

К. К. Ким, А. Н. Бестужева, А. Л. Смирнов

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ  
В СИСТЕМЕ *MATHEMATICA*



Москва ♦ Ижевск

2019

УДК 621.3.011.1:51

ББК 31.211В641

К 40

---

Интернет-магазин

**MATHESS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - нефтегазовые  
технологии
- 

**Ким К. К., Бестужева А. Н., Смирнов А. Л.**

Расчет электрических цепей в системе *MATHEMATICA*. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2019. — 280 с.

При расчете электрических цепей плодотворным и удобным является использование методов теории графов. В этом случае топологическая схема электрической цепи представляется ориентированным графом, а сам граф задается списком пар вершин графа (узлов электрической цепи). Целесообразно в качестве расчетного инструмента использовать систему *Mathematica* 5.1, которая обладает широкими возможностями решения систем уравнений и работы с графами.

**ISBN 978-5-4344-0663-5**

**ББК 31.211В641**

© К. К. Ким, А. Н. Бестужева, А. Л. Смирнов, 2019

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2019

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

---

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Основные термины, обозначения и необходимые пояснения.....	6
Вводное занятие 1. Электрическая цепь и ее элементы. Основные понятия. Граф электрической цепи. Законы электрических цепей.....	8
Вводное занятие 2. Основные сведения о системе Mathematica.....	33
Вводное занятие 3. Построение графов схем электрической цепи в системе Mathematica.....	46
Вводное занятие 4. Основные функции для работы с графами.....	56
Вводное занятие 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений.....	72
Вводное занятие 6. Решение дифференциальных уравнений.....	87
Вводное занятие 7. Построение графиков.....	93
Лабораторная работа 1. Расчет цепи постоянного тока.....	123
Лабораторная работа 2. Расчет цепи синусоидального тока комплексным методом.....	151
Лабораторная работа 3. Расчет линейной электрической цепи с взаимной индукцией. Расчет трансформатора с линейными характеристиками.....	164
Лабораторная работа 4. Расчет трехфазных цепей.....	184
Лабораторная работа 5. Расчет линейной электрической цепи при действии несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов.....	194
Лабораторная работа 6. Расчет переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами, обусловленных однопараметрическим изменением конфигурации схемы.....	219
Лабораторная работа 7. Расчет линейной электрической цепи при скачкообразном изменении ЭДС и напряжений.....	234
Лабораторная работа 8. Расчет электрической цепи при резонансе.....	256
Литература.....	278

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эффективность решения многих задач, связанных с расчетом электрических цепей, в современных условиях напрямую зависит от успешности применения универсальных вычислительных систем, таких как **MatLab**, **Mathcad**, **Mathematica** и других. В основе большинства распространенных вычислительных систем лежат численные методы, применение которых зачастую, как говорят пользователи, приводит к сокрытию «физики» процессов, протекающих в электрической цепи. Такие вычислительные системы можно уподобить некоторому ящику фокусника Аюпяна, в который помещается рассчитываемая электрическая цепь, и при соблюдении некоторых обязательных формальностей, например произнесении фокусником фразы: «Ахалай-махалай», из этого волшебного ящика достается кролик — результат решения задачи.

Система **Mathematica** — одна из систем компьютерной алгебры общего назначения. Система **Mathematica** выгодно отличается от большинства существующих пакетов тем, что при его использовании решение проводится в символьном виде, а результат можно получить не только в виде числа, но и в виде аналитического выражения. Следует отдать должное пакету **MatLab**, однако, пакет символьных вычислений последнего является не самой сильной его стороной.

Аналитический вид получаемого решения раскрывает широкие возможности для пользователя для анализа и дальнейшего исследования процессов в рассматриваемой электрической цепи. Процесс выбора и принятия решений остается за пользователем.

Предлагаемое пособие написано сотрудниками кафедр «Теоретические основы электротехники» и «Прикладная математика» Петербургского государственного университета путей сообщения и кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета и посвящено методам расчета электрических цепей с помощью пакета **Mathematica 5**. Материал пособия базируется на шестилетнем опыте преподавания дисциплин: «Электротехника и электроника», «Общая электротехника», «Теоретические основы электротехники», «Дискретный анализ», «Современные компьютерные технологии» и т. п. студентам, бакалаврам и магистрам электромеханических и электротехнических специальностей.

Представляемое пособие состоит из двух частей. Первая — вводные занятия (6 шт.), в которых приводятся минимальные сведения о теории электрических цепей, теории графов и системе **Mathematica**, необходимые для выполнения алгоритмизированных расчетов электрических цепей. Вторая — комплекс лабораторных работ (8 шт.). Данные лабораторные работы представляют собой наиболее часто встречающиеся электротехниче-



ские задачи, которые возникают перед пользователем при расчете, проектировании и оптимизации того или иного электротехнического устройства или системы. Большинство задач взяты из широко известной электротехнической литературы, где приводятся решения рассматриваемых задач «вручную».



Рис. П.1

Алгоритмы, положенные в основу расчета лабораторных работ, были подчинены принципу унификации — ядро алгоритмов всех расчетов одно и то же.

Блок-схема предметной области учебного пособия показана на рис. П.1.

Форма изложения материала и содержание пособия предоставляет возможность его использования как в качестве учебного пособия для начального ознакомления с предметом или для самостоятельного изучения, так и в качестве основного пособия для углубленной подготовки студентов и аспирантов. Пособие будет полезно также и научным работникам, специализирующимся в области расчетов и оптимизации различных электротехнических устройств и систем.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность проф. Н. А. Чуркову и проф. С. В. Елизарову, поддержавших издание данного учебного пособия.

*Авторы*

---

## Основные термины, обозначения и необходимые пояснения

1. Обозначение параметров электрической цепи (в круглых скобках, если необходимо, даны обозначения при работе в системе *Mathematica*):

$R_1, R_2, \dots (R1, R2, \dots)$  — активные сопротивления, расположенные в ветвях схемы электрической цепи.

$r$  — фиктивное сопротивление (его значение равно нулю), вводится в схему электрической цепи, как правило, для ветвей, в которых нет сопротивлений.

$L_1, L_2, \dots (L1, L2, \dots)$  — индуктивности, расположенные в ветвях схемы электрической цепи.

$C, C_1, C_2, \dots (CC, C1, C2, \dots)$  — емкости, расположенные в ветвях схемы электрической цепи.

$G_0, G_1, \dots (G0, G1, \dots)$  — проводимости, расположенные в ветвях схемы электрической цепи.

$z_1, z_2, \dots (Z1, Z2, \dots)$  — полные сопротивления в ветвях схемы электрической цепи.

$E, E_1, E_2, \dots (EE, E1, E2, \dots)$  — источники ЭДС, расположенные в ветвях схемы электрической цепи.

$J_0, J_1, \dots (J0, J1, \dots)$  — источники тока, расположенные в ветвях схемы электрической цепи.

$M$  — коэффициент взаимной индукции.

2. Искомые переменные:

$\varphi$  — потенциал.

$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  — вектор потенциалов.

$u$  — напряжение.

$i$  — ток.

3. Переменные и обозначения для работы в пакете *Mathematica*:

$G$  — внутреннее (машинное) представление графа в системе *Mathematica*.

$LL$  — описание графа в виде списка пар вершин.

$P$  — количество ветвей (дуг) схемы (графа).

$Q$  — количество узлов (вершин) схемы (графа).

$SSS, SC, SSS1$  и тому подобное — список подстановок.

$A$  — матрица соединений.

**B** — матрица независимых контуров.

Так как при матричных вычислениях система *Mathematica* работает с матрицами-столбцами и матрицами-строками как с векторами, то в дальнейшем будем использовать термин «вектор».

**R** — вектор сопротивлений.

**L** — вектор индуктивностей.

**CC** — вектор емкостей.

**EE** — вектор ЭДС.

**RR** — диагональная матрица активных сопротивлений, ее элементы — вещественные числа.

**LLL** — диагональная матрица индуктивностей, ее элементы — вещественные числа.

**ZZ** — диагональная матрица полных сопротивлений, ее элементы — комплексные числа.

**RK** — матрица контурных сопротивлений, она получается из **RR** (для цепей постоянного тока).

**ZK** — матрица контурных сопротивлений, она получается из **ZZ** (для цепей переменного тока).

**IL** — вектор контурных токов.

**IP** — вектор токов в ветвях электрической цепи.

$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  — вектор потенциалов узлов.

Все расчеты, приведенные в данном пособии, ведутся в системе СИ (табл. 0.1), поэтому числовые значения приводятся без размерности.

Замечание: в системе *Mathematica* если индексы — двузначные числа, то цифры индексов разделяются запятой.

Таблица 0.1.

Сопротивление	$R$	Ом
Проводимость	$G$	$\text{Ом}^{-1}$
Индуктивность, коэффициент взаимной индуктивности	$L, M$	Генри
Емкость	$C$	Фарада
ЭДС	$E$	Вольт
Потенциал	$\varphi$	Вольт
Напряжение	$U$	Вольт
Ток	$I$	Ампер
Частота	$\omega$	$1/\text{с}$

---

## Вводное занятие 1.

### **Электрическая цепь и ее элементы. Основные понятия. Граф электрической цепи. Законы электрических цепей**

Электрическая цепь — совокупность устройств, предназначенных для прохождения в них электрического тока. Электромагнитные процессы в цепях могут быть описаны с помощью понятий: ток, напряжение (разность потенциалов), электродвижущая сила, заряд, магнитный поток, сопротивление, индуктивность, взаимная индуктивность и емкость.

Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии (сигналов).

Источники энергии (сигналов) предназначены для преобразования различных видов энергии в электрическую (турбо- и гидрогенераторы, аккумуляторы, электронные генераторы, термогенераторы, солнечные батареи, МГД-генераторы и др.).

Приемники энергии (сигналов) служат для преобразования электрической энергии в другие виды энергии (электродвигатели, электрические печи, электронно-лучевые трубки, радиоприемники и др.)

Кроме основных элементов, цепь содержит различные вспомогательные элементы, которые связывают источники с приемниками (линии передач, собственно провода), подавляют или усиливают определенную составляющую сигналов (фильтры, усилители), изменяют значения напряжений и токов (трансформаторы) и так далее.

У каждого элемента цепи имеется определенное число зажимов (полюсов), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Двухполюсные элементы (двухполюсники) имеют два зажима; к ним относятся источники энергии (за исключением многофазных и управляемых источников), резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности. Трехполюсные элементы — это транзисторы (полупроводниковые триоды) и электронные лампы (вакуумные триоды). Примеры четырехполюсных элементов — двухобмоточные трансформаторы, интегральные операционные усилители. Элементы цепи, имеющие более четырех зажимов, — это: многообмоточные трансформаторы; различные микромодули — твердотельные компоненты электронных схем и т. п. Элементы, имеющие более двух полюсов, называются многополюсными элементами (многополюсниками).

Различают активные и пассивные элементы цепи. К активным элементам относятся источники энергии. Активными элементами считают также транзисторы, операционные усилители, электронные лампы, которые способны усиливать электрический сигнал. К пассивным относят эле-

менты, в которых рассеивается или накапливается энергия (резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, трансформаторы).

Процессы, происходящие в элементах цепи, могут быть описаны алгебраическими или дифференциальными уравнениями, связывающими токи и напряжения на зажимах этих элементов. Коэффициенты, с помощью которых связывают токи и напряжения и их производные, называются параметрами элементов (например, индуктивность, емкость и сопротивление).

Если элемент цепи характеризуется линейными алгебраическими или линейными дифференциальными уравнениями, то его называют линейным. Параметры линейного элемента могут быть постоянными или изменяться во времени (параметрический элемент).

Если элемент цепи описывается нелинейными алгебраическими или нелинейными дифференциальными уравнениями, то он называется нелинейным. Параметры нелинейного элемента непостоянны, они зависят от значения тока, напряжения. Параметры нелинейного параметрического элемента зависят и от времени.

Во многих случаях параметры элемента рассматриваются как сосредоточенные (элементы с сосредоточенными параметрами), при этом считается, что напряжения и токи элементов не являются функциями пространственных координат, определяющих геометрические размеры элемента. Параметры элемента могут быть также распределенными (элементы с распределенными параметрами), такой элемент характеризуется уравнениями, в которых напряжения и токи зависят от пространственных координат.

Элементы электрической цепи могут удовлетворять или не удовлетворять принципу взаимности. Упрощенно этот принцип заключается в следующем: реакция цепи на участке 1 (например, изменение тока), вызванная возмущением на участке 2 (например, изменением напряжения), равна реакции на участке 2, вызванной таким же возмущением на участке 1. В соответствии с этим различают взаимные и невзаимные элементы. Примеры взаимных элементов — резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, трансформаторы; к невзаимным элементам относятся транзисторы, электронные лампы и другие.

Цепи, содержащие только взаимные элементы, называют взаимными. Если в цепи имеется хотя бы один невзаимный элемент, то цепь называется невзаимной.

Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Основное их свойство — применимость принципа наложения (суперпозиции), который читается следующим образом: реакция цепи при действии нескольких возбуждений равна сумме реакций, обусловленных каждым возмущением в отдельности. Если цепь имеет хотя бы один нелинейный элемент, то она называется нелинейной.

В любой электрической цепи, рассматриваемой как замкнутая система, сумма мощностей, генерируемых источниками электрической энергии,

равна сумме мощностей, потребляемых в цепи. Сказанное составляет суть баланса мощностей.

### Схема электрической цепи

Для упрощения математического описания цепи ее реальные элементы идеализируются. Идеализированному элементу цепи соответствует его математическая модель — схемный элемент. Любой реальной элемент цепи можно представить одним или совокупностью схемных элементов, соединенных определенным образом. Такую совокупность элементов (в частном случае один элемент) называют схемой замещения или эквивалентной схемой элемента электрической цепи при условии совпадения уравнений, описывающих эту схему и реальный элемент цепи.

Каждому схемному элементу соответствует условное геометрическое изображение. Соединение элементов реальной цепи можно представить соответствующим соединением схемных элементов. Геометрическое изображение соединения схемных элементов, отображающее соединение реальных элементов электрической цепи и ее свойства, называют схемой цепи.

В схеме выделяют ветви — участки, в любом поперечном сечении этого участка ток имеет одно и то же значение, и узлы — точки, в которых объединяются более двух ветвей.

### Двухполюсные элементы (активные и пассивные)



Рис. В.1.1

Любой двухполюсник условно представляется в виде схемы (рис. В.1.1).

Зажимами (полюсами) 1 и 2 двухполюсник присоединяется к другим элементам. Напряжение  $u$  отождествляют с разностью потенциалов на зажимах  $u_{12} = \phi_1 - \phi_2$ . Стрелками указаны положительные направления напряжения и тока. Эти направления выбирают произвольно. Любые соотношения, характеризующие взаимосвязь между напряжениями и токами

элемента (схемы в целом), имеют смысл лишь для выбранных положительных направлений. Положительное направление можно указать двойным индексом, например:  $u_{12}$  (рис. В.1.1), при этом  $-u_{21} = +u_{12}$ .

Если для любого  $t$  энергия  $W \geq 0$ , то соответствующий двухполюсник является потребителем энергии и называется пассивным. Существуют три типа пассивных двухполюсников: резистивный ( $R$ ), индуктивный ( $L$ ) и емкостный ( $C$ ).

Активный двухполюсник генерирует энергию. Для такого двухполюсника  $W < 0$ .

Реальные источники энергии — это источник ЭДС (напряжения) и источник тока.

*Источник ЭДС.* Источник ЭДС (напряжения) характеризуется значением электродвижущей силы ЭДС  $e$ , равной напряжению, т. е. разности потенциалов на зажимах при отсутствии тока через источник.

Если напряжение на зажимах источника по величине равно ЭДС при любом токе через источник  $u = e$ , то источник называется идеальным. Схема такого источника дана на рис. В.1.2.



Рис. В.1.2



Рис. В.1.3

Стрелка внутри кружка указывает положительное направление сторонних сил в источнике (положительное направление ЭДС). Если  $e$  не зависит от времени

$$e = E = \text{const},$$

то имеем источник постоянной ЭДС. У такого источника начало стрелки, указывающей положительное направление ЭДС, соответствует отрицательному зажиму. Схема реального источника постоянной ЭДС показана на рис. В.1.3.

Здесь  $r_0$  — внутреннее сопротивление. Напряжение на зажимах реального источника равно

$$u = E - r_0 i. \quad (1)$$

**Источник тока.** Источник тока характеризуется током  $J$  при короткозамкнутых зажимах (т. е. при отсутствии напряжения на зажимах источника). Если ток источника не зависит от напряжения, т. е.  $i = J$  при любых значениях напряжения на зажимах, то источник тока называется идеальным. Его схема дана на рис. В.1.4.



Рис. В.1.4

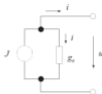


Рис. В.1.5

Двойная стрелка показывает положительное направление тока источника тока. Если  $J = const$ , то имеем источник постоянного тока. Схема реального источника тока показана на рис. В.1.5. Здесь  $g_s$  — внутренняя проводимость источника.

Реальный источник тока описывается следующим уравнением:

$$i = J - g_s u. \quad (2)$$

Схемы замещения реальных источников переменной ЭДС и тока в ряде случаев можно представить в виде рис. В.1.3 и рис. В.1.5.

**Эквивалентность источников.** Можно говорить о двух схемах замещения реального источника энергии (рис. В.1.3 и В.1.5). Эти схемы эквивалентны, если  $J = E/r_s$ ,  $g_s = 1/r_s$ , т. е. при одном и том же напряжении  $u$  (токе  $i$ ) токи  $i$  (напряжения  $u$ ) этих схем одинаковы. Другими словами, реальный источник ЭДС можно заменить реальным источником тока и остальная часть схемы «не почувствует» это.

Следует отметить, что идеальные источники не могут быть эквивалентно преобразованы.

### Основные уравнения цепей с сосредоточенными параметрами

Электромагнитные процессы в линейных электрических цепях протекают согласно общепознанному закону Ома и законам Кирхгофа.



Первый закон Кирхгофа гласит: *алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узле, равна нулю в любой момент времени* и записывается следующим образом:

$$\sum_i i_k = 0, \quad (3)$$

При этом с положительными знаками записываются токи, направленные от узла или из замкнутой поверхности, окружающей этот узел, в противном случае токи записываются с отрицательными знаками.

Первый закон Кирхгофа справедлив и для замкнутой поверхности, охватывающей несколько узлов. При этом в (3) суммируются токи ветвей, рассекаемых этой поверхностью. Уравнения (3) можно записать в виде

$$\sum_i i_k = \sum_i J_k, \quad (4)$$

где  $\sum_i i_k$  — алгебраическая сумма токов ветвей,  $\sum_i J_k$  — алгебраическая сумма токов источников тока. В (4) положительный знак присваивают  $i_k$ , направленному от узла, и  $J_k$ , направленному к узлу.

Уравнения (3) и (4) называются узловыми уравнениями.

Второй закон Кирхгофа читается следующим образом: *алгебраическая сумма напряжений всех ветвей (элементов) контура равна нулю в любой момент времени* и записывается следующим образом:

$$\sum_k u_k = 0, \quad (5)$$

С положительным знаком берется напряжение, положительное направление которого совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура.

Если в (5) напряжения источников перенести в правую часть и заменить их на ЭДС, то второй закон Кирхгофа будет иметь вид:

$$\sum_k u_k = \sum_k e_k, \quad (6)$$

Т. е. алгебраическая сумма напряжений на пассивных элементах  $\sum_k u_k$  равна алгебраической сумме ЭДС источников ЭДС контура  $\sum_k e_k$ . В (6)

с положительным знаком записывают напряжения и ЭДС, направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура.

Уравнения (5) и (6) называются контурными уравнениями.

Следует заметить, что если закон Ома характеризует физические свойства элементов цепи, то законы Кирхгофа позволяют описать их способ соединения.

### Граф электрической цепи

Электрическая цепь характеризуется не только совокупностью и природой элементов, из которых она состоит, но и способом их соединения. Рассмотрим соотношения электрической цепи, обусловленные способом соединения элементов.

Пусть цепь состоит из двухполюсников. В простейшем случае эти элементы могут быть соединены последовательно или параллельно.

При последовательном соединении любые два соседних элемента имеют общий зажим, токи во всех элементах одинаковы. Напряжение на зажимах всего соединения равно алгебраической сумме напряжений отдельных элементов:

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_k u_k. \quad (7)$$

При параллельном соединении все элементы присоединяются к одной и той же паре узлов, поэтому напряжения на всех элементах одинаковы. Ток в неразветвленной части цепи равен алгебраической сумме токов всех элементов:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sum_k i_k. \quad (8)$$

Соотношения (7) и (8) справедливы для соединений любых элементов (резистивных, индуктивных и т. д.) и определяются способом соединения элементов или, как говорят, геометрией (топологией) соединений.

Переход от схемы электрической цепи к графу, описывающему топологию этой цепи, является решающим моментом при разработке алгоритмов расчета электрических цепей в системе *Mathematica*.

Литература по теории графов обширна и многообразна [4, 5, 6, 7, 8]. Теория графов изучает свойства или инварианты графов. Среди свойств интерес представляют связность, структура циклов и цикломатическое число.

Граф можно представить как отображение  $G$ , которое переводит множество дуг ( $P$ ) в множество вершин ( $Q$ ):

$$p \xrightarrow{G} q \times q.$$

Совокупность двух множеств: множество дуг и множество вершин, называется графом.

Термин «ветвь» в электротехнике соответствует термину «дуга» при описании топологии электрической цепи, а термин «узел» — термину «вершина». Следует особо подчеркнуть, что если в электротехнике под узлом понимается соединение более чем двух ветвей, в расчетах с использо-

ванием пакета *Mathematica* узел может представлять собой также и место соединения двух ветвей. Каждая дуга связывает пару вершин. В свою очередь, в вершине соединяются дуги.

Построение графа осуществляется следующим образом.

Т. к. топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь, каждую ветвь изображают дугой, в большинстве случаев это — отрезок прямой. На рис. В.1.6 показан граф электрической цепи, изображенной на рис. В.1.7.



Рис. В.1.6

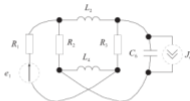


Рис. В.1.7

На графе источники ЭДС и тока не изображаются. При этом ветвь с источником ЭДС показывается дугой, а ветвь с источником тока вообще не показывается.

Вершины и дуги графа нумеруются, причем последним может быть дана определенная ориентация, указанная стрелками и, как правило, совпадающая с положительными направлениями токов в ветви схемы цепи. Граф, у которого все дуги ориентированы, называется ориентированным графом или орграфом. В противном случае — неориентированным.

Графы, между дугами и вершинами которых имеется взаимно-однозначное соответствие, т. е. дуге, связывающей пару вершин в одном графе, отвечает дуга, связывающая пару соответствующих вершин в другом графе, называют изоморфными.

Граф называют планарным, если хотя бы на одном из его изоморфных представлений у его дуг нет других общих точек кроме вершин.

Подмножества элементов графа называют подграфом. Как часть графа, подграфами могут быть: одна дуга, одна вершина, любое множество дуг и вершин графа.

В теории цепей различают подграфы: путь, контур, дерево, дуга связи и сечение.

Путь — это упорядоченная последовательность дуг, в которой каждые две соседние дуги имеют общую вершину, причем любая дуга и любая

вершина на этом пути встречается один раз. На рис. В.1.6 имеем пути: 3–5–4; 2–1–5 и т. д.

Контур — замкнутый путь, в котором одна из вершин является начальной и конечной вершиной пути. На рис. В.1.6 имеем контуры: 2–3–6, 2–3–5–4 и т. д.

Если между любой парой вершин графа существует путь, то такой граф называется связным. В противном случае граф — несвязный и состоит из нескольких связных подграфов. Граф называется полным, если в нем каждая вершина соединена дугами со всеми остальными вершинами.

Далее будем рассматривать планарные (связные и несвязные) графы.



Рис. В.1.8

Остовным деревом связного графа называют связный подграф, содержащий все вершины графа, но ни одного контура. Деревья графа (рис. В.1.6) показаны на рис. В.1.8 (для графа, показанного на рис. В.1.6). Как видно, выбор дерева в графе неоднозначен. Для любого дерева графа однозначно определяется количество дуг  $q-1$ , если количество вершин графа равно  $q$ .

Дуги графа, которые дополняют дерево до исходного графа, называются дугами связи (дополнениями дерева). Дуги связи деревьев (рис. В.1.8) показаны на рис. В.1.9.

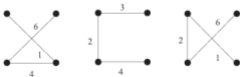


Рис. В.1.9

Выбор дерева обуславливает разбиение всех дуг графа на дуги дерева и дуги, образующие дополнение.

Если граф содержит  $P$  дуг и  $Q$  вершин, то количество дуг связи графа равно  $V = p - (q - 1)$ .

Сечением графа называется множество дуг, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых в частном случае может быть изолированной вершиной. Сечение можно изобразить в виде следа замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие дуги. Такие поверхности  $(S_1, S_2)$  показаны на рис. В.1.10.



Рис. В.1.10



Рис. В.1.11

Главным контуром называется контур, состоящий из дуг дерева и только одной дуги связи. Число главных контуров равно  $p - (q - 1)$ .

Главным сечением называется сечение, состоящее из дуг связи и одной дуги дерева. Количество главных сечений  $q - 1$ .

На рис. В.1.11 жирными линиями показано дерево. Главные контуры: 2-3-6; 3-5-1; 2-3-5-4. Главные сечения изображены поверхностями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ .

Вопрос о количестве независимых уравнений, которые можно составить по законам Кирхгофа, можно решить, применяя понятие дерева графа. Можно показать, что:

- уравнения по I закону Кирхгофа, составленные для главных сечений, — независимы;
- уравнения по II закону Кирхгофа, составленные для главных контуров, — независимы.

В связи с этим по I закону Кирхгофа можно составить  $q - 1$  независимых уравнений, а по II закону Кирхгофа —  $p - (q - 1)$  независимых уравнений.

Как можно заметить, при увеличении количества ветвей  $P$  и узлов  $Q$ , т. е. при усложнении электрической цепи, количество уравнений, составленных по законам Кирхгофа, возрастает. Возможны два варианта выхода из данного положения: 1) решение уравнений Кирхгофа выполнять

с привлечением средств вычислительной техники; 2) использовать специальные методы расчета (например, метод узловых потенциалов и метод контурных токов). И в первом и во втором вариантах массивы данных и уравнения цепи представляются в матричной форме, например, токи и напряжения ветвей представляются в виде векторов (матриц-столбцов)

$\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_p)^T$  и  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_p)^T$ , где индекс  $T$  — знак транспонирования. Топология схемы цепи учитывается с помощью топологических матриц.

### Топологические матрицы графа

В соответствии с видом уравнений Кирхгофа различают три топологические матрицы: матрицу соединений  $\mathbf{A}$  (другие названия: узловая матрица, матрица инцидентий), матрицу сечений  $\mathbf{Q}$  и матрицу контуров  $\mathbf{B}$ .

Элементы топологической матрицы равны +1, -1, 0. Значения этих элементов определяются только структурой графа.

Матрица соединений  $\mathbf{A}$  — это таблица коэффициентов уравнений, составленных по I закону Кирхгофа для вершин орграфа. Строки матрицы соответствуют вершинам (число строк равно числу независимых вершин, т. е.  $q - 1$ ), столбцы — дугам. Если записать матрицу соединений следующим образом:  $A = [a_{ij}]$ , то  $i$  — это номер строки (вершины),  $j$  — номер столбца (дуги).

*Правило составления  $\mathbf{A}$ :*  $a_{ij} = 1$ , если дуга  $j$  соединена с вершиной  $i$  и направлена от вершины  $i$ ;  $a_{ij} = -1$ , если дуга  $j$  соединена с вершиной  $i$  и направлена к вершине  $i$ ;  $a_{ij} = 0$ , если дуга  $j$  не соединена с вершиной  $i$ .

Матрица  $\mathbf{A}$  для ориентированного графа (рис. В.1.12), соответствующего схеме на рис. В.1.7, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица сечений  $\mathbf{Q}$  — это таблица коэффициентов уравнений, составленных по I закону Кирхгофа для сечений. Строки матрицы соответствуют сечениям, столбцы — дугам. Если записать матрицу сечений следующим образом:  $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$ , то  $i$  — это номер строки (сечения),  $j$  — номер столбца (дуги).



Рис. В.1.12

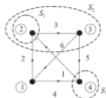


Рис. В.1.13

*Правило составления  $\mathbf{Q}$* :  $q_{ij} = 1$ , если дуга  $j$  содержится в сечении  $i$  и направлена согласно с направлением сечения (направлением для замкнутой поверхности);  $q_{ij} = -1$ , если дуга  $j$  содержится в сечении  $i$  и направлена противоположно направлению сечения;  $q_{ij} = 0$ , если дуга  $j$  не содержится в сечении  $i$ . Количество строк матрицы  $\mathbf{Q}$  равно  $q-1$  — количеству независимых вершин.

Если матрица  $\mathbf{Q}$  составлена для главных сечений, ее называют матрицей главных сечений. При этом за положительное направление сечения берут направление дуги дерева данного сечения.

Матрица  $\mathbf{Q}$  для ориентированного графа, показанного на рис. В. 1.13, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix},$$

где  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  — независимые сечения.

Матрица контуров  $\mathbf{B}$  — это таблица коэффициентов уравнений, составленных по II закону Кирхгофа для ориентированного графа. Строки матрицы соответствуют контурам, столбцы — дугам.

По аналогии с матрицами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{Q}$  матрицу  $\mathbf{B}$  можно записать следующим образом:  $\mathbf{B} = b_{ij}$ , где  $i$  — это номер строки (контур),  $j$  — номер столбца (дуги).

*Правило составления  $\mathbf{B}$* :  $b_{ij} = 1$ , если дуга  $j$  содержится в контуре  $i$  и направление дуги совпадает с направлением обхода контура;  $b_{ij} = -1$ , если дуга  $j$  содержится в контуре  $i$  и ее направление противоположно обходу контура;  $b_{ij} = 0$ , если дуга  $j$  не содержится в контуре  $i$ .

Количество строк матрицы  $\mathbf{B}$  равно числу независимых контуров  $p - (q - 1)$ .

Матрицу  $\mathbf{B}$ , записанную для главных контуров, называют матрицей главных контуров. При этом за направление обхода контура принимают направление дуги связи этого контура.

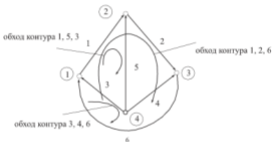


Рис. В.1.14

Матрица  $\mathbf{B}$  для ориентированного графа, показанного на рис. В.1.14, соответствующего схеме на рис. В.1.15, выглядит следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{B}$  позволяют выразить алгебраическим языком топологию схем, что важно при анализе сложных цепей с помощью компьютера.

Топологические матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{B}$ , составленные для одного и того же графа, связаны друг с другом соотношениями:  $\mathbf{AB}^T = 0$ ,  $\mathbf{QB}^T = 0$ , здесь  $T$  — знак транспонирования.



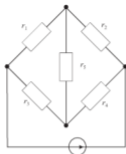


Рис. В.1.15

## Расчет сложных цепей методом уравнений Кирхгофа в матричной форме

### Уравнения по I закону Кирхгофа

Пусть имеется схема некоторой электрической цепи  $S$ , представляющая собой набор ветвей  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , соединенных определенным образом. Построим для этой схемы граф  $G = G(S)$ . Для этого каждому  $j$ -му узлу цепи  $S$  (в зависимости от расчетной необходимости точка соединения двух ветвей может назначаться или не назначаться узлом) поставим в соответствие вершину  $V_j$ , а каждой ветви  $a_i$  — дугу  $x_i$ , соединяющую соответственные вершины.

Введем произвольную ориентацию дуг графа  $G$ . В результате получим ориентированный граф  $D$  с дугами  $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ , где  $p$  — номер дуги.

Обозначим  $I_i$  (где  $i = 1, 2, \dots, p$ ) — ток, протекающий по ветви  $a_i$ ,  $U_i$  — напряжение на ветви  $a_i$ .

Поскольку направление тока заранее предсказать не всегда возможно, то введенную ориентацию на дугах графа  $G$  будем рассматривать как условное направление токов. После определения  $I_i$  знак этой величины подскажет истинное направление тока по ветви  $a_i$  (где  $i \in \{1, \dots, p\}$ ), а именно если знак  $I_i$  «-», то направление было поставлено неверно, и его нужно изменить на противоположное, если «+», то первоначально

выбранное направление сохраняется. Аналогично знак величины  $U_j$  также будет определяться выбранной ориентацией на дуге  $x_j$ , а именно: под  $U_j$  будем понимать величину, получаемую вычитанием из потенциала узла ветви  $a_j$ , соответствующего началу дуги  $x'_j$ , потенциала узла, соответствующего концу дуги  $x'_j$ .

Для любых векторов  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$ ,  $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_m)$  из  $\mathbf{R}^m$  ( $\mathbf{R}^m$  — пространство векторов длины  $m$ , элементы которых являются вещественными числами) введем обозначение скалярного произведения векторов  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ :  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^m A_i B_i$ .

Составим уравнения по I закону Кирхгофа. Эти уравнения составляют относительно каждой вершины ориентированного графа  $\mathbf{D}$  с учетом условных направлений токов, совпадающих с ориентацией дуг графа  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{D})\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

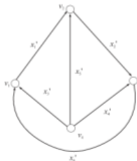


Рис. В.1.16

где  $\mathbf{A}(\mathbf{D})$  — матрица соединений (инцидентности) ориентированного графа  $\mathbf{D}$ .

**Пример 1.** Требуется записать уравнения по I закону Кирхгофа для электрической цепи  $S$ , схема которой приведена на рис. В.1.15.

Электрической цепи  $S$  соответствует граф  $G$ , изображенный на рис. В.1.16, где дуга  $x'_i$  соответствует ветви с сопротивлением  $r_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , а дуга  $x'_6$  — ветви с источником ЭДС.

Введем ориентацию на дугах графа  $G$ , показанную на рис.В.1.16, в результате получим некоторый оргграф  $D$ .

В соответствии с выбором оргграфа  $D$  составим матрицу соединений

$$\mathbf{A}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение  $\mathbf{A}(D)\mathbf{I} = \mathbf{0}$  соответствует системе уравнений по I закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 - I_6 &= 0 \\ -I_1 + I_2 - I_5 &= 0 \\ -I_2 - I_4 + I_6 &= 0 \\ I_3 + I_4 + I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Из определения матрицы  $\mathbf{A}(D)$  следует, что для произвольно ориентированного графа  $D$  сумма всех строк матрицы  $\mathbf{A}(D)$  дает нулевую строку, а следовательно, любая строка матрицы  $\mathbf{A}(D)$  является линейной комбинацией остальных строк. Таким образом, из матричного уравнения  $\mathbf{A}(D)\mathbf{I} = \mathbf{0}$  можно исключить любое уравнение (например, третье) и получить при этом систему, равносильную исходной. Возникает вопрос: будет ли после исключения одного уравнения из  $\mathbf{A}(D)\mathbf{I} = \mathbf{0}$  оставшаяся система уравнений линейно независимой? Может быть показано, что если  $G = G(S)$  — связный граф, то исключение одного уравнения из системы  $\mathbf{A}(D)\mathbf{I} = \mathbf{0}$  дает линейно независимую систему уравнений (доказательство см. [13]).

### Уравнения по II закону Кирхгофа

Вначале установим соответствие между некоторыми понятиями и терминами, используемыми в теории матриц, графов и в электротехнике.

Произвольный замкнутый путь, в котором все дуги и вершины встречаются только один раз, будем называть простым циклом. Простому циклу в электротехнике соответствует независимый контур. Пусть  $\mu$  — некоторый простой цикл графа  $G$ , а  $Z^m$  — множество  $m$ -мерных векто-

ров с целочисленными координатами. Обозначим через  $Z_G^n$  множество всех векторов-циклов графа  $G$ . Вектор  $C(\mu) \in Z_G^n$  называется вектором-циклом, соответствующим циклу  $\mu$ . В матрице контуров каждому циклу соответствует определенная строка. Независимая система циклов  $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$  называется цикловым базисом графа  $G$ , если любой цикл из  $G$  является линейной комбинацией циклов этой системы. Количество элементов в цикловом базисе графа  $G$  — величина постоянная, не зависящая от выбора циклового базиса и равная максимальному числу элементов в независимых системах циклов графа  $G$ . Эта величина совпадает с геометрической характеристикой графа  $G$ : количество элементов циклового графа (цикломатическое число) равно

$$v(G) = p(G) - q(G) + k(G),$$

где  $p(G)$  — количество дуг графа  $G$ ,  $q(G)$  — количество вершин, а  $k(G)$  — количество компонент связности графа. В большинстве случаев для реальных схем электрических цепей, описываемых связными графами,  $k(G) = 1$ . Отметим, что в лабораторной работе 3 будет рассмотрен пример схемы электрической цепи, описываемой несвязным графом, для которого  $k(G) = 2$ .

Для расчета электрической цепи одних уравнений по I закону Кирхгофа недостаточно, поэтому необходимо дополнительно составить уравнения по II закону Кирхгофа  $(\mathbf{B}(\mu), \mathbf{U}) = 0$ . Учитывая, что  $\forall \mathbf{B} \in Z_G^n$ , можно записать

$$(\mathbf{B}, \mathbf{U}) = 0, \quad (9)$$

При этом систему уравнений

$$\mathbf{B}(G) \mathbf{U} = 0 \quad (10)$$

будем называть *базисной системой* контурных уравнений для напряжений. Поясним, что  $\mathbf{B}(\mu)$  — это вектор-строка, а  $\mathbf{B}(G)$  — матрица. Поскольку ранг матрицы  $\mathbf{B}(G)$  равен количеству уравнений в (10), то они линейно независимы. Это следует из определения цикломатической матрицы графа  $G$ , под которой понимается матрица, строками которой являются вектор-циклы циклового базиса графа  $G$ . В электротехнике цикломатическая матрица соответствует матрице независимых контуров. Ранг матрицы  $\mathbf{B}(G)$  равен количеству ее строк. С другой стороны, по определению  $\mathbf{B}(G)$  любое уравнение из (9) является линейной комбинацией уравнений базисной системы (10). Из указанных свойств базисной системы уравнений следует, что для расчета электрической цепи удобнее всего пользоваться базисной системой уравнений Кирхгофа для напряжений.

**Пример 2.** Требуется записать базисную систему уравнений по II закону Кирхгофа для электрической цепи  $S$ , схема которой представлена на рис. В.1.15.

Сначала, используя алгоритм [13, с. 221], определим цикловой базис графа  $G$  (рис. В.1.15). Имеем

$$v(G) = p(G) - q(G) + k(G) = 6 - 4 + 1 = 3 > 0,$$

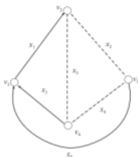


Рис. В.1.17

то есть цикловой базис графа  $G$  существует. Выделим произвольно остовное дерево  $T$  графа  $G$ . На рис. В.1.17 приведено изображение  $T$ , здесь пунктирными линиями указаны дуги, удаленные из  $G$  для выделения дерева  $T$ .

При выделении остовного дерева  $T$  из графа  $G$  было удалено всего три дуги  $x_2, x_4, x_3$  (дуги связи). Добавляя поочередно к  $T$  каждую из удаленных дуг и выделяя из получаемого таким образом графа простой цикл (независимый контур в схеме), получаем следующие циклы:

$$\mu_1 = v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 x_6 v_1; \quad \mu_2 = v_1 x_5 v_4 x_4 v_3 x_6 v_1;$$

$$\mu_3 = v_1 x_1 v_2 x_5 v_4 x_3 v_1,$$

составляющие цикловой базис графа  $G$ , где  $v_1, v_2, v_3, v_4$  — вершины графа.

Учитывая выбранные направления обхода контуров (рис. В.1.14), выпишем соответствующие им вектор-циклы:

$$\mathbf{V}(\mu_i) = (1, 1, 0, 0, 0, 1);$$

$$\mathbf{B}(\mu_2) = (0, 0, -1, 1, 0, 1);$$

$$\mathbf{B}(\mu_3) = (1, 0, 1, 0, -1, 0).$$

Тогда

$$\mathbf{B}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и при этом базисная система уравнений Кирхгофа для напряжений  $\mathbf{B}(\mathbf{G})\mathbf{U} = \mathbf{0}$  имеет вид

$$U_1 + U_2 + U_6 = 0; \quad -U_3 + U_4 + U_6 = 0; \quad U_1 + U_3 - U_5 = 0.$$

Заметим, что столбцы цикломатической матрицы  $\mathbf{B}(\mathbf{G})$ , соответствующие дугам  $x_2, x_4, x_5$ , не вошедшим в  $\mathbf{T}$ , образуют диагональную квадратную матрицу порядка  $v(\mathbf{G})$  ( $v(\mathbf{G})$  — цикломатическое число), элементы главной диагонали которой принадлежат множеству  $\{-1, 1\}$ , и, следовательно, переменные  $U_2, U_4, U_5$ , соответствующие дугам  $x_2, x_4, x_5$ , легко выражаются через остальные переменные:

$$\begin{aligned} U_2 &= -U_1 - U_6; & U_4 &= U_3 - U_6; \\ U_5 &= U_1 + U_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Переменные  $U_2, U_4, U_5$  в системе уравнений (11) называются *базисными*, а  $U_1, U_3, U_6$  — *свободными*.

### Расчет сложных цепей методом узловых потенциалов

В методе уравнений Кирхгофа искомыми переменными являются токи в ветвях и соответственно с этим количество подлежащих решению уравнений равно числу ветвей, т. е.  $P$ .

Число решаемых (совместно) уравнений можно уменьшить, если в качестве искомого величины принять потенциалы узлов. Знание этих потенциалов позволяет найти все токи в схеме. Уравнения с узловыми потенциалами (узловые уравнения) вытекают из первого закона Кирхгофа; количество этих уравнений равно количеству независимых узлов,  $q - 1$ .

Вначале принимают потенциал какого-либо узла, который в дальнейшем называется базисным, равным нулю. Из-за этого в матрице  $\mathbf{A}$  исчезает соответствующая строка.

Далее составляются и решаются узловые уравнения  $\mathbf{G}^{(q)}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{J}^{(q)}$ , где  $\mathbf{G}^{(q)} = \mathbf{A}\mathbf{G}^{(p)}\mathbf{A}^T$  — матрица узловых проводимостей,  $\boldsymbol{\varphi}$  — матрица-

столбец узловых потенциалов,  $\mathbf{G}^{(q)}$  — диагональная матрица проводимостей ветвей,  $\mathbf{J}^{(q)} = \mathbf{A}\mathbf{J}^{(b)} - \mathbf{A}\mathbf{G}^{(b)}\mathbf{E}^{(b)}$  — матрица узловых токов,  $\mathbf{J}^{(b)}$  — матрица токов источников тока в ветвях,  $\mathbf{E}^{(b)}$  — матрица ЭДС источников ЭДС в ветвях.

Определив потенциалы узлов, находят напряжения на ветвях:  $\mathbf{U}^{(b)} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}$ . Токи в ветвях вычисляют, используя закон Ома.

Замечания:

- Матрица узловых проводимостей  $\mathbf{G}^{(q)}$  имеет порядок  $(q-1) \times (q-1)$ . Диагональные элементы этой матрицы (их называют собственными узловыми проводимостями) — это суммы проводимостей (с положительным знаком) ветвей, присоединенных к соответствующему узлу.
- Элемент  $\mathbf{G}_{ij}$  матрицы узловых проводимостей ( $i \neq j$ ) равен сумме проводимостей ветвей, присоединенных между узлами  $i$  и  $j$ , взятой с отрицательным знаком.  $\mathbf{G}_{ij}$  ( $i \neq j$ ) называются общими узловыми проводимостями.
- Матрица  $\mathbf{G}^{(q)}$  симметрична, т. е.  $\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}_{ji}$  и  $\mathbf{G}^{(q)} = [\mathbf{G}^{(b)}]^T$ .

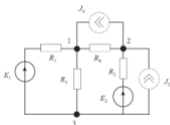


Рис. В.1.18



Рис. В.1.19

- Элемент  $\mathbf{J}_i^{(q)}$  матрицы узловых токов равен алгебраической сумме токов источников тока, присоединенных к  $i$ -тому узлу, включая токи источников тока, эквивалентные источникам ЭДС. При этом с положительным знаком записывают токи, направленные к узлу. Знаки элементов всех матриц не зависят от ориентации дуг графа.

**Пример 3.** Рассмотрим цепь на рис. В1.18. Она имеет три узла и 4 ветви. Ориентация ветвей на графе (рис. В1.19) схемы выбрана произвольно. Узел 3 берем в качестве базисного ( $\varphi_3 = 0$ ).

Узловая матрица равна

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а диагональная матрица проводимостей ветвей —

$$\mathbf{G}^{(p)} = \begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & G_3 & \\ & & & G_4 \end{pmatrix}.$$

где  $G_k = \frac{1}{R_k}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Матрица узловых проводимостей

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(u)} = \mathbf{A}\mathbf{G}^{(p)}\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & G_3 & \\ & & & G_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -G_1 & 0 & G_3 & G_4 \\ 0 & -G_2 & 0 & -G_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_2 + G_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица токов источников тока:  $\mathbf{J}^{(p)} = (0 \quad -J_2 \quad 0 \quad J_4)^T$ .

Матрица ЭДС источников ЭДС:  $\mathbf{E}^{(p)} = (E_1 \quad E_2 \quad 0 \quad 0)^T$ .

Матрица узловых токов

$$\mathbf{J}^{(u)} = \mathbf{A}[\mathbf{J}^{(p)} - \mathbf{G}^{(p)}\mathbf{E}^{(p)}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -G_1 E_1 \\ -J_2 & -G_2 E_2 \\ 0 & -0 \\ J_4 & -0 \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} G_1 E_1 + J_4 \\ +J_2 + G_2 E_2 - J_4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, узловые уравнения имеют вид

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1^{(q)} \\ J_2^{(q)} \end{pmatrix},$$

где

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_4, \quad G_{12} = -G_4, \quad G_{21} = -G_4, \quad G_{22} = G_2 + G_4;$$

$$J_1^{(q)} = J_4 + G_1 E_1, \quad J_2^{(q)} = +J_2 - J_4 + G_2 E_2.$$

Находим токи.

$$I_{R_1} = G_1 (U_{31} + E_1) = \frac{1}{R_1} (0 - \varphi_1 + E_1),$$

$$I_{R_3} = G_3 U_{31} = -\frac{1}{R_3} \varphi_1,$$

$$I_{R_2} = G_2 (U_{32} + E_2) = \frac{1}{R_2} (0 - \varphi_2 + E_2), \quad I_{R_4} = G_4 U_{12} = \frac{1}{R_4} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

### Расчет сложных цепей методом контурных уравнений

В качестве искоемых переменных можно принять токи ветвей, соответствующих дугам связи, или так называемые контурные токи. Знание контурных токов позволяет найти все реальные токи в схеме.

Уравнения с контурными токами (контурные уравнения) получают на основе второго закона Кирхгофа; их число равно числу независимых уравнений, составленных для контуров, т. е.  $k = p - (q - 1)$ .

Контурные уравнения в матричной форме имеют вид:  $\mathbf{R}^{(k)} \mathbf{I}^{(k)} = \mathbf{E}^{(k)}$ , где  $\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{(p)} \mathbf{B}^T$  — матрица контурных сопротивлений,  $\mathbf{R}^{(p)}$  — диагональная матрица сопротивлений ветвей,  $\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{B} \mathbf{E}^{(p)} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{(p)} \mathbf{J}^{(p)}$  — матрица контурных ЭДС,  $\mathbf{E}^{(p)}$  — матрица ЭДС источников ЭДС ветвей,  $\mathbf{J}^{(p)}$  — матрица токов источников тока ветвей.

Рассчитав контурные токи, можно определить токи в ветвях по формуле:  $\mathbf{I}^{(p)} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}^{(k)}$ .

*Замечания:*

- Матрица контурных сопротивлений — квадратная матрица порядка  $(k \times k)$ . Диагональные элементы матрицы называются собственными контурными сопротивлениями, собственное контурное сопротивление равно сумме сопротивлений ветвей соответствующего контура с положительным знаком. Недиагональные элементы  $R_{ij}$  ( $i \neq j$ ) называются общими контурными сопротивлениями. Общее контурное сопротивление  $R_{ij}$  равно сопротивлению ветви, общей для контуров  $i$  и  $j$ , и записывается с положительным знаком, если контурные токи  $I_i^{(k)}$  и  $I_j^{(k)}$  в общей ветви направлены одинаково.
- Матрица  $\mathbf{R}^{(k)}$  симметрична, т. е.  $R_{ij} = R_{ji}$ ,  $[\mathbf{R}^{(k)}]^T = \mathbf{R}^{(k)}$ .

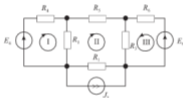


Рис. В.1.20

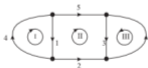


Рис. В.1.21

- Элемент  $E_j^{(k)}$  матрицы контурных ЭДС равен алгебраической сумме ЭДС источников ЭДС  $i$ -го контура, включая ЭДС источников, эквивалентных источникам тока. При этом с положительным знаком записывают ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура. Следовательно, контурные уравнения можно составить непосредственно из рассмотрения схемы.

**Пример 4.** Рассмотрим цепь, показанную на рис. В.1.20. Схема цепи имеет четыре узла и шесть ветвей. Число независимых контуров  $k = p - (q - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$ , контуры обхода показаны стрелками и римскими цифрами. Граф с выбранным деревом (ветви 1, 2, 3) показан на рис. В.1.21.

Контурная матрица равна

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица сопротивлений ветвей:

$$\mathbf{R}^{(v)} = \begin{pmatrix} R_1 & & & & & \\ & R_2 & & & & \\ & & R_3 & & & \\ & & & R_4 & & \\ & & & & R_5 & \\ & & & & & R_6 \end{pmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)} &= \mathbf{B}\mathbf{R}^{(v)}\mathbf{B}^T = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & & & & & \\ & R_2 & & & & \\ & & R_3 & & & \\ & & & R_4 & & \\ & & & & R_5 & \\ & & & & & R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ -R_1 & -R_2 & R_3 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 & -R_2 & 0 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_3 + R_5 & R_3 \\ 0 & R_3 & R_3 + R_6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица ЭДС источников ЭДС ветвей:

$$\mathbf{E}^{(v)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad E_4 \quad 0 \quad -E_6)^T.$$

Матрица токов источников тока ветвей:

$$\mathbf{J}^{(v)} = (0 \quad -J_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.$$

Матрица контурных ЭДС:

$$\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{B} \left[ \mathbf{E}^{(k)} - \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{J}^{(k)} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +R_2 J_2 \\ 0 & -0 \\ E_4 & -0 \\ 0 & -0 \\ -E_6 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_4 \\ -R_2 J_2 \\ -E_6 \end{pmatrix}.$$

Матрица контурных токов

$$\mathbf{I}^{(k)} = \left( I_1^{(k)} \quad I_2^{(k)} \quad I_3^{(k)} \right)^T.$$

Таким образом, контурные уравнения имеют вид

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1^{(k)} \\ I_2^{(k)} \\ I_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^{(k)} \\ E_2^{(k)} \\ E_3^{(k)} \end{pmatrix},$$

где

$$R_{11} = R_1 + R_4; \quad R_{12} = R_{21} = -R_1; \quad R_{13} = R_{31} = 0; \quad R_{22} = R_1 + R_2 + R_3 + R_5;$$

$$R_{23} = R_{32} = R_3; \quad R_{33} = R_3 + R_6; \quad E_1^{(k)} = E_4; \quad E_2^{(k)} = -R_2 J_2; \quad E_3^{(k)} = -E_6.$$

В этом примере контурные токи  $I_1^{(k)}$ ,  $I_2^{(k)}$ ,  $I_3^{(k)}$  совпадают с токами 4, 5, 6, т. е. с токами ветвей, соответствующих дугам связи (рис. В.1.21).

Токи в других ветвях находим по схеме цепи, зная контурные токи:

$$I_1 = I_1^{(k)} - I_2^{(k)}, \quad I_3 = I_2^{(k)} + I_3^{(k)}, \quad I_2 = -I_2^{(k)} - J_2.$$

---

## Вводное занятие 2.

### Основные сведения о системе Mathematica

В вводном занятии 2 приводятся необходимые сведения о системе *Mathematica* и описаны основные функции пакета, необходимые для моделирования линейных электрических цепей и разработки алгоритмов расчетов параметров электрических цепей постоянного и переменного тока. При изложении материала авторы следовали структуре [17], из которой позаимствовали некоторые из примеров.

Система *Mathematica* — одна из систем компьютерной алгебры общего назначения. Название «компьютерная алгебра» указывает на то, что большинство используемых в системе алгоритмов основано на использовании методов современной алгебры и теории чисел.

Ядро системы содержит три блока вычислений:

- численные вычисления неограниченной точности (*безошибочные вычисления*) с целыми, рациональными, вещественными и комплексными числами;
- алгебраические (*символьные*) вычисления с многочленами, перестановками, векторами, матрицами и т. д.;
- логические и структурные манипуляции с высказываниями, последовательностями, списками, множествами и т. д.

Кроме этого в системе *Mathematica* можно проводить все обычные в математике и ее приложениях аналитические вычисления:

- численное и символьное дифференцирование, интегрирование, решение дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных и т. д.;
- доказательство несложных теорем, включая доказательство всех теорем из школьного курса геометрии;
- логическую обработку и преобразование текстов любой природы;
- анализ и редактирование изображений, любые геометрические и графические построения — вплоть до создания мультфильмов;
- статистическую обработку численных, текстовых, логических и графических данных;
- создание баз данных, электронных энциклопедий, интерактивных справочников, учебников и задачников по любой области знания;

- математическое моделирование любых процессов, компьютерный эксперимент;
- разработку, тестирование и анализ алгоритмов, компьютерных программ и прикладных пакетов и многое другое.

