^{-m+1}, \\ v^{(2)} &= -C_1 x^{m-1} + C_2 \left(1 + \frac{2}{\delta m} \right) x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + C_4 \left(1 - \frac{2}{\delta m} \right) x^{-m+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\gamma = \frac{1-\nu}{2}$, $\delta = \frac{1+\nu}{2}$.

Подстановка выражений (35) в формулы (33) дает формулы для усилий:

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= 2C_1\gamma(m-1)x^{m-2} - 2C_2\gamma \frac{(m+1)(m-2)}{m} x^m - \\ &\quad - 2\gamma(m+1)C_3 x^{-m-2} - 2C_4\gamma \frac{(m+1)(m-2)}{m} x^{-m}, \\ S^{(2)} &= -2C_1\gamma(m-1)x^{m-2} + 2C_2\gamma(m+1)x^m - \\ &\quad - 2\gamma(m+1)C_3 x^{-m-2} - 2C_4\gamma(m-1)x^{-m}. \end{aligned} \quad (36)$$

4.3. Граничные условия в задаче об устойчивости цилиндра, подкрепленного пластиной

Рассмотрим условия, которые должны выполняться на параллели сопряжения цилиндрической оболочки и пластины. Опираие на мембрану (шарнирный край) предполагает, что жесткость пластины на изгиб равна нулю, а жесткость на растяжение бесконечна. В этом случае $M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0$, $v^{(1)} = w^{(1)} = 0$ и граничные условия на краю $s = s_2$ цилиндрической оболочки имеют вид

$$v^{(1)} = w^{(1)} = T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0.$$

Будем считать, что пластина не сопротивляется изгибу, но имеет конечную жесткость на растяжение. Тогда, как и в случае опирания на мембрану, из равенств $M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0$ следуют условия

$$T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0, \quad (37)$$

но

$$w^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad S^{(1)} = \frac{a}{h} S^{(2)}, \quad Q_1^{(1)} = \frac{a}{h} T_1^{(2)}. \quad (38)$$

На свободном крае пластины при $x = 1 + b$

$$T_1^{(2)} = S^{(2)} = 0. \quad (39)$$

Из первых двух равенств (38) и из условий (39) находим произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 , выраженные через перемещения оболочки.

Граничные условия для уравнения (32) при $s = s_2$ определяются после выделения двух главных условий из условий (37) и двух последних условий (38). В рассматриваемой задаче условие

$$T_1^{(1)} = 0 \quad (40)$$

является главным. В качестве второго главного условия возьмем линейную комбинацию условий $S^{(1)} - mQ_1^{(1)} = 0$, сохраняя в ней только главные члены.

Принимая во внимание, что

$$S^{(1)} - mQ_1^{(1)} \simeq S_0^{(1)}m^{-3}, \quad w^{(1)} \simeq w_0^{(1)}, \quad w_0^{(1)} \simeq -v_0^{(1)},$$

получим второе главное условие в виде

$$S_0^{(1)} + cv_0 = 0, \quad (41)$$

где выражение для жесткости c имеет вид

$$c = -\frac{2am^4\gamma\delta[fm(1-d^2) + f\gamma(d-1)^2 + b(2+b)dm^2(2+2b\delta + b^2\delta)]}{h[\gamma(4d + f\delta(d-1)^2) + \delta(f(1+d)^2 + m^2b^2d\delta(b+2)^2)]}, \quad (42)$$

$$f = (1+b)^2, \quad d = (1+b)^{2m}.$$

При уменьшении b формула (42) переходит в формулу, соответствующую стержневой модели шпангоута [1]:

$$c_b = \frac{m^8\sigma a^4 k^3}{3h}, \quad (43)$$

где $k = b/a$, b — ширина шпангоута, a — его толщина, а при увеличении ширины — в формулу, полученную для бесконечной пластины [4]:

$$c_p = \frac{2\gamma}{1+\gamma} \frac{a}{h} m^5.$$

Следовательно, условие (41) является главным как при малых, так и при больших значениях ширины пластины b . Для того чтобы выяснить, является ли это условие главным при всех значениях b , требуется дополнительное исследование. Тем не менее полученные результаты позволяют оценить погрешность, возникающую при использовании стержневой модели шпангоута (43) вместо более точной пластиночной модели (42).

