

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2008–2009 гг.

Под редакцией *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009

ББК 22.25
Т78

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. И. Сливкер* (Гипростроймост,
ПГУПС)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

**Труды семинара «Компьютерные методы в ме-
Т78 ханике сплошной среды». 2008–2009 гг.** / Под ред.
А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. — СПб.: Изд-во С.-Петерб.
ун-та, 2009. — 1хх с.
ISBN 5-288-03941-0

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

© А. Л. Смирнов, Е. Ф. Жигалко,
сост., 2009

© Издательство С.-Петербургского
университета, 2009

ISBN 5-288-03941-0

ВЗГЛЯД НАЗАД

*Служенье муз не терпит суеты;
Прекрасное должно быть величаво:
Но юность нам советует лукаво,
И шумные нас радуют мечты...
Опомнимся - но поздно! и уныло
Глядим назад, следов не видя там ...*

А.С. Пушкин “19 октября”

19 октября 2004 г. докладом Дениса Дьякова “Колебания и устойчивость неоднородных мембран и пластин” Межуниверситетский семинар “Компьютерные методы в механике сплошной среды” начал свою работу. За прошедшее пятилетие было проведено 66 заседаний семинара, на которых выступили более 70 исследователей. Темы докладов касались вопросов механики деформируемого твердого тела (40 докладов), гидроаэромеханики (10) и биомеханики (16). В группе Контакта (<http://vkontakte.ru/club969133>) зарегистрировано 59 постоянных участников семинара, 11 докладчиков защитили кандидатские диссертации. Вышло в свет 4 выпуска сборников трудов семинара, в которых опубликованы 41 статья и 15 тезисов докладов.

В канун пятилетнего юбилея организаторы благодарят всех участников семинара, докладчиков и их научных руководителей за неоценимый вклад в деятельность семинара и надеются на дальнейшую совместную плодотворную работу.

А.Л. Смирнов и Е.Ф. Жигалко

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

А. М. ЕРМАКОВ

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние двух сопряженных анизотропных эллиптической и сферической оболочек, находящихся под действием внутреннего давления. Такая задача может моделировать поведение корнеосклеральной оболочки глаза при увеличении внутриглазного давления. Проведен анализ деформации оболочек при различных соотношениях величин полуосей эллипсоида и модулей упругости составных оболочек.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе определяется напряженно-деформированное состояние сопряженных анизотропных эллиптической и сферической оболочек, находящихся под действием внутреннего давления. Анализируются результаты для различных соотношений величин полуосей эллипсоида и модулей упругости ортотропного материала. Такая модель описывает поведение корнеосклеральной оболочки глаза. Внешняя оболочка глаза — корнеосклеральная (фиброзная) оболочка состоит из роговицы и склеры (рис. 1 на вклейке). Склеральная оболочка глаза составляет около $4/5$ всей фиброзной оболочки глаза человека и является пространственно армированной конструкцией, где по ходу коллагеновых волокон можно выделить несколько слоев [1]. Структурой склеральной ткани объясняется ее анизотропия и неоднородность.

Для нормального зрения человека необходимо [2, 3], чтобы отраженные от объекта лучи, попадающие в глаз, фокусировались стро-

Доклад на семинаре 3 сентября 2008 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 09-01-00140а.

© А. М. Ермаков, 2009

го на сетчатке (рис. 2 на вклейке). Миопия (близорукость) может быть связана с тем, что глазное яблоко имеет форму вытянутого эллипсоида. Это приводит к тому, что изображение далеко расположенных объектов фокусируется перед сетчаткой. Гиперметропия (дальнозоркость) может быть вызвана тем, что форма глаза близка к форме сплюснутого эллипсоида. Это приводит к тому, что фокусная точка располагается за сетчаткой.

В данной работе склера и роговица моделируются как анизотропные оболочки, причем роговица моделируется сегментом сферы, а склера — сегментом эллипсоида вращения. Ранее подобная задача рассматривалась в работах [4, 5]. В [4] рассматривались однородные изотропные сферические оболочки. Кроме того, полагалось, что роговица является более жесткой оболочкой, т.е. ее модуль упругости больше модуля упругости склеры. В настоящее время известно [6], что роговица существенно мягче склеры. В работе [5] рассматривались изотропные сферические оболочки и методом конечных элементов в пакете ANSYS трансверсально-изотропные сферические оболочки.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Воспользовавшись симметрией объекта (рис. 1), полагаем, что все величины зависят только от одной координаты — угла α , между радиусом вектором и осью оболочки. Пусть α_1, α_2 — координаты для первой и второй оболочек соответственно, α_1^0, α_2^0 — значения углов, определяющие края оболочек в точке сопряжения, β — угол между касательными к оболочкам на линии сопряжения, $h^{(1)}, h^{(2)}$ — толщины, R_1 — радиус первой, сферической оболочки, R_2, R_3 — значения полуосей второй, эллиптической оболочки. В случае, когда $R_2 = R_3$, вторая оболочка, моделирующая склеру, имеет сферическую форму.

Для обозначения параметров, характеризующих составные оболочки, будем использовать нижний и верхний индексы: $A_j^{(i)}$. Нижний индекс j указывает, какой криволинейной координате соответствует рассматриваемая величина A , а верхний i — к какой оболочке она принадлежит ($i = 1$ относится к роговице, $i = 2$ к склере).

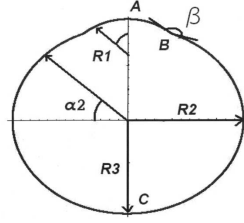


Рис. 1. Геометрическая модель глаза.

$E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, E_3^{(i)}$ — модули упругости в тангенциальных и нормальном координатных направлениях для роговицы и склеры, $\nu_{ij}^{(1)}, \nu_{ij}^{(2)}$ — коэффициенты Пуассона первой и второй оболочек.

Для определения напряженно-деформированного состояния сопряженных оболочек используем теорию оболочек Родионовой–Титаева–Черныха [7]. Это — линейная теория однородных анизотропных оболочек постоянной толщины с учетом малой податливости поперечным сдвигам и деформированию в направлении нормали к срединной поверхности. Она также учитывает поперечные нормальные напряжения и предполагает нелинейное распределение компонент вектора перемещения по толщине оболочки.

Функции, описывающие перемещение слоя оболочки $u_1(\alpha, z)$, $u_3(\alpha, z)$ по теории Родионовой–Титаева–Черныха, предлагается искать в виде рядов по полиномам Лежандра P_0, P_1, P_2, P_3 от нормальной координаты $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} u_1(\alpha, z) &= u(\alpha)P_0(z) + \gamma_1(\alpha)P_1(z) + \theta_1(\alpha)P_2(z) + \varphi_1(\alpha)P_3(z), \\ u_3(\alpha, z) &= w(\alpha)P_0(z) + \gamma_3(\alpha)P_1(z) + \theta_3(\alpha)P_2(z); \end{aligned} \quad (1)$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = \frac{2z}{h}, \quad P_2(z) = \frac{6z^2}{h^2} - \frac{1}{2}, \quad P_3(z) = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}, \quad (2)$$

где u, w — компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки, а γ_3 и θ_3 характеризуют изменение длины нормали к этой поверхности, γ_1 — угол поворота нормали в плоскости

(α, z) . Величины θ_1 и φ_1 , описывают нормальную кривизну в плоскости (α, z) волокна, которое до деформации было перпендикулярным к срединной поверхности оболочки.

В силу симметрии сечения вдоль оси АС рассмотрим лишь 2 соединенные дуги АВ и ВС с введенными на концах А и С условиями симметрии. В точке их слияния (В) должны выполняться соответствующие условия сопряжения. Таким образом, для каждой из дуг АВ, ВС можно рассматривать отдельно 2 одномерные задачи теории оболочек.

Приведем основные величины к безразмерному виду по следующим формулам:

$$\{\tilde{u}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\gamma}_J^{(i)}, \tilde{\theta}_J^{(i)}, \tilde{\varphi}_1^{(i)}\} = \frac{1}{h^{(i)}} \{u^{(i)}, w^{(i)}, \gamma_J^{(i)}, \theta_J^{(i)}, \varphi_1^{(i)}\}, \quad J = 1, 3;$$

$$\tilde{E}_{2,3}^{(i)} = \frac{E_{2,3}^{(i)}}{E_1^{(i)}}, \quad \tilde{G}_{13}^{(i)} = \frac{G_{13}^{(i)}}{E_1^{(i)}}, \quad \tilde{h}^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{R_i}, \quad \tilde{P}^{(i)} = \frac{P^{(i)}}{E_1^{(i)}}, \quad \tilde{q}_3^{(i)} = \frac{q_3^{(i)}}{E_1^{(i)}};$$

$$\{\tilde{T}_{0,1,2}^{(i)}, \tilde{Q}_1^{(i)}, \tilde{m}_3^{(i)}\} = \frac{\{T_{0,1,2}^{(i)}, Q_1^{(i)}, m_3^{(i)}\}}{R_i E_1^{(i)}}, \quad \{\tilde{M}_{0,1,2}^{(i)}\} = \frac{\{M_{0,1,2}^{(i)}\}}{R_i E_1^{(i)} h^{(i)}}.$$

Введем также параметры, характеризующие взаимное отношение определяющих характеристик двух рассматриваемых оболочек:

$$R_0 = \frac{R_3}{R_2}, \quad \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} = \check{h}, \quad \frac{E_1^{(2)}}{E_1^{(1)}} = \check{E}, \quad \frac{R_2}{R_1} = \check{R}.$$

Коэффициенты Ламе и кривизны, определяющие геометрию сферической оболочки, имеют вид

$$\tilde{A}_1^{(1)} = \frac{1}{\tilde{h}^{(1)}}, \quad \tilde{A}_2^{(1)} = \frac{1}{\tilde{h}^{(1)}} \cos(\alpha_1), \quad \tilde{k}_1^{(i)} = \tilde{k}_2^{(i)} = \tilde{h}^{(i)}. \quad (3)$$

В случае эллиптической оболочки имеем

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{h}^{(2)}} \sqrt{\sin^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_2) R_0^2}, & \tilde{A}_2^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{h}^{(2)}} \cos(\alpha_2), \\ \tilde{k}_1^{(2)} &= \tilde{h}^{(2)} \frac{R_0}{(\sin^2(\alpha_2) + R_0^2 \cos^2(\alpha_2))^{3/2}}, \\ \tilde{k}_2^{(2)} &= \tilde{h}^{(2)} \frac{R_0}{\sqrt{\sin^2(\alpha_2) + R_0^2 \cos^2(\alpha_2)}}.\end{aligned}$$

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{13}, \eta_1, \eta_2$ оболочки выражаются через компоненты перемещения по соотношениям:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_1^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{u}^{(i)}}{d\alpha_i} + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{w}^{(i)}, & \tilde{\varepsilon}_2^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i} \tilde{u}^{(i)} + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{w}^{(i)}, \\ \tilde{\eta}_1^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{\gamma}_1^{(i)}}{d\alpha_i} + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{\gamma}_3^{(i)}, & \tilde{\eta}_2^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i} \tilde{\gamma}_1^{(i)} + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{\gamma}_3^{(i)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{13}^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{w}^{(i)}}{d\alpha_i} - \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{u}^{(i)} + 2\tilde{\gamma}_1^{(i)}.\end{aligned}\tag{4}$$

Подставляя приведенные зависимости в соотношения упругости, можно получить

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} (\varepsilon_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}) + \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{T}_0^{(i)}, \\ \tilde{T}_2^{(i)} &= \frac{\tilde{E}_2^{(i)} \tilde{h}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} (\nu_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}) + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{T}_0^{(i)}, \\ \tilde{M}_1^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6(1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)})} (\eta_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \eta_2^{(i)}) + \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{M}_0^{(i)}, \\ \tilde{M}_2^{(i)} &= \frac{\tilde{E}_2^{(i)} \tilde{h}^{(i)}}{6(1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)})} (\nu_{21}^{(i)} \eta_1^{(i)} + \eta_2^{(i)}) + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{M}_0^{(i)},\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1^{(i)} &= \frac{5\tilde{h}^{(i)}\tilde{G}_{13}^{(i)}}{6}\varepsilon_{13}^{(i)} - \frac{\tilde{G}_{13}^{(i)}\tilde{h}^{(i)}}{6}\frac{d\theta_3^{(i)}}{\tilde{A}_1^{(i)}d\alpha_i}, \\ \tilde{T}_0^{(i)} &= \tilde{m}_3^{(i)} - \left(\tilde{k}_1^{(i)}\tilde{M}_1^{(i)} + \tilde{k}_2^{(i)}\tilde{M}_2^{(i)}\right), \\ \tilde{M}_0^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{10}\tilde{q}_3^{(i)} - \frac{1}{60}\left(\tilde{k}_1^{(i)}\tilde{T}_1^{(i)} + \tilde{k}_2^{(i)}\tilde{T}_2^{(i)}\right), \\ \tilde{m}_3^{(i)} &= -\frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\tilde{P}^{(i)}\left(1 - \frac{\tilde{k}_1^{(i)}}{2}\right)\left(1 - \frac{\tilde{k}_2^{(i)}}{2}\right), \\ \tilde{q}_3^{(i)} &= \tilde{P}^{(i)}\left(1 - \frac{\tilde{k}_1^{(i)}}{2}\right)\left(1 - \frac{\tilde{k}_2^{(i)}}{2}\right).\end{aligned}$$

Уравнения связи усилий и моментов с компонентами перемещения подставляем в уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}\tilde{A}_2^{(i)}}\left(\frac{d\tilde{A}_2^{(i)}\tilde{T}_1^{(i)}}{d\alpha_i} - \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i}\tilde{T}_2^{(i)}\right) + \tilde{k}_1^{(i)}\tilde{Q}_1^{(i)} &= 0, \\ \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}\tilde{A}_2^{(i)}}\frac{d\tilde{A}_2^{(i)}\tilde{Q}_1^{(i)}}{d\alpha_i} - \tilde{k}_1^{(i)}\tilde{T}_1^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)}\tilde{T}_2^{(i)} + \tilde{q}_3^{(i)}\tilde{h}^{(i)} &= 0, \quad (6) \\ \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}\tilde{A}_2^{(i)}}\left(\frac{d\tilde{A}_2^{(i)}\tilde{M}_1^{(i)}}{d\alpha_i} - \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i}\tilde{M}_2^{(i)}\right) - \tilde{Q}_1^{(i)} &= 0.\end{aligned}$$

На свободных концах дуг А, С (рис. 1) для компонент смещения должны выполняться 10 условий симметрии:

$$\tilde{u}^{(1)}[0] = 0, \tilde{u}^{(2)}[-\pi/2] = 0, \tilde{u}'^{(1)}[0] = 0, \tilde{u}'^{(1)}[-\frac{\pi}{2}] = 0, \tilde{w}^{(1)}[0] = 0,$$

$$\tilde{\gamma}^{(1)}[0] = 0, \tilde{\gamma}^{(2)}[-\frac{\pi}{2}] = 0, \tilde{\gamma}'^{(1)}[0] = 0, \tilde{\gamma}'^{(1)}[-\frac{\pi}{2}] = 0, \tilde{w}^{(2)}[-\frac{\pi}{2}] = 0.$$

В точке сопряжения дуг должны выполняться шесть условий [8]

непрерывности перемещений, моментов, усилий и угла поворота:

$$\begin{aligned}
\check{h}\check{u}^{(2)}[\alpha_2^0] &= \check{u}^{(1)}[\alpha_1^0] * \cos[\beta] - \check{w}^{(1)}[\alpha_1^0] * \sin[\beta] = 0, \\
\check{h}\check{w}^{(2)}[\alpha_2^0] &= \check{w}^{(1)}[\alpha_1^0] * \cos[\beta] + \check{u}^{(1)}[\alpha_1^0] * \sin[\beta] = 0, \\
\check{h}\check{\gamma}_1^{(2)}[\alpha_2^0] &= \check{\gamma}_1^{(1)}[\alpha_1^0], \quad \check{E}\check{R}\check{h}\check{M}_1^{(2)}[\alpha_2^0] = \check{M}_1^{(1)}[\alpha_1^0], \\
\check{E}\check{R}T_1^{(2)}[\alpha_2^0] &= T_1^{(1)}[\alpha_1^0] * \cos[\beta] - Q_1^{(1)}[\alpha_1^0] * \sin[\beta] = 0, \\
\check{E}\check{R}Q_1^{(2)}[\alpha_2^0] &= Q_1^{(1)}[\alpha_1^0] * \cos[\beta] + T_1^{(1)}[\alpha_1^0] * \sin[\beta] = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, получена система из шести дифференциальных уравнений 16-го порядка с 16 граничными условиями и шестью неизвестными функциями. Для ее решения используем конечно-разностный численный метод. В результате задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений $(3n^{(2)} + 3n^{(1)} - 3) * (3n^{(2)} + 3n^{(1)} - 3)$, которая разрешается в пакете Mathematica 6.0.

Оставшиеся 8 компонент деформации можно получить с использованием формул

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}_3^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(1 - \check{\nu}_{13}^{(i)} \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} - \check{\nu}_{23}^{(i)} \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \right) \frac{\check{T}_0^{(i)}}{\check{E}_3^{(i)}} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \varepsilon_1^{(i)} + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \varepsilon_2^{(i)} \right), \\
\check{\theta}_3^{(i)} &= \frac{1}{\check{h}^{(i)}} \left(1 - \check{\nu}_{13}^{(i)} \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} - \check{\nu}_{23}^{(i)} \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \right) \frac{\check{M}_0^{(i)}}{\check{E}_3^{(i)}} - \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \eta_1^{(i)} + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \eta_2^{(i)} \right), \\
\check{\theta}_1^{(i)} &= -\frac{1}{6\check{A}_1^{(i)}} \frac{\partial \check{\gamma}_3^{(i)}}{\partial \alpha_i}, \quad \check{\phi}_1^{(i)} = -\frac{1}{10\check{h}_1^{(i)} \check{G}_{13}^{(i)}} \check{Q}_1^{(i)} - \frac{1}{10\check{A}_1^{(i)}} \frac{\partial \check{\theta}_3^{(i)}}{\partial \alpha_i}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Путем подстановки найденных компонент деформации в расчетные формулы (1), (2) может быть получена полная картина напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек.

3. ДЕФОРМАЦИЯ КОРНЕОСКЛЕРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА

Для оценки влияния формы склеры на ее деформацию приведем сначала результаты расчетов для сферической оболочки. Возьмем следующие геометрические параметры: $h^{(1)} = h^{(2)} = 0.5$ мм, $R_1 = 8$ мм, $R_2 = R_3 = 11$ мм, $\alpha_1 \in [0, 38.4^\circ]$, $\alpha_2 \in [-90, 64.54^\circ]$, $\beta = 155.2$. Среднее значение модуля упругости склеральной оболочки, согласно [9], принимаем $E_{1,2}^{(2)} = 14.3$ МПа. Известно, что склеральная оболочка глаза является более жесткой, чем роговица. Опираясь на результаты [6], принимаем модуль упругости роговицы равным $E_{1,2}^{(1)} = 4.76$ МПа. Модуль упругости склеры в направлении ее толщины на два порядка меньше модуля упругости в тангенциальном направлении [6]. Примем $E_{1,2}^{(i)} / E_3^{(i)} = 100$. Модуль сдвига будем считать сравнительно малым: $G_{13}^{(i)} = 1$ МПа. Коэффициенты Пуассона $\nu_{12}^{(i)} = \nu_{21}^{(i)} = \nu_{32}^{(i)} = \nu_{31}^{(i)} = 0.4$, $\nu_{23}^{(i)} = \nu_{13}^{(i)} = 0.01$.

Рассмотрим, сопряженные трансверсально-изотропные оболочки, находящиеся под действием внутреннего давления. На рис. 2 представлена для наглядности деформация фиброзной (составной) оболочки глаза при внутреннем давлении в 200 мм рт. ст.

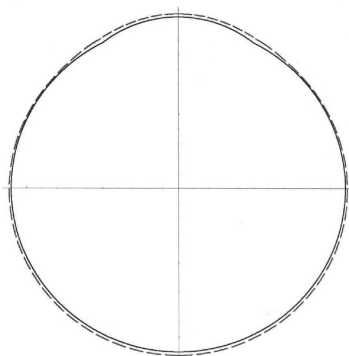


Рис. 2. Деформация сопряженных сферических оболочек.

Из общей картины деформации (рис. 2) можно заключить, что

усилия, возникающие в сопряженных оболочках, вследствие воздействия внутреннего давления приводят к существенному прогибу роговицы и распрямлению угла между оболочками. Максимальный прогиб для обеих оболочек происходит в окрестности точки сопряжения. Также заметно постепенное возрастание прогиба склеры при движении от области возмущенной точкой сопряжения к нижнему полюсу сферической оболочки.

4. СОПРЯЖЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКАЯ И ИМЕЮЩАЯ ФОРМУ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим случай, когда склеральная оболочка глаза имеет форму вытянутого эллипсоида: $R_1 = 8$ мм, $R_2 = 11$ мм, $R_3 = 13$ мм, $\beta = 156.2$, $\alpha_1 \in [0, 38.4^\circ]$ (рис. 3).

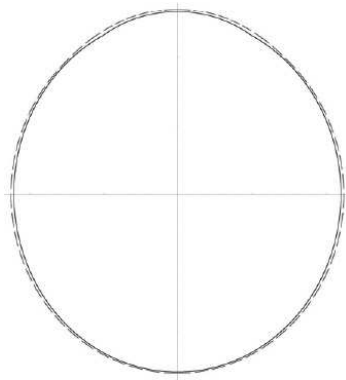


Рис. 3. Деформация составной оболочки при $R_0 = 13/11$.

Видно, что под действием внутреннего давления эллиптическая оболочка стремится принять сферическую форму, в окрестности экватора происходит максимальный прогиб.

5. СОПРЯЖЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКАЯ И ИМЕЮЩАЯ ФОРМУ СПЛЮСНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим случай глаза, когда склеральная оболочка глаза имеет форму сплюснутого эллипсоида: $R_1 = 8$ мм, $R_2 = 12$ мм, $R_3 = 11$ мм, $\beta = 152.8$, $\alpha_1 \in [0, 38.4^0]$.

Видно, что под действием внутреннего давления в этом случае оболочка также стремится принять сферическую форму, максимальный прогиб происходит в ее нижней части. И, как можно видеть из общей картины (рис. 4), эта деформация стремится вернуть глаз в его нормальную сферическую форму.

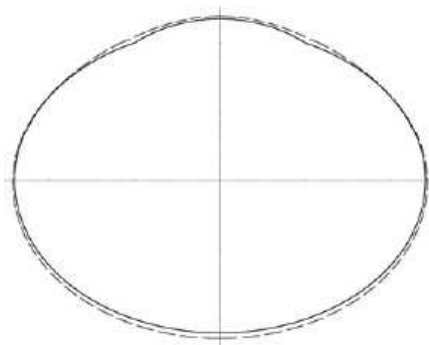


Рис. 4. Деформация составной оболочки при $R_0 = 11/12$.

6. ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК, ПРИВОДЯЩАЯ К МИОПИИ

Рассмотрим случай, когда в сферической системе координат модуль упругости склеральной оболочки в направлении линий широты в пять раз больше модуля упругости в направлении линий долготы. Физические параметры материи в этом случае примут следующие значения:

$$E_{1,2}^{(1)} = 1.43 \text{ МПа}; \quad E_3^{(1)}/E_1^{(1)} = 0.01; \quad E_1^{(2)} = 2.86 \text{ МПа};$$

$$E_3^{(2)} / E_1^{(2)} = 0.05; \quad E_2^{(2)} / E_1^{(2)} = 5; \quad \nu_{13}^{(2)} = 0.02; \quad \nu_{21}^{(2)} = 0.08;$$

$$\nu_{23}^{(2)} = 0.004; \quad \nu_{12}^{(2)} = \nu_{31}^{(2)} = \nu_{32}^{(2)} = 0.4.$$

Внутреннее давление берем значительно больше нормального — $P = 90$ мм рт. ст., чтобы новая форма была более заметной на общей картине деформации. Сравнивая форму деформации в этом случае (рис. 5) с формой деформации в случае трансверсально-изотропной оболочки (см. рис. 2), можно сделать вывод, что влияние анизотропии в значительной степени усилило прогиб в полюсе склеральной оболочки, и глаз стал приобретать форму вытянутого эллипсоида. Принятая в модели мягкая оболочка роговицы под действием внутреннего давления стала более острой. Полученная картина соответствует форме глаза с развившейся миопией.

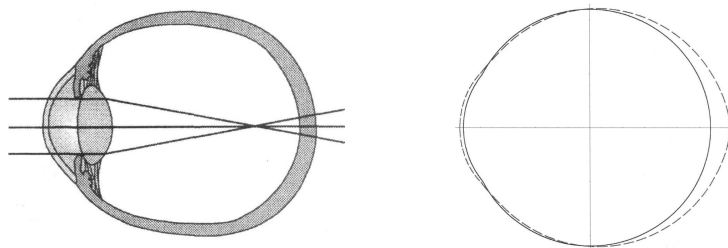


Рис. 5. Деформация оболочки, соответствующая состоянию миопии глаза.

7. ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК, ПРИВОДЯЩАЯ К ГИПЕРМЕТРОПИИ

В случае, если модуль упругости склеральной оболочки в направлении длины в пять раз больше, чем модуль упругости в направлении ширины, примем

$$E_{1,2}^{(1)} = 4.76 \text{ МПа}; \quad E_3^{(1)} / E_1^{(1)} = 0.01; \quad E_1^{(2)} = 14.3 \text{ МПа};$$

$$E_3^{(2)} / E_1^{(2)} = 0.01; \quad E_2^{(2)} / E_1^{(2)} = 0.2; \quad \nu_{12}^{(2)} = 0.08; \quad \nu_{13}^{(2)} = 0.02;$$

$$\nu_{21}^{(2)} = \nu_{23}^{(2)} = \nu_{31}^{(2)} = 0.4; \quad \nu_{32}^{(2)} = 0.004.$$

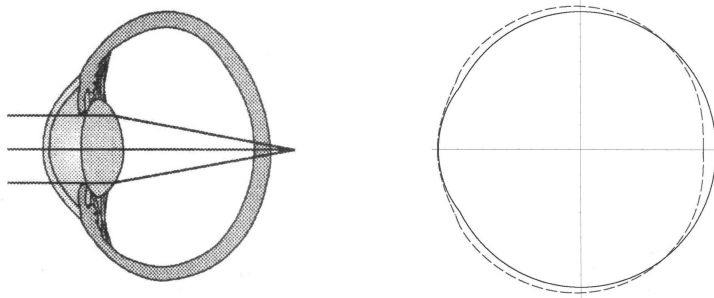


Рис. 6. Деформация оболочки, соответствующая состоянию гиперметропии глаза.

Под действием внутреннего давления (рис. 6) склеральная оболочка принимает форму сплюснутого эллипсоида, и усилия, возникающие на линии сопряжения, заставляют более мягкую оболочку роговицы стать более полой. Полученная картина соответствует форме глаза с развившейся гиперметропией.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты расчетов показывают, что при моделировании склеральной оболочки глаза как трансверсально-изотропной материи отмечено, что воздействие внутреннего давления не существенно влияет на изменение передне-задней оси глаза. Эллипсоидальные оболочки под действием внутреннего давления стараются принять сферическую форму, наибольший прогиб происходит в более полой части. Так, прогиб в окрестности нижнего полюса для вытянутой эллипсоидальной оболочки существенно меньше по сравнению со сферической. А в случае сплюснутой оболочки он существенно больший. Угол между касательными к составляющим оболочкам на линии сопряжения увеличивается с ростом давления, а окрестность точки сопряжения становится более гладкой. Отмечено, что оболочка, имеющая форму вытянутого эллипсоида, менее деформируется под действием внутреннего давления, чем оболочка, имеющая форму сплюснутого эллипсоида. В работе представлены ис-

следования деформации сферических сопряженных ортотропных оболочек при различных соотношениях модулей упругости в тангенциальном направлении. При исследовании ортотропной материи отмечено, что в случае, когда $E_2^{(2)}/E_1^{(2)} > 1$, общая картина деформации будет соответствовать состоянию миопии. В обратном же случае, когда $E_2^{(2)}/E_1^{(2)} < 1$, картина деформации соответствует состоянию гиперметропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сомов Е.Е.* Клиническая анатомия органа зрения человека. М.: Мед-пресс-информ., 2005. 136 с.
2. *Duke-Elder S.* Diseases of the eye, twelfth edition. London, 1956. 443 p.
3. *Lang G.K.* Ophthalmology. Stuttgart–New York: Thieme, 2000. 566 p.
4. *Волков В.В., Вяземский С., Малышев Л., Мамаев О., Павилайнен В.Я., Саулгозол Ф.Ж.* Исследование напряженного состояния роговицы живого глаза человека методом фотоупругости // Известия АН ЭССР. Физика, математика. 1988. Т. 37 С. 76–84.
5. *Краковская Е.В.* Приложение теории сопряженных оболочек к задачам офтальмологии // Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды". СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. С. 5–19.
6. *Иомдина Е.Н.* Механические свойства глаза человека. // Современные проблемы биомеханики. Вып. 11. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 183–201.
7. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 240 с.
8. *Филиппов С.Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 196 с.
9. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

В. Я. ПАВИЛАЙНЕН, А. Н. ТУЛКИНА

Дан вывод уравнений вынужденных колебаний при кинематическом возбуждении консольного стержня по теории С. П. Тимошенко. Получены расчетные формулы определения собственных частот для двух типов инерционных нагрузок при повороте поперечных сечений, а также формулы для определения прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил при вынужденных колебаниях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В динамических задачах расчета колебаний консольного стержня необходим, по сравнению с классической теорией Бернулли—Эйлера, учет влияния в уравнениях равновесия инерционных нагрузок при повороте элемента поперечного сечения, введенный Д.В. Стреттом (Рэлеем) [1]. В дальнейшем С.П. Тимошенко дополнил уравнение Рэлея еще одним слагаемым, учитывающим деформации сдвига, и в окончательном виде оно получило в теории название уравнения С.П. Тимошенко [2]. В такой постановке в работе [3] были исследованы свободные колебания консольных стержней и выполнены числовые расчеты собственных частот и форм свободных колебаний стержней различной длины и изгибной жесткости.

В данной статье для объектов, исследованных в работе [3], рассматривается задача о вынужденных колебаниях, вызываемых поперечными гармоническими колебаниями заземленного конца консоли при заданной амплитуде и частоте.

Рассмотрим стержень длины l , ось которого Ox лежит в вертикальной плоскости симметрии xOy ($0 \leq x \leq l$), правый конец $x = l$ свободен, а левый заземленный конец совершает вертикаль-

Доклад на семинаре 21 октября 2008 г.

© В. Я. Павилайнен, А. Н. Тулкина, 2008

ные колебания в этой плоскости по закону $y(0, t) = A_0 \sin \omega t$, где $y = y(x, t)$ — уравнение изогнутой оси стержня, A_0 и ω — заданные амплитуда и частота вынужденных колебаний (рис. 1).

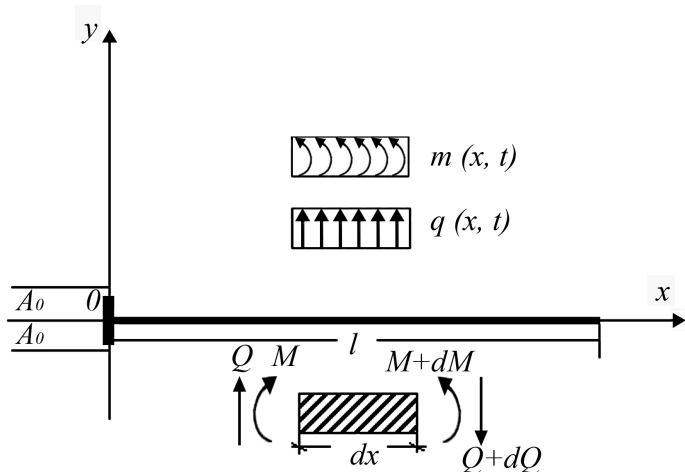


Рис. 1. Система координат и действующие нагрузки.

Положительные направления изгибающего момента M и поперечной силы Q в сечениях x и $x + dx$, а также распределенной на оси инерционной нагрузки $q(x, t)$ и распределенного инерционного момента $m(x, t)$ при повороте элемента показаны на рис. 1.

Уравнения равновесия малого элемента стержня (неизменные для всех рассматриваемых в дальнейшем задач) имеют вид

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q + m(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t), \quad (1.2)$$

отличающийся от уравнений С.П. Тимошенко [2] только знаками некоторых слагаемых вследствие принятого противоположного направления оси Oy (рис. 1).

Нагрузки $q(x, t)$ и $m(x, t)$ определяются формулами

$$q(x, t) = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$m(x, t) = -\rho J \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}, \quad (1.4)$$

в которых $y = y(x, t)$ — уравнение изогнутой оси, ρ, F, J — соответственно плотность материала стержня, площадь и момент инерции его поперечного сечения.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Данное решение приводится здесь в кратком изложении, что необходимо для его обобщения на дальнейшие задачи и сравнения получаемых результатов. Система (1.1), (1.2) с учетом только нагрузки (1.3) приводится [2] к уравнению равновесия

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

При изучении нормальных форм гармонических колебаний применением метода Фурье к функции $y(x, t) = X(x) \sin \omega t$ и после введения безразмерного аргумента $\xi = x/l$ ($0 \leq \xi \leq 1$) уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^4 X}{\partial \xi^4} - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 X = 0, \quad (2.2)$$

и его решение в рассматриваемой задаче о вынужденных колебаниях должно удовлетворять граничным условиям

$$X(0, t) = A_0 \sin \omega t, \quad \left. \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, t} = 0, \quad (2.3)$$

$$M(1, t) = Q(1, t) = 0. \quad (2.4)$$

Если обозначить

$$\frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 = k^4, \quad (2.5)$$

то (2.2) имеет корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm k$, $\lambda_{3,4} = \pm ik$, дающие общее решение

$$X(\xi) = A_1 \cosh k\xi + B_1 \sinh k\xi + C_1 \cos k\xi + D_1 \sin k\xi. \quad (2.6)$$

В случае свободных колебаний консольного стержня решение (2.6) позволяет получить [2] частотное уравнение

$$1 + \cosh k \cos k = 0, \quad (2.7)$$

из которого определяется спектр собственных частот и явление резонанса при вынужденных колебаниях.

На основе (2.6) можно построить решение задачи о вынужденных колебаниях. Из граничных условий (2.3) следует

$$X(\xi) = A_1(\cosh k\xi - \cos k\xi) + B_1(\sinh k\xi - \sin k\xi) + A_0 \cos k\xi. \quad (2.8)$$

Постоянные A_1 и B_1 определяются на свободном конце $\xi = 1$ из условий (2.4), приводящих к системе

$$A_1(\cosh k + \cos k) + B_1(\sinh k + \sin k) = A_0 \cos k, \quad (2.9)$$

$$A_1(\sinh k - \sin k) + B_1(\cosh k + \cos k) = -A_0 \sin k, \quad (2.10)$$

имеющей решение

$$A_1 = A_0 \frac{1 + \cosh k \cos k + \sinh k \sin k}{2(1 + \cosh k \cos k)}, \quad (2.11)$$

$$B_1 = -A_0 \frac{\cosh k \sin k + \sinh k \cos k}{2(1 + \cosh k \cos k)}. \quad (2.12)$$

После подстановки (2.11), (2.12) в (2.8) получаем решение задачи (2.2), (2.3), (2.4)

$$X(\xi) = \frac{A_0}{2(1 + \cosh k \cos k)} \left\{ (1 + \cosh k \cos k + \sinh k \sin k)(\cosh k\xi - \cos k\xi) - (\cosh k \sin k + \sinh k \cos k)(\sinh k\xi - \sin k\xi) \right\} + A_0 \cos k\xi, \quad (2.13)$$

учитывающее все возможные случаи резонанса в задаче о вынужденных колебаниях консольного стержня.

3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ НАГРУЗОК ПРИ ПОВОРОТЕ СЕЧЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА В ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

В указанной постановке свободные колебания консольного стержня с определением спектра частот и форм колебаний рассмотрены в работе [3]. В задаче о вынужденных колебаниях уравнения равновесия (1.1), (1.2) сохраняют свой вид, а угол поворота поперечного сечения в теории С.П. Тимошенко записывается в виде суммы

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \gamma, \quad (3.1)$$

где γ — угол сдвига, а ψ — угол поворота, определяющий величину изгибающего момента (касательные напряжения, соответствующие углу γ , момента не вызывают).

Тогда связь момента M и угла поворота ψ представима формулой

$$M = EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.2)$$

а соотношение между поперечной силой Q и углом сдвига γ , полученное по формуле Д. И. Журавского, будет иметь вид

$$\frac{nQ}{F} = \tau = -G\gamma = -G \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right), \quad (3.3)$$

откуда следует

$$Q = -\frac{GF}{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right). \quad (3.4)$$

Здесь G — модуль сдвига, n — коэффициент формы поперечного сечения, имеющий значение $n = 3/2$ в случае прямоугольника [4]. Знак «минус» в формуле (3.3) необходим для соблюдения равенства знаков в левой и правой частях формулы (3.4), так как при положительных значениях поперечной силы Q (см. рис.1) угол сдвига

в плоскости xOy будет отрицательным. Такой же вид имеет аналогичная формула в работе [5].

С учетом (3.2), (3.4), а также (1.3), (1.4) уравнения равновесия (1.1), (1.2), связывающие статические величины M , Q с функцией прогиба $y = y(x, t)$ и угла поворота $\psi = \psi(x, t)$, примут вид

$$EJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{GF}{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - \rho J \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} = 0, \quad (3.5)$$

$$-\frac{GF}{n} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

и представляют собой систему уравнений равновесия в перемещениях с искомыми функциями $y(x, t)$ и $\psi(x, t)$.

Исключая из системы (3.5), (3.6) функцию $\psi(x, t)$, получаем разрешающее уравнение относительно функции $y(x, t)$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (3.7)$$

а при исключении из (3.5), (3.6) функции $y(x, t)$ — разрешающее уравнение относительно угла поворота $\psi(x, t)$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.8)$$

в котором оператор в левой части относительно $\psi(x, t)$ точно совпадает с оператором относительно $y(x, t)$ в (3.7).

Что касается частных случаев разрешающего уравнения (3.7), то при неучете деформаций сдвига ($\gamma \rightarrow 0$ при $G \rightarrow \infty$) функция $\psi(x, t)$ не вводится, а уравнение (3.7) при отсутствии инерционного момента $m(x, t)$ переходит в приведенное выше уравнение (2.1).

Относительно уравнений (3.7), (3.8) необходимо отметить, что при выводе разрешающих уравнений системы (3.5), (3.6) С. П. Тимошенко принимает в (3.5) инерционный момент $m(x, t)$ в виде

$$m(x, t) = -\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

не приводя в [2] никаких объяснений или ссылок по поводу отбрасывания угла сдвига в формуле (3.1). При этом в уравнении (3.7)

появляется дополнительное слагаемое, содержащее четвертую производную по времени t от функции $y(x, t)$, т.е.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{n\rho^2}{EJ} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (3.9)$$

Аналогичное слагаемое относительно $\psi(x, t)$ появляется также в уравнении (3.8). Таким образом, указанная выше единственная замена вида слагаемого $m(x, t)$ в исходном уравнении равновесия (1.1) качественно меняет тип разрешающего уравнения (3.7), а также (3.8), переводя его, как указано в работе В. В. Новожилова и Л. И. Слепяна [6], из уравнения, описывающего стационарный процесс, к уравнению «волнового» типа.

Однако уравнение (3.9) может применяться и в задачах о свободных колебаниях (стационарный процесс), что показано в работах [2], [5] на примере свободных колебаний двухшарнирной балки. Поэтому рассматриваемые в дальнейшем задачи о вынужденных колебаниях консольного стержня будут рассматриваться как на основе уравнений (3.7), (3.8) (решение типа I), так и на основе уравнения (3.9) (и аналогичного для $\psi(x, t)$), которые будем называть решением типа II.

Рассмотрим параллельно вопросы построения решений типа I и типа II задач о вынужденных колебаниях консольного стержня в изложенной выше постановке для искомым функций $y(x, t)$ и $\psi(x, t)$.

Для функции $y(x, t)$ имеем уравнения (3.7), (3.9) и аналогичные по структуре уравнения для функции $\psi(x, t)$. Применяя метод Фурье к функции $y(x, t)$, т.е., полагая $y(x, t) = X(x) \sin \omega t$ для уравнения (3.9), получаем

$$\frac{\partial^4 X}{\partial \xi^4} + \left(\frac{\rho}{E} + \frac{n\rho}{G} \right) \omega^2 l^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} - \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4 X + \frac{n\rho^2}{EG} \omega^4 l^4 X = 0 \quad (3.10)$$

и аналогичное для функции $\psi(x, t) = \Psi(x) \sin \omega t$. Характеристические уравнения для функций $X(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ будут иметь вид (фундаментальные системы решений однородных уравнений (3.7), (3.9) по форме одинаковы)

$$\lambda^4 + \left(1 + \frac{nE}{G} \right) k^4 \alpha \lambda^2 - k^4 + \frac{nE}{G} k^8 \alpha^2 = 0. \quad (3.11)$$

В (3.11) $k^4 = \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4$, $\alpha = \frac{1}{12} \left(\frac{l}{l}\right)^2$ — малый параметр.

Полагая $\lambda^2 = \beta$, получаем

$$\beta_{1,2} = - \left(1 + \frac{nE}{G}\right) \frac{k^4 \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{nE}{G}\right)^2 \frac{k^8 \alpha^2}{4} + k^4 - \frac{nE}{G} k^8 \alpha^2}. \quad (3.12)$$

Для решений типа I последнее слагаемое под знаком корня в (3.12) отсутствует и получаем корни уравнения (3.12) $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\beta_1} = \pm \gamma_1$ при $\beta_1 > 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|\beta_2|} = \pm i \gamma_2$ при $\beta_2 < 0$ [3].

Таким образом системой фундаментальных решений уравнений (3.7), (3.8) будут функции

$$\cosh \gamma_1 \xi, \quad \sinh \gamma_1 \xi, \quad \cos \gamma_2 \xi, \quad \sin \gamma_2 \xi.$$

Для решений типа II формулу (3.12) целесообразно преобразовать путем выноса первого слагаемого из-под знака корня

$$\beta_{1,2} = - \left(1 + \frac{nE}{G}\right) \frac{k^4 \alpha}{2} \pm \left(1 + \frac{nE}{G}\right) \frac{k^4 \alpha}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{\left(1 + \frac{nE}{G}\right)^2 k^8 \alpha^2} \left(k^4 - \frac{nE}{G} k^8 \alpha^2\right)}. \quad (3.13)$$

Очевидно, что при положительности второго слагаемого выражение под знаком корня будет больше 1, а тогда корни β_1 и β_2 будут, как и выше для типа I, иметь разные знаки, что качественно сохранит значения корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm \gamma_1$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \gamma_2$.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{k^8 \alpha^2} \left(k^4 - \frac{nE}{G} k^8 \alpha^2\right) = \frac{1}{k^4 \alpha^2} - \frac{nE}{G} \quad (3.14)$$

и найдем условие положительности правой части формулы (3.14), где все величины, кроме k^4 (в которую входит квадрат частоты ω), постоянные.

Получаем

$$\frac{1}{k^4 \alpha^2} - \frac{nE}{G} = \frac{EJ}{\rho F \omega^2 l^4} \frac{144 l^4}{h^4} - \frac{nE}{G} > 0,$$

отсюда $\omega^2 < \frac{12G}{\rho nh^2}$ или (при $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $n = \frac{3}{2}$)

$$\omega^2 < \frac{4E}{(1 + \nu)\rho h^2}. \quad (3.15)$$

С целью проверки выполнен расчет корней характеристического уравнения β_1, β_2 и γ_1, γ_2 для стального стержня ($E = 2.1 * 10^6$ кг/см², $\nu = 0.3$, $\rho = 0.7951 * 10^{-5}$ кг сек.²/см⁴) с геометрическими параметрами $l = 20.0$ см, $h = 1.0$ см для двух вариантов момента $m(x, t)$: I тип $m(x, t) = -\rho J \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}$, II тип $m(x, t) = -\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, при частотах вынужденных колебаний $\omega_i = 500, 1000, 5000, 10000, 20000, 50000$ (1/сек.).

В табл. 1, 2, 3 даны величины $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ для значений ω_i в уравнениях типа I или типа II, а также величины изменений (увеличения или уменьшения β_i, γ_i при переходе от варианта I к варианту II) в процентах (табл. 3).