### Сравнение с другими известными системами

Система *Mathematica* — система компьютерной алгебры, которая является языком программирования сверхвысокого уровня, которая так же соотносится с C++, VisualBasic, Delphi или Java, как эти последние соотносятся с языком Ассемблера (или даже программированием в кодах). *MatLab* или *Statistica* — специализированные пакеты численных вычислений, *Mathcad* — система для работы с текстом, содержащим формулы (научный калькулятор).

Каждая из больших универсальных систем компьютерной алгебры использует свой собственный язык, состоящий из нескольких тысяч слов. Следующие факторы побуждают считать их языками сверхвысокого уровня по отношению ко всем традиционным языкам программирования:

- по лексическому составу эти языки в 20–50 раз больше любого традиционного языка (Fortran, Lisp, Pascal, Delphi или Java);
- по гибкости и выразительной силе эти языки превосходят все традиционные языки, так как они не только поддерживают все когда-либо использовавшиеся стили программирования, но и вводят громадное количество математических конструкций, ранее в программировании не встречавшихся;
- программирование в этих языках ближе к живому языку и реальной математической практике, чем программирование на любом из традиционных языков.

Знание высокоуровневых языков компьютерной алгебры, таких как *Mathematica*, практически отменяет необходимость изучения языков программирования низкого уровня, таких как Fortran, Pascal, Java или Delphi.

Лексическая особенность языков высокого уровня — использование слов, имеющих несколько значений, во многих случаях — несколько десятков значений (например, в языке *Mathematica* функция Integrate).

### Достоинства системы *Mathematica*

1. Простота использования.
2. Высокая вычислительная эффективность.

3. Эффективная генерация графики с разрешимостью самого высокого уровня.
4. Близость используемого языка к реальной математической практике.
5. Богатство и гибкость языка.
6. Высочайшая степень унификации.
7. Высокая предсказуемость.
8. Неограниченная расширяемость.
9. Полная независимость от платформы.
10. Совместимость различных версий (до версии 6).
11. Использование явных форматов.

### Возможности систем компьютерной алгебры

Приведем список операций [17], которые, по утверждению разработчиков система *Mathematica*, в состоянии за 3–4 секунды выполнить на бытовом компьютере. Система компьютерной алгебры может:

- производить арифметические операции с целыми числами, содержащими несколько сотен миллионов десятичных цифр;
- учесть миллион десятичных знаков таких чисел, как  $\pi$  или  $e$ ;
- разложить по степеням многочлен, содержащий миллион слагаемых;
- разложить на множители многочлен от четырех переменных, содержащий сто тысяч слагаемых;
- решить систему квадратичных неравенств, имеющую несколько тысяч независимых компонент;
- найти целые корни разреженного многочлена степени миллион;
- применить рекуррентное правило миллион раз;
- вычислить все простые числа до десяти миллионов;
- найти численную матрицу, обратную плотной матрице размера  $1000 \times 1000$ ;

- решить разреженную систему линейных уравнений с миллионом неизвестных и ста тысячами ненулевых коэффициентов;
- вычислить определитель целочисленной матрицы размера  $250 \times 250$ ;
- вычислить определитель символьной матрицы размера  $25 \times 25$ ;
- найти приближенные значения корней многочлена степени 200;
- решить разреженную задачу линейного программирования с несколькими сотнями тысяч переменных;
- найти преобразование Фурье с учетом нескольких миллионов членов;
- изобразить миллион элементарных геометрических объектов (графических примитивов);
- отсортировать список из десяти миллионов элементов;
- найти фрагмент в строке из десяти миллионов знаков;
- загрузить несколько десятков мегабайт численных данных;
- отформатировать несколько сотен страниц вывода в традиционной форме.

## Структура системы *Mathematica*

Система *Mathematica* состоит из ядра *Kernel*, интерфейса *FrontEnd*, процедуры импорта-экспорта и программы связи *MathLink*, *JLink*, *NetLink* и т. д., библиотеки и пакетов расширений *Add-ons*, *Packages*, *Dictionaries*, *Graphics*.

### Главное меню

При запуске системы *Mathematica* открывается главное меню *FrontEnd*, состоящее из 9 разделов, и новый блокнот с рабочим названием *Untitled-1*. В зависимости от настроек системы может также открываться приветствие *Welcome Screen* и одна или несколько палитр *Palettes*.

Раздел *File* содержит все обычные команды. Спецификой является наличие подменю *Save As Special*, содержащее команды, позволяющие записать клетку или блокнот в различных специальных форматах, подменю *Palettes*, позволяющее открыть 9 палитр.



Раздел *Edit* содержит все обычные команды. Спецификой является наличие подменю *Copy As*, *Paste As*, *Save Selection As*, предписывающие копировать, вклеивать или сохранять буфер в различных текстовых/графических форматах или форматах блокнотов/клеток системы *Mathematica*. Подменю *Expression Input* дублирует палитру *BasicInput* и позволяет вводить выражения в традиционной математической форме.

Раздел *Cell* содержит специфическое управление клетками, такое как форматирование выбранного фрагмента, группировка и разбиение клеток.

Раздел *Format* содержит управление стилем, шрифтом, размером, цветом, выравниванием, масштабом изображения и пр.

Раздел *Input* содержит управление специальным вводом, в частности, графикой и звуком.

Раздел *Kernel* содержит подменю вычисления *Evaluate*, состоящее из команд, позволяющих вычислить содержание одной или нескольких клеток, блокнота и т.д., а также команд приостановки и прерывания вычисления *Interrupt Evaluation* и *Abort Evaluation*, команды управления ядром и т.д.

Раздел *Find* содержит обычные команды поиска, а также команды установки и поиска меток *Tags* и т.д.

Раздел *Window* перечисляет все открытые в системе окна и управляет их расположением.

Раздел *Help* обеспечивает доступ к различным системам информации и помощи.

## Сессии и вычисления, блокноты и клетки

Взаимодействие с системой на внутреннем уровне происходит во время сессий и вычислений, на внешнем уровне — с помощью блокнотов и клеток.

С внешней точки зрения *сессия* — период непрерывной работы ядра, с внутренней — последовательность вычислений.

Блокнот — интерактивный документ, содержащий программу, текст, результаты вычислений, сообщения, графику, таблицы и т.д. Во время сессии можно открывать или создавать несколько блокнотов и, наоборот, один и тот же блокнот может использоваться в большом количестве сессий. Блокнот — иерархическая структура, состоящая из клеток (*Cell*). Каждая клетка включает одну или несколько строк, соединенных стоящей справа скобкой (*Bracket*). Клетки объединяются в группы с помощью объединяющей скобки. Система автоматически объединяет клетку ввода (*Input Cell* или *Evaluation Cell*) и клетку вывода (*Output Cell*).

Чтобы начать новую клетку, необходимо поместить курсор в позицию, где он становится горизонтальным (внутри существующей клетки курсор вертикален). Для создания горизонтальной черты необходимо

щелкнуть в этот момент по левой кнопке мыши. Для создания новой клетки необходимо начать печатать содержание этой клетки. По умолчанию, новая клетка — всегда клетка ввода. Чтобы изменить формат, надо щелкнуть по скобке и выбрать нужный формат в меню *Cell*. Другой способ начать новую клетку — нажать *Alt-Enter*.

Чтобы вычислить математическое выражение, необходимо его сначала набрать, затем курсор поместить в содержащую это выражение клетку, потом одновременно нажать клавиши *Shift* и *Enter* (сама по себе клавиша *Enter* используется только для перевода строки внутри текущей строки ввода). Система выделяет ячейки ввода определителем  $In[N]$ , а ячейки вывода — определителем  $Out[N]$ , где  $N$  — автоматически устанавливаемый номер строки. В левой части отображаются квадратные скобки с особыми признаками. Каждая надпись, математическое выражение или график занимают отдельную ячейку. Ячейка может занимать одну или несколько строк и всегда выделяется своей квадратной скобкой. Ячейки между собой отличаются статусом, который может быть определен по типу значка в верхней части квадратной скобки. Отсутствие знаков обозначает обычную ячейку ввода, короткая горизонтальная черта отмечает ячейку вывода. Вычисление можно приостановить либо прервать.

### Простейшие правила и типичные ошибки

Все имена встроенных функций состоят из полных английских слов или общепринятых сокращений и начинаются с заглавной буквы. Аргументы функции выделяются в квадратных скобках. Круглые скобки используются только для группировки. Фигурные скобки используются для обозначения списков, наборов и множеств. Векторы и матрицы интерпретируются как списки.

Произведение обозначается через  $*$  или между перемножаемыми величинами ставится пробел. В противном случае выражение  $xu$  интерпретируется не как произведение  $x$  и  $u$  (полная форма  $Times[x,u]$ ), а как новая переменная. Возведение в степень записывается как  $x^u$  (полная форма  $Power[x,u]$ ).

Так как представления системы о приоритете выполнения арифметических операций могут не совпадать с замыслом пользователя, то рекомендуется во избежание недоразумений поставить лишние скобки.

Напечатанный текст надо ввести в ядро. Отдельные выражения должны находиться не в разных строках, а в разных клетках. Для помещения разных выражений в одну клетку их необходимо разделять точкой с запятой. В этом случае будет отображен результат последнего вычисления. Для вывода всех результатов необходимо оформлять вычисления как список.

Использование старых значений переменных является основным источником ошибок. Для того чтобы использовать ранее уже использовав-

шиеся переменные в качестве новых независимых переменных, необходимо удалить их значения и определения посредством `ClearAll[z]`.

Основное правило грамотного программирования — присваивать локальным и часто встречающимся переменным короткие имена, а глобальным и редко встречающимся переменным — длинные имена. Имя переменной не может начинаться с цифры. Несколько (десятков, сотен, тысяч) одноводных переменных следует оформлять в виде массива `Array` или списка `List`, `Table`.

## Вычисления в системе *Mathematica*

Знакомство с функциями пакета начнем с основных элементарных понятий.

### *Арифметика*

#### 1. Вычисления с целыми числами.

На самом примитивном уровне *Mathematica* является очень мощным калькулятором, работающим с числами неограниченной разрядности гораздо эффективнее, чем подавляющее большинство специализированных численных приложений. Например, дадим задание системе *Mathematica*

вычислить  $(2^{51} + 1)^3 + (3^{47} - 1)^2$ :

```
In[2]:= (2 ^ 51 + 1) + (3 ^ 47 - 1) ^ 2
```

```
Out[2]= 12124946590662798966770640512564431450478275045
```

В арифметических вычислениях знаки «+», «-» и «/» имеют обычный смысл, но для обозначения умножения и возведения в степень используются знаки «\*» и «^». В следующем вводе спрашивается, равны ли два числа:

```
In[6]:= 3 ^ 3 + 4 ^ 3 + 5 ^ 3 == 6 ^ 3
```

```
Out[6]= True
```

Здесь использование двойного знака равенства трактуется как вопрос о том, равна ли левая часть правой части или нет. Ниже напечатан ответ системы, что это верно.

#### 2. Вычисления с рациональными числами.

Зададим, к примеру, таблицу первых 10 чисел геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a_0 = 1$ :

```
In[2]:= AA = Table[ (1/2)^(n-1), {n, 1, 10} ]
```

```
Out[2]= {1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512}
```

Функция

**Sum[f[i], {i, m, n}]**

выражает сумму  $\sum_{i=m}^n f(i)$  значений функции  $f$  по  $i$  от  $m$  до  $n$  (с шагом 1). В итераторе  $\{i, m, n\}$  шаг по умолчанию равен 1, для задания шага  $d$  следует задать итератор в форме  $\{i, m, n, d\}$ .

Вычислим их сумму:

In[4]:= **Sum[AA[{i}], {i, 1, 10}]**

Out[4]=  $\frac{1023}{512}$

Итератор  $\{i, 1, 10\}$  означает, что суммирование берется по  $i$  от 1 до 10.

Формат функции

**Product[f[i], {i, m, n}]**

выражает произведение  $\prod_{i=m}^n f(i)$  значений функции  $f$  по  $i$  от  $m$  до  $n$  (с шагом 1). В итераторе  $\{i, m, n\}$  шаг по умолчанию равен 1. Произведения могут использоваться для численных вычислений, а также для короткой записи алгебраических выражений.

Вычислим произведение членов геометрической прогрессии с нечетными номерами:

In[7]:= **Product[AA[{i}], {i, 1, 10, 2}]**

Out[7]=  $\frac{1}{1048576}$

Итератор  $\{i, 1, 10, 2\}$  означает, что произведение берется по  $i$  от 1 до 10 с шагом 2, т.е. выбираются все члены с нечетными номерами.

3. Вычисления с вещественными числами.

Особенностью системы *Mathematica* по сравнению с обычными системами численных вычислений является использование вычислений *бесконечной точности*. Это значит, что никаких округлений при вычислениях с точными вещественными числами, такими как  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$  (на языке *Mathematica*, Sqrt[2], E, Pi), не производится.

Функция  $N[\text{expr}]$  дает численное значение выражения  $\text{expr}$ . Например, численная аппроксимация квадратного корня из 2:

$$N[\sqrt{2}]$$

$$1.41421$$

Функция  $N[\text{expr}, n]$  пытается дать результат с точностью до  $n$  знаков. Десятичное приближение числа  $x$  с точностью до  $n$  значащих цифр задается функцией  $N[x, n]$ . Например, численная аппроксимация числа  $\pi$  с 50 знаками даст следующий результат:

```
In[2]:= N[Pi, 50]
Out[2]= 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
```

Сравнение вещественных чисел в *Mathematica* выполняется следующим образом. Например, на вопрос  $e^\pi > \pi^e$  система ответит True:

```
In[1]:= E^Pi > Pi^E
Out[1]= True
```

Однако при рассмотрении этого неравенства можно учесть любое количество десятичных разрядов, например, при учете 20 знаков после запятой значения сравниваемых величин будут равны:

```
{N[E^Pi, 20], N[Pi^E, 20]}
{23.140692632779269006, 22.459157718361045473}
```

Вычисление оформляется в виде списка, чтобы посмотреть на оба ответа вместе.

#### 4. Вычисления с комплексными числами.

При задании комплексного числа в алгебраической форме  $z = x + j \cdot y$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$  — его вещественная часть и коэффициент при мнимой части соответственно, а  $j$  — мнимая единица. Необходимо помнить, что в системе *Mathematica* мнимая единица — это внутренний объект, поэтому ее имя начинается с заглавной буквы *I*. Например, выведем вещественную часть, коэффициент при мнимой части числа  $z = e + j\pi$ , его модуль, аргумент и сопряженное к нему число:

```
z = E + I * Pi;
{Re[z], Im[z], Abs[z], Arg[z], Conjugate[z]}
{e, pi, sqrt(e^2 + pi^2), ArcTan[pi/e], e - i*pi}
```

Функции  $\text{Re}[z]$  и  $\text{Im}[z]$  дают вещественную часть и коэффициент при мнимой части комплексного числа  $z$  соответственно. Функции  $\text{Abs}[z]$  и  $\text{Arg}[z]$  дают модуль и аргумент комплексного числа  $z$  соответственно. Функция  $\text{Conjugate}[z]$  сопоставляет числу  $z = x + jy$  комплексно-сопряженное  $\bar{z} = x - jy$ . Функция  $\text{ComplexExpand}[z]$  выделяет вещественную часть и коэффициент при мнимой части комплексного числа  $z$ .

### *Многочлены и рациональные дроби*

#### 1. Вычисления с многочленами.

Любая новая переменная, которой до сих пор не присваивалось значения, рассматривается системой как независимая переменная.

С многочленами можно проделывать все обычные, а также структурные операции:

- арифметические операции;
- деление с остатком для многочленов от одной переменной с помощью функций  $\text{PolynomialQuotient}$ ,  $\text{PolynomialRemainder}$ ; для многочленов от нескольких переменных по модулю нескольких переменных с помощью функций  $\text{PolynomialMod}$ ,  $\text{PolynomialReduce}$ ;
- композицию (подстановку многочлена в многочлен);
- отыскание наибольшего общего делителя с помощью функции  $\text{PolynomialGCD}$  и наименьшего общего кратного с помощью функции  $\text{PolynomialLCM}$ ;
- разложение по степеням какой-то из переменных с помощью функции  $\text{Expand}$ ;
- разложение на множители с помощью функции  $\text{Factor}$ .

Упрощение математических выражений — одна из самых важных задач символьной математики. Для упрощения выражений используется функция  $\text{Simplify}[expr]$ . Она исполняет последовательность алгебраических преобразований над выражением  $expr$  и возвращает простейшую из найденных форм. Функция  $\text{Simplify}$  работает с самыми различными математическими выражениями: многочленами, рациональными выражениями (состоящими из полиномов и их отношений), расширенными рациональными выражениями (имеющими дробные степени переменных), элементарными и специальными функциями, алгебраическими и тригонометрическими выражениями и т. д.

**Пример.** Упростить следующее выражение:  $x^2 + 2x + 1$ .

```
Simplify[x2 + 2x + 1]
(1 + x)2
```

**Пример.** Разложить на множители многочлен

$$x^6 + 4x^5 - 10x^4 - 40x^3 + 45x^2 + 108x - 108.$$

$$\text{Simplify}[-108 + 108x + 45x^2 - 40x^3 - 10x^4 + 4x^5 + x^6]$$

$$(-2 + x)^2(-1 + x)(3 + x)^2$$

Функция `Simplify` не всегда раскладывает до конца многочлен на множители. В следующем примере сначала в многочлене `poly` были раскрыты скобки с помощью функции `Expand`, а затем функция `Simplify` попыталась разложить полученный многочлен на множители. Как видно, разложение выполнено не до конца.

**Пример.**

$$\text{poly} = (2 + x)^4(1 + x)^4(3 + x)^3;$$

$$\text{Simplify}[\text{Expand}[\text{poly}]]$$

$$(3 + x)^3(2 + 3x + x^2)^4$$

**Пример.** Привести к общему знаменателю следующее выражение:

$$\text{der} = \frac{1}{4(-1+x)} - \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)};$$

$$\text{Simplify}[\text{der}]$$

$$\frac{1}{-1+x^2}$$

Раскрытие скобок в выражениях — также типовая операция компьютерной алгебры. По смыслу она противоположна упрощению выражений. Функция `Expand[expr]` раскрывает произведения и положительные целые степени в `expr`.

**Пример.**

$$\text{Expand}[(a + b)^5]$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Можно указать, что именно надо разложить в выражении, указав этот объект в аргументе функции.

**Пример.**

$$\text{Expand}[(1 + x)^3 + (2 + x)^4 + (1 + y)^2, 1 + x]$$

$$1 + 3x + 3x^2 + x^3 + (2 + x)^4 + (1 + y)^2$$

Функция `Factor[pol]` выполняет разложение полинома с целыми коэффициентами.

**Пример.**

```
Factor[x5 + x4 + x + 1]
(1 + x) (1 + x4)
```

**Пример.**

```
Factor[x14 - 1]
(-1 + x) (1 + x) (1 + x2) (1 + x4) (1 + x7)
```

**Пример.**

```
Factor[x17 + 1]
(1 + x) (1 - x + x2 - x3 + x4 - x5 + x6 -
x7 + x8 - x9 + x10 - x11 + x12 - x13 + x14 - x15 + x16)
```

Функция `FullSimplify` также предназначена для упрощения выражений, но область ее применения значительно расширена. Например, при упрощении выражений, содержащих специальные функции.

**Пример.**

```
Simplify[x (1 + x) Gamma[x]]
x (1 + x) Gamma[x]
```

```
FullSimplify[x (1 + x) Gamma[x]]
Gamma[2 + x]
```

**Пример.**

```
FullSimplify[ $\frac{\sqrt{2-x} \sqrt{3+x}}{\sqrt{2-x}}$ ]
 $\sqrt{\frac{1}{3+x}}$ 
```

**Пример.**

```
FullSimplify[Log[x - x3] - Log[x]]
Log[1 - x]
```



Важное значение в численных и символьных преобразованиях имеют операции подстановки. При вычислении значений математических выражений смысл использования подстановок заключается в замене некоторой переменной или нескольких переменных их конкретным численным значением или иным символьным выражением. Подстановки можно задать и использовать по-разному.

Запись `expr /. x -> value` означает, что в выражение `expr` вместо переменной `x` подставляется ее значение `value`.

Запись `expr /. {x -> xvalue, y -> yvalue}` означает, что в выражение `expr` вместо переменных `x` и `y` подставляются их значения `xvalue` и `yvalue`.

**Пример.** Вычислить напряжение по известным значениям тока и сопротивления.

```
In [1]:= U = II * R /. {R -> 5, II -> 10}
Out [1]= 50
```

Если подстановка сложная (большой набор числовых значений переменных), то можно использовать другой прием. Сначала задать подстановку отдельной переменной (например, `SSS`) с помощью операции присваивания, а затем использовать оператор `expr /. SSS`.

**Пример.** Вычислить напряжение по формуле  $U = I_1 R_1 + I_2 R_2$  по известным значениям токов и сопротивлений:

```
In [3]:= SSS = {I1 -> 10, I2 -> 12, R1 -> 5, R2 -> 7};
          U = I1 * R1 + I2 * R2 /. SSS
Out [4]= 134
```

Можно использовать в вычислениях знак `[%]`, который применяется для подстановки в оператор предшествующего выражения:

```
U = I1 * R1 + I2 * R2
I1 R1 + I2 R2
% /. SSS
134
```

### Вводное занятие 3.

## Построение графов схем электрической цепи в системе MATHEMATICA

В вводном занятии 3 на конкретных схемах электрической цепи постоянного и переменного тока рассмотрено построение графов схем.

Как было пояснено в вводном занятии 1, для расчета электрических цепей используются уравнения Кирхгофа для токов, протекающих по ветвям электрической цепи, и для напряжений между их узлами. Для составления уравнений используется графическое представление электрической цепи, именуемое ее схемой.

На примере электрической цепи постоянного тока, схема которой представлена на рис. В.3.1, показан перевод схемы электрической цепи во внутреннее (машинное) представление ее в системе *Mathematica*.

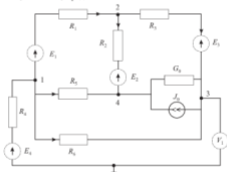


Рис. В.3.1

Для построения графа (рис. В.3.2), соответствующего рассматриваемой схеме, пронумерованы узлы.

Произвольно задано направление тока в каждой ветви. Сохранив нумерацию, каждому узлу схемы сопоставлена вершина графа, каждой ветви схемы — дуга графа, причем ориентация дуги совпадает с выбранным направлением тока. Пронумерованы дуги графа (табл. В.3.1).

Таблица В.3.1

Номера дуг	1	2	3	4	5	6	7
Номера вершин	1-2	2-4	2-3	1-3	1-4	1-3	3-4

Необходимо учитывать, что в пакете *Mathematica* массивы нумеруются с единицы. В табл. В.3.1 указано, какая дуга (первая строка таблицы) какие вершины соединяет (вторая строка таблицы), причем последовательность очень важна. Пара (1, 3) встречается дважды. Это и понятно, так как соответствующие узлы 1 и 3 соединены параллельными ветвями, содержащими  $R_4$ ,  $E_4$ ,  $V_1$  и  $R_6$ .

С помощью табл. В.3.1 схема записана в виде списка дуг. Каждый элемент списка является парой вершин, причем последовательность записи вершин указывает ориентацию соответствующей дуги графа (дуга направлена от вершины, номер которой записан первым).

После составления таблицы можно перейти к записи графа в пакете *Mathematica*. Как ранее отмечалось, граф можно представить как отображение  $T$ , которое переводит множество дуг  $p$  в множество пар вершин из  $q \times q$ :

$$p \xrightarrow{T} q \times q.$$

Способ задания графов основывается на различных требованиях, зависящих от того, кто является предполагаемым потребителем: человек или машина. Для компьютеров графы лучше представлять матрицами смежности или списками. Человек предпочитает визуализацию графа как множество точек, связанных линиями, которое дает дополнительную геометрическую информацию о графе.

Задание графов и манипуляции с ними включены в пакет комбинаторики *DiscreteMath`Combinatorica*, который является пакетом расширения системы *Mathematica*, то есть он не входит в ядро системы.

*DiscreteMath`Combinatorica* включает примерно 450 функций из комбинаторики и теории графов. Сюда входят функции для построения графов и других комбинаторных объектов посредством вычисления инвариантов этих объектов с последующей их визуализацией. Подробное описание этих функций можно найти в [14]. Для более детального ознакомления с этим материалом можно воспользоваться в *Help* данного пакета расширения разделом *Representing Graphs*. Более того, можно посетить сайт [www.combinatorica.com](http://www.combinatorica.com), где размещены последние достижения в реализации пакета.

Перед началом работы необходимо подключить пакет расширения `DiscreteMath`Combinatorica``.

Загрузка пакета происходит путем набора следующей команды:

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`
```

Операции манипуляций с графами представлены четырьмя группами функций: функции представления графов, функции создания графов, функции, описывающие свойства графов, и, наконец, функции алгоритмической теории графов.

Для электрической цепи, схема которой представлена на рис. В.3.1, описание графа в виде списка дуг будет выглядеть следующим образом:

```
LL = {{(1, 2), (2, 4), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (1, 3),  
(3, 4)}}; (1)
```

Рассмотрены некоторые функции для графов, необходимость в которых появится при рассмотрении дальнейшего материала.

С помощью следующей функции осуществляется сортировка списка в лексикографическом порядке:

```
g = Sort[LL]
```

Если в конце задания функции с аргументами знака «;» не ставить, то на экране дисплея выведется ответ системы — список пар вершин ориентированного графа. Сравните с заданием исходного графа.

```
{{(1, 2), (1, 3), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}}
```

Эта функция полезна при выборе нужного алгоритма программирования вывода изображения графа, так как позволяет увидеть параллельные дуги.

Следующая функция переводит запись схемы в виде списка дуг во внутренний формат системы *Mathematica*:

```
G = FromOrderedPairs[LL]
```

Граф можно задавать графически или на основе представления графа в виде различных матриц, отражающих топологическую структуру схемы. Такими матрицами являются матрицы смежности, матрицы инцидентности, циклические матрицы. Напомним, что в электротехнике матрица инцидентности графа называется матрицей соединений или узловой матрицей, циклическая матрица для графа называется матрицей независимых контуров. Матрицы инцидентности и циклические матрицы служат основой для построения уравнений, описывающих схему электрической цепи. Все эти матрицы имеют различные размерности. Например, матрица смежно-

сти имеет размерность  $q \times q$ , где  $q$  — число вершин графа. Матрица смежности записывается как список смежности изображения графа, который содержит  $q$  списков. Каждый внутренний список, стоящий на  $j$ -ом месте, соответствует  $j$ -ой вершине и указывает вершины, с которыми данная вершина связана. Матрица смежности показывает, сколько раз какие вершины графа связаны между собой, номера строк и столбцов у элементов матрицы соответствуют номерам вершин, значение элемента указывает, сколько раз это соединение происходит:

```
In[76]:= ToAdjacencyMatrix[G]//MatrixForm
Out[76]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Один из элементов этой матрицы равен 2, так как пара (1, 3) встречается дважды (вершины 1 и 3 соединены параллельными дугами).

Создание из списка  $g$  неориентированного графа  $b$  выполняется с помощью следующей функции:

```
b = FromUnorderedPairs[g];
```

Для неориентированного графа матрица смежности является симметричной. Функция `TableForm[ToAdjacencyMatrix[G]]` выполняет вывод элементов списка, в данном случае, элементов матрицы смежности графа в виде таблицы.

```
TableForm[ToAdjacencyMatrix[b]]
0 1 2 1
1 0 1 1
2 1 0 1
1 1 1 0
```

Как строить матрицы инцидентности и циклические матрицы, будет рассказано в вводном занятии 4.

Одной из самых важных функций в группе функций представления графов является функция `ShowGraph` (показать граф). Она обеспечивает визуальное представление графа, заданного аргументом функции.

```
Show[ShowLabeledGraph[b], ShowGraph[G]];
```

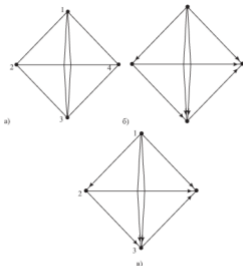


Рис. В.3.2

На рис. В.3.2 а (с цифрами) показан неориентированный граф, на рис. В.3.2 б (со стрелками) — ориентированный, а рис. В.3.2 в представляет собой суперпозицию двух первых рисунков, здесь видна и нумерация вершин, и направление дуг. Вывод рис. В.3.2 а обеспечивает первый аргумент функции Show, вывод рис. В.3.2 б — второй аргумент, а вывод рис. В.3.2 в обеспечен применением высшей функции Show.

Если использовать опции функции SetGraphOption, то можно задать цвет дуг, отображение номеров вершин, нумерацию дуг, определить цвет вершин, цвет номеров дуг, положение номера вершин, параметры шрифта: тип шрифта, его жирность, размер и цвет фона и т. д.

Если в графе встречается несколько дуг, соединяющих одни и те же вершины, то при изображении этого графа номера дуг накладываются друг на друга. При пересечении дуг графа также возможно наложение номеров дуг друг на друга. Программирование вывода изображения графа с исключением эффекта наложения номеров дуг требует некоторых уси-

лий. Поэтому сначала показан вывод изображения графа с функциональными и «художественными» особенностями на самых простых примерах схем электрических цепей.

Рассмотрена схема электрической цепи постоянного тока с последовательным и параллельным соединением сопротивлений (рис. В.3.3).

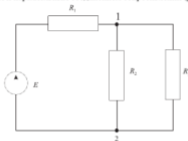


Рис. В.3.3

Список дуг графа для этой схемы таков:

$$LL = \{(2, 1), (1, 2), (1, 2)\}; \quad (2)$$

Матрицы смежности для неориентированного и ориентированного графов могут отличаться друг от друга, как, например, в рассмотренном примере:

```

g = Sort[LL]
In[81]:= b = FromUnorderedPairs[g];
In[82]:= TableForm[ToAdjacencyMatrix[b]]
Out[82]//TableForm =
0 3
3 0
G = FromOrderedPairs[LL]
In[83]:= ToAdjacencyMatrix[G]//MatrixForm
Out[83]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$


```

Для дальнейшей работы необходимо сосчитать количество вершин и количество дуг графа. Это можно сделать «вручную», однако предоставим эту работу пакету *Mathematica*.

```
q = V[G]
2
p = Length[LL]
3
```

Количество вершин графа определяется по графу, количество дуг графа — по длине списка дуг.

Для написания программы для вывода изображения графа сначала подготовлен список номеров для обозначения дуг графа:

```
EL = Table[i, {i, 1, p}]
```

Исходный список *LL* отсортирован в лексикографическом порядке:

```
ELL = Ordering[LL];
```

Следующая функция в списке *ELL* заместит заданный номер дуги (*l*) пробелом:

```
XXX[l_]:=ReplacePart[Ell, "",
Table[Position[ELL, l][[i]][[1]],
{i, 1, Length[l]}]]
```

Записаны те номера дуг, которые накладываются друг на друга, и создан общий список наложенных номеров:

```
z1={1}; z2={2}; z=Union[z1, z2];
```

Следующая функция опишет глобальное задание опций:

```
AA[x_, y_]:=SetGraphOptions[G, EdgeColor → Red,
VertexNumber → True, EdgeLabel → x,
VertexNumberPosition → Center,
EdgeLabelPosition → y,
VertexNumberColor → Black, VertexColor → White,
EdgeLabelColor → Blue, VertexStyle → Disk[Large],
TextStyle → {FontFamily → "New Times Roman",
FontWeight -> "Bold", FontSize → 16},
Background → RGBColor[1, 1, 0]];
```



Аргументами этой функции являются  $x$  — подпись с номерами дуг;  $y$  — расположение подписи. В данном контексте заданы следующие опции:

**EdgeColor** → **Red**, — цвет дуг ориентированного графа (то есть со стрелками) задать красным;

**VertexNumber** → **True**, — показать вершины графа;

**EdgeLabel** →  $x$ , — приписать к дугам выбранные подписи;

**VertexNumberPosition** → **Center**, — расположение номера вершины в центре;

**EdgeLabelPosition** →  $y$ , — указание, где расположить подпись к дуге графа;

**VertexNumberColor** → **Black**, — цвет номера вершины выбрать черным;

**VertexColor** → **White**, — цвет круга, обозначающего вершину графа, выбрать белым;

**EdgeLabelColor** → **Blue**, — цвет номера дуги выбрать голубым;

**VertexStyle** → **Disk[Large]**, — вершины графа выбрать в виде круга, размер которого самый большой из предлагаемых системой;

**TextStyle** → {**FontFamily** → "New Times Roman",  
**FontWeight** → "Bold", **FontSize** → 16},

— описывается стиль шрифта подписи, его размер и жирность, в данном случае цифры написаны жирным шрифтом размером 16 и стилем «New Times Roman»;

**Background** → **RGBColor[1, 1, 0]**; — цвет фона изображения графа выбрать желтым.

Исходный граф нарисован наложением друг на друга нескольких графов. Сначала нарисованы промежуточные графы:

```
S1 = ShowGraph[AA[XXX[z], LowerRight],  
  DisplayFunction → Identity];
```

На этом рисунке удалены подписи к дугам графа из общего списка  $z$ , выводится только подпись к третьей дуге. Остальные подписи смещены относительно центра в одно из возможных четырех положений (вниз направо или налево, вверх направо или налево). В данном случае это одна подпись, которая смещена вниз направо. Так как это промежуточный рисунок, его вывод на экран можно подавить, задав

```
DisplayFunction → Identity.
```

Следующая функция рисует граф с удаленными подписями к дугам графа из списка, который составлен с помощью функции **Complement** [EL, z1], которая возвращает список *EL* с удаленными из него элементами из списка *z1*. В данном случае это номера дуг 2 и 3. Так как функция **XXX**[1\_] замечает эти номера пробелами, то на этом рисунке выведена надпись, указанная в списке *z1*. Подпись смещена вверх влево:

```
S2 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z1]], UpperLeft],
  DisplayFunction -> Identity];
```

Теперь понятно, что следующая функция задаст изображение графа только с подписями из списка *z2*, а это только одна подпись ко второй дуге, которая смещена вверх направо.

```
S3 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z2]],
  UpperRight], DisplayFunction -> Identity];
```

Теперь можно вывести изображение исходного графа (представленного списком дуг (2)) путем наложения промежуточных картинок, вернув вывод на экран (рис. В.3.4):

```
Show[{S1, S2, S3},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

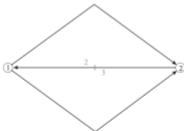


Рис. В.3.4

Изображение графа, описанного списком дуг (1), с включением перечисленных опций, показано на рис. В.3.5.

Эту программу можно использовать для вывода изображения графа, когда присутствует максимум два наложения номеров дуг графа. В слу-

чае, когда имеется только одно наложение или его нет, можно использовать предложенный алгоритм, задавая в  $\mathbf{z1}$  и (или)  $\mathbf{z2}$  пробелы в фигурных скобках.

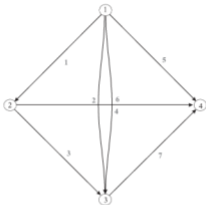


Рис. В.3.5

---

## Вводное занятие 4.

### Основные функции для работы с графами

В вводном занятии 4 приведены основные сведения, необходимые для работы с графами. Рассмотрены способы задания различных матриц, описывающих графы, а также функции для работы со списками, векторами и матрицами.

#### Списки

Одной из объединяющих концепций, вокруг которой организован язык *Mathematica*, является понятие списка `List`. С точки зрения языка системы и внутреннего представления данных множества, наборы, последовательности, векторы, матрицы тензоры и т. д. трактуются как список. Грамотное программирование на языке *Mathematica* состоит в том, чтобы избегать явного использования циклов, а вместо этого объединять переменные, команды, уравнения, условия, подстановки и т. д. в списки.

В пакете *Mathematica* список  $(x_1, \dots, x_n)$  с элементами  $x_1, \dots, x_n$  обозначается

`{x1, ..., xn}`

или, в полной форме,

`List[x1, ..., xn]`.

С математической точки зрения список длины  $n$  представляет собой вектор. По определению два списка равны, если равны их длины и все соответствующие элементы.

Таким образом, список

`{a, b, a, c}`

или, в полной форме,

`List[a, b, a, c]`

представляет собой вектор  $(a, b, a, c)$ , а не набор или множество с элементами  $a, b, a, c$ . На вопрос, равны ли два вектора  $(a, b, c)$  и  $(b, a, c)$ ,

```
In[1]:= TrueQ[{a, b, c} == {b, a, c}]
```

```
Out[1]= False
```

система ответит `False`, – если, конечно, переменным  $a, b$  не были ранее присвоены одинаковые значения.

В системе содержится несколько десятков операций, подразделяющихся на категории:

- теоретико-множественные операции;
- манипуляции с частями списка: извлечения, вычеркивания, вставки, замены, выборки и т. п.;
- структурные манипуляции: сортировки, перестановки, выравнивания, разбиения и т. п.;
- применение функций к спискам и их частям: Map, Apply, Thread, Inner, Outer и их многочисленным вариантам.

### Функции для работы со списками

Функция **List**[**a**, **b**, **c**, ...] создает список {**a**, **b**, **c**, ...}. Список можно составлять непосредственно: G={M,A,T,E,M,A,T,I,C,A}.

Функция **[list][i]** выделяет *i*-й элемент списка.

Функция **list**[{**i1**, **i2**, ...}] выделяет  $i_1, i_2, \dots$  элементы списка.

Функция **Flatten**[**list**] выравнивает (превращает в одномерный) список по всем его уровням.

Функция **Sort**[**list**], примененная к списку, сортирует элементы списка **list** в лексикографическом порядке (расставляет его элементы в некотором естественном порядке, связанном с их записью как выражений в языке *Mathematica*). Применение функции **Sort** заставляет систему игнорировать порядок элементов списка, делая два списка равными в том и только в том случае, когда совпадают представленные ими наборы  $[x_1, \dots, x_n]$ . При определении равенства наборов учитываются кратности входящих в них элементов, а не их порядок:

```
In[2]:= TrueQ[Sort[{a, b, a, c}] ==
          Sort[{b, c, a, a}]]
Out[2]= True
In[3]:= TrueQ[Sort[{a, b, a, c}] ==
          Sort[{b, c, b, a}]]
Out[2]= False
```

Функция **RotateLeft**[**list**] возвращает список после однократного поворота влево.

Функция **RotateLeft**[**list**, **n**] возвращает список после *n*-кратного поворота влево.

Функция **Append**[list, element] добавляет элемент в конец списка.

Функция **Prepend**[list, element] добавляет элемент в начало списка.

Для расчета параметров электрической цепи необходимо при задании графа, отображающего эту цепь, знать число дуг в этом графе. Для этого используется функция **Length**[list], которая возвращает число элементов одномерного списка list.

Функция **Union**[list] возвращает отсортированный вариант списка list, из которого удалены все повторяющиеся элементы. Таким образом эта функция превращает список в множество, т. е. заставляет систему игнорировать не только порядок элементов списка, но и их кратности.

**Eq1**

```
(-i3[t]+C3UC3'[t])
```

**Eq2**

```
(-i2[t]-i3[t]+i4[t]+i5[t], i1[t]-i4[t]-i5[t])
```

**Union**[Eq1, Eq2] // **MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} i1[t]-i4[t]-i5[t] \\ -i2[t]-i3[t]+i4[t]+i5[t] \\ -i3[t]+C3UC3'[t] \end{pmatrix}$$

Функция **Join**[list1, list2, ...] объединяет списки в единую цепочку и может применяться к любому множеству выражений, имеющих один заголовок.

Функция **Drop**[list, n] возвращает список list, из которого удалены первые n элементов.

Функция **Drop**[list, -n] возвращает список list, из которого удалены последние n элементов.

Функция **Drop**[list, {n}] возвращает список list, из которого удален n-й элемент.

Функция **Drop**[list, {n, m}] возвращает список list, из которого удалены с n-го по m-й элементы.

Функция **Delete**[list, i] удаляет из списка i-й элемент. Например, при решении системы уравнений Кирхгофа требуется, как правило, из списка переменных удалить один или несколько элементов. Ниже приведен способ удаления из списка потенциалов потенциала l узла:

```
ϕ = Table[ϕ[i], {i, 1, q}]
```

```
{ϕ[1], ϕ[2], ϕ[3], ϕ[4]}
```

```
ϕ1 = Delete[ϕ, 1]
```

```
{ϕ[2], ϕ[3], ϕ[4]}
```

Функция `DeleteCases[list, pattern]` удаляет из списка все элементы, которые совпадают с образцом (`pattern`).

### Векторы

В простейшем варианте вектор  $(x_1, \dots, x_n)$  с элементами  $x_1, \dots, x_n$  можно задать с помощью списка данных непосредственно, а именно списком  $[x_1, \dots, x_n]$ . При этом координатами вектора могут быть любые выражения: числа, символы, списки, матрицы и т.д.

Для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) покажем, как можно задавать параметры электрической цепи в виде векторов. Векторы должны иметь размерность, равную длине списка дуг `LL`, задающего граф.

```
LL = {{2, 1}, {1, 2}, {1, 2}};
```

```
p = Length[LL]
```

```
3
```

Таким образом, вектор активных сопротивлений можно задать следующим образом:

```
R = {R1, R2, R3};
```

Все операции над векторами трактуются как *покомпонентные*:

```
In[5]:= {u, v, w} + {x, y, z}
```

```
Out[5]= {u+x, v+y, w+z}
```

```
In[6]:= {u, v, w} * {x, y, z}
```

```
Out[6]= {ux, vy, wz}
```

При выполнении арифметических операций скаляр отождествляется с вектором  $(x_1, \dots, x_n)$  соответствующей длины:

```
In[7]:= {w + {x, y, z}, w * {x, y, z}}
```

```
Out[7]= {{w+x, w+y, w+z}, {wx, wy, wz}}
```

В такой форме записи не делается различия между строками и столбцами. Следующие функции дают один и тот же результат:

```
In[8]:= {a, b, c} . {x, y, z}
```

```
Out[8]= ax+by+cz
```

```
In[9]:= Dot[{a, b, c}, {x, y, z}]
```

```
Out[9]= ax+by+cz
```

```
In[10]:= Inner[Times, {a, b, c}, {x, y, z}]
```

```
Out[10]= ax+by+cz
```

но могут интерпретироваться по-разному, в зависимости от того, как представляются исходные векторы и чем являются их элементы: произведением строки  $(a, b, c)$  на столбец  $(x, y, z)^T$ ; скалярным произведением строки  $(a, b, c)$  на строку  $(x, y, z)$ ; скалярным произведением столбца  $(a, b, c)^T$  на столбец  $(x, y, z)^T$ ; линейной комбинацией строк или столбцов  $x, y, z$  с коэффициентами  $a, b, c$  и многими другими способами.

### Запись матриц

Если в списке элементами являются списки, то результатом является матрица. Матрица в языке системы *Mathematica* записывается как список, составленный из строк этой матрицы. Список, элементы которого сами являются списками, называется *вложенным списком*. Таким образом, матрица

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  изображается как

```
In[11]:= {{a, b}, {c, d}}
```

Именно такая форма используется при вводе матриц, внутри себя система переводит это выражение в полную форму:

```
In[12]:= List[List[a, b], List[c, d]]
```

```
Out[12]= {{a, b}, {c, d}}
```

Функция `Transpose` переводит матрицу в транспонированную:

```
In[13]:= Transpose[{{a, b}, {c, d}}]
```

```
Out[13]= {{a, c}, {b, d}}
```

По умолчанию функция `Transpose` переставляет два верхних уровня вложенности списков. Поэтому примененная к списку матриц, она будет переставлять строки этих матриц между собой, а не транспонировать сами эти матрицы. Для одновременного транспонирования списка матриц нужно применить функцию `Transpose` к элементам этого списка при помощи функции `Map`:

```
In[14]:= Transpose[{{{a, b}, {c, d}}, {{e, f}, {g, h}}]
```

```
Out[14]= {{{a, b}, {e, f}}, {{c, d}, {g, h}}]
```

```
In[15]:= Map[Transpose, {{{a, b}, {c, d}}, {{e, f}, {g, h}}]
```

```
Out[15]= {{{a, c}, {b, d}}, {{e, g}, {f, h}}]
```



Все обычные операции над матрицами трактуются как *покомпонентные*:

```
In[16]:={{a, b}, {c, d}} + {{e, f}, {g, h}}
Out[16]= {{a+e, b+f}, {c+g, d+h}}
In[17]:={{a, b}, {c, d}} * {{e, f}, {g, h}}
Out[17]= {{ae, bf}, {cg, dh}}
```

Таким образом, \* (или в полной форме Times) — это умножение элементов, стоящих на одних и тех же местах в матрицах. Обычное произведение матриц обозначается «.» (функция Dot).

При арифметических операциях скаляр  $x$  отождествляется с матрицей

$$\begin{pmatrix} x & \dots & x \\ & \dots & \\ x & \dots & x \end{pmatrix}:$$

```
In[18]:={{a, b}, {c, d}}+x, {{a, b}, {c, d}}*x
Out[18]= {{a+x, b+x}, {c+x, d+x}},
          {{ax, bx}, {cx, dx}}
```

### Генерация векторов и матриц

Основной функцией генерации векторов, матриц и любых других списков в языке *Mathematica* является функция Table. Вызванная в формате с одним итератором

**Table[f[i], {i, m, n}],**

она порождает список значений функции  $f$  в точках  $i = m, m+1, \dots, n$ :

```
In[19]:= Table[x^i/i!, {i, 0, 5}]
Out[19]= {1, x, x^2/2, x^3/6, x^4/24, x^5/120}
```

Если в задаваемом векторе большинство элементов — нулевые, имеет смысл сначала создать нулевой вектор, а затем изменить те элементы вектора, которые являются ненулевыми, в данном случае для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) только в первой ветви схемы находится источник ЭДС:

```
EE=Table[0, {i, 1, p}];
EE[[1]]=E1;
```

Тогда, спросив у системы вид вектора  $EE$ , получим ответ:

```
EE
{E1, 0, 0}
```

С самого начала будем стремиться к унификации алгоритмов расчета параметров электрических цепей, т. е. создавать такие программы, которые будут описывать любую линейную электрическую цепь постоянного и переменного тока, содержащую произвольные элементы в произвольном количестве. Поэтому, хотя в конкретной схеме нет источников тока, для записи уравнений, моделирующих процессы в цепях, нам понадобится вектор токов источников тока, который в данном случае является нулевым вектором:

```
J = Table[0, {i, 1, p}];
```

Вводим вектор переменных – потенциалов в узлах:

```
φ = Table[φ[i], {i, 1, q}]
{φ[1], φ[2]}
```

Вызванная с двумя итераторами в формате функция

```
Table[f[i, j], {i, k, l}, {j, m, n}]
```

порождает вложенный список значений функции двух аргументов  $f$  в парах  $(i, j)$ , где  $i = k, k+1, \dots, l$ ,  $j = m, m+1, \dots, n$ . Этот список будет организован как матрица, причем итератор  $i$  считается внешним, а  $j$  – внутренним.

Следовательно, матрица трактуется как строка, составленная из строк, и внутренние итераторы записываются последними.

Определим две матрицы, отличающиеся порядком итераторов:

```
In[77]:= AA[n_]:=Table[If[j==i+1, 1, 0],
    {i, 1, n}, {j, 1, n}]
In[78]:= BB[n_]:=Table[If[j==i+1, 1, 0],
    {j, 1, n}, {i, 1, n}]
```

Получившиеся матрицы будут транспонированы друг к другу. Например, вот как выглядит такие матрицы третьего порядка:

```
In[79]:= AA[3] // MatrixForm
Out[79]//MatrixForm = 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
In[80]:= BB[3] // MatrixForm
```

$$\text{Out[80]//MatrixForm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Структурные функции **Partition** или **Flatten** используются при создании матриц из векторов или, наоборот, более глубоких списков.

Транспонирование матрицы **A** происходит с помощью функции **Transpose[A]**.

В случае схемы электрической цепи (рис. В.3.3) для матрицы соединений

```
In[33]:= A // MatrixForm
```

$$\text{Out[33]//MatrixForm} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ее транспонированная матрица имеет следующий вид:

```
Transpose[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следующая функция порождает диагональную матрицу с диагональными элементами  $d_1, \dots, d_n$ :

```
DiagonalMatrix[{d1, ..., dn}]
```

Если известно, что матрица имеет диагональный вид, то ее можно задать из списка или вектора. Функция **DiagonalMatrix[list]** возвращает квадратную диагональную матрицу с главной диагональю, состоящей из элементов списка или вектора, и нулевыми остальными элементами матрицы.

Например, по списку сопротивлений

```
In[1]:= R = {R1, R2, R3, 1/G0, R5, R6}
```

$$\text{Out[1]} = \left\{ R1, R2, R3, \frac{1}{G0}, R5, R6 \right\}$$

создадим матрицу сопротивлений.

```
In[2]:= RR = DiagonalMatrix[R]
```

```
Out[2]= {{R1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, R2, 0, 0, 0, 0},
          {0, 0, R3, 0, 0, 0}, {0, 0, 0,  $\frac{1}{G0}$ , 0, 0},
          {0, 0, 0, 0, R5, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, R6}}
```

или в матричном виде:

```
In[3]:= RR // MatrixForm
```

```
Out[3]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} R1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R6 \end{pmatrix}$$

В вводном занятии 3 показывалось, как строить матрицу смежности. Еще раз продемонстрируем, как строятся матрицы смежности в случае схемы электрической цепи (рис. В.3.3) для неориентированного ( $\mathbf{b}$ ) и ориентированного ( $\mathbf{G}$ ) графа  $\mathbf{LL}$ :

```
LL={{2, 1}, {1, 2}, {1, 2}}
```

```
b = FromUnorderedPairs[LL];
```

```
In[6]:= TableForm[ToAdjacencyMatrix[b]]
```

```
Out[6]//TableForm=
```

```
0 3
```

```
3 0
```

```
G = FromOrderedPairs[LL];
```

```
In[7]:= ToAdjacencyMatrix[G] // MatrixForm
```

```
Out[7]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Покажем теперь, как строить матрицу инцидентности. К сожалению, в пакете *Mathematica* нет функции, позволяющей строить матрицу соединений для заданного графа, но такую функцию нетрудно построить следующим образом на примере из вводного занятия 3. Граф задан списком

```
LL={{1,2}, {2,4}, {2,3}, {1,3}, {1,4}, {1,3}, {3,4}};
```

и его изображение представлено на рис. В.3.5.

```
A = Transpose[
  Table[
    Table[If[LL[[j, 1]] == i, 1,
      If[LL[[j, 2]] == i, -1, 0]], {i, 1, q}],
    {j, 1, p}]]];
```

или в матричном виде:

```
In[26]:= MatrixForm[A]
Out[26]//MatrixForm = (1)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Циклическая матрица **B** (матрица независимых контуров) строится из матрицы соединений **A** с помощью следующей функции (подробнее об этой функции см. в вводном занятии 5):

```
B = NullSpace[A]
```

Для рассмотренной схемы с матрицей соединений (1) циклическая матрица будет иметь следующий вид:

```
In[28]:= B // MatrixForm
Out[28]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, правильно ли определена циклическая матрица. Число строк этой матрицы (число независимых контуров) должно быть равно цикломатическому числу  $p - (q - 1)$ :

```
In[31]:= Length[B] == p - (q - 1)
Out[31]= True
```

Наполнение этой матрицы для конкретной схемы можно трактовать следующим образом. Схема содержит четыре независимых контура. Заметим, что выбирать независимые контуры можно по-разному, функция **NullSpace** предлагает лишь один из таких вариантов. Первый контур со-

держит вторую, третью и седьмую ветви схемы (рис. В.3.1) и проходит через узлы 2, 3 и 4 схемы. Второй контур содержит первую, третью и шестую ветви схемы и проходит через узлы 1, 2 и 3. Третий контур содержит первую, вторую и пятую ветви схемы и проходит через узлы 1, 2 и 4 схемы. И, наконец, четвертый независимый контур содержит первую, третью и четвертую ветви схемы и проходит через узлы 1, 2 и 3.

### Подматрицы

Для выделения частей списков в языке *Mathematica* используется специальный вид скобок – двойные квадратные скобки  $\llbracket \ ]\rrbracket$ , являющиеся сокращением функции `Part`.  $x\llbracket i \rrbracket$  – или, что то же самое, `Part x[[i]]` обозначает  $i$ -ю часть списка  $\mathbf{x}$  (отсчет с начала списка),  $x\llbracket -i \rrbracket$  –  $i$ -ю часть с конца;  $x\llbracket i, j \rrbracket$  –  $j$ -ю часть его  $i$ -й части и т. д. При этом сами номера позиций тоже могут задаваться списком. Если необходимо выбрать все части на каком-то уровне, то это осуществляется спецификацией `All`:

$\mathbf{x}\llbracket \{i, j\} \rrbracket$  – элемент  $x$  в позиции  $(i, j)$ ;

$\mathbf{x}\llbracket \{i, j\}, \{k, l\} \rrbracket$  – подматрица порядка 2 матрицы  $\mathbf{x}$ , расположенная на пересечении строк с номерами  $i, j$  и столбцов с номерами  $k, l$ ;

$\mathbf{x}\llbracket i \rrbracket$  –  $i$ -я строка матрицы  $\mathbf{x}$ ;

$\mathbf{x}\llbracket \text{All}, j \rrbracket$  –  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{x}$ ;

`Tr[x, List]` – главная диагональ матрицы  $\mathbf{x}$ .

Например,  $\mathbf{x}\llbracket 1 \rrbracket$  и  $\mathbf{x}\llbracket -1 \rrbracket$  обозначают соответственно первую и последнюю строку матрицы  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}\llbracket \text{All}, 1 \rrbracket$  и  $\mathbf{x}\llbracket \text{All}, -1 \rrbracket$  – ее первый и последний столбец. Вследствие отсутствия здесь симметрии между строками и столбцами столбец матрицы является строкой транспонированной матрицы, поэтому  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{x}$  можно получить с помощью следующей функции:

`Transpose[x][[j]]`.