4.4. Пример расчета,

Условия сопряжения (40), (41) цилиндрической оболочки с пластиной отличаются от условий сопряжения цилиндра со стержнем только значением постоянной в условии (41), поэтому для определения приближенного значения критической нагрузки можно использовать алгоритм из [1].

Общее решение уравнения (32) ищем в виде линейной комбинации функций Крылова:

$$v_0 = AS(z) + BV(z) + CU(z) + DT(z), \quad z = \alpha(s - s_1). \quad (44)$$

Здесь

$$S(z) = \operatorname{ch} z + \cos z, V(z) = \operatorname{sh} z - \sin z, U(z) = \operatorname{ch} z - \cos z, T(z) = \operatorname{sh} z + \sin z.$$

Подставим (44) в граничные условия жесткой заделки левого края оболочки $s = s_1$:

$$v_0 = v'_0 = 0$$

и условия сопряжения (40), (41) и приравняем нулю определитель системы линейных алгебраических уравнений с неизвестными A, B, C, D . Получим уравнение для определения α , которое можно представить в виде

$$\sigma \alpha^3 (\cos z + \operatorname{ch}^{-1} z) = c (\operatorname{th} z \cos z - \sin z), \quad (45)$$

где $z = \alpha l$. После определения наименьшего корня z_1 уравнения (45) искомое значение параметра нагружения находим по формуле

$$\lambda \simeq \min_m \left(\frac{\sigma \alpha_1^4}{m^6} + \mu^4 m^2 \right), \quad \alpha_1 = \frac{z_1}{l}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12}.$$

Рассмотрим конструкцию со следующими параметрами:

$$h = 0.01, l = 3.0, \nu = 0.3,$$

число волн по параллели m выбиралось таким образом, чтобы параметр нагружения был наименьший.

Относительная погрешность вычисления критического давления с помощью стержневой модели для шпангоутов разной ширины представлена в табл. 3.

Таблица 3. Относительная погрешность вычисления критического давления с использованием стержневой модели

a	$b = 0.01$	$b = 0.025$	$b = 0.05$
0.001	0.05%	0.9%	6.1%
0.002	0.1%	1.6%	8.5%
0.003	0.15%	2.3%	1.9%
0.004	0.2%	2.9%	1.5%

С увеличением толщины и ширины пластины растет погрешность вычисления критического давления с помощью стержневой модели шпангоута. Уменьшение погрешности при $a = 0.003, b = 0.05$, а также при $a = 0.004, b = 0.05$ связано с тем, что параметр нагружения принимает минимальное значение при другом значении числа волн по параллели m .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано напряженно-деформированное состояние прямоугольной и круговой пластин под действием касательных напряжений. Показано, что результаты, полученные с применением формул теории упругости, при уменьшении ширины пластины переходят в результаты, полученные при рассмотрении пластины как стержня. Найдена погрешность формул теории стержней для некоторых значений ширины пластины. С увеличением ширины пластины эта погрешность растет. С помощью асимптотических методов изучена устойчивость под действием внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной. Показано, что при уменьшении ширины пластины формула для ее

жесткости переходит в формулу для жесткости стержня. Найдена погрешность вычисления параметра нагружения, возникающая при использовании стержневой модели шпангоута вместо более точной пластиночной модели. С увеличением толщины и ширины пластины растет погрешность вычисления по стержневой формуле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филлипов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб., 1999.
2. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., 1975.
3. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. М., 1951.
4. *Макаренко И.Н., Филлипов С.Б.* Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 1. С. 94–102.
5. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

О. М. МАЛЫШЕВА

Доклад на семинаре 6 декабря 2005 г.

РЕЗЮМЕ

В статье решена задача об устойчивости тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. В работе рассматриваются граничные условия заделки и свободного края. С помощью асимптотического метода определены оптимальные расположения шпангоутов и оптимальные значения для поперечного сечения шпангоутов. Также были получены приближенные формулы для критического давления и для размеров поперечного сечения шпангоутов¹.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимальным расположением будем называть такое расположение, для которого λ имеет наибольшее значение. Определено предельное оптимальное расположение. В [3] показано, что нули формы колебаний неподкрепленной балки совпадают с точками предельного оптимального расположения пружин. Для случая шарнирного опирания, рассмотренного в [2], точки $s_i^* = il/n$ являются узлами форм колебаний и, следовательно, предельное оптимальное расположение является равномерным. В случае жесткой заделки предельное оптимальное расположение найдено в статье [3]. В данной работе рассматриваются граничные условия заделки и свободного края.