Таблица 1. Сравнение квадратов корней характеристических уравнений типа I и типа II

$\omega_i, 1/\text{сек.}$	β_1^I	β_2^I	β_1^{II}	β_2^{II}
$\omega_1=500$	0.6313999	-0.6324435	0.6313996	-0.6324431
$\omega_2=1000$	1.2617576	-1.2659319	1.2617547	-1.2659290
$\omega_3=5000$	6.2672519	-6.3716089	6.2668966	-6.3712534
$\omega_4=10000$	12.4314394	-12.8488669	12.4285964	-12.8460239
$\omega_5=20000$	24.4557881	-26.125498	24.4330455	-26.1027555
$\omega_6=50000$	58.1893614	-68.6250489	57.8341849	-68.2698724

Таблица 2. Сравнение корней характеристических уравнений типа I и типа II

$\omega_i, 1/\text{сек.}$	γ_1^I	γ_2^I	γ_1^{II}	γ_2^{II}
$\omega_1=500$	0.7946068	0.7952632	0.7946066	0.7952629
$\omega_2=1000$	1.1232798	1.1251364	1.1232786	1.1251351
$\omega_3=5000$	2.5034480	2.5242043	2.5033770	2.5241342
$\omega_4=10000$	3.5258246	3.5845316	3.5254215	3.5841350
$\omega_5=20000$	4.9452794	5.1113108	4.9429794	5.1090856
$\omega_6=50000$	7.6281952	8.2840237	7.6048790	8.2625585

Таблица 3. Оценки изменения корней характеристических уравнений при переходе от типа I к типу II

ω_i , 1/сек.	$\Delta\beta_1$, %	$\Delta\beta_2$, %	$\Delta\gamma_1$, %	$\Delta\gamma_2$, %
$\omega_1=500$	-0.0000563	-0.0000562	-0.0000282	-0.0000281
$\omega_2=1000$	-0.0002253	-0.0002245	-0.0001126	-0.000123
$\omega_3=5000$	-0.0056706	-0.0055777	-0.0028353	-0.0027890
$\omega_4=10000$	-0.0228740	-0.0221316	-0.0114368	-0.0110682
$\omega_5=20000$	-0.0930814	-0.0871272	-0.0465299	-0.0435541
$\omega_6=50000$	-0.6141290	-0.520537	-0.3065945	-0.2597894

Данные табл. 3 показывают, что в рассматриваемом примере величины β_1, γ_1 уменьшаются, а β_2, γ_2 — увеличиваются, причем для всего диапазона частот $500 < \omega_i < 50000$ отклонение составляет менее одного процента.

Этот пример показывает, что для принятых геометрических l, h и физических ρ, E, G, ν параметров стержня допустимый интервал частот вынужденных колебаний $0 < \omega_i < 901482$ (1/сек.), а при других исходных данных можно найти соответствующий интервал частот ω по формуле (3.15), в пределах которого корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm\gamma_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\gamma_2$ качественно остаются прежними, изменяя лишь абсолютную величину.

В табл. 4 представлены для того же примера собственные круговые частоты ω_i ($i = 1, 2, \dots, 19$) из указанного интервала для классического решения (графа (1)) и решений по теории С.П. Тимошенко для типа I (графа (2)) и типа II (графа (3)). Для типа II верхняя граница частоты ω_i определяется формулой (3.15), поэтому в указанном интервале можно найти только 19 собственных круговых частот, а для классического случая и решения типа I такого ограничения не существует. Эти частоты необходимо принимать во внимание в задачах о вынужденных колебаниях.

Таблица 4. Собственные круговые частоты

$\omega_i, 1/\text{сек.}$	(1)	(2)	(3)
ω_1	1304.06	1302.09	1302.10
ω_2	8172.43	8079.24	8080.03
ω_3	22883.04	22195.59	22211.71
ω_4	44841.62	42306.46	42412.68
ω_5	74126.42	67554.59	67963.12
ω_6	110732.03	96940.39	98076.49
ω_7	154658.79	129527.94	132077.15
ω_8	205906.68	164502.64	169423.15
ω_9	264475.69	201197.16	209707.60
ω_{10}	330365.82	239088.73	252647.51
ω_{11}	403577.09	277781.62	298072.04
ω_{12}	484109.47	316984.09	345916.85
ω_{13}	571962.99	596485.75	396229.32
ω_{14}	667137.63	396137.75	449190.49
ω_{15}	769633.40	435836.72	505190.24
ω_{16}	879450.29	515118.37	568399.40
ω_{17}	996588.31	554624.95	629865.83
ω_{18}	1121047.46	633277.33	703531.10
ω_{19}	1252827.73	672409.90	803547.45

На рис. 2. показаны графики собственных круговых частот для рассматриваемых вариантов расчета, иллюстрирующие характер их изменения и сравнительную величину.

- (1) — классическая теория Бернулли-Эйлера,
- (2) — теория С.П. Тимошенко, нагрузка типа I,
- (3) — теория С.П. Тимошенко, нагрузка типа II.

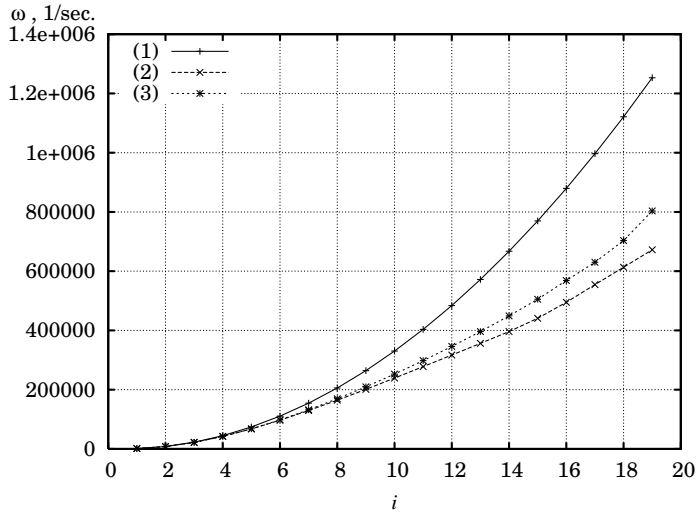


Рис. 2. Спектры собственных круговых частот

4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ В СЛУЧАЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЗАДАЧ ТИПОВ I И II

Таблицы и графики, приведенные выше в параграфе 3, показывают, что вследствие незначительного различия корней характеристического уравнения при заданных параметрах стержня, начальные значения собственных частот, а также системы фундаментальных решений для функций $X(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ практически совпадают. Это позволяет использовать при указанных условиях результаты решения задачи типа I и распространить их на тип II. Поэтому целью дальнейшего изложения является вывод решения задачи о вынужденных колебаниях типа I при заданных исходных данных для расчета стержня.

В силу равенства операторов в уравнениях (3.7) и (3.8) относительно функций $X(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ и совпадения корней характеристического уравнения фундаментальные системы решений для функций

$X(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ совпадают [3] и они будут определяться формулами

$$X(\xi) = A_1 \cosh \gamma_1 \xi + B_1 \sinh \gamma_1 \xi + C_1 \cos \gamma_2 \xi + D_1 \sin \gamma_2 \xi, \quad (4.1)$$

$$\Psi(\xi) = A_2 \cosh \gamma_1 \xi + B_2 \sinh \gamma_1 \xi + C_2 \cos \gamma_2 \xi + D_2 \sin \gamma_2 \xi, \quad (4.2)$$

отличаясь только значениями постоянных $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$.

Из граничных условий $X(0) = A_0$ и $\Psi(0) = 0$ следует $C_1 = A_0 - A_1, C_2 = -A_2$, и функции $X(\xi), \Psi(\xi)$ примут вид

$$X(\xi) = A_1 (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + B_1 \sinh \gamma_1 \xi + D_1 \sin \gamma_2 \xi + A_0 \cos \gamma_2 \xi, \quad (4.3)$$

$$\Psi(\xi) = A_2 (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + B_2 \sinh \gamma_1 \xi + D_2 \sin \gamma_2 \xi. \quad (4.4)$$

Систему (3.5), (3.6) после применения метода Фурье можно записать (аналогично [3])

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} = a_{11} X + a_{12} \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} = a_{21} \Psi + a_{22} \frac{dX}{d\xi}, \quad (4.6)$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2$) — постоянные коэффициенты

$$a_{11} = -\frac{n\rho\omega^2 l^2}{G}, \quad a_{12} = l, \quad a_{21} = \frac{FGl^2}{nEJ}, \quad a_{22} = -\frac{FGl}{nEJ} - \frac{\rho\omega^2 l}{E}. \quad (4.7)$$

После приравнивания коэффициентов при соответствующих фундаментальных функциях в (4.5), (4.6) получаем выражения для постоянных A_2, B_2, D_1, D_2 через постоянные A_1, B_1 и A_0

$$A_2 = \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 a_{12}} B_1, \quad B_2 = \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 a_{12}} A_1, \\ D_1 = -\frac{\gamma_2 \gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 \gamma_2^2 + a_{11}} B_1, \quad D_2 = \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 a_{12}} (A_1 - A_0), \quad (4.8)$$

и решение задачи примет вид

$$X(\xi) = A_0 \cos \gamma_2 \xi + A_1 (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + B_1 \left\{ \sinh \gamma_1 \xi - \frac{\gamma_2 \gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 \gamma_2^2 + a_{11}} \sin \gamma_2 \xi \right\}, \quad (4.9)$$

$$\Psi(\xi) = A_1 \left\{ \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 a_{12}} \sinh \gamma_1 \xi + \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 a_{12}} \sin \gamma_2 \xi \right\} + B_1 \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 a_{12}} \left\{ \cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi \right\} - A_0 \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 a_{12}} \sin \gamma_2 \xi. \quad (4.10)$$

С учетом граничных условий

$$M(1) = \frac{EJ}{l} \frac{d\Psi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0,$$

$$Q(1) = \left\{ \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \frac{\rho J \omega^2}{l} \frac{dX}{d\xi} \right\} \Big|_{\xi=1} = 0,$$

получаем систему для определения коэффициентов A_1, B_1

$$A_1 \alpha_{11} + B_1 \alpha_{12} = A_0 (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2. \quad (4.11)$$

$$A_1 \alpha_{21} + B_1 \alpha_{22} = -A_0 \gamma_2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \right] \sin \gamma_2, \quad (4.12)$$

в которой

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2, \\ \alpha_{12} &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} (\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2), \\ \alpha_{21} &= \gamma_1 \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \right] \sinh \gamma_1 - \gamma_2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \right] \sin \gamma_2, \\ \alpha_{22} &= \gamma_1 \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \right] \cosh \gamma_1 + \\ &+ \frac{\gamma_2^2 \gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 \gamma_2^2 + a_{11}} \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} \right] \cos \gamma_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Определитель системы (4.11), (4.12) $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ — частотный, имеющий вид

$$\Delta = A + B + C \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + D \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2,$$

коэффициенты которого равны, (согласно [3])

$$\begin{aligned} A &= \gamma_1(\gamma_1^2 - a_{11}) \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right], \\ B &= \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1}(\gamma_1^2 - a_{11}) \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right], \\ C &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \left\{ (\gamma_1^2 - a_{11})\gamma_2^2 + (\gamma_2^2 + a_{11})\gamma_1^2 \right\} - \\ &\quad - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \left\{ \frac{(\gamma_1^2 - a_{11})^2 \gamma_2^2 - (\gamma_2^2 + a_{11})^2 \gamma_1^2}{(\gamma_2^2 + a_{11})\gamma_1} \right\}, \\ D &= \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \left[\gamma_2^2 - \gamma_1^2 + 2(a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E}) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Коэффициенты A_1, B_1 определяются из системы (4.11), (4.12) по формулам

$$A_1 = A_0 \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad B_1 = A_0 \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (4.15)$$

в которых

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1}(\gamma_1^2 - a_{11}) \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] + \\ &\quad + \gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \\ &\quad + \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2, \\ \Delta_2 &= -\gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$-\gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2. \quad (4.17)$$

Тогда решения (4.9), (4.10) окончательно принимают вид

$$X(\xi) = A_0 \left\{ \cos \gamma_2 \xi + \frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta_2}{\Delta} \left(\sinh \gamma_1 \xi - \frac{\gamma_2 \gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 \gamma_2^2 + a_{11}} \sin \gamma_2 \xi \right) \right\}, \quad (4.18)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{A_0}{l} \left\{ -\frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \xi + \frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 \xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \xi \right) + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \left(\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi \right) \right\}. \quad (4.19)$$

Амплитудные значения прогиба $X(\xi)$ даются формулой (4.18), а для изгибающего момента $M(\xi)$ и поперечной силы $Q(\xi)$ имеют вид

$$M(\xi) = \frac{A_0 E J}{l^2} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta} \left((\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \xi + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2 \xi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \left(\gamma_1 \sinh \gamma_1 \xi + \gamma_2 \sin \gamma_2 \xi \right) - (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2 \xi \right\}, \quad (4.20)$$

$$Q(\xi) = \frac{A_0 E J}{l^3} \left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\gamma_1 \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \sinh \gamma_1 \xi - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \sin \gamma_2 \xi \right) + \frac{\Delta_2}{\Delta} \left(\gamma_1 \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \cosh \gamma_1 \xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_2^2 \gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 \gamma_2^2 + a_{11}} \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \cos \gamma_2 \xi \right) + \gamma_2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho\omega^2 l^2}{E} \right] \sin \gamma_2 \xi \right\}, \quad (4.21)$$

что позволяет выполнить числовые расчеты.

5. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ В ЗАДАЧАХ ТИПА II

Как было показано в параграфе 4, при заданных геометрических и физических параметрах консольного стержня существует интервал допустимых значений частот вынужденных колебаний, для которого качественно сохраняется вид корней частотного уравнения, но с изменением их численной величины при замене исходных геометрических и физических параметров, удовлетворяющих интервалу допустимых значений частот вынужденных колебаний.

Это дает возможность распространить метод расчета вынужденных колебаний, изложенный в предыдущем параграфе 4, на задачи типа II. Для этого необходимо по полученным новым значениям γ_1, γ_2 подчинить общие решения (4.1), (4.2) для функций $X(\xi)$, $\Psi(\xi)$ граничным условиями $X(0) = A_0$, $\Psi(0) = 0$ (формулы (4.3), (4.4)) и в дальнейшем выразить константы A_2, B_2, D_1, D_2 через A_1, B_1 (формулы (4.8)), что приведет к решению (4.9), (4.10) для функций $X(\xi)$ и $\Psi(\xi)$. Подчиняя эти решения граничным условиям

$$M(1) = \left. \frac{EJ}{l} \frac{d\Psi}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0,$$

$$Q(1) = \left. \left\{ \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \rho J \omega^2 \Psi \right\} \right|_{\xi=1} = 0,$$

получаем систему для определения коэффициентов A_1, B_1 , матрица которой $\|\alpha_{ij}\|$ дает уравнение $\Delta = 0$, определяющее собственные частоты для принятых параметров исследуемого стержня, являющихся резонансными в задачах о вынужденных колебаниях. Если заданная частота вынужденных колебаний не является резонансной, то полный расчет может быть выполнен по методике, изложенной в параграфе 4.

Объем данной статьи не позволяет проиллюстрировать решения в параграфе 4 примером расчета, который авторы предполагают выполнить в дальнейших публикациях.

6. Выводы

В статье представлен метод расчета вынужденных колебаний консольного стержня, имеющего свободный правый и защемленный левый конец, колеблющийся по закону $y(0, t) = A_0 \sin \omega t$, где A_0 и ω — заданные амплитуда и частота вынужденных колебаний. Дан анализ последовательности выполнения расчета, иллюстрируемый некоторыми числовыми примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Стретт (Рэлей). Теория звука. М., Л.; Гостехтеориздат, 1940. Том I. 499 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.; Физматгиз, 1959.
3. Павилайнен В.Я., Тулкина А.Н. Расчет частот и форм свободных колебаний консольной балки на основе теории С.П. Тимошенко. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». СПб.; Изд-во СПбГУ, 2008. Вып. 4. С. 40–59.
4. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. М.; Физматгиз, 1959.
5. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.Н. Расчеты на прочность в машиностроении. М.; Машгиз, 1959. Том III. С. 320.
6. Новожилов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней. // Прикладная математика и механика, 1965. Том 29. Вып. 2. С. 261–281.

К ВОПРОСУ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

С. И. Перегудин, С. Е. Холодова

Проводится исследование механизмов генерации магнитного поля Земли вследствие трехмерного крупномасштабного движения невязкой, несжимаемой, неоднородной (стратифицированной) идеально проводящей электропроводной вращающейся жидкости, сосредоточенной в жидком земном ядре. Предлагаемая математическая модель исследуемого физического процесса представляет собой замкнутую систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений гидродинамики с учетом вращения Земли, силы Лоренца и соответствующих уравнений магнитной динамики с необходимыми граничными условиями. С использованием сферических координат и масштабов функций производится анализ математической модели, пригодной для расчета трехмерных движений с большим временным масштабом и пространственным горизонтальным масштабом, сравнимым с радиусом Земли. Основная идея анализа состоит в построении схемы последовательных приближений, в которой геострофическое приближение является первым шагом. Указанный метод анализа позволяет, не ограничиваясь эвристическими рассуждениями, вывести общие геострофические уравнения, описывающие движения как однородной, так и стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости. Получено аналитическое решение системы нелинейных уравнений в частных производных, моделирующей геострофическое движение в слое идеально проводящей электропроводной стратифицированной вращающейся жидкости. Анализ структуры представленных полей магнитогеодинамических величин позволяет сделать вывод о справедливости гипотезы С.И. Брагинского [1] о существовании сильных изменений в тонком слое земного ядра, примыкающем к границе с мантией.

Целью статьи является исследование волновых трехмерных крупномасштабных движений невязкой, несжимаемой стратифицированной идеально проводящей электропроводной вращающейся

Доклад на семинаре 11 ноября 2008 г.

© С. И. Перегудин, С. Е. Холодова, 2009

ся жидкости, сосредоточенной в жидком земном ядре. Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд. Интерес к земному ядру обусловлен тем, что оно оказывает существенное влияние на многие геофизические явления и процессы, происходившие и происходящие в Земле, которые могут проявляться и на ее поверхности.

В статье [2] представлено аналитическое решение, позволяющее определить влияние рельефа мантии и динамики твердого ядра Земли на магнитогидродинамические характеристики волнового процесса в жидком ядре.

В статье [3] была проведена редукция нелинейной системы уравнений в частных производных, моделирующей возмущения в идеальной электропроводной вращающейся жидкости, с учетом инерционных сил, сил тяжести, Кориолиса, Лоренца, а также имеющихся неоднородностей плотности, к скалярному линейному уравнению и сделан вывод об аналитическом представлении решения задачи о малых возмущениях в рассматриваемой жидкости. Анализ полученного решения позволил установить факт существования установившегося режима колебаний при больших значениях времени, что служит подтверждением важной роли стратификации плотности жидкого ядра Земли, определяющей в целом ряде случаев его основную динамику как важный фактор эволюции планеты.

Согласно имеющейся в настоящее время гипотезе С.И. Брагинского [1], в динамику магнитного поля существенный вклад вносит движение представленной жидкости непосредственно в тонком, примыкающем к мантии, слое. В статье [4] был проведен анализ и сделан вывод о справедливости гипотезы С.И. Брагинского для возмущений с относительно малым горизонтальным масштабом, значительно меньшим радиуса Земли, развивающихся вблизи некоторой точки со сферическими координатами (θ_0, φ_0) . Особый интерес представляют глобальные возмущения с наибольшей длиной волны, возможной в сферическом слое ядра, с учетом термодинамических изменений у границы с мантией, чему и посвящены исследования, представленные в настоящей статье.

Итак, будем изучать волновые движения у границы земного ядра в тонком сферическом слое устойчиво стратифицированной

жидкости.

Система уравнений для описания движения идеальной невязкой электропроводной несжимаемой вращающейся с угловой скоростью ω жидкости в магнитной гидродинамике в переменных Эйлера имеет вид ([5]–[9])

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\omega \times \mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} \operatorname{rot} \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{b}), \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \end{aligned}$$

где \mathbf{b} — вектор магнитной индукции, \mathbf{v} — скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , p — давление, ρ — плотность, g — величина ускорения силы тяжести. Предполагается, что магнитная проницаемость и электропроводность постоянны.

Если считать плотность переменной, тогда кроме уравнения движения, уравнения неразрывности и уравнений Максвелла необходимо привлекать уравнение баланса внутренней энергии ([7], [9]–[11], [16])

$$\rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -p\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + k\Delta T + \chi + \rho Q + \lambda (\operatorname{rot} \mathbf{b})^2. \quad (1)$$

В силу того, что рассматриваемая жидкость идеально проводящая, последнее слагаемое в правой части уравнения (1) будет отсутствовать ($\lambda = 0$). В уравнении (1) \mathcal{E} — внутренняя энергия единицы массы, T — температура, k — коэффициент теплопроводности, Q — скорость притока тепла от внешних источников на единицу массы, χ — приток тепла, обусловленный вязкой диссипацией. В дальнейшем будем считать, что $\chi = 0$.

Если эффекты сжимаемости незначительны, то применимо уравнение состояния:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

где ρ_0 и T_0 — средняя плотность жидкости и средняя температу-

ра соответственно, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \Big|_p$ — коэффициент термического расширения. Для несжимаемой жидкости вместо уравнения (1) будем использовать уравнение переноса тепла в следующем виде ([16]):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho c_P} \Delta T + \frac{Q}{c_P}, \quad (2)$$

здесь c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Тогда температуру в уравнении (2) можно выразить через плотность:

$$\frac{d\rho}{dt} = \varkappa \Delta \rho - \frac{\alpha \rho_0}{c_P} Q, \quad (3)$$

здесь $\varkappa = \frac{k}{\rho c_P}$ — коэффициент температуропроводности.

При рассмотрении крупномасштабных движений, горизонтальный масштаб которых сравним с радиусом Земли, основные уравнения квазигеострофического движения испытывают некоторые изменения. Сведение геометрии задачи к плоской более не является естественным приближением. Нельзя пренебрегать и горизонтальной изменчивостью основного поля плотности. Таким образом, для адекватного описания движения таких масштабов необходимо рассмотреть основные уравнения магнитной гидродинамики с учетом соответствующих соотношений между масштабами. Будем считать, что вертикальный масштаб плотности велик по сравнению с вертикальным масштабом движения.