Кроме встроенной функции `Tr[x, List]` главную диагональ можно определить другим способом:

`Table[x[[i, j]], {i, 1, Length[x]}]`.

### Просмотр матриц

Для вывода матрицы не как вложенный список, а в традиционной матричной форме можно использовать несколько приемов. Можно после списка поставить выражение `//MatrixForm` или задать вывод отдельной

функцией **MatrixForm**[list] или **TableForm**.

```
In[32]:= MatrixForm[RR]
```

```
Out[32]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} R1 & 0 & 0 \\ 0 & R2 & 0 \\ 0 & 0 & R3 \end{pmatrix}$$

Первая функция выводит элементы матрицы в матричном виде, вторая — в виде таблицы.

### Матричные единицы

Одним из важных понятий в математике являются стандартные матричные единицы  $e_{ij}$ , у которых в позиции  $(i, j)$  находится 1 и во всех остальных позициях — 0. Матрицы  $e_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , образуют базис векторного пространства размерности  $n$ . Более того, это мультипликативный базис, в том смысле, что произведение базисных элементов равно либо нулю,

либо базисному элементу:  $e_{ij} \cdot e_{kl} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ e_{il}, & j = k \end{cases}$ . Одно из возможных определений этих матриц на языке системы *Mathematica* следующее:

```
In[31]:= e[n_, i_, j_] :=
```

```
Table[If[h == i, 1, 0] * If[k == j, 1, 0],
      {h, 1, n}, {k, 1, n}]
```

Условный оператор **If**[condition, x, y] возвращает x, если выполняется условие condition, и y — в противном случае.

Вывод на просмотр стандартных матричных единиц третьей степени можно записать следующим образом:

```
In[32]:= Map[MatrixForm,
```

```
Flatten[Table[e[3, i, j], {i, 1, 3},
          {j, 1, 3}], 1]]
```

$$\text{Out[32]} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Здесь функция `Table[e[3, i, j], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]` создаст вложенный список `list`, состоящий из трех списков, в каждом из которых содержится по три единичные матрицы. Функция `Flatten[list, 1]` убирает лишний (верхний) вложенный уровень в `list`.

Функция `TableForm[list]` выполняет вывод элементов списка `list` в виде таблицы.

### Обращение матриц

Обратная матрица  $A^{-1}$  для квадратной матрицы  $A$  вычисляется при помощи функции `Inverse[A]`.

$$\text{Inverse}[\{(a, b), (c, d)\}]$$

$$\left\{ \left[ \begin{array}{cc} d & -b \\ -bc+ad & -bc+ad \end{array} \right], \right.$$

$$\left. \left[ \begin{array}{cc} -c & a \\ -bc+ad & -bc+ad \end{array} \right] \right\}$$

Для схемы электрической цепи (рис. В3.3)

$$\text{Inverse}[\text{RR}] // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R3} \end{pmatrix}$$

### Определитель матрицы

Функция `Det[A]` вычисляет определитель квадратной матрицы  $A$ . Если элементами матрицы являются числа, то результатом работы этого оператора будет число. Если же элементы матрицы заданы в символьном виде, то результатом будет являться символьное выражение, зачастую записанное в очень громоздком виде. Для анализа этого выражения его сначала надо упростить. Для этого используются функции системы компьютерной алгебры, выполняющие достаточно сложные преобразования выражений.

$$\text{Det}[\{(a, b), (c, d)\}]$$

$$-bc+ad$$



Функция **Minors[x]** порождает матрицу, элементы которой являются определителями, порядок которых на единицу ниже порядка определителя исходной матрицы **x**. Эти элементы упорядочиваются лексикографически по порядку включенных в них строк и столбцов. Следующее вычисление показывает матрицу, состоящую из миноров второго порядка в матрице степени 3:

```
In[82]:= M1 = Partition[CharacterRange["a", "i"], 3]
Out[82]= {{a, b, c}, {d, e, f}, {g, h, i}}
```

причем функция **CharacterRange["a", "i"]** генерирует список из 9 букв, лежащих между «a» и «i» включительно. Кавычки означают, что «a» и «i» трактуются как текстовые объекты.

```
In[83]:= Minors[M1]
Out[83]= {{-bd+ae, -cd+af, -ce+bf},
           {-bg+ah, -cg+ai, -ch+bi},
           {-eg+dh, -fg+di, -fh+ei}}
```

Ниже вычислены миноры порядка 3 для числовой матрицы **x** порядка 4:

```
x = {{1, 2, 3, 4}, {3, 2, 1, 0}, {0, 6, 7, 1}, {7, 6, 5, 4}}
```

```
In[119]:= x // MatrixForm
```

```
Out[119]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

```
In[118]:= Minors[x] // MatrixForm
```

```
Out[118]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} 20 & 68 & 76 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & -136 & -152 & -56 \\ 20 & 68 & 76 & 28 \end{pmatrix}$$

Функция

**Minors[x, m]**

порождает матрицу, элементы которой являются минорами порядка  $m$  (определители всех подматриц порядка  $m$ ) матрицы  $X$  в лексикографическом порядке:

```
In[84]:= M2 = Partition[CharacterRange["a", "p"], 4]
Out[84]= {{a, b, c, d}, {e, f, g, h},
          {i, j, k, l}, {m, n, o, p}}
```

Вычисление миноров второго порядка дает следующий результат:

```
Minors[M2, 2] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -be+af & -ce+ag & -de+ah & -cf+bg & -df+bh & -dg+ch \\ -bi+aj & -ci+ak & -di+al & -cj+bk & -dj+bl & -dk+cl \\ -bm+an & -cm+ao & -dm+ap & -cn+bo & -dn+bp & -do+cp \\ -fi+ej & -gi+ek & -hi+el & -gj+fk & -hj+fl & -hk+gl \\ -fm+en & -gn+eo & -hm+ep & -qn+fo & -hn+fp & -ho+gp \\ -jm+in & -km+io & -lm+ip & -kn+jo & -ln+jp & -lo+kp \end{pmatrix}$$

```

Ниже вычислены миноры порядка 2 для числовой матрицы  $X$ :

```
Minors[x, 2] // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 & -4 & -8 & -4 \\ 6 & 7 & 1 & -4 & -22 & -25 \\ -8 & -16 & -24 & -8 & -16 & -8 \\ 18 & 21 & 3 & 8 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 4 & 8 & 4 \\ -42 & -49 & -7 & -12 & 18 & 23 \end{pmatrix}$$

```

### Умножение матриц

Обычное матричное умножение, представляющее композицию линейных отображений, обозначается « $\cdot$ » или в полной форме **Dot**. Таким образом,  $X \cdot Y$  или **Dot[x, y]** выражает произведение матриц  $X$  и  $Y$ . Например,

```
{{a, b}, {c, d}} . {{e, f}, {g, h}}
{{ae+bg, af+bh}, {ce+dg, cf+dh}}
```

Прониллюстрируем матричные вычисления при расчете схемы электрической цепи (рис. В.3.3). Вот как будет выглядеть матрица результата

умножения нескольких матриц  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ :

```
G = A.Inverse[RR].Transpose[A];
```

```
G // MatrixForm
```

```
Out[78]//MatrixForm = 
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

```

---

## Вводное занятие 5.

### Решение систем линейных алгебраических уравнений

Для описания электрических цепей и вывода их уравнений используются методы и алгоритмы дискретного анализа (электрическая цепь задается в виде ориентированного графа) и линейной алгебры.

В вводном занятии 5 показано, как решать системы линейных алгебраических уравнений с помощью функций пакета *Mathematica*. Всегда, когда это можно, результаты вычислений в лабораторных работах, в частности, выражения для токов и напряжений, предпочтительно получать в аналитическом (символьном виде). Как правило, эти выражения имеют громоздкий вид, зависят от большого числа параметров схемы электрической цепи – активных сопротивлений, индуктивностей, емкостей, ЭДС и т. д. В дальнейшем при исследовании схем и постановке оптимизационных задач возможно для части параметров задать их численные значения. Получение зависимостей от 1–2 переменных может задаваться графически.

#### Решение алгебраических уравнений от одной неизвестной

Основной функцией для решения алгебраических и сводящихся к ним уравнений в системе *Mathematica* является **Solve**.

В случае решения одного уравнения  $f(x) = g(x)$  относительно одной неизвестной  $x$  функция **Solve** вызывается в следующем формате:

**Solve[f[x] == g[x], x].**

Приведен простейший пример использования этой функции:

**Solve[Sqrt[x^2+1]==x+2, x]**

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{3}{4} \right\} \right\}$$

Отметим основные правила синтаксиса: во-первых, при записи уравнения используется только предикат **==** Equal. Во-вторых, найденные корни выражаются в форме правил подстановки  $x \rightarrow c$  для того, чтобы их можно было подставлять в другие выражения, не модифицируя при этом значения самого  $x$ , которое остается независимой переменной.

В системе *Mathematica* имеется еще одна функция решения алгебраических уравнений от одной неизвестной **Roots[f(x)==g(x), x]**, которая дает набор корней уравнения как объединение наборов корней

более простых уравнений. При этом ответ записывается как объединение этих более простых уравнений:

```
In[1]:= Roots[x^2+x+1/x+1/x^2 == 4, x]
Out[1]= x == 1/2(-3-√5) | x == 1/2(-3+√5) | x == 1 | x == 1
```

Чтобы перевести этот ответ в форму списка правил подстановок, порождаемую функцией `Solve`, необходимо применить к нему форматную функцию:

```
In[2]:= ToRules[%]
Out[2]= Sequence[{x -> 1/2(-3-√5)},
                  {x -> 1/2(-3+√5)}, {x -> 1}, {x -> 1}]
```

Ответ в форме `{ }` означает, что у уравнения нет решения. Например,

```
In[4]:= Solve[1 == 0, x]
Out[4]= { }
```

Ответ в форме `{ { }` означает, что любое допустимое значение аргумента служит решением уравнения. Например,

```
In[5]:= Solve[(x-1)(x+1) == x^2-1, x]
Out[5]= { { }
```

Можно получить численное значение корней с помощью функции `N[%]`, где символ «%» возвращает результат последней операции (применение этого символа облегчает выполнение последовательных операций).

## Решение систем уравнений и неравенств

Преимущества системы *Mathematica* становятся понятны, когда, к примеру, необходимо решить систему из  $m$  уравнений от  $n$  неизвестных, где  $m \gg 10$ ,  $n \gg 10$ ,  $m \neq n$ . Для наглядности проиллюстрируем способности системы на учебных примерах решение систем от трех неизвестных.

### 1. Решение систем алгебраических уравнений.

Для решения системы алгебраических уравнений

$$f_1(x, y, z) = g_1(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z) = g_n(x, y, z)$$

функция `Solve` вызывается в одном из следующих форматов:

- как функция двух аргументов, первым из которых является список уравнений, а вторым – список тех неизвестных, относительно которых решается система уравнений:

```
Solve[{f1[x, y, z] == g1[x, y, z], ...,
      fn[x, y, z] == gn[x, y, z]}, {x, y}]
```

остальные неизвестные при этом рассматриваются как параметры;

- как функция двух аргументов, первым из которых является пересечение уравнений, а вторым – список тех неизвестных, относительно которых решается система уравнений:

```
Solve[{f1[x, y, z] == g1[x, y, z] && ... &&
      fn[x, y, z] == gn[x, y, z]}, {x, y}]
```

- как функция двух аргументов, первым из которых является векторное уравнение:

$$(f_1(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)) = (g_1(x, y, z), \dots, g_n(x, y, z)),$$

а вторым – список тех неизвестных, относительно которых решается система уравнений:

```
Solve[{f1[x, y, z], ..., fn[x, y, z]} ==
      {g1[x, y, z], ..., gn[x, y, z]}, {x, y}]
```

- как функция одного аргумента, который оформляется либо как список, либо как конъюнкция уравнений, либо как векторное уравнение:

```
Solve[{f1[x, y, z] == g1[x, y, z], ...,
      fn[x, y, z] == gn[x, y, z]}]
Solve[
  {f1[x, y, z] == g1[x, y, z] && ... &&
   fn[x, y, z] == gn[x, y, z]}]
Solve[{f1[x, y, z], ..., fn[x, y, z]} ==
      {g1[x, y, z], ..., gn[x, y, z]}]
```

- как функция трех аргументов, первым из которых является система уравнений (представленная в любой из трех описанных выше эквивалентных форм), вторым – список тех неизвестных, относительно которых решается система, третьим – та неизвестная или список тех неизвестных, которые требуется исключить из ответа как в качестве неизвестных, так и в качестве параметров:

```
Solve[
  {f1[x, y, ...] == g1[x, y, ...] && ... &&
   fn[x, y, ...] == gn[x, y, ...]}, {x, y},
  {u, v}]
```

**Пример.** Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x - y = z^2 \\ x^3 = 1 \\ y^3 = 1 \end{cases}$$

относительно  $x$  и  $y$  с помощью следующей функции дает пустое множество:

```
In[1]:= Solve[{x - y == z^2,
               x^3 == 1,
               y^3 == 1}, {x, y}]
Out[1]= {}
```

хотя ясно, что система имеет решение, например,  $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ . Дело в том, что у этой системы нет общих решений, в которых  $z$  могло бы выступать в качестве параметра. Для любых допустимых значений  $x$  и  $y$  получим явное уравнение для  $z$ . При запросе разрешить систему уравнений относительно  $x$  и  $y$  система *Mathematica* ищет такие решения, в которых  $z$  выступает в качестве параметра. Следующий запрос приводит к вычислению всех 15 решений системы. Применение функции *Union* поверх функции *Solve* выдает множество всех решений:

```
In[3]:= Union[Solve[{x - y == z^2,
                    x^3 == 1, y^3 == 1},
                {x, y, z}]]
```

```
Out [3]= {{x -> 1, y -> 1, z -> 0}
          {x -> 1, z -> -sqrt(1 + (-1)^(2/3)), y -> -(-1)^(1/3)},
          {x -> 1, z -> sqrt(1 + (-1)^(2/3)), y -> -(-1)^(1/3)},
          {x -> 1, z -> -sqrt(1 - (-1)^(2/3)), y -> (-1)^(1/3)},
          {x -> 1, z -> sqrt(1 - (-1)^(2/3)), y -> (-1)^(1/3)},
          {y -> 1, z -> -sqrt(-1 - (-1)^(1/3)), x -> -(-1)^(1/3)},
          {y -> 1, z -> sqrt(-1 - (-1)^(1/3)), x -> -(-1)^(1/3)},
          {y -> 1, z -> -sqrt(-1 + (-1)^(2/3)), x -> (-1)^(2/3)},
          {y -> 1, z -> sqrt(-1 + (-1)^(2/3)), x -> (-1)^(2/3)},
          {z -> 0, x -> -(-1)^(1/3), y -> -(-1)^(1/3)},
          {z -> 0, x -> (-1)^(2/3), y -> (-1)^(2/3)},
          {z -> -sqrt(-(-1)^(1/3) - (-1)^(2/3)), x -> -(-1)^(1/3), y -> (-1)^(2/3)},
          {z -> sqrt(-(-1)^(1/3) - (-1)^(2/3)), x -> -(-1)^(1/3), y -> (-1)^(2/3)},
          {z -> -sqrt((-1)^(1/3) + (-1)^(2/3)), x -> (-1)^(2/3), y -> -(-1)^(1/3)},
          {z -> sqrt((-1)^(1/3) + (-1)^(2/3)), x -> (-1)^(2/3), y -> -(-1)^(1/3)}}}
```

Решение систем, зависящих от параметров, представляет собой серьезную задачу, так как при последовательном исключении неизвестных степень уравнений относительно остающихся неизвестных быстро растет. Например, исключая неизвестные  $y$  и  $z$  из системы

$$\begin{cases} x^2 + y + z = a \\ x + y^2 + z = b, \\ x + y + z^2 = c \end{cases}$$

получим уравнение восьмой степени относительно  $x$ , коэффициенты которого выражаются через  $a, b, c$ . Если в нижеприведенной функции убрать в конце знак «;», который означает подавление вывода на экран, можно увидеть решение в совершенно неприемлемой форме – координаты этого решения выражены в терминах объектов типа Root от многочленов степени 8, каждый из коэффициентов которого в свою очередь является многочленом от  $a, b, c$ :

```
In[6]:= Solve[{x^2 + y + z == a, x + y^2 + z == b,
              x + y + z^2 == c}, {x, y, z}];
```



Поэтому рекомендуется в тех случаях, когда неизвестно, что произойдет, сначала узнать длину ответа, в данном случае – количество решений:

```
In[7]:= Length[Union[Solve[{x^2+y+z==a,
      x+y^2+z==b, x+y+z^2==c}, {x, y, z}]]]
Out[7]= 8
```

Если решений несколько десятков или сотен, обычно смотрят на вид решений посредством функции `Short[expr, d]`, которая выводит на экран приблизительно первые  $d$  строк (чтобы получилась осмысленная часть):

```
In[8]:= Short[Union[Solve[{x^2+y+z==a,
      x+y^2+z==b, x+y+z^2==c}, {x, y, z}], 10]
Out[8]//Short = {{x ->  $\frac{1}{2(a-b)}(-2a-2b+2c+3ac+<<15>>+<<1>>+4<<1>>^2-\text{Root}[<<1>>^6, 1]^2-3c\text{Root}[-2a+<<44>>+\#1^6, 1]^2+\text{Root}[-2a+<<44>>+\#1^6, 1]^2,$ 
      y ->  $\frac{2a+<<25>>}{2(a-b)}$ , z ->  $\text{Root}[-2a+a^2-2b-2ab+b^2+2c+4ac+<<32>>+6c^2\#1^4+4\#1^3-4c\#1^2+\#1^6, 1]$ }, <<7>>}
```

## 2. Исключение неизвестных.

В тех случаях, когда уравнений недостаточно, чтобы найти все неизвестные, обычно сводят исходную систему к системе от меньшего количества переменных путем исключения некоторых из них. В случае системы алгебраических уравнений

$$f_1(x, y, z) = g_1(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z) = g_n(x, y, z)$$

в *Mathematica* основной функцией для исключения неизвестных является функция `Eliminate`, которая вызывается в формате функции двух аргументов, первым из которых является список уравнений, а вторым – исключаемая неизвестная или их список:

```
Eliminate[{f1[x, y, z] == g1[x, y, z], ...,
      fn[x, y, z] == gn[x, y, z]}, z]
```

**Пример.** Исключить из системы уравнений  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$  переменную  $y$ :

менную  $y$ :

```
In[1]:= Eliminate[{x+y+z==1, x*y*z==1}, y]
Out[1]= x^2z+x(-1+z)z--1
```

Для упрощения ответа рекомендуется поверх этой функции применять функцию `Simplify`:

```
In[2]:= Simplify[Eliminate[{x+y+z==1, x*y*z==1}, y]]
Out[2]= xz(-1+x+z)--1
```

В следующем примере исключены сразу две переменные:

```
In[15]:= Simplify[Eliminate[{u==x^5+y^5, v==x^3+y^3,
w==x^2+y^2}, {x, y}]]
Out[15]= 2u^2+30uv^2w^2+5vw^2--v^5+15u^2vw+15v^3w^2+6uw^3
```

### Линейная алгебра

Опишем простейшие матричные вычисления.

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Решение СЛАУ в системе *Mathematica* осуществляется при помощи двух функций: `LinearSolve` и `NullSpace`. Функция `LinearSolve` ищет частное решение неоднородной системы уравнений, а функция `NullSpace` – общее решение однородной системы.

Если решается одна система  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$  с данной матрицей  $\mathbf{A}$  и данным вектором-столбцом правой части  $\mathbf{B}$ , то функция `LinearSolve` вызывается в следующем формате:

**LinearSolve[A, B].**

Если необходимо решать несколько систем уравнений с одной и той же матрицей  $\mathbf{A}$  и различными правыми частями, то удобнее вызывать функцию `LinearSolve` в следующем формате:

**LinearSolve[A][B].**

Разница состоит в том, что во втором случае система записывает факторизацию матрицы  $\mathbf{A}$ , которая используется для решения системы

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ . Если матрица  $\mathbf{A}$  необратима, система *Mathematica* выдаст соответствующее сообщение.

**Пример.** Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_3 = 2 \\ -5x_1 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Для записи системы линейных алгебраических уравнений в матричном виде заданы матрицы коэффициентов системы и вектора правых частей:

$$\mathbf{A} = \{\{1, -3, 2\}, \{0, 0, 4\}, \{-5, 0, -1\}\}$$

$$\mathbf{B} = \{1, 2, 3\}$$

Найдем определитель системы с целью проверки на существование единственного решения системы.

$$\mathbf{Det}[\mathbf{A}]$$

$$60$$

Первый способ. Решение системы матричным методом:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Dot}[\mathbf{Inverse}[\mathbf{A}], \mathbf{B}]$$

$$\left\{ -\frac{7}{10}, -\frac{7}{30}, \frac{1}{2} \right\}$$

Второй способ: функция `LinearSolve[A,B]` возвращает вектор  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ , представляющий собой решение матричного уравнения  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ .

$$\mathbf{LinearSolve}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

$$\left\{ -\frac{7}{10}, -\frac{7}{30}, \frac{1}{2} \right\}$$

Рассмотрен случай вырожденной матрицы.

**Пример.** Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 5y + 8z = 0 \end{cases}$$

Введена матрица коэффициентов системы:

$$\mathbf{A} = \{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 5, 8)\}.$$

Функция **NullSpace** ищет независимые решения однородной системы с матрицей  $\mathbf{A}$ , определитель которой равен нулю:

```

Det [A]
0
{v1} = NullSpace [A]
{{-1, -1, 1}}

```

В общем случае решением однородной системы является линейная комбинация независимых решений. В данном случае решением системы является вектор  $\mathbf{X} = \{x, y, z\}$ :

$$\mathbf{X} = \lambda * \mathbf{v1}$$

$$(-\lambda, -\lambda, \lambda)$$

Проверка:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v1}$$

$$\{0, 0, 0\}$$

Для матрицы

$$\mathbf{B} = \{(1, 7, 3), (2, 4, 6), (3, 5, 8)\}$$

с ненулевым определителем

```

Det [B]
10

```

функция **NullSpace [B]** выдаст пустой список {}, поскольку однородная система уравнений с несингулярной матрицей имеет тривиальное (нулевое) решение.

При расчете электрических цепей постоянного тока методом узловых потенциалов, как правило, приходится решать систему неоднородных линейных алгебраических уравнений размерности  $q \times p$ , где  $q$  – количество узлов, определитель которой равен нулю, и число независимых уравнений на одно меньше, чем количество переменных. В этом случае решение содержит одну произвольную постоянную.

Уравнение метода узловых потенциалов в матричной форме имеет вид ([10]):

$$\mathbf{G} \cdot \varphi = \mathbf{J}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{RR}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$  – матрица узловых проводимостей,  $\Phi$  – вектор узловых потенциалов,  $\mathbf{JJ} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{RR}^{-1} \cdot \mathbf{EE}$  – вектор узловых токов. Здесь  $\mathbf{A}$  – матрица соединений (матрица инцидентности) исходного графа,  $\mathbf{RR}$  – матрица сопротивлений ветвей,  $\mathbf{EE}$  – вектор ЭДС источников ЭДС в ветвях;  $\mathbf{J}$  – вектор токов источников тока в ветвях.

Для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) найдено решение системы уравнений (1). Матрица  $\mathbf{G}$  для этой схемы была найдена в вводном занятии 4, вектор правых частей имеет следующий вид:

$$\mathbf{JJ} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Inverse}[\mathbf{RR}] \cdot \mathbf{EE}$$

$$\begin{pmatrix} E1 & -E1 \\ R1 & R1 \end{pmatrix}$$

Задана переменная  $Eg$ , описывающая систему уравнений

$$\mathbf{Eg} = \mathbf{G} \cdot \Phi == \mathbf{JJ}$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} \right) \varphi[1] + \left( -\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2} - \frac{1}{R3} \right) \varphi[2], \right.$$

$$\left. \left( -\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2} - \frac{1}{R3} \right) \varphi[1] + \left( \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} \right) \varphi[2] \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} E1 & -E1 \\ R1 & R1 \end{pmatrix}$$

Эта система имеет сингулярную матрицу коэффициентов, т. е. ее определитель равен нулю:

$$\mathbf{Det}[\mathbf{G}]$$

$$0,$$

причем

$$\mathbf{Int}[64] := \mathbf{NullSpace}[\mathbf{G}]$$

$$\mathbf{Out}[64] = \{\{1, 1\}\}$$

Систему можно решить путем исключения переменных, а можно поступить следующим образом. Введен новый вектор, из которого удален один элемент. В данном случае пусть это будет потенциал второго узла:

$$\Phi1 = \mathbf{Delete}[\Phi, 2]$$

$$\{\varphi[1]\}$$

Система решена относительно нового вектора переменных:

$$\text{Solve}[\text{Eq}, \Phi 1]$$

$$\left\{ \left\{ \varphi[1] \rightarrow \frac{-E1R2R3 - R1R2\varphi[2] - R1R3\varphi[2] - R2R3\varphi[2]}{R1R2 + R1R3 + R2R3} \right\} \right\}$$

Для извлечения решения из списка списков к полученному выражению применена операция извлечения части:

$$\text{Solve}[\text{Eq}, \Phi 1][[1]]$$

$$\left\{ \varphi[1] \rightarrow \frac{-E1R2R3 - R1R2\varphi[2] - R1R3\varphi[2] - R2R3\varphi[2]}{R1R2 + R1R3 + R2R3} \right\}$$

Полученное решение можно подставить в вектор исходных переменных – узловых потенциалов  $\Phi$  (в пакете *Mathematica* такой вектор обозначен как  $\Phi$ ):

$$(\Phi /. \text{Solve}[\text{Eq}, \Phi 1])[ [1]]$$

$$\left\{ \frac{-E1R2R3 - R1R2\varphi[2] - R1R3\varphi[2] - R2R3\varphi[2]}{R1R2 + R1R3 + R2R3}, \varphi[2] \right\}$$

К полученному выражению применена функция упрощения (сравните с предыдущим выводом):

$$\Phi\Phi = \text{Simplify}[(\Phi /. \text{Solve}[\text{Eq}, \Phi 1])[ [1]]]$$

$$\left\{ \frac{E1R2R3 + (R2R3 + R1(R2 + R3)) \varphi[2]}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \varphi[2] \right\}$$

Как и следовало ожидать, структура решения имеет вид  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_s$ , где  $\Phi_0$  – общее решение соответствующей однородной системы  $\mathbf{G} \cdot \Phi = 0$ ,  $\Phi_0 = C\{1, 1\}$ ,  $\Phi_s$  – частное решение неоднородной системы уравнений (1):

$$\Phi\Phi[[1]] = \text{Collect}[\Phi\Phi[[1]], \varphi[2]]$$

$$\frac{E1R2R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)} + \varphi[2]$$

$$\Phi\Phi$$

$$\left\{ \frac{E1R2R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)} + \varphi[2], \varphi[2] \right\}$$

Решения найдены в символьном виде. Если подставить исходные данные

$$\begin{aligned} SSS &= \{R1 \rightarrow 20, \\ &R2 \rightarrow 50, \\ &R3 \rightarrow 100, \\ &E1 \rightarrow 100\}; \end{aligned}$$

можно получить вектор значений потенциалов в узлах схемы:

$$\text{Simplify}[\Phi\Phi /. \{\varphi[2] \rightarrow 100\} /. SSS] / N$$

$$\{162.5, 100.\}$$

Найдены напряжения в ветвях схемы по формуле  $U = A^T \cdot \varphi$ :

$$U = \text{Simplify}[\text{Transpose}[A] . \Phi\Phi]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E1R2R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \\ \frac{E1R2R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \frac{E1R2R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)} \end{array} \right\}$$

токи в сопротивлениях схемы по формуле  $IR = RR^{-1} \cdot (U + EE)$ :

$$IR = \text{FullSimplify}[\text{Inverse}[RR] . (U + EE)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E1(R2 + R3)}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \\ \frac{E1R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \frac{E1R2}{R2R3 + R1(R2 + R3)} \end{array} \right\}$$

и токи в ветвях схемы по формуле  $IP = IR - J$ :

$$IP = IR - J$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E1(R2 + R3)}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \\ \frac{E1R3}{R2R3 + R1(R2 + R3)}, \frac{E1R2}{R2R3 + R1(R2 + R3)} \end{array} \right\}$$

Так как в рассмотренной схеме цепи нет источников тока (вектор токов источников тока – нулевой), два последних списка – одинаковы.

Можно получить числовые значения напряжений и токов с помощью подстановки заданных значений параметров схемы:

```

U/.SSS//N
IR/.SSS//N
IP/.SSS//N
{-62.5, 62.5, 62.5}
{1.875, 1.25, 0.625}
{1.875, 1.25, 0.625}

```

Для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) также найдены решения по методу контурных токов. Для этого сначала вычислена матрица независимых контуров:

```

B = NullSpace[A]
B//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


```

Для данной схемы число независимых контуров равно двум. Выбравы системой такие контуры: первый состоит из первой и третьей ветви и содержит источник ЭДС и сопротивления  $R_1$  и  $R_3$ , а второй – из первой и второй ветви и содержит источник ЭДС и сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ .

Уравнения, составленные по методу контурных токов в матричной форме:

$$\mathbf{RK} \cdot \mathbf{IL} = \mathbf{ELI},$$

где матрица контурных сопротивлений  $\mathbf{RK} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{RR} \cdot \mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{IL}$  – вектор контурных токов,  $\mathbf{ELI} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{EE} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{RR} \cdot \mathbf{J}$  – вектор контурных ЭДС.

```

RK = B.RR.Transpose[B]
RK//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} R1+R3 & R1 \\ R1 & R1+R2 \end{pmatrix}$$

ELI = B.EE - B.RR.J
{E1, E1}

```



Для задания вектора контурных токов сначала вычислено их число:

```
z = Length[B]
2
IL = Table[i1[i], {i, 1, z}]
{i1[1], i1[2]}
```

Сформирована система уравнений:

```
Eq = RK . IL == EL1
{(R1+R3) i1[1]+R1 i1[2],
 R1 i1[1]+(R1+R2) i1[2]}==
{E1, E2}
```

Матрица этой системы неособенная, так как ее определитель не равен нулю:

```
Det[RK]
R1R2+R1R3+R2R3
```

Решена система уравнений относительно вектора переменных – контурных токов:

```
IL = IL /. Solve[Eq, IL] [[1]]
{
   $\frac{E1R2}{R1R2+R1R3+R2R3}$ ,
   $\frac{E1R3}{R1R2+R1R3+R2R3}$ 
}
```

По ним найдены токи в ветвях схемы:

```
IP1 = Simplify[Transpose[B] . IL]
{
   $\frac{E1 (R2+R3)}{R2R3+R1 (R2+R3)}$ ,  $\frac{E1R3}{R2R3+R1 (R2+R3)}$ ,  $\frac{E1R2}{R2R3+R1 (R2+R3)}$ 
}
```

и токи в сопротивлениях схемы:

```
IR1 = IP1 + J
```

```
{
   $\frac{E1 (R2+R3)}{R2R3+R1 (R2+R3)}$ ,  $\frac{E1R3}{R2R3+R1 (R2+R3)}$ ,  $\frac{E1R2}{R2R3+R1 (R2+R3)}$ 
}
```

Напряжения в ветвях схемы определятся следующим образом:

$$U1 = RR \cdot IR1 - EE$$

$$\left\{ -E1 + \frac{E1R1(R2+R3)}{R2R3+R1(R2+R3)}, \frac{E1R2R3}{R2R3+R1(R2+R3)}, \frac{E1R2R3}{R2R3+R1(R2+R3)} \right\}$$

Решение получено в символьном виде. Для того чтобы получить ответ в численном виде, надо задать исходные числовые значения параметров схемы электрической цепи. Это сделано с помощью следующей подстановки:

$$\begin{aligned} SSS = \{ & R1 \rightarrow 20, \\ & R2 \rightarrow 50, \\ & R3 \rightarrow 100, \\ & E1 \rightarrow 100 \}; \end{aligned}$$

Тогда в численном виде:

$$\begin{aligned} IP1 / .SSS / / N \\ IR1 / .SSS / / N \\ U1 / .SSS / / N \\ \{ 1.875, 1.25, 0.625 \} \\ \{ 1.875, 1.25, 0.625 \} \\ \{ -62.5, 62.5, 62.5 \} \end{aligned}$$

Сравните полученные результаты для токов и напряжений в символьном и численном виде, полученные двумя разными методами: методом узловых потенциалов и методом контурных токов.

---

## Вводное занятие 6.

### Решение дифференциальных уравнений

В вводном занятии 6 приведены функции системы *Mathematica*, с помощью которых можно решать обыкновенные дифференциальные уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

#### Дифференцирование

В системе *Mathematica* имеются две функции символьного дифференцирования `D` и `Derivative`: функция вычисления производной `D`, которая находит значение производной, и оператор дифференцирования `Derivative[1]` (в операторной форме «'»), который вычисляет производную как функцию.

В простейшем виде вычисление производной имеет формат

$$D[f[x], x],$$

где  $f(x)$  — функция, которую требуется продифференцировать, а  $x$  — переменная, по которой производится дифференцирование.

#### Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Основной функцией для решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в системе *Mathematica* является функция `DSolve`.

Для решения одного дифференциального уравнения

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ где } y = y(x),$$

функция `DSolve` может использоваться в одном из следующих форматов:

`DSolve[equation, y[x], x]`

`DSolve[equation, y, x]`

Эти форматы отличаются тем, что в первом случае ответ записывается в форме правила подстановки для значений  $y(x)$ , а во втором — в форме функции  $y$  в формате чистой функции.

Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для системы *Mathematica* является чисто алгебраической задачей.

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 1.$$

```
In[2]:= DSolve[y''[x]+2*y'[x]-y[x]==1,
              y[x], x]
```

```
Out[2]= {{y[x]→
          -1+e(-1-√5)xC[1]+e(-1+√5)xC[2]}}
```

При усложнении правой части этого уравнения, а именно

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = \exp(a \cdot x),$$

получено:

```
In[3]:= FullSimplify[DSolve[y''[x]+2*y'[x]-y[x]==
                          Exp[a*x], y[x], x]
```

```
Out[3]= {{y[x]→(e(-1+√5)x(e(1+√5+ax)+(-1+a(2+a)))
              (C[1]+e2√5xC[2]))/(1+a(2+a))}}
```

В подобных случаях следует применять функции `Simplify` или `FullSimplify` для приведения ответа к более компактной форме.

При расчете переходных процессов в электрических цепях приходится решать дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений. Например, рассмотрено уравнение вида

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} = U$$

(переходный процесс в цепи постоянного тока) и получено его решение сначала в символьном виде:

```
Eqq={R1 i[t]+L2 D[i[t], t]-U==0}
```

```
{-U+R1 i[t]+L2 i'[t]==0}
```

```
DSolve[Eqq, {i[t]}, t]
```

```
{{i[t]→(U/R1+e(-R1 t/L2)C[1])}}
```

Как видно, общее решение содержит одну произвольную константу. Для определения частного решения надо решить задачу Коши, то есть к уравнению добавить начальное условие:

```
FullSimplify[DSolve[(Eqq, i[0]==0), {i[t]}, t]]
```

$$\left\{ \left\{ i[t] \rightarrow \frac{U - e^{-\frac{Rt}{L2}} U}{R1} \right\} \right\}$$

Введена переменная II, которой присвоено это решение:

$$\begin{aligned} \text{II} &= \text{i[t]} /. \%[\{1\}][\{1\}] \\ &= \frac{U - e^{-\frac{Rt}{L2}} U}{R1} \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений параметров электрической цепи решение примет вид

$$\begin{aligned} \text{SC} &= \{L2 \rightarrow 1, R1 \rightarrow 30, C3 \rightarrow 0.00005, U \rightarrow 1\}; \\ \text{II} &= \text{II} /. \text{SC} \\ &= \frac{1}{30} (1 - e^{-30t}) \end{aligned}$$

## Решение систем дифференциальных уравнений

В этом случае функция **DSolve** вызывается в одном из следующих форматов:

```
DSolve[{equation1, equation2, ...},
       {x[t], y[t], ...}, t]
DSolve[{equation1, equation2, ...},
       {x, y, ...}, t]
```

В обоих случаях как уравнения, так и неизвестные функции должны оформляться в виде списков.

**Пример.** Решить систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u = U \\ C \frac{du}{dt} = i \end{cases}$$

и получить его решение в символьном виде:

```
Eq = (Ri[t]+Li'[t]+u[t]==U, CC u'[t]==i[t]);
DSolve[Eq, {u[t], i[t]}, t][[1]];
```

Решение даже такой простой системы уравнений имеет громоздкий вид. После упрощения его вид таков:

$$\text{FullSimplify[\%]}$$

$$i[t] \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{-4L+CC R^2}} e^{\frac{R+\sqrt{-4L+CC R^2}}{CC} t}$$

$$\left( \left( 1 + e^{\frac{\sqrt{-4L+CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}} \right) \sqrt{-4L+CC R^2} C[1] - \sqrt{CC} \left( -1 + e^{\frac{\sqrt{-4L+CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}} \right) (RC[1] + 2C[2]) \right),$$

$$u[t] \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{CC}\sqrt{-4L+CC R^2}} e^{\frac{R+\sqrt{-4L+CC R^2}}{CC} t}$$

$$\left( 2 \left( -1 + e^{\frac{\sqrt{-4L+CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}} \right) LC[1] + CC \left( -1 + e^{\frac{\sqrt{-4L+CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}} \right) RC[2] + \sqrt{CC}\sqrt{-4L+CC R^2} \right)$$

$$\left( 2e^{\frac{R+\sqrt{-4L+CC R^2}}{CC} t} U + C[2] + e^{\frac{\sqrt{-4L+CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}} C[2] \right)$$

### Начальные условия

С точки зрения системы *Mathematica* решение задачи Коши ничем не отличается от решения систем дифференциальных уравнений:

```
DSolve[{equation, y[a] == c}, y[x], x]
DSolve[equation && y[a] == c, y[x], x]
```

Найдено частное решение предыдущей системы дифференциальных уравнений при подстановке начальных условий  $i(0)=0$ ,  $u(0)=0$ :

```
Eq = {Ri[t] + Li'[t] + u[t] == U, CC u'[t] == i[t]};
DSolve[{Eq, i[0] == 0, u[0] == 0}, u[t], i[t], t][[1]]
XX = FullSimplify[%]
```

$$i[t] \rightarrow \frac{\sqrt{CC} e^{\frac{\left(k + \sqrt{-4L + CC R^2}\right) t}{2L}} \left(-1 + e^{\frac{\sqrt{-4L + CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}}\right) U}{\sqrt{-4L + CC R^2}},$$

$$u[t] \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{-4L + CC R^2}} e^{\frac{\left(k + \sqrt{-4L + CC R^2}\right) t}{2L}}$$

$$\left(\sqrt{CC} \left(-1 + e^{\frac{\sqrt{-4L + CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}}\right) R + \left(1 + e^{\frac{\sqrt{-4L + CC R^2} t}{\sqrt{CC} L}} - 2e^{\frac{\left(k + \sqrt{-4L + CC R^2}\right) t}{2L}}\right) \sqrt{-4L + CC R^2}\right) U$$

После подстановки числовых значений параметров электрической цепи ( $L=0.1$ ,  $U=1$ ,  $R=1$ ,  $CC=1$ ) решение для напряжения и тока в цепи примет вид

```
Simplify[XX /. {CC -> 1, R -> 1, L -> .1, U -> 1}]
{i[t] -> 1.29099 e^{-0.87298 t} (-1 + e^{-1.14597 t}),
 u[t] -> 1 + 0.145497 e^{-0.87298 t} - 1.1455 e^{-1.12782 t}}
```

### Численное решение дифференциальных уравнений

В системе *Mathematica* такая задача решается с помощью функции численного решения дифференциальных уравнений **NDSolve**, которая для случая функции одной переменной вызывается в формате

```
NDSolve[equations, y, {x, a, b}],
```

где **equations** представляют собой дифференциальные уравнения и граничные условия для функции  $y$ , которая интерполируется при  $a \leq x \leq b$ . Функция **NDSolve** содержит большое количество опций и в ней использованы по крайней мере полтора десятка различных приближенных методов с возможностью переключения между ними в процессе вычисления.

Функция **NDSolve** возвращает интерполирующую функцию. Интерполирующая функция является численным приближением к точному решению. График этой функции может быть построен при помощи средств трехмерной графики.



---

## Вводное занятие 7. Построение графиков

В вводном занятии 7 приведены функции двумерной и трехмерной графики, которые предназначены для визуализации вычислений. Рассмотрены опции графических функций. Даны примеры построения графиков разнообразных функций одной и двух переменных, функций, заданных в неявном виде, решений обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д.

### Построение графика функции

Концептуально графики в системе *Mathematica* являются графическими объектами, которые создаются соответствующими графическими функциями, поэтому графики могут являться значениями переменных.

График функции строится при помощи функции `Plot`, которая порождает объект формата `Graphics`.

Функция `Plot[f[x], {x, a, b}]` строит график функции  $f$  по переменной  $x$  в интервале от  $a$  до  $b$ .

**Пример 1.** Построить график функции  $y = x^4 - 5x^2 + 6x - 1$  (рис. В.7.1).

```
Plot[x^4 - 5x^2 + 6x - 1, {x, -3, 3}];
```

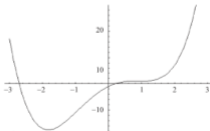


Рис. В.7.1

**Пример 2.** Построить график функции ошибок  $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  (рис. В.7.2).

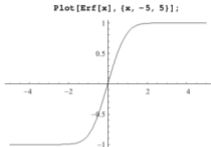


Рис. В.7.2

**Пример 3.** Для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) построить зависимость напряжения третьей ветви схемы от значений сопротивления во второй ветви.

Для этого образована новая подстановка SSS1 (из SSS исключено сопротивление  $R_2$ ), которая использована для получения выражения напряжения третьей ветви схемы:

$$\text{SSS1} = \{\text{R1} \rightarrow 20, \text{R3} \rightarrow 100, \text{E1} \rightarrow 100\};$$

$$\text{Y} = \text{U1}[\{3\}] / . \text{SSS1}$$

$$\frac{10000\text{R2}}{100\text{R2} + 20(100 + \text{R2})}$$

Полученное выражение рассмотрено как функция одной переменной  $\text{R2}$  и построен ее график (рис. В.7.3):

$$\text{Plot}[Y, \{\text{R2}, 0, 100\}];$$

Функция **Plot** имеет 30 факультативных аргументов, называемых *опциями*. По умолчанию построение графиков сопровождается выводом осей, заданием масштаба и нанесением необходимых числовых значений по осям и т. д. Пользователь по своему усмотрению может задавать опции функции **Plot**, тем самым, настраивая график согласно необходимым требованиям.

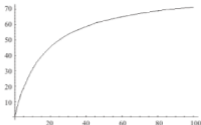


Рис. В.7.3

Значения опций `Plot Options[Plot]` по умолчанию приведены ниже:

`Options[Plot]`

```

{AspectRatio  $\rightarrow \frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ , Axes  $\rightarrow$  Automatic,
 AxesLabel  $\rightarrow$  None, AxesOrigin  $\rightarrow$  Automatic,
 AxesStyle  $\rightarrow$  Automatic, Background  $\rightarrow$  Automatic,
 ColorOutput  $\rightarrow$  Automatic, Compiled  $\rightarrow$  True,
 DefaultColor  $\rightarrow$  Automatic, Epilog  $\rightarrow$  {}, Frame  $\rightarrow$  False,
 FrameLabel  $\rightarrow$  None, FrameStyle  $\rightarrow$  Automatic,
 FrameTicks  $\rightarrow$  Automatic, GridLines  $\rightarrow$  None,
 ImageSize  $\rightarrow$  Automatic, MaxBend  $\rightarrow$  10.,
 PlotDivision  $\rightarrow$  30., PlotLabel  $\rightarrow$  None, PlotPoints  $\rightarrow$  25,
 PlotRange  $\rightarrow$  Automatic, PlotRegion  $\rightarrow$  Automatic,
 PlotStyle  $\rightarrow$  Automatic, Prolog  $\rightarrow$  {}, RotateLabel  $\rightarrow$  True,
 Ticks  $\rightarrow$  Automatic, DefaultFont  $\rightarrow$  $DefaultFont,
 DisplayFunction  $\rightarrow$  $DisplayFunction,
 FormatType  $\rightarrow$  $FormatType, TextStyle  $\rightarrow$  $TextStyle}

```

**Пример 4.** Сравнить два графика функции  $y = \ln x + \cos x$ , один из которых построен со значениями опций по умолчанию (рис. В.7.4), для второго графика задана настройка некоторых самых важных опций (рис. В.7.5):

```
Plot[Log[x]+Cos[x], {x, 0, 5}];
```

```
Plot[Log[x]+Cos[x], {x, 0, 5},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-3, 2},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[1.5],
  AxesStyle -> AbsoluteThickness[1],
  GridLines -> Automatic, PlotLabel -> "y = ln x + cos x"];
```

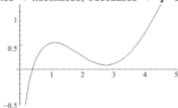


Рис. В.7.4

$$y = \ln x + \cos x$$

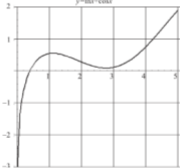


Рис. В.7.5

Ниже пояснено использование опций.

Опция **AspectRatio** задает форматное отношение (отношение высоты рисунка к его ширине), которое по умолчанию равно  $1/\text{GoldenRatio}$ . Это означает, что рисунок имеет пропорции стандартного листа бумаги формата А4 в альбомной ориентации. Обычно полагают либо **AspectRatio**  $\rightarrow$  1 — в этом случае рисунок вписывается

в квадрат, либо `AspectRatio`  $\rightarrow$  `ysize/xsize`, где `ysize` равно разности концов отрезка `PlotRange`, а `xsize=b-a` — в этом случае масштаб по осям одинаков, либо `AspectRatio`  $\rightarrow$  `Automatic` — в этом случае система сама решает, что лучше (обычно она пытается задать одинаковый масштаб по осям).

**Пример 5.** Показать работу опции `AspectRatio`. По умолчанию `AspectRatio`  $\rightarrow$  `1/GoldenRatio`, поэтому окружность на рис. В.7.6 выглядит как эллипс, для того чтобы увидеть окружность (рис. В.7.7), необходимо задать опцию `AspectRatio`  $\rightarrow$  `Automatic`.

```
Show[Graphics[Circle[{0, 0}, 1]]];
Show[Graphics[Circle[{0, 0}, 1],
  AspectRatio  $\rightarrow$  Automatic]];
```



Рис. В.7.6

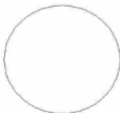


Рис. В.7.7

Опция `PlotRange` для графика задает диапазон изменения значений функции  $y$ . Когда функция слишком быстро растет или убывает, система не всегда удачно выбирает значение `PlotRange` и отсекает наиболее интересные части графика. Поэтому часто приходится задавать диапазон вручную: `PlotRange`  $\rightarrow$  `All` пытается строить график

для всех значений функции  $y$  при  $x$ , меняющемся в заданных пределах; **PlotRange**  $\rightarrow$   $\{c,d\}$  предлагает функции строить только ту часть графика, которая помещается в горизонтальной полосе  $c \leq y \leq d$ .

При построении графика функции  $y = \ln x + \cos x$  значение опции **PlotRange** было выбрано так, чтобы **ysize** равнялось **xsize**. При этом установка **AspectRatio**  $\rightarrow$  **Automatic** привела к тому, что масштаб по осям одинаков.

Опция **PlotStyle** задает стиль графика, т. е. значения применяемых к нему графических директив. Ширина = **Thickness** и абсолютная ширина = **AbsoluteThickness**, штриховка = **Dashing** и абсолютная штриховка = **Absolute Dashing** описывают плотность и прерывистость кривой. Уровень серого = **GrayLevel** меняется от 0 (черный) до 1 (белый), тон = **Hue** задается списком трех координат HSB (Hue, Saturation, Brightness), цвет = **RGBColor** задается списком трех координат RGB (Red, Green, Blue) и так далее.

Опция **AxesStyle** задает стиль осей, т. е. значения графических директив, применяемых к осям.

Опция **GridLines** задает координатную сетку. По умолчанию **GridLines**  $\rightarrow$  **None**, координатная сетка не показывается, показываются координатные оси; **GridLines**  $\rightarrow$  **Automatic** — прямые проводятся через метки (**Ticks**) на всех осях (как правило, через целые точки на осях); **GridLines**  $\rightarrow$   $\{\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_m\}\}$  — прямые, параллельные оси  $y$ , проводятся через точки на оси  $x$ , а прямые, параллельные оси  $x$  — через точки  $y_1, \dots, y_m$  на оси  $y$ .

Опция **PlotLabel** задает *ярлык графика*, т. е. заголовок или название, которое обычно пишется над графиком. Если текст, включаемый в задание этой опции, заключен в кавычки, то заданная последовательность символов превращается в `string` = String, текстовый объект, над которым не производятся никакие обычные вычисления.

Другие близкие опции: *ярлыки осей* = **AxesLabel** — текст, который пишется на осях; *ярлыки рамки* = **FrameLabel** — текст, который пишется на рамке, *легенда* = **PlotLegend** — помещенные в рамку пояснения под графиком.

На следующем примере покажем работу опции **Ticks** — *метки*, т. е. характерные точки, отмечаемые на осях. По умолчанию система сама выбирает такие точки. Другие возможные установки: **Ticks**  $\rightarrow$  **None** — метки на осях не ставятся; **Ticks**  $\rightarrow$   $\{\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_m\}\}$  — метки на оси  $y$  ставятся в точках  $y_1, \dots, y_m$ , а на оси  $x$  — в точках  $x_1, \dots, x_n$ .

**Пример 6.** Построить график функции  $y = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$  (рис. В.7.8).

```
Plot[Sin[Cos[x]]+Cos[Sin[x]], {x, -3*Pi, 3*Pi},
  AspectRatio -> 1/3, PlotRange -> {0, 2.5},
  Ticks -> {Table[n*Pi/2, {n, -5, 5}], {1, 2}},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[1.5],
  AxesStyle -> AbsoluteThickness[1],
  GridLines -> {Table[n*Pi/2, {n, -5, 5}], {1, 2}},
  PlotLabel -> "y = sin(cosx)+cos(sinx)";
```

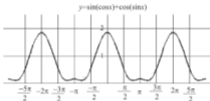


Рис. В.7.8

Для сравнения график той же функции, но с опциями по умолчанию, приведен на рис. В.7.9:

```
Plot[Sin[Cos[x]]+Cos[Sin[x]], {x, -3*Pi, 3*Pi}];
```

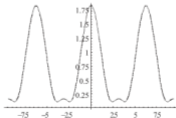


Рис. В.7.9

Если на протяжении сессии строятся несколько графиков с одинаковыми значениями некоторых опций, имеет смысл с самого начала изменить опции функции `Plot`. Например, для того чтобы во всех графиках, которые необходимо строить на протяжении сессии, форматное отношение стало по умолчанию равным 1, а метки на осях не ставились, нужно в начале сессии задать следующую функцию:

```
SetOptions[Plot, AspectRatio -> 1, Ticks -> None]
```

На рис. В.7.10 построен график напряжения из примера 3 с учетом некоторых опций (сравнить с рис. В.7.3):

```
Plot[Y, {R2, 0, 100}, AxesLabel -> {"R2", "U"},  
Background -> RGBColor[0.8, 0.8, 0.8],  
AxesStyle -> {RGBColor[1, 0, 0],  
Thickness[0.008]},  
PlotStyle -> {Hue[0.6], Thickness[0.01]},  
GridLines -> Automatic,  
PlotLabel -> "Зависимость U от R2";
```

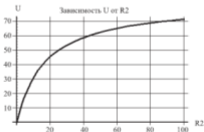


Рис. В.7.10

### Построение графиков нескольких функций на одном рисунке

Функция `Plot[{f1[x], f2[x], ...}, {x, a, b}]` одновременно строит графики функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  по переменной  $x$  на интервале от  $a$  до  $b$ . Эти функции задаются списком.



**Пример 7.** Построить семейство синусоид на одном графике (рис. В.7.11).

```
Plot[{Sin[x], Sin[2x], Sin[3x]}, {x, 0, 2π}];
```

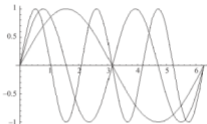


Рис. В.7.11

**Пример 8.** Для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) построить на одном рисунке зависимости токов в ветвях схемы от значений сопротивления во второй ветви.

При помощи уже созданной в примере 3 подстановкой **SSS1** сначала выписаны выражения для токов в ветвях схемы:

$$Y1 = IP1[[1]] /. SSS1$$

$$\frac{100(100 + R2)}{100R2 + 20(100 + R2)}$$

$$Y2 = IP1[[2]] /. SSS1$$

$$\frac{10000}{100R2 + 20(100 + R2)}$$

$$Y3 = IP1[[3]] /. SSS1$$

$$\frac{100R2}{100R2 + 20(100 + R2)}$$

Графики токов в ветвях построены на одном рисунке как функции от одной переменной ( $R_2$ ) (рис. В.7.12):

```
Plot[{Y1, Y2, Y3}, {R2, 0, 100}];
```

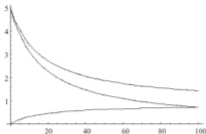


Рис. В.7.12

**Пример 9.** Сравнить графики функций  $\cos x$ ,  $\cos(\cos x)$ ,  $\cos^2 x$  (рис. В.7.13).