0.1 Постановка задачи

После разделения переменных безразмерная система уравнений, описывающая потерю устойчивости круговой цилиндрической

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00257.

© М. Е. Кобченко, 2005

оболочки под действием равномерного внешнего давления p примет вид [1]:

$$\mu^4 \Delta^2 w - \sigma \Delta_k \Phi - \lambda m^2 w = 0, \quad \Delta^2 \Phi + \Delta_k w = 0, \quad (1)$$

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{ds^2} - m^2 w, \quad \Delta_k w = \frac{d^2 w}{ds^2}, \quad \sigma = 1 - \nu^2,$$

где s — координата, направленная по образующей, Φ — функция усилий, w — проекция перемещения на направление нормали, m — число волн по параллели, ν — коэффициент Пуассона, $\mu^4 = \frac{h^2}{12}$ — малый параметр, h — толщина оболочки, $\lambda = \frac{p(m)R\sigma}{Eh}$, ρ — плотность материала, E — модуль Юнга. За единицу длины выбран радиус R основания цилиндра.

Предположим, что граничные условия не допускают изгибаний срединной поверхности оболочки. Тогда критическому давлению соответствуют $\lambda \sim \mu^3$, $m \sim \mu^{-1/2}$. Исключая из системы Φ и считая, что $\Delta \sim m^2$, получим приближенное уравнение [2]

$$w^{IV} - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = (m^6 \lambda - \mu^4 m^8) / \sigma. \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (2) в случае заделки края $s = 0$ и свободного края $s = l$ оболочки имеют вид

$$w(0) = w'(0) = w''(l) = w'''(l) = 0, \quad (3)$$

где l — безразмерная длина оболочки.

На рис. 1 изображена оболочка, подкрепленная одинаковыми круговыми стержнями (шпангоутами) по параллелям с координатами $s = s_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$. Введем функцию $w = w^{(i)}$ при $s \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, причем $s_0 = 0$, $s_n = l$:

$$w^{(i)IV} - \alpha^4 w^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута $a \ll \mu$. Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, выполняются условия сопряжения [2]:

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)'} &= w^{(i+1)'}, \\ w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, & w^{(i)'''} - w^{(i+1)'''} &= -cw^{(i+1)}, \\ s &= s_i, & i &= 1, 2, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

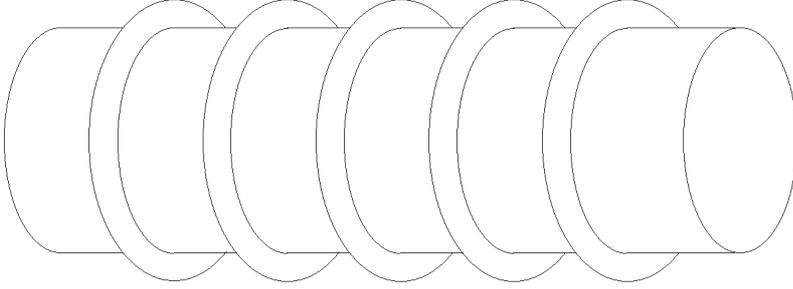


Рис. 11: Подкрепленная оболочка.

где

$$c = m^8 \left(J_x + \frac{e^2 F_c}{1 + \delta} \right), \quad \delta = \frac{F_c (J_k + 2q\mu^4)}{4q^3 \mu^4 m^6 (J_k + q\mu^4)}, \quad q = \frac{(1 - \nu^2)^{1/4}}{\sqrt{2} \mu m^2},$$

$$F_c = \frac{\sigma A_r}{hR}, \quad J_x = \frac{\sigma I_r}{hR^3}, \quad J_k = \frac{\sigma I_k}{hR^3},$$

где e — эксцентриситет шпангоута, A_r — площадь поперечного сечения шпангоута, I_r, I_k — моменты инерции поперечного кручения. Для прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой b величины I_r, I_k, A_r, e можно вычислять по следующим формулам:

$$I_r = \frac{ab^3}{12}, \quad I_k = \frac{a^3b^3}{3(a^2 + b^2)}, \quad A_r = ab, \quad e = \frac{b + h}{2}.$$

0.2 Оптимальное распределение шпангоутов

Краевая задача (3)—(5) эквивалентна задаче об определении частот поперечных колебаний для балки, удовлетворяющей нашим

граничным условиям и подкрепленной пружинами жесткости c в точках $s = s_i$.

Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) имеет вид

$$w_n(s) = U(\alpha_n s) - \eta_n V(\alpha_n s), \quad (6)$$

где

$$U(x) = ch(x) - \cos(x), \quad V(x) = sh(x) - \sin(x),$$

$$\alpha_n = \frac{z_n}{l}, \quad \eta_n = \frac{ch(z_n) + \cos(z_n)}{sh(z_n) + \sin(z_n)},$$

а величины

$$z_n \simeq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

являются корнями уравнения $\cosh(z) \cos(z) = -1$. Численно определяя корни уравнения $w_n(s) = 0$, получим для балки длиной $l = n$ с граничными условиями заделки и свободного края следующие координаты точек предельного оптимального расположения пружин (табл. 1).

Таблица 1.

Координаты точек предельного оптимального расположения пружин

n	s_1^*	s_2^*	s_3^*	s_4^*	s_5^*	s_6^*	s_7^*	s_8^*	s_9^*
7	1,158	2,077	3,000	3,923	4,850	5,695	—	—	—
10	1,188	2,131	3,079	4,026	4,974	5,921	6,868	7,816	8,763

0.3 Вычисление собственных значений для задачи об устойчивости подкрепленной оболочки

Рассмотрим краевую задачу (3)–(5) о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Воспользуемся методом Рэля. Формулу

Рэля для подкрепленной пружинами балки запишем в следующем безразмерном виде:

$$\alpha_1^4 = (I_1 + I_2)/I_0, \quad (8)$$

$$I_1 = \int_0^l (w'')^2 ds, \quad I_2 = c \sum_{i=1}^{n-1} w^2(s_i), \quad I_0 = \int_0^l w^2 ds.$$

Подставим в (8) $w = w_1$, где функция w_1 определяется по формуле (6). Получим

$$\alpha_1^4 = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \frac{\gamma cn}{l}. \quad (9)$$

Здесь z_1 определяется по формуле (7), а функция

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} w_1^2(s_i)$$

зависит от координат пружин s_i .

Значения $\gamma = \gamma_p$ для предельного оптимального и $\gamma = \gamma_r$ для равномерного расположения пружин в случае заделки и свободного края приведены в табл. 2.

Таблица 2. Значения $\gamma = \gamma_p$ для предельного оптимального и $\gamma = \gamma_r$ для равномерного расположения пружин

n	γ_p	γ_r
7	1,0509	0,733014
10	1,0485	0,809039
13	1,0997	0,851440

Задача об устойчивости начального безмоментного напряженного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами и находящейся под действием равномерного внешнего давления p , сводится к краевой задаче на собственные значения, которая мало отличается от краевой задачи, описывающей низкочастотные колебания. Соответствующее критическому давлению приближенное значение λ_1 параметра $\lambda = \frac{\sigma p R}{E h}$ для подкрепленной оболочки с одним краем заделанным и вторым свободным определяется по формуле [2]

$$\lambda_1(\eta) = \min_m \left(\frac{\sigma \alpha^4(\eta, m)}{m^6} + \mu^4 m^2 \right), \quad (10)$$

где α – собственное значение краевой задачи (3)–(5).

Для неподкрепленной оболочки $\eta = 0$, $\alpha = \frac{z_1}{l}$. С помощью дифференцирования по m правой части (9) получаем

$$\lambda_1(0) = 4\mu^3 \frac{z_1}{l} \sqrt[4]{\frac{\sigma}{27}}.$$

Для определения α можно воспользоваться приближенной формулой (8):

$$\alpha^4 = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \gamma \frac{cn}{l} = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \gamma \eta \frac{\mu^4 m^8}{\sigma}, \quad (11)$$

$$\eta = \frac{cn\sigma}{l\mu^4 m^8} = \frac{12\sigma n I}{h^3 l},$$

где I – момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра.