Представим размерные переменные, отмеченные звездочками, через безразмерные переменные без индексов следующим образом:

$$\begin{aligned} r_* &= r_0 \left(1 + \frac{D}{r_0} z \right), & v_{\lambda_*} &= U v_\lambda, & v_{\theta_*} &= U v_\theta, \\ b_{\lambda_*} &= B b_\lambda, & b_{\theta_*} &= B b_\theta, & v_{r_*} &= \frac{D}{r_0} U v_r = W v_r, \\ b_{r_*} &= \frac{D}{r_0} B b_r = V b_r, & t_* &= \frac{r_0}{U} t, \end{aligned} \quad (4)$$

где r_0 — радиус Земли, D — вертикальный масштаб движения, r_0 — горизонтальный масштаб движения, U — масштаб горизонтальной

скорости, $W = \frac{D}{r_0}U$ — масштаб вертикальной скорости, B — масштаб горизонтальных компонент магнитного поля, $V = \frac{D}{r_0}B$ — масштаб вертикальной компоненты магнитного поля. В качестве масштаба времени выбрано время адвекции $\frac{r_0}{U}$. Масштабы для полей плотности и давления выберем с учетом того, что при малых числах Россби горизонтальный градиент давления одинаков по порядку величины с силой Кориолиса и что по порядку величины силы плавучести и вертикального градиента давления равны. Последнее следует из удовлетворения с большой степенью точности крупномасштабных движений приближению гидростатики. Итак, плотность представляется в виде суммы постоянного значения ρ_0 и слагаемого $\frac{2\omega U r_0 \rho_0}{gD}\rho$, описывающего полное изменение плотности в пространстве и во времени, т.е.

$$\rho_* = \rho_0 + \frac{2\omega U r_0 \rho_0}{gD}\rho, \quad (5)$$

а представление для давления имеет вид

$$p_* = -\rho_0 g D z + 2\omega U r_0 \rho_0 p. \quad (6)$$

Воспользуемся сферическими координатами r, θ, λ , где

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi.$$

Тогда проекции скорости точки M в сферической системе координат определяются соотношениями ([12])

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\lambda = r \sin \theta \dot{\lambda},$$

а уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

в сферических координатах принимает вид ([12])

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

Уравнения сохранения импульса представляются в форме ([12])

$$\begin{aligned} \frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta}{r} + 2\omega \sin \theta v_r + 2\omega \cos \theta v_\theta = \\ = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{\mu \rho} (b_\theta W_r - b_r W_\theta), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} - 2\omega \cos \theta v_\lambda = \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu \rho} (b_r W_\lambda - b_\lambda W_r), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} - 2\omega \sin \theta v_\lambda = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g - \frac{1}{\mu \rho} (b_\lambda W_\theta - b_\theta W_\lambda), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} W_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (b_\lambda \sin \theta) - \frac{\partial b_\theta}{\partial \lambda} \right], \quad W_\lambda = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r b_\theta) - \frac{\partial b_r}{\partial \theta} \right], \\ W_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial b_r}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial r} (r b_\lambda \sin \theta) \right]. \end{aligned}$$

Уравнения движения необходимо дополнить термодинамическим уравнением

$$\frac{d\rho}{dt} = \varkappa \Delta \rho - \frac{\alpha \rho_0}{c_P} Q \quad (11)$$

с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

а также уравнениями индукции и соленоидальности магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_r}{\partial t} = \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + b_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial b_r}{\partial \theta} - \\ - \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial b_r}{\partial \lambda} - v_r \frac{\partial b_r}{\partial r}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_\theta}{\partial t} = & \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + b_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} - \\ & - \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial b_\theta}{\partial \lambda} - v_r \frac{\partial b_\theta}{\partial r}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_\lambda}{\partial t} = & \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + b_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial b_\lambda}{\partial \theta} - \\ & - \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial b_\lambda}{\partial \lambda} - v_r \frac{\partial b_\lambda}{\partial r}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 b_r) + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b_\theta) + \frac{\partial b_\lambda}{\partial \lambda} \right] = 0. \quad (15)$$

Тогда уравнения движения (7)–(11) и уравнения (12)–(15) в безразмерных переменных, с учетом соотношений (4)–(6), примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon F \frac{d\rho}{dt} + (1 + \varepsilon F \rho) \left[\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2Dv_z}{r_*} + \frac{r_0}{r_* \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) \right] &= 0, \\ \varepsilon \left(\frac{dv_\lambda}{dt} + v_\lambda v_z \frac{D}{r_*} + v_\lambda v_\theta \frac{r_0}{r_*} \operatorname{ctg} \theta \right) + v_\theta \cos \theta + \frac{D}{r_0} v_z \sin \theta &= \\ = -\frac{r_0}{r_* \sin \theta} \frac{1}{1 + \varepsilon F \rho} \left[\frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\varepsilon B^2}{U^2 \mu \rho_0} \left(b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \lambda} + \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 b_z \frac{\partial b_z}{\partial \lambda} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon B^2}{U^2 \mu \rho_*} \left(b_z \frac{\partial b_\lambda}{\partial z} + \frac{r_0}{r_*} b_\theta \frac{\partial b_\lambda}{\partial \theta} + \frac{D}{r_0} \frac{r_0}{r_*} b_\lambda b_z + \frac{r_0}{r_*} b_\lambda b_\theta \operatorname{ctg} \theta \right), \\ \varepsilon \left(\frac{dv_\theta}{dt} + v_\theta v_z \frac{D}{r_*} - v_\lambda^2 \frac{r_0}{r_*} \operatorname{ctg} \theta \right) - v_\lambda \cos \theta &= \\ = -\frac{r_0}{r_*} \frac{1}{1 + \varepsilon F \rho} \left[\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon B^2}{U^2 \mu \rho_0} \left(b_\lambda \frac{\partial b_\lambda}{\partial \theta} + \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 b_z \frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{D}{r_0} b_\theta b_z + \operatorname{ctg} \theta b_\lambda^2 \right) \right] + \frac{\varepsilon B^2}{U^2 \mu \rho_*} \left(b_z \frac{\partial b_\theta}{\partial z} + \frac{r_0}{r_* \sin \theta} b_\lambda \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} \right), \\ (1 + \varepsilon F \rho) \left\{ \varepsilon \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \frac{dv_z}{dt} - \varepsilon \frac{D}{r_*} (v_\lambda^2 + v_\theta^2) - \frac{D}{r_0} v_\lambda \sin \theta \right\} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \\ -\rho - \frac{\varepsilon B^2}{U^2 \mu \rho_0} \left(b_\lambda \frac{\partial b_\lambda}{\partial z} + b_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon B^2}{U^2 \mu \rho_0} \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \frac{r_0}{r_*} \left[b_\theta \frac{\partial b_z}{\partial \theta} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial b_z}{\partial \lambda} - \frac{r_0}{D} (b_\lambda^2 + b_\theta^2) \Big], \\
& \frac{d\rho}{dt} = \frac{k_V r_0}{UD^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{k_H}{Ur_0} \Delta_2 \rho, \\
\frac{\partial b_z}{\partial t} &= \frac{r_0}{r_*} b_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{r_0}{r_* \sin \theta} b_\lambda \frac{\partial v_z}{\partial \lambda} + b_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{r_0}{r_*} v_\theta \frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \\
& - \frac{r_0}{r_* \sin \theta} v_\lambda \frac{\partial b_z}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial b_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial b_\theta}{\partial t} &= \frac{r_0}{r_*} b_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{r_0}{r_* \sin \theta} b_\lambda \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + b_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{r_0}{r_*} v_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} - \\
& - \frac{r_0}{r_* \sin \theta} v_\lambda \frac{\partial b_\theta}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial b_\theta}{\partial z}, \\
\frac{\partial b_\lambda}{\partial t} &= \frac{r_0}{r_*} b_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{r_0}{r_* \sin \theta} b_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + b_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} - \frac{r_0}{r_*} v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - \\
& - \frac{r_0}{r_* \sin \theta} v_\lambda \frac{\partial b_\lambda}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial b_\lambda}{\partial z},
\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = \frac{U}{2\omega r_0}, \quad F = \frac{4\omega^2 r_0^2}{gD},$$

k_V и k_H — коэффициенты диффузии в вертикальном и горизонтальном направлениях соответственно. Предполагается, что k_V и k_H различны. Операторы $\frac{d}{dt}$ и Δ_2 определяются как

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r_0}{r_*} \left(\frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \\
\Delta_2 &= \frac{r_0^2}{r_*^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right).
\end{aligned}$$

При $2\omega \approx 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $r_0 = O(6 \cdot 10^8 \text{ см})$, $D = O(40 \text{ км})$, $U = O(1 \text{ см/с})$ параметры ε , F и $\frac{D}{r_0}$ равны соответственно:

$$\varepsilon = O(10^{-5}), \quad F = O(1.8), \quad \frac{D}{r_0} = O(0.7 \cdot 10^{-2}) = O(10^{-3}).$$

Магнитное давление сравнимо с $\frac{B^2}{\mu}$, а инерционные силы в уравнении движения эквивалентны кинетическому давлению порядка ρU^2 . Отношение кинетического и магнитного давлений оказывается порядка A^2 , где A — число Альфвена [13], определяемое формулой $A = \frac{U\sqrt{\mu\rho}}{B}$. Отношение удельной кинетической энергии вещества $\frac{\rho v^2}{2}$ и магнитной энергии $\frac{B^2}{2\mu}$ также равно A^2 . Если магнитное поле «вморожено» в вещество, то большое значение A означает, что магнитное поле слабо влияет на движение. Малое A означает, что движение в основном определяется индукцией магнитного поля. Если $A \approx 1$, то движение и поле оказывают друг на друга более или менее равное воздействие и наблюдается примерно равное распределение энергии между ними. Число Альфвена также называют альфвеновским числом Маха [13], характеризующим отношение скорости течения жидкости к альфвеновской скорости: $M_A = \frac{U}{U_A}$, $U_A = \frac{B}{\sqrt{\mu\rho}}$. Итак, предположим, что кинетическое и магнитное давления имеют один порядок: $\rho U^2 \sim \frac{B^2}{\mu}$, т. е. полагая для альфвеновского числа Маха

$$M_A = \frac{U\sqrt{\mu\rho}}{B} = O(1),$$

с точностью до малых членов уравнения движения записываются следующим образом:

$$v_\theta \cos \theta = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (16)$$

$$v_\lambda \cos \theta = \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (17)$$

$$\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + v_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial z} + \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + b_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial b_\lambda}{\partial \lambda} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = b_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial v_z}{\partial \lambda} + b_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_\theta \frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial b_z}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial b_z}{\partial z}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = b_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + b_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - v_\theta \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial b_\theta}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial b_\theta}{\partial z}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial b_\lambda}{\partial t} = b_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + b_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} - v_\theta \frac{\partial b_\lambda}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial b_\lambda}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial b_\lambda}{\partial z}. \quad (24)$$

Из вида уравнений системы (16)–(24) можно сделать вывод, что поле скорости является бездивергентным, геострофическим и гидростатическим и что вертикальный градиент плотности не задается горизонтально однородным полем плотности, а определяется движением жидкости. В уравнении (20) параметр ν задается как

$$\nu = \frac{k_V r_0}{UD^2}.$$

Если $k_V = O(0.1 \text{ см}^2/\text{с})$, $U = O(1 \text{ см}/\text{с})$, $D = O(4 \cdot 10^6 \text{ см})$, то $\nu = O(4 \cdot 10^{-6})$. Следовательно, член, пропорциональный ν , достаточно мал, но тем не менее он будет учтен в системе (16)–(24) с целью описания термического слоя у границы жидкого ядра Земли с мантией.

Отметим важное свойство динамики крупномасштабных геострофических движений электропроводной жидкости. Оно заключается в том, что, как и в случае обычной гидродинамики, геострофическое приближение не приводит к вырожденному характеру системы уравнений для главных членов соответствующих разложений, в отличие от геострофических движений с меньшим горизонтальным масштабом L , таким, что $\frac{L}{r_0} \ll 1$. Следует отметить, что при большой величине горизонтального масштаба движения уравнения Максвелла соленоидальности и индукции магнитного поля для главных членов соответствующих разложений сохраняют свой вид в смысле вида исходных названных уравнений в размерном виде.

Итак, задача состоит в определении стационарного распределения плотности и всех магнитогидродинамических величин, возни-

кающих в ядре Земли в результате термодинамических изменений у границы с мантией, в предположении, что такая задача описывается уравнениями крупномасштабной динамики, полученными выше.

Исключим давление из уравнений (16) и (17). Для этого продифференцируем уравнение (16) по θ :

$$v_\theta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \sin 2\theta = -\frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial \lambda}, \quad (25)$$

а уравнение (17) — по λ :

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \cos \theta = \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial \lambda}. \quad (26)$$

Из уравнения (25) с учетом соотношения следует, что (26)

$$v_\theta \cos 2\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \sin 2\theta + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \cos \theta = 0,$$

или, разделив на произведение $\cos \theta \cdot \sin \theta$,

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta} v_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} = 0. \quad (27)$$

Из уравнения (19) получаем

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} - \operatorname{ctg} \theta v_\theta = 0. \quad (28)$$

Тогда из уравнения (27) с учетом уравнения (28) получим

$$\left(\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta} - \operatorname{ctg} \theta \right) v_\theta = \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

или

$$v_\theta \sin \theta = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \cos \theta. \quad (29)$$

Согласно уравнениям (29) и (16),

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \cos^2 \theta = \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (30)$$

Уравнение (20), в случае стационарного движения с учетом геострофических соотношений (16) и (17) и уравнения гидростатики (18), примет вид

$$\frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) - v_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\nu \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}.$$

Поскольку из уравнения (18) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = -\frac{\partial^2 p}{\partial \lambda \partial z}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial z},$$

то окончательно уравнение (20) принимает вид

$$\frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \lambda \partial z} \right) - v_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\nu \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}. \quad (31)$$

Уравнения (22), (23) и (24) с учетом геострофических соотношений (16) и (17) представимы в форме

$$b_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{b_\lambda}{\sin \theta} \frac{\partial v_z}{\partial \lambda} + \frac{b_z}{\cos^2 \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\mathcal{D}(p, b_z)}{\mathcal{D}(\theta, \lambda)} - v_z \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (32)$$

$$-b_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) - \frac{b_\lambda}{\sin^2 \theta \cos \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \lambda^2} - \frac{b_z}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \lambda} + \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\mathcal{D}(p, b_\theta)}{\mathcal{D}(\theta, \lambda)} - v_z \frac{\partial b_\theta}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

$$b_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{b_\lambda}{\sin \theta \cdot \cos \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \lambda \partial \theta} + \frac{b_z}{\cos \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\mathcal{D}(p, b_\lambda)}{\mathcal{D}(\theta, \lambda)} - v_z \frac{\partial b_\lambda}{\partial z} = 0. \quad (34)$$

В полученной системе уравнений (30)–(34) искомыми функциями являются

$$v_z(\theta, \lambda, z), \quad p(\theta, \lambda, z), \quad b_\theta(\theta, \lambda, z), \quad b_\lambda(\theta, \lambda, z), \quad b_z(\theta, \lambda, z).$$

Рассмотрим граничные условия для системы (30)–(34). Будем изучать динамику ниже экмановского слоя, прилежащего к границе жидкого ядра Земли с мантией. Так как в рассматриваемой области вязкость несущественна, то достаточным является задание на верхней границе нормальной компоненты скорости. Итак,

$$v_z = v_{ze}(\theta, \lambda, 1).$$

На верхней границе рассматриваемой области плотность необходимо согласовать с заданным полем плотности у поверхности мантии, которая в узком экмановском слое у границы жидкого земного ядра с мантией меняется незначительно. С учетом уравнения состояния

$$\rho_* = \rho_0(1 - \alpha T_*)$$

условие это представим в размерном виде

$$\begin{aligned} T_*(\theta, \lambda, 1) = \mathcal{F}_0 T_s(\theta, \lambda, 1) &= \frac{\rho_0 - \rho_*}{\alpha \rho_0} = \frac{\rho_0 - \rho_0(1 + \varepsilon F \rho)}{\alpha \rho_0} = \\ &= -\frac{\varepsilon F \rho}{\alpha} = -\frac{2\omega U r_0}{\alpha g D} \rho = -\frac{2\omega W r_0^2}{\alpha g D^2} \rho(\theta, \lambda, 1). \end{aligned}$$

Откуда

$$\rho(\theta, \lambda, 1) = -\frac{\alpha g D^2 \mathcal{F}_0}{2\omega W r_0^2} T_s(\theta, \lambda), \quad (35)$$

где \mathcal{F}_0 — характерная величина изменений поверхностной температуры, α — коэффициент термического расширения. Функция $T_s(\theta, \lambda)$ определяет горизонтальную структуру поля поверхностной температуры и имеет порядок $O(1)$. Далее выберем вертикальный масштаб движения D таким, что

$$D = \sqrt{\frac{2\omega W r_0^2}{\alpha g \mathcal{F}_0}}, \quad (36)$$

и, следовательно, ρ имеет порядок $O(1)$.

При выборе вертикального масштаба движения согласно соотношению (36) горизонтальные изменения плотности в слое будут того же порядка, что и горизонтальные изменения поверхностной

плотности. Учитывая, что $2\omega \approx 1.4 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$, $r_0 = O(6 \cdot 10^8 \text{см})$, $\alpha \mathcal{F}_0 \approx 3 \cdot 10^{-4}$, $g = 10^3 \text{см}/\text{с}^2$, $W = 10^{-2} \text{см}/\text{с}$, получим оценку $D = 40 \text{км}$. Эта оценка согласуется с оценками [14]. Пусть начало координат находится на границе жидкого земного ядра и мантии. Так как D намного меньше толщины объема жидкого ядра, то предполагается, что z изменяется от “ $-\infty$ ” до “0”. При $z \rightarrow -\infty$ возмущение плотности затухает и вертикальная компонента скорости устремится к своему асимптотическому значению. Кроме рассмотренных граничных условий потребуем выполнение условий

$$\begin{aligned} b_\theta = 0, b_\lambda = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ v_\theta \rightarrow 0, v_\lambda \rightarrow 0, b_\theta \rightarrow 0, b_\lambda \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналитическая структура функции p :

$$p(\theta, \lambda, z) = a(\theta, \lambda) + m(\theta, \lambda)e^{k(\theta, \lambda)z}, \quad (38)$$

согласуется со структурой функции p , предложенной Г.Т. Нидлером [15] в традиционной гидродинамике без учета силы Лоренца. В дальнейшем $k(\theta, \lambda) > 0$.

Подставляя функцию p из соотношения (38) в уравнение (30) и интегрируя полученное уравнение по глубине жидкого ядра, получим выражение для вертикальной компоненты скорости:

$$\begin{aligned} v_z(\theta, \lambda, z) = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left\{ \frac{1}{k} \frac{\partial m}{\partial \lambda} (e^{kz} - 1) + z \frac{\partial a}{\partial \lambda} + \right. \\ \left. + m \frac{\partial k}{\partial \lambda} \left(\frac{ze^{kz}}{k} + \frac{1 - e^{kz}}{k^2} \right) \right\} + v_{ze}(\theta, \lambda). \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнение (31) с учетом выражений (38) и (39) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial \lambda} + \frac{\partial m}{\partial \lambda} e^{kz} + m \frac{\partial k}{\partial \lambda} z e^{kz} \right) e^{kz} \left(\frac{\partial m}{\partial \theta} k + m \frac{\partial k}{\partial \theta} + mkz \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial a}{\partial \theta} k + \frac{\partial m}{\partial \theta} e^{kz} + m \frac{\partial k}{\partial \theta} z e^{kz} \right) e^{kz} \left(k \frac{\partial m}{\partial \lambda} + m \frac{\partial k}{\partial \lambda} + mkz \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right) \right] - \\ - \frac{1}{\cos^2 \theta} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial m}{\partial \lambda} (e^{kz} - 1) + z \frac{\partial a}{\partial \lambda} + m \frac{\partial k}{\partial \lambda} \left(\frac{ze^{kz}}{k} + \frac{1 - e^{kz}}{k^2} \right) \right] mk^2 e^{kz} = \\ = -\nu mk^3 e^{kz} - mk^2 e^{kz} v_{ze}. \end{aligned} \quad (40)$$

Из уравнения (40) выполняются следующие соотношения:

$$m^2 k \frac{\partial k}{\partial \lambda} = 0, \quad (41)$$

$$m \frac{\partial m}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - k \right) = 0, \quad (42)$$

$$km \frac{\partial a}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - k \right) = 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \nu mk^3 = & \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \left(k \frac{\partial a}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \lambda} - \frac{\partial a}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} (mk) \right) - \\ & - \frac{mk}{\cos^2 \theta} \frac{\partial m}{\partial \lambda} + mk^2 v_{ze}. \end{aligned} \quad (44)$$

В уравнении (41) $\frac{\partial k}{\partial \lambda} = 0$ при $m \neq 0$, $k \neq 0$, и, следовательно, $k = k(\theta)$. Соотношения (42)–(44) записаны с учетом этого факта. Из соотношений (42) и (43) следует, что либо $\frac{\partial m}{\partial \lambda} = 0$ и $\frac{\partial a}{\partial \lambda} = 0$ одновременно, что означает независимость от λ давления, горизонтальных компонент скорости и равенство нулю v_θ и вертикальной компоненты скорости v_{ze} при любом z , либо $k(\theta)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - k = 0,$$

откуда

$$k(\theta) = \frac{C}{\cos \theta}, \quad C = \text{const}. \quad (45)$$

Из выражения (39) следует, что $\frac{\partial a}{\partial \lambda} = 0$, а из граничных условий

$$v_\theta \rightarrow 0, \quad v_\lambda \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty$$

следует, что $a(\theta, \lambda) \equiv 0$.

Из условия (35) при $z = 0$ получим

$$\rho(\theta, \lambda, 0) = -\frac{\partial p}{\partial z}(\theta, \lambda, 0) = -T_s(\theta, \lambda) = -mk,$$

следовательно,

$$m(\theta, \lambda) = \frac{T_s(\theta, \lambda)}{k(\theta)}, \quad (46)$$

а из уравнений (16)–(18) и соотношений (38) и (46) находим следующие гидродинамические характеристики:

$$p(\theta, \lambda, z) = \frac{T_s(\theta, \lambda)}{k(\theta)} e^{kz}, \quad (47)$$

$$\rho(\theta, \lambda, z) = -T_s(\theta, \lambda) e^{kz},$$

$$v_\lambda(\theta, \lambda, z) = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} - \frac{T_s}{k^2} \frac{dk}{d\theta} + \frac{T_s}{k} \frac{dk}{d\theta} z \right) e^{kz}, \quad (48)$$

$$v_\theta(\theta, \lambda, z) = -\frac{1}{k \cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} e^{kz}, \quad (49)$$

$$v_z(\theta, \lambda, z) = v_{ze}(\theta, \lambda) + \frac{1}{k^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} (e^{kz} - 1). \quad (50)$$

Из соотношения (44) с учетом выражений (45) и (46) следует

$$\nu C^3 + \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \cos \theta - C^2 v_{ze} \cos \theta = 0$$

и, согласно выражению (50), получаем асимптотическое значение скорости в виде

$$v_{z\infty} = \frac{C\nu}{\cos \theta},$$

определяемое при фиксированном C параметром ν , характеризующим интенсивность турбулентной диффузии плотности, и диссипация является причиной подъема жидкости от границы жидкого и твердого ядер Земли.