```
Plot[{Cos[x], Cos[Cos[x]], Cos[x]^2},
  {x, -2*Pi, 2*Pi},
  PlotStyle ->
    {{AbsoluteThickness[1.5],
      Dashing[{0.002, 0.02]}},
     {AbsoluteThickness[1],
      GrayLevel[0]},
     {AbsoluteThickness[1], Dashing[{0.03]}]},
  Ticks -> {Table[n*Pi/2, {n, -4, 4}], {-1, 0.5, 1}},
  AxesStyle -> AbsoluteThickness[1],
  PlotLabel -> "cosx, cos(cosx), cos^2x";
```

Аргументы опций называются директивами. Значения графических директив для списка функций могут задаваться тоже списком, при этом  $i$ -й элемент этого списка будет применяться к  $i$ -й функции. Директива **Dashing** описывает штриховку. Ее аргумент задается в виде списка, элементы которого определяют длины последовательных сегментов кривой (в долях от общего размера графика), из которых нечетные элементы закрашиваются, а четные — не закрашиваются. После исчерпания элементов списка длины циклически повторяются.

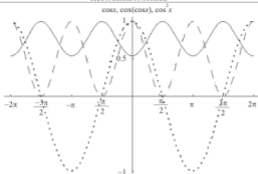


Рис. В.7.13

Если вместо штриховки в примере 9 варьировать цвет кривых с помощью опции **PlotStyle**:

```
PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0],
             RGBColor[0, 0, 1]}
```

то первая кривая ( $\cos x$ ) изображалась бы красным цветом, вторая ( $\cos(\cos x)$ ) — зеленым, и третья ( $\cos^2 x$ ) — синим.

Можно определить цвета, подключив пакет расширения `<<Graphics`Colors``, после чего можно обращаться ко всем обычным цветам по их английским названиям (всего 193 названия). Для примера 9 можно набрать

```
PlotStyle → {Red, Green, Blue}
```

**Пример 10.** Вывести график семейства косинусов без указания осей и масштаба, с фоном подложки, без изменения соотношения высоты и ширины графиков (рис. В.7.14).

```
Plot[{Cos[x], Cos[2x], Cos[3x]}, {x, -π, π},
     Axes → False, AspectRatio → Automatic,
     Background → RGBColor[0.9, 0.7, 0.9]];
```

Работа опций **Hue** и **GrayLevel** показана на примере построения графиков функции Бесселя (рис. В.7.15, В.7.16):

```
Plot[{BesselJ[0, x],
```

```

BesselJ[1, x]], {x, 0, 20},
PlotStyle -> {Hue[0.01], Hue[0.4]}};
Plot[{BesselJ[0, x],
BesselJ[1, x]], {x, 0, 20},
PlotStyle -> {GrayLevel[0.01], GrayLevel[0.4]}};

```

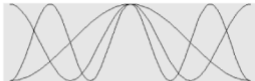


Рис. В.7.14

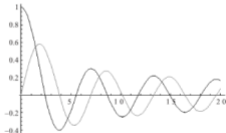


Рис. В.7.15

**Замечание:** функция `Plot` вычисляет лишь значения первого аргумента в каких-то точках. Поэтому, хотя ее первый аргумент может быть списком функций, этот список должен быть задан явно, а не посредством функции генерации списков.

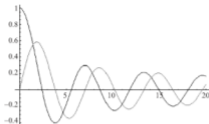


Рис. В.7.16

На рис. В.7.17 построены графики токов из примера 8 с показом работы некоторых опций. Подпись к рисунку сделана с помощью пакета расширения `Graphics`Legend``

```
<< Graphics`Legend`
Plot[{Y1, Y2, Y3}, {R2, 0, 100}, AxesLabel -> {"R2", "IP"},
PlotStyle -> {GrayLevel[0],
  GrayLevel[0], Dashing[{0.2]}],
  GrayLevel[0], Dashing[{0.5]}]},
PlotLegend -> {"в 1 ветви", "в 2 ветви",
  "в 3 ветви"}, LegendPosition -> {1, -0.5},
LegendTextSpace -> 6, LegendLabel -> "Токи",
LegendLabelSpace -> 0.7,
LegendBackground -> GrayLevel[0.8],
LegendShadow -> {.1, -.2},
Background -> GrayLevel[.9]};
```

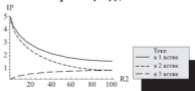


Рис. В.7.17

### Комбинирование графиков

Функция `Show[plot1, plot2, ...]` строит несколько графиков с наложением их друг на друга.

**Пример 11.** На одном рисунке построить графики функций  $y = x \sin x$  и  $y = x \cos x$  (рис. В.7.18 в).

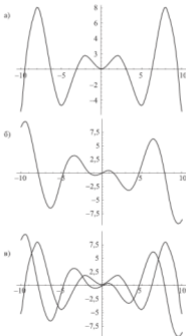


Рис. В.7.18

```

p1=Plot[x Sin[x], {x, -10, 10}];
p2=Plot[x Cos[x], {x, -10, 10}];
Show[{p1, p2}];

```

Переменным p1 и p2 присвоены графики функций в качестве значений (рис. В.7.18 а,б). Такие переменные становятся графическими объектами, используемыми функцией **Show** для вывода на экран дисплея (рис. В.7.18 в).

**Пример 12.** Построить потенциальную диаграмму выбранного контура для схемы электрической цепи (рис. В.3.1).

Для этого был выбран контур на схеме электрической цепи, проходящий через узлы 1, 2, 3 и 4, задан начальный узел (например, узел 4) и направление обхода контура (по часовой стрелке). На диаграмме отмечены точки, соответствующие потенциалам узлов рассмотренного контура. Абсцисса точки равна сумме сопротивлений ветвей, соединяющих начальный узел с рассмотренным узлом, ордината равна значению потенциала в этом узле. Задан набор узлов схемы, для которых будет строиться диаграмма:

$$K = \{4, 1, 2, 3, 4\};$$

Записан набор номеров ветвей, которые последовательно соединяют заданные узлы:

$$NH = \{5, 1, 3, 7\};$$

Создан набор значений потенциалов в этих узлах:

$$Ff = \text{Table}[\Phi\Phi[K[[i]]] /. \{\phi[1] \rightarrow 0\} /. SSS, \\ \{i, 1, \text{Length}[K]\} // N];$$

Построен набор сопротивлений ветвей, входящих в контур цепи:

$$rrr = \text{Table}[R[NH[[i]]] /. \{\phi[1] \rightarrow 0\} /. SSS, \\ \{i, 1, \text{Length}[NH]\} // N];$$

Построен вектор сопротивлений, соответствующих абсциссам точек потенциальной диаграммы:

$$y = \text{Table}[\text{Sum}[rrr[[i]], \{i, 1, k\}], \\ \{k, 0, \text{Length}[NH]\}];$$

Сначала с помощью графической функции

$$\text{ListPlot}[\{x1, y1\}, \{x2, y2\}, \dots]$$

построен график по точкам  $(x, y)$ , соединив их отрезками прямых линий (рис. В.7.19). Координаты точек заданы с помощью функции **Table**.

```
Y1 = ListPlot[Table[{y[[i]], Ff[[i]]},  
  {i, 1, Length[K]}], PlotJoined → True];
```

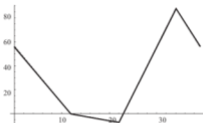


Рис. В.7.19

Концы отрезков прямых линий обозначены черными кружками (рис. В.7.20):

```
Y2 = ListPlot[Table[{y[[i]], Ff[[i]]},  
  {i, 1, Length[K]}],  
  PlotStyle → PointSize[.02];
```

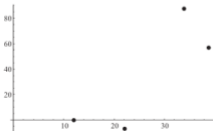


Рис. В.7.20



Построена штриховая прямая на уровне значения потенциала начального узла 4 (рис. В.7.21):

```
Y3=Plot[Ff[[1]], {x, 0, 40},
        PlotStyle -> Dashing[{0.05, 0.025}]];
```

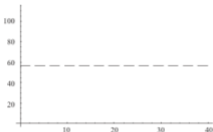


Рис. В.7.21

Выполнено наложение графиков, показанных на рис. В.7.19 — рис. В.7.21, и получена потенциальная диаграмма для выбранного контура (рис. В.7.22):

```
Show[{Y1, Y2, Y3,
Graphics[
Table[Text[K[[i]], {y[[i]],
Ff[[i]],
{-4, 0}], {i, 1, Length[K]}],
PlotRange -> All]],
AxesLabel -> {"R, Ом", "φ, В"},
Frame -> False,
PlotLabel -> StyleForm["Потенциальная
диаграмма для
выбранного контура",
FontSize -> 8],
PlotRange -> All];
```

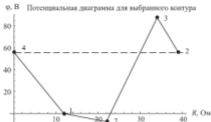


Рис. В.7.22

### Параметрический график функции

Следующая функция строит графический объект, представляющий собой кривую, описываемую точкой  $(f(t), g(t))$ , когда  $t$  меняется от  $a$  до  $b$ :

```
ParametricPlot[{f[t], g[t]}, {t, a, b}].
```

Например, рассмотрены фигуры Лиссажу — траектории точки, совершающие гармонические колебания в двух ортогональных направлениях. Вид этой фигуры определяется соотношениями частот и углами сдвига фаз колебаний. Построена фигура Лиссажу (рис. В.7.23), отвечающая отношению частот как  $3/7$  и углу сдвига фаз  $\pi/2$ :

```
In[19]:- ParametricPlot[{Cos[3*t],
    Sin[7*t]},
    {t, 0, 2*Pi},
    PlotStyle -> AbsoluteThickness[1.5],
    Ticks -> {Table[n*Pi/2, {n, -4, 4}],
    {-1, 0.5, 1}},
    AxesStyle -> AbsoluteThickness[1],
    AspectRatio -> Automatic,
    PlotLabel -> "фигура Лиссажу"];
```

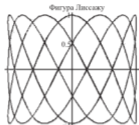


Рис. В.7.23

Для того чтобы изобразить несколько параметрических кривых на одном графике, функцию **ParametricPlot** необходимо вызвать в следующем формате:

```
ParametricPlot[({f1[t], g1[t]), (f2[t], g2[t]), ...],
{t, tmin, tmax}]
```

### График неявной функции

Графики неявных функций изображаются при помощи функции **ImplicitPlot**, работа которой основана на способности системы *Mathematica* решать системы уравнений и требует значительного компьютерного ресурса. Поэтому эта функция входит в стандартный пакет расширения **Graphics`ImplicitPlot`**, который необходимо сначала подключить, выполнив следующую команду:

```
In[1]:= <<Graphics`ImplicitPlot`
```

После этого функция **ImplicitPlot** вызывается в обычном формате:

```
ImplicitPlot[f[x, y] == g[x, y], {x, a, b}],
```

где  $f(x, y) = g(x, y)$  — уравнение, решения которого требуется изобразить на графике, а  $x$  меняется от  $a$  до  $b$ . В таком формате  $x$  принимается за независимую переменную и построение будет приводиться к объединению графиков функций  $y = h_1(x), y = h_2(x), \dots$ . Функция

```
ImplicitPlot[f[x, y] == g[x, y], {y, c, d}]
```

при подходящем выборе  $c$  и  $d$  даст ту же самую картину, развернутую на  $90^\circ$ , так как теперь независимой переменной считается  $y$ .

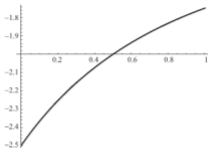


Рис. В.7.24

При расчете электрических цепей, как правило, функции, описывающие поведение токов и напряжений в ветвях цепи, имеют вид  $\frac{ax+by+cxu}{a_1x+b_1y+c_1xu}$ , где переменные  $x$  и  $y$  (например, сопротивления  $R_1, R_2$ ) являются параметрами цепи, относительно которых исследуется поведение решения.

**Пример 13.** Построить кривую  $\frac{10+x+y+xy}{5+x+y+xy} = 3$  (рис. В.7.24):

```
ImplicitPlot[(10+x+y+xy)/(5+xy+x+y) == 3,
(x, 0, 1)];
```

### Графическое представление неравенств

Функция `InequalityPlot`, описанная в стандартном графическом пакете расширения `Graphics`InequalityGraphics``, который необходимо сначала подключить

```
In[6]:= <<Graphics`InequalityGraphics`
```

вызывается в формате:

```
InequalityPlot[
  f1[x, y] < g1[x, y] && f2[x, y] < g2[x, y] && ...,
  {x, a, b}, {y, c, d}]
```

и изображает точки прямоугольника  $\{(x, y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , которые удовлетворяют неравенствам  $f_1(x, y) < g_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y) < g_2(x, y)$ , ...

На рис. В.7.25 изображены решения системы неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| > 1 \\ x^2 + xy + y^2 < 1 \end{cases};$$

```
In[5]:= InequalityPlot[Abs[x]+Abs[y]>1 &&
  x^2+x*y+y^2<1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[1.5],
  AxesStyle -> AbsoluteThickness[1], AspectRatio -> 1,
  PlotLabel -> "Графическое решение неравенств"];
```

Графическое решение неравенств

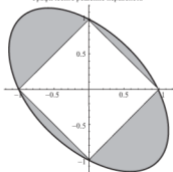


Рис. В.7.25

Также при постановке оптимизационных задач можно найти область изменения неизвестных параметров в пространстве, при которых исследуемая функция принимает значение из заданного интервала.

На рис. В.7.26 представлен график изменения функции  $YY$ , описывающей поведение тока в сопротивлении ветви 3 схемы электрической цепи (рис. Л.1.1) в зависимости от изменения значений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .

```
YY = FullSimplify[ExpandNumerator[YY]]
```

```
(60 (618+101 R1)+50 (31+R1) R2) /  
(540+17 R1 (9+R2)+168 R3)+  
R1 (26+R2) R3+R2 (213+14 R3))
```

```
InequalityPlot3D[1 ≤ YY ≤ 25, {R1, 0, 15},  
{R2, 0, 15}, {R3, 0, 15},  
AxesLabel → {"R1", "R2", "R3"},  
ViewPoint → {1.2, -1.2, 1.2}];
```

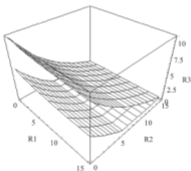


Рис. В.7.26

Функция **GraphicArray**, вызванная в формате:

```
GraphicArray[{u, v, w, ...}]
```

собирает графические объекты  $u, v, w, \dots$  в один объект, состоящий из одинаковых прямоугольников, в которые вписаны объекты  $u, v, w, \dots$ .  
Функция **GraphicArray**, вызванная в формате

```
GraphicArray[{{u, v, ...}, {w, z, ...}, ...}]
```

делает то же самое, но при этом располагает прямоугольники, содержащие объекты  $u, v, w, z, \dots$ , в виде двумерной таблицы.

Для иллюстрации возможностей этой функции с ее помощью для последовательного колебательного контура ( $L=100$ ,  $R=10$ ,  $C=10$ ) выведены на одной картинке два графика: слева — зависимость амплитуды вынужденных колебаний тока от частоты приложенного напряжения, справа — зависимость тока от времени, кривая красного цвета (на рисунке это кривая более темного цвета) — вынужденные колебания тока, полученные по аналитической формуле, кривая синего цвета (на рисунке это кривая более светлого оттенка) — численное решение для тока (рис. В.7.27):

```
L = 100; R = 10; CC = 10; TT1 = 1200; TT0 = 0; A = 8
```

```
UU[p_] := 1/Sqrt[(1/CC - Lp^2)^2 + (Rp)^2];
```

```
Table[{
```

```
  f = ArcTan[(-Lp^2 + 1/CC)/p/R];
```

```
  Y[t] = UU[p] p A Sin[pt + f];
```

```
  Pic1 = Plot[Evaluate[UU[x] x A], {x, 0, p},
```

```
    DisplayFunction -> Identity,
```

```
    PlotRange -> {{0, .3}, {0, 1}},
```

```
    PlotStyle -> {{RGBColor[0, 0, 0]}}];
```

```
  Eq = Lx''[t] + Rx'[t] + 1/CC x[t] == p A Cos[p t];
```

```
  X[t] = x[t] /. DSolve[{Eq, x[0] == 1, x'[0] == 0},
```

```
    x[t], t];
```

```
  Pic2 = Plot[Evaluate[{X[t], Y[t], UU[p] p A}],
```

```
    {t, TT0, TT1}, PlotPoints -> 1000,
```

```
    PlotRange -> {{TT0, TT1}, {-2.2, 2.4}},
```

```
    DisplayFunction -> Identity,
```

```
    PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0]},
```

```
      {RGBColor[0, 0, 1]}, {RGBColor[0, 0, 0]}}];
```

```
  Show[GraphicsArray[{Pic1, Pic2}],
```

```
    DisplayFunction -> $DisplayFunction]],
```

```
  {p, .002, 0.2, .002}];
```

Функция **Show** отображает полученный графический объект на экране (помимо этого действия графический объект можно записать в файл,

включить в определение другого графического объекта или мультипликации, преобразовать в другой формат, изменить настройки опций, применить к нему какое-либо геометрическое преобразование и т. д.). Можно задать значение опции `DisplayFunction`  $\rightarrow$  `Identity`, чтобы подавить вывод промежуточных результатов на экран. По умолчанию

`DisplayFunction`  $\rightarrow$  `$DisplayFunction`.

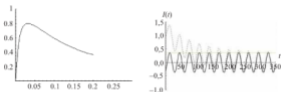


Рис. В.7.27

### Простейшая двумерная графика

Функция `Graphics` соединяет определенные в ее теле графические примитивы в составной двумерный объект формата `Graphics`, который после этого обрабатывается как единое целое.

Различные элементы картинок: как-то точки, линии, окружности — строятся при помощи графических примитивов:

Примитив *точка*

`Point[{x, y}]`

определяет точку  $(x, y)$  с координатами  $x$  и  $y$ .

Примитив *линия*

`Line[{(u, v), (x, y)}]`

определяет отрезок, концы которого имеют координаты  $(u, v)$  и  $(x, y)$ . Вызванный с более длинным списком координат этот примитив порождает ломаную, состоящую из отрезков, соединяющих последовательные точки. Например,

`Line[{(u, v), (x, y), (z, w)}]`

состоит из двух отрезков, а именно отрезка с координатами концов  $(u, v)$  и  $(x, y)$ , и второго отрезка с координатами концов  $(x, y)$  и  $(z, w)$ . В слу-



час совпадения первой и последней точек списка получим замкнутую кривую. Например,

```
Line[{{u, v}, {x, y}, {z, w}, {u, v}}]
```

изображает треугольник с вершинами  $(u, v)$ ,  $(x, y)$  и  $(z, w)$ .

Примитив *окружность*

```
Circle[{x, y}, r]
```

определяет окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $(x, y)$ .

Кроме того, в системе имеется много других графических примитивов, таких как **Rectangle**, **Disk**, **Polygon** для закрашенных фигур, **Raster**, **PostScript**, **Text** и т. д.

Графические директивы, примененные к соответствующим примитивам, задают значения параметров, использующиеся при их построении.

Директива *абсолютный размер точки* **AbsolutePointSize[d]** задает (абсолютный) размер точки в типографских пунктах. Директива *абсолютная толщина* **AbsoluteThickness[d]** задает (абсолютную) толщину линий в типографских пунктах.

Графические директивы образуют список вместе с теми графическими примитивами, к которым они относятся. Поэтому на одном и том же рисунке можно рисовать точки разных размеров и линии разной толщины. Имеется большое количество других графических директив: **PointSize**, задающая (относительный) размер точек, **Dashing** и **Absolute Dashing** для создания пунктирных линий, **GrayLevel**, **RGBColor**, **Hue** и т. д. Опция **Axes**  $\rightarrow$  **True** включает в графический объект координатные оси.

## Построение графиков функций двух переменных

График функции двух переменных строится при помощи функции **Plot3D**, которая создает объект формата **SurfaceGraphics**. В простейшем случае эта функция вызывается в формате

```
Plot3D[f[x, y], {x, a, b}, {y, c, d}].
```

Эта функция строит трехмерный график функции  $f(x, y)$  при  $x$ , меняющемся от  $a$  до  $b$ , и  $y$ , меняющемся от  $c$  до  $d$ .

Принципиальное отличие функции **Plot3D** от функции **Plot** заключается в следующем. **Plot** трактует список функций (который является первым аргументом) как предложение построить графики нескольких функций на одной картинке. У функции **Plot3D** первый аргумент

может быть либо одной функцией, либо списком из двух функций. Функция в следующем формате:

```
Plot3D[{f[x, y], g[x, y]}, {x, a, b}, {y, c, d}]
```

построит график функции  $f(x, y)$ , для которого затемнение задается функцией  $g(x, y)$ .

**Пример 14.** Построить поверхность, заданную функцией  $z = \cos(xy)$  (рис. В.7.28).

```
Plot3D[Cos[xy], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}];
```

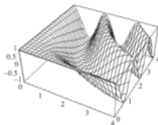


Рис. В.7.28

Для модификации трехмерных графиков используются многочисленные опции и директивы, список которых приведен ниже:

#### Options[Plot3D]

```
{AmbientLight → GrayLevel[0], AspectRatio → Automatic,
 Axes → True, AxesEdge → Automatic,
 AxesLabel → None, AxesStyle → Automatic,
 Background → Automatic, Boxed → True,
 BoxRatios → {1, 1, 0.4}, BoxStyle → Automatic,
 ClipFill → Automatic, ColorFunction → Automatic,
 Compiled → True, DefaultColor → Automatic,
 Epilog → {}, FaceGrids → None, HiddenSurface → True,
 ImageSize → Automatic, Lighting → True,
```

```

LightSources → ({(1., 0., 1.), RGBColor[1, 0, 0]},
  {(1., 1., 1.), RGBColor[0, 1, 0]},
  {(0., 1., 1.), RGBColor[0, 0, 1]}), Mesh → True,
MeshStyle → Automatic, Plot3Matrix → Automatic,
PlotLabel → None, PlotPoints → 15,
PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic,
Prolog → {}, Shading → True, SphericalRegion → False,
Ticks → Automatic, ViewCenter → Automatic,
ViewPoint → {1.3, -2.4, 2.},
ViewVertical → {0., 0., 1.},
DefaultFont: → $DefaultFont,
DisplayFunction: → $DisplayFunction,
FormatType : → $FormatType, TextStyle : → $TextStyle)

```

В описание построения графика поверхности функции  $z = \cos(xy)$  из примера 14 включены некоторые опции (рис. В.7.29):

```

Plot3D[Cos[xy], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, PlotPoints → 40,
Mesh → False, FaceGrids → All,
AxesLabel → {"Length", "Width", "Height"}];

```

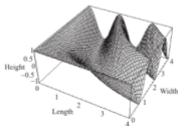


Рис. В.7.29

Опция **PlotPoints** показывает, в каком минимальном количестве точек следует вычислять значение функции. Вызванная в формате

```
PlotPoints → n,
```

эта опция предписывает команде `Plot` вычислять значение функции как минимум в  $n$  точках — после чего продолжать вычислять значения в промежуточных точках для быстро осциллирующих функций. По умолчанию

**PlotPoints**  $\rightarrow$  25.

Для функции `Plot3D` опция `PlotPoints` в формате

**PlotPoints**  $\rightarrow$   $n$

предписывает вычислять значения в  $n$  точках по каждой из координат. Чтобы вычислять значения в  $m$  точках по  $x$  и в  $n$  точках по  $y$ , эту опцию следует задавать в формате

**PlotPoints**  $\rightarrow$   $\{m, n\}$ .

Опция `Mesh` выполняет наложенные сетки на поверхность. Значение

**Mesh**  $\rightarrow$  **False**

убирает сетку на поверхности графика функции. Значение опции `FaceGrids`  $\rightarrow$  **All** оставляет координатную сетку (решетку) на координатных плоскостях. Опция `AxesLabel` позволяет делать надписи на осях (рис. В.7.30).

```
Plot3D[Sin[x^2+y^2],
  {x, -Pi, Pi},
  {y, -Pi, Pi},
  Shading  $\rightarrow$  False,
  MeshStyle  $\rightarrow$  AbsoluteThickness[1],
  BoxStyle  $\rightarrow$  AbsoluteThickness[0.8],
  PlotPoints  $\rightarrow$  60,
  PlotLabel  $\rightarrow$  "Sin[x^2+y^2]";
```

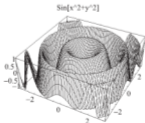


Рис. В.7.30

Опция затенения

**Shading** → **False**

вводится для получения черно-белой картинки.

Опция **MeshStyle** описывает стиль сетки, в данном случае абсолютную ширину линий. Опция **BoxStyle** задает прорисовку ограничительного параллелепипеда [9].

В объекте формата **SurfaceGraphics** хранится гораздо больше информации, чем в видимом изображении. Например, этот объект сохраняет и те части поверхности, которые с данной точки зрения закрыты другими частями. Их можно увидеть, если повернуть поверхность или изменить точку зрения (опция **ViewPoint**). Опция

**HiddenSurface** → **False**

делает поверхность прозрачной.

**Пример 15.** Для схемы электрической цепи (рис. В.3.3) построить зависимость напряжения третьей ветви схемы от значений сопротивлений в первой и второй ветвях.

Создана новая подстановка (из подстановки **SSS** исключены значения сопротивлений в первой и второй ветвях):

**SSS4 = {R3 → 100, E1 → 100};**

Получено выражение для напряжения третьей ветви как функции двух переменных:

$$Y4 = U1[[3]] /. SSS4$$

$$\frac{10000 R2}{100 R2 + R1 (100 + R2)}$$

и построен трехмерный график (рис. В.7.31).

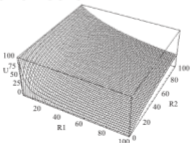


Рис. В.7.31

Иногда более наглядным оказывается график уровня функции (рис. В.7.32):

```
ContourPlot[Y4, {R1, 0.1, 100}, {R2, 0, 100}];
```

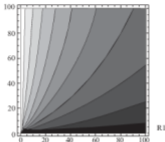


Рис. В.7.32

Можно выделить область на плоскости  $XOY$ , в которой функция удовлетворяет условию  $f_{\min} \leq f(x, y) \leq f_{\max}$ . Это можно сделать, задав опцию `Contours`  $\rightarrow$  `{fmin, fmax}` (рис. В.7.33):

```
EE1 = 1; EE2 = 3; R2 = 1;
```

```
II = (EE1 (R1 R3 + R2 R3) + EE2 R1 R2) / (R1 R2 R3)
```

```
ContourPlot[II, {R1, 1, 3}, {R3, 1, 4},
```

```
Contours  $\rightarrow$  {3, 4}];
```

```
 $\frac{3R1 + R3 + R1 R3}{R1 R3}$ 
```

```
R1 R3
```

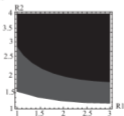


Рис. В.7.33

---

## Лабораторная работа 1. Расчет цепи постоянного тока

Лабораторная работа посвящена расчету линейных электрических цепей постоянного тока с сосредоточенными параметрами в установившемся режиме.

### Задание № 1

Для схемы электрической цепи постоянного тока, представленной на рис. Л.1.1 [10, с. 269], найти потенциалы в узлах, напряжения и токи в ветвях.

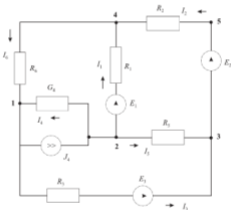


Рис. Л.1.1

Решение задачи выполнено в системе СИ, поэтому размерности величин не приведены.

Численные значения параметров элементов цепи:

$$R_1 = 10, \quad R_2 = 15, \quad R_3 = 12, \quad R_4 = 12, \quad R_5 = 9, \quad G_2 = 0.2,$$

$$E_1 = 110, \quad E_2 = 220, \quad E_3 = 110, \quad J_4 = 12.$$

Алгоритм решения задачи составлен из нескольких этапов:

1. Построение графа, соответствующего схеме электрической цепи, ввод значений параметров (значений сопротивлений и проводимостей, ЭДС, токов источников тока).
2. Составление системы линейных алгебраических уравнений (узловых уравнений или контурных уравнений) относительно выбранных переменных.
3. Решение системы линейных алгебраических уравнений и получение выражений для искомого и вспомогательных переменных (например, напряжения на сопротивлениях и т. п.) в аналитическом и численном виде. Графический вывод зависимостей выбранной переменной от различных параметров электрической схемы.
4. Проверка результатов расчета с помощью законов сохранения, например, баланса мощностей, выполнимости принципа взаимности.

### 1. Построение графа и ввод параметров

Для построения графа (рис. Л.1.2) соответствующего схеме электрической цепи, представленной на рис. Л.1.1, пронумерованы узлы. Сохраняя нумерацию, каждому узлу схемы сопоставлена вершина графа. Произвольно задано направление тока в каждой ветви. На графе ветвь схемы цепи, соединяющая соседние узлы, будет представлена в виде дуги, причем ориентация дуги совпадает с выбранным направлением тока. Дуги графа пронумерованы (табл. Л.1.1).

Таблица Л.1.1.

Номера дуг	1	2	3	4	5	6
Номера вершин	2-4	3-4	1-3	2-1	2-3	4-1

Необходимо учитывать, что в пакете *Mathematica* нумерация элементов массива начинается с единицы. В табл. 1 указано, какая дуга (первая строка таблицы) какие вершины соединяет (вторая строка таблицы), причем последовательность записи вершин существенна.

Перед началом работы следует подключить пакет расширения *DiscreteMath`Combinatorica`*. Этот пакет содержит функции для работы с графами.

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`
```

Граф задан в виде списка дуг, причем каждая дуга представляет собой список вершин, задающих начало и конец дуги

```
LL = {{2, 4}, {3, 4}, {1, 3}, {2, 1}, {2, 3},  
      {4, 1}};
```



По списку дуг построен ориентированный граф

```
G = FromOrderedPairs[LL];
```

Для определения количества вершин и количества дуг следует использовать функции **V** и **Length**. Для контроля на экран эти значения выведены, для этого достаточно снять знак «;»:

```
q = V[G]  
p = Length[LL]  
4  
6
```

Создан список номеров дуг графа (ветвей схемы электрической цепи):

```
EL=Table[i, {i, 1, p}];
```

Отсортирован вектор дуг LL в лексикографическом порядке:

```
ELL=Ordering[LL];
```

Нумерация вершин графа осуществляется автоматически.

Заданы опции функции **SetGraphOption**, определяющей цвет дуг, подтверждение отображения номеров вершин, нумерацию дуг, цвет вершин, цвет номеров дуг, положение номеров вершин, шрифты: тип шрифта, его жирность, размер и цвет фона (подробнее об опциях этой функции см. в вводном занятии 3).

Установка этих опций зависит от художественных предпочтений пользователя.

При построении графа оказалось, что дуги графа 3 и 1 перекрещиваются и их номера накладываются друг на друга. Чтобы этого избежать, для вывода изображения графа использован алгоритм, разработанный в вводном занятии 3. Приведенный там алгоритм можно упростить для данного случая, так как достаточно строить не три, а только два вспомогательных графа, изображение которых на экране можно не выводить, задав соответствующую опцию.

```
XXX[l_] := ReplacePart[ELL, "",  
Table[Position[ELL, l[{i}][{1}],  
{i, 1, Length[l]}]]  
z = {3};  
AA[x_, y_] := SetGraphOptions[G, EdgeColor → Red,  
VertexNumber → True, EdgeLabel → x,  
VertexNumberPosition → Center,
```

```

EdgeLabelPosition -> y,
VertexNumberColor -> Black, VertexColor -> White,
VertexStyle -> Disk[Large], EdgeLabelColor -> Blue,
TextStyle -> {FontFamily -> "NewTimes Roman",
  FontWeight -> "Bold", FontSize -> 20},
Background -> RGBColor[1, 1, 0]];
S1=ShowGraph[AA[XXX[z], LowerRight],
  DisplayFunction -> Identity];
S2=ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z]], UpperLeft],
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{S1, S2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

```

Теперь можно вывести изображение графа на экран (рис. Л1.2).

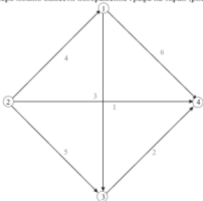


Рис. Л.1.2

Заданы параметры электрической цепи — вектор сопротивлений ветвей

$$R = (R_1, R_2, R_3, 1/G_4, R_5, R_6);$$

вектор ЭДС ветвей

$$EE = \text{Table}[0, \{1, 1, p\}];$$

$$EE[[1]] = E_1; EE[[2]] = E_2; EE[[3]] = E_3;$$

и вектор токов источников тока в ветвях:

```
J = Table[0, {i, 1, p}];
J[[4]] = J4;
```

В том случае, если цепь имеет много ветвей, не содержащих источники энергии, и в соответствии с этим большинство компонент векторов  $EE$  или  $J$  — нулевые, имеет смысл сначала обнулить векторы, а затем задать ненулевые компоненты.

Подстановка

```
SSS = {R1 → 10, R2 → 15, R3 → 12, R4 → 8, R5 → 12,
       R6 → 9,
       E1 → 110, E2 → 220, E3 → 110, E4 → 110, J4 → 12,
       G4 → 1/5};
```

задаст числовые значения параметров всех элементов цепи. Для задания № 1 эта подстановка избыточна, так как в ней присутствуют значения не использованных в этом задании параметров  $R_4 = 8$  и  $E_4 = 110$ . Но в задании № 2 эти значения использованы, поэтому имеет смысл задать единую подстановку для обоих заданий сразу.

Для проверки полезно вывести на экран таблицу параметров и их числовых значений:

```
Join[{"EL", "R", "EE", "J", "R//N", "EE//N",
      "J//N"},
     Transpose[{{EL, R, EE, J, R/.SSS, EE/.SSS,
                 J/.SSS}}]//TableForm
```

Здесь функция `Transpose` осуществила транспонирование матрицы параметров, т. е. превратила матрицы-строки параметров в матрицы-столбцы, функция `/.SSS` осуществила подстановку численных значений параметров, а функция `Join` добавила к матрице параметров строку с наименованием столбцов.

EL	R	EE	J	R//N	EE//N	J//N
1	R1	E1	0	10	110	0
2	R2	E2	0	15	220	0
3	R3	E3	0	12	110	0
4	$\frac{1}{G4}$	0	J4	5	0	12
5	R5	0	0	12	0	0
6	R6	0	0	9	0	0

## 2. Составление системы уравнений (метод узловых потенциалов)

В указанном методе искомые переменные — узловые потенциалы. Задан вектор потенциалов

$$\Phi = \text{Table}[\varphi[i], \{i, 1, q\}];$$

Уравнение метода узловых потенциалов в матричной форме имеет вид ([10]):

$$\mathbf{G} \cdot \varphi = \mathbf{J}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$  — матрица узловых проводимостей,  $\varphi$  — вектор потенциалов,  $\mathbf{J} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}$  — вектор узловых токов. Здесь  $\mathbf{A}$  — матрица соединений (матрица инцидентности) исходного графа,  $\mathbf{R}\mathbf{R}$  — матрица сопротивлений ветвей.

Матрица  $\mathbf{R}\mathbf{R}$  — это диагональная матрица, элементами которой являются сопротивления ветвей. Она может быть получена из вектора сопротивлений ветвей следующим образом:

$$\mathbf{R}\mathbf{R} = \text{DiagonalMatrix}[\mathbf{R}];$$

Построена матрица соединений

```
A = Transpose[
  Table[
    Table[If[LL[[j, 1]] == i, 1,
      If[LL[[j, 2]] == 1, -1, 0]], {i, 1, q}],
    {j, 1, p}]];
```

Вывод ее на экран осуществлен с помощью следующей функции (выводит матрицу в привычной матричной форме):

```
In[22]:= A//MatrixForm
Out[22]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Известно, что матрица соединений (узловая матрица) имеет размерность  $q \times p$ , где  $q$  — число строк матрицы, которое равно числу

вершин графа,  $p$  — число столбцов матрицы, которое равно числу дуг графа. Для рассмотренной задачи  $q = 4$ ,  $p = 6$ .

Теперь можно завершить формирование системы уравнений. Сначала вычислена матрица узловых проводимостей  $G = A \cdot RR^{-1} \cdot A^T$ :

$$G = A \cdot \text{Inverse}[RR] \cdot \text{Transpose}[A];$$

затем вектор узловых токов  $JJ = A \cdot J - A \cdot RR^{-1} \cdot EE$ :

$$JJ = A \cdot J - A \cdot (\text{Inverse}[RR]) \cdot EE;$$

и полученная система узловых уравнений  $G \cdot \phi = JJ$  обозначена переменной *Eq* (equation), чтобы в дальнейшем работать с этой системой уравнений как с объектом. В языке системы *Mathematica* знак « $==$ » обозначает равенство, в то время как знак « $=$ » обозначает присвоение имени объекту.

$$Eq = G \cdot \phi == JJ;$$

### 3. Решение системы уравнений

В построенной системе уравнений матрица  $G$  оказалась особенной, то есть ее определитель равен 0, в чем легко убедиться:

$$\text{FullSimplify}[\text{Det}[G]];$$

или

$$\text{In}[79] := \text{Det}[G]$$

$$\text{Out}[79] = 0$$

Очевидно, что решение такой системы нельзя найти путем обращения матрицы  $G$ . Однако решение системы существует и содержит одну аддитивную произвольную постоянную (так как ранги матрицы  $G$  и расширенной матрицы  $G|JJ$  равны  $q-1$ , где  $q$  — число узлов). Таким образом, узловые потенциалы (как и потенциальная энергия) определяются с точностью до аддитивной постоянной. На значения напряжений, которые являются разностями потенциалов, значение аддитивной постоянной не влияет.

Решение матричного уравнения (1) можно найти одним из нижеприведенных способов.

1. Принять значение потенциала некоторого узла, называемого базисным, равным 0 (так называемая «земля»), и решить систему уравнений относительно оставшихся узловых потенциалов.

2. Найти значение потенциалов  $q-1$  узлов, считая потенциал  $q$ -го узла параметром, играющим роль аддитивной постоянной. В дальнейшем этому потенциалу можно присвоить любое значение.

В данном случае выбран второй способ, для этого составлен вектор узловых потенциалов, а затем из списка переменных исключен потенциал первого узла.

```
Phi1 = Delete[Phi, 1];
```

Далее решено матричное уравнение (1). Сначала система уравнений  $Eq$  разрешена относительно неизвестных потенциалов  $\Phi 1$ .

```
Solve[Eq, Phi1].
```

Из списка решений выбрано одно (оно же единственное в данном случае). Это решение записано в вектор  $\Phi$  и упрощено.

```
Phi = Simplify[(Phi /. Solve[Eq, Phi1])][[1]];
```

Полученное решение представлено в символьном виде. Оно зависит от значений параметров схемы и постоянной  $\varphi_1$ .

Для получения в численном виде в решение подставлено значение потенциала 1-го узла, равное 110, и значения параметров цепи:

```
Simplify [Phi /. {phi[1] -> 110} /. SSS] // N  
{110., 145.899, 130.766, 220.307}
```

Вторая строка вышеприведенного фрагмента — это результат выполнения функции системы *Mathematica*, выведенный на экран монитора.

Аналогично вычислены значения потенциалов узлов в символьном и численном виде:

```
U = Simplify[Transpose[A] . Phi]
```

Ниже для примера приведен фрагмент ответа системы *Mathematica*, в котором выражение для напряжения ветви 1 дано в символьном виде.

```
{ - (E1 R2 R3 - J4 R1 R2 R3 + E1 R2 R5 - J4 R1 R2 R5 +  
E1 R3 R5 - J4 R1 R3 R5 + E1 R2 R6 + E1 G4 R2 R3 R6 +  
E1 R5 R6 - J4 R1 R5 R6 + E1 G4 R2 R5 R6 +  
E1 G4 R3 R5 R6 + E3 R1 (-R2 + G4 R5 R6) +  
E2 R1 (R3 + R6 + G4 R3 R6 + G4 R5 R6) ) /  
(R5 (R3 + R6 + G4 R3 R6) +  
R2 (R3 + R5 + R6 + G4 R3 R6 + G4 R5 R6) +  
R1 (R2 + R3 + G4 R2 R3 + G4 R2 R5 +  
G4 R3 R5 + R6 + G4 R3 R6 + G4 R5 R6) ) ,
```

Для нахождения численных значений напряжений ветвей схемы подставлены исходные значения параметров элементов цепи и применена функция //N:

```
U /. SSS // N
```

На экране монитора появился список численных значений напряжений ветвей схемы:

```
{-74.4085, -89.5414,  
-20.766, 35.8989, 15.1329, 110.307}
```

Аналогично вычислены значения токов в сопротивлениях ветвей цепи:

```
IR = FullSimplify[Inverse[RR] . (U + EE)]  
IR /. SSS // N
```

Ответ выведен на экран монитора в виде списка численных значений для токов в сопротивлениях ветвей цепи:

```
{3.55915, 8.69724, 7.43616,  
7.17978, 1.26107, 12.2564}
```

и токов в ветвях цепи:

```
IP = IR - J  
IP /. SSS // N  
{3.55915, 8.69724, 7.43616,  
-4.82022, 1.26107, 12.2564}
```

#### 4. Проверка

Если значения переменных найдены правильно, то должен выполняться баланс мощностей:  $U \cdot J + EE \cdot IR = IR \cdot RR \cdot IR$ .

```
Simplify[(U.J + EE . IR == IR.RR . IR)]  
True
```

Решение задачи закончено, однако будет полезным вернуться к пункту 2 и составить уравнения согласно методу контурных токов.

#### 5. Составление системы контурных уравнений (метод контурных токов)

В указанном методе искомые переменные — контурные токи.

Независимые контуры определены как независимые векторы, являющиеся строками циклической матрицы  $\mathbf{B}$ , то есть независимые решения уравнения  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{A}$  — матрица соединений (инцидентности). Для этого в системе *Mathematica* существует функция `NullSpace[A]`, которая выдает список независимых решений системы  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{X}$  — вектор неизвестных системы. Каждый вектор решения содержит одинаковое количество элементов, равное числу ветвей в контуре. Понятно, что можно выбрать систему контуров произвольно, необходимо только, чтобы все контуры были независимыми. Количество контуров равно цикломатическому числу. Система *Mathematica* предлагает одно из возможных решений.

```

B = NullSpace[A];
In[50]:= B // MatrixForm
Out[50]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


```

В данном примере три независимых контура. Первый содержит вторую, третью и шестую ветвь исходной цепи, второй — первую, вторую и пятую ветвь, третий — первую, вторую, третью и четвертую ветви.

Уравнение метода контурных токов имеет вид ([10]):

$$\mathbf{RK} \cdot \mathbf{IL} = \mathbf{EL1},$$

где  $\mathbf{RK} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{RR} \cdot \mathbf{B}^T$  — матрица контурных сопротивлений,  $\mathbf{EL1}$  — вектор контурных ЭДС  $\mathbf{EL1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{EE} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{RR} \cdot \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{IL}$  — вектор контурных токов.

Теперь можно завершить формирование системы уравнений

```

RK = B.RR.Transpose[B];
EL1 = B.EE - B.RR.J;
Eq = RK.IL == EL1;

```

## 6. Решение системы уравнений

Определено количество независимых контуров (с помощью функции длины списка).

```
v = Length[B];
```



Полезно проверить равенство  $\nu = p - q + 1$  (в вводном занятии 1 об этом говорится подробнее), т. е. то, что цикломатическое число  $p - q + k$  (для связного графа  $k=1$ ) по теореме о числе элементов в цикловом базисе графа совпадает с количеством элементов циклового базиса.

```
 $\nu == p - q + 1$ 
True
```

Составлен вектор контурных токов

```
IL = Table [il[i], {i, 1,  $\nu$ }]
```

и решено контурное уравнение

```
IL = IL /. Solve[Eq, IL] [[1]]
```

В данном методе матрица **RK** неособенная и проблем с решением линейной системы нет.

Последовательно определены значения напряжений и токов в ветвях. Сначала они получены в символьном виде. На экран эти выражения не выведены.

```
IP = Simplify[Transpose[B] . IL]
IR = IP + J
U = RR . IR - EE
```

В них подставлены численные значения параметров элементов цепи и выведены на экран монитора в виде списков последовательно численные значения токов в ветвях цепи:

```
IP /. SSS // N
{3.55915, 8.69724, 7.43616,
 -4.82022, 1.26107, 12.2564}
```

токов в сопротивлениях:

```
IR /. SSS // N
{3.55915, 8.69724, 7.43616,
 7.17978, 1.26107, 12.2564}
```

и напряжений ветвей цепи:

```
U /. SSS // N
{-74.4085, -89.5414, -20.766,
 35.8989, 15.1329, 110.307}
```

Как и следовало ожидать, они совпали с вычисленными значениями напряжений и токов в ветвях по методу узловых потенциалов.

Для наглядности и чтобы собрать воедино полученные значения переменных, можно вывести их на печать в следующем виде:

```
Print ["Значения токов в ветвях электрической
      цепи по методу узловых потенциалов:", IR /.
      SSS //N]
Print ["Значения токов в ветвях электрической
      цепи по методу контурных токов:", IR1 /. SSS
      //N]
Print["Значения токов в сопротивлениях
      электрической цепи по методу узловых
      потенциалов:", IP /. SSS // N]
Print["Значения токов в сопротивлениях
      Электрической цепи по методу контурных
      токов:",
      IP1 /. SSS //N]
Print["Значения напряжений на сопротивлениях
      электрической цепи по методу узловых
      потенциалов:", U /. SSS //N]
Print["Значения напряжений на
      сопротивлениях
      электрической цепи по методу контурных токов:",
      U1 /. SSS // N]
```

Тогда ответом будет следующее сообщение:

```
Значения токов в ветвях электрической
      цепи по методу узловых потенциалов: {3.55915,
      8.69724, 7.43616, 7.17978, 1.26107, 12.2564}
Значения токов в ветвях
      электрической цепи по методу контурных токов:
      {3.55915, 8.69724, 7.43616, 7.17978, 1.26107, 12.2564}
Значения токов в сопротивлениях электрической
      цепи по методу узловых потенциалов: {3.55915,
      8.69724, 7.43616, -4.82022, 1.26107, 12.2564}
```

Значения токов в сопротивлениях

электрической цепи по методу контурных токов:  
{3.55915, 8.69724, 7.43616, -4.82022, 1.26107,  
12.2564}

Значения напряжений на сопротивлениях электрической

цепи по методу узловых потенциалов: {-74.4085,  
-89.5414, -20.766, 35.8989, 15.1329, 110.307}

Значения напряжений на сопротивлениях электрической

цепи по методу контурных токов: {-74.4085,  
-89.5414, -20.766, 35.8989, 15.1329, 110.307}

## 7. Проверка выполнимости принципа взаимности

Пусть все источники электрической энергии в электрической схеме представлены источниками ЭДС. Тогда  $\mathbf{EE}$  — вектор источников ЭДС. Рассмотрены два режима работы электрической цепи, отличающиеся между собой только значениями ЭДС. В общем виде принцип взаимности определяется равенством

$$(\mathbf{EE}^{(1)})^T \cdot \mathbf{IP}^{(2)} = (\mathbf{EE}^{(2)})^T \cdot \mathbf{IP}^{(1)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{EE}^{(k)}$  и  $\mathbf{IP}^{(k)}$  — векторы источников ЭДС и токов в ветвях для  $k$ -го режима, где  $k = 1, 2$  — номер режима. В дальнейшем рассмотрены два режима, отличающиеся друг от друга численными значениями источников ЭДС в ветви 1 цепи. Для этого введены начальные данные:

$\mathbf{SSSS} = \{\mathbf{R1} \rightarrow 10, \mathbf{R2} \rightarrow 15, \mathbf{R3} \rightarrow 12, \mathbf{R4} \rightarrow 8, \mathbf{R5} \rightarrow 12,$   
 $\mathbf{R6} \rightarrow 9,$   
 $\mathbf{J4} \rightarrow 0, \mathbf{G4} \rightarrow 1/5, \mathbf{E2} \rightarrow 220, \mathbf{E3} \rightarrow 110, \mathbf{E4} \rightarrow 110\};$

Этой подстановкой заданы численные значения параметров схемы электрической цепи, которые одинаковы для двух режимов. Различие между двумя режимами описано следующими подстановками:

$\mathbf{SSSS1} = \{\mathbf{E1} \rightarrow 110\};$

$\mathbf{SSSS2} = \{\mathbf{E1} \rightarrow 0\};$

Проверено выполнение принципа взаимности. Сначала получены выражения в правой и левой частях тождества (2) в символьном виде:

```

AAA1 = FullSimplify[(EE /. SSSS1) . (IP1 /. SSSS2)]
(E32 (R1 + R2 + G4 R1 R2 +
  R5 + G4 R1 R5 + G4 (R1 + R2 + R5) R6) + E22
  (R3 + R5 + R1 (1 + G4 (R3 + R5) ) + R6 + G4 (R3 + R5) R6) -
  E3 ( (-110 + J4 R1) R2 +
    (110 G4 R5 + J4 (R1 + R2 + R5) ) R6) +
  110 J4 (R2 (R3+R5) + R5 (R3 + R6) ) +
  E2 (J4 R1 R3 - (J4 R5 + 110 G4 (R3 + R5) ) R6 -
  110 (R3 + R6) + 2 E3 (R1 + R5 + G4 R1 R5 + G4 R5 R6) ) ) /
  (R5 (R3 + R6 + G4 R3 R6) +
  R2 (R3 + R5 + R6 + G4 (R3 + R5) R6) +
  R1 (R3 + G4 R3 R5 + R2 (1 + G4 (R3 + R5) ) +
  R6 + G4 (R3 + R5) R6) )

```

```

AAA2 = FullSimplify[(EE /. SSSS2) . (IP1 /. SSSS1)]
(E22 (R3 + R5 + R1 (1 + G4 (R3 + R5) ) + R6 +
  G4 (R3+R5)R6)+E2 (J4 R1 R3-(J4 R5+110G4 (R3+R5) )R6 -
  110 (R3 + R6) + 2 E3 (R1 + R5 + G4 R1 R5 + G4 R5 R6) ) +
  E3 (110 R2 - J4 R1 R2 - (110 G4 R5 + J4 (R1 + R2 + R5) )
  R6 + E3 (R1 + R2 + G4 R1 R2 + R5 + G4 R1 R5 +
  G4 (R1 + R2 + R5) R6) ) ) / (R5 (R3 + R6 + G4 R3 R6) +
  R2 (R3 + R5 + R6 + G4 (R3 + R5) R6) +
  R1 (R3 + G4 R3 R5 + R2 (1 + G4 (R3 + R5) ) +
  R6 + G4 (R3 + R5) R6) )

```

Как видно, проверить «вручную», одинаковы ли эти выражения, достаточно трудно. Это поручено сделать системе:

```

Simplify [AAA1-AAA2] /. SSSS
0

```

Можно получить численные значения правой и левой частей тождества (2):

```

AAA1 /. SSSS // N
2906.77
AAA2 /. SSSS // N
2906.77

```

Если численные значения правой и левой части проверяемого равенства не важны, то можно организовать проверку выполнения тождественного равенства выражений в другой форме (для системы *Mathematica* это более привычная форма проверки тождества):

$$(AAA2 /. SSSS) == (AAA2 /. SSSS)$$

True

Если в электрической цепи все источники энергии представлены источниками тока и рассматриваются два режима работы цепи, отличающиеся между собой значениями токов источников тока, то принцип взаимности в этом случае сводится к выполнению равенства  $(\mathbf{J}^{(1)})^T \cdot \mathbf{U}^{(2)} = (\mathbf{J}^{(2)})^T \cdot \mathbf{U}^{(1)}$ , где  $\mathbf{J}^{(k)}$  и  $\mathbf{U}^{(k)}$  — векторы значений токов источников тока и напряжений  $k$ -го режима, где  $k = 1, 2$  — номер режима. В данном примере рассмотрен частный случай. Сформированы две подстановки, соответствующие двум режимам, отличающимся друг от друга только численными значениями токов источников тока  $J4$ , при этом численные значения всех источников ЭДС приняты нулевыми.

SSS3 = {R1 → 10, R2 → 15, R3 → 12, R4 → 8, R5 → 12, R6 → 9,  
E1 → 0, E2 → 0, E3 → 0, E4 → 0, J4 → 12, G4 → 1/5};

SSS4 = {R1 → 10, R2 → 15, R3 → 12, R4 → 8, R5 → 12, R6 → 9,  
E1 → 0, E2 → 0, E3 → 0, E4 → 0, J4 → 10, G4 → 1/5};

Проверено выполнение принципа взаимности:

$$(\mathbf{J} /. SSS3) \cdot (\mathbf{U1} /. SSS4) // N$$

$$(\mathbf{J} /. SSS4) \cdot (\mathbf{U1} /. SSS3) // N$$

407.712

407.712

или в другой форме:

$$((\mathbf{J} /. SSS3) \cdot (\mathbf{U1} /. SSS4) ==$$

$$(\mathbf{J} /. SSS4) \cdot (\mathbf{U1} /. SSS3)) // N$$

True

## Задание № 2

Для линейной электрической цепи постоянного тока [10, с. 269], представленной на рис. Л.1.3, найти потенциалы узлов, напряжения и токи в ветвях, определить показания вольтметров и построить потенциальную диаграмму для внешнего контура.

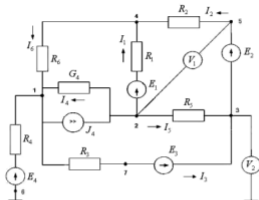


Рис. Л.1.3

Так как по условию задачи необходимо измерить напряжение на внутреннем сопротивлении вольтметра  $V_2$ , введена фиктивная ветвь с сопротивлением  $r = 0$ , соответствующая «земле». Точка 5 введена, потому что необходимо по условию задачи рассчитать напряжение между точками 2 и 5. Точка 7 введена для построения диаграммы [10, с. 273]. Точки 5 и 7 в дальнейшем будем считать узлами, отойдя от строгого определения термина «узел». Классическое определение узла: узел — это место соединения более чем двух ветвей.

Решение проведено по вышеприведенному алгоритму. Но предварительно полезно сделать некоторые замечания. Схема на рис. Л.1.3 — развитие схемы на рис. Л.1.1. Количество ветвей в цепи увеличено из-за ввода в рассмотрение новых фиктивных узлов (узел 5, узел 7) (табл. Л.1.2).

Для контроля сначала предложено составить следующую таблицу, так как с ее помощью удобно вводить описание графа (рис. Л.1.4), задающего топографию электрической цепи. Видно, что данный граф включает в себя дугу, не входящую ни в какой контур. В теории графов такая дуга называется веткой. Данная ветка соответствует ветви 4 схемы цепи, ток в этой ветви равен нулю, так как в контуре, по которому должен замыкаться ток этой ветви, содержащей  $R_4$ ,  $E_4$ , имеется вольт-

метр  $V2$  с внутренним сопротивлением, стремящимся к  $\infty$  (сопротивление земли принимается равным 0).

Таблица Д.1.2.

Номера дуг	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номера вершин	2-4	5-4	1-7	2-1	2-3	4-1	3-5	6-1	7-3

Задание новой схемы графом выполнено следующим образом. В описании графа как списке дуг  $LL$  дуги с номерами 2 и 3 заменены новыми и добавлены дуги 7, 8 и 9, в которых предварительно заданы направления:

```
LL = Join [ReplacePart [LL, {{(5, 4), (1, 7)},
    {(2), (3)}, {(1), (2)}}],
    {{(3, 5), (6, 1), (7, 3)}}];
```

В соответствии с отмеченным преобразованием в векторе ЭДС компоненты 2 и 3 заменены нулями и добавлены компоненты  $E2, E4, E3$  для ветвей 7, 8 и 9 схемы:

```
EE = Join [ReplacePart [EE, {(0, 0), {(2), (3)}, {(1), (2)}}],
    {E2, E4, E3}];
```

Затем к вектору сопротивлений ветвей добавлены компоненты, соответствующие ветвям 7, 8 и 9. Причем в случае, если сопротивление ветви равно 0, оно принято равным  $r$  ( $r \rightarrow 0$ ):

```
R = Join[R, {r, R4, r}];
```

К вектору токов источников токов добавлены компоненты, соответствующие ветвям 7, 8 и 9:

```
J = Join[J, {0, 0, 0}];
```

В подстановку числовых параметров добавлено значение сопротивлений ветвей 7 и 9:

```
SSr = Append [SSS, r -> 0];
```

Теперь построен граф:

```
G = FromOrderedPairs [LL];
q = V[G]; p = Length [LL];
EL = Table [i, {i, 1, p}];
ELL = Ordering [LL];
```

Выведено изображение графа (рис. Л.1.4). Так как при этом не возникает наложения номеров дуг друг на друга, предложенный в вводном занятии 3 алгоритм вывода изображения графа можно упростить. В дальнейшем без дополнительных объяснений будет использоваться один из описанных алгоритмов вывода изображений графа.