Рассмотрим случай $e = 0$. Подставив (11) в (10), получим

$$\lambda_1(\eta) = \lambda_1(0)(1 + \gamma\eta)^{3/4}. \quad (12)$$

С увеличением η увеличивается и λ_1 , однако формулой (12) нельзя пользоваться при больших значениях η , так как существует параметр частоты λ_n , который не зависит от η . Действительно, собственное значение α_n краевой задачи (3),(4) одновременно является собственным значением краевой задачи (3)–(5), так как форма колебаний неподкрепленной оболочки $w_n(s)$ удовлетворяет граничным условиям (5). Соответствующий α_n параметр частоты

$$\lambda_n = \min_m \left(\frac{\sigma \alpha_n^4}{m^6} + \mu^4 m^2 \right) = 4\mu^3 \alpha_n^4 \sqrt[4]{\frac{\sigma}{27}} = \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2 \lambda_1(0)$$

на зависит от η .

Параметр η^* , являющийся корнем уравнения

$$\lambda_1(0)(1 + \gamma\eta)^{3/4} = \lambda_n,$$

называется эффективной жесткостью шпангоута. Увеличение жесткости шпангоута η после достижения ею значения η^* не приво-

дит к увеличению наименьшего параметра частоты. Следовательно,
но,

$$\frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_1(0)} = \begin{cases} \sqrt[4]{(1 + \gamma\eta)^3}, & \eta \leq \eta^*, \\ \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta > \eta^*. \end{cases} \quad (13)$$

$$\eta^* = \frac{1}{\gamma} \left(\left(\frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} - 1 \right). \quad (14)$$

0.4 Определение оптимальных параметров подкрепленной оболочки при $e = 0$

Рассмотрим задачу о потере устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки под действием внешнего бокового давления. Критическое давление p_0 для гладкой цилиндрической оболочки (с одним краем заделанным, вторым — свободным), имеющей безразмерную длину l и толщину h_0 , можно определить с помощью приближенной формулы Саутуэлла—Папковича

$$p_0 = \frac{4Eh_0^{5/2} 1,875}{6^{2/3} l (1 - \nu^2)^{3/4}}.$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины h на ней установлен $n - 1$ шпангоут прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой $b = ka$, причем масса подкрепленной оболочки $M_s = M(h) + M_r$, где $M(h) = 2\pi R^3 \rho h l$ — масса обшивки, $M_r = 2\pi R^3 \rho (n - 1) a^2 k$ — масса шпангоутов, совпадает с массой гладкой оболочки $M_0 = M(h_0)$.

Для оболочки с той же массой, подкрепленной равноотстоящими шпангоутами, критическое давление p_1 определим с помощью формулы (13):

$$f_b = \frac{p_1}{p_0} = \begin{cases} d^{5/2} (1 + \gamma\eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta^*, \\ d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta > \eta^*, \end{cases} \quad (15)$$

где $d = \frac{h}{h_0}$, $\eta = \frac{Ba^4}{d^3}$, $B = \frac{\sigma n k^3}{h_0^3 l}$, а η_* определяется по формуле (14).

Из условия $M_s = M_0$ следует, что

$$d = 1 - Aa^2, \quad A = \frac{(n-1)k}{lh_0}, \quad (16)$$

$$f_b(d) = \frac{p_1}{p_0} = \begin{cases} d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & 0 \leq d \leq d_*, \\ d^{5/2} \left[1 + \gamma\beta \frac{(d-1)^2}{d^3}\right]^{3/4}, & d_* \leq d < l, \end{cases} \quad (17)$$

где $\beta = B/A^2$, а $d_* \in [0, 1]$ — корень кубического уравнения

$$d^3 - q(d-1)^2 = 0, \quad q = \beta/\eta_*. \quad (18)$$

Оптимальными будем считать значения параметров подкрепленной оболочки, для которых функция $f_b(d)$ имеет наибольшее значение. Воспользовавшись результатами [2], где рассматривался случай шарнирного опирания, можно показать, что для тонких оболочек эта функция достигает максимума $f_* = (d_*)^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right)$ при $d = d_*$. Оптимальное значение a_* параметра a определяется по формуле

$$a_* = \sqrt{(1-d_*)/A}. \quad (19)$$

В качестве примера рассмотрим подкрепленную оболочку при следующих значениях параметров: $l = 6$, $h_0 = 0,0119$, $\nu = 0,3$, $E_c = E$, $k = 2,1527$. В табл. 3 приведены значения d_* , a_* и f_* . При вычислении η_* использовалось приближенное равенство $\gamma \simeq 1$.