Рассмотрим далее уравнения Максвелла (32)–(34), которые с учетом представлений (47) и (48)–(50) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} b_\theta & \left[\frac{(e^{kz} - 1)}{C^2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \lambda \partial \theta} + \frac{ze^{kz} \sin \theta}{C \cos^2 \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \right] + \frac{b_\lambda}{C^2 \sin \theta} (e^{kz} - 1) \frac{\partial^2 T_s}{\partial \lambda^2} + \\ & + \frac{b_z e^{kz}}{C \cos \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} + \frac{e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} \left[\frac{e^{kz} \cos \theta}{C} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{T_s \sin \theta}{C} e^{kz} + \frac{z T_s e^{kz} \sin \theta}{\cos \theta} \left] \frac{\partial b_z}{\partial \lambda} - \frac{(e^{kz} - 1)}{C^2} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (51)$$

$$b_\theta \left[\frac{e^{kz} \cos \theta}{C \sin^2 \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} - \frac{e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \theta \partial \lambda} - \frac{z e^{kz}}{\cos^2 \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \right] - \frac{b_\lambda e^{kz}}{C \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \lambda^2} -$$

$$-\frac{b_z e^{kz}}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} + \frac{e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} - \left[\frac{e^{kz} \cos \theta}{C} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} - \frac{e^{kz} \sin \theta}{C} T_s + \right.$$

$$\left. + \frac{z e^{kz} T_s \sin \theta}{\cos \theta} \right] \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \frac{\partial b_\theta}{\partial \lambda} - \frac{(e^{kz} - 1)}{C^2} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \frac{\partial b_\theta}{\partial z} = 0, \quad (52)$$

$$b_\theta \left[\left(\frac{e^{kz} \cos \theta}{C} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} - \frac{e^{kz} \sin \theta}{C} T_s + \frac{z e^{kz} \sin \theta}{\cos \theta} T_s \right) \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{e^{kz} \cos \theta}{C} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \theta^2} - 2 \frac{e^{kz} \sin \theta}{C} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} + 2 \frac{z e^{kz} \sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{e^{kz} \cos \theta}{C} T_s + z T_s e^{kz} + \frac{z^2 C T_s e^{kz} \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \right) \frac{1}{\cos \theta} \right] +$$

$$+ \frac{b_\lambda}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \left[\frac{e^{kz} \cos \theta}{C} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \theta \partial \lambda} - \frac{e^{kz} \sin \theta}{C} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} + \frac{z e^{kz} \sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \right] +$$

$$+ \frac{b_z}{\cos \theta} \left[e^{kz} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} + \frac{z C T_s e^{kz} \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right] + \frac{e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \frac{\partial b_\lambda}{\partial \theta} -$$

$$-\frac{(e^{kz} - 1)}{C^2} \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} \frac{\partial b_\lambda}{\partial z} - \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \left[\frac{\cos \theta e^{kz}}{C} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{kz} T_s \sin \theta}{C} + \frac{z e^{kz} T_s \sin \theta}{\cos \theta} \right] \frac{\partial b_\lambda}{\partial \lambda} = 0. \quad (53)$$

Будем искать решение системы (21), (51)–(53) в виде

$$b_\lambda(\theta, \lambda, z) = \tilde{b}_\lambda(\theta, z) \sin a\lambda, \quad b_\theta(\theta, \lambda, z) = \tilde{b}_\theta(\theta, z) \cos a\lambda,$$

$$b_z(\theta, \lambda, z) = \tilde{b}_z(\theta, z) \cos a\lambda, \quad T_s(\theta, \lambda) = \tilde{T}(\theta) \cos a\lambda.$$

Для функций $\tilde{b}_\lambda, \tilde{b}_\theta, \tilde{b}_z$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{b}_z}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{b}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{b}_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{a}{\sin \theta} \tilde{b}_\lambda = 0, \quad (54) \\
& \tilde{b}_\theta \left(\frac{e^{kz} - 1}{C^2} \tilde{T}' + \tilde{T} z e^{kz} \sin \theta \right) + \frac{a \tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C^2 \sin \theta} \tilde{b}_\lambda - \\
& - \tilde{b}_z \left(-\frac{2 \tilde{T} e^{kz}}{C \cos \theta} + \frac{\tilde{T}' e^{kz}}{C \sin \theta} + \frac{z \tilde{T} e^{kz}}{\cos^2 \theta} \right) + \\
& + \frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial \tilde{b}_z}{\partial \theta} - \frac{\tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C^2} \frac{\partial \tilde{b}_z}{\partial z} = 0, \\
& \tilde{b}_\theta \left(-\frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin^2 \theta \cos \theta} + \frac{2 \tilde{T}' e^{kz}}{C \sin \theta} + \frac{2z \tilde{T} e^{kz}}{\cos^2 \theta} \right) + \\
& + \tilde{b}_\lambda \frac{a \tilde{T} e^{kz}}{C \sin^2 \theta} + \tilde{b}_z \frac{\tilde{T} e^{kz}}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial \tilde{b}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C^2} \frac{\partial \tilde{b}_\theta}{\partial z} = 0, \\
& \frac{\tilde{b}_\lambda}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \left(-\frac{\tilde{T}' e^{kz} \cos \theta}{C} + \frac{\tilde{T} e^{kz} \sin \theta}{C} - \frac{\tilde{T} z e^{kz} \sin \theta}{\cos \theta} \right) - \\
& - \frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{\partial \tilde{b}_\lambda}{\partial \theta} + \frac{\tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C} \frac{\partial \tilde{b}_\lambda}{\partial z} = 0, \\
& \tilde{b}_\theta \left[\left(\frac{\tilde{T}' \cos \theta}{C} - \frac{\tilde{T} \sin \theta}{C} + \frac{\tilde{T} z \sin \theta}{\cos \theta} \right) \operatorname{tg} \theta + \frac{\tilde{T}'' \cos \theta}{C} - \frac{2 \tilde{T}' \sin \theta}{C} + \right. \\
& + \frac{2 \tilde{T}' z \sin \theta}{C} - \frac{\tilde{T} \cos \theta}{C} + \tilde{T} z + \left. \frac{\tilde{T} z^2 C \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \right] + \tilde{b}_z \left(\tilde{T}' + \frac{\tilde{T} z C \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \\
& + \frac{a \tilde{b}_\lambda}{\sin \theta} \left(\frac{\tilde{T}' \cos \theta}{C} - \frac{\tilde{T} \sin \theta}{C} + \tilde{T} z \operatorname{tg} \theta \right) = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение (54) при $\tilde{b}_\lambda = 0$ позволяет ввести в рассмотрение функцию $\psi(\theta, z)$ соотношениями

$$\tilde{b}_z = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \tilde{b}_\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

При этом функция $\psi(\theta, z)$ является решением системы

$$(b_1(\theta) + b_2(\theta)z) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - (a_1(\theta) + a_2(\theta)z + a_3(\theta)z^2) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

$$A(\theta, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + B(\theta, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (55)$$

$$A_1(\theta, z) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B_1(\theta, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (56)$$

где

$$a_1(\theta) = \frac{\tilde{T}''(\theta) \cos \theta}{C} - \frac{\tilde{T}'(\theta) \sin \theta}{C} - \frac{\tilde{T}(\theta)}{C \cos \theta},$$

$$a_2(\theta) = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \tilde{T}(\theta) + 2\tilde{T}'(\theta) \operatorname{tg} \theta,$$

$$a_3(\theta) = \frac{\tilde{T}(\theta) C \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}, \quad b_1(\theta) = \tilde{T}'(\theta), \quad b_2(\theta) = \frac{\tilde{T}(\theta) C \sin \theta}{\cos^2 \theta},$$

$$A(\theta, z) = \frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \cos \theta} - \frac{2\tilde{T}' e^{kz}}{C \sin \theta} - \frac{2\tilde{T}_z e^{kz}}{\cos^2 \theta} + \frac{a_1 + a_2 z + a_3 z^2}{b_1 + b_2 z} \frac{\tilde{T} e^{kz}}{\sin \theta \cos \theta} +$$

$$+ \frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{(a_2 + 2a_3 z)(b_1 + b_2 z) - (a_1 + a_2 z + a_3 z^2)b_2}{(b_1 + b_2 z)^2},$$

$$B(\theta, z) = \frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin \theta} \frac{(a_1 + a_2 z + a_3 z^2)}{b_1 + b_2 z} - \frac{\tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C^2},$$

$$A_1(\theta, z) = \frac{b_1 + b_2 z}{a_1 + a_2 z + a_3 z^2} \left(\frac{\tilde{T}' (e^{kz} - 1)}{C^2} + \tilde{T}_z e^{kz} \sin \theta \right) -$$

$$- \frac{2\tilde{T} e^{kz}}{C \cos \theta} + \frac{\tilde{T}' e^{kz}}{C \sin \theta} + \frac{\tilde{T}_z e^{kz}}{\cos^2 \theta} + \frac{\tilde{T} e^{kz} \cos \theta}{C \sin^2 \theta} + \frac{\tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C^2 \sin \theta} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(a_1 + a_2 z + a_3 z)(b_1' + b_2' z) - (b_1 + b_2 z)(a_1' + a_2' z + a_3' z^2)}{(a_1 + a_2 z + a_3 z^2)^2} \right\},$$

$$B_1(\theta, z) = -\frac{\tilde{T} e^{kz}}{C \sin \theta} + \frac{\tilde{T} (e^{kz} - 1)}{C^2 \sin \theta} \frac{(b_1 + b_2 z)}{(a_1 + a_2 z + a_3 z^2)}.$$

Интегрируя уравнения (55) и (56), получим соответственно

$$\psi(\theta, z) = C_1(\theta) \int e^{-\int \frac{A(\theta, z)}{B(\theta, z)} dz} dz + C_3(\theta), \quad (57)$$

$$\psi(\theta, z) = C_2(z) \int e^{-\int \frac{A_1(\theta, z)}{B_1(\theta, z)} d\theta} d\theta + C_4(z). \quad (58)$$

Из граничных условий (37) получим

$$\begin{aligned} e^{-\int \frac{A(\theta, z)}{B(\theta, z)} dz} \Big|_{z \rightarrow -\infty} &\rightarrow 0, & e^{-\int \frac{A(\theta, z)}{B(\theta, z)} dz} \Big|_{z=0} &\rightarrow 0, \\ & \left\{ C_2'(z) \int e^{-\int \frac{A_1(\theta, z)}{B_1(\theta, z)} d\theta} d\theta - C_2(z) \times \right. \\ & \times \left. \int \left[\int e^{-\int \frac{A_1(\theta, z)}{B_1(\theta, z)} d\theta} \left(\int \frac{A'_{1z} B_1 - B'_{1z} A_1}{B_1^2} d\theta \right) d\theta \right] d\theta + C_4'(z) \right\} \Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \\ & \left\{ C_2'(z) \int e^{-\int \frac{A_1(\theta, z)}{B_1(\theta, z)} d\theta} d\theta - C_2(z) \times \right. \\ & \times \left. \int \left[\int e^{-\int \frac{A_1(\theta, z)}{B_1(\theta, z)} d\theta} \left(\int \frac{A'_{1z} B_1 - B'_{1z} A_1}{B_1^2} d\theta \right) d\theta \right] d\theta + C_4'(z) \right\} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Выполнение граничных условий (59) и соотношений (57), (58) накладывает ограничения на выбор функций $C_1(\theta)$, $C_2(z)$, $C_3(\theta)$, $C_4(z)$.

Вообще говоря, одно из уравнений, (55) или (56), можно и не рассматривать. Процитируем, например, А.Г. Куликовского и Г.А. Любимова [10]: "... Применив операцию дивергенции к уравнению индукции, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{b} = 0.$$

Поэтому, для того чтобы решение удовлетворяло уравнению соленоидальности поля

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0,$$

достаточно потребовать, чтобы этому уравнению удовлетворяли начальные условия. Следовательно, равенство $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ выполняется в силу уравнения индукции и начальных условий. Тем не менее во многих задачах удобнее использовать это уравнение вместо одной из проекций уравнения индукции.”

Полученное решение системы уравнений (55), (56) достаточно сложное для проведения анализа его поведения. Поэтому, с целью нахождения решения в виде, более приемлемом для качественного анализа его поведения, рассмотрим несколько иной метод интегрирования системы:

$$(b_1(\theta) + b_2(\theta)z) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - (a_1(\theta) + a_2(\theta)z + a_3(\theta)z^2) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (60)$$

$$A(\theta, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + B(\theta, z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (61)$$

Будем искать решение уравнения (60) в виде функциональной зависимости:

$$\psi(\theta, z) = \Phi(f(\theta, z)),$$

где функция $f(\theta, z)$ является решением системы

$$\frac{\partial f}{\partial z} = b_1(\theta) + b_2(\theta)z, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = a_1(\theta) + a_2(\theta)z + a_3(\theta)z^2,$$

откуда

$$f(\theta, z) = b_1(\theta)z + b_2(\theta)\frac{z^2}{2} + C_0(\theta)$$

и

$$b_1'(\theta)z + b_2'(\theta)\frac{z^2}{2} + C_0'(\theta) = a_1(\theta) + a_2(\theta)z + a_3(\theta)z^2.$$

Следовательно,

$$b_1'(\theta) = a_2(\theta), \quad \frac{b_2'(\theta)}{2} = a_3(\theta), \quad a_1(\theta) = C_0'(\theta) \quad (62)$$

и

$$f(\theta, z) = b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 + \int a_1(\theta)d\theta.$$

Интегрируя уравнение (60), получим его решение в виде

$$\psi(\theta, z) = \Phi \left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 + \int a_1(\theta)d\theta \right). \quad (63)$$

С учетом выражения (63) и уравнения (61)

$$\Phi''(\varphi) + \Phi'(\varphi)\gamma(\theta, z) = 0, \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, z) &= b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 + \int a_1(\theta)d\theta, \\ \gamma(\theta, z) &= \frac{B(\theta, z)b_2(\theta) + A(\theta, z)(b_1(\theta) + b_2(\theta)z)}{B(\theta, z)(b_1(\theta) + b_2(\theta)z)^2}. \end{aligned}$$

Понижая порядок уравнения (64), т. е., полагая $\Phi'(\varphi) = \tilde{\Phi}(\varphi)$, для функции $\tilde{\Phi}(\varphi)$ получим уравнение

$$\tilde{\Phi}'(\varphi) + \tilde{\Phi}(\varphi)\gamma(\theta, z) = 0,$$

решение которого можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}(\varphi(\theta, z)) = \tilde{C}(\theta, z) \exp(-\gamma(\theta, z)\varphi).$$

Следовательно,

$$\psi(\theta, z) = \Phi(\theta, z) = -\frac{\tilde{C}(\theta, z)}{\gamma(\theta, z)} \exp(-\gamma(\theta, z)\varphi) + \tilde{C}_1(\theta, z),$$

где $\tilde{C}(\theta, z)$ и $\tilde{C}_1(\theta, z)$ — произвольные функции интегрирования.

Учитывая асимптотическое поведение функций $\gamma(\theta, z)$ и $\gamma'_z(\theta, z)$ при $z \rightarrow -\infty$, а именно

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, z) &\sim \frac{1}{z^2}, \\ \gamma'_z(\theta, z) &= -\frac{2b_2^2(\theta)}{(b_1(\theta) + b_2(\theta)z)^3} + \frac{A'_z(\theta, z)}{B(\theta, z)(b_1(\theta) + b_2(\theta)z)^2} - \\ &\quad - \frac{A(\theta, z)B'_z(\theta, z)}{B^2(\theta, z)(b_1(\theta) + b_2(\theta)z)} - \frac{2A(\theta, z)b_2(\theta)}{B(\theta, z)(b_1(\theta) + b_2(\theta)z)^3} \sim \frac{1}{z^3}, \end{aligned}$$

получим, что для выполнения граничного условия $\frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \left[\frac{\exp(-\gamma(\theta, z)\varphi(\theta, z))}{\gamma(\theta, z)} \left(\frac{\tilde{C}(\theta, z)\gamma'_z(\theta, z)(1 + \gamma(\theta, z)\gamma(\theta, z))}{\gamma(\theta, z)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma(\theta, z)(b_1(\theta) + b_2(\theta)z) - \tilde{C}'_z(\theta, z) \right) + \tilde{C}'_{1z}(\theta, z) \right] = 0,$$

необходимыми являются равенства

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (z\tilde{C}(\theta, z) - z^2\tilde{C}'_z(\theta, z)) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{C}'_{1z}(\theta, z) = 0.$$

Следовательно, в качестве произвольных функций $\tilde{C}(\theta, z)$ и $\tilde{C}'_z(\theta, z)$ могут быть выбраны функции вида

$$\tilde{C}(\theta, z) = z \exp(kz) \Theta(\theta), \quad \tilde{C}'_z(\theta, z) = z^2 \exp(kz),$$

где функция $\Theta(\theta)$ определяется из граничного условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

а именно

$$\gamma(\theta, 0) b_1(\theta) = \Theta(\theta)$$

или

$$\frac{b_2(\theta)}{b_1(\theta)} + \frac{A(\theta, 0)}{B(\theta, 0)} = \Theta(\theta).$$

Итак,

$$\psi(\theta, z) = -\frac{z\Theta(\theta)\exp(kz)}{\gamma(\theta, z)} \exp(-\gamma(\theta, z)\varphi(\theta, z)) + z^2 \exp(kz).$$

Таким образом, компоненты магнитного поля представляются вы-

ражениями

$$b_z(\theta, \lambda, z) = \frac{\cos a\lambda}{\sin \theta} \left\{ \left([1 + \gamma(\theta, z)\varphi(\theta, z)] \frac{z \Theta(\theta) \gamma'_\theta(\theta, z) \exp(kz)}{\gamma^2(\theta, z)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z \exp(kz)}{\gamma(\theta, z)} [\gamma(\theta, z)\varphi'_\theta(\theta, z) - \Theta'(\theta) - zk'(\theta)\Theta(\theta)] \right) \times \right. \\ \left. \times \exp(-\gamma(\theta, z)\varphi(\theta, z)) + z^3 k'(\theta) \exp(kz) \right\},$$

$$b_\theta(\theta, \lambda, z) = -\frac{\cos a\lambda}{\sin \theta} \left\{ \frac{z \exp(kz) \Theta(\theta) \gamma'_z(\theta, z) [1 + \gamma(\theta, z)\varphi(\theta, z)]}{\gamma(\theta, z)} + \right. \\ \left. + \gamma(\theta, z) (b_1(\theta) + b_2(\theta)z) - (1 + kz)\Theta(\theta) \exp(kz) \right\} + (2 + kz)z \exp(kz).$$

Рассмотрим далее для большей наглядности следующий случай:

$$b_\lambda(\theta, \lambda, z) = 0, \quad \frac{\partial T_s}{\partial \lambda} = 0.$$

Тогда из уравнений (21), (51)–(53) получаем

$$b_\theta = b_\theta(\theta, z), \quad b_z = b_z(\theta, z), \quad b_z = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi(\theta, z)}{\partial \theta}, \\ b_\theta = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi(\theta, z)}{\partial z}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial z} \left\{ \left(T_s'' \frac{\cos \theta}{C} - T_s' \frac{\sin \theta}{C} - \frac{T_s}{C \cos \theta} \right) + \right. \\ \left. + [(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) T_s + 2 \operatorname{tg} \theta T_s'] z + \frac{C T_s \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} z^2 \right\} + \\ \left. + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(T_s' + \frac{C T_s \sin \theta}{\cos^2 \theta} z \right) = 0. \quad (65)$$

Запишем для удобства уравнение (65) в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} [a_1(\theta) + a_2(\theta)z + a_3(\theta)z^2] - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} [b_1(\theta) + b_2(\theta)z] = 0, \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\theta) &= T_s'' \frac{\cos \theta}{C} - T_s' \frac{\sin \theta}{C} - \frac{T_s}{C \cos \theta}, \\ a_2(\theta) &= (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) T_s + 2 \operatorname{tg} \theta T_s', \\ a_3(\theta) &= \frac{CT_s \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}, \quad b_1(\theta) = T_s', \quad b_2(\theta) = \frac{CT_s \sin \theta}{\cos^2 \theta}. \end{aligned} \quad (67)$$

Интегрируя уравнение (66), получим его решение в виде

$$\psi(\theta, z) = \Phi \left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 + \int a_1(\theta)d\theta \right). \quad (68)$$

Из граничного условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty \quad \text{и} \quad z = 0$$

следует

$$\Phi' \left(\int a_1(\theta)d\theta \right) = 0 \quad (69)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi' \left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 + \int a_1(\theta)d\theta \right) (b_1(\theta) + b_2(\theta)z) = 0. \quad (70)$$

Тогда при $\Phi(\theta, z) = J_0^2(\theta, z)$ из условия (69) получим

$$J_0 \left(\int a_1(\theta)d\theta \right) J_1 \left(\int a_1(\theta)d\theta \right) = 0,$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков. Предполагая

$$J_1 \left(\int a_1(\theta)d\theta \right) = 0,$$

т. е., что $\int a_1(\theta)d\theta$ — корень J_1 , получим $\int a_1(\theta)d\theta = C_1 = \text{const}$, следовательно, $a_1(\theta) = 0$. В этом случае, согласно (67),

$$T_s'' - T_s' \operatorname{tg} \theta - (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) T_s = 0. \quad (71)$$

Заметим, что граничное условие (70) для функции $\Phi(\theta, z) = J_0^2(\theta, z)$ выполняется. Действительно, используя асимптотическое представление функций $J_m(z)$ ([17]):

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty,$$

получим

$$\begin{aligned} & J_0\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2\right) J_1\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2\right) (b_1(\theta) + b_2(\theta)z) \sim \\ & \sim \frac{2}{\pi \left[b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2\right]} \cos\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 - \frac{\pi}{4}\right) \times \\ & \times \cos\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 - \frac{3\pi}{4}\right) (b_1(\theta) + b_2(\theta)z) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow -\infty} J_0\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2\right) J_1\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2\right) (b_1(\theta) + b_2(\theta)z) = \\ & = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\cos\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2 - \frac{3\pi}{4}\right)}{b_1(\theta)z + \frac{b_2(\theta)}{2}z^2} \times \\ & \times [b_1(\theta) + b_2(\theta)z] = 0. \end{aligned}$$

Из первых двух условий (62) получим

$$T_s'' - 2 \operatorname{tg} \theta T_s' - (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) T_s = 0$$

и

$$T_s' \sin \theta + T_s \cos \theta = 0,$$

откуда

$$T_s'' + (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) T_s = 0. \quad (72)$$

Далее, для того чтобы функция $T_s(\theta)$ удовлетворяла уравнениям (71) и (72), необходимо, чтобы функция $T_s(\theta)$ была решением уравнения

$$T_s' + 2 \operatorname{ctg} \theta T_s = 0. \quad (73)$$

Из уравнения (73) следует

$$T_s(\theta) = \frac{C_0}{\sin^2 \theta}, \quad C_0 = \text{const.}$$

Итак,

$$\psi(\theta, z) = J_0^2 \left(\frac{CC_0}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} z^2 - \frac{2C_0 \cos \theta}{\sin^3 \theta} z \right),$$

следовательно, выражения для компонент магнитного поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_\theta(\theta, z) &= \frac{2}{\sin \theta} J_0 \left(\frac{CC_0}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} z^2 - \frac{2C_0 \cos \theta}{\sin^3 \theta} z \right) \times \\ &\times J_1 \left(\frac{CC_0}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} z^2 - \frac{2C_0 \cos \theta}{\sin^3 \theta} z \right) \left(\frac{CC_0}{\sin \theta \cos^2 \theta} z - \frac{2C_0 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right), \\ b_z(\theta, z) &= -\frac{2}{\sin \theta} J_0 \left(\frac{CC_0}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} z^2 - \frac{2C_0 \cos \theta}{\sin^3 \theta} z \right) \times \\ &\times J_1 \left(\frac{CC_0}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} z^2 - \frac{2C_0 \cos \theta}{\sin^3 \theta} z \right) \times \\ &\times \left[-\frac{CC_0}{2} \left(\frac{\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^3 \theta} \right) z^2 + \frac{2C_0 z}{\sin \theta} (\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta) \right]. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что основным результатом статьи является построенное аналитическое решение системы нелинейных уравнений в частных производных, моделирующей геострофическое движение в слое идеальной электропроводной стратифицированной вращающейся жидкости. Анализ структуры представленных полей магнитогидродинамических величин позволяет сделать вывод о справедливости гипотезы С.И. Брагинского о существовании сильных изменений в тонком слое земного ядра, примыкающем к границе с мантией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С.И. Волны в устойчиво стратифицированном слое на поверхности земного ядра // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. № 3, С. 476–482,

2. *Холодова С.Е.* Квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2009, №1. Т. 50. С. 30–41.
3. *Холодова С.Е.* Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 5. С. 882–898.
4. *Холодова С.Е.* Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.10. Вып. 1. 2009. С. 118–133.
5. *Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967. 260 с.
6. *Алешков Ю.З.* Математическое моделирование физических процессов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 264 с.
7. *Гуцько Ю.Ф., Норин А.В., Филиппов Б.В.* Электромагнитная газодинамика плазмы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 176 с.
8. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320 с.
9. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика: в 2 т. М.: Мир, 1984. Т. 1. 400 с. Т. 2. 411 с.
10. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: в 2 т. М., 1983: Т. 1. 528 с. 1984. Т. 2. 560 с.
12. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1. 584 с.
13. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика / Пер. с англ. В.Г. Петрова. М.: Атомиздат, 1978. 144 с.
14. *Брагинский С.И.* О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости // ЖЭиТФ. 1964. Т. 47. Вып. 3(9).
15. *Needler G.T.* A model for thermocline circulation in an ocean of finite depth // J. Marine Res. 1967. Vol. 25. P. 329–342.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. VIII. М.: Наука, 1992. 664 с.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.