```
ShowGraph [SetGraphOptions [G, EdgeColor -> Red,
  VertexNumber -> True,
  VertexStyle -> Disk [Large],
  VertexNumberColor -> Blue,
  EdgeLabel -> ELL,
  VertexColor -> White,
  EdgeLabelColor -> Black,
  VertexNumberPosition -> Center,
  TextStyle -> {
    FontFamily -> "Helvetica";
    FontWeight -> "Bold",
    FontSize -> 16}],
  Background -> RGBColor [0,1, . 6] ]];
```

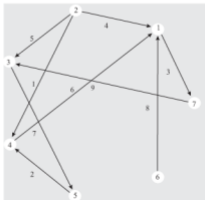


Рис. Л.1.4



Для контроля выведена таблица Л.1.3 параметров и их численных значений на экран:

```
Join [{"EL", "R", "EE", "J", "R//N", "EE//N",
      "J//N"}],
Transpose [{EL, R, EE, J, R /. SSS, EE /. SSS,
            J /. SSS}] //TableForm
```

Таблица Л.1.3.

EL	R	EE	J	R//N	EE//N	J//N
1	R1	E1	0	10	110	0
2	R2	0	0	15	0	0
3	R3	0	0	12	0	0
4	$\frac{1}{GO}$	0	J4	5	0	12
5	R5	0	0	12	0	0
1	R6	0	0	9	0	0
7	r	E2	0	r	220	0
8	R4	E4	0	8	110	0
9	r	E3	0	r	110	0

Дальнейшие действия проведены по вышеописанному алгоритму. Небольшое отличие заключено в том, что после решения системы уравнений следует положить  $r = 0$ . Дело в том, что матрица  $\mathbf{G}$  содержит члены вида  $\frac{1}{r}$  и при  $r = 0$  оказывается сингулярной. Однако члены

вида  $\frac{1}{r}$  содержат и правые части системы, и в выражениях для пере-

менных особенности вида  $\frac{1}{r}$  входят и в числитель, и в знаменатель.

После упрощения такие сомножители сокращаются и в полученное выражение можно подставить  $r = 0$ .

```
Phi = Table [phi[i], {i, 1, q}];
RR = DiagonalMatrix[R];
A = Transpose [
  Table[
    Table [If [LL[[j, 1]] == i, 1,
              If [LL[[j, 2]] == i, -1, 0]], {i, 1, q}],
    {j, 1, p}]];
```

```

G = A.Inverse[RR].Transpose[A];
JJ = A.J - A.(Inverse[RR]).EE;
Eq = G.Φ == JJ;

```

Для решения задачи необходимо создать вектор потенциалов узлов. Так как потенциалы находятся с точностью до аддитивной постоянной, то с помощью функции

```
Φi = Delete [Φ, 6];
```

из вектора потенциалов узлов исключен потенциал узла 6. Понятно, что можно исключить потенциал любого узла, но из постановки задачи видно, что лучше всего исключить потенциал узла 6, так как его потенциал равен нулю (заземление).

Для решения задачи методом узловых потенциалов необходимо создать матрицу узловых проводимостей. Для этого вектор сопротивлений ветвей превращен в диагональную матрицу **RR**, затем вычислена матрица узловых проводимостей по формуле  $G = A \cdot RR^{-1} \cdot A^T$ . Можно проверить, что ее определитель равен нулю (условие линейной зависимости строк).

Решена система узловых уравнений для потенциалов:

```
ΦΦ = Simplify[(Φ/.Solve[Eq, Φ1])][[1]];
```

В полученное решение подставлено значение потенциала узла 6, равное нулю, исходные данные и положено  $r = 0$ :

```
Simplify [ΦΦ/.{φ[6]- 0}/. SSR]/N
```

На экране монитора появится ответ в виде списка численных значений потенциалов семи узлов:

```
{110., 145.899, 130.766,
 220.307, 350.766, 0., 20.766}
```

Последовательно найдены численные значения напряжений между узлами:

```
U = Simplify [Transpose [A] .ΦΦ] /. SSS;
U1 = U /. {r -> 0}/N
{-74.4085, 130.459, 89.234, 35.8989,
 15.1329, 110.307, -220., -110., -110.}
```

Подсчитаны токи, протекающие по сопротивлениям:

```
IR = FullSimplify [Inverse [RR] . (U + EE)] /. SSS;
IR /. {r -> 0} // N
{3.55915, 8.69724, 7.43616, 7.17978,
 1.26107, 12.2564, 8.69724, 0., 7.43616}
```

Подсчитаны токи во всех ветвях:

```
IP = IR - J / .SSS;
IP / . {r-> 0} // N
{3.55915, 8.69724, 7.43616, -4.82022,
 1.26107, 12.2564, 8.69724, 0., 7.43616}
```

Ток в ветви 8 схемы, как и следовало ожидать, равен нулю.

Проверено соблюдение баланса мощности (согласно формуле 2.28 [10]):

```
U.J + EE.IR / . {r-> 0} / .SSS // N
IR.RR.IR / . {r-> 0} / .SSS // N
3553.66
3553.66
```

Определены показания вольтметров  $V1$  и  $V2$  как разности потенциалов узлов 5 и 2; 3 и 6 соответственно:

```
(Φ[5]-Φ[2]) / . {φ[6]-> 0} / .SSr //N
204.867
(Φ[3]-Φ[6]) / . {φ[6]-> 0} / .SSr //N
130.766
```

Ответ можно оформить следующим образом:

```
Print["Показания вольтметра V1: ", U25]
Показания вольтметра V1: 204.867
Print ["Показания вольтметра V2: ", U36]
Показания вольтметра V2: 130.766
```

Пакет *Mathematica* предоставляет возможности для постановки и решения оптимизационных задач. Указаны некоторые из этих возможностей. Например, можно построить график зависимости напряжения между узлами 5 и 2 (показания вольтметра  $V1$ ) от сопротивления  $R2$ , значение которого меняется в заданных пределах (рис. Л.1.5). Для этого из исходных данных удалено значение сопротивления  $R2$ :

```
SSS5 = {R1 -> 10, R3 -> 12, R4 -> 8, R5 -> 12, R6 -> 9,
  E1 -> 110, E2 -> 220, E3 -> 110, E4 -> 110, J4 -> 12,
  G4 -> 1/5};
```

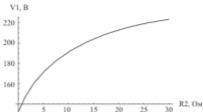


Рис. Л.1.5

и получена зависимость напряжения между узлами 5 и 2 от сопротивления  $R_2$ :

```
Y = FullSimplify[
  (Phi[[5]] - Phi[[2]]) /. {phi[6] -> 0} /. {r -> 0} /. SSS5]
  20 (47748 + 8611 R2)
  7206 + 671 R2
```

Выведен на экран график зависимости напряжения между узлами 5 и 2 от сопротивления  $R_2$ :

```
Plot[Y, {R2, 0, 30}, AxesLabel -> {"R2, Ом", "V1, В"}];
```

Можно построить трехмерный график зависимости напряжения между узлами 5 и 2 от сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ , которые меняются в заданных пределах (рис. Л.1.6). Для этого из исходных данных удалены значения сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ :

```
SSS6 = {R1 -> 10, R4 -> 8, R5 -> 12, R6 -> 9, E1 -> 110,
  E2 -> 220, E3 -> 110, E4 -> 110, J4 -> 12, G4 -> 1/5};
```

и получена зависимость напряжения между узлами 5 и 2 от сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ :

```
Y1 = FullSimplify[
  (Phi[[5]] - Phi[[2]]) /. {phi[6] -> 0} /. {r -> 0} /. SSS6]
  20 (22500 + 5443 R2 + 8 (263 + 33 R2) R3)
  2070 + 428 R3 + R2 (383 + 24 R3)
```

Выведен на экран график зависимости напряжения между узлами 5 и 2 от сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ :

```
Plot3D[Y1, {R2, 0, 30}, {R3, 0, 30},
  AxesLabel -> {"R2, Ом", "R3, Ом", "V1, В"}];
```

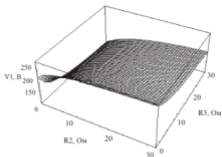


Рис. Л.1.6

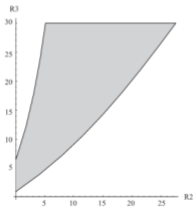


Рис. Л.1.7

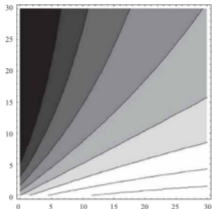


Рис. Л.1.8

Можно поставить обратную задачу. Например, при каких значениях сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$  напряжение между узлами 5 и 2 будет находиться в интервале  $[150, 200]$ . Решение поставленной задачи в пакете *Mathematica* осуществимо с помощью пакета расширений

**<< Graphics`InequalityGraphics`**

С помощью следующей функции на графике (рис. Л.1.7) можно показать область значений параметров  $R_2$  и  $R_3$ , для которых напряжение между узлами 5 и 2 будет находиться в интервале  $[150, 200]$ .

```
InequalityPlot[ 150 ≤ Y1 ≤ 200, {R2, 0, 30},  
{R3, 0, 30}, AxesLabel → {"R2, Ом", "R3, Ом"}];
```

С помощью функции `ContourPlot` можно нарисовать график уровня напряжений (эквипотенциальные кривые) между узлами 5 и 2 (рис. Л.1.8, по осям отложены значения сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ ):

```
ContourPlot[Y1, {R2, 0, 30}, {R3, 0, 30}];
```

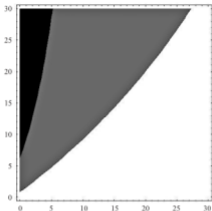


Рис. Л.1.9

Также можно с помощью этой же функции, включив опцию `Contours->{xmin,xmax}`, выделить нужные линии уровня (рис. Л.1.9):

```
ContourPlot[Y1, {R2, 0, 30}, {R3, 0, 30},
  Contours -> {150, 200}];
```

Наконец, можно нарисовать область изменения параметров в пространстве. На рис. Л.1.10 показана область изменения значений сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  при условии, что напряжение между узлами 5 и 2 схемы цепи (рис. Л.1.3) находится в пределах от 150 до 200:

```
SSS7 = {R4 -> 8, R5 -> 12, R6 -> 9, E1 -> 110, E2 -> 220,
  E3 -> 110, E4 -> 110, J4 -> 12, G4 -> 1/5};
YY = FullSimplify[
  (Phi[[5]] - Phi[[2]]) /. {phi[6] -> 0} /. {r -> 0} /. SSS7]
(20 (2970 + 3273 R2 + 217 R1 (9 + R2) +
  154 (6 + R2) R3 + R1 (118 + 11 R2) R3) ) /
(540 + 17 R1 (9 + R2) + 168 R3 + R1 (26 + R2) R3 +
  R2 (213 + 14 R3))
```

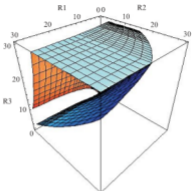


Рис. Л.1.10

```
InequalityPlot3D[ 150 ≤ YY ≤ 200, {R1, 0, 30},
  {R2, 0, 30}, {R3, 0, 30},
  AxesLabel → {"R1", "R2", "R3"},
  ViewPoint → {1.2, 1.2, 1.2}];
```

Для наглядности выбрана другая точка наблюдения на рисунок с помощью опции **ViewPoint**.

Построена потенциальная диаграмма [10, с. 273] для внешнего контура на схеме электрической цепи. Задан начальный узел и направление обхода контура. На диаграмме необходимо отметить точки, соответствующие узлам (в том числе и фиктивным узлам) рассматриваемого контура.

Абсцисса точки равна сумме сопротивлений ветвей, соединяющих начальный узел с рассмотренным узлом, ордината равна значению потенциала в этом узле. Задан набор узлов схемы, для которых будет построена диаграмма:

$$K = \{1, 4, 5, 3, 7, 1\};$$

Записан набор номеров ветвей, которые последовательно соединяют заданные узлы:

$$NH = \{6, 2, 7, 9, 3\};$$



Создан набор значений потенциалов в этих узлах:

```
Ff = Table[Phi[K[[i]]] /. {phi[6] -> 0} /. SSR,
  {i, 1, Length[K]}] // N;
y = Table[Sum[rrr[[i]], {i, 1, k}],
```

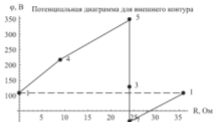


Рис. Л.1.11

Построен набор сопротивлений, соответствующих абсциссам точек потенциальной диаграммы:

```
rrr = Table[R[NH[[i]]] /. {phi[6] -> 0} /. SSR,
  {i, 1, Length[NH]}] // N;
y = Table[Sum[rrr[[i]], {i, 1, k}],
  {k, 0, Length[NH]}];
```

Нарисована диаграмма (рис. Л.1.11):

```
Y1 = ListPlot[Table[{y[[i]], Ff[[i]]},
  {i, 1, Length[K]}], PlotJoined -> True];
Y2 = ListPlot[Table[{y[[i]], Ff[[i]]},
  {i, 1, Length[K]}], PlotStyle -> PointSize[.02]];
Y3 = Plot[Ff[[1]], {x, 0, 36},
  PlotStyle -> Dashing[{0.05, 0.025}]]
Show[{Y1, Y2, Y3,
  Graphics[
    Table[Text[K[[i]], {y[[i]], Ff[[i]]}, {-4, 0}],
    {i, 1, Length[K]}], PlotRange -> All],
```

```
AxesLabel → {"R, См", "φ, В"},  
PlotLabel →  
StyleForm["Потенциальная диаграмма для  
внешнего контура", RGFontSize → 8],  
PlotRange → All];
```

## Лабораторная работа 2. Расчет цепи синусоидального тока комплексным методом

Лабораторная работа посвящена расчету линейных электрических цепей переменного тока с сосредоточенными параметрами в установившемся режиме. Ток считается синусоидальным.

Дана электрическая цепь синусоидального тока [10, с. 278], схема которой представлена на рис. Л.2.1.

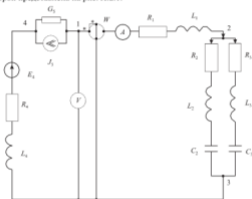


Рис. Л.2.1

Заданы значения сопротивлений, проводимостей, емкостей, индуктивностей, величины ЭДС и токи источников тока. Численные значения параметров элементов цепи:

$$R_1 = 2, R_2 = 12, R_3 = 18, R_4 = 5, G_5 = 0.25, L_1 = 0.6 \cdot 10^{-3},$$

$$L_2 = 4.5 \cdot 10^{-3}, L_3 = 3 \cdot 10^{-3}, L_4 = (4/\omega), \omega = 2\pi f, f = 500,$$

$$\psi_{J5} = \frac{\pi}{6}, C_2 = 60 \cdot 10^{-6}, C_3 = 12 \cdot 10^{-6},$$

амплитудные значения ЭДС и тока источника тока  $E_m = E_4 A = 25$ ,  
 $J_m = J_5 A = 15$ .

Следует рассчитать:

1. Действующие значения токов во всех ветвях цепи и напряжения ветвей.
2. Показания приборов.

**Способ 1.** Упрощенная схема электрической цепи представлена на рис. Л.2.2. Исключены измерительные приборы из цепи.

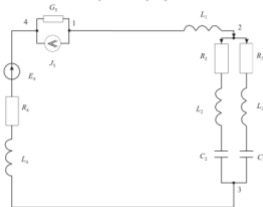


Рис. Л.2.2

Алгоритм решения задачи состоит из таких же этапов, что и алгоритм в лабораторной работе 1.

### 1. Задание графа

На полученной схеме обозначены узлы, которые будут являться вершинами графа. Аналогично лабораторной работе 1, подключая предварительно необходимый пакет расширения

```
<<DiscreteMath`Combinatorica` ,
```

построен граф, соответствующий данной схеме электрической цепи:

```
LL = {{1, 2}, {2, 3}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 1}};
G = FromOrderedPairs[LL];
q = V[G]; p = Length[LL];
```

Можно вывести на экран изображение графа (рис. Л.2.3).

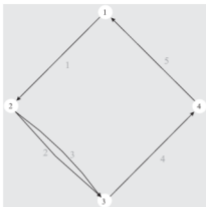


Рис. Л.2.3

Следует отметить, что при выводе изображения при автоматическом задании опций функции пакета, номера дуг, соединяющих одни и те же узлы, накладываются друг на друга. Избежать этого можно, если разбить изображение графа на два, изменив в них расположения номеров дуг, а затем наложить изображения графов друг на друга.

```

EL = Table [i, {i, 1, p}];
ELL = Ordering[LL];
XXX [1_] := ReplacePart[ELL, "",
  Table [Position[ELL, 1[[i]]][[1]],
    {i, 1, Length[1]}]]
z = {2};
AA[x_, y_] := SetGraphOptions[G, EdgeColor -> Red,
  VertexNumber -> True, EdgeLabel -> x,
  VertexNumberPosition -> Center,
  EdgeLabelPosition -> y, VertexStyle -> Disk [Large],

```

```

VertexNumberColor → Black, VertexColor → White,
EdgeLabelColor → Blue,
TextStyle → {FontFamily → "Helvetica",
  FontWeight → "Bold11", FontSize → 20},
Background → RGBColor [1, 1, 0];
S1 = ShowGraph[AA[XXX[z], LowerRight],
DisplayFunction → Identity];
S2 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z]], UpperLeft],
  DisplayFunction → Identity];
Show[{S1, S2}, DisplayFunction → $DisplayFunction];

```

Для расчета схемы использован метод контурных токов. Для определения матрицы контурных токов необходимо сначала найти матрицу соединений схемы, приведенной на рис. Л2.2:

```

A = Transpose[Table[Table[If[LL[[j, 1]] == i, 1,
  If [LL[[j, 2]] == i, -1, 0]], {i, 1, q}], {j, 1, p}]];

```

В матричном виде она такова:

$$\mathbf{A} // \text{MatrixForm} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения матрицы независимых контуров использована следующая функция:

```

B = NullSpace[A]
B // MatrixForm

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Можно использовать все формулы лабораторной работы 1 с учетом того, что матрица контурных сопротивлений рассчитываемой схемы будет уже комплексной, ее элементы будут представлены комплексными числами. Аналогично комплексными будут значения ЭДС, токов, напряжений и т. д.

## 2. Ввод параметров

Синусоидальный ток определен формулой  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ , где  $I_m$  – амплитуда,  $\omega = 2\pi \cdot f$  – круговая частота,  $f = \frac{1}{T}$  – частота ( $T$  – период),  $\psi$  – начальная фаза.

Вектор комплексных сопротивлений задан в виде  $Z = R + i \cdot \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ , где  $R$  – активное сопротивление,  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$  – реактивное сопротивление,  $i$  – мнимая единица:

```
z = Table [r[i] + I (ωL[i] - 1 / (ωC[i])), {i, 1, 5}];
```

Задана круговая частота:

$$\omega = 2 \pi f;$$

Подстановка

```
SSS = {r[4] → 5, r[5] → 4, r[1] → 2, r[2] → 12,  
r[3] → 18, L[1] → 0.0006,  
L[2] → .0045, L[3] → .003,  
L[4] → 4/ω, L[5] → 0,  
C[1] → Infinity,  
C[2] → 0.00006, C[3] → 0.000012,  
C[4] → Infinity,  
C[5] → Infinity, E4A → 25, J5A → 15}  
SSS1 = {f → 500, ψ → Pi/6}
```

задает численные значения параметров элементов цепи. Если в ветви нет индуктивности, значение индуктивности принимается равным нулю, если нет емкости – ее значение принимается равным бесконечности.

Сформирована матрица полных сопротивлений ветвей:

```
Z = DiagonalMatrix[z];
```

Сформированы векторы токов источников тока и ЭДС (аналогично лабораторной работе 1):

```
J = {0, 0, 0, 0, J5};  
EE = {0, 0, 0, E4, 0};
```

### 3. Вычисление комплексных действующих значений параметров источников

Комплексное действующее значение ЭДС рассчитано исходя из заданного амплитудного значения  $E_4A = 25$ :

$$E_4 = E_4A / \sqrt{2} // N$$

$$17.6777$$

Комплексное действующее значение тока источника тока вычислены следующим образом:

$$J_5 = 15 / \sqrt{2} \exp(i\pi/6) // N$$

$$9.18559 + 5.3033 i$$

### 4. Составление системы контурных уравнений (метод контурных токов)

Введен вектор искоемых переменных (контурных токов):

$$IL = \text{Table}[il[i], \{i, 1, \text{Length}[B]\}]$$

$$\{il[1], il[2]\}$$

Согласно [10, (4.12)] система контурных уравнений имеет следующий вид:

$$ZZ \cdot IL = EX,$$

где  $ZZ = B \cdot Z \cdot B^T$  – комплексная матрица контурных сопротивлений,  $EX = B \cdot (EE - Z \cdot J)$  – комплексная матрица контурных ЭДС,  $IL$  – вектор контурных токов.

Сформированы матрицы левой и правой частей:

$$ZZ = B \cdot Z \cdot \text{Transpose}[B]$$

$$EX = B \cdot (EE - Z \cdot J) /. SSS$$

### 5. Решение системы уравнений

Решена система уравнений, решение упрощено и подставлены начальные данные:

$$IL = \text{Simplify}[IL /. \text{Solve}[ZZ \cdot IL = EX, IL][[1]]] /. SSS$$

$$\{-1.03322 - 0.587488 i, -0.0852403 - 0.562671 i\}$$



Вычислены комплексные токи в ветвях:

$$\mathbf{IP} = \text{Transpose}[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{IL} / . \text{SSS}$$

```
{-1.03322 - 0.587488 i,
 -0.947981 - 0.0248172 i, -0.0852403 - 0.562671 i,
 -1.03322 - 0.587488 i, -1.03322 - 0.587488 i}
```

комплексные токи в сопротивлениях:

$$\mathbf{IR} = (\mathbf{IP} + \mathbf{J}) / . \text{SSS}$$

```
{-1.03322 - 0.587488 i,
 -0.947981 - 0.0248172 i, -0.0852403 - 0.562671 i,
 -1.03322 - 0.587488 i, 8.15237 + 4.71581 i}
```

и комплексные напряжения ветвей:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{IR} - \mathbf{EE}) / . \text{SSS}$$

```
{-0.959054 - 3.12255 i,
 -11.1566 - 8.67038 i, -11.1566 - 8.67038 i,
 -20.4938 - 7.07032 i, 32.6095 + 18.8633 i}
```

## 6. Проверка

Если значения переменных найдены правильно, то должен выполняться баланс мощностей [см. [10] (4.15)]:

$$\mathbf{IR} \cdot \mathbf{Z} \cdot \text{Conjugate}[\mathbf{IR}] / . \text{SSS}$$

$$\text{Conjugate}[\mathbf{J}] \cdot \mathbf{U} + \mathbf{EE} \cdot \text{Conjugate}[\mathbf{IR}] / . \text{SSS}$$

```
381.31 + 10.7177 i
```

```
381.31 + 10.7177 i
```

## 7. Вычисление показаний приборов

Амперметр показывает действующее значение тока  $I_A$  в ветви 1:

$$\text{Abs}[\mathbf{IP}[[1]]]$$

```
1.18857
```

Вольтметр показывает действующее значение напряжения между узлами 1 и 3 (его значение вычисляется как модуль суммы значений на-

присоединен на ветвях 5 и 4, ветвь 4 соединяет узлы 3 и 4, ветвь 5 соединяет узлы 4 и 1):

$$\text{Abs}[U\{\{4\}\} + U\{\{5\}\}]$$

16.9074

Ваттметр показывает значение потребляемой активной мощности:

$$\text{Abs}[IP\{\{1\}\}(U\{\{4\}\} + U\{\{5\}\})]$$

20.0956

**Способ 2.** Вначале произведена эквивалентная замена источника тока на источник ЭДС в электрической цепи, т. е. источник тока  $I5$  (номер согласован с предыдущим случаем) с внутренней проводимостью  $G5$ , заменен на эквивалентный источник ЭДС  $E5$  с внутренним сопротивлением  $R5$  (рис. Л.2.4).

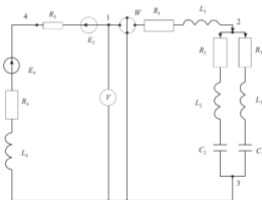


Рис. Л.2.4

Должны получиться те же самые результаты, что и в способе 1.

При исключении измерительных приборов получится упрощенная схема, представленная на рис. Л.2.5.

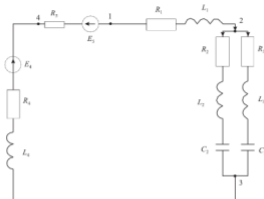


Рис. Л.2.5

Алгоритм решения задачи состоит из таких же этапов, что и в способе 1.

### 1. Задание графа и ввод параметров

На полученной схеме пронумерованы узлы, которые будут являться вершинами графа. Граф и матрица соединений, соответствующие данной схеме электрической цепи, аналогичны графу и матрице соединений, построенным по способу 1, поэтому они не показаны. Векторы токов источников тока и ЭДС изменятся.

Действующее значение ЭДС эквивалентного источника ЭДС  $E_5$  вычислено следующим образом:

$$E_5 = -j5 \text{ r}[5];$$

Знак «минус» в выражении появился из-за того, что ток источника тока  $J5$  направлен навстречу  $E4$ .

$$J = \{0, 0, 0, 0, 0\};$$

$$EE = \{0, 0, 0, E4, E5\};$$

Вектор токов источников тока при этом будет нулевым. Так как между узлами 4 и 1 теперь включен источник ЭДС, в векторе  $EE$  присутст-

вует пятый элемент:

$$E5 = -J5 \cdot r[5] / .SSS / .SSS1 // N;$$

Здесь  $r[5] = \frac{1}{G5}$ .

## 2. Составление и решение системы уравнений

Аналогично способу 1 составлена и решена система уравнений относительно контурных токов, вычислены значения комплексных токов в сопротивлениях и ветвях, а также комплексные напряжения ветвей. Ниже выписаны результаты вычислений для токов в ветвях:

$$\begin{aligned} & \{-1.03322 - 0.587488 i, \\ & -0.947981 - 0.0248172 i, -0.0852403 - 0.562671 i, \\ & -1.03322 - 0.587488 i, -1.03322 - 0.587488 i\} \end{aligned}$$

Как видно, получены те же самые результаты, что и при использовании первого способа решения.

## 3. Проверка

Если значения переменных найдены правильно, то должен быть выполнен баланс мощностей:

$$\begin{aligned} & IR.Z.Conjugate [IR] / .SSS / .SSS1 \\ & Conjugate [J] .U + EE.Conjugate [IR] / .SSS / .SSS1 \\ & 32.1605 + 10.7177 i \\ & 32.1605 + 10.7177 i \end{aligned}$$

Баланс мощностей выполнен, но численные значения правой и левой частей отличны от соответствующих значений в балансе мощностей в первом способе (только в вещественных частях).

## 4. Принцип суперпозиции

Согласно принципу суперпозиции ток в произвольной ветви схемы линейной электрической цепи равен сумме токов в этой ветви, обусловленных каждым источником в отдельности при исключенных остальных источниках. Если исключен источник ЭДС, то он замыкается накоротко, если исключен источник тока, ветвь, в которой он находится, из схемы убирается. Рассмотрены два режима электрической цепи (рис. Л.2.5), в одном из них исключен ЭДС  $E4$ , в другом –  $E5$ .

Расчитаны токи в сопротивлениях для первого режима:

$$\begin{aligned} J &= \{0, 0, 0, 0, 0\}; \\ EE &= \{0, 0, 0, 0, 1\}; \end{aligned}$$

```

E5 = -J5 r [5] /. SSS /. SSS1 // N;
IL = Table [il [i], {i, 1, Length[B]}];
ZZ = B.Z.Transpose[B] /. SSS;
EX = B.(EE - Z.J);
IL = Simplify[IL /. Solve[ZZ.IL=EX, IL][[1]]] /. SSS /.
  SSS1;
IP = Transpose [B].IL /. SSS /. SSS1;
IR1 = (IP + J) /. SSS /. SSS1;

```

В переменной *IR1* цифра указывает на номер режима.

Расчитаны токи в сопротивлениях для второго режима:

```

J = {0, 0, 0, 0, 0};
EE = {0, 0, 0, 1, 0};
E5 = -J5 3 [5] /. SSS /. SSS1 // N;
IL = Table [il [i], {i, 1, Length[B]}];
ZZ = B.Z.Transpose [B] /. SSS;
EX = B.(EE - Z.J);
IL = Simplify [IL/.Solve [ZZ.IL=EX, IL][[1]]]/.SSS/.
  SSS1;
IP = Transpose[B].IL /. SSS /. SSS1;
IR2 = (IP + J) /. SSS /. SSS1;

```

Проверка выполнения принципа суперпозиции:

$$\begin{aligned} IR &= \{E4, E5\} . (IR1, IR2) / . SSS \\ &True \end{aligned}$$

Построены графики мгновенных значений тока, напряжения, мощностей в первом контуре (рис. Л.2.6).

Для этого сначала вычислено значение тока

$$\begin{aligned} i[\omega t] &= \\ &Abs[IL[[1]]] * Sqrt[2] * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Sin}[\omega t * \text{Pi} / 180 + \\ & \quad \text{ArcTan}[\text{Im}[\text{IL}[[1]]] / \text{Re}[\text{IL}[[1]]]]] / . \\ & \text{SSS1} \\ & 1.68089 \text{ Sin} \left[ 0.51701 + \frac{\pi \omega t}{180} \right] \end{aligned}$$

вычислено значение напряжения:

$$\begin{aligned} u[\omega t] = & \\ & (\text{Abs}[U[[4]] + U[[5]]]) * \text{Sqrt}[2] * \\ & \text{Sin}[\omega t * \text{Pi} / 180 + \\ & \quad \text{ArcTan}[\text{Im}[(U[[4]] + U[[5]])] / \\ & \quad \text{Re}[(U[[4]] + U[[5]])]]] / . \text{SSS1} \\ & 23.9107 \text{ Sin} \left[ 0.771901 + \frac{\pi \omega t}{180} \right] \end{aligned}$$

Тогда значение мощности примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{PP} = i[\omega t] * u[\omega t] \\ 40.1912 \text{ Sin} \left[ 0.51701 + \frac{\pi \omega t}{180} \right] \text{ Sin} \left[ 0.771901 + \frac{\pi \omega t}{180} \right] \end{aligned}$$

Вычислены активная составляющая сопротивления:

$$\text{Reqv} = \text{Re}[Z[[4, 4]] + Z[[5, 5]]] / . \text{SSS} / . \text{SSS1}$$

реактивная составляющая сопротивления:

$$\text{Xeqv} = \text{Im}[Z[[4, 4]] + Z[[5, 5]]] / . \text{SSS} / . \text{SSS1}$$

активная мощность:

$$\begin{aligned} \text{PPa} = \text{Reqv} * (i[\omega t])^2 \\ 25.4284 \text{ Sin} \left[ 0.51701 + \frac{\pi \omega t}{180} \right]^2 \end{aligned}$$

и реактивная мощность:

$$\begin{aligned} \text{PPwa} = \text{Xeqv} * (i[\omega t])^2 \\ 11.3015 \text{ Sin} \left[ 0.51701 + \frac{\pi \omega t}{180} \right]^2 \end{aligned}$$

Построенные графики выведены на одном рисунке:

```

Y1 = Plot[Evaluate[i[ $\omega t$ ]], { $\omega t$ , 0, 360},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[2],
  AxesLabel -> {" $\omega t$ ", ""}];
Y2 = Plot[Evaluate[u[ $\omega t$ ]], { $\omega t$ , 0, 360},
  AxesLabel -> {" $\omega t$ ", ""}];
Y3 = Plot[PP, { $\omega t$ , 0, 360},
  PlotStyle -> Dashing[{0.01, 0.01}],
  AxesLabel -> {" $\omega t$ ", ""}];
Y4 = Plot[PPa, { $\omega t$ , 0, 360},
  PlotStyle -> Dashing[{0.025, 0.025}],
  AxesLabel -> {" $\omega t$ ", ""}];
Y5 = Plot[PPwa, { $\omega t$ , 0, 360},
  PlotStyle -> Dashing[{0.1, 0.05}],
  AxesLabel -> {" $\omega t$ ", ""}];
Show[Y1, Y2, Y3, Y4, Y5];

```

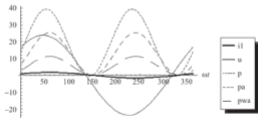


Рис. Л.2.6

---

### Лабораторная работа 3.

## Расчет линейной электрической цепи с взаимной индукцией. Расчет трансформатора с линейными характеристиками

Лабораторная работа посвящена расчету линейных электрических цепей переменного тока с взаимной индукцией в установившемся режиме.

При наличии в цепи взаимной индукции, например, между  $k$ -й и  $m$ -й ветвями, появляется ЭДС взаимной индукции, которую учитывают в виде дополнительного падения напряжения в  $k$ -й ветви от тока  $m$ -й ветви ( $j\omega M_{km} \dot{I}_m = Z_{km} \dot{I}_m$ ), и наоборот ( $j\omega M_{mk} \dot{I}_k = Z_{mk} \dot{I}_k$ , где  $\omega$  — круговая частота тока,  $M_{km}$  — взаимноиндуктивность, общие сопротивления  $Z_{mk} = Z_{km}$ ). В линейных цепях с взаимной индукцией справедлив закон Ома:  $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{I}$  — векторы напряжений и токов ветвей,  $\mathbf{Z}$  — матрица сопротивлений ветвей. Из-за индуктивных связей матрица  $\mathbf{Z}$  — не диагональная, но симметричная:  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + j\omega \mathbf{M}$ , матрица  $\mathbf{Z}_0$  определяется согласно лабораторной работе 2,  $\mathbf{M}$  — матрица взаимноиндуктивностей, для которой справедливо  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ , т. к. в силу принципа взаимности  $M_{ij} = M_{ji}$ , где  $M$  — элементы матрицы  $\mathbf{M}$ . Элементы главной диагонали матрицы  $\mathbf{Z}$  — комплексные собственные сопротивления всех ветвей ( $Z_{kk}$ ), все остальные элементы  $Z_{km} = Z_{mk}$  — комплексные общие сопротивления, обусловленные индуктивной связью между  $k$ -й и  $m$ -й ветвями.

Индуктивно связанные ветви могут быть включены согласно (или встречно). Тогда комплексное общее сопротивление  $Z_{km} = jX_{km} = j\omega M$  (или  $Z_{km} = -jX_{km} = -j\omega M$ ), если ориентация токов в  $k$ -й и  $m$ -й ветвях по отношению к маркированным зажимам индуктивно связанных ветвей одинакова (или противоположна). Для ветвей, не имеющих индуктивной связи,  $Z_{km} = 0$ .

Матрица проводимостей ветвей в рассмотренном случае — это матрица, обратная матрице сопротивлений ветвей ( $\mathbf{Y}$ ):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}.$$

Зная матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$ , можно составить узловые и контурные уравнения. Граф учитывает только электрические связи, поэтому на вид графа индуктивные связи не влияют и матрицы соединений составляются обычным образом.



Пример [10, с. 110]. Две индуктивно связанные индуктивности соединены, как показано на рис. Л.3.1. Зажимы обмоток катушек маркированы. Заданы направления токов в ветвях схемы.

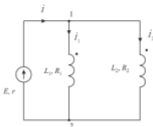


Рис. Л.3.1

Узлы пронумерованы и построен граф (рис. Л.3.2):

$$\mathbf{LL} = \{ \{1, 2\}, \{1, 2\}, \{2, 1\} \};$$

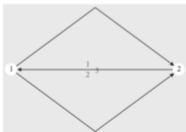


Рис. Л.3.2

Матрица сопротивлений ветвей для такой схемы:

$$\mathbf{ZZ} = \begin{pmatrix} \mathbf{z1} & \mathbf{z12} & 0 \\ \mathbf{z12} & \mathbf{z2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{z3} \end{pmatrix};$$

где

$$\begin{aligned} Z1 &= R1 + I \omega L1; \\ Z2 &= R2 + I \omega L2; \\ Z3 &= r; \\ M12 &= \omega MM; \\ Z12 &= IM12; \end{aligned}$$

В пакете *Mathematica* мнимая единица обозначена служебным символом  $I$ , поэтому пользователем этот символ не используется при обозначении переменных.

$M_{12}$  взята со знаком «+», т. к. токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  одинаково ориентированы относительно маркированных зажимов (потoki самоиндукции и взаимной индукции совпадают по направлению).

$$\begin{aligned} Z1 &= I\omega L1; \\ Z2 &= I\omega L2; \\ Z3 &= R3; \\ Z4 &= R4; \\ Z5 &= r; \\ Z6 &= -I / (\omega C6); \\ M12 &= \omega MM; \\ Z12 &= I M12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EE &= \{0, 0, E3\}; \\ J &= \{0, 0, 0\}; \end{aligned}$$

По методу узловых потенциалов составлена система уравнений

$$G \cdot \varphi = JJ,$$

где  $G = A \cdot YY \cdot A^T$  — матрица узловых проводимостей,  $J = A \cdot J - A \cdot YY \cdot EE$  — вектор узловых токов. Здесь  $A$  — матрица соединений (узловая матрица) исходного графа,  $YY = ZZ^{-1}$  — матрица проводимостей ветвей,  $ZZ$  — матрица сопротивлений ветвей.

Полученная система уравнений решена по аналогии с лабораторной работой 1. Сначала рассчитана матрица проводимостей ветвей как матрица, обратная матрице сопротивлений ветвей:

$$YY = \text{Simplify}[\text{Inverse}[ZZ]];$$

Затем вычислена матрица узловых проводимостей:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \cdot \text{Transpose}[\mathbf{A}];$$

Наконец, вычислен вектор узловых токов:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}$$

$$\left\{ \frac{E3}{r}, -\frac{E3}{r} \right\}$$

Решение системы записано в список SSS с помощью следующей функции:

$$\mathbf{SSS} = \text{Solve}[\mathbf{G} \cdot \{\varphi1, \varphi2\} = \mathbf{J}, \{\varphi1\}][[1]]$$

В итоге получены выражения для потенциалов, которые выведены на экран монитора:

$$\Phi = \{\{\varphi1, \varphi2\} / . \mathbf{SSS}$$

$$\{ - ( - i E3 R1 R2 - i r R1 \varphi2 - i r R2 \varphi2 -$$

$$i R1 R2 \varphi2 + E3 L2 R1 \omega + E3 L1 R2 \omega +$$

$$L1 r \varphi2 \omega + L2 r \varphi2 \omega - 2 M M r \varphi2 \omega +$$

$$L2 R1 \varphi2 \omega + L1 R2 \varphi2 \omega + i E3 L1 L2 \omega^2 -$$

$$i E3 M M^2 \omega^2 + i L1 L2 \varphi2 \omega^2 - i M M^2 \varphi2 \omega^2 ) /$$

$$(i r R1 + i r R2 + i R1 R2 - L1 r \omega - L2 r \omega + 2 M M r \omega -$$

$$L2 R1 \omega - L1 R2 \omega - i L1 L2 \omega^2 + i M M^2 \omega^2), \varphi2 \}$$

При  $R_1 = R_2 = 0$ ,  $r = 0$  получены выражения для токов, согласующиеся с результатами, представленными в [10, с. 110]:

$$\text{FullSimplify}[\mathbf{Y} \cdot (\text{Transpose}[\mathbf{A}] \cdot \Phi + \mathbf{E})] / .$$

$$\{r \rightarrow 0, R1 \rightarrow 0, R2 \rightarrow 0\}$$

$$\left\{ \frac{i E3 (L2 - M M)}{(L1 L2 - M M^2) \omega}, \right.$$

$$\left. - \frac{i E3 (L1 - M M)}{(L1 L2 - M M^2) \omega}, - \frac{i E3 (L1 + L2 - 2 M M)}{(L1 L2 - M M^2) \omega} \right\}$$

Для напряжений после упрощений получен очевидный результат:

$$\text{FullSimplify}[$$

$$\text{Transpose}[\mathbf{A}] \cdot \Phi / . \{r \rightarrow 0, R1 \rightarrow 0, R2 \rightarrow 0\}$$

$$\{E3, E3, -E3\}$$

Аналогичные результаты получены при решении системы методом контурных токов. Сначала выбраны независимые контуры. Функцией NullSpace в данном случае предложено два независимых контура, первый контур состоит из первой и третьей ветви цепи, содержащих индуктивности  $L_1$  и источник ЭДС, второй контур состоит из первой и второй ветвей, содержащих индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ :

```

B = NullSpace[A]
In[57]:= B // MatrixForm
Out[57]//MatrixForm =
      ( 1  0  1 )
      (-1 1  0 )

ZK = B.ZZ.Transpose[B];
EEE = B.(EE - ZZ.J);
IL = {i11, i12} /.
      Solve[ZK.{i11, i12} = EEE, {i11, i12}][[1]];
IP = Simplify[Transpose[B].IL + J/.
      {r -> 0, R1 -> 0, R2 -> 0}]
U = Simplify[ZZ.IP - EE/.{r -> 0, R1 -> 0, R2 -> 0}]

```

Здесь **IL** — вектор контурных токов, **IP** — вектор токов в ветвях цепи. На выходе получены списки токов в ветвях цепи и напряжений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{iE_3(L_2 - MM)}{(-L_1L_2 + MM^2)\omega}, \\ \frac{iE_3(L_1 - MM)}{(-L_1L_2 + MM^2)\omega}, - \frac{iE_3(L_1 + L_2 - 2MM)}{(L_1L_2 - MM^2)\omega} \end{array} \right\}$$

$$(E_3, E_3, -E_3)$$

Если значения переменных найдены правильно, то должен выполняться баланс мощностей

$$\mathbf{IP} \cdot \mathbf{ZZ} \cdot \overline{\mathbf{IP}} = \mathbf{EE} \cdot \overline{\mathbf{IP}} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{U},$$

где  $\overline{\mathbf{IP}}, \overline{\mathbf{J}}$  — векторы сопряженных значений токов. Известно, что скалярное произведение векторов, элементы которых — комплексные числа, вычисляется как скалярное произведение первого вектора на вектор, являющийся сопряженным ко второму.

Функция `Conjugate[expr]` возвращает сопряженное значение для выражения. Непосредственное вычисление левой и правой частей выражения для баланса мощностей не даст результата, так как для правильного вычисления числа  $a - jb$ , сопряженного к  $a + jb$ , требуется в аналитической форме указать знак  $b$ . Поэтому следует ввести условие положительности значений параметров цепи:

```
FullSimplify[IP.ZZ.Conjugate[IP],
  {E3 > 0, L1 > 0, MM > 0, L2 > 0, ω > 0}] /.
  {r → 0, R1 → 0, R2 → 0}

$$\frac{i E3^2 (L1 + L2 - 2MM)(L1L2 - MM^2)}{(-L1 L2 + MM^2)^2 \omega}$$

FullSimplify[EE.Conjugate [IP] + Conjugate[J] . U,
  {E3 > 0, L1 > 0, MM > 0, L2 > 0, ω > 0}]

$$\frac{i E3^2 (L1 + L2 - 2 MM)}{(L1 L2 - MM^2) \omega}$$

```

Можно убедиться, что правая и левая части тождественно равны:

```
FullSimplify[IP.ZZ.Conjugate[IP] ==
  EE.Conjugate[IP] + Conjugate[J] . U,
  {E3 > 0, L1 > 0, MM > 0, L2 > 0, ω > 0}] /.
  {r → 0, R1 → 0, R2 → 0}
True
```

Если поменять маркировку обмотки в одной из индуктивно связанных ветвей, например второй, как показано на рис. Л.3.3, изменится знак взаимной индуктивности:

$$M12 = -\omega MM,$$

что отразится на выражениях для токов:

```
FullSimplify[YY. (Transpose [A] . Φ + EE)] /.
  {r → 0, R1 → 0, R2 → 0}

$$\left\{ \frac{i E3(L2 + MM)}{(-L1L2 + MM^2)\omega}, \right.$$


$$\left. \frac{i E3(L1 + MM)}{(-L1L2 + MM^2)\omega}, \frac{i E3(L1 + L2 + 2MM)}{(-L1L2 + MM^2)\omega} \right\}$$

```

**Пример.** Рассчитать электрическую цепь [10, с. 116], схема которой представлена на рис. Л.3.4. Заданы значения сопротивлений, емкостей,

индуктивностей, величина ЭДС. Обмотки катушек включены согласно. Следует рассчитать значения токов во всех ветвях и напряжения на элементах схемы цепи.

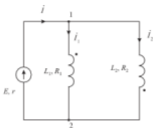


Рис. Л.3.3

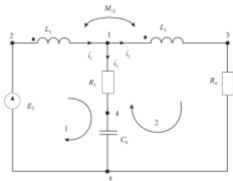


Рис. Л.3.4

### 1. Задание графа

Введены фиктивные узлы 2, 3 и 4, т. к. необходимо рассчитать напряжения на всех элементах цепи. Аналогично лабораторной работе 2 по-

строен граф, соответствующий данной электрической схеме, с предварительным подключением необходимых пакетов расширений:

```
<< DiscreteMath Combinatorica
```

```
LL = {{(2, 1), (1, 3), (1, 4), (3, 5), (5, 2), (4, 5)}};
```

```
G = FromOrderedPairs[LL];
```

```
q = V[G]; p = Length[LL];
```

```
EL = Table[i, {i, 1, p}];
```

```
ELL = Ordering[LL];
```

Вывод на экран изображения графа (рис. Л.3.5):

```
ShowGraph[SetGraphOptions[G, EdgeColor -> Red,
VertexNumber -> True,
VertexNumberColor -> Black, EdgeLabel -> EL,
VertexColor -> White, VertexStyle -> Disk[Large],
EdgeLabelColor -> Blue,
VertexNumberPosition -> Center,
TextStyle -> {FontFamily -> "Helvetica",
FontSize -> 18},
Background -> RGBColor[1, 1, 0]]];
```

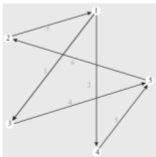


Рис. Л.3.5

Матрица соединений схемы такова:

```
A = Transpose [
Table[
```

```

Table [If [LL[[j, 1]] == i, 1,
          If [LL[[j, 2]] == i, -1, 0]], {i, 1, q}],
{j, 1, p}]];

```

```
In[17]:= A // MatrixForm
```

```
Out[17]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 2. Ввод параметров

Подстановка

```

SSS = {L1 → 20, L2 → 10, R4 → 10, R3 → 10,
       E5 → 200, MM → 10, C6 → 1/20, ω → 314};

```

задаст численные значения параметров цепи.

Для формирования матрицы сопротивлений ветвей (с учетом фиктивного узла 4) заданы сопротивления:

```

Z1 = I ω L1;
Z2 = I ω L2;
Z3 = R3;
Z4 = R4;
Z5 = r;
Z6 = -I / (ω C6);

```

В ветвь схемы между узлами 2 и 5 включено фиктивное сопротивление  $r$ , которое потом при расчетах приравнено нулю.

Индуктивности расположены на первой и второй ветви схемы, поэтому соответствующие им значения взаимной индуктивностей  $M_{12}$  и  $M_{21}$  определяют ненулевые элементы в матрице  $\mathbf{Z}$ . Эти ненулевые элементы расположены вне главной диагонали:

```

M12 = ω MM;
Z12 = I M12;

```



Т. к. рассматривается случай согласного включения, матрица сопротивлений ветвей будет выглядеть следующим образом:

$$ZZ = \begin{pmatrix} Z1 & Z12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z12 & Z2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z5 \end{pmatrix},$$

Сформированы векторы ЭДС и токов источников тока:

$$EE = \{0, 0, 0, 0, E5, 0\};$$

$$J = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\};$$

### 3. Составление и решение системы уравнений

#### 3.1. Метод узловых потенциалов

В указанном методе искомые переменные — потенциалы узлов.

Система узловых уравнений относительно потенциалов имеет следующий вид:

$$G \cdot \varphi = JJ,$$

где  $G = A \cdot ZZ^{-1} \cdot A^T$  — матрица узловых проводимостей,  $\varphi$  — вектор потенциалов узлов,  $JJ$  — вектор узловых токов.

Формирование матрицы узловых проводимостей  $G$ :

$$YY = \text{Inverse}[ZZ];$$

$$G = A.YY.\text{Transpose}[A];$$

Можно проверить, что матрица системы будет особенной (ее определитель равен нулю):

$$\text{Det}[G]$$

$$0$$

Формирование вектора узловых токов  $JJ$ :

$$JJ = A.J - A.YY.EE;$$

В список переменных не введен потенциал базисного узла, например узла 1 (в качестве базисного можно выбрать любой другой узел), он оставлен в качестве параметра системы. Подставлены начальные данные:

$$SSS1 = \text{Solve}[G.\{\varphi1, \varphi2, \varphi3, \varphi4, \varphi5\} == JJ,$$

$$\{\varphi4, \varphi2, \varphi3, \varphi5\}][[1]];$$

$$\Phi = \{\varphi1, \varphi2, \varphi3, \varphi4, \varphi5\} /. SSS1;$$

Вычислены токи во всех ветвях цепи:

$$\text{FullSimplify}[\text{YY} \cdot (\text{Transpose}[\mathbf{A}] \cdot \Phi + \mathbf{EE})] /. \text{SSS}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{20(-20(15+r)+10((50+3140i)+3r))}{(-9859500+219800i)+r((30+18840i)+r)}, \\ \frac{20(40(15+r)-10((50+3140i)+3r))}{(-9859500+219800i)+r((30+18840i)+r)}, \\ \frac{2000+1256000i}{(-9859500+219800i)+r((30+18840i)+r)}, \\ \frac{200((10-3140i)+r)}{(-9859500+219800i)+r((30+18840i)+r)}, \\ \frac{200((20+3140i)+r)}{(-9859500+219800i)+r((30+18840i)+r)}, \\ \frac{2000+1256000i}{(-9859500+219800i)+r((30+18840i)+r)} \end{array} \right\}$$

Осталось подставить значение фиктивного сопротивления:

```
% /. {r -> 0} // N
{0.00101376 - 0.0636723 i, -0.00162201 + 0.0636588 i,
 0.00263577 - 0.127331 i, -0.00162201 + 0.0636588 i,
 0.00101376 - 0.0636723 i, 0.00263577 - 0.127331 i}
```

Найдены напряжения на элементах цепи:

```
Simplify[Transpose[A] \Phi] /. SSS /. {r -> 0} // N
{199.974 + 1.27331 i,
 0.0425778 - 1.9099 i, 0.0263577 - 1.27331 i,
 -0.0162201 + 0.636588 i, -200., 0.}
```

### 3.2 Метод контурных токов

Для нахождения матрицы независимых контуров использована функция

```
B = NullSpace[A];
B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Аналогично алгоритму предыдущих лабораторных работ составлена и решена система контурных уравнений:

```

ZK = B.ZZ.Transpose[B]
EEE = B. (EE - ZZ.J)
IL = Table [il [i], {i, 1, Length[B]}];
IL = IL /. Solve [ZK.IL = EEE, IL][[1]];

```

Вычислены токи во всех ветвях цепи:

```

IP = Transpose [B] .IL +J /. SSS /. {r -> 0} // N
{0.00101376 - 0.0636723 i, -0.00162201 + 0.0636588 i,
 0.00263577 - 0.127331 i, -0.00162201 + 0.0636588 i,
 0.00101376 - 0.0636723 i, 0.00263577 - 0.127331 i}

```

Найдены напряжения ветвей цепи:

```

U = ZZ.IP -EE /. SSS /. {r -> 0} // N
{199.974 + 1.27331 i,
 0.0425778 - 1.9099 i, 0.0263577 - 1.27331 i,
 -0.0162201 + 0.636588 i, -200., 0.}

```

#### 4. Проверка

Если значения переменных найдены правильно, то должен выполняться баланс мощностей:

```

II.ZZ.Conjugate [II] /. SSS /. {r -> 0}
EE.Conjugate [II] +Conjugate [J] .U /. SSS /. {r -> 0}
2000 +2000 i
2000 +2000 i

```

**Пример.** Рассмотрим трансформатор с линейными характеристиками. Его схема представлена на рис. Л.3.6, а численные значения параметров равны  $L_1 = 10^{-3}$ ,  $L_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 2$ ,  $R_3 = 1$ ,  $X_3 = 5$ ,  $M = 1$ ,  $\dot{U} = 110$ ,  $\omega = 20$ .