Таблица 3. Значения d_* , a_* и f_* для подкрепленной оболочки

N	d_*	a_*	f_*
6	0,8457791	0,0291980	3,2894
9	0,7802876	0,0284554	3,7647
12	0,7248747	0,0275760	4,0262
15	0,6776083	0,0266995	4,1576

В рассматриваемом примере функция f_* растет с увеличением N . Следовательно, установка большего количества шангоутов, имеющих эффективную жесткость $\eta = \eta_*$, приводит к наибольшему увеличению критического давления.

0.5 Определение оптимальных параметров подкрепленной оболочки с учетом эксцентриситета

Рассмотрим случай, когда эксцентриситет e не равен нулю. В работе [4] критическое давление для шарнирно опертой подкрепленной цилиндрической оболочки определяется по следующей формуле:

$$p(m) = \frac{E}{R} \left[\frac{h\alpha^4}{(m^2 - 1 + \frac{\alpha^2}{2})(m^2 + \alpha^2)^2} + \frac{I_c(m^2 - 1)}{R^2 L_r} \right], \quad (20)$$

где E — модуль Юнга, $\alpha = \pi R/L$, L — длина цилиндрической оболочки, $L_r = L/n$ — расстояние между шпангоутами, $n = N + 1$, где N — количество шпангоутов, R — радиус цилиндрической оболочки, m — число волн по параллели, h — толщина оболочки, I_c — момент инерции поперечного сечения шпангоута и сечения части оболочки, заключенной между соседними шпангоутами, относительно их общего центра масс C . Будем называть эту формулу формулой Брайона—Кендрика.

В случае заделки и свободного края в формулу Брайона—Кендрика надо подставить значение $\alpha = \frac{1,875R}{L}$.

Формула (20) получена с помощью замены изгибной жесткости части подкрепленной оболочки, содержащей один шпангоут, жесткостью эквивалентного кольца. Такой подход выглядит вполне разумным с точки зрения здравого смысла. В [4] показано, что при некоторых значениях параметров подкрепленной оболочки результаты, полученные по формуле (20), согласуются с результатами, найденными с помощью более точных моделей.

Предполагая, что шпангоуты и оболочка изготовлены из одинакового материала, и используя теорему о моментах инерции относительно параллельных осей, величину момента I_c для шпангоута с прямоугольным поперечным сечением (рис. 2) можно определить по следующей формуле:

$$I_c = I_r + (e - e_c)^2 A_r + (I_s + A_s e_c^2) / \sigma, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad (21)$$

$$e_c = \frac{eA_r}{A_r + A_s}, \quad e = \frac{b+h}{2}, \quad (22)$$

$$I_s = \frac{h^3 L_r}{12}, \quad A_s = hL_r \quad I_r = \frac{ab^3}{12}, \quad A_r = ab, \quad (23)$$

где I_r — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно его центра масс C_r , A_r — площадь поперечного сечения шпангоута, e и e_c — расстояния от срединной поверхности оболочки до точек C_r и C , I_s — момент инерции части оболочки, заключенной между соседними шпангоутами, относительно ее центра масс, ν — коэффициент Пуассона.

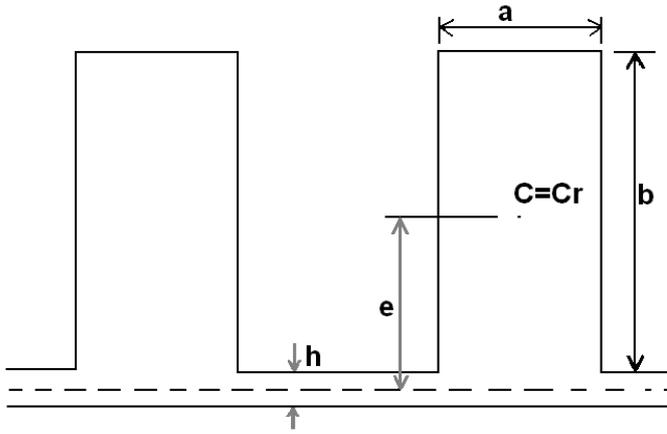


Рис. 12: Фрагмент поперечного сечения подкрепленной оболочки с прямоугольным сечением шпангоута.