ДЕФОРМАЦИЯ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Е. В. КРАКОВСКАЯ

Рассматривается напряженно-деформированное состояние круглых цилиндрически ортотропных и трансверсально-изотропных пластин с жесткой заделкой под действием нормального давления. Получены соотношения для прогиба пластины по теориям, основанным на кинематических гипотезах Кирхгофа–Лява и Тимошенко–Рейсснера, а также с помощью уточненной теории анизотропных пластин Амбарцумяна и теории Родионовой–Титаева–Черныха. Решения сравниваются с результатами расчетов, полученных по трехмерной модели в прикладном пакете ANSYS.

1. ВВЕДЕНИЕ

Недалеко от заднего полюса глаза через наружную оболочку, склеру, проходит зрительный нерв (рис. 1 на вклейке). Этот участок склеры называется решетчатой пластинкой диска зрительного нерва. Сплошного дефекта склеры в этом месте нет, но имеется ее истончение и появляется множество мелких отверстий (рис. 1). В настоящее время известно, что при глаукоме атрофия зрительного нерва происходит именно в области решетчатой пластинки [1]–[3]. Как следует из работы [4], сравнение результатов, полученных для составных оболочек и упрощенной задачи, показывает, что увеличение внутриглазного давления (ВГД) практически не меняет размеры склерального кольца, а изменение радиуса склерального кольца существенно меньше величины прогибов решетчатой пластинки и им можно пренебречь. Таким образом, деформацию решетчатой пластинки можно изучать отдельно от деформации склеральной

Доклад на семинаре 18 ноября 2008 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 09-01-00140а.

© Е. В. Краковская, 2009

оболочки, что поможет учесть возможные особенности строения решетчатой пластинки — ее анизотропию.

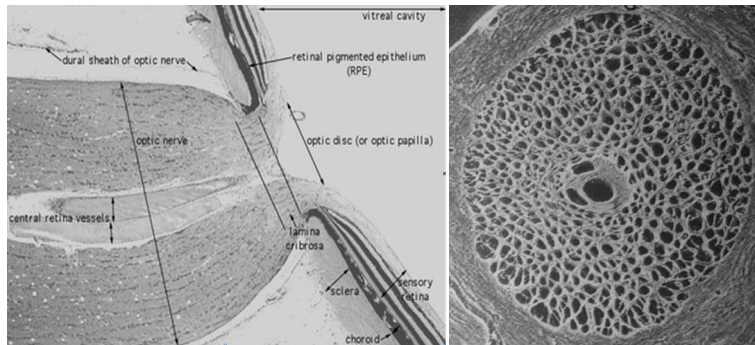


Рис. 1. Решетчатая пластинка диска зрительного нерва.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

2.1. Теория Кирхгофа–Лява

Известно, что значение прогиба трансверсально-изотропной пластины, полученное по классической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, не зависит от свойств материала в перпендикулярном к срединной поверхности направлении и, как и для изотропной пластинки, равно [5]:

$$w_{tr}^{(KL)} = \frac{q(a^2 - r^2)^2}{64D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (1)$$

где ν , E — коэффициент Пуассона и модуль упругости в плоскости пластины, q — нормальное давление, a — радиус пластины, r — полярная координата. В безразмерной форме прогиб трансверсально-изотропной пластины, по теории Кирхгофа–Лява, имеет вид

$$\bar{w}_{tr}^{(KL)} = \frac{w_{tr}^{(KL)} D}{qa^4} = \frac{1}{64}(1 - \bar{r}^2)^2, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}. \quad (2)$$

Для цилиндрически ортотропной пластинки прогиб представляется в виде [6]

$$\begin{aligned} \bar{w}_{or}^{(KL)} &= \frac{w_{or}^{(KL)} D_r}{qa^4} = \frac{\bar{r}^4}{8(9-n^2)} - \frac{\bar{r}^{1+n}}{2(9-n^2)(1+n)} + \frac{1}{8(3+n)(1+n)}, \\ D_r &= \frac{h^3}{12} \frac{E_1 E_2}{E_2 - E_1 \nu_{12}^2}, \quad n^2 = \frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \quad (3)$$

ν_{12}, E_1, E_2 — коэффициент Пуассона и модули упругости в радиальном и касательном направлениях пластины.

2.2. Теория Тимошенко–Рейсснера

Согласно теории Тимошенко [5], в равномерно нагруженной круглой пластинке, защемленной по контуру, следует принять во внимание прогиб, обусловленный касательными напряжениями.

Таким образом, прогиб пластины имеет вид

$$\bar{w}_{tr}^{(TR)} = \frac{w_{tr}^{(TR)} D}{qa^4} = \bar{w}_{tr}^{(KL)} + \frac{E}{32G'(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 (1-\bar{r}^2), \quad (4)$$

где G' — модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии.

В случае цилиндрической ортотропии прогиб пластины имеет вид

$$\bar{w}_{or}^{(TR)} = \frac{w_{or}^{(TR)} D_r}{qa^4} = \bar{w}_{or}^{(KL)} + \frac{3D_r(1-\bar{r}^2)}{8G_{13}ha^2}, \quad (5)$$

где G_{13} — модуль сдвига, характеризующий изменение углов между главными направлениями r и z .

Известно [7, 8], что для тонких тел из изотропного материала теория Кирхгофа–Лява является первым асимптотическим приближением при $\mu \rightarrow 0$:

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad (6)$$

где h — толщина пластины, ν — коэффициент Пуассона, R — характерный размер, которым в случае круглой пластины

является ее радиус. В работах [7, 8] отмечается, что теория Тимошенко–Рейсснера, учитывающая сдвиг, незначительно уточняет классическую теорию и является асимптотически противоречивой для изотропных тонкостенных тел, однако при рассмотрении трансверсально-изотропных пластин и оболочек в [7, 8] введен дополнительный малый параметр G'/E , где G' — модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии, E — модуль упругости в тангенциальном направлении, и на ряде примеров показано, что при “умеренно малой поперечной жесткости” на сдвиг теория Тимошенко–Рейсснера асимптотически непротиворечива и уточняет теорию Кирхгофа–Лява.

2.3. Уточненная теория Амбарцумяна

Для сравнения рассмотрим еще одну отличную от классической теорию, уточненную теорию Амбарцумяна [6], в которой считается, что касательные напряжения или соответствующие деформации по толщине пластины меняются по квадратичному закону, и в этом случае прогиб по уточненной теории Амбарцумяна трансверсально-изотропной пластины идентичен прогибу, полученному по теории Тимошенко–Рейсснера, и имеет вид:

$$\bar{w}_{tr}^{(Am)} = \frac{w_{tr}^{(Am)} D}{qa^4} = \bar{w}_{tr}^{(KL)} + \frac{E}{32G'(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 (1-\bar{r}^2). \quad (7)$$

Прогиб по уточненной теории Амбарцумяна для цилиндрически ортотропной пластины:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{or}^{(Am)} &= \frac{w_{or}^{(Am)} D_r}{qa^4} = \bar{w}_{or}^{(KL)} + \frac{E_1}{480(1+n)(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \times \\ &\times (6(3+2n) - 6\bar{r}^{n+1} - 12\bar{r}^2(1+n)) + \\ &+ \frac{(A_2 - A_1)}{20(1+n)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{(1+n^2)} - \frac{2\bar{r}^{1+n}}{(1-n^2)(1+n)} + \frac{\bar{r}^2}{(1-n)} \right), \\ A_1 &= -\frac{E_1 \nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_3 (1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad A_2 = -\frac{E_2 \nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_3 (1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad \nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

2.4. Уточненная теория Родионовой–Титаева–Черныха

Применим уточненную итерационную теорию В.А. Родионовой, Б.Ф. Титаева и К.Ф. Черныха [9] для расчета прогиба трансверсально-изотропной и цилиндрически ортотропной круглой пластины с жесткой заделкой. Эта теория может трактоваться как первое приближение при приведении краевой задачи трехмерной теории упругости к двумерной методом взвешенных невязок.

Предложенная теория основана на следующих гипотезах:

- Поперечные касательные и нормальные напряжения распределены по толщине оболочки по закону квадратичной и кубической параболы соответственно.
- Тангенциальные и нормальные составляющие вектора перемещения распределены по толщине оболочки по закону полинома соответственно третьей и второй степени.

Новая итерационная теория позволяет построить решение для деформации пластины, учитывающее повороты волокон, их искривление, а также изменение их длины.

В соответствии с принятыми гипотезами составляющие вектора перемещения с учетом симметрии ищем в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= u^* P_0 + \gamma_1^* P_1 + \theta_1^* P_2 + \varphi_1^* P_3, \\ U_3 &= w^* P_0 + \gamma_3^* P_1 + \theta_3^* P_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где P_i ($i = 0, 1, 2, 3$) — полиномы Лежандра:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = \frac{2z}{h}, \quad P_2(z) = \frac{6z^2}{h^2} - \frac{1}{2}, \quad P_3(z) = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}, \quad (10)$$

$u^*, w^*, \varphi_1^*, \gamma_i^*, \theta_i^*$ ($i = 1, 3$) — функции координат. В силу осесимметричности задачи $U_2 = 0$. Составим уравнение равновесия пластины в цилиндрической системе координат:

$$\frac{dT_r}{dr} + \frac{T_r - T_\theta}{r} = 0, \quad \frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} = -q, \quad \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = 0, \quad (11)$$

где T_r, T_θ — усилия, M_r, M_θ — моменты, Q_r — перерезывающая сила. Согласно (11), можно найти $Q_r = -qr/2$. В случае равномерной нагрузки для круглой пластины $M_0 = qh^2/10$, $T_0 = -qh/2$. Согласно [9] можно представить усилия и моменты в виде координатных функций, которые в дальнейшем могут быть найдены из уравнений равновесия.

Таким образом, согласно теории Родионовой–Титаева–Черныха, прогиб срединной поверхности трансверсально-изотропной круглой пластины с жесткой заделкой имеет вид:

$$w_{tr}^{(Ch)} = U_3 \Big|_{z=0} = \frac{3q(a^2 - r^2)^2(1 - \nu^2)}{16Eh^3} + \frac{3q(a^2 - r^2)}{10hG'} + \frac{q(a^2 - 6r^2)(1 + \nu)\nu'}{80E'h} + \frac{qEh\nu'^2}{10E'^2(1 - \nu)} - \frac{qh}{20E'}, \quad (12)$$

где ν', E' — параметры трансверсально-изотропной пластины в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии.

Прогиб пластины по теории Родионовой–Титаева–Черныха можно найти по формуле

$$\bar{w}_{tr}^{(Ch)} = \frac{w_{tr}^{(Ch)} D}{qa^4} = \frac{E(1 - \bar{r}^2)}{40G'(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{E(1 - 6\bar{r}^2)\nu'}{960E'(1 - \nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{E^2\nu'^2}{120E'^2(1 - \nu^2)(1 - \nu)} \left(\frac{h}{a}\right)^4 - \frac{E}{240E'(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^4 + \bar{w}_{tr}^{(KL)}. \quad (13)$$

Приведем также деформацию цилиндрически ортотропной круглой пластины с жесткой заделкой:

$$w_{or}^{(Ch)} = U_3 \Big|_{z=0} = w_{or}^{(KL)} + \frac{D_3 r^{n-1}}{1 - n} + \frac{D_0 a^2}{2} + \frac{2B_1^* a^2}{h(1 + n)(1 - n^2)} - 2D_0 r^2 - \frac{2B_1^*}{h(1 - n^2)} \frac{a^{1-n} r^{1+n}}{(1 + n)} - \frac{D_3 a^{n-1}}{9D_r(9 - n^2)} - \frac{\theta_3^*}{(1 - n) \cdot 2},$$

$$\theta_3^* = -\frac{h}{6a^n r(1 - n^2)(9 - n^2)} \left(B_1^*(9 - n^2) \left[r a^n (\nu_{31}^* + \nu_{32}^*) - r^n a (n\nu_{31}^* + \nu_{32}^*) \right] + B_0^*(1 - n^2) \left[r^3 a^n (3\nu_{31}^* + \nu_{32}^*) - r^n a^3 (n\nu_{31}^* + \nu_{32}^*) \right] \right) + \frac{M_0}{hE_3^*},$$

$$E_3^* = \frac{E_3}{1 - \nu_{13}\nu_{31}^* - \nu_{23}\nu_{32}^*}, \quad \nu_{31}^* = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \nu_{32}^* = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$E_2\nu_{21} = E_1\nu_{12}, \quad E_3\nu_{32} = E_2\nu_{23}, \quad E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31},$$
(14)

где используются следующие обозначения:

$$D_0^* = (1 - n^2) \left(9qE_1E_3\nu_{12}^2(9 - n^2) + h^2B_0^*E_2^2G_{13}\nu_{23} + \right.$$

$$E_2 \left(9qE_3(n^2 - 9) + h^2B_0^*E_1G_{13}(\nu_{13}(3 + \nu_{12}) + 3\nu_{12}\nu_{23}) \right) \left. + \right.$$

$$30B_1^*E_3G_{13}(9 - n^2)(E_2 - E_1\nu_{12}^2),$$

$$D_3^{**} = 30E_3(9 - n^2)(1 + n)(E_2 - E_1\nu_{12}^2),$$

$$D_3^* = (a^{1-n}hE_2(B_1^*(9 - n^2) + a^2B_0^*(1 - n^2))) \times$$

$$\times (E_2\nu_{23} + E_1(\nu_{13}(n + \nu_{12}) + n\nu_{12}\nu_{23})),$$

$$B_0^* = \frac{qh}{4D_r}, \quad B_1^* = \frac{3q\nu_{13}(1 - \nu_{12})}{5E_3} - \frac{3q\nu_{23}(E_2 - E_1\nu_{12})}{5E_1E_3}.$$
(15)

После преобразований формула (14) может быть представлена следующим образом:

$$\bar{w}_{or}^{(Ch)} = \frac{w_{or}^{(Ch)}D_r}{qa^4} = \bar{w}_{or}^{(KL)} + \frac{D_0D_r}{2qa^2}(1 - 4\bar{r}^2) - \frac{1}{8(9 - n^2)} -$$

$$- \frac{\theta_3^*D_r}{2qa^4} + \frac{2B_1^*D_r}{qa^2h(1 + n)(1 - n^2)}(1 - \bar{r}^{1+n}) - \frac{D_3D_r a^{n-5}}{q(1 - n)}(1 - \bar{r}^{n-1}).$$
(16)

Теория Родиновой–Титаева–Черныха позволяет найти изменение толщины пластины под действием нормального давления:

$$\Delta h = w^{(Ch)} \Big|_{z=h/2} - w^{(Ch)} \Big|_{z=-h/2} = U_3 \Big|_{z=h/2} - U_3 \Big|_{z=-h/2} = 2\gamma_3^*,$$
(17)

где для трансверсально-изотропной пластины

$$\gamma_3^* = T_0/2E^*, \quad E^* = \frac{E'}{1 - 2\nu'\nu^*}, \quad \nu^* = \frac{E}{E'} \frac{\nu'}{1 - \nu},$$
(18)

а для цилиндрически ортотропной пластины

$$\begin{aligned} \gamma_3^* &= \frac{T_0}{2E_3^*} + \frac{A_1^* h}{2(1-n^2)} \left[(n\nu_{31}^* + \nu_{32}^*) - \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} (\nu_{31}^* + \nu_{32}^*) \right], \\ A_1^* &= \frac{q\nu_{13}(\nu_{12} - 1)}{2E_3} + \frac{q\nu_{23}(E_2 - \nu_{12}E_1)}{2E_1E_3}. \end{aligned} \quad (19)$$

3. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Трансверсально-изотропная пластина

Для сравнения прогибов пластины, получающихся с помощью различных теорий, приведем также результаты расчетов прогиба, получающиеся по трехмерной теории с помощью прикладного пакета ANSYS (w_{3d}).

Расчеты прогиба трансверсально-изотропной пластины проводились при параметрах, близких к параметрам решетчатой пластинки диска зрительного нерва [10]: $a = 1$ мм, $h = 0.25$ мм, давление $q = 15$ мм рт. ст., модуль Юнга $E = 1.43$ МПа, модуль сдвига $G = E/(2(1 + \nu))$, известно, что $E/E' \approx 100$ [11], коэффициенты Пуассона рассматриваются: $\nu = 0.45$, $\nu' = 0.09$. Будем варьировать значения сдвиговой жесткости G'/E с учетом выполнения следующих условий: $|\nu'| < (E'/E)^{1/2}$ и $-1 < \nu < 1 - 2\nu'^2(E'/E)$; $E, E' > 0$.

На рис. 2 представлены максимальные прогибы срединной поверхности трансверсально-изотропной пластины с разной толщиной, полученные по теориям Кирхгофа–Лява, Тимошенко–Рейсснера, Амбарцумяна, Родионовой–Титаева–Черныха и с помощью прикладного пакета ANSYS.

Так как отношение толщины решетчатой пластинки к ее радиусу составляет 1/4, рассмотрим более тонкую оболочку, чтобы исследовать зависимость величины прогиба от толщины пластинки. Пусть $h = 0.05$ мм.

На прогиб пластины, определенный по теории Кирхгофа–Лява, влияют только параметры в плоскости изотропии. Теории Тимошенко–Рейсснера и Амбарцумяна идентично учитывают также модуль сдвига в G' . Уточненная теория Родионовой–Титаева–

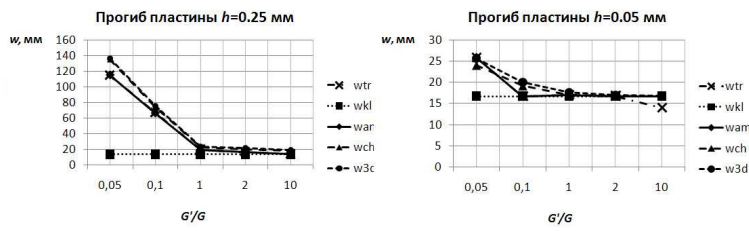


Рис. 2. Прогиб (в мм) трансверсально-изотропной пластины.

Черных учитывает в равной степени все параметры трансверсальной изотропии, как и трехмерная задача, а также позволяет определить новую толщину пластины после деформации.

Под действием давления, в случае, если начальная толщина пластины составляет 0.25 мм, толщина пластины уменьшается на 0.03 мм, если начальная толщина пластины составляет 0.05 мм — на 0.006 мм.

Разница результатов, получаемых в трехмерной задаче, и результатов, получаемых по теории Родионовой–Титаева–Черных, составляет не более 2%, в то время как результаты, получающиеся по теориям Амбарцумяна и Тимошенко–Рейсснера, отличаются от них на 17%. При уменьшении толщины пластины отклонение результатов, полученных по теории Амбарцумяна и Тимошенко–Рейсснера, от результатов, полученных по теории Родионовой–Титаева–Черных и трехмерной теории, снижается до 3%.

3.2. Цилиндрически ортотропная пластина

При рассмотрении конкретных задач прогиба цилиндрически ортотропной пластины использовались те же геометрические параметры пластины и значение давления, что и для трансверсально-изотропной пластины. Механические параметры рассматривались как близкие к параметрам, характеризующим решетчатую пластину глаза [11]: модули Юнга $E_1 = E_2/n^2 = 100E_3 = 1.43\text{МПа}$, модули сдвига $G_{12} = G_{13}l = G_{23} = E_1/(2(1 + \nu_{12}))$, коэффициенты Пуассона $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.01$, $\nu_{12} = 0.45$ ($\nu_{ij} = \nu_{ji}E_j/E_i$ при $i \neq j$). Будем

варьировать модули Юнга и модули сдвига, т. е. рассмотрим задачу для разных значений n и l .

Коэффициенты Пуассона выбирались с учетом выполнения условий [7]

$$1 - \nu_{ij}^2 E_i / E_j > 0, \quad |\nu_{ij}| < (E_j / E_i)^{1/2} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

$$\nu_{12} \nu_{13} \nu_{23} < \frac{1}{2} \left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_1}{E_2} - \nu_{13}^2 \frac{E_1}{E_3} - \nu_{23}^2 \frac{E_2}{E_3} \right). \quad (20)$$

На рис. 3 представлены прогибы срединной поверхности цилиндрически ортотропной пластины с разной толщиной, полученные по теориям Кирхгофа–Лява, Тимошенко–Рейсснера, Амбарцумяна, Родионовой–Титаева–Черныха и с помощью прикладного пакета ANSYS при варьировании значения коэффициента n .