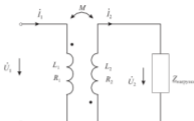


Рис. Л.3.6

Здесь нагрузка подключена к вторичной обмотке трансформатора, ее сопротивление  $Z_{\text{нагрузки}} = R_2 + jX_2$  задано.

Решение проведено методом узловых потенциалов.

Для составления графа схема преобразована (рис. Л.3.7).

Подача питающего напряжения  $\dot{U}_1$  промоделирована подключением к первичной обмотке трансформатора источника ЭДС с числовым значением ЭДС, равным числовому значению  $\dot{U}_1$ . Моделирование может быть проведено и с помощью источника тока, так как разрешающее уравнение, положенное в основу составления алгоритма расчета электрической цепи, учитывает источники обоих типов. При этом, если моделирование происходит за счет введения в схему источника ЭДС, то соответствующий элемент в матрице-столбце для токов источника тока равен нулю и наоборот.

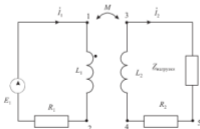


Рис. Л.3.7

Граф с учетом фиктивных узлов 2, 4 и 5 (фиктивный узел 5 вводится для расчета напряжения на нагрузке) записан следующим образом:

```
LL = {{1, 2}, {2, 1}, {4, 3}, {3, 5}, {5, 4}};
```

Алгоритм вывода изображения графа следующий:

```
XXX[1_] := ReplacePart[ELL, "",
  Table [Position[ELL, 1][[i]][[1]],
    {i, 1, Length[1]}]]
z1 = {2}; z2 = {4}; z = Union[z1, z2];
AA[x_, y_] := SetGraphOptions[G, EdgeColor -> Red,
  VertexNumber -> True, EdgeLabel -> x,
  VertexNumberPosition -> Center,
  EdgeLabelPosition -> y,
  VertexNumberColor -> Black,
  VertexColor -> White, EdgeLabelColor -> Blue,
  VertexStyle -> Disk [Large],
  TextStyle -> {FontFamily -> "New Times Roman",
    FontWeight -> "Bold", FontSize -> 16},
  Background -> RGBColor [1, 1, 0]];

S1 = ShowGraph[AA[XXX[z], LowerRight],
  DisplayFunction -> Identity];
S2 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z1]],
  UpperLeft], DisplayFunction -> Identity];
S3 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z2]],
  UpperLeft], DisplayFunction -> Identity];
Show[{S1, S2, S3},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Граф несвязный, состоит из двух отдельных частей (рис. Л.3.8).

Для таких несвязных графов также можно составить матрицы соединений, которые распадутся на блоки независимых подматриц. Индуктивная связь учтена в матрице сопротивлений. В рассмотренном примере матрица соединений графа, представленного на рис. Л.3.8, состоит из

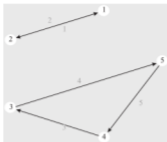


Рис. Л.3.8

двух независимых подматриц:

```
In[15]:= A // MatrixForm
```

```
Out [15]//MatrixForm=
```

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Индуктивная связь между ветвями 1 и 3 приводит к появлению недиагональных элементов в матрице сопротивлений. Матрица сопротивлений  $\mathbf{ZZ}$  имеет блочную структуру, в данном случае состоит из двух подматриц:

$$\mathbf{ZZ} = \left( \begin{array}{ccc|cc} \mathbf{Z1} & 0 & \mathbf{Z13} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{Z13} & 0 & \mathbf{Z3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z5} \end{array} \right);$$

где

```
In[16]:= Z1 = I @ L1;
```

```
Z2 = R1;
```

```
Z3 = I @ L2;
```

$$\mathbf{Z4} = \mathbf{R4} + \mathbf{I X4};$$

$$\mathbf{Z5} = \mathbf{R2};$$

$$\mathbf{M13} = \omega \mathbf{M1};$$

$$\mathbf{Z13} = \mathbf{I M13};$$

Введены векторы ЭДС и узловых токов

$$\mathbf{EE} = \{0, \mathbf{E1}, 0, 0, 0\};$$

$$\mathbf{J} = \{0, 0, 0, 0, 0\};$$

и вектор потенциалов

$$\Phi = \{\varphi1, \varphi2, \varphi3, \varphi4, \varphi5\};$$

При решении системы узловых уравнений  $\mathbf{G} \cdot \Phi = \mathbf{J}$  необходимо учитывать, что матрица системы  $\mathbf{G}$  — вырожденная.

$$\mathbf{Det}[\mathbf{G}]$$

$$0$$

Ее ранг на две единицы меньше числа узлов:  $\text{rang } \mathbf{G} = q - 2$ .

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}[\mathbf{G}]$$

$$5$$

$$\mathbf{MatrixRank}[\mathbf{G}]$$

$$3$$

Число линейно независимых уравнений системы на две единицы меньше количества переменных, поэтому количество свободных переменных равно двум. По матрице соединений  $\mathbf{A}$  можно получить матрицу смежности  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ . Матрица смежности для несвязного графа состоит из блоков (компонент связности).

$$\mathbf{A} * \mathbf{Transpose}[\mathbf{A}] // \mathbf{MatrixForm}$$

$$\left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Свободные переменные должны быть выбраны по одной из каждого блока, то есть по одной из первичного и из вторичного контуров.

Пользователь должен решить сам, какие переменные взять в качестве свободных. В рассмотренном примере в качестве свободных переменных выбраны потенциалы  $\varphi_2$  (из первичного контура) и  $\varphi_4$  (из вторичного контура). Следовательно, система уравнений Кирхгофа решена относительно переменных  $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ , которые выражены через свободные переменные  $\varphi_2$  и  $\varphi_4$ :

```
In[30]:= SS = Solve[G.Φ = JJ, {φ1, φ3, φ5}][[1]]
```

Все расчеты сначала проведены в символьном виде. Полученные выражения для потенциалов следующие:

$$\begin{aligned} \varphi_5 &\rightarrow -(-R1R2\varphi_4 - R1R4\varphi_4 - i R1 X4 \varphi_4 + i E1 MM R2 \omega - \\ & i L2 R1 \varphi_4 \omega - i L1 R2 \varphi_4 \omega - i L1 R4 \varphi_4 \omega + \\ & L1X4\varphi_4\omega + L1L2\varphi_4\omega^2 - MM^2\varphi_4\omega^2) / \\ & (R1R2 + R1R4 + iR1X4 + iL2R1\omega + iL1R2\omega + \\ & iL1R4\omega - L1X4\omega - L1L2\omega^2 + MM^2\omega^2), \\ \varphi_1 &\rightarrow -(-R1R2\varphi_2 - R1R4\varphi_2 - iR1X4\varphi_2 - iE1L1R2\omega - \\ & iE1L1R4\omega + E1L1X4\omega - iL2R1\varphi_2\omega - \\ & iL1R2\varphi_2\omega - iL1R4\varphi_2\omega + L1X4\varphi_2\omega + \\ & E1L1L2\omega^2 - E1MM^2\omega^2 + L1L2\varphi_2\omega^2 - MM^2\varphi_2\omega^2) / \\ & (R1R2 + R1R4 + iR1X4 + iL2R1\omega + iL1R2\omega + \\ & iL1R4\omega - L1X4\omega - L1L2\omega^2 + MM^2\omega^2), \\ \varphi_3 &\rightarrow -(-R1R2\varphi_4 - R1R4\varphi_4 - iR1X4\varphi_4 + iE1MMR2\omega + \\ & i E1MMR4\omega - E1MMX4\omega - iL2R1\varphi_4\omega - iL1R2\varphi_4\omega - \\ & iL1R4\varphi_4\omega + L1X4\varphi_4\omega + L1L2\varphi_4\omega^2 - MM^2\varphi_4\omega^2) / \\ & (R1R2 + R1R4 + iR1X4 + iL2R1\omega + iL1R2\omega + \\ & iL1R4\omega - L1X4\omega - L1L2\omega^2 + MM^2\omega^2) \end{aligned}$$

Найдены выражения в символьном виде для токов. Если вывести на экран все элементы вектора тока, то будет видно, что выражения токов в ветвях 1 и 2 схемы одинаковы, то же самое можно отметить и для выражений для токов в ветвях 3, 4 и 5 схемы. Выведены выражения для токов в первичной обмотке трансформатора:

```
FullSimplify[YY. (Transpose[A].S+EE)/.SS /.
{φ2 → 0, φ4 → 0}][[2]]
```

$$\begin{aligned} &(E1 (R2 + R4 + i (X4 + L2\omega))) / \\ &(R1 (R2 + R4 + i (X4 + L2\omega)) + \\ &\omega (MM^2\omega + iL1 (R2 + R4 + i (X4 + L2\omega)))) \end{aligned} \quad (1)$$



и во вторичной обмотке трансформатора:

$$\begin{aligned} & \text{FullSimplify}[\text{Transpose}[\mathbf{A}].\Phi + \mathbf{E}\mathbf{E}] /. \mathbf{SS} /. \\ & \{\varphi 2 \rightarrow 0, \varphi 4 \rightarrow 0\}][[4]] \\ & - (iE1MM\omega) / (R1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)) + \\ & \omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) \end{aligned}$$

Найдены выражения в символьном виде для напряжений ветвей. В первичной обмотке трансформатора (для ветвей 1 и 2) они равны по модулю, но отличаются знаком:

$$\begin{aligned} & \text{FullSimplify}[\text{Transpose}[\mathbf{A}].\Phi] /. \mathbf{SS} /. \\ & \{\varphi 2 \rightarrow 0, \varphi 4 \rightarrow 0\}][[1]] \\ & - (E1\omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) / \\ & (R1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)) + \\ & \omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{FullSimplify}[\text{Transpose}[\mathbf{A}].\Phi] /. \mathbf{SS} /. \\ & \{\varphi 2 \rightarrow 0, \varphi 4 \rightarrow 0\}][[2]] \\ & - (E1\omega)(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega))) / \\ & (R1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)) + \\ & \omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) \end{aligned}$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа сумма напряжений ветвей 3, 4 и 5 равна нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{U3} & = \text{FullSimplify}[\text{Transpose}[\mathbf{A}].\Phi] /. \mathbf{SS} /. \\ & \{\varphi 2 \rightarrow 0, \varphi 4 \rightarrow 0\}][[3]] \\ & (iE1MM(R2 + R4 + iX4)\omega) / (R1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)) + \\ & \omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U4} & = \text{FullSimplify}[\text{Transpose}[\mathbf{A}].\Phi] /. \mathbf{SS} /. \\ & \{\varphi 2 \rightarrow 0, \varphi 4 \rightarrow 0\}][[4]] \\ & (E1MM(-iR4 + X4)\omega) / (R1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)) + \\ & \omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U5} & = \text{FullSimplify}[\text{Transpose}[\mathbf{A}].\Phi] /. \mathbf{SS} /. \\ & \{\varphi 2 \rightarrow 0, \varphi 4 \rightarrow 0\}][[5]] \\ & - (iE1MMR2\omega) / (R1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)) + \\ & \omega(MM^2\omega + iL1(R2 + R4 + i(X4 + L2\omega)))) \end{aligned}$$

$$\text{FullSimplify}[\mathbf{U3} + \mathbf{U4} + \mathbf{U5}]$$

0

Получены выражения для токов и напряжений вторым способом — методом контурных токов:

```
B = NullSpace[A];
```

```
ZK = B.ZZ.Transpose[B]
```

```
EEE = B.(EE-ZZ.J)
```

```
IL = Table [il [i], {i, 1, Length[B]}];
```

```
IL = IL /. Solve [ZK.IL == EEE, IL] [[1]];
```

```
IP = Transpose[B].IL + J;
```

```
U = ZZ.IP - EE;
```

```
FullSimplify[IP[[1]]]
```

$$\frac{E1 (R2 + R4 + i (X4 + L2 \omega))}{MM^2 \omega^2 + (R1 + i L1 \omega) (R2 + R4 + i (X4 + L2 \omega))}$$

Данное выражение совпало с (1). Аналогично можно получить выражения для остальных переменных.

В [10, с. 118] приведено выражение для тока, протекающего в первичной обмотке трансформатора:

$$\frac{E1}{R1 + MM^2 \omega^2} \frac{R2 + R4}{((R2 + R4)^2 + (X4 + L2 \omega)^2) + I(L1 \omega - MM^2 \omega^2 (X4 + L2 \omega) / ((R2 + R4)^2 + (X4 + L2 \omega)^2))}$$

$$R1 + \frac{E1}{(R2 + R4)^2 + (X4 + L2 \omega)^2} + i \left( L1 \omega - \frac{MM^2 \omega^2 (X4 + L2 \omega)}{(R2 + R4)^2 + (X4 + L2 \omega)^2} \right)$$

Можно показать идентичность этого результата, с результатом, полученным с помощью пакета системы *Mathematica*:

```
FullSimplify[IP[[1]] == E1 / (R1 + MM^2 \omega^2 (R2 + R4) /  
((R2 + R4)^2 + (X4 + L2 \omega)^2) + I (L1 \omega -  
MM^2 \omega^2 (X4 + L2 \omega) / ((R2 + R4)^2 + (X4 + L2 \omega)^2)))]  
True
```

С помощью подстановки численных значений параметров схемы

```
SSS = {L1 -> 0.001, L2 -> 0.002, R2 -> 2, R4 -> 1,  
R1 -> 3, X4 -> 5, MM -> 1, \omega -> 20, E1 -> 110};
```

можно получить значения для токов и напряжений между заданными узлами в численном виде. Значения токов в первичной и вторичной обмот-

ках трансформатора отличны друг от друга:

```
FullSimplify[IP[[1]]] /. SSS // N
0.856199 + 1.32405 i
FullSimplify [IP[[3]]] /. SSS // N
-0.199464 - 5.37289 i
```

Приведены значения напряжений на индуктивностях  $L_1$  и  $L_2$ :

```
FullSimplify[U[[2]]] /. SSS // N
-107.431 + 3.97215 i
FullSimplify[U[[3]]] /. SSS // N
-26.2661 + 17.116i
```

Значение напряжения на нагрузке (ветвь 4):

```
FullSimplify[U[[4]]] /. SSS // N
26.665 - 6.37021 i
```

Результаты расчетов проверены на выполнение баланса мощностей:

```
FullSimplify[IP.ZZ.Conjugate[IP] ==
EE.Conjugate [IP] + Conjugate[J].U,
{E1 > 0, R1 > 0, R2 > 0, R4 > 0, X4 > 0, L1 > 0, M1 > 0,
L2 > 0, ω > 0}]
True
```

## Лабораторная работа 4. Расчет трехфазных цепей

Лабораторная работа посвящена расчетам трехфазных линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами в установившемся режиме.

К симметричному трехфазному генератору, фазные ЭДС которого равны  $E_A, E_B, E_C$ , через линию передачи подключены приемники, соединенные по схеме «звезда» и «треугольник» (рис. Л.4.1).

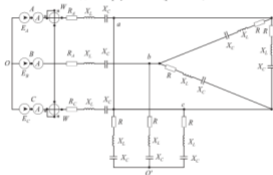


Рис. Л.4.1

Фазы приемников характеризуются сопротивлениями  $Z_a, Z_b, Z_c$  при соединении «звездой»,  $Z_{ab}, Z_{bc}, Z_{ca}$  при соединении «треугольником». Сопротивление каждого линейного провода  $Z_L$ .

Численные значения параметров приемников даны в табл. Л.4.1. Действующие значения фазных ЭДС ( $E_0$ ) генератора одинаковы и равны 127.

Требуется определить фазные токи и напряжения каждого приемника, линейные токи  $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ , мощность трехфазной цепи (активную, реактивную, полную), показания вольтметров и амперметров. Проверить баланс мощностей.

Таблица Л.4.1.

Приемник «звезда»									Приемник «треугольник»								
Фаза А			Фаза В			Фаза С			Фаза А - В			Фаза В - С			Фаза С - А		
$R_A$	$X_L$	$X_C$	$R_B$	$X_L$	$X_C$	$R_C$	$X_L$	$X_C$	$R$	$X_L$	$X_C$	$R$	$X_L$	$X_C$	$R$	$X_L$	$X_C$
15	2	10	15	2	10	10	20	8	6	16	8	6	16	8	6	16	8

На схеме электрической цепи пронумерованы узлы, которые будут являться вершинами графа при его описании, и показаны новые обозначения параметров элементов цепи (рис. Л.4.2).

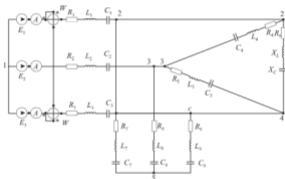


Рис. Л.4.2

Примем, что  $R_1 = R_2 = R_3 = r$ , а реактивные сопротивления линейных проводов равны нулю.

Предварительно был подключен пакет расширения

`<< DiscreteMath Combinatorica``.

Введено описание графа, соответствующего схеме электрической цепи

```
LL = {{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4),
      (4, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 5)}};
```

Выведено изображение графа (рис. Л.4.3):

```
G = FromOrderedPairs[LL];
q = V[G]; p = Length[LL];
```

```

EL = Table [i, {i, 1, p}];
ELL = Ordering[LL];
ShowGraph [SetGraphOptions [G, EdgeColor -> Red,
  VertexNumber -> True,
  VertexNumberColor -> Black, EdgeLabel -> ELL,
  EdgeLabelPosition -> UpperRight,
  VertexColor -> White, EdgeLabelColor -> Black,
  VertexStyle -> Disk [Large],
  VertexNumberPosition -> Center,
  TextStyle -> {FontFamily -> "Helvetica",
    FontWeight -> "Bold", FontSize -> 18},
  Background -> RGBColor[0.1, 1, 0.5]]];

```

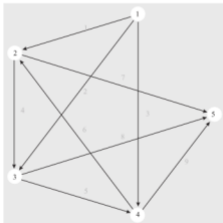


Рис. Л.4.3

Матрица соединений, определенная стандартным, описанным в предыдущих работах, способом, в матричном виде равна

```
In[9]:= A // MatrixForm
```

```
Out[9]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```

Пусть круговая частота равна

$$\omega = 1;$$

Задача решена методом контурных токов, для этого сначала найдена матрица независимых контуров и выведена на экран в матричном виде

```
B = NullSpace[A];
B // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Задана матрица полных сопротивлений в символьном виде

```
z = Table [R [i] + I (\omega L [i] - 1/(\omega C [i])),
  {i, 1, p}];
```

которая для контроля выведена на экран в матричном виде

```
Z = DiagonalMatrix[z];

$$\begin{pmatrix} i \left( -\frac{1}{C[1]} + L[1] \right) + R[1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i \left( -\frac{1}{C[2]} + L[2] \right) + R[2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \left( -\frac{1}{C[3]} + L[3] \right) + R[3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \left( -\frac{1}{C[4]} + L[4] \right) + R[4] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \left( -\frac{1}{C[5]} + L[5] \right) + R[5] & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, i \left(-\frac{1}{C[6]} + L[6]\right) + R[6], 0, 0, 0\},$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, i \left(-\frac{1}{C[7]} + L[7]\right) + R[7], 0, 0\},$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, i \left(-\frac{1}{C[8]} + L[8]\right) + R[8], 0\},$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, i \left(-\frac{1}{C[9]} + L[9]\right) + R[9]\}$$

Заданы числовые значения параметров схемы

```
SSS = {R[1] → r, R[2] → r, R[3] → r, R[4] → 6,
R [5] → 6, R [6] → 6, R [7] → 15, R [8] → 15,
R[9] → 10, L[1] → 0, L[2] → 0, L[3] → 0, L[4] → 16,
L[5] → 16, L[6] → 16, L[7] → 2, L[8] → 2, L[9] → 20,
C[1] → Infinity, C[2] → Infinity, C[3] → Infinity,
C[4] → 1/8, C[5] → 1/8, C[6] → 1/8, C[7] → 1/10,
C[8] → 1/10, C[9] → 1/8, E1 → 127,
E2 → 127 Exp [-2 * Pi / 3I],
E3 → 127 Exp [2 Pi / 3I]};
```

Для контроля числовые значения параметров схемы выведены на экран:

```
{R[1.] → r, R[2.] → r, R[3.] → r, R[4.] → 6.,
R[5.] → 6., R[6.] → 6., R[7.] → 15., R[8.] → 15.,
R[9.] → 10., L[1.] → 0., L[2.] → 0., L[3.] → 0.,
L[4.] → 16., L[5.] → 16., L[6.] → 16., L[7.] → 2.,
L[8.] → 2., L[9.] → 20., C[1] → ∞, C[2] → ∞,
C[3] → ∞, c[4] → 0.125, C[5] → 0.125, C[6] → 0.125,
C[7] → 0.1, C[8] → 0.1, C[9] → 0.125, E1 → 127.,
E2 → -63.5 - 109.985i, E3 → -63.5 + 109.985i}
```

В матрицу полных сопротивлений подставлены значения параметров схемы

**Z / . SSS // MatrixForm**



$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6+8i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6+8i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6+8i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15-8i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15-8i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10+12i \end{pmatrix}$$

Так как в цепи нет источников тока, то соответствующий вектор – нулевой  
 $\mathbf{J} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\};$

Сформирован вектор ЭДС и в него подставлены значения параметров источников ЭДС:

$$\begin{aligned} \mathbf{EE} &= \{\mathbf{E1}, \mathbf{E2}, \mathbf{E3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} / . \mathbf{SSS} // \mathbf{M} \\ &\{127., -63.5 - 109.985i, \\ &\quad -63.5 + 109.985i, 0., 0., 0., 0., 0., 0.\} \end{aligned}$$

Вычислена матрица контурных сопротивлений:

$$\begin{aligned} \mathbf{ZK} &= \mathbf{B.Z.Transpose[B]} / . \mathbf{SSS} \\ &{\{(25 + 4i) + 2r, (15-8i) + r, 2r, -r, -r\}, \\ &\quad \{(15-8i) + r, (30-16i) + 2r, r, r, -2r\}, \\ &\quad \{2r, r, (6 + 8i) + 2r, -r, -r\}, \\ &\quad \{-r, r, -r, (6 + 8i) + 2r, -r\}, \\ &\quad \{-r, -2r, -r, -r, (6 + 8i) + 2r\}} \end{aligned}$$

Сформирована правая часть контурных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{EK} &= \mathbf{B. (EE-Z.J)} / . \mathbf{SSS} \\ &\{-190.5 + 109.985i, -190.5 - 109.985i, \\ &\quad -190.5 + 109.985i, 0., -219.97i, 190.5 + 109.985i\} \end{aligned}$$

Сформирован вектор контурных токов:

$$\mathbf{IL} = \mathbf{Table[il[i], \{i, 1, \mathbf{Length[B]}\}];}$$

и в него подставлены значения решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{IL} &= \mathbf{IL} / . \mathbf{Solve[{\{(ZK.IL) / . (r \rightarrow 0)} == \mathbf{EK}, \mathbf{IL}\}][[1]]} \\ &\{-0.937346 + 9.85581i, \\ &\quad -2.95281 - 10.4189i, -2.63118 + 21.8391i, \\ &\quad -17.5976 - 13.1982i, 20.2288 - 8.64089i\} \end{aligned}$$

Вычислены значения токов в линейных и фазных проводах приемников:

```
IR = Transpose[B].IL /. SSS;
```

```
IR // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 26.7502 - 29.9169 i \\ -40.7793 - 14.9762 i \\ 14.0291 + 44.8931 i \\ 20.2288 - 8.64089 i \\ -17.5976 - 13.1982 i \\ -2.63118 + 21.8391 i \\ 3.89016 + 0.563063 i \\ -2.95281 - 10.4189 i \\ -0.937346 + 9.85581 i \end{pmatrix}$$

Выведены на экран линейные токи:

```
Print["Линейный ток фазы A: IA=", IR[[1]]]
```

```
Линейный ток фазы A: IA=26.7502 - 29.9169 i
```

```
Print["Линейный ток фазы B: IB=", IR[[2]]]
```

```
Линейный ток фазы B: IB = -40.7793 - 14.9762 i
```

```
Print ["Линейный ток фазы C: IC=", IR[[3]]]
```

```
Линейный ток фазы C: IC=14.0291 + 44.8931 i
```

Подсчитаны действующие значения линейных токов и выведены на экран монитора показания амперметров:

```
Abs[IR]
```

```
(40.1322, 43.4423, 47.0341, 21.997,  
21.997, 21.997, 3.9307, 10.8292, 9.90028)
```

```
Print["Показания амперметра в фазе A: IA=",
```

```
Abs[IR][[1]]]
```

```
Показания амперметра в фазе A: IA=40.1322
```

```
Print["Показания амперметра в фазе B: IB=",
```

```
Abs[IR][[2]]]
```

Показания амперметра в фазе В:  $I_B=43.4423$

```
Print["Показания амперметра в фазе С: IC=",
      Abs[IR][[3]]]
```

Показания амперметра в фазе С:  $I_C=47.0341$

Вычислены напряжения ветвей схемы:

```
U = Chop[(Z.IR - EE) /. SSS /. {r -> 0}];
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -127. \\ 63.5 + 109.985 i \\ 63.5 - 109.985 i \\ 190.5 + 109.985 i \\ -219.97 i \\ -190.5 + 109.985 i \\ 62.8569 - 22.6753 i \\ -127.643 - 132.661 i \\ -127.643 + 87.3099 i \end{pmatrix}$$

Проверен баланс мощностей (по фазам):

```
IR.Z.Conjugate[IR] /. SSS /. {r -> 0}
Conjugate[J].U + EE.Conjugate[IR] /. SSS
Abs[IR].Z.Abs[IR] /. SSS /. {r -> 0}
11680.6 + 11727.3 i
11680.6 + 11727.3 i
11680.6 + 11727.3 i
```

Для проверки напрямую посчитаны напряжения в «треугольнике» (проверьте – это напряжения в четвертой, пятой и шестой ветвях схемы):

```
127 Sqrt[3] Exp[Pi/6 I] //N
127 Sqrt[3] Exp[-Pi/2 I] //N
127 Sqrt[3] Exp[5Pi/6 I] //N
190.5 + 109.985 i
0. -219.97 i
-190.5 + 109.985 i
```

Определены показания первого и второго ваттметров. Для этого рассчитаны мощности  $S_{аб}$  и  $S_{сб}$ .

$$\begin{aligned} & \mathbf{U} [ \mathbf{4} ] \mathbf{Conjugate} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{1} ] ] \\ & - \mathbf{U} [ \mathbf{5} ] \mathbf{Conjugate} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{3} ] ] \\ & 1805.48 + 8641.3 i \\ & 9875.17 + 3085.99 i \end{aligned}$$

Показания первого и второго ваттметров равны вещественным частям  $S_{аб}$  и  $S_{сб}$  соответственно 1805.48 и 9875.17. Активная мощность рассмотренной трехфазной цепи (рис. Л4.1) равна сумме показаний ваттметров:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Re} [ \mathbf{U} [ \mathbf{4} ] \mathbf{Conjugate} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{1} ] ] \\ & - \mathbf{U} [ \mathbf{5} ] \mathbf{Conjugate} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{3} ] ] ] \\ & 11680.6 \end{aligned}$$

Построены графики мгновенных значений тока, напряжения и мощностей в ветви 4, соединяющей вершины 2 и 3. Для этого сначала рассчитаны ток

$$\begin{aligned} i[t] &= \mathbf{Abs} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{4} ] ] * \mathbf{Sqrt} [ \mathbf{2} ] * \mathbf{Sin} [ (\mathbf{Pi} / \mathbf{180} * \mathbf{t} + \\ & \quad \mathbf{ArcTan} [ \mathbf{Im} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{4} ] ] / \mathbf{Re} [ \mathbf{IR} [ \mathbf{4} ] ] ] ) ] / . \mathbf{SSS} \\ & -31.1085 \mathbf{Sin} \left[ 0.403696 - \frac{\pi t}{180} \right] \end{aligned}$$

и напряжение ветви 4

$$\begin{aligned} u[t] &= \mathbf{Abs} [ \mathbf{U} [ \mathbf{4} ] ] * \mathbf{Sqrt} [ \mathbf{2} ] * \mathbf{Sin} [ (\mathbf{Pi} / \mathbf{180} * \mathbf{t} + \\ & \quad \mathbf{ArcTan} [ \mathbf{Im} [ \mathbf{U} [ \mathbf{4} ] ] / \mathbf{Re} [ \mathbf{U} [ \mathbf{4} ] ] ] ) ] / . \mathbf{SSS} \\ & 311.085 \mathbf{Sin} \left[ 0.523599 + \frac{\pi t}{180} \right] \end{aligned}$$

Определено выражение мощности:

$$\begin{aligned} \mathbf{PP} &= i[t] * u[t] \\ & -9677.4 \mathbf{Sin} \left[ 0.403696 - \frac{\pi t}{180} \right] \mathbf{Sin} \left[ 0.523599 + \frac{\pi t}{180} \right] \end{aligned}$$

Вычислены активное и реактивное сопротивления в ветви 4

$$\mathbf{Reqv} = \mathbf{Re} [ \mathbf{Z} [ \mathbf{4}, \mathbf{4} ] ] / . \mathbf{SSS}$$

6

$$\mathbf{Xeqv} = \mathbf{Im} [ \mathbf{Z} [ \mathbf{4}, \mathbf{4} ] ] / . \mathbf{SSS}$$

8

Определены выражения для активной и реактивной мощности

$$PPa = Reqv * (i[t])^2$$

$$5806.44 \sin \left[ 0.403696 - \frac{\pi t}{180} \right]^2$$

$$PPwa = Xeqv * (i[t])^2$$

$$7741.92 \sin \left[ 0.403696 - \frac{\pi t}{180} \right]^2$$

Построены графики на одном рисунке (рис. Л.4.4):

```

Y1 = Plot[Evaluate[i[t]], {t, 0, 360},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[2],
  AxesLabel -> {"t", ""}];
Y2 = Plot[Evaluate[u[t]], {t, 0, 360},
  PlotStyle -> AbsoluteThickness[1],
  AxesLabel -> {"t", ""}];
Y3 = Plot[PP, {t, 0, 360},
  PlotStyle -> Dashing[{0.01, 0.01}],
  AxesLabel -> {"t", ""}];
Y4 = Plot[PPa, {t, 0, 360},
  PlotStyle -> Dashing[{0.025, 0.025}],
  AxesLabel -> {"t", ""}];
Y5 = Plot[PPwa, {t, 0, 360},
  PlotStyle -> Dashing[{0.1, 0.05}],
  AxesLabel -> {"t", ""}];
Show[Y1, Y2, Y3, Y4, Y5];

```

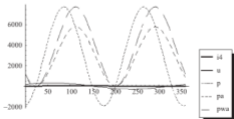


Рис. Л.4.4

---

## Лабораторная работа 5.

### Расчет линейной электрической цепи при действии несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов

На практике часто формы периодических ЭДС, напряжений и токов отличны от синусоидальных. Если это отличие значительно, необходимо учитывать при расчете цепи реальный характер изменения этих параметров. Для этого достаточно использовать принцип суперпозиции и спектральный метод (разложение несинусоидальных функций в ряд Фурье).

Схема применения спектрального метода заключена в представлении несинусоидальной периодической функции совокупностью гармонических составляющих — гармоник — в виде тригонометрического ряда Фурье. Для точного представления несинусоидальной периодической функции требуется бесконечное число гармоник, но на практике оно всегда ограничено. Такое ограничение приведет к погрешности расчета, обусловленной волнообразным характером изменения результирующей синтезированной функции, и появлению выбросов, что известно под названием эффекта Гиббса.

Далее расчет электрической цепи проводится автономно для каждой из учитываемых гармоник. Результаты этих расчетов суммируются, таким образом получается окончательное решение.

Представление несинусоидальной периодической функции в виде набора гармоник называется гармоническим анализом.

Суммирование гармоник и приближенное представление реальной функции по времени составляют основу гармонического синтеза.

#### Примеры моделирования импульсов

**Пример.** Смоделировать сигнал в виде прямоугольного импульса (рис. Л.5.1).

```
f1[t_] := If [(0 > t) || (t > 1), 0, 1];  
Plot[f1[t], {t, -2, 2},  
PlotStyle -> {Thickness[.005]}];
```

Приведенный сигнал относится к типу разрывных сигналов, для его получения использована функция с условием сравнения — функция **If[condition, t, f]**, которая в ответе выдаст *t*, если условие (*condition*) истинно, и *f*, если оно ложно. Также при задании функции *f1* ис-

пользована логическая функция — логическое сложение  $\parallel$  (операция «ИЛИ»).

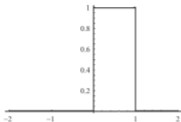


Рис. Л.5.1

**Пример.** Смоделировать сигнал в виде короткого разнополярного прямоугольного импульса (рис. Л.5.2).

При моделировании применена функция знака синуса.

```
f2[t_] := Sign[Sin[t]];
Plot[f2[t], {t, -2*Pi, 2*Pi},
PlotStyle -> {Thickness[.005]}];
```

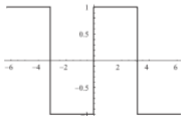


Рис. Л.5.2

**Пример.** Смоделировать сигнал в виде пилообразного импульса (рис. Л.5.3).

```
f3[t_] := If[{0 > t} || {t > 1}, 0, t];
Plot[f3[t], {t, -2, 2},
PlotStyle -> {Thickness[.005]}];
```

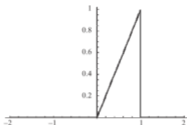


Рис. Л.5.3

Для многих тестовых сигналов разложения в ряд Фурье известны. Этот факт позволяет выбрать из библиотеки разложений подходящую формулу и сразу получить нужное количество гармоник сигнала, чтобы проверить адекватность синтезируемого сигнала реальному.

Рассмотрен пример прямого синтеза разнополярных коротких прямоугольных импульсов. При этом использовано известное разложение этих импульсов в ряд. На рис. Л.5.4 показан сам импульс и его представление с учетом пяти и двадцати гармоник. Заметно, что даже 20 гармоник не хватает для достаточно точного представления такого сигнала гармоническим рядом — хорошо видны колебания и выбросы, обусловленные эффектом Гиббса.

$$\begin{aligned} \text{sqr}[k\_ , j\_ , N\_ , a\_ ] := & \frac{4}{\pi} \text{Sum} \left[ \frac{1}{i} * \right. \\ & (\text{Cos}[i * a]) * \text{Sin}[2 * i * j * \pi / N], \{i, 1, k, 2\} \\ \text{sqr}[10, j, N, a] \\ & \frac{1}{\pi} \left( 4 \left( \text{Cos}[a] \text{Sin} \left[ \frac{2j\pi}{N} \right] + \frac{1}{3} \text{Cos}[3a] \text{Sin} \left[ \frac{6j\pi}{N} \right] + \right. \right. \\ & \left. \frac{1}{5} \text{Cos}[5a] \text{Sin} \left[ \frac{10j\pi}{N} \right] + \frac{1}{7} \text{Cos}[7a] \right. \\ & \left. \left. \text{Sin} \left[ \frac{14j\pi}{N} \right] + \frac{1}{9} \text{Cos}[9a] \text{Sin} \left[ \frac{18j\pi}{N} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

**FF[j\_] :=**

```
If [j < 25 || 75 < j < 125 || 175 < j < 225 || 275 < j < 325 ||  
375 < j < 400, 0, If [25 < j < 75 || 225 < j < 275, 1,  
If [125 < j < 175 || 325 < j < 375, -1]]]
```



```
<<Graphics`Legend`
Plot[{sqr[5, j, 200, 1], sqr[20, j, 200, 1], FF[j]},
  {j, 1, 400},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.02, 0.02}], GrayLevel[0],
    Thickness[.005]}, PlotRange -> {-1.2, 1.2},
  PlotLegend -> {"5гармоник", "20гармоник", "импульс"},
  LegendPosition -> {1.1, -.3}, LegendTextSpace -> 6];
```

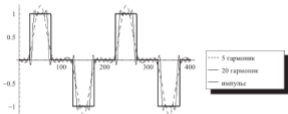


Рис. Л.5.4

**Пример.** Рассмотрен синтез разнополярных треугольных импульсов. Здесь также использовано известное выражение для ряда Фурье. Графики построены для представлений сигнала с учетом трех и двадцати гармоник (рис. Л.5.5). Гармонический синтез для такого сигнала даст гораздо лучшие результаты — даже три гармоники достаточно точно воспроизводят сигнал. Это связано с непрерывностью функции, описывающей сигнал.

```
triag[k_, j_, N_] :=
  -Sum[{{-1} ^ Floor[(i + 2)/2]}
    * Sin[2*i*j*π/N] / (i^2), {i, 1, k, 2}]
triag[10, j, N]
sin[2jπ/N] - 1/9 sin[6jπ/N] + 1/25 sin[10jπ/N] -
  1/49 sin[14jπ/N] + 1/81 sin[18jπ/N]
```

При задании функции, описывающей разложение сигнала в ряд Фурье, использована функция `Floor[x]`, которая возвращает наибольшее целое число, не превышающее данного  $x$ .

```
Plot[{Triag[3, j, 200], Triag[20, j, 200]}, {j, 1, 400},
  PlotStyle -> {{GrayLevel[0], Thickness[.001]},
    {GrayLevel[0.2], Thickness[.005]}},
  PlotRange -> {-1.2, 1.2}];
```

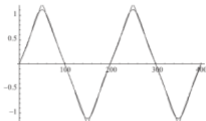


Рис. Л.5.5

Для представления сигналов в виде набора гармоник в системе *Mathematica* используется прямое дискретное преобразование Фурье (ряд Фурье) с помощью функции `Fourier[list]`. Перед работой необходимо подключить пакет расширения

```
<<Calculus`FourierTransform`.
```

Рассмотрен пилообразный сигнал (рис. Л.5.6).

```
frplot = Plot[x - Floor[x] - 0.5, {x, -3, 3},
  PlotStyle -> {Thickness[.005]}];
```

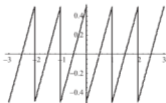


Рис. Л.5.6

Получено его разложение в тригонометрический ряд Фурье с числом членов ряда  $n = 4$ .

По теореме Дирихле функцию, периодическую с периодом  $T = 2l$ , кусочно-монотонную, ограниченную на промежутке  $[-l, l]$ , имеющую на нем конечное число точек разрыва только первого рода или вообще не имеющую точек разрыва, можно разложить в сходящийся ряд Фурье.

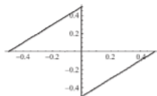


Рис. Л.5.7

В системе *Mathematica* произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, раскладывается в ряд Фурье на интервале  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , поэтому для применения разложения заданной функции в ряд

Фурье необходимо задать ее на интервале  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (рис. Л.5.7).

```
ff = If [x < 0, x + 1/2, x - 1/2];
Plot[ff, {x, -0.5, 0.5},
PlotStyle -> {Thickness[.005]};
FourierTrigSeries[ff, x, 4]
```

Эта функция выведет первые четыре (ненулевых) члена ряда Фурье заданной функции

$$\frac{\sin[2\pi x]}{\pi} - \frac{\sin[4\pi x]}{2\pi} - \frac{\sin[6\pi x]}{3\pi} - \frac{\sin[8\pi x]}{4\pi}$$

Здесь для  $k = 1, 3, 5, \dots$  коэффициенты ряда Фурье  $a_k = 0$ .

Воспроизведен графически сигнал (синтез сигнала по четырем гармоникам) (рис. Л.5.8).

```
Plot[%, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Thickness1[.005]};
```

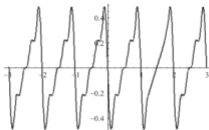


Рис. 1.5.8

Для сравнения на одном графике показаны сигнал и его воспроизведение путем наложения графиков друг на друга (рис. 1.5.9).

```
Show[frplot, %];
```

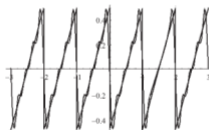


Рис. 1.5.9

**Пример** (взят из [15], где он был рассмотрен с привлечением пакета *MatLab*). На входе цепи (рис. 1.5.10) действует периодическая последовательность треугольных импульсов напряжения, один из которых представлен на рис. 1.5.11. Сопротивления реактивных элементов на частоте первой гармоники заданы.

Требуется разложить входное напряжение в ряд Фурье, учитывая только гармоники, амплитуда которых превышает 5% от амплитуды основной гармоники, рассчитать спектр выходного напряжения и построить

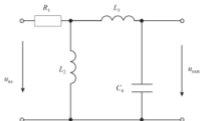


Рис. Л.5.10

график его мгновенных значений. Определить действующие значения входного и выходного напряжений. Оценить влияние отброшенных гармоник на величину действующего значения входного напряжения.

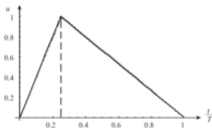


Рис. Л.5.11

Аналитическое представление разложения входного напряжения в ряд Фурье:

$$u_{\text{вх}} = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(\omega_k t + \psi_k),$$

где  $U_0$  — постоянная составляющая,  $\omega_k = \frac{2k\pi}{T}$  — угловая частота  $k$ -й гармоники,  $U_{mk}$  — ее амплитуда,  $\psi_k$  — ее начальная фаза.

Напряжение  $u_m(t)$  описано зависимостью

$$u_m(t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{T_1}, & 0 < t < T_1 \\ U_0 \frac{T-t}{T-T_1}, & T_1 < t < T \end{cases}.$$

Исходные данные для данной задачи:  $U_0 = 1$ ,  $T = 1$ ,  $T_1 = 0.25 \cdot T$ .

### 1. Задание графа

Для электрической цепи (рис. Л.5.10) составлена расчетная схема (рис. Л.5.12).

Для задания графа обозначены узлы, которые будут являться вершинами графа (рис. Л.5.13). Введен фиктивный узел 2, так как в ходе решения будут определяться напряжения на элементах цепи.

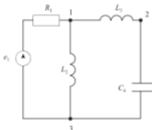


Рис. Л.5.12

Построен граф, соответствующий данной электрической схеме, предварительно были подключены необходимые пакеты расширений:

```
<<DiscreteMath`Combinatirica`
LL = {{3, 1}, {1, 3}, {1, 2}, {2, 3}};
G = FromOrderedPairs[LL];
q = V[G]; p = Length[LL];
EL = Table[i, {i, 1, p}];
ELL = Ordering[LL];
```

Выведено на экран изображение графа (рис. Л.5.13):

```

XXX [l_] := ReplacePart[ELL, "",
  Table[Position[ELL, 1[[i]]][[1]],
    {i, 1, Length[l]}]]
z = {1};
AA[x_, y_] := SetGraphOptions[G7 EdgeColor -> Red,
  VertexNumber -> True, EdgeLabel -> x,
  VertexNumberPosition -> Center,
  EdgeLabelPosition -> y,
  VertexNumberColor -> Black, VertexColor -> White,
  VertexStyle -> Disk[Large], EdgeLabelColor -> Blue,
  TextStyle -> {FontFamily -> "New Times Roman",
    FontWeight -> "Bold", FontSize -> 20},
  Background -> RGBColor[1, 1, 0]];
S1 = ShowGraph[AA[XXX[z], LowerRight],
  DisplayFunction -> Identity];
S2 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z]], UpperLeft],
  DisplayFunction -> Identity];
Show[{S1, S2}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

```

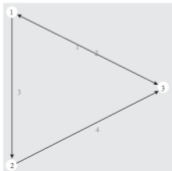


Рис. Л.5.13

Если на графе две дуги соединяют одни и те же вершины, но направлены в разные стороны, в системе *Mathematica* на изображении графа они будут представлены одним отрезком прямой со стрелками на обоих концах.

Матрица соединений такой схемы выглядит следующим образом:

```
A = Transpose[Table[
  Table [If [LL[[j, 1]] == i, 1,
    If[LL[[j, 2]] == i, -1, 0]], {i, 1, q}],
  {j, 1, p}]];
```

```
In[145]:- A // MatrixForm
```

```
Out[145]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вначале будут выведены расчетные выражения в предположении синусоидальности входного напряжения  $u_{\text{вх}}(t) = e_1$  (равного основной гармонике). В дальнейшем численные расчеты будут проводиться по полученным выражениям для каждой гармоники в отдельности. При этом необходимо учитывать, что для  $k$ -й гармоники индуктивное сопротивление равно  $k\omega L_1$ , а емкостное —  $\frac{1}{k\omega C_1}$ .

## 2. Ввод параметров

Подстановка

```
SSS = {R1 - 5, L2 - 15, L3 - 15, C4 - 1/30};
```

задаст численные значения параметров цепи. Значение входного напряжения оставлено как параметр задачи, относительно которого будет получено решение задачи (на самом деле решения будут зависеть от параметров  $k\omega$  и  $e_1$ ).

Заданы сопротивления ветвей:

```
Z1 = R1;
Z2 = IL2 ω;
Z3 = IL3 ω;
Z4 = -I / (C4 ω);
```



Сформированы матрица сопротивлений

$$\mathbf{ZZ} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Z4} \end{pmatrix};$$

и векторы ЭДС и токов источников токов

$$\mathbf{EE} = \{\mathbf{E1}, 0, 0, 0\};$$

$$\mathbf{J} = \{0, 0, 0, 0\};$$

### 3. Составление и решение системы уравнений

#### 3.1. Расчет методом узловых потенциалов

В указанном методе искомые переменные — потенциалы.

Система узловых уравнений имеет следующий вид:

$$\mathbf{G} \cdot \varphi = \mathbf{J}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{ZZ}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$  — матрица узловых проводимостей.

Для формирования матрицы левой части вначале найдена обратная матрица к матрице сопротивлений:

$$\mathbf{YY} = \text{Inverse} [\mathbf{ZZ}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{R1}, 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{i}{L2\omega}, 0, 0 \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ 0, 0, -\frac{i}{L3\omega}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, iC4\omega \right\} \right\}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{YY} \cdot \text{Transpose} [\mathbf{A}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{R1} - \frac{i}{L2\omega} - \frac{i}{L3\omega}, \frac{i}{L3\omega}, -\frac{1}{R1} + \frac{i}{L2\omega} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{i}{L3\omega}, -\frac{i}{L3\omega} + iC4\omega, -iC4\omega \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ -\frac{1}{R1} + \frac{i}{L2\omega}, -iC4\omega, \frac{1}{R1} - \frac{i}{L2\omega} + iC4\omega \right\} \right\}$$

Можно проверить, что матрица системы будет особенной:

$$\text{Det} [G]$$

$$0$$

Сформирована матрица правой части

$$JJ = A \cdot J - A \cdot YY \cdot EE;$$

$$\left\{ \frac{E1}{R1}, 0, -\frac{E1}{R1} \right\}$$

и решена система уравнений (1). Сначала получено решение в символьном виде, а затем в него подставлены начальные данные:

$$SSS1 = \text{Solve} [G. \{\varphi1, \varphi2, \varphi3\} = JJ, \{\varphi2, \varphi1\}] [[1]]$$

$$\{\varphi2 \rightarrow -(-i R1 \varphi3 + E1L2\omega + L2\varphi3\omega + iC4L2R1\varphi3\omega^2 + iC4L3R1\varphi3\omega^2 - C4L2L3\varphi3\omega^3) / (iR1 - L2\omega - iC4L2R1\omega^2 - iC4L3R1\omega^2 + C4L2L3\omega^3),$$

$$\varphi1 \rightarrow -(R1\varphi3 + iE1L2\omega + iL2\varphi3\omega - C4L2R1\varphi3\omega^2 - C4L3R1\varphi3\omega^2 - iC4E1L2L3\omega^3 - iC4L2L3\varphi3\omega^3) / (-R1 - iL2\omega + C4L2R1\omega^2 + C4L3R1\omega^2 + iC4L2L3\omega^3)$$

$$\Phi = \{\varphi1, \varphi2, \varphi3\} / . SSS1 / . \{\varphi3 \rightarrow 0\}$$

$$\{-iE1L2\omega - iC4E1L2L3\omega^3 / (-R1 - iL2\omega + C4L2R1\omega^2 + C4L3R1\omega^2 + iC4L2L3\omega^3), \\ -(E1L2\omega / (iR1 - L2\omega - iC4L2R1\omega^2 - iC4L3R1\omega^2 + C4L2L3\omega^3), 0\}$$

$$\Phi / . SSS$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15iE1\omega - \frac{15}{2}iE1\omega^3}{-5 - 15i\omega + 5\omega^2 + \frac{15i\omega^3}{2}}, -\frac{15E1\omega}{5i - 15\omega - 5i\omega^2 + \frac{15\omega^3}{2}}, 0 \end{array} \right\}$$

Решение задачи получено в виде функции, зависящей от значения входного напряжения, которая затем будет разложена по гармоникам.

Вычислены токи во всех ветвях цепи:

$$\text{FullSimplify}[YY. (\text{Transpose}[A] \cdot \Phi + EE)]$$

$$\left\{ \frac{iE1(-1 + C4(L2 + L3)\omega^2)}{L2\omega(-1 + C4L3\omega^2) + iR1(1 - C4(L2 + L3)\omega^2)}, \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{iE1(-1+C4L3\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)+iR1(1-C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ & \frac{iC4E1L2\omega^2}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)+iR1(1-C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ & \frac{iC4E1L2\omega^2}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)+iR1(1-C4(L2+L3)\omega^2)} \end{aligned} \right\}$$

Подставлены исходные данные:

**FullSimplify[YY.(Transpose[A].Φ+EE)]/.SSS**

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{iE1(-1+\omega^2)}{5i(1-\omega^2)+15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}, \quad \frac{iE1\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}{5i(1-\omega^2)+15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}, \\ & \frac{iE1\omega^2}{2\left(5i(1-\omega^2)+15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)\right)}, \quad \frac{iE1\omega^2}{2\left(5i(1-\omega^2)+15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)\right)} \end{aligned} \right\}$$

Найдены напряжения в ветвях цепи.

**Simplify[Transpose[A].Φ]**

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{E1L2\omega(-1-C4L3\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ & \frac{E1L2\omega(-1+C4L3\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ & \frac{C4E1L2L3\omega^3}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ & \frac{E1L2\omega}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)} \end{aligned} \right\}$$

Подставлены исходные данные:

**FullSimplify[Transpose[A].Φ]/.SSS**

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{15E1\omega\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)}{5i(1-\omega^2)+15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}, \quad \frac{15E1\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}{5i(1-\omega^2)+15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{15E1\omega^3}{2 \left( 5i(1-\omega^2) + 15\omega \left( -1 + \frac{\omega^2}{2} \right) \right)}, \quad - \frac{15E1\omega}{5i(1-\omega^2) + 15\omega \left( -1 + \frac{\omega^2}{2} \right)} \end{array} \right\}$$

### 3.2. Расчет методом контурных токов

Вычислена контурная матрица **B** с помощью матрицы соединений **A**:

```
B = NullSpace[A];
In[38]:= B // MatrixForm
Out[38]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сформированы матрицы правой и левой частей системы уравнений

$$\mathbf{ZK} \cdot \mathbf{IL} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{EE} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{ZZ} \cdot \mathbf{J},$$

где  $\mathbf{ZK} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{ZZ} \cdot \mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{IL}$  – вектор контурных токов.

```
ZK = B.ZZ.Transpose[B];
EX = B.(EE-ZZ.J);
```

Система решена относительно контурных токов:

```
IL = Table [il [i], {i, 1, Length [B]}];
IL =
IL /. Solve[({ZK.IL) /. {r -> 0}) == EX, IL][[1]];
```

Вычислены токи во всех ветвях цепи:

```
IP = Simplify [Transpose [B].IL+J]
```

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{iE1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ - \frac{iE1(-1+C4L3\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ - \frac{iC4E1L2\omega^2}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ - \frac{iC4E1L2\omega^2}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2)-iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)} \end{array} \right\}$$

Найдены напряжения между узлами цепи.

$$\mathbf{U} = \text{Simplify}[\mathbf{ZZ} \cdot \mathbf{IP} - \mathbf{EE}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E1L2\omega(-1+C4L3\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2) - iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ \frac{E1L2\omega(-1+C4L3\omega^2)}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2) - iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ \frac{C4E1L2L3\omega^3}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2) - iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}, \\ \frac{E1L2\omega}{L2\omega(-1+C4L3\omega^2) - iR1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)} \end{array} \right\}$$

Исходные данные подставлены в выражения для токов и напряжений:

$$\mathbf{IP} = \text{Simplify}[\text{Transpose}[\mathbf{B}] \cdot \mathbf{IL} + \mathbf{J}] / . \mathbf{SSS}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{iE1(-1+\omega^2)}{15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right) - 5i(-1+\omega^2)}, \quad \frac{iE1\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right)}{15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right) - 5i(-1+\omega^2)}, \\ \frac{iE1\omega^2}{2\left(15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right) - 5i(-1+\omega^2)\right)}, \quad \frac{iE1\omega^2}{2\left(15\omega\left(-1+\frac{\omega^2}{2}\right) - 5i(-1+\omega^2)\right)} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{U} = \text{Simplify}[\mathbf{ZZ} \cdot \mathbf{IP} - \mathbf{EE}] / . \mathbf{SSS}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E1\left(-1 - \frac{2i(-1+\omega^2)}{21-6\omega-2i\omega^2+3\omega^3}\right), \\ \frac{3E1\omega(-2+\omega^2)}{21-6\omega-2i\omega^2+3\omega^3}, \quad \frac{3E1\omega^3}{21-6\omega-2i\omega^2+3\omega^3}, \\ -\frac{6E1\omega}{21-6\omega-2i\omega^2+3\omega^3} \end{array} \right\}$$

#### 4. Проверка

Если значения переменных найдены правильно, должен выполняться баланс мощностей:

```
Simplify[IP.ZZ.Conjugate[IP],
  {C4 > 0, L2 > 0, L3 > 0, E1 > 0, R1 > 0, ω > 0}]
Simplify[EE.Conjugate[IP] + Conjugate[J].U,
  {C4 > 0, L2 > 0, L3 > 0, E1 > 0, R1 > 0, ω > 0}]
```

$$\frac{E1^2(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}{-iL2\omega(-1+C4L3\omega^2)+R1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}$$

$$\frac{E1^2(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}{-iL2\omega(-1+C4L3\omega^2)+R1(-1+C4(L2+L3)\omega^2)}$$

#### 5. Разложение в ряд Фурье функции входного напряжения

Решение задачи получено для произвольного вида входного напряжения. Учитывая то, что разложение в ряд Фурье в системе *Mathematica* строится для функции, определенной на интервале  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , необходимо сначала при задании треугольного импульса напряжения (рис. Л.5.11) перейти от интервала  $[0,1]$  к интервалу  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , выполнить для «сдвинутой» функции разложение в ряд Фурье и в полученном разложении сделать обратный переход при помощи замены переменной.