Отбрасывание в формуле (20) слагаемых $O(m^{-2})$ по сравнению со слагаемыми $O(1)$ дает приближенную формулу Брайона—Кендрика:

$$p_c = \min_m p(m), \quad p(m) = \frac{E}{R} \left(\frac{h\alpha^4}{m^6} + m^2 \frac{I_c}{R^2 L_r} \right). \quad (24)$$

Перейдем от размерных переменных к безразмерным. Тогда

$$\lambda = \frac{\sigma\alpha^4}{m^6} + \mu^4 m^2 + m^2 \left(\frac{\sigma I_r n}{hl} + \frac{e^2 ab (ab + \sigma h \frac{l}{n})}{(ab + h \frac{l}{n})^2} \right). \quad (25)$$

Для шпангоутов без учета эксцентриситета для параметра λ в безразмерных переменных в [3] было получено равенство

$$\lambda = \frac{\sigma\alpha^4}{m^6} + \mu^4 m^2 + \frac{\sigma I_r n}{hR^3 \mu^4 l} m^2 = \frac{\sigma\alpha^4}{m^6} + \mu^4 m^2 + \eta m^2 \mu^4. \quad (26)$$

С учетом эксцентриситета из (25) можно увидеть, что выражение для параметра η примет следующий вид:

$$\eta = \frac{\sigma I_r n}{\mu^4 hl} + \frac{e^2 ab (ab + \sigma h \frac{l}{n})}{\mu^4 (ab + h \frac{l}{n})^2}, \quad (27)$$

где

$$I_r = \frac{a^4 k^3}{12}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12} = \frac{d^2 h_0^2}{12}, \quad e = \frac{ka + dh_0}{2}. \quad (28)$$

Подставив (27) в (26), получим

$$\eta = \frac{\sigma a^4 k^3 n}{h_0^3 d^3 l} + \frac{\left(\frac{ak+h_0d}{2}\right)^2 a^2 k (a^2 k + \sigma \frac{h_0 d l}{n}) 12}{(a^2 k + \frac{h_0 d l}{n})^2 h_0^2 d^2}. \quad (29)$$

Для нахождения оптимального значения a_* параметра a приравняем (14) и (29) и учтем (19).

В табл. 4 приведены значения d_* , a_* , f_* в случае $l = 6$, $h_0 = 0,0119$,

$\nu = 0,03$ и $k = 2,1527$ для заделки и свободного края.

Как и в случае $e = 0$, функция f_* растет с увеличением N .

0.6 Заключение

В данной работе рассматривается тонкая подкрепленная шпангоутами цилиндрическая оболочка. На краях оболочки заданы граничные условия заделки и свободного края.

Таблица 4. Значения d_* , a_* , f_* для заделки и свободного края

N	d_*	a_*	f_*
6	0,9235654	0,0205554	4,098634
9	0,8822191	0,0208340	5,117281
12	0,842560	0,0208605	5,864680
15	0,8050671	0,0207613	6,396949

В работе осуществлен переход от гладкой оболочки к оптимальной подкрепленной оболочке с сохранением длины и массы.

Также найдены оптимальные параметры подкрепленной прямоугольными шпангоутами цилиндрической оболочки, позволяющие получить наибольшее значение критического давления в случае отсутствия эксцентриситета и его наличия.

Литература

1. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Физматлит; Наука, 1995. 320 с.
2. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 196 с.
3. Филиппов С.Б., Лопатухин А.Л. Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2001. Вып. 2 (9). С. 84—90.
4. Gill S.S. The stress analysis of pressure vessels and pressure components. Oxford: Pergamon Press, 1970. P. 405—511.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ».**

2004–2005 гг.

Под ред. *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторг*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать 24.03.2006. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,9. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41