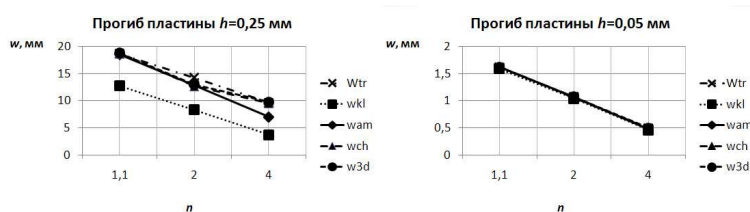


Рис. 3. Прогиб (в мкм) цилиндрически ортотропной пластины при $l = 1$.

На рис. 4 представлены прогибы срединной поверхности цилиндрически ортотропной пластины с разной толщиной, полученные по теориям Кирхгофа–Лява, Тимошенко–Рейсснера, Амбарцумяна, Родионовой–Титаева–Черныха и с помощью прикладного пакета ANSYS при варьировании значения коэффициента l .

Под действием давления, в случае, если начальная толщина пластины составляет 0.25 мм, толщина пластины уменьшается на 0.017 мм, если начальная толщина пластины составляет 0.05 мм — на 0.003 мм.

Параметры n, l значительно влияют на величину максимального прогиба и его форму, при этом параметр l не влияет на прогиб

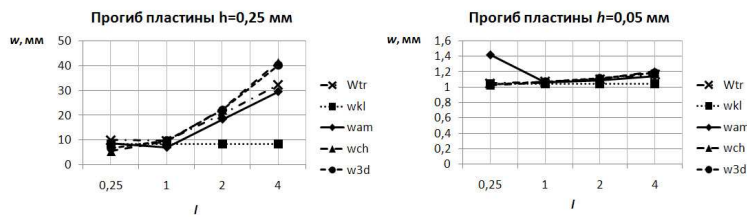


Рис. 4. Прогиб (в мкм) цилиндрически ортотропной пластины при $n = 2$.

пластины согласно теории Кирхгофа–Лява. При увеличении параметров n и l форма прогиба становится более полой.

На рис. 5 представлены формы прогиба цилиндрически ортотропной пластины согласно разным теориям: 1 — классическая теория, 2 — теория Тимошенко–Рейсснера, 3 — уточненная теория Амбарцумяна, 4 — уточненная теория Родионовой–Титаева–Черныха.

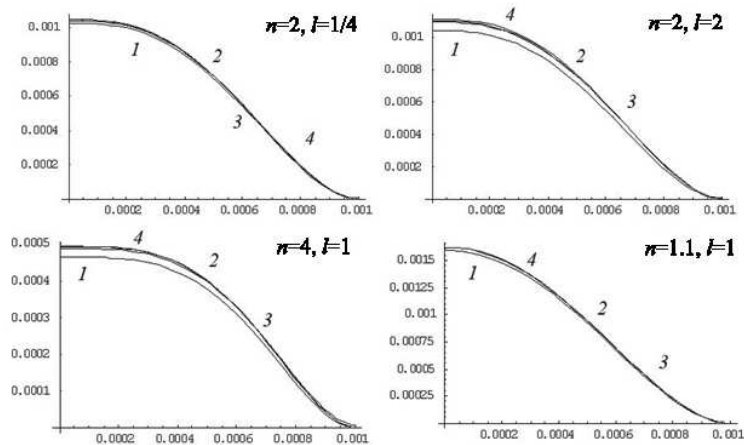


Рис. 5. Формы прогиба цилиндрически ортотропной пластины (см. обозначения в тексте).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее близкие результаты к трехмерной задаче получены по уточненной теории Родионовой–Титаева–Черныха. Также результаты расчетов показывают, что при рассмотрении задачи с более тонкой пластиной разница между решениями, полученными с помощью разных теорий, снижается до 3%. Таким образом, для учета изменения толщины решетчатой пластины при ее деформации и получения более точного решения, по-видимому, следует использовать теорию Родионовой–Титаева–Черныха.

В задаче прогиба пластины с учетом цилиндрической ортотропии варьируются механические параметры пластины. Как и для трансверсально-изотропной пластины, при уменьшении толщины пластины разница между результатами, полученными по разным теориям, снижается до 5%. Теория Родионовой–Титаева–Черныха дает результаты, наиболее близкие к трехмерной задаче при различных механических параметрах пластины. Классическая теория не зависит от параметров, учитывающих цилиндрическую ортотропию.

Расчеты показывают, что и модуль сдвига, и модуль Юнга в направлении оси, перпендикулярной плоскости пластины, значительно влияют на размер и форму прогиба; если эти параметры уменьшаются, то форма прогиба становится более полой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков В.В., Сузгина Л.Б., Устинова Е.И. Глаукома, преглаукома и офтальмогипертензия. Л.: Медицина, 1985. 214 с.
2. Нестеров А.П. Глаукома. М.: Медицина, 1995. 256 с.
3. Нестеров А.П., Егоров Е.А. Глаукоматозная атрофия зрительного нерва // Актуальные проблемы офтальмологии / Под ред. М.М. Краснова, А.П. Нестерова, С. Дыбова. М.: Медицина, 1981. С. 22–53.
4. Краковская Е.В. О деформации составной сферической оболочки под действием внутреннего давления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Вып. 2. 2008. С. 129–132.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635 с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
7. Товстик П.Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Вып. 3. 2007. С. 49–54.

-
8. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* On the 2D models of plates and shells including the shear // *ZAMM*. 2007. Vol. 87. N 2. P. 160–171.
 9. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 280 с.
 10. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.
 11. *Иомдина Е.Н.* Биомеханические свойства склеры и возможности ее укрепления при миопии: Автореф. канд. дис. М., 1984. 24 с.

К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЛАУКОМЫ

А. А. Морщинина

Рассматриваются математические модели склеры и сосудов зрительного нерва при глаукоме. Исследуется осесимметричная деформация сферы, сферической оболочки и цилиндрической трубки. На основе дельта-метода выводятся аналитические решения геометрически нелинейной задачи для сферической оболочки и тонкостенного кругового цилиндра. Рассматривается физически и геометрически нелинейная задача теории упругости для поллой сферы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из опаснейших глазных заболеваний является глаукома. Несмотря на интенсивные исследования, направленные на разработку методов ее лечения, в 15–20 % случаях глаукома остается причиной слепоты и часто приводит к инвалидности по зрению [1].

В настоящей статье рассматривается осесимметричная деформация склеры глазного яблока (см. рис 1 на вклейке). Этому вопросу и его математическому моделированию посвящено много работ [3]–[5], все они опираются на исследования офтальмологов. В настоящее время существуют две концепции глаукомы: концепция В. В. Волкова (механическая) [2] и концепция А. П. Нестерова (сосудистая) [1], связанная с нарушением кровотока в сосудах, деформированных под действием внутриглазного давления.

Поскольку глаукома характеризуется повышенным внутриглазным давлением, особый интерес приобретает вопрос, правомерно ли использовать при деформации склеры и сосудов зрительного нерва нелинейные решения соответствующих механических задач [6, 7]. Актуальность этого вопроса подтверждается экспериментальными данными [8], представленными на рис. 3 на вклейке.

Среди механиков принято представлять склеру в виде сферической оболочки, материал которой, согласно [9], несжимаем.

Доклад на семинаре 16 декабря 2008 г.

© А. А. Морщинина, 2009

2. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛОЙ СФЕРЫ И СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

2.1. Линейное решение для сферы и сферической оболочки

Рассмотрим полую изотропную сферу, внутренний радиус которой равен R_1^0 , а внешний – R_2^0 , нагруженную внутренним давлением $p = \text{const}$ (рис. 1).

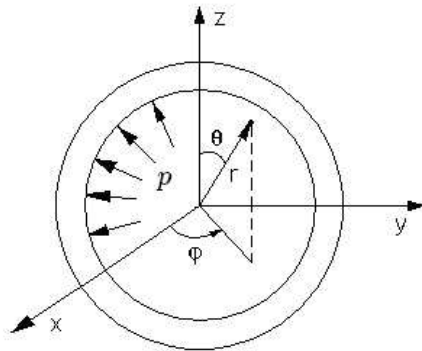


Рис. 1. Сфера под действием постоянного внутреннего давления p .

Уравнение равновесия деформированной сферы имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{u}{r} \frac{du}{dr} = 0.$$

Его решением служит функция [10]

$$u = ar + \frac{b}{r^2}, \text{ где } a = \frac{p(R_1^0)^3}{(R_2^0)^3 - (R_1^0)^3} \frac{1 - 2\nu}{E}, b = \frac{p(R_1^0)^3 (R_2^0)^3}{(R_2^0)^3 - (R_1^0)^3} \frac{1 + \nu}{2E}.$$

Здесь E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала сферы; R_1^0 и R_2^0 – соответственно значения внутреннего и внешнего радиусов сферы до деформации.

Поскольку материал сферы несжимаем, примем $\nu = 0.5$. Тогда в последних соотношениях параметр $a = 0$, и, следовательно, формула для определения радиального перемещения будет иметь вид

$$u(r) = \frac{p(R_1^0)^3 (R_2^0)^3}{(R_2^0)^3 - (R_1^0)^3} \frac{3}{4E} \frac{1}{r^2}. \quad (1)$$

В соответствии с [11] выпишем выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p(R_1^0)^3}{(R_2^0)^3 - (R_1^0)^3} - \frac{p(R_1^0)^3 (R_2^0)^3}{(R_2^0)^3 - (R_1^0)^3} \frac{1}{r^3}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{p(R_1^0)^3}{(R_2^0)^3 - (R_1^0)^3} + \frac{p(R_1^0)^3 (R_2^0)^3}{2((R_2^0)^3 - (R_1^0)^3)} \frac{1}{r^3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим теперь, что толщина сферы Δ_0 до деформации мала по сравнению с R_1^0 и R_2^0 . Это допущение позволяет называть такую сферу “сферической оболочкой”.

Введем новую переменную R_* – радиус срединной поверхности недеформированной оболочки. Представим R_1^0 и R_2^0 через R_* и Δ_0 следующим образом:

$$R_1^0 = R_* - \frac{\Delta_0}{2}, \quad R_2^0 = R_* + \frac{\Delta_0}{2} \quad (\Delta_0 = o(R_*^0)). \quad (3)$$

Учитывая формулы (1) и (3), имеем

$$u(R_1^0) + u(R_2^0) = \frac{6p}{4E} \frac{((R_*^0)^4 - \Delta_0^4/16)}{\Delta_0 (3(R_*^0)^2 + \Delta_0^2/4)}.$$

Пренебрегая в последнем равенстве величинами $\Delta_0^2/4$, $\Delta_0^4/16$ по сравнению с $3(R_*^0)^2$ и $(R_*^0)^4$, получаем

$$u(R_1^0) + u(R_2^0) = \frac{p}{2E} \frac{(R_*^0)^2}{\Delta_0}. \quad (4)$$

Осуществляя аналогичные преобразования для разности $u(R_1^0) - u(R_2^0)$, находим

$$u(R_1^0) - u(R_2^0) = \frac{pR_*^0}{2E}. \quad (5)$$

Внутренний \hat{R}_1 и внешний \hat{R}_2 радиусы оболочки после деформации будут

$$\hat{R}_1 = R_1^0 + u(R_1^0), \quad \hat{R}_2 = R_2^0 + u(R_2^0). \quad (6)$$

Складывая эти зависимости с учетом формул (3), (4), получаем величину деформированного радиуса срединной поверхности:

$$\hat{R}_* = R_*^0 \left(1 + \frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right). \quad (7)$$

В свою очередь, после деформации толщина сферы $\hat{\Delta}$ определяется выражением: $\hat{\Delta} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1 = R_*^0 + u(R_2^0) - R_1^0 - u(R_1^0)$. Откуда, принимая во внимание равенство (5), окончательно находим

$$\hat{\Delta} = \Delta_0 \left(1 - \frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right), \quad (\Delta_0 = R_2^0 - R_1^0).$$

Подставляя теперь формулы (3) в первую из зависимостей (2) и пренебрегая величинами $(\Delta_0/R_*^0)^2$ и $(\Delta_0/R_*^0)^3$, приводим ее к виду

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_*^0}{3\Delta_0} - \frac{p}{2} - \frac{p(R_*^0)^4}{3\Delta_0} \frac{1}{r^3}. \quad (8)$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_*^0}{3\Delta_0} - \frac{p}{2} + \frac{p(R_*^0)^4}{6\Delta_0} \frac{1}{r^3}. \quad (9)$$

Внося соотношения (3) в формулу (1) и пренебрегая в ней величиной $\Delta^2/4$ по сравнению с $(R_*^0)^2$ и $3(R_*^0)^2$, запишем

$$u(r) = \frac{p(R_*^0)^4}{4E\Delta_0} \frac{1}{r^2}. \quad (10)$$

2.2. Геометрически нелинейное решение для сферической оболочки

В основу математического способа решения данной задачи положим, так называемый, дельта-метод [12]. В соответствии с ним, представим давление p как сумму монотонных последовательных нагружений: $p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n$ ($\Delta p_i > 0$, $n \gg 1$). При этом геометрически нелинейная задача сводится к n последовательному решению линейных задач для сферической оболочки, деформированная конфигурация которой определена по результатам $(n-1)$ предшествующих нагружений давлениями: Δp_i ($i = \overline{1, n-1}$).

Принимая во внимание все вышесказанное, с учетом формулы (6), можем записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R_1^n &= R_1^{n-1} + u(R_1^{n-1}) = R_1^{n-2} + u(R_1^{n-2}) + u(R_1^{n-1}) = \dots \\ &\dots = R_1^0 + \sum_{i=0}^{n-1} u(R_1^i), \\ R_2^n &= R_2^{n-1} + u(R_2^{n-1}) = R_2^{n-2} + u(R_2^{n-2}) + u(R_2^{n-1}) = \dots \\ &\dots = R_2^0 + \sum_{i=0}^{n-1} u(R_2^i). \end{aligned}$$

Здесь верхний символ (R_1^n , R_2^n) означает текущее значение соответствующего радиуса на данном шаге нагружения.

Рассмотрим следующие отношения:

$$\begin{aligned} \frac{R_*^1}{\Delta_1} &= \frac{R_*^0}{\Delta_0} \frac{1 + \frac{p_1}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}}{1 - \frac{p_1}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}}, \quad \frac{R_*^2}{\Delta_2} = \frac{R_*^1}{\Delta_1} \frac{1 + \frac{p_2}{4E} \frac{R_*^1}{\Delta_1}}{1 - \frac{p_2}{2E} \frac{R_*^1}{\Delta_1}}, \quad \dots, \\ \frac{R_*^n}{\Delta_n} &= \frac{R_*^{n-1}}{\Delta_{n-1}} \frac{1 + \frac{p_n}{4E} \frac{R_*^{n-1}}{\Delta_{n-1}}}{1 - \frac{p_n}{2E} \frac{R_*^{n-1}}{\Delta_{n-1}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В формулах (11) положим

$$p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_n = p/n.$$

Тогда

$$\frac{R_*^1}{\Delta_1} = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \frac{1 + \frac{p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}}{1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}}.$$

Умножая числитель и знаменатель данной дроби на $\left(1 + \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)$ и пренебрегая в полученном выражении слагаемым $\left(\frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)^2$ по сравнению с единицей, получим

$$\frac{R_*^1}{\Delta_1} = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right). \quad (12)$$

Рассмотрим второе из выражений (11):

$$\frac{R_*^2}{\Delta_2} = \frac{R_*^1}{\Delta_1} \frac{1 + \frac{p}{4En} \frac{R_*^1}{\Delta_1}}{1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^1}{\Delta_1}}.$$

Осуществляя в нем аналогичные преобразования, выводим

$$\frac{R_*^2}{\Delta_2} = \frac{R_*^1}{\Delta_1} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^1}{\Delta_1}\right). \quad (13)$$

Внесем (12) в (13), тогда

$$\frac{R_*^2}{\Delta_2} = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right) \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)\right).$$

В правой части данного равенства можно пренебречь величиной высшего порядка малости $\left(\frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)^2$ по сравнению с $\left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)$.

Тогда

$$\frac{R_*^2}{\Delta_2} = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)^2. \quad (14)$$

Аналогичным образом получаем

$$\frac{R_*^n}{\Delta_n} = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)^n.$$

Устремляя здесь параметр $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_*^n}{\Delta_n} = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right)^n = \frac{R_*^0}{\Delta_0} \exp\left(\frac{3p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}\right). \quad (15)$$

Рассмотрим теперь значения толщины сферы на разных ступенях нагружения. Принимая во внимание формулы (3), (5) и (12), запишем

$$\Delta_2 = \Delta_1 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^1}{\Delta_1} \right) = \Delta_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \right).$$

Пренебрегая величиной $\frac{3}{8} \left(\frac{p}{En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2$ по сравнению с $\left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)$, получаем

$$\Delta_2 = \Delta_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2.$$

Тогда

$$\Delta_n = \Delta_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^n. \quad (16)$$

Предел выражения (16) при $n \rightarrow \infty$ определяется формулой

$$\Delta_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^n = \Delta_0 \exp \left(- \frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right). \quad (17)$$

Используя зависимости (15) и (17), находим

$$\tilde{R}_* = \lim_{n \rightarrow \infty} R_*^n = R_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right). \quad (18)$$

Введем безразмерные величины $\hat{s} = \frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$, $\tilde{s} = \frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$, $q = \frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0}$. На рис. 2 в координатах q \hat{s} представлены зависимости (7) и (18) (кривые 1 и 2 соответственно).

Как видно из рис. 2, начиная со значения $q \geq 0.2$, линейное решение (кривая 1) существенно отличается от нелинейного (кривая 2).

Перемещения деформированной координаты r_i и срединной поверхности сферы R_*^i на i -й ступени нагружения определяются, согласно (10), соотношениями

$$u(r_i) = \frac{p(R_*^i)^4}{4En\Delta_i} \frac{1}{r_i^2}, \quad \text{где } R_1^i \leq r_i \leq R_2^i, \quad u(R_*^i) = \frac{p(R_*^i)^2}{4En\Delta_i}.$$

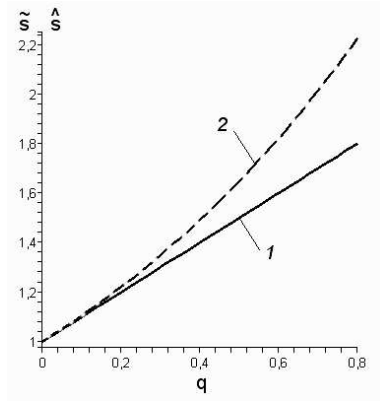


Рис. 2. Линейное и геометрически нелинейное решение для сферической оболочки.

Откуда следует

$$r_{i+1} = r_i + u(r_i) = r_i \left(1 + \frac{p(R_*^i)^4}{4En\Delta_i} \frac{1}{r_i^3} \right), \quad (19)$$

$$R_*^{i+1} = R_*^i + u(R_*^i) = R_*^i \left(1 + \frac{p(R_*^i)}{4En\Delta_i} \right). \quad (20)$$

Представим r_{i+1} в виде суммы $r_{i+1} = R_*^{i+1} + \rho_{i+1}$ ($-\Delta_{i+1}/2 \leq \rho_{i+1} \leq \Delta_{i+1}/2$). Тогда соотношение (19) примет вид

$$R_*^{i+1} + \rho_{i+1} = (R_*^i + \rho_i) \left(1 + \frac{p(R_*^i)^4}{4En\Delta_i} \frac{1}{(R_*^i)^3 (1 + \rho_i/R_*^i)^3} \right).$$

Поскольку $|\rho_i/R_*^i| \ll 1$, то $\frac{1}{(1+\rho_i/R_*^i)^3} \approx (1 - 3(\rho_i/R_*^i))$. С учетом этих соотношений и формулы (20) имеем

$$\rho_{i+1} = \rho_i \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^i}{\Delta_i} \right) - \frac{3p}{4En\Delta_i} \rho_i^2.$$

Пренебрегая здесь вторым слагаемым по сравнению со слагаемым в скобках, окончательно получаем

$$\rho_{i+1} = \rho_i \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^i}{\Delta_i} \right). \quad (21)$$

Рассмотрим значения ρ_i на разных ступенях нагружения. При $i = 0$ данное выражение примет вид

$$\rho_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right). \quad (22)$$

Положим $i = 1$, тогда

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^1}{\Delta_1} \right).$$

Принимая во внимание формулы (12) и (22), запишем ρ_2 следующим образом

$$\rho_2 = \rho_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \right).$$

Пренебрегая в данном соотношении величиной $\frac{3}{8} \left(\frac{p}{En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2$ по сравнению с $\left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)$, выводим

$$\rho_2 = \rho_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2. \quad (23)$$

Пусть теперь $i = 2$, в этом случае зависимость (21) примет вид

$$\rho_3 = \rho_2 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^2}{\Delta_2} \right).$$

Подставляя в данное выражение формулы (14) и (23), имеем

$$\rho_3 = \rho_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \left(1 + \frac{3p}{4En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2 \right).$$

Пренебрегая здесь величинами $\frac{3}{4} \left(\frac{p}{En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^2$ и $\frac{9}{32} \left(\frac{p}{En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^3$ по сравнению с $\left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)$, запишем

$$\rho_3 = \rho_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^3.$$

Действуя и далее подобным образом, окончательно находим

$$\rho_n = \rho_0 \left(1 - \frac{p}{2En} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)^n. \quad (24)$$

Предел выражения (24) при $n \rightarrow \infty$ будет

$$\tilde{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right). \quad (25)$$

Учитывая зависимости (18) и (25), запишем

$$\tilde{r} = \tilde{R}_* + \tilde{\rho} = R_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) + \rho_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right). \quad (26)$$

Внеся формулы (17), (18) и (26) в равенства (8) и (9), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{pR_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)}{3\Delta_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)} - \frac{p}{2} - \\ &\quad - \frac{p \left(R_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \right)^4}{3\Delta_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \left(R_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) + \rho_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \right)^3}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{pR_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)}{3\Delta_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right)} - \frac{p}{2} + \\ &\quad + \frac{p \left(R_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \right)^4}{6\Delta_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \left(R_*^0 \exp \left(\frac{p}{4E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) + \rho_0 \exp \left(-\frac{p}{2E} \frac{R_*^0}{\Delta_0} \right) \right)^3}. \end{aligned}$$

3. ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СФЕРЫ

Предположим, что процесс деформации является активным, нагружение – простым, а материал сферы – несжимаемым.

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= F(\varepsilon_i), \\
 \sigma_{rr} - \sigma &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \\
 \sigma &= (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}, \\
 \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr})^2}, \\
 \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_i = F(\varepsilon_i) = f(r)$ – нелинейный закон упругого деформирования [13]–[15].

Истинные деформации определяются по следующим формулам:

$$\varepsilon_{rr} = \ln \left(1 + \frac{du}{dr} \right), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \ln \left(1 + \frac{u}{r} \right). \quad (28)$$

Обозначим деформированную координату произвольной точки через r_* . Тогда

$$r_* = r + u(r), \quad (29)$$

где r – координата этой точки до деформации, а $u(r)$ – ее перемещение.