Сначала построен график со сдвигом сигнала входного напряжения (рис. Л.5.14):

```
g1[t_] := If [-1/2 < t < -1/4, 4*t+2,
  (2-4*t)/3];
Y1 = Plot[g1[t], {t, -1/2, 1/2},
  PlotStyle -> {Thickness[.008]}];
```

Получено разложение «сдвинутой» функции входного напряжения в ряд Фурье, предварительно был подключен пакет расширений `Calculus`FourierTransform``

```
Calculus`FourierTransform
FF = FourierTrigSeries[g1[t], t, 6]

$$\frac{1}{2} + \frac{8\cos[2\pi t]}{3\pi^2} - \frac{4\cos[4\pi t]}{3\pi^2} +$$

```

$$\frac{8\cos[6\pi t]}{27\pi^2} + \frac{8\cos[10\pi t]}{75\pi^2} - \frac{4\cos[12\pi t]}{27\pi^2} -$$

$$\frac{8\sin[2\pi t]}{3\pi^2} + \frac{8\sin[6\pi t]}{27\pi^2} - \frac{8\sin[10\pi t]}{75\pi^2}$$



Рис. Л5.14

Сделан обратный переход, получено разложение в ряд Фурье исходного треугольного импульса напряжений путем замены переменной:

```
FFF = ExpToTrig[Simplify[FF /. {t -> t+1/2}]]
```

$$\frac{1}{2} \frac{8\cos[2\pi t]}{3\pi^2} - \frac{4\cos[4\pi t]}{3\pi^2} -$$

$$\frac{8\cos[6\pi t]}{27\pi^2} - \frac{8\cos[10\pi t]}{75\pi^2} - \frac{4\cos[12\pi t]}{27\pi^2} +$$

$$\frac{8\sin[2\pi t]}{3\pi^2} - \frac{8\sin[6\pi t]}{27\pi^2} + \frac{8\sin[10\pi t]}{75\pi^2}$$

Построен график разложения функции исходного входного напряжения в ряд Фурье с учетом первых 6 гармоник (рис. Л5.15):

```
Y22 = Plot[FFF, {t, 0, 1},
PlotStyle -> {Thickness[.008]}];
```

Для графического сравнения функции входного напряжения (рис. Л5.11) и ее разложения в ряд Фурье построены графики на одном рис. Л5.16.

```
Show[Y12, Y22];
```

Показано, что учет первых 6 гармоник достаточен для выполнения условия задачи, а именно, требуется учитывать только те гармоники, ампли-

туда которых превышает 5% от амплитуды основной гармоники (рис. Л.5.17):

```
Plot[FFF-g1[t-1/2], {t, 0, 1}];
```

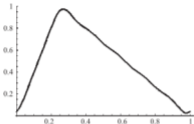


Рис. Л.5.15

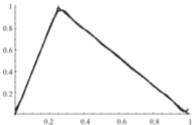


Рис. Л.5.16

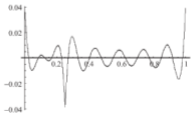


Рис. Л.5.17



Для получения и численного анализа амплитуд гармоник входного сигнала необходимо представить разложение сигнала входного напряжения в ряд Фурье в комплексной форме. При этом можно оперировать с разложением «сдвинутого» сигнала, для этого использована следующая функция:

**FF = FourierSeries[gl[t], t, 6]**

$$\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{4-4i}{3-3}\right)e^{-21i\pi} + \left(\frac{4-4i}{3-3}\right)e^{21i\pi}}{\pi^2} - \frac{2e^{-4i\pi}}{3\pi^2} - \frac{2e^{4i\pi}}{3\pi^2} + \frac{\left(\frac{4+4i}{27+27}\right)e^{-61i\pi}}{\pi^2} +$$

$$\frac{\left(\frac{4-4i}{27-27}\right)e^{61i\pi}}{\pi^2} + \frac{\left(\frac{4-4i}{75-75}\right)e^{-101i\pi}}{\pi^2} + \frac{\left(\frac{4+4i}{75+75}\right)e^{101i\pi}}{\pi^2} - \frac{2e^{-121i\pi}}{27\pi^2} - \frac{2e^{121i\pi}}{27\pi^2}$$

Составлен вектор коэффициентов разложения ряда Фурье (учтем первые 6 гармоник):

**FF1 = Table[FourierCoefficient[gl[t], t, i],  
[i, 1, 6]]**

$$\left\{ \frac{4-4i}{3-3}, -\frac{2}{3\pi^2}, \frac{4+4i}{27+27}, 0, \frac{4-4i}{75-75}, -\frac{2}{27\pi^2} \right\}$$

Получен вектор амплитуд первых 6 гармоник:

**FF2 = Table[  
2\*Abs[FourierCoefficient[gl[t], t, i]],  
[i, 1, 6]]**

$$\left\{ \frac{8\sqrt{2}}{3\pi^2}, \frac{4}{3\pi^2}, \frac{8\sqrt{2}}{27\pi^2}, 0, \frac{8\sqrt{2}}{75\pi^2}, \frac{4}{27\pi^2} \right\}$$

В численном виде амплитуды гармоник для разложения сигнала входного напряжения записаны в виде нижеследующего списка:

**N[FF2]**  
{0.382106, 0.135095,  
0.0424562, 0., 0.0152842, 0.0150105}

Коэффициенты нечетных гармоник равны нулю, что обусловлено видом симметрии входного напряжения.

Оценено влияние числа учитываемых гармоник на действующее значение входного напряжения. Его точное значение можно найти путем

непосредственного интегрирования  $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_{\text{eff}}^2 dt}$ :

```
EE1 = N[Sqrt[Integrate[(g1[t])^2,
  {t, -1/2, 1/2}]]]
0.57735
```

Вычисление действующего значения через гармонические составляющие сведется к определению квадратного корня из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений отдельных гармоник:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} U_i^2}.$$

Применение этой формулы с учетом постоянной составляющей и только первой гармоники даст следующий результат:

```
N[Sqrt[(1/2)^2 +
  (1/2) * Sum[(FF2[[i]])^2, {i, 1, 1}]]]
0.568333
```

Это значение отлично от найденного выше путем непосредственного интегрирования на 1.02% (вычисления точнее, чем в [15]):

```
(EE1 / DD1)
1.01587
```

Дополнительный учет второй и третьей гармоник даст результат

```
N[Sqrt[(1/2)^2 +
  (1/2) * Sum[(FF2[[i]])^2, {i, 1, 3}]]]
0.577087
```

Учет 6 гармоник даст более чем удовлетворительный результат:

```
N[Sqrt[(1/2)^2 +
  (1/2) * Sum[(FF2[[i]])^2, {i, 1, 6}]]]
0.577286
```

Амплитуды гармоник для разложения сигнала выходного напряжения записаны в виде нижеследующего списка:

```
UFin = U[[4]] /. {E1 -> FF2}
UFinish =
Table [Abs [UFin [[k]]] /. ω -> k], {k, 1, 6}] // N
{0.764212, 0.120833, 0.0117571,
0., 0.00131638, 0.000877254}
```

В работе [15] эти амплитуды найдены с помощью передаточной функции. Алгоритм позволил обойтись без ее применения. Для проверки правильности построенного алгоритма сначала была получена передаточная функция в символьном виде.

$$K = \frac{U[[4]]}{E1} = \frac{6\omega}{2i - 6\omega - 2i\omega^2 + 3\omega^3}$$

Можно проверить совпадение с формулой, приведенной на с. 138 [15].

```
KK = Table [Abs [K /. ω -> k], {k, 0, 7}] // N
{0., 2., 0.894427, 0.276923, 0.140633,
0.0861269, 0.0584425, 0.0423533}
```

Наконец, можно получить амплитуды гармоник сигнала выходного напряжения. Для этого еще раз были сосчитаны коэффициенты разложения в ряд Фурье выходного сигнала:

```
F2 = Table [2 * Abs [FourierCoefficient [g1 [t], t, i]],
{i, 1, 7}]
{ $\frac{8\sqrt{2}}{3\pi^2}$ ,  $\frac{4}{3\pi^2}$ ,  $\frac{8\sqrt{2}}{27\pi^2}$ , 0,  $\frac{8\sqrt{2}}{75\pi^2}$ ,  $\frac{4}{27\pi^2}$ ,  $\frac{8\sqrt{2}}{147\pi^2}$ }
```

Для корректного вывода амплитуд гармоник выходного сигнала к списку коэффициентов разложения в ряд Фурье добавлена постоянная составляющая

```
F2 = Insert[F2, 1/2, 1]
{ $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{8\sqrt{2}}{3\pi^2}$ ,  $\frac{4}{3\pi^2}$ ,  $\frac{8\sqrt{2}}{27\pi^2}$ , 0,  $\frac{8\sqrt{2}}{75\pi^2}$ ,  $\frac{4}{27\pi^2}$ ,  $\frac{8\sqrt{2}}{147\pi^2}$ }
```

и получен список амплитуд гармоник сигнала выходного сигнала напряжения:

```
UU = Table[F2[{k}] * KK[{k}], {k, 1, 7}]
{0., 0.764212, 0.120833,
 0.0117571, 0, 0.00131638, 0.000877254}
```

Данный результат совпадает с ранее полученным. Расчет амплитуд гармоник выходного сигнала напряжения с помощью передаточной функции выполнен для сравнения с приведенными результатами в [15].

При расчетах амплитуд гармоник выходного сигнала напряжения предпочтительнее пользоваться алгоритмом непосредственного вычисления, используя разложение входного сигнала напряжения.

Выполнен расчет начальных фаз гармоник выходного сигнала напряжения по формуле  $\psi_{\text{вых}} = \psi_{\text{вх}} + \theta_k$ , где  $\psi_{\text{вх}}$  — начальная фаза  $k$ -ой гармоники входного сигнала напряжения,  $\theta_k$  — начальная фаза  $k$ -ой гармоники передаточной функции.

При расчете начальных фаз необходимо пользоваться разложением в ряд Фурье уже исходной функции, задающей треугольный сигнал входного напряжения, так как соответствующие члены разложения исходной (FFF) и «сдвинутой» (FF) функций для входного напряжения отличаются знаками.

Получены начальные фазы для передаточной функции:

```
KKArg =
Table [If [Arg [K /.  $\omega \rightarrow (k - 1)$ ] * 180 / Pi == 0,
 0, 360 + Arg[K /.  $\omega \rightarrow (k - 1)$ ] * 180 / Pi],
{k, 2, 8}] // N
{0., 206.565, 194.25,
 190.125, 187.921, 186.525, 185.555}
```

Для получения начальных фаз  $\psi_{\text{вх}}$  сначала отдельно вычислены коэффициенты синус-преобразования и косинус-преобразования Фурье «сдвинутой» функции входного сигнала напряжения:

```
FF2 = Table[FourierSinCoefficient[gl[t], t, i],
  {i, 1, 8}]
{ $\frac{8}{3\pi^2}$ , 0,  $\frac{8}{27\pi^2}$ , 0,  $-\frac{8}{75\pi^2}$ , 0,  $\frac{8}{147\pi^2}$ , 0}
FF3 = Table[FourierCosCoefficient[gl[t], t, i],
  {i, 1, 8}]
{ $\frac{8}{3\pi^2}$ ,  $-\frac{4}{3\pi^2}$ ,  $\frac{8}{27\pi^2}$ , 0,  $\frac{8}{75\pi^2}$ ,  $-\frac{4}{27\pi^2}$ ,  $\frac{8}{147\pi^2}$ , 0}
```

Получены коэффициенты синус-преобразования и косинус-преобразования Фурье исходной функции входного напряжения по следующему правилу: подстановка  $t \rightarrow t + \frac{1}{2}$  производит сдвиг переменной, что приводит к появлению в аргументе функций синуса и косинуса слагаемого  $k\pi$ . При четных  $k$  коэффициенты у синусоидального члена равны нулю, при нечетных  $k$   $\sin(\varphi + k\pi) = -\sin\varphi$ . При нечетных  $k$   $\cos(\varphi + k\pi) = -\cos\varphi$ ; при  $k = 2, 6, 10, \dots$   $\cos(\varphi + k\pi) = \cos\varphi$ ; при  $k = 4, 8, 12, \dots$  коэффициенты у косинусоидального члена равны нулю. Это правило можно записать следующим образом:

$$\mathbf{FF21} = -\mathbf{FF2}$$

$$\left\{ \frac{8}{3\pi^2}, 0, -\frac{8}{27\pi^2}, 0, \frac{8}{75\pi^2}, 0, -\frac{8}{147\pi^2}, 0 \right\}$$

$$\mathbf{FF31} = \text{Table}[\text{If}[\text{OddQ}[k], -\mathbf{FF3}[[k]], \mathbf{FF3}[[k]]],$$

$$\left\{ -\frac{8}{3\pi^2}, -\frac{4}{3\pi^2}, -\frac{8}{27\pi^2}, 0, -\frac{8}{75\pi^2}, -\frac{4}{27\pi^2}, -\frac{8}{147\pi^2}, 0 \right\}]$$

Так как окончательное разложение по гармоникам представлено в виде суммы синусоидальных членов, сумму синусо- и косинусоидальных членов при соответствующем  $k$  надо представить суммой только синусоидальных членов. В соответствующих слагаемых в аргументе синуса появится начальная фаза  $\varphi_{in}$ :

$$\varphi_{input} =$$

$$\begin{aligned} & \text{Table}[\text{If}[\mathbf{FF21}[[k]] + \mathbf{FF31}[[k]] == 0, \\ & \quad \text{If}[\mathbf{FF21}[[k]] == 0, \\ & \quad \quad \text{If}[\mathbf{FF31}[[k]] > 0, \text{Pi}/2, -\text{Pi}/2], \\ & \quad \quad \text{If}[\mathbf{FF21}[[k]] < 0, 0, \text{Pi}], \\ & \quad \text{If}[\mathbf{FF21}[[k]] > 0, \\ & \quad \quad \text{If}[\mathbf{FF31}[[k]] > 0, \text{Pi}/4, -\text{Pi}/4], \\ & \quad \quad \text{If}[\mathbf{FF31}[[k]] > 0, 3 * \text{Pi}/4, -3 * \text{Pi}/4]], \\ & \quad \{k, 1, 7\}] * 180/\text{Pi} \\ & \{-45, -90, -135, -90, -45, -90, -135\} \end{aligned}$$

Получены начальные фазы гармоник выходного сигнала напряжения в градусах:

$$\begin{aligned} \varphi_{output} &= (\mathbf{KKArg} + \varphi_{input}) \\ & \{-45., 116.565, 59.25, \\ & \quad 100.125, 142.921, 96.5251, 50.5554\} \end{aligned}$$

и в радианах:

```
ψoutputrad = %*Pi/180
{-0.785398, 2.03444, 1.03411,
 1.74751, 2.49444, 1.68468, 0.882358}
```

Для вывода результата лабораторной работы на экран монитора предварительно подготовлена вспомогательная таблица со значениями амплитуд, номеров гармоник, знаков и абсолютных значений начальных фаз:

```
Rez =
Table[{UFinish[[k]], k - 1,
If [ψoutputrad[[k-1]] > 0, "+", "-"],
Abs[ψoutputrad[[k-1]]]}, {k, 2, 7}]
{{0.764212, 1, -, 0.785398},
 {0.120833, 2, +, 2.03444},
 {0.0117571, 3, +, 1.03411},
 {0., 4, +, 1.74751},
 {0.00131638, 5, +, 2.49444},
 {0.000877254, 6, +, 1.68468}}
```

В результате получено:

```
Print ["uвых(t)=U0", Rez[[1]][[1]], "sin",
Rez[[1]][[2]], "ωt", Rez[[1]][[3]],
Rez[[1]][[4]], ")", "+", Rez[[2]][[1]],
"sin", Rez[[2]][[2]], "ωt", Rez[[2]][[3]],
Rez[[2]][[4]], ")", "+", Rez[[3]][[1]],
"sin(", Rez[[3]][[2]], "ωt", Rez[[3]][[3]],
Rez[[3]][[4]], ")", ")]"
uвых(t)=U0(0.764212 sin(1ωt-0.785398)+0.120833
sin(2ωt+2.03444)+0.0117571sin(3ωt + 1.03411))
```

---

## Лабораторная работа 6.

### **Расчет переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами, обусловленных однопараметрическим изменением конфигурации схемы**

В данной лабораторной работе рассмотрены алгоритмы, позволяющие получить и решить уравнения, описывающие переходные процессы в электрических цепях.

Существуют два режима работы электрических цепей: установившийся (стационарный) и переходный (неустановившийся). Под установившимся режимом понимается режим, при котором токи и напряжения в цепи могут существовать неограниченно долго, причем их форма определяется видом ЭДС или видом приложенных напряжений. Например, если в цепи действуют постоянные во времени ЭДС, то в установившемся режиме токи и напряжения на всех участках постоянны во времени, а если ЭДС в цепи изменяются по синусоидальному закону, то токи и напряжения в установившемся режиме изменяются по тому же закону.

Под переходным режимом понимается процесс, возникающий в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Этот переход вызывается коммутацией, под которой понимается: подключение цепи к источнику ЭДС, скачкообразное изменение ЭДС, отключение цепи от источника, короткое замыкание цепи, скачкообразное изменение параметров цепи и т. п.

Если коммутация совершается посредством замыкания (размыкания) ключа в электрической схеме, моделирование этого процесса можно осуществить с помощью одного параметра – активного сопротивления, значение которого в момент коммутации мгновенно изменяется от  $\infty$  до 0 (от 0 до  $\infty$ ).

Следовательно, электрической цепи до и после коммутации соответствуют две разные схемы, каждая из которых описывается своей системой интегродифференциальных уравнений. Коммутация инициирует переход электрической цепи от одной схемы к другой.

В большинстве случаев в момент коммутации напряжения на обкладках конденсаторов и токи в индуктивных катушках – непрерывные функции времени, другими словами: в момент коммутации остаются неизменными напряжения на обкладках конденсаторов и токи в индуктивных катушках. Этот факт обычно называют законами коммутации.

Решение системы уравнений, описывающих схему электрической цепи до коммутации, определяет начальные условия для системы линей-

ных интегродифференциальных уравнений, характеризующих процесс перехода электрической цепи от одного установившегося режима к другому.

В данной лабораторной работе рассмотрен простейший случай, когда коммутация представляет собой мгновенное изменение одного параметра линейной электрической схемы.

### Описание схемы

Дана электрическая цепь [10, с. 306], схема которой представлена на рис. Л.6.1.

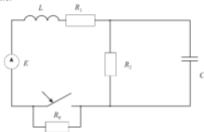


Рис. Л.6.1

Реальный ключ в дальнейшем представлен набором элементов, показанных на рис. Л.6.2, на котором изображена схема электрической цепи, эквивалентная исходной.

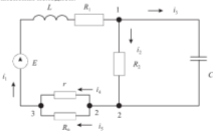


Рис. Л.6.2



Сопротивление  $r$  моделирует действие ключа во время коммутации (замыкание:  $r = 0$  либо размыкание:  $r = \infty$ ). В этом примере ключ осуществляет замыкание при следующих начальных данных:  $E_1 = 150$ ,  $R_0 = 100$ ,  $R_1 = 300$ ,  $R_2 = 200$ ,  $C_3 = 10^{-3}$ ,  $I_1 = 0,1$ . Требуется исследовать переходные режимы в электрической цепи при скачкообразном изменении сопротивления  $r$ .

Для расчета переходных процессов использованы функции дискретной математики и линейной алгебры, для чего необходимо подключить пакет расширений

```
<<DiscreteMath`Combinatorica`.
```

На схеме обозначены и пронумерованы узлы. Показаны направления токов в ветвях. Задан граф, описывающий схему данной электрической цепи до коммутации, как список ориентированных дуг.

```
LL = {{3, 1}, {1, 2}, {1, 2}, {2, 3}, {2, 3}};
```

После чего использована функция перевода представления графа как списка ориентированных дуг во внутреннее (машинное) представление графа, для которого в системе *Mathematica* существует специальный формат записи графа.

```
G = FromOrderedPairs[LL];
```

Вычислено количество вершин и дуг графа:

```
q = V[G]
p = Length[LL]
Out[110] = 3
Out[111] = 5
```

Граф, соответствующий исходной схеме до коммутации, содержит три вершины и пять дуг (рис. Л.6.3). Вывод на экран изображения графа осуществлен следующей программой:

```
EL = Table[i, {i, 1, p}];
ELL = Ordering[LL];
XXX[l_] := ReplacePart[ELL, "",
Table[Position[ELL, l][[1]][[1]], {i, 1, Length[l]}]]
z1 = {2}; z2 = {4}; z = Union[z1, z2];
```

```

AA[x_, y_] := SetGraphOptions[G, EdgeColor -> Red,
  VertexNumber -> True, EdgeLabel -> x,
  VertexNumberPosition -> Center, EdgeLabelPosition -> y,
  VertexNumberColor -> Black, VertexColor -> White,
  EdgeLabelColor -> Blue, VertexStyle -> Disk[Large],
  TextStyle -> {FontFamily -> "New Times Roman",
    FontWeight -> "Bold", FontSize -> 16},
  Background -> RGBColor[1, 1, 0]];
S1 = ShowGraph[AA[XXX[z], LowerRight],
  DisplayFunction -> Identity];
S2 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z1]],
  UpperLeft], DisplayFunction -> Identity];
S3 = ShowGraph[AA[XXX[Complement[EL, z2]],
  UpperLeft], DisplayFunction -> Identity];
Show[{S1, S2, S3},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction];

```

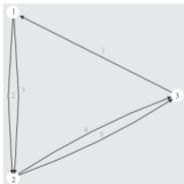


Рис. Л.6.3

Составлена матрица соединений **A** для заданной схемы до коммутации и для контроля выведена в матричной форме

```
In[106]:= A // MatrixForm
```

```
Out[106]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Задание списка переменных и значений параметров схемы

Переходные процессы в общем случае описаны интегродифференциальными уравнениями.

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0, \quad -E_j + R_j \cdot i_j + L_j \frac{di_j}{dt} + u_{C_j} = 0, \quad C_j \frac{du_{C_j}}{dt} = i_j.$$

Чтобы избавиться от интегральной составляющей в этих уравнениях, вводят новую переменную – напряжение на емкости. В результате этого уравнения задачи будут представлять собой систему линейных уравнений I порядка, как дифференциальных, так и алгебраических. Если схема содержит емкость  $C$ , то в качестве искомой переменной целесообразно (но не обязательно) выбрать напряжение на емкости ( $u_C$ ), если в схеме есть индуктивность ( $L$ ), то – ток ( $i_L$ ), протекающий через  $L$ . Данный выбор переменных обусловлен предсказуемостью поведения  $u_C$  и  $i_L$  в момент коммутации, так как последние подчиняются законам коммутации. Искомые переменные – элементы векторов дифференциальных переменных.

```
II = {i1[t], i2[t], i3[t], i4[t], i5[t]};
```

```
UC = {UC1[t], UC2[t], UC3[t], UC4[t], UC5[t]};
```

Заданы векторы параметров для всех ветвей схемы:

```
L = {L1, 0, 0, 0, 0};
```

```
CC = {0, 0, C3, 0, 0};
```

```
RR = {R1, R2, 0, r, R0};
```

```
EE = {E1, 0, 0, 0, 0};
```

Заданы начальные данные:

```
Param = {E1 → 150, R0 → 100, R1 → 300, R2 → 200,  
C3 → 0.00001, L1 → 0.1};
```

Для проверки полезно вывести на экран таблицу параметров и их числовых значений:

```
Join[{"EL", "RR", "II", "UC", "CC", "EE"},
  Transpose[{EL, RR, II, UC, CC, EE}/.Param]]//TableForm
```

EL	RR	II	UC	CC	EE
1	300	i1[t]	UC1[t]	0	150
2	200	i2[t]	UC2[t]	0	0
3	0	i3[t]	UC3[t]	0.00001	0
4	r	i4[t]	UC4[t]	0	0
5	100	i5[t]	UC5[t]	0	0

Необходимо задать векторы, которые будут хранить информацию о наличии в ветвях индуктивности (**DD**) или емкости (**FF**).

$$\mathbf{FF} = \{0, 0, 1, 0, 0\};$$

$$\mathbf{DD} = \{1, 0, 0, 0, 0\};$$

## Получение системы уравнений.

### Классификация переменных

Положительным свойством системы *Mathematica* является возможность получения аналитических решений линейных систем дифференциальных, алгебраических и дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих процессы в цепях.

Вначале найдены независимые контуры (циклические векторы).

```
In[29]:= B // MatrixForm
```

```
Out[29]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выбрать независимые контуры можно произвольным способом. Функция `NullSpace` предлагает лишь один из таких способов. В данном случае первый контур составлен из ветвей 1, 2 и 5. Ветвь 1 содержит ЭДС, индуктивность и активное сопротивление  $R_1$ , ветвь 2 – активное сопротивление  $R_2$  и ветвь 5 с активным сопротивлением  $R_5$ . Второй контур составлен из ветвей 1, 2 и 4. В ветви 4 находится фиктивное сопротивление

ние  $r$ . Третий контур составлен из ветвей 2 и 3. Ветвь 3 содержит емкость  $C$ .

Записаны уравнения связи и уравнения по законам Кирхгофа.

*а) Уравнение связи*

Уравнения связи иллюстрируют зависимость напряжения на элементе цепи от тока, протекающего через него. Для емкостного элемента уравнение связи выглядит следующим образом:  $i_{C_j} = C_j \cdot \frac{du_{C_j}}{dt}$ , где  $j = 1, \dots, m$ ,  $m$  – количество емкостных элементов в схеме цепи. Для индуктивного элемента –  $u_{L_j} = L_j \cdot \frac{di_{L_j}}{dt}$ . Для резистивного –  $u_{R_j} = R_j i_{R_j}$  (закон Ома).

Так как в данном примере в качестве искомой переменной выбрано напряжение на емкости  $C_3$ , уравнение связи записывается для емкостного

элемента  $i_{C_3} = C_3 \cdot \frac{du_{C_3}}{dt}$ , откуда  $-i_{C_3} + C_3 \cdot \frac{du_{C_3}}{dt} = 0$ . В среде пакета *Mathematica* это выглядит так:

```
Eq1 = {FF. (DiagonalMatrix[CC].D[UC, t] - II)}
```

Применение такой функции даст левую часть уравнения связи.

```
{-i3[t]+C3 UC3'[t]}
```

*б) Уравнения, составленные по I закону Кирхгофа*

Количество независимых уравнений, составленных по I закону Кирхгофа, на единицу меньше общего количества узлов  $q$  в схеме.

```
Eq2 = Delete [A, II, 1]
{-i2[t] - i3[t] + i4[t] + i5[t],
 i1[t] - i4[t] - i5[t]}
```

Так как в схеме только три узла (рис. Л.6.2), то результатом функции **Delete[expr, n]**, которая удаляет элемент, находящийся на позиции  $n$  в выражении **expr**, будет список левых частей уравнений, состоящий из двух элементов. Так как уравнения линейно зависимые, то из списка исключено любое из уравнений, например, как в рассмотренном случае, первое.

## в) Уравнения, составленные по II закону Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа в матричном виде можно записать так:

$$-EE + RR \cdot I + L \cdot \frac{d}{dt} I + U_c = 0. \quad (1)$$

Циклические векторы определяют независимые контуры, для которых составлены уравнения (1). В заданной схеме до коммутации есть три независимых контура, следовательно, система будет состоять из трех уравнений, левые части которых определены следующей функцией:

$$\begin{aligned} \text{Eq3} = & \mathbf{B} \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E} - \text{DiagonalMatrix}[\mathbf{R}\mathbf{R}]) \cdot \mathbf{I}\mathbf{I} - \\ & \text{DiagonalMatrix}[\mathbf{D}[\mathbf{I}\mathbf{I}, t]] \cdot \mathbf{L} - \\ & \text{DiagonalMatrix}[\mathbf{F}\mathbf{F}] \cdot \mathbf{U}\mathbf{C}; \end{aligned}$$

или в матричной форме:

**MatrixForm**[Eq3]

$$\begin{pmatrix} E1 - R1 i1[t] - R2 i2[t] - R0 i5[t] - L1 i1'[t] \\ E1 - R1 i1[t] - R2 i2[t] - r i4[t] - L1 i1'[t] \\ R2 i2[t] - UC3[t] \end{pmatrix}$$

Составлена система дифференциальных уравнений, описывающих переходный режим. Так как сопротивления вошли только в уравнения по II закону Кирхгофа, то при изменении параметров схемы изменяются только левые части Eq3 уравнений. Функция Eqq содержит параметр  $r$  (см. ниже), который характеризует коммутацию схемы. Если  $r = 0$ , то ключ замкнут и в уравнении по II закону Кирхгофа соответствующее сопротивление  $r = 0$ . Если ключ разомкнут, то  $r = \infty$ . Последнее значение параметра  $r$  в уравнение подставить нельзя, потому что в уравнении возникает неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ , которую необходимо раскрывать «вручную». Для избежания появления неопределенностей в уравнении

сделана замена  $r = \frac{1}{rrr}$ . Члены суммы приведены к общему знаменателю

и в полученном результате с помощью функции **Together**[**expr**] сокращены множители. Рассмотрен только числитель (Numerator) этой дроби, в котором положено  $rrr = 0$ . Смысл этих действий заключен в том, что при  $r = \infty$  автоматически получаются уравнения для токов в соответствующих ветвях (ток равен нулю). Если значение сопротивления  $r$  конечно, то его значение следует подставить в уравнение.

```
Eqq[rr_] := If [rr == 0, Eq3 /. {x -> 0},
If [rr == Infinity,
Numerator [Together [Eq3 /. {x -> 1 / rrr}]] /.
{rrr -> 0}, Eq3]]
```

### Список дифференциальных переменных

Следующие функции вернут список всех дифференциальных переменных.

```
SSS = {};
Table [If [DD[[i]] = 1,
  SSS = Append[SSS, II[[i]]], {i, 1, p}];
Table [If [FF[[i]] = 1,
  SSS = Append [SSS, UC[[i]]], {i, 1, p}];
SSS
{i1[t], UC3[t]}
```

### Список алгебраических переменных

Следующая функция сформирует список переменных, из которого исключены дифференциальные переменные. Останутся только алгебраические переменные.

```
SSS1 = Complement [II, SSS]
{i2[t], i3[t], i4[t], i5[t]}
```

### Составление системы уравнений

Функция Union предназначена для связи уравнений всех групп в систему, функция Equal приравняет левые части уравнений нулю, а функция Thread необходима, чтобы операция Equal была применена к каждому элементу списка.

```
EQU[rr_]:=Thread[Equal[Union[Eq1, Eq2, Eqq[rr]], 0]];
```

Ниже выписаны уравнения заданной схемы в режиме до коммутации ( $\tau = \infty$ ) и после коммутации ( $\tau = 0$ ).

```
EQU [Infinity] //MatrixForm
```

$$\left( \begin{array}{l} -i4[t] = 0 \\ i1[t] - i4[t] - i5[t] == 0 \\ -i2[t] - i3[t] + i4[t] + i5[t] == 0 \\ R2 i2[t] - UC3[t] == 0 \\ E1 - R1 i1[t] - R2 i2[t] - R0 i5[t] - L1 i1'[t] == 0 \\ -i3[t] + C3UC3'[t] = 0 \end{array} \right)$$

**EQU[0] //MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} i1[t] - i4[t] - i5[t] == 0 \\ -i2[t] - i3[t] + i4[t] + i5[t] == 0 \\ R2 i2[t] - UC3[t] == 0 \\ E1 - R1 i1[t] - R2 i2[t] - L1 i1'[t] == 0 \\ E1 - R1 i1[t] - R2 i2[t] - R0 i5[t] - L1 i1'[t] == 0 \\ -i3[t] + C3UC3'[t] == 0 \end{pmatrix}$$

### Решение системы уравнений

Решение системы начато с исключения из нее алгебраических переменных с помощью функции `Eliminate`. При этом образована система дифференциальных уравнений, содержащая только дифференциальные переменные.

*Исключение алгебраических переменных*

```
LLL[rr_] := If [Length [SSS] == 1,
  (Eliminate[EQU[rr], SSS1]),
  Table[Eliminate[EQU[rr], SSS1] [{i}],
    {i, 1, Length[SSS]}];
```

Проиллюстрировано получение системы уравнений для схемы в режиме до коммутации ( $tr = \infty$ ) и после коммутации ( $tr = 0$ ).

**LLL[Infinity] // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} E1 == R0 i1[t] + R1 i1[t] + R2 i1[t] + L1 i1'[t] - C3 R2 UC3'[t] \\ UC3[t] == R2 (i1[t] - C3UC3'[t]) \end{pmatrix}$$

**LLL[0] // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} E1 == R1 i1[t] + R2 i1[t] + L1 i1'[t] - C3 R2 UC3'[t] \\ UC3[t] = R2 (i1[t] - C3UC3'[t]) \end{pmatrix}$$

*Исследование установившихся режимов. Начальные условия*

Установившийся режим характеризуется равенством нулю всех производных дифференциальных переменных. Поэтому сначала составлен список таких подстановок.

```
KKK = Thread[Rule[D[SSS, t], 0]]
{i1'[t] -> 0, UC3'[t] -> 0}
```



Для получения вектора значений дифференциальных переменных использована функция Evaluate[expr], которая вычисляет выражение expr безусловно, то есть даже если оно оказывается аргументом функции, чьи атрибуты определяют его невычисляемым. С помощью функции Solve система дифференциальных уравнений решена относительно дифференциальных переменных как алгебраическая система, в которую затем подставлены значения производных дифференциальных переменных, равные нулю. Необходимо применить функцию Flatten[list], которая выравнивает (превращает в одномерный) список по всем его уровням.

```
fff[rr_] :=
SSS /. Flatten[Solve[Evaluate[LLL[rr]], SSS] /. KKK];
```

Создан вектор начальных условий в момент коммутации  $t = 0$  в задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого во всех элементах вектора значений дифференциальных переменных положено  $t = 0$ .

```
BC[rr_] := Thread [Equal [SSS, fff[rr]]] /. {t -> 0};
```

Эта функция является функцией аргумента  $rr$ . Сначала получены в символьном виде векторы начальных условий для схемы в режиме до коммутации ( $t = \infty$ ) и после коммутации ( $t = 0$ ):

```
BC[Infinity] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} i1[0] == \frac{E1}{R0 + R1 + R2} \\ UC3[0] == \frac{E1R2}{R0 + R1 + R2} \end{pmatrix}$$

```
BC[0] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} i1[0] == \frac{E1}{R1 + R2} \\ UC3[0] == \frac{E1R2}{R1 + R2} \end{pmatrix}$$

Затем подставлены значения параметров данной цепи:

```
BC [Infinity] /. Param//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} i1[0] == \frac{1}{4} \\ UC3[0] == 50 \end{pmatrix}$$

```
BC[0] /. Param // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} i1[0] == \frac{3}{10} \\ UC3[0] == 60 \end{pmatrix}$$

*Формирование системы уравнений с начальными условиями*

```
JJJ[rr_, pp_] := Union [LLL[rr], BC[pp]] /. Param.
```

Эта функция зависит от двух переменных. Переменная *pp* характеризует цепь до коммутации, а переменная *rr* характеризует цепь после коммутации. Эта функция представляет собой совокупность дифференциальных уравнений и начальных условий, в которые подставлены заданные параметры цепи (задачу Коши).

Система уравнений для момента коммутации такова:

```
JJJ[0, Infinity]
```

$$\{150 == 500 i1[t] + 0.1 i1'[t] - 0.002 UC3'[t], i1[0] == \frac{1}{4}, \\ UC3[0] == 50, UC3[t] = 200 (i1[t] - 0.00001 UC3'[t])\}$$

После коммутации система уравнений принимает вид:

```
JJJ[Infinity, 0]
```

$$\{150 == 600 i1[t] + 0.1 i1'[t] - 0.002 UC3'[t], i1[0] == \frac{3}{10}, \\ UC3[0] == 60, UC3[t] = 200 (i1[t] - 0.00001 UC3'[t])\}$$

Система дифференциальных уравнений решена с помощью функции **DSolve** относительно дифференциальных переменных *SSS*, зависящих от времени *t*. Функция **Chop[expr]** присвоила значение 0 тем приближенным вещественным числам в выражении *expr*, абсолютные величины которых меньше  $10^{-10}$ . Функция **Simplify** упростила выражение.

```
QQQ=Simplify[Chop[DSolve[JJJ[0, Infinity], SSS, t]]];
```

Алгебраические переменные выражены через дифференциальные переменные и их производные. Затем подставлены значения дифференциальных переменных, полученные при решении уравнения, и значения параметров.

```
QQQ1 = Chop [ Solve [(EQU [0] /. Param /. \\ Flatten[Union[QQQ, D[QQQ, t]]], SSS1]];
```

### Графическое представление результатов

Для вывода графиков токов в ветвях схемы сначала сформирован вектор токов.

```
III := Flatten [(II /. QQQ1) /. QQQ];
```

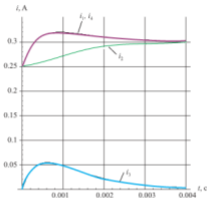


Рис. Л.6.4

Затем построены графики токов как функций времени (рис. Л.6.4). В опциях функции **Plot** указана установка масштаба по оси ординат, задано равенство масштаба по координатным осям, обозначены оси и выведена масштабная сетка на экран:

```
Plot[{III[[1]], III[[2]], III[[3]], III[[4]], III[[5]]},
  {t, 0, 0.004}, PlotRange -> {0.0, 0.35}, AspectRatio -> 1,
  AxesLabel -> {"t, мс", "i, А"}, GridLines -> Automatic,
  PlotStyle -> {Hue [0.2], Hue [0.4],
  Hue [0.6], Hue [0.8], Hue [1.0]}];
```

Ток в ветви 5 схемы в переходном режиме после коммутации равен нулю (рис. Л.6.2).

Для вывода графика напряжения на емкости задан вектор

```
UUC := Flatten [(UC /. QQQ1) /. QQQ];
```

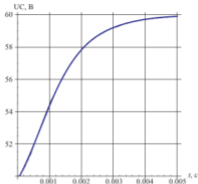


Рис. Л.6.5

и построен график напряжения на емкости как функции времени (рис. Л.6.5).

```
Plot[UUC[[3]], {t, 0, 0.005}, AspectRatio -> 1,
  AxesLabel -> {"t, мс", "UC, B"},
  GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Hue [0.65]}];
```

Для вывода графика напряжения на индуктивности сначала получено его выражение в аналитическом виде по формуле  $U_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

```
UL = Simplify[D[III[[1]], t] * L [[1]] /. Param
33.33333 e-2000 t - 8.33333 e-2000 t
```

График напряжения на индуктивности (рис. Л.6.6) построен с помощью следующей функции:

```
Plot[UL, {t, 0, 0.005}, AspectRatio -> 1,
  AxesLabel -> {"t, мс", "UL, B"},
  GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Hue [0.65]}];
```

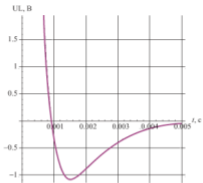


Рис. Л.6.6

---

Лабораторная работа 7.  
**Расчет линейной электрической цепи при скачкообразном изменении ЭДС и напряжений**

Данная лабораторная работа посвящена расчету переходных процессов в линейных электрических цепях.

Исследован переходный (неустановившийся) режим работы электрических цепей при скачкообразном изменении во времени ЭДС.

**Задание № 1**

Цепь, схема которой состоит из последовательно соединенных сопротивления и индуктивности (рис. Л.7.1), подключена к источнику прямоугольных импульсов ЭДС с амплитудой  $U$  и длительностью  $t_n$  (рис. Л.7.2). Найти уравнение тока  $i$  в зависимости от времени. Построить кривую  $i(t)$ .

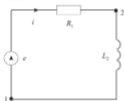


Рис. Л.7.1

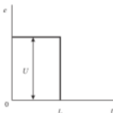


Рис. Л.7.2

На схеме обозначены фиктивные узлы – точки 1 и 2 (рис. Л.7.1). Таким образом, контур состоит из ветви 1 (содержит  $R_1$  и  $E$ ) и ветвь 2 (содержит  $L_2$ ).

Прямоугольный импульс можно представить как два скачка ЭДС, сначала значение ЭДС скачком меняется с нулевого значения до значения  $U$ , затем наоборот. При этом в цепи развиваются переходные процессы.

Задание схемы и исходных данных

Для работы необходимо подключить пакет расширений

<<DiscreteMath`Combinatorica`>>

и ввести описание схемы электрической цепи в виде графа

$$\mathbf{LL} = \{(1, 2), (2, 1)\};$$

Стремление к унификации алгоритмов приводит к тому, что в уравнениях, положенных в основу разработки алгоритмов расчета параметров электрической цепи, могут входить члены, описывающие не существующие в данной конкретной схеме элементы. В таком случае значения соответствующих членов следует положить равными нулю. Алгоритмы написаны для общего случая, когда исходные схемы электрических цепей содержат активные сопротивления, индуктивности и емкости.

Изображение графа можно вывести на экран монитора, как указано во вводимом занятии 2.

Матрица соединений данной схемы выглядит следующим образом:

```
In[15]:= A // MatrixForm
Out[15]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

Ввод исходных данных

```
R = {R1, 0};
CC = {0, 0};
L = {0, L2};
EE = {E1[t], 0};
```

и задание численных значений параметров

$$\mathbf{SC} = \{L2 \rightarrow 2.5, R1 \rightarrow 5, U \rightarrow 10\};$$

*Составление уравнений по методу узловых потенциалов*

Составление уравнений начато с формирования матрицы сопротивлений и индуктивностей цепи.

```
RR = DiagonalMatrix[R];
LLL = DiagonalMatrix[L];
```

Затем сформирован вектор токов в ветвях ( $i_1, i_2, i_3 = i_2$ ) как функций от времени.

```
II = Table[i[k][t], {k, 1, p}]
{i[1][t], i[2][t]}
```

Здесь  $p = 2$  – число ветвей графа, которое можно определить с помощью функции `Length`, как это было сделано в предыдущих лабораторных работах.

Для составления списка переменных для системы дифференциальных уравнений сформирован вектор напряжений по следующему принципу: если в ветви схемы электрической цепи есть емкость, то соответствующий элемент вектора – функция, зависящая от времени, в противном случае элементу присвоено значение, равное нулю. В исходной схеме емкости нет, поэтому вектор – нулевой.

```
UU = Table [If [ (CC [[k]] /. SC) ≠ 0, u [k] [t], 0],
  {k, 1, p}];
(0, 0)
```

Аналогично сформирован вектор токов: если в ветви схемы электрической цепи есть индуктивность, то соответствующий элемент вектора – это функция, зависящая от времени, в противном случае элементу присваивается значение, равное нулю. В исходной схеме есть индуктивность, поэтому вектор – ненулевой.

```
IIr = Table [If [ (L [[k]] /. SC) ≠ 0, i [k] [t], 0],
  {k, 1, p}];
(0, i[2] [t])
```

В общем случае уравнения связи и уравнения по законам Кирхгофа следующие: для ветвей, содержащих емкость,  $C \cdot \frac{du_c}{dt} - i = 0$ , для контуров  $R \cdot i + u_c + L \frac{di}{dt} - E = 0$ . Если система не содержит емкость, в уравнении Кирхгофа все  $u_c = 0$ , а указанные уравнения связи выводятся из рассмотрения.

Для рассмотренной схемы электрической цепи (рис. Л.7.1) в системе уравнений считается

$$C = CC = 0, L = LL, E = EE, u_c = UU, i = II.$$

Формирование левых частей уравнений.

```
Eq = DeleteCases[Union[Table [If [ (CC [[k]] /. SC) ≠ 0,
  CC [[k]] D[UU, t] [[k]] - II [[k]], 0],
  {k, 1, p}], Delete[A.II, 1],
  NullSpace[A].(RR.II + UU + LLL.D[II, t] - EE), 0];
```

Здесь использованы следующие функции системы *Mathematica*:

– функция `Union[list]` возвращает отсортированный вариант списка `list`, из которого удалены все повторяющиеся элементы;



- функция **Delete**[list, i] удаляет из списка i-й элемент;
- функция **DeleteCases**[list, pattern] удаляет из списка все элементы, которые совпадают с образцом pattern.

Система уравнений сформирована при помощи функции Thread:

$$\mathbf{Eqq} = \text{Thread}[\mathbf{Eq} == 0]$$

На выходе получена система уравнений

$$\begin{aligned} -i[1][t] + i[2][t] &== 0, \\ -E1[t] + R1 i[1][t] + L2 i[2]'[t] &== 0 \end{aligned}$$

#### *Начальные условия*

Сформированы начальные условия, связанные с источником ЭДС. В момент времени, находящийся слева от точки  $t = 0$  значение ЭДС равно нулю (рис. Л.7.2).

$$\mathbf{SN} = \{\mathbf{E1}[t] \rightarrow 0\};$$

В данном случае из-за наличия индуктивности начальные условия выглядят следующим образом:  $\frac{di}{dt} = 0$ .

В рассмотренном случае для схем электрических цепей, содержащих емкости, система уравнений содержит неизвестные: токи в ветвях и напряжения на емкостях. В этом случае должны быть определены начальные условия для токов и напряжений. Для схем, не содержащих емкости, начальные условия ставятся только на токи, поэтому в рассмотренном случае нет членов вида  $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0} = 0$ .

С помощью функции Thread организован список начальных условий, в котором удалены все элементы, равные нулю.

$$\mathbf{S} = \text{Thread}[\text{DeleteCases}[\text{Union}[\mathbf{D}[\mathbf{II}, t], \mathbf{D}[\mathbf{UU}, t]], 0] \rightarrow 0];$$

В итоге получены начальные условия

$$\{i[1]'[t] \rightarrow 0, i[2]'[t] \rightarrow 0\}$$

Получен список только дифференциальных переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{Varr} &= \text{DeleteCases}[\text{Union}[\mathbf{UU}, \mathbf{IIr}], 0] \\ &\{i[2][t]\} \end{aligned}$$

и список всех переменных

```
Var = DeleteCases[Union[II, UU], 0]
{i[1][t], i[2][t]}
```

Решена система уравнений относительно токов

```
SS = Solve[Eqq /. S, Var]
{{i[2][t] -> 0, i[1][t] -> 0}}
```

Найдены начальные условия для системы дифференциальных уравнений

```
BC = DeleteCases[Flatten[Table[{If[(L[[k]]/.SC)≠0,
i[k][0] == i[k][t] /. SS, 0], If[(CC[[k]] /. SC)≠0,
u[k][0] == u[k][t] /. SS /. {t -> 0}, 0]},
{k, 1, p}]], 0] /. SN
{i[2][0] == 0}
```

*Решение узловых уравнений*

Задан закон изменения ЭДС.

```
E1[t_] := U;
```

При помощи следующей функции уравнения и начальные условия связаны воедино.

```
AAA = Union[Eqq, BC]
{i[2][0] == 0, -i[1][t] + i[2][t] == 0,
-U + R1 i[1][t] + L2 i[2]'[t] == 0}
```

После отладки программы вывод всех промежуточных результатов можно не делать, поставив после функции знак «;».

Сначала решена система относительно всех переменных – токов в нашем случае (все переменные выражены через дифференциальные переменные).

```
S = Solve[AAA, Var] [[1]]
{ i[2][t] ->  $\frac{U - L2 i[2]'[t]}{R1}$ , i[1][t] ->  $\frac{U - L2 i[2]'[t]}{R1}$  }
```

Полученные решения подставлены в список ненулевых напряжений и токов.

```
S1 = Varr /. S
{  $\frac{U - L2 i[2]'[t]}{R1}$  }
```

В итоге получено линейное дифференциальное уравнение I порядка относительно токов

$$\text{BBB} = \text{Thread}[\text{Equal}[\text{Varr}, \text{S1}]]$$

$$\left\{ i[2][t] == \frac{U - L2 i[2]'[t]}{R1} \right\}$$

После этого решена задача Коши для дифференциального уравнения BBB с начальными условиями BC относительно переменных Varr:

$$\text{SS} = \text{Simplify}[\text{DSolve}[\text{Union}[\text{BBB}, \text{BC}], \text{Varr}, t][[1]]]$$

$$\left\{ i[2][t] \rightarrow \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L2}} U}{R1} \right\}$$

Организован список алгебраических и дифференциальных переменных:

$$\text{SSS} = \text{Simplify}[\text{Flatten}[\{\text{SS}, \text{D}[\text{SS}, t]\}]]$$

$$\left\{ i[2][t] \rightarrow \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L2}} U}{R1}, i[2]'[t] \rightarrow \frac{e^{-\frac{R1 t}{L2}} U}{L2} \right\}$$

Выделено значение алгебраических переменных:

$$\text{VV} = \text{Simplify}[\text{Varr} /. \text{Simplify}[\text{SSS}]]$$

$$\left\{ \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L2}} U}{R1} \right\}$$

Найден ток в ветви 2 схемы. Так как контур в схеме один, естественно, что ток в ветви 2 схемы равен току в ветви 1 схемы. Но в силу стремления унифицировать алгоритмы расчета, показано, как рассчитаны остальные элементы вектора токов.

Для нахождения тока в ветви 1 схемы выделены с помощью функции Complement алгебраические переменные:

$$\text{Varc} = \text{Complement}[\text{Var}, \text{Varr}]$$

$$\{i[1][t]\}$$

Для него решение выглядит следующим образом:

$$\text{VC} = \text{Simplify}[\text{Varc} /. \text{S} /. \text{SSS}]$$

$$\left\{ \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L2}} U}{R1} \right\}$$

Для организации списка решений сначала найден ток в ветви 1 схемы в символьном виде

```
QQ = Solve[Eqq[{1}], Varc][{1}]
{i[1][t] -> i[2][t]}
```

и выписан вектор всех токов в символьном виде

$$\mathbf{III} = \mathbf{II} /. \mathbf{QQ} /. \mathbf{SS}$$

$$\left\{ \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L}} U}{R1}, \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L}} U}{R1} \right\}$$

Подставив численные значения исходных данных, получен вектор токов в численном виде

```
Simplify[III /. SC]
{2 - 2 e^{-2. t}, 2 - 2^{-2. t}}
```

Можно убедиться, что выполнено очевидное равенство  $i_1 = i_2$ .

```
Print["Токи как функции времени:
i = ", III[{1}]]
```

Ток как функция времени определяется следующим образом:

$$i = \frac{U - e^{-\frac{R1 t}{L}} U}{R1}$$

#### *Исследование решения и построение кривой тока*

Для построения графика зависимости тока от времени (рис. Л.7.3) длительность импульса обозначена за  $TT$  (на рис. Л.7.2  $TT = t_2$ ).

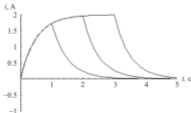


Рис. Л.7.3

Ниже приведена программа получения списка (с помощью функции Table) зависимостей тока как функций времени. Сначала построен график зависимости тока для промежутка времени  $0 \leq t \leq t_0$ . Затем в момент времени  $t = t_0$  источник ЭДС отключен и при  $t \geq t_0$  ее значение равно нулю. При этом составлена заново система линейных алгебраических и дифференциальных уравнений I порядка с учетом ненулевых начальных условий (уже при  $t = t_0$ ) и решена система уравнений путем исключения алгебраических переменных и решения полученной задачи Коши. Далее построен график зависимости тока для промежутка времени  $t \geq t_0$ . Комбинируя графики с помощью применения функции Show внутри внешней функции Table, можно получить вывод графика тока с возможностью анимации – на одном рисунке можно увидеть динамику кривой в зависимости от изменения параметров импульса (длительности). За это отвечает переменная  $t_0 = TT$ , которая меняется от 1 до 3 с шагом 0.2.

```

Table[{P1 = Plot [Evaluate [VW/.SC], {t, 0, TT},
      PlotRange -> {{0, TT}, {0, 1}},
      DisplayFunction -> Identity];
BC = Thread [Equal [Varr, VW] /. {t -> TT}];
E1[t_] := 0;

AAA = Simplify[Union[Eqq, BC]];
AAA /. SC;
BBB = Thread[Equal[Varr, Varr/.Solve[AAA, Var] [[1]]]];
Simplify[DSolve[Union[BBB, BC], Varr, t] [[1]];
VV1 = Varr /.
      Simplify[DSolve[Union[BBB, BC], Varr, t] [[1]];
VV /. SC;
TT1 = 5;
P2 = Plot [Evaluate [VV1 /. SC], {t, TT, TT1},
      PlotRange -> {{0, TT1}, {-1, 1}},
      DisplayFunction -> Identity];
Show[P1, P2, PlotRange -> {{0, TT1}, {-1, 2}},
      DisplayFunction -> $DisplayFunction],
{TT, 1, 3, .2}];

```

На рис. Л.7.3 приведены лишь три кривые изменения тока в течение всего переходного процесса из семейства графиков для  $TT = 1, 2, 3$ . В этих точках происходит перелом графика функции тока.

```
Show[{Y1, Y2, Y3}, AxesLabel -> {"t, сек", "i, ампер"}];
```

### Задание № 2

Цепь, схема которой содержит последовательно соединенные сопротивление и емкость, подключена к источнику прямоугольных импульсов ЭДС с амплитудой  $U$  и длительностью  $t_c$  (рис. Л.7.2). Дано:  $C_2 = 1$ ,  $R_1 = 5$ ,  $U = 10$ . Найти уравнения тока  $i$  и напряжения на емкости  $u_C$  в зависимости от времени. Построить кривые  $i$  и  $u_C$ .

Схема для указанной электрической цепи приведена на рис. Л.7.4.

Действие прямоугольного импульса моделируется двумя коммутациями: включением под постоянное напряжение и выключением цепи постоянного тока при  $t_c$ . Ключ можно представить в виде активного сопротивления, мгновенно принимающего значения 0 и  $\infty$ .

На схеме расставлены и пронумерованы фиктивные узлы так, чтобы в ветви 1 схемы присутствовало активное сопротивление и источник ЭДС, а в ветви 2 – емкость. Так как в ветви 2 отсутствует активное сопротивление, введено фиктивное сопротивление  $r$ , которому потом присваивается значение, равное нулю.



Рис. Л.7.4

Матрица соединений данной схемы такова:

```
A // MatrixForm
{
  1  -1
 -1  1
}
```

Ввод исходных данных

```
R = {R1, 1 / r};
CC = {0, C2};
```

$$L = \{0, 0\};$$

$$EE = \{E1[t], 0\};$$

и задание числовых значений исходных данных:

$$SC = \{C2 \rightarrow 1, R1 \rightarrow 5, U \rightarrow 10\};$$

Для составления уравнений сначала сформированы матрицы сопротивлений и индуктивностей. Так как в исходной схеме индуктивностей нет, то соответствующая ей матрица будет нулевой.

$$RR = \text{DiagonalMatrix}[R];$$

$$LLL = \text{DiagonalMatrix}[L];$$

Аналогично заданию № 1 сформированы необходимые для работы векторы токов и напряжений, вектор начальных условий для токов при постановке задачи Коши для переходного режима.

$$II = \text{Table}[i[k][t], \{k, 1, p\}]$$

$$UU = \text{Table}[\text{If}[(CC[[k]]/.SC) \neq 0, u[k][t], 0],$$

$$\{k, 1, p\}]$$

$$IIr = \text{Table}[\text{If}[(L[[k]]/.SC) \neq 0, i[k][t], 0],$$

$$\{k, 1, p\}]$$

$$\{i[1][t], i[2][t]\}$$

$$\{0, u[2][t]\}$$

$$\{0, 0\}$$

Левые части уравнений сформированы аналогично заданию № 1.

$$Eq = \text{DeleteCases}[\text{Union}[\text{Table}[\text{If}[(CC[[k]]/.SC) \neq 0,$$

$$CC[[k]] D[UU, t][[k]] - II[[k]], 0], \{k, 1, p\}],$$

$$\text{Delete}[A, II, 1],$$

$$\text{NullSpace}[A].(RR.II + UU + LLL.D[II, t] - EE), 0];$$

$$Eqq = \text{Thread}[Eq == 0]$$

В результате получена следующая система уравнений:

$$-i[1][t] + i[2][t] = 0,$$

$$R1 i[1][t] + \frac{i[2][t]}{r} + u[2][t] = 0,$$

$$-i[2][t] + C2 u[2]'[t] = 0$$

При формировании начальных условий ( $t=0$ ) пусть сначала значение ЭДС равно нулю.

$$SN = \{E1[t] \rightarrow 0\};$$

Начальные условия получены по аналогии с заданием 1:

$$\{u[2][0] == 0\}$$

*Составление и решение уравнений*

Программа для составления и решения системы уравнений имеет следующий вид:

```

El[t_] := U;
AAA = Union [Eqq, BC] /. {r -> Infinity};
S = Solve[AAA, Var] [[1]];

S1 = Varr /. S;
BBB = Thread[Equal[Varr, S1]];
SS = Simplify[DSolve[Union[BBB, BC], Varr, t] [[1]]];
SSS = Simplify[Flatten [{SS, D [SS, t]}]];
VV = Simplify[Varr /. Simplify[SSS]];
Varc = Complement[Var, Varr];
VC = Simplify [Varc /. S /. SSS];

```

Решение для напряжения выглядит следующим образом:

$$\{u[2][t] \rightarrow U - e^{-\frac{t}{CR_0}} U\}$$

*Исследование решения и построение кривой тока и напряжения*

Аналогично заданию 1 была составлена программа для вычисления тока и напряжения на емкости как функций времени и построения временных зависимостей этих переменных (рис. Л.7.5).

```

Table[{P1 = Plot [Evaluate [VV /. SC], {t, 0, TT},
      PlotRange -> {{0, TT}, {0, 1}},
      DisplayFunction -> Identity];
P3 = Plot [Evaluate [VC /. SC], {t, 0, TT},
      PlotRange -> {{0, TT}, {0, 1}},
      PlotStyle -> Dashing[{0.05, 0.025}},
      DisplayFunction -> Identity];
BC = Thread [
Equal [Varr, VV] /. {t -> TT});
El[t_] := 0;

```



```

AAA = Simplify[Union[Eqq, BC] /. {r -> Infinity}];
AAA /. SC;
BBB = Thread[Equal[Varr, Varr /. Solve[AAA, Var][[1]]]];
SS = Simplify[DSolve[Union[BBB, BC], Varr, t][[1]];
VV1 = Varr /.
    Simplify[DSolve[Union[BBB, BC], Varr, t][[1]];
VV /. SC;
SSS = Simplify[Flatten[{SS, D[SS, t]}]];
Varc = Complement[Var, Varr];
VCl = Simplify[Varc /. S /. SSS];
TT1 = 5;

P2 = Plot[Evaluate[VV1 /. SC], {t, TT, TT1},
    PlotRange -> {{0, TT1}, {-1, 10}},
    DisplayFunction -> Identity];
P4 = Plot[Evaluate[VCl /. SC], {t, TT, TT1},
    PlotRange -> {{0, TT1}, {-1, 10}},
    PlotStyle -> Dashing[{0.05, 0.025}],
    DisplayFunction -> Identity];
Show[P1, P2, P3, P4, PlotRange -> {{0, TT1}, {-1, 6}},
    AxesLabel -> {"t, сек", "i, ампер; u, вольт"},
    DisplayFunction -> $DisplayFunction],
{TT, 1, 3, .5}];

```

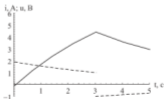


Рис. Л.7.5

На рис. Л.7.5 сплошной линией показана кривая для напряжения, штрихованной — для тока. Рисунок соответствует длительности импульса ЭДС  $t_{\text{э}} = 3$ .

Разрыв токовой зависимости возник из-за того, что действие прямоугольного импульса моделируется двумя коммутациями: включением под постоянное напряжение и выключением цепи при  $t_2 = 3$ . Так как напряжение на емкости подчинено законам коммутации, в момент времени  $t = 3$  оно не может измениться скачком. Видно, что изменение – плавное. В отличие от напряжения ток на емкости законам коммутации не подчиняется, поэтому в момент коммутации  $t = 0$  и  $t = 3$  изменяется скачком, что хорошо иллюстрирует график.

### Задание № 3

Найти ток в индуктивности (рис. Л.7.6) для промежутков времени и  $t \geq 2.5 \cdot 10^{-3}$ , если  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 5$ ,  $L = 4 \cdot 10^{-3}$  ([16], с. 366).

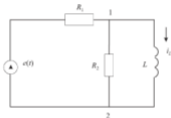


Рис. Л.7.6

Значение ЭДС изменяется по закону, приведенному на рис. Л.7.7.

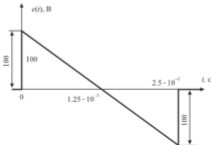


Рис. Л.7.7

## Описание схемы

Программа аналогична программе в заданиях № 1 и № 2, отмечены только отличия.

Задание графа:

$$L = \{(1, 2), (2, 1), (2, 1)\};$$

Изображение графа приведено на рис. Л.7.8.

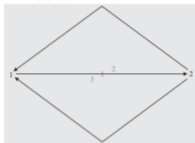


Рис. Л.7.8

Матрица соединений данной схемы такова:

$$A // \text{MatrixForm} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Описаны исходные данные и заданы значения исходных данных:

$$\begin{aligned} R &= (R1, R2, 0); \\ CC &= (0, 0, 0); \\ LL &= (0, 0, L3); \\ EE &= (E1[t], 0, 0); \\ SC &= (L3 \rightarrow 0.004, R1 \rightarrow 2, R2 \rightarrow 5); \end{aligned}$$

Формирование уравнений аналогично тому, как это сделано в заданиях № 1 и № 2. Приводится только результат:

$$\begin{aligned} -E1[t] + R1 i[1][t] + R2 i[2][t] &= 0, \\ -i[1][t] + i[2][t] + i[3][t] &= 0, \\ -E1[t] + R1 i[1][t] + L3 i[3]'[t] &= 0 \end{aligned}$$

Аналогично сформированы начальные условия:

$$\text{Out}[34] = \{i[3][0] == 0\}$$

Задан закон изменения ЭДС:

$$\text{E1}[t_] := 100 (1 - 800 t);$$

Решение уравнений (подобно заданию №1 и №2) даст зависимость для тока, протекающего через индуктивность:

$$(162. - 162. e^{-357.143t} - 40000. t)$$

Попутно получены выражения для токов в остальных ветвях схемы:

$$\begin{aligned} & (130. - 115.714 e^{-357.143t} - 40000. t, \\ & -32. + 46.2857 e^{-357.143t} + 1.49012 \times 10^{-12} t) \end{aligned}$$

Последние слагаемые в полученных выражениях, так называемые «вековые слагаемые», – это результат накопления ошибок вычислений.

#### *Исследование решения и построение кривой тока*

Из условия задания

$$T T = 0.0025;$$

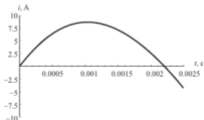


Рис. Л.7.9

Построен график зависимости тока через индуктивность от времени (рис. Л.7.9) для промежутка времени  $0 \leq t \leq 2.5 \cdot 10^{-3}$ :

```
P1 = Plot[Evaluate[VV /. SC], {t, 0, TT},
PlotRange -> {{0, TT}, {-10, 10}},
AxesLabel -> {"t, мс", "i, А"}];
```

В момент времени  $t = 2.5 \cdot 10^{-3}$  ЭДС отключено и при  $t \geq 2.5 \cdot 10^{-3}$  ее значение равно нулю. Для этого отрезка времени система линейных алгебраических и дифференциальных уравнений I порядка составлена заново, учтены начальные условия (уже при  $t = TT$ ). Затем решена система уравнений путем исключения алгебраических переменных и решения полученной задачи Коши.

```
BC = Thread [Equal [Varr, VV] /. {t -> TT}];
E1[t_] := 0;
AAA = Simplify [Union [Eqq, BC]] /. SC;
BBB = Thread[Equal[Varr,
  Varr /. Solve[AAA, Var] [[1]]]];
VV1 = Varr /.
  Simplify[DSolve[Union [BBB, BC], Varr, t] [[1]]];
```

После этого построим график зависимости тока через индуктивность от времени (рис. Л7.10) для промежутка времени  $t \geq 2.5 \cdot 10^{-3}$ :

```
TT1 = 0.01;
```

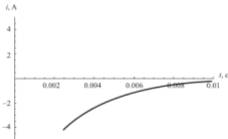


Рис. Л7.10

Комбинируя графики, представленные на рис. Л7.9 и рис. Л7.10, можно получить график изменения тока через индуктивность в течение всего переходного процесса (рис. Л7.11).

```
Show[P1, P2, PlotRange -> {{0, TT1}, {-10, 10}}];
```

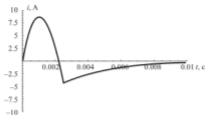


Рис. Л.7.11

**Задание № 4**

Найти ток и напряжение на емкости при включении цепи  $R, C$  (рис. Л.7.12) на экспоненциально изменяющееся напряжение длительности  $t = 3$  ([16], с. 429)

$$u(t) = \begin{cases} U \exp(-\alpha t) & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \end{cases}, \text{ где } \alpha > 0.$$



Рис. Л.7.12

Приложенное напряжение заменено действием источника ЭДС ( $e$ ). Пронумерованы фиктивные узлы 1 и 2.

Схема описана следующим графом:

$$\mathbf{L} = \{\{1, 2\}, \{2, 1\}\};$$

Матрица соединений данной схемы:

**A // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Описаны исходные данные и заданы их числовые значения:

$$R = \{R1, 0\};$$

$$CC = \{0, C2\};$$

$$LL = \{0, 0\};$$

$$EE = \{E1[t], 0\};$$

$$SC = \{C2 \rightarrow 1, R1 \rightarrow 1, U \rightarrow 1\};$$

Для описания экспоненциально изменяющегося напряжения необходимо задать константу  $\alpha$  (например,  $\alpha = 4$ ):

$$SCa = \{a \rightarrow 4\};$$

Формирование уравнений происходит аналогично алгоритму в заданиях № 1 и № 2. В отличие от предыдущих заданий для данной схемы вектор напряжений уже ненулевой, появилось напряжение в ветви 2, в которой есть емкость:

$$\{0, u[2][t]\}$$

Расчетные уравнения представляют собой уравнения, составленные по первому и второму законам Кирхгофа, и уравнение связи

$$\begin{aligned} -i[1][t] + i[2][t] &= 0, \\ -E1[t] + R1 i[1][t] + u[2][t] &= 0, \\ -i[2][t] + C2 u[2]'[t] &= 0 \end{aligned}$$

По условию задания пусть сначала значение ЭДС равно нулю.

$$SN = \{E1[t] \rightarrow 0\};$$

Тогда полученные начальные условия таковы:

$$\{i[1]'[t] \rightarrow 0, i[2]'[t] \rightarrow 0, u[2]'[t] \rightarrow 0\}$$

Переменные задачи:

$$\{i[1][t], i[2][t], u[2][t]\}$$

Система уравнений решена относительно переменных токов и напряжений.

$$\{u[2][t] \rightarrow E1[t], i[1][t] \rightarrow 0, i[2][t] \rightarrow 0\}$$

Найдены начальные условия для системы дифференциальных уравнений

$$\{u[2][0] = 0\}.$$

*Составление и решение уравнений*

Уравнения и начальные условия объединены в единый список.

```
AAA = Union[Eqq, BC]
(-i[1][t] + i[2][t] == 0, u[2][0] == 0,
 -E1[t] + R1i[1][t] + u[2][t] == 0,
 -i[2][t] + C2u[2]'[t] == 0)
```

Введен закон изменения ЭДС.

```
E1[t_] := UExp[-a t]
```

После этого решена задача Коши для дифференциального уравнения.

Решение (в списке приведены токи для ветвей 1 и 2 схемы и последнее выражение – напряжение на емкости) выглядит следующим образом:

$$\left( \frac{C2 \left( a e^{-at} - e^{-\frac{t}{C2R1}} \right) U}{-1 + aC2R1}, \frac{C2 \left( a e^{-at} - e^{-\frac{t}{C2R1}} \right) U}{-1 + aC2R1}, \frac{\left( -e^{-at} - aC2e^{-\frac{t}{C2R1}} R1 \right) U}{-1 + aC2R1} \right)$$

Ответ можно оформить следующим образом:

```
Print["Токи в ветвях системы: i1 =", VV[[1]],
      ", i2 =", VV[[2]]]
```

Токи в ветвях системы: i1 =

$$\frac{C2 \left( a e^{-at} - e^{-\frac{t}{C2R1}} \right) U}{-1 + aC2R1}, \quad i2 = \frac{C2 \left( a e^{-at} - e^{-\frac{t}{C2R1}} \right) U}{-1 + aC2R1}$$

```
Print["Напряжение на емкости: uC =", VV[[3]]]
```

$$\text{Напряжение на емкости: } uC = \frac{\left( -e^{-at} - e^{-\frac{t}{C2R1}} R1 \right) U}{-1 + aC2R1}$$

*Исследование решения и построение кривых тока и напряжений*  
По условию задания

$$T\tau = 3; a = 20;$$



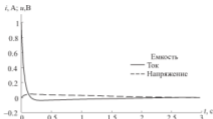


Рис. Л.7.13

и построены графики (рис. Л.7.13) зависимости тока и напряжения на емкости от времени. Для создания подписи к графику подключен необходимый пакет расширения

```
<<Graphics`Legend`
```

```
Plot[{Evaluate[VV[[2]]/.SC],
      Evaluate[VV[[3]]/.SC]}, {t, 0, TT},
PlotStyle -> {Thickness[.005],
              Dashing[{0.02, 0.02}]},
AxesLabel -> {"t, сек", "i, A; u, B"},
PlotRange -> {-1.2, 1.2},
PlotLegend -> {"Ток", "Напряжение"},
LegendPosition -> {0.4, -.5},

LegendTextSpace -> 8, LegendLabel -> "Емкость",
LegendLabelSpace -> 0.6,
LegendShadow -> {.05, -.05}];
```

### Задание № 5

Импульс в форме полуволны синусоиды (рис. Л.7.14) подан в цепь, содержащую последовательное соединение  $R=10$  и  $L=0.1$  ([18], с. 344) (рис. Л.7.15). Найти уравнение тока  $i$  в зависимости от времени. Построить кривую  $i(t)$ .

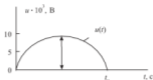


Рис. Л.7.14



Рис. Л.7.15

Приложенное напряжение заменено действием источника ЭДС ( $e$ ), пронумерованы фиктивные узлы 1 и 2. Алгоритм написания программы такой же, что и в предыдущих заданиях этой лабораторной работы, отмечены только основные моменты и отличия.

Задаче графа:

$$\mathbf{L} = \{(1, 2), (2, 1)\};$$

Матрица соединений данной схемы такова:

$\mathbf{A}$  // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исходные данные и их числовые значения заданы следующим образом:

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{R1}, 0\};$$

$$\mathbf{CC} = \{0, 0\};$$

$$\mathbf{LL} = \{0, \mathbf{L2}\};$$

$$\mathbf{EE} = \{\mathbf{E1}[t], 0\};$$

$$\mathbf{SC} = \{\mathbf{L2} \rightarrow 0.1, \mathbf{R1} \rightarrow 10, \mathbf{U} \rightarrow 0.01\};$$

Сформированы уравнения задачи

$$\begin{aligned} -i[1][t] + i[2][t] &= 0, \\ -E1[t] + R1 i[1][t] + L2 i[2]'[t] &= 0 \end{aligned}$$

и начальные условия

$$\{i[2][0] == 0\}$$

Закон изменения ЭДС определен (рис. Л7.14) по формуле

$$u(t) = U_m \sin \frac{\pi t}{T}$$

Очевидно, что при  $t = 0$ ,  $t = t_u$   $u(t) = 0$ . При  $t \geq t_u$   $u(t) = 0$ .

В обозначениях системы *Mathematica* эта формула запишется следующим образом:

$$\mathbf{E1[t\_]} := \mathbf{USin[Pi t/TT];}$$

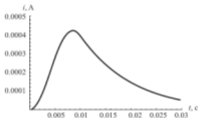


Рис. Л.7.16

В результате решения задачи, используя алгоритмы заданий №1 и №2, получена зависимость тока от времени:

$$\mathbf{VC[[1]] // TraditionalForm}$$

$$\frac{\mathbf{TTU} \left( -\pi \cos \left( \frac{\pi t}{\mathbf{TT}} \right) L2 + e^{-\frac{\pi t}{\mathbf{TT}}} \pi L2 + R1 \mathbf{TT} \sin \left( \frac{\pi t}{\mathbf{TT}} \right) \right)}{\pi^2 L2^2 + R1^2 \mathbf{TT}^2}$$

Для построения графика зависимости тока от времени задана длительность импульса  $t_u = 0,01$  и интервал времени  $[0, t_1]$ , для которого построен график (рис. Л.7.16):

$$\mathbf{TT = 0.01;}$$

$$\mathbf{TT1 = 0.03;}$$

---

## Лабораторная работа 8. Расчет электрической цепи при резонансе

### Резонансные явления в электрических цепях и частотные характеристики

Колесательными или резонансными цепями называются электрические цепи, в которых могут возникать явления резонанса  $U$  или  $I$ .

Наблюдаются два вида резонанса: резонанс напряжений и резонанс токов.

1) *Резонанс напряжений* наблюдается в цепи с последовательным соединением  $R, L, C$  при определенной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , которая называется резонансной частотой. В радиотехнике такая цепь называется последовательным колебательным контуром. При резонансе  $U$  реактивное сопротивление контура равно нулю  $X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ , угол сдвига фаз между напряжением и током также равен нулю  $\varphi = \arctg \frac{X}{R} = 0$ , следовательно, контуром реактивная мощность не потребляется.

При резонансе  $U_L, U_C > U$ , если выполняется неравенство  $R < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ , где  $\rho$  – характеристическое или волновое сопротивление контура.

$$\text{Добротность контура равна: } Q = \frac{U_{CO}}{U} = \frac{U_{LC}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R}.$$

Величина  $d = \frac{1}{Q}$  называется затуханием контура.

При синусоидальном токе ( $i = I_m \sin(\omega t + \Psi)$ ) полная электромагнитная энергия цепи определяется следующим образом:

$$W_{\text{эл}} + W_{\text{с}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_{\text{св}}^2}{2} = \text{const.}$$

Анализируя это выражение, можно сказать, что в режиме резонанса энергия, запасенная в контуре при подключении к источнику, «колеблется» между  $L$  и  $C$ . Источник только покрывает расход энергии на участке с  $R$ .

Зависимости полных ( $Z, Y$ ), реактивных ( $X, B$ ), активных  $R, G$  сопротивлений и проводимостей контура и угла сдвига фаз между напряжением и током от частоты ( $\omega$ ) называются частотными.

Характерное свойство функции  $X(\omega)$  заключается в том, что всегда  $\frac{dX}{d\omega} > 0$ . Характерное свойство функции  $B(\omega)$  заключается в том, что всегда  $\frac{dB}{d\omega} < 0$ .

При прохождении точки резонанса угол  $\varphi$  меняет знак. Если  $R = 0$ , то при  $\omega = \omega_0$  величина  $\varphi$  изменяется скачком от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Это явление называется опрокидыванием фазы.

Зависимости тока  $I$  и напряжений  $U_L, U_C$  от частоты называются резонансными характеристиками:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_L = \omega L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Частотная область  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ , в которой  $\frac{I}{I_0} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , называется полосой пропускания контура. Чем меньше  $Q$ , тем полоса пропускания частот шире. Величина  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  называется абсолютной расстройкой контура по частоте,  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  называется относительной расстройкой,  $Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q = \frac{X}{R}$  называется обобщенной расстройкой.

2) *Резонанс токов* наблюдается в цепи с параллельным соединением  $R, L, C$ . В радиотехнике такая цепь называется параллельным колебательным контуром. При резонансе  $I$  (при резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ) реактивная проводимость контура равна нулю  $B = \frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0$ , угол сдвига фаз между напряжением и током также равен нулю  $\varphi = \arctg \frac{B}{G} = 0$ , следовательно, контуром реактивная мощность не потребляется.

При резонансе имеет место следующее неравенство:  $I_L, I_C > I_G$ , если активная проводимость не больше емкостной или индуктивной проводимостей:

$G \leq \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$  ( $\gamma$  – характеристическая или волновая проводимость).

Добротность определяется следующим выражением:

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_G} = \frac{I_{C0}}{I_G} = \frac{U \omega_0 C}{UG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\gamma}{G}$$

Величина  $d = \frac{1}{Q}$  называется затуханием контура.

При синусоидальном напряжении  $u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$  энергия электромагнитного поля определяется выражением  $W_m + W_c = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LU_m^2}{2} = \text{const}$ . Из этого выражения видно, что энергия переходит из  $C$  в  $L$  и обратно. Источник только покрывает расход энергии в ветви с активной проводимостью  $G$ .

Зависимости полных ( $Z, Y$ ), реактивных ( $X, B$ ), активных  $R, G$  сопротивлений и проводимостей контура и угла сдвига фаз между напряжением и током от частоты называют частотными.

При прохождении точки резонанса угол  $\varphi$  меняет знак. Если  $G = 0$ , то при  $\omega = \omega_0$  величина  $\varphi$  изменяется скачком от  $\frac{\pi}{2}$  до  $-\frac{\pi}{2}$ , т. е. наблюдается опрокидывание фазы.

При резонансе выполняется следующее условие  $X = 0$ , тогда полное сопротивление определяется выражением  $Z = R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{1}{G} = \rho Q = \omega_0 L Q$ , т. е. чем больше  $Z$ , тем больше  $Q$ .

Резонансные характеристики для резонанса токов по форме аналогичны характеристикам при резонансе  $U$  (нужно только заменить  $U$  на  $I$ ) и описываются следующими выражениями

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}; I_L = \frac{U}{\omega L}; I_C = U \omega C.$$

### Задание № 1

Схема электрической цепи состоит из последовательно соединенных активного сопротивления  $R = 10$ , индуктивности  $L = 10^{-4}$  и емкости  $C = 10^{-10}$ . К цепи подведено напряжение  $u = 1 \cdot \sin \omega t$ .

1). Вычислить реактивное ( $X$ ) и полное сопротивление ( $Z$ ) цепи, ток  $I$ , напряжение на конденсаторе  $u_c$ , активную мощность  $P$ , сдвиг фаз  $\varphi$  между приложенным напряжением и током, сдвиг между приложенным напряжением и напряжением на конденсаторе. Для частоты питающего напряжения принять  $\omega = 1.002 \cdot 10^7$ .

2). Определить резонансную частоту  $\omega_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$  и затухание  $d$ , резонансный ток  $I_0$ , напряжение на индуктивности  $U_L$  и на емкости  $U_C$ , расходуемую в цепи мощность  $P_0$  при резонансе. Вычислить абсолютное значение полосы пропускания контура. Исследовать зависимость добротности контура от полосы пропускания.

3). Построить амплитудные и фазовые характеристики тока и напряжения на конденсаторе в зависимости от отношения  $\frac{\omega}{\omega_0}$ .

#### Описание схемы

Схема электрической цепи приведена на рис. Л.8.1.

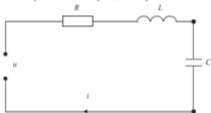


Рис. Л.8.1

Заданы исходные данные:

$$SSS = \{U \rightarrow 1, CC \rightarrow 10^{-10}, L \rightarrow 10^{-4}, R \rightarrow 10\};$$

Пункт 1 задания.

Задано значение частоты питающего напряжения в виде подстановки:

$$SSS1 = \{\omega \rightarrow 1.002 \cdot 10^7\};$$

Вычислено реактивное сопротивление цепи:

$$X = \omega L - 1/CC/\omega$$

$$X / . SSS / . SSS1$$

$$3.99601$$

Определено полное сопротивление цепи:

$$Z = R + XI$$

$$R + i \left( -\frac{1}{CC \omega} + L \omega \right)$$

По формулам

$$II = U/\text{sqrt}[X^2 + R^2]$$

$$UU = II / CC / \omega$$

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( -\frac{1}{CC \omega} + L \omega \right)^2}}$$

$$\frac{U}{CC \omega \sqrt{R^2 + \left( -\frac{1}{CC \omega} + L \omega \right)^2}}$$

найлены численные значения тока  $I$  и напряжения на конденсаторе  $U_C$

$$II / . SSS / . SSS1$$

$$0.0928604$$

$$UU / . SSS / . SSS1$$

$$92.6751$$

Вычислена полная мощность

$$P = II U/2$$

$$\frac{U^2}{2 \sqrt{R^2 + \left( -\frac{1}{CC \omega} + L \omega \right)^2}}$$

Ее численное значение равно

$$P / . SSS / . SSS1$$

$$0.0464302$$



Приложенное напряжение  $u = 1 \cdot \sin \omega t$  имеет начальную фазу  $\psi_u = 0$ , найдена начальная фаза тока

$$\begin{aligned} \psi I &= \text{Arg}[II] / . \text{SSS} / . \text{SSS1} \\ &= -0.380162 \end{aligned}$$

Сдвиг начальных фаз между приложенным напряжением и током равен

$$\begin{aligned} \psi &= \psi U - \psi I \\ &= 0.380162 \end{aligned}$$

Угол сдвига фаз вычислен по формуле  $\psi = \arctg \frac{X}{R}$ :

$$\begin{aligned} \text{ArcTan}[X/R] / . \text{SSS} / . \text{SSS1} \\ &= 0.380162 \end{aligned}$$

Угол сдвига фаз между приложенным напряжением и напряжением на конденсаторе равен

$$\begin{aligned} \psi UC &= \text{ArcTan}[UU] / . \text{SSS} / . \text{SSS1} \\ &= 1.56001 \\ \psi I &= \psi U - \psi UC \\ &= -1.56001 \end{aligned}$$

Пункт 2 задания.

Резонансная частота  $\omega_0$  найдена как положительный корень уравнения условия резонанса  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$  (реактивное сопротивление равно нулю). В алгоритме корни уравнения найдены с помощью функции Reduce. Далее эти корни с помощью функции ToRules преобразованы в список решений, из которого затем выбирается положительное решение. Для упрощения выражений, которые сначала найдены в символьном виде, выдвинуто предположение о положительности параметров схемы электрической цепи.

```
$Assumptions = {L > 0, CC > 0};
 $\omega 0 = \omega / . \text{ToRules} [$ 
  Simplify [Reduce [{L  $\omega - 1 / \omega / \text{CC} == 0, \omega > 0$ },  $\omega$ ]]
   $\frac{1}{\sqrt{\text{CC L}}}$ 
```

Получено численное значение резонансной частоты:

$$\omega_0 \text{ / . SSS // N}$$

$$1. \times 10^7$$

По формуле  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\rho = \text{Sqrt [L/CC]};$$

вычислено значение характеристического сопротивления

$$\rho \text{ / . SSS // N}$$

$$1000.$$

Добротность определена по формуле  $Q = \frac{\rho}{R}$

$$Q = \text{Simplify} [\rho / R, \{L > 0, CC > 0\}]$$

$$\frac{\sqrt{\frac{LL}{CC}}}{R}$$

затем вычислено ее численное значение

$$Q \text{ / . SSS // N}$$

$$100.$$

Численное значение затухания  $d = \frac{1}{Q}$  вычислено таким образом:

$$d = \text{Simplify} [1/Q, \{L > 0, CC > 0\}];$$

$$d \text{ / . SSS // N}$$

$$0.01$$

По формуле  $I_0 = \frac{U}{R}$

$$I_0 = U/R;$$

найдено численное значение резонансного тока

$$I_0 \text{ / . SSS // N}$$

$$0.1$$

Напряжение на индуктивности при резонансе вычислено по формуле  $U_{L_0} = \omega_0 I_0 L$ :

$$UL0 = \text{FullSimplify}[\omega 0 I0 L, \{L > 0, CC > 0\}]$$

$$\frac{LU}{\sqrt{CC L R}}$$

Его численное значение равно

$$UL0 /. SSS // N$$

$$100.$$

Напряжение на емкости при резонансе вычислено по формуле

$$U_{C_0} = \frac{I_0}{\omega_0 C}$$

$$UC0 = \text{FullSimplify}[I0/CC/ \omega 0, \{L > 0, CC > 0\}]$$

$$\frac{LU}{\sqrt{CC L R}}$$

Его численное значение равно

$$UC0 /. SSS // N$$

$$100.$$

Расходуемая в цепи мощность при резонансе  $P_0 = \frac{I_0 U}{2}$ :

$$P0 = I0 U/2$$

$$\frac{U^2}{2R}$$

Ее численное значение равно

$$P0 /. SSS // N$$

$$0.05$$

Вычислено абсолютное значение полосы пропускания контура

$$\omega /. \text{Solve}[U/R/\text{Sqrt}[2]==$$

$$U \omega / \text{Sqrt}[\{-\omega^2 L + 1/CC\}^2 + (R \omega)^2], \omega] /$$

$$SSS // N$$

$$\{-1.00501 \times 10^7, -9.95012 \times 10^6,$$

$$9.95012 \times 10^6, 1.00501 \times 10^7\}$$

Последние два значения в этом списке – нижняя и верхняя границы полосы пропускания.

Для исследования зависимости добротности контура от ширины полосы пропускания вычислено значение полосы пропускания в символьном виде. Сначала рассчитаны значения всех резонансных частот:

$$\omega = \omega / . \text{Solve}[\text{U/R/Sqrt}[2] == \text{U } \omega / \text{Sqrt} [ (-\omega^2 2L + 1/CC)^2 + (R\omega)^2 ], \omega]$$

$$\left\{ \frac{-CCR - \sqrt{CC}\sqrt{4L + CCR^2}}{2CC L}, \frac{CCR - \sqrt{CC}\sqrt{4L + CCR^2}}{2CC L}, \right.$$

$$\left. \frac{-CCR + \sqrt{CC}\sqrt{4L + CCR^2}}{2CC L}, \frac{CCR + \sqrt{CC}\sqrt{4L + CCR^2}}{2CC L} \right\}$$

Разность между верхней и нижней границами полосы пропускания даст значение полосы пропускания:

$$\text{XX} = \text{Simplify}[\omega[[4]] - \omega[[3]]]$$

$$\frac{R}{L}$$

Найдено значение активного сопротивления как функции от ширины полосы пропускания  $\Delta\omega$ , подставлено в выражение добротности и получена зависимость добротности  $Q$  от ширины полосы пропускания  $\Delta\omega$ :

$$\text{R} = \text{R} / . \text{Solve}[\Delta\omega = \text{XX}, \text{R}][[1]]$$

$$\text{L } \Delta\omega$$

$$\text{\$Assumptions} = \{L > 0, CC > 0\};$$

$$\text{Q} = \text{Simplify}[\text{Q}]$$

$$\frac{1}{\sqrt{CC L} \Delta\omega}$$

$$\text{Q} = \text{Q} / . \text{SSS}$$

$$\frac{10000000}{\Delta\omega}$$

Построен график зависимости добротности от ширины полосы пропускания (рис. Л.8.2):

$$\text{Plot}[\text{Q}, \{\Delta\omega, 10^5, 10^6\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{" } \Delta\omega\text{"}, \text{"Q"}\}];$$

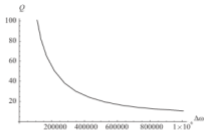


Рис. Л.8.2

Получена зависимость ширины полосы пропускания от значений емкости и индуктивности при заданной добротности

$$\Delta\omega = \omega_0 / Q \sqrt{4Q^2 + 1} / (Q \rightarrow 300) \\ \frac{\sqrt{360001}}{300\sqrt{CC L}}$$

Построен график этой зависимости (рис. Л.8.3)

```
Plot3D[Δω, {L, 10-5, 10-3},
{CC, 10-12, 10-10},
AxesLabel → {"L", "CC", "Δω"}];
```

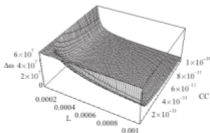


Рис. Л.8.3

Построен график зависимости  $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$  от частоты

$\omega$  (рис. Л.8.4), где  $\omega_0$  – резонансная частота, при различных значениях добротности (жирная кривая для  $Q=1$ , вторая кривая для  $Q=10$ ):

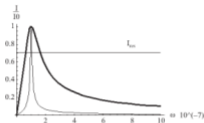


Рис. Л.8.4

Пункт 3 задания.

Для построения амплитудной характеристики тока сначала получена зависимость тока от частоты

$$II = \frac{U}{\omega \sqrt{(-\omega^2 L + 1/CC)^2 + (R \omega)^2}} / . SSS$$

$$\sqrt{100 \omega^2 + \left(10000000000 - \frac{\omega^2}{10000}\right)^2}$$

Вычислен резонансный ток

$$I_{Res} = U/R / . SSS // N$$

$$0.1$$

Получена зависимость напряжения на конденсаторе от частоты

$$UU = \frac{U}{\sqrt{(-\omega^2 L + 1/CC)^2 + (R \omega)^2}} / CC / . SSS$$

$$\sqrt{100 \omega^2 + \left(10000000000 - \frac{\omega^2}{10000}\right)^2}$$

Вычислено резонансное напряжение на емкости

$$U_{\text{Res}} = U/R/\omega_0/CC/.SSS//N$$

$$100.$$

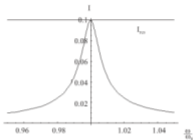


Рис. Л.8.5

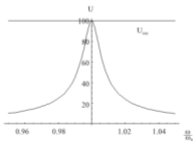


Рис. Л.8.6

Получено численное значение резонансной частоты

$$\omega_0 = \omega_0/.SSS//N$$

$$1.\times 10^7$$

Построены графики зависимостей тока и напряжения на конденсаторе в зависимости от  $\frac{\omega}{\omega_0}$  (рис. Л.8.5 и Л.8.6):

```
Plot[{Evaluate[II /. {ω → ω 0 x}], IRes},
{x, .95, 1.05}, AxesLabel → {"ω", "I"}];
Plot[{Evaluate[UU /. {ω → ω 0 x}], URes},
{x, .95, 1.05}, AxesLabel → {"ω", "U"}];
```

## Задание № 2

Для электрической цепи, схема которой приведена на рис. Л.8.1 (при тех же значениях параметров, что и в задании №1, только при  $C = 10^{-11}$ ), получить зависимость тока и напряжения на емкости от времени при различных значениях частоты приложенного напряжения ( $p$ ).

Система уравнений может быть составлена по аналогии с лабораторной работой 4. Так как схема простая, записано сразу дифференциальное уравнение II порядка. Это уравнение получено из уравнения Кирхгофа и уравнения связи:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u \Rightarrow L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}, \\ i = C \frac{du_c}{dt} \end{cases}$$

Исходные данные параметров схемы электрической цепи заданы подстановкой SSS. Так как порядок значений параметров очень мал, введен новый временной параметр  $t = t_1 \sqrt{L \cdot C}$  и переменные:

$$M = 100; T = 2 \text{ Pi Sqrt}[L CC];$$

Тогда дифференциальное уравнение относительно нового времени будет следующим:

$$\frac{1}{C} \frac{d^2i(t_1)}{dt_1^2} + \frac{R}{\sqrt{CL}} \frac{di(t_1)}{dt_1} + \frac{i(t_1)}{C} = p \cos \frac{pt_1}{\sqrt{CL}}$$

Дифференциальное уравнение решено при начальных условиях  $i(t_1) = 0$ ,  $\frac{di(t_1)}{dt_1} = 0$  с заданной частотой приложенного напряжения  $p$ .

$$p = 3 \cdot 10^7;$$

$$\text{Eq} = i''[t1] / CC + R / \text{Sqrt}[CCL] i'[t1] + i[t1] / CC == p \text{ Cos}[p t1 \text{ Sqrt}[L CC]];$$

$$\text{II}[t1] = i[t1] /. \text{NDSolve}[\{\text{Eq}, i[0] == .000, i'[0] == .000\}, i[t1], \{t1, 0, MT/\text{Sqrt}[LCC]\}];$$



Построен график зависимости тока (рис. Л.8.7):

```
Plot [Evaluate [II [t1]], {t1, 0, MT / Sqrt [L CC]},
  AxesLabel -> {"t1", "I"}];
```

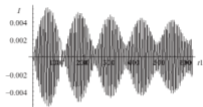


Рис. Л.8.7



Рис. Л.8.8

Рассмотрено явление биений – когда частота внешней силы близка к резонансной. По мере приближения частоты приложенного напряжения к резонансной частоте  $\omega = 3.1 \cdot 10^7$ ; можно наблюдать ярко выраженные биения (рис. Л.8.8). Наконец, при совпадении частот  $\omega = \omega_0$ ; можно наблюдать явление резонанса (рис. Л.8.9).

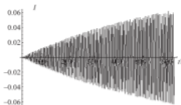


Рис. Л.8.9

Аналогично можно сформировать и решить задачу Коши для напряжения на емкости. В этом случае система дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = U \sin pt \\ i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \end{cases}$$

и приводится к следующему дифференциальному уравнению II порядка:

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = U \sin pt.$$

Вводится новое время  $t = t_1 \sqrt{L \cdot CC}$ , и полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_c(t_1)}{dt_1^2} + \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}} \frac{du_c(t_1)}{dt_1} + u_c(t_1) = U \sin(pt_1 \sqrt{LC})$$

решается по аналогии с предыдущим примером с учетом начальных условий для напряжения на емкости. Авторы предоставляют это сделать читателю самостоятельно.

### Задание № 3

Для электрической цепи, схема которой представлена на рис. Л.8.10, найти резонансные частоты и исследовать влияние значения активного сопротивления на резонансные явления. Численные значения параметров элементов цепи:  $L_1 = 10^{-4}$ ,  $L_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $C_1 = 10^{-11}$ ,  $C_2 = 3 \cdot 10^{-11}$ . К цепи подведено напряжение, описываемое формулой  $u = 1 \cdot \sin pt$ . В дальнейшем оно имитируется источником ЭДС.

Система уравнений Кирхгофа для этой схемы такова:

$$\begin{cases} L_1 \left( \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} \right) + u_{C_1} = \sin pt, \\ L_2 \frac{di_3}{dt} - u_{C_1} + u_{C_2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt}, \\ i_3 = C_1 \frac{du_{C_2}}{dt}. \end{cases}$$

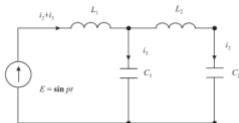


Рис. 1.8.10

Эта система приведена к уравнениям, содержащим в качестве переменных только токи:

$$\begin{cases} L_1 \left( \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{d^2 i_3}{dt^2} \right) + \frac{i_3}{C_1} = p \cos pt, \\ L_2 \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{i_3}{C_1} - \frac{i_2}{C_1} = 0. \end{cases}$$

Значения резонансных частот определены как корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -L_1 \omega^2 & -L_1 \omega^2 + \frac{1}{C_1} \\ -L_2 \omega^2 + \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Для этого определена матрица **K**

$$\mathbf{K} = \{ \{-L1 * \omega^2, -L1 * \omega^2 + 1/CC1\}, \\ \{-L2 * \omega^2 + 1/CC2, -1/CC1\} \};$$

и найдены корни характеристического уравнения с помощью функции **Root [expr, x]**. В символьном виде эти значения корней будут выглядеть следующим образом:

$$\omega == \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\left( \frac{1}{CC1 L1} + \frac{1}{CC1 L2} + \frac{1}{CC2 L2} - \frac{\sqrt{-4 CC1 CC2 L1 L2 + (-CC1 L1 - CC2 L1 - CC2 L2)^2}}{CC1 CC2 L1 L2} \right)} \right)$$

$$|| \omega == -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\left( \frac{1}{CC1 L1} + \frac{1}{CC1 L2} + \frac{1}{CC2 L2} - \frac{\sqrt{-4 CC1 CC2 L1 L2 + (-CC1 L1 - CC2 L1 - CC2 L2)^2}}{CC1 CC2 L1 L2} \right)} \right)$$

$$|| \omega == \sqrt{\left( \frac{1}{2 CC1 L1} + \frac{1}{2 CC1 L2} + \frac{1}{2 CC2 L2} + \frac{\sqrt{-4 CC1 CC2 L1 L2 + (-CC1 L1 - CC2 L1 - CC2 L2)^2}}{2 CC1 CC2 L1 L2} \right)}$$

$$\omega == -\sqrt{\left( \frac{1}{2 CC1 L1} + \frac{1}{2 CC1 L2} + \frac{1}{2 CC2 L2} + \frac{\sqrt{-4 CC1 CC2 L1 L2 + (-CC1 L1 - CC2 L1 - CC2 L2)^2}}{2 CC1 CC2 L1 L2} \right)}$$

Значения параметров электрической цепи заданы в виде подстановки **SSS**:

$$\mathbf{SSS} = \{L1 \rightarrow 10^{-4}, L2 \rightarrow 2 \cdot 10^{-4}, CC1 \rightarrow 10^{-11}, CC2 \rightarrow 3 \cdot 10^{-11}\};$$

Частоты резонансных колебаний электрической цепи найдены в численном виде:

$$\mathbf{Roots [\text{Det} [K /. \mathbf{SSS}] = 0, \omega] // N}$$

$$\omega == 1.03368 \times 10^7 \quad || \quad \omega = -1.03368 \times 10^7 \quad ||$$

$$\omega == 3.94945 \times 10^7 \quad || \quad \omega = -3.94945 \times 10^7$$

Первое и третье значения корней характеристического уравнения – значения резонансных частот.

При решении системы дифференциальных уравнений совершаем переход к новому параметру  $t_1 = \frac{t}{\sqrt{LC}}$ , где  $L$  и  $C$  – средние арифметические соответствующих параметров цепи. Введение новой переменной по времени обусловлено большим разбросом численных значений параметров (от  $10^{-11}$  до  $10^7$ ).

$$L = (L1 + L2) / 2 / .SSS;$$

$$CC = (CC1 + CC2) / 2 / .SSS;$$

Заданы:  $T$  – длительность периода,  $M$  – количество периодов:

$$M = 10; T = 2 Pi Sqrt[L CC];$$

Система дифференциальных уравнений при новом времени выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{L_1}{L \cdot CC} \left( \frac{d^2 i_2}{dt_1^2} + \frac{d^2 i_3}{dt_1^2} \right) + \frac{i_3}{C_1} = p \cos(p t_1 \sqrt{L \cdot CC}), \\ \frac{L_2}{L \cdot CC} \frac{d^2 i_2}{dt_1^2} + \frac{R_2}{\sqrt{L \cdot CC}} \frac{di_2}{dt_1} + \frac{i_2}{C_2} - \frac{i_3}{C_1} = 0. \end{cases}$$

Ниже эта система записана на языке *Mathematica*:

$$\begin{aligned} \text{Eq2} = & (L1/(L CC) (i2'' [t1] + i3'' [t1]) + i3 [t1]/CC1 == \\ & p \text{Cos}[p t1 \text{Sqrt}[L CC]], \\ & L2/(L CC) i2'' [t1] - i3[t1]/CC1 + \\ & i2[t1]/CC2 == 0) /.SSS; \end{aligned}$$

Описаны переменные – токи в первом и во втором контуре. Первый контур содержит источник ЭДС, индуктивность  $L_1$  и емкость  $C_1$ . Второму контуру содержит индуктивность  $L_2$  и емкости  $C_1$  и  $C_2$ .

$$\text{II}[t1] = \{i2[t1], i3[t1]\}$$

Система дифференциальных уравнений решена численно при начальных условиях  $i_2(0) = 0$ ,  $\frac{di_2(0)}{dt_1} = 0$ ,  $i_3(0) = 0$ ,  $\frac{di_3(0)}{dt_1} = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{NDSolve} [ & \{\text{Eq2} / .SSS, i2[0] == 0, i2'[0] == 0, \\ & i3[0] == 0, i3'[0] == 0\}, \{i2[t1], i3[t1]\}, \\ & \{t1, 0, MT/\text{Sqrt}[LCC]\}]; \end{aligned}$$

Выполнены на одном рисунке графики зависимостей тока в первом и во втором контуре при различных значениях частоты приложенного напряжения

```
Plot[Evaluate[II[t1]], {t1, 0, MT/Sqrt[L CC]},
PlotRange -> {{0, MT/Sqrt[L CC]}, {-0.01, 0.01}},
AxesLabel -> {"t1", "i2, i3"}],
```

при этом выведено значение частоты приложенного напряжения

```
Print["p=", p];
```

Совокупность графиков выведена с помощью функции Table

```
Table[{Eq2 =
(LI/(L CC) (i2 "[t1]+i3"[t1])+i3[t1]/CC1 ==
p Cos[pt1Sqrt[L CC]],
L2/(L CC) i2"[t1]-i3[t1]/CC1 +
i2[t1] / CC2 == 0) /. SSS;
II[t1] = {i2[t1], i3[t1]} /.
NDSolve[{Eq2 /. SSS, i2[0] == 0, i2'[0] == 0,
i3[0] == 0, i3'[0] == 0}, {i2[t1], i3[t1]},
{t1, 0, MT/Sqrt[LCC]};
Print[" p = ", p];
Plot[Evaluate[II[t1]], {t1, 0, MT/Sqrt[L CC]},
PlotRange -> {{0, MT/Sqrt[L CC]}, {-0.01, 0.01}},
AxesLabel -> {"t1", "i2, i3"}],
{p, 3.9 10^6, 4.3 10^7, 0.5 10^6}];
```

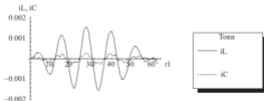


Рис. Л.8.11

При значениях частот, отличных от резонансной частоты, графики зависимости токов в первом  $i_L$  и во втором  $i_C$  контурах представлены на рис. Л.8.11 (при  $p = 8,4 \times 10^6$ ).

На рис. Л.8.12 показаны графики зависимостей тока в первом и во втором контуре при приближении к первой резонансной частоте, например, при  $p = 1,04 \times 10^7$ .

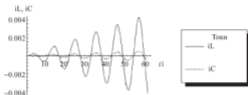


Рис. Л.8.12

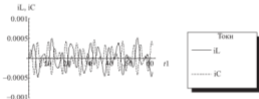


Рис. Л.8.13

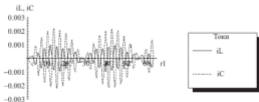


Рис. Л.8.14

При значении частоты приложенного напряжения между первой и второй резонансной частотами, например, при  $p = 2.39 \times 10^7$ , на рис. Л.8.13 показаны графики зависимостей тока в первом и во втором контуре.

При приближении ко второй резонансной частоте поведение токов в первом и во втором контуре показано на рис. Л.8.14 (при  $p = 3.54 \times 10^7$ ).

При значениях частоты приложенного напряжения, близких ко второй резонансной частоте (например, при  $p = 3.94 \times 10^7$ ), на рис. Л.8.15 показано поведение зависимостей тока в первом и во втором контуре.

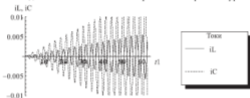


Рис. Л.8.15

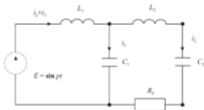


Рис. Л.8.16

При введении второй контур схемы электрической цепи сопротивлением  $R_2 = 50$  (рис. Л.8.16) система дифференциальных уравнений для токов изменится.

$$\begin{cases} L_1 \left( \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{d^2 i_2}{dt^2} \right) + \frac{i_1}{C_1} = p \cos pt, \\ L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C_2} - \frac{i_1}{C_1} = 0. \end{cases}$$



Соответственно запись этой системы в пакете *Mathematica* также изменится:

```
Eq2 = {L1/(L CC) (i2''[t1]+i3''[t1])+i3[t1]/CC1 ==
  p Cos [ p t1 Sqrt [L CC]],
  L2 / (LCC) i2''[t1] + R2 / Sqrt[LCC] i2'[t1] -
  i3[t1] / CC1 + i2[t1] / CC2 == 0} /. SSS;
```

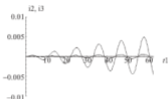


Рис. Л.8.17

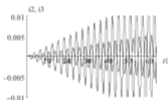


Рис. Л.8.18

В подстановку *SSS* добавится значение сопротивления

```
SSS = {R2 -> 50, L1 -> 10^-4, L2 -> 2 10^-4,
  CC1 -> 10^-11, CC2 -> 3 10^-11};
```

В остальном алгоритм вычисления токов при различных значениях частоты приложенного напряжения останется прежним. Приведены графики зависимостей токов в первом и втором контуре при значениях частот, близких к первой и второй резонансным частотам: при  $P = 1.04 \cdot 10^7$ ; (рис. Л.8.17); при  $P = 3.94 \cdot 10^7$ ; (рис. Л.8.18).

---

## Литература

1. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. — Л.: Энергоиздат. — Ленингр. отд-ние, 1981. — Т.1. — 536 с.
2. Теоретические основы электротехники. В 2 т. / Под ред. П. А. Ионкина. — М.: ВШ, 1976. — Т. 1. — 544 с.
3. Шимони К. Теоретическая электротехника. — М.: Мир, 1964. — 775 с.
4. Емеличев В. А. и др. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
5. Кениг Г., Блекуэлл В. Теория электромеханических систем. — Л., М.: Энергия, 1965. — 424 с.
6. Шакиров М. А. Преобразования и диакоптика электрических цепей. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1980. — 196 с.
7. Родюков Ф. Ф., Львович А. Ю. Уравнения электрических машин. — СПб: Издательство С.-Петербургского университета, 1997. — 272 с.
8. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
9. Дьяконов В. Mathematica 4: учебный курс. — СПб: Питер, 2001. — 656 с.
10. Kim K. K. Linear Electrical Circuits . Teaching Aid. Moscow: Marschat, 2006. 326 p.
11. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. 304 с.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 568 с.
13. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Издательство МАИ, 1992.

14. Steven Skiena, Sriram Pemmaraju. *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 175 p.
15. Новгородцев А. Б. Расчет электрических цепей в MATLAB. Учебный курс. — СПб.: Питер, 2004. — 250 с.
16. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. 4-е изд., переработанное. — М.: Энергия, 1975. — 751 с.
17. Вавилов Н. А., Халин В. Г. Mathematica 5.\* для нематематика. Выпуск 1. Первое знакомство: Учебное пособие. — СПб.: ОЦЭ-иМ, 2005. — 181 с.
18. Шебес М. Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. — Изд. Второе переработанное и дополненное. — М.: ВШ., 1973. — 655с.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

**subscribe@rcd.ru**

**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. (499)135-54-37

2. МГУ им. Ломоносова (ГЭ, 1 этаж)

3. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,

Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**Ким Константин Константинович**  
**Бестужева Анна Николаевна**  
**Смирнов Андрей Леонидович**

## **РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В СИСТЕМЕ MATHEMATICA**

*Дизайнер М. В. Ботя*

*Технический редактор А. В. Ширококов*

*Компьютерная набор и верстка А. В. Моторин*

*Корректор Г. Г. Тетерина*

---

Подписано в печать 28.01.19. Формат 60x84  $\frac{1}{16}$ .

Усл. печ. л. 16,28. Уч. изд. л. 17,11. Гарнитура Таймс.

Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Заказ №40.

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru

---