Так как материал несжимаем, то $\theta = 0$. Подставляя в это выражение формулы (28) и (29), получаем

$$\ln \left(1 + \frac{d}{dr} (r_* - r) \right) + 2 \ln \left(1 + \frac{r_* - r}{r} \right) = 0$$

или

$$\ln \frac{dr_*}{dr} + 2 \ln \frac{r_*}{r} = 0.$$

Отсюда условие несжимаемости записывается в виде

$$\frac{r_*^2 dr_*}{r^2 dr} = 1$$

или

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(\frac{r}{r_*}\right)^2.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$r_* = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}.$$

Учитывая соотношение (29), можем записать

$$u = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3} - r, \quad (30)$$

где α – произвольная постоянная интегрирования. Заметим, что ее размерность совпадает с размерностью u и r . Подставим зависимость (30) в соотношения (28):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= 2 \ln r - \frac{2}{3} \ln(r^3 + \alpha^3), \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3} \ln(r^3 + \alpha^3) - \ln r. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{3} \ln\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right).$$

Тогда формула для определения интенсивности деформации ε_i примет вид

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \ln\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right). \quad (31)$$

Умножая уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr_*} + \frac{2}{r_*} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0$$

на dr_*/dr , приведем его к виду

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r_*} \frac{dr_*}{dr} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (32)$$

Согласно формулам (27), (28), имеем

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_i.$$

Подставим эти соотношения в равенство (32). После интегрирования получаем

$$\sigma_{rr} = 2 \int_{R_1}^r \frac{\sigma_i r^2}{r^3 + \alpha^3} dr + C \quad (C = \text{const}). \quad (33)$$

Принимая во внимание краевые условия $\sigma_{rr}(R_1) = -p$ и $\sigma_{rr}(R_2) = 0$, из выражения (33) выводим

$$\sigma_{rr} = 2 \int_{R_1}^r \frac{\sigma_i r^2}{r^3 + \alpha^3} dr - p.$$

Отсюда

$$p = 2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_i r^2}{r^3 + \alpha^3} dr. \quad (34)$$

Рассмотрим соотношение (34). Пусть обобщенная кривая $\sigma_i = F(\varepsilon_i)$ имеет вид

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^{\frac{1}{n}} \quad (A = \text{const}, n = \text{const}, n \geq 1). \quad (35)$$

Отметим, что константа A имеет размерность напряжений.

Внося в правую часть зависимости (35) выражение (31), получим

$$\sigma_i = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} A \left[\ln \left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (34), находим

$$p = 2A \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\left[\ln\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)\right]^{\frac{1}{n}} dr}{r \left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)}.$$

Из данного равенства можно определить произвольную постоянную интегрирования α^3 . Для этого рассмотрим подынтегральное выражение

$$\frac{\left[\ln\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}{r \left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)}.$$

Разлагая $\ln\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)$ в ряд и ограничиваясь его первым членом, получаем интеграл вида

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\left(\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{\frac{3}{n}} dr}{r \left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)}.$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой о среднем значении ([16]), находим

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\left(\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{\frac{3}{n}} dr}{r \left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)} \approx \frac{1}{3} \left(\frac{2\alpha}{R_2 - R_1}\right)^{\frac{3}{n}} \ln \frac{R_2^3 + \alpha^3}{R_1^3 + \alpha^3}.$$

Пренебрегая под знаком логарифма величиной α^3 и учитывая, что $R_2 - R_1 = \Delta$, выводим следующее выражение для определения параметра α :

$$p = \frac{2}{3} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\alpha}{R_2 - R_1}\right)^{\frac{3}{n}} \ln \frac{R_2^3}{R_1^3}$$

или

$$p = 2A \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\alpha}{R_2 - R_1}\right)^{\frac{3}{n}} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

После соответствующих преобразований находим

$$\alpha^3 = \frac{\Delta^3}{8} \left(\frac{p}{2A \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \ln \frac{R_2}{R_1}} \right)^n.$$

Применим теперь полученные общие соотношения для определения напряженно-деформированного состояния склеры глазного яблока.

Предположим, что обобщенная кривая имеет вид

$$\sigma_i = 7\varepsilon_i^{\frac{1}{2}},$$

что хорошо согласуется с экспериментальными данными [8] (см. рис. 3 на вклейке). На рис. 3 представлен график зависимости (30) в случае, когда $R_1 = 11.75$ мм, $R_2 = 12.25$ мм, $\Delta = 0.4$ мм, $r = 12$ мм.

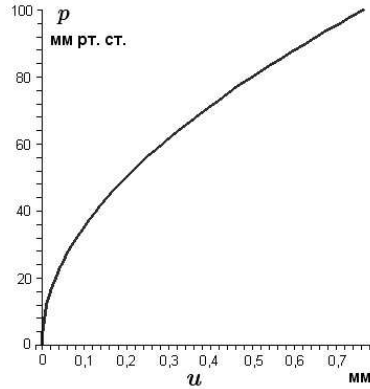


Рис. 3. Физически и геометрически нелинейное решение для сферы.

Полученное решение свидетельствует о существенном влиянии физической нелинейности материала сферы на зависимость $u - p$ (перемещение-давление). Отметим, что подобные исследования для тонкостенных оболочек были выполнены в работах [17]–[19].

4. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ИЗОТРОПНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКИ

Задача осесимметричной деформации изотропной тонкостенной трубки связана с сосудистой концепцией глаукомы, в соответствии с которой рассматривается деформация сосуда зрительного нерва (СЗН) под действием внешнего и внутреннего давления.

4.1. Линейное решение

В качестве механической модели СЗН примем полую тонкостенную изотропную трубку, с внутренним и внешним радиусами до деформации R_0^0 и R_1^0 соответственно (рис. 4). Пусть p_r – внутриглазное давление, p_n – давление внутри трубки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

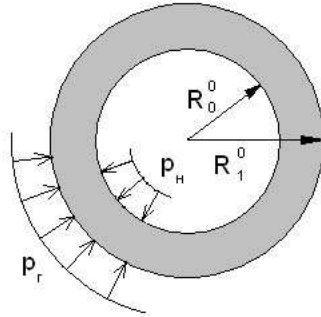


Рис. 4. Цилиндрическая трубка под действием внутреннего и внешнего давления.

Согласно [20], имеем следующее выражение для перемещений:

$$u(r) = \frac{1}{E} \left(-(1 + \nu) \frac{A}{r} + 2Cr(1 - \nu - 2\nu^2) \right),$$

где $A = \frac{p(R_1^0 R_0^0)^2}{(R_1^0)^2 - (R_0^0)^2}$, $2C = \frac{(R_0^0)^2 p_n - (R_1^0)^2 p_r}{(R_1^0)^2 - (R_0^0)^2}$, $r \in [R_0^0, R_1^0]$. Полагая

здесь $p = p_r - p_n$ и $\nu = 0.5$ [9], получим

$$u(r) = -\frac{3p(R_0^0 R_1^0)^2}{2Er[(R_1^0)^2 - (R_0^0)^2]}. \quad (37)$$

Введем следующие обозначения: R_*^0 , h_0 – радиус срединной поверхности трубки и ее толщина до деформации соответственно. Учитывая (37), имеем

$$u(R_1^0) + u(R_0^0) = \frac{3p(h_0^2/4 - (R_*^0)^2)}{2Eh_0},$$

$$u(R_1^0) - u(R_0^0) = \frac{3p((R_*^0)^2 - h_0^2/4)}{2ER_*^0}.$$

Пренебрегая в данных выражениях величиной $h_0^2/4$ по сравнению с $(R_*^0)^2$, получим

$$u(R_1^0) + u(R_0^0) = -\frac{3p(R_*^0)^2}{2Eh_0}, \quad (38)$$

$$u(R_1^0) - u(R_0^0) = -\frac{3pR_*^0}{4E}. \quad (39)$$

Прибавляя к правым и левым частям равенств (38) и (39) соответственно $(R_1^0 + R_0^0)$ и $(R_1^0 - R_0^0)$, находим

$$\hat{R}_* = R_*^0 \left(1 - \frac{3pR_*^0}{4Eh_0}\right), \quad \hat{h} = h_0 \left(1 + \frac{3pR_*^0}{4Eh_0}\right). \quad (40)$$

Здесь \hat{R}_* , \hat{h} – соответственно радиус срединной поверхности СЗН и его толщина после деформации. Осуществляя необходимые упрощения, выразим радиальное перемещение $u(r)$ через R_*^0 и h_0 :

$$u(r) = -\frac{3p(R_*^0)^3}{4Erh_0}. \quad (41)$$

В соответствии с (41) напряжения определяются равенствами

$$\sigma_{rr} = \frac{p(R_*^0)^3}{2h_0 r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{p(R_*^0)^3}{2h_0 r^2}. \quad (42)$$

4.2. Геометрически нелинейное решение

На основе представленных выше выражений (41), (42) дельта-методом [12] получим решение геометрически нелинейной задачи. В соответствии с этим методом монотонно возрастающее давление p представим в виде: $p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n$, где $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_n = p/n$ ($n \gg 1$). Тогда, согласно формулам (40), значения радиуса срединной поверхности трубки и ее толщины на n -й ступени нагружения будут

$$R_*^n = R_*^0 \left(1 - \frac{3pR_*^0}{4Enh_0}\right)^n, \quad h_n = h_0 \left(1 + \frac{3pR_*^0}{4Enh_0}\right)^n.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_* &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_*^n = R_*^0 \exp\left(-\frac{3pR_*^0}{4Eh_0}\right), \\ \tilde{h} &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h_0 \exp\left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0}\right). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь \tilde{R}_* и \tilde{h} – соответственно значения деформированного радиуса срединной поверхности и толщины СЗН. Нетрудно видеть, что при малых значениях показателей экспонент соотношения (43) переходят в зависимости (40).

Введя безразмерные величины $\hat{t} = \frac{\hat{R}_*}{R_*^0}$, $\tilde{t} = \frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$, $g = \frac{3pR_*^0}{4Eh_0}$, получим графики, показанные на рис. 5. Здесь кривая 1 соответствует выражению (40), а кривая 2 – формуле (43).

Учитывая (41), находим деформированную координату точки внутри полой трубки на i -й ступени нагружения:

$$u(r_i) = -\frac{3p(R_*^i)^3}{4Eh_i} \frac{1}{r_i}, \quad R_0^i \leq r \leq R_1^0.$$

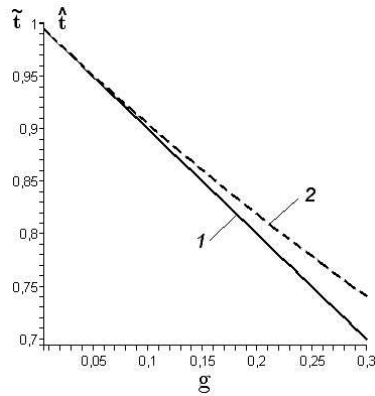


Рис. 5. Линейное и геометрически нелинейное решение для тонкостенной трубки.

Отсюда

$$r_{i+1} = r_i \left(1 - \frac{3p(R_*^i)^3}{4Enh_i} \frac{1}{r_i^2} \right), \quad R_*^{i+1} = R_*^i \left(1 - \frac{3p(R_*^i)}{4Enh_i} \right). \quad (44)$$

Представим r_{i+1} в виде суммы $r_{i+1} = R_*^{i+1} + \rho_{i+1}$, причем $-h_{i+1}/2 \leq \rho_{i+1} \leq h_{i+1}/2$. Тогда первое из выражений (44) примет вид

$$R_*^{i+1} + \rho_{i+1} = (R_*^i + \rho_i) r_i \left(1 - \frac{3pR_*^i}{4Enh_i} \frac{1}{(1 + \rho_i/R_*^i)^2} \right).$$

Поскольку $|\rho_i/R_*^i| \ll 1$, то $\frac{1}{(1 + \rho_i/R_*^i)^2} \approx (1 - 2(\rho_i/R_*^i))$. Учитывая это обстоятельство, находим

$$\rho_{i+1} = \rho_i \left(1 + \frac{3pR_*^i}{4Enh_i} \right) + \rho_i^2 \frac{3p}{2Enh_i}.$$

Пренебрегая здесь вторым слагаемым по сравнению с первым, получаем

$$\rho_{i+1} = \rho_i \left(1 + \frac{3pR_*^i}{4Enh_i} \right).$$

После соответствующих выкладок имеем

$$\rho_n = \rho_0 \left(1 + \frac{3pR_*^0}{4Enh_0} \right)^n.$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ вытекает

$$\tilde{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_0 \exp \left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right).$$

Принимая во внимание зависимости (43), находим

$$\tilde{r} = \tilde{R}_* + \tilde{\rho} = R_*^0 \exp \left(-\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right). \quad (45)$$

Подставляя в формулы (42) равенства (43) и (45), окончательно получаем

$$\sigma_{rr} = \frac{p \left(R_*^0 \exp \left(-\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^3}{2 \left(h_0 \exp \left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) \right) \left(R_*^0 \exp \left(-\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{p \left(R_*^0 \exp \left(-\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^3}{2 \left(h_0 \exp \left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) \right) \left(R_*^0 \exp \left(-\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left(\frac{3pR_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^2}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе:

1. Получено аналитическое решение геометрически нелинейной задачи теории упругости для осесимметричной деформации сферических оболочек (склеры глазного яблока) и цилиндрических трубок (сосудов зрительного нерва).

2. Получено замкнутое решение нелинейной теории упругости для толстостенной сферы, нагруженной постоянным внутренним давлением.

3. Проведено сопоставление полученных результатов с соответствующими зависимостями линейной теории упругости.

Автор благодарен Юрию Михайловичу Далю за советы и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нестеров А.П.* Глаукома. М.: ООО “Медицинское информационное агентство”, 2008. С. 360.
2. *Волков В.В., Сухина Л.Б., Устинова И.Е.* Глаукома, преглаукома, офтальмогипертензия. Л.: Медицина, 1985. С. 216.
3. *Бауэр С.М., Товстик П.Е., Качанов А.Б.* К вопросу о построении математической модели развития глаукомы // Рос. журнал биомеханики. 1999. С. 27–28.
4. *Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 92 с.
5. *Воронкова Е.Б.* Деформация решетчатой пластины глаза: Автореф. канд. дис. СПб, 2006. С. 110.
6. *Даль Ю.М., Морщинина А.А.* Линейные и нелинейные математические модели склеры и сосудов зрительного нерва при глаукоме // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.10. Вып. 3. 2008. С. 47–55.
7. *Морщинина А.А.* Нелинейная осесимметричная задача теории упругости для полой сферы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.10. Вып. 4. 2009.
8. *Иомдина Е.Н.* Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: Автореф. докт. дис. М., 2000. С. 48.
9. *Любимов Г.А.* О тонометрических методах измерения внутриглазного давления // Биомеханика глаза. 2005. С. 131.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. С. 248.
11. *Даль Ю.М.* Задача теории упругости о гидростатическом нагружении полого шара // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.10. Вып. 4. 2009.
12. *Дымников С.И., Лавендел Э.Э., Павловскис А.-М. А., Сниегс М. И.* Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / Под ред. Э.Э. Лавендела. Рига: “Зинатне”, 1980. С. 238.
13. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. С. 211.
14. *Безулов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Изд-во “Высшая школа”, 1968. С. 512.
15. *Даль Ю.М., Пронина Ю.Г.* Деформация шаровой поры в нелинейно-упругом теле // Известия РАН. Серия физическая. Т. 70. № 9. 2006. С. 1341–1343.
16. *Физтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 2 / Предисловия и примеч. А. А. Флоринского. 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003. 864 с.

17. Григорьев А.С. Напряженное состояние безмоментных оболочек при больших деформациях // Прикладная математика и механика. Т. 21. 1957. № 6. С. 827–832.

18. Григорьев А.С. Об устойчивости безмоментных оболочек вращения в условиях растяжения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 1. С. 170–172.

19. Григорьев А.С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 163–168.

20. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. С. 344.

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТОЛЩИНЫ И ФОРМЫ РОГОВИЦЫ И СКЛЕРЫ НА ПОКАЗАТЕЛИ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

А. С. ТИПЯСЕВ

При апланационной тонометрии роговица глаза деформируется грузом с плоским основанием, при этом образуется круг сплющивания или апланации. По диаметру этого круга при фиксированной нагрузке (тонометр Маклакова) или по нагрузке при фиксированной зоне контакта (тонометр Гольдмана) определяется внутриглазное давление (ВГД). При этом предполагается, что и роговица и склера имеют сферическую форму и средние механические параметры. Однако известно, что глаза при миопии и гиперметропии (близорукости и дальнозоркости) имеют отклонения от сферической формы, причем, как отмечается в монографии [1], это может быть вызвано как изменением формы склеры и удлинением при миопии или укорочением при гиперметропии переднезадней оси, так и изменением кривизны роговицы. Кроме того, роговицы различных глаз могут сильно отличаться по толщине.

1. ДЕФОРМАЦИЯ ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Для построения аналитического решения поставленной задачи необходимо сначала проанализировать поведение мягкой оболочки, имеющей форму эллипсоида вращения, при изменении внутреннего давления.

Рассмотрим безмоментную оболочку вращения, которая в начальном ненагруженном внутренним давлением состоянии имеет форму эллипсоида. Длину горизонтальной полуоси эллипсоида обозначим R , а отношение длин вертикальной и горизонтальной полуоси эллипсоида — k .

Известно, что при осесимметричной деформации оболочка вращения преобразуется в оболочку вращения [2].

Доклад на семинаре 3 марта 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 09-01-00140а.

© А. С. Типясев, 2009

Положение элемента срединной поверхности оболочки заданной формы до деформации в силу осесимметричности может быть определено одной величиной — углом φ (рис. 1), после деформации этот же элемент срединной поверхности может быть описан двумя координатами: $r(\varphi)$ — расстоянием деформированного элемента оболочки от оси симметрии и $\psi(\varphi)$ — углом между нормалью к элементу деформированной оболочки и осью x . Точка N (см. рис. 1) — пересечение окружности радиуса R_0 с центром в начале координат и прямой, проходящей через соответствующий элемент срединной поверхности и параллельной оси z .

Обозначим деформацию и кривизну оболочки в направлении параллели $r = \text{const}$ как ε_χ и ρ_χ соответственно, а деформацию и кривизну оболочки в направлении меридиана $\chi = \text{const}$ как ε_r и ρ_r . Выразим ε_χ , ρ_χ , ε_r и ρ_r через $r(\varphi)$ и $\psi(\varphi)$:

$$\varepsilon_\chi = \frac{r}{R_0 \cos \varphi} - 1, \quad \varepsilon_r = -\frac{r'}{R_0 \sin \psi \sqrt{\sin^2 \varphi + k_0^2 \cos^2 \varphi}} - 1,$$

$$\rho_\chi = \frac{\cos \psi}{r}, \quad \rho_r = -\frac{\psi'}{r'} \sin \psi. \quad (1)$$

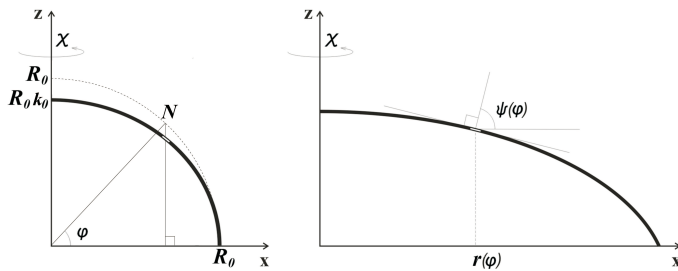


Рис. 1. Оболочка до и после деформации.

Уравнения равновесия элемента оболочки в направлении нормали и меридиана $\chi = \text{const}$ имеют вид

$$\rho_r(\varphi)\varepsilon_r(\varphi) + \rho_\chi(\varphi)\varepsilon_\chi(\varphi) = \frac{p(1-\nu)}{Eh}, \quad \frac{\varepsilon_r'(\varphi)}{r'(\varphi)} = \frac{\varepsilon_\chi(\varphi) - \varepsilon_r(\varphi)}{r(\varphi)}. \quad (2)$$

Здесь ν , E и h — коэффициент Пуассона, модуль Юнга и толщина соответствующего сегмента оболочки.

Подставив соотношения (1) в уравнения (2), можно получить систему дифференциальных уравнений. Аналитическое решение этой системы уравнений получаем, используя соотношение

$$\psi(\varphi) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{k_1 r(\varphi)}{\sqrt{R_1^2 - r(\varphi)^2}}.$$

Подставляя его в соотношения (1), имеем

$$\varepsilon_\chi = \frac{r(\varphi)}{R_0 \cos \varphi} - 1, \quad \varepsilon_r = -\frac{r'(\varphi) \sqrt{R_1^2 - r(\varphi)^2} + r(\varphi)^2 k_1^2}{R_0 \sqrt{\sin^2 \varphi + k_0^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{R_1^2 - r(\varphi)^2}} - 1,$$

$$\rho_\chi = \frac{k_1}{\sqrt{R_1^2 - r(\varphi)^2} + r(\varphi)^2 k_1^2}, \quad \rho_r = \frac{R_1^2 k_1}{(R_1^2 - r(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 k_1^2)^{3/2}}.$$

И, разрешая систему равновесия (2), получаем

$$r(\varphi) = \frac{\frac{E^2 h^2}{p^2 R_0^2} + (1 - \nu)^2 \left(\frac{1}{k_1^2} - 1 \right)}{\frac{E^2 h^2}{\cos^2 \varphi p^2 R_0^2} + (1 - \nu)^2 \left(\frac{1}{k_1^2} - 1 \right) \cos \varphi} R_1.$$

Найдем параметры эллипсоида вращения в процессе деформации, воспользовавшись нижеследующим соотношением:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{r'(\varphi) \sqrt{R_1^2 - r(\varphi)^2} + r(\varphi)^2 k_1^2}{R_0 \sqrt{\sin^2 \varphi + k_0^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{R_1^2 - r(\varphi)^2}} - 1 = \\ &= \frac{p(1 - \nu)}{2k_1 E h} \sqrt{R_1^2 - r^2(\varphi) + r^2(\varphi) k_1^2}. \end{aligned}$$

Параметры оболочки до деформации, по ее параметрам в некотором деформированном состоянии определяются следующим об-

разом:

$$\begin{cases} R_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{p(1-\nu)}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2k_1^2}\right)\right)}, \\ k_0 = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{8E^2h^2f}{p^2R_0^2f_2} - 2f\right)Q_1}{R_0\left(\frac{1}{R_0} - \frac{p(1-\nu)}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2k_1^2}\right) + \frac{p(1-\nu)}{2Ehk_1}Q_1\right)\sqrt{1-2f^2}}\right)^2} - 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $f_1 = \frac{E^2h^2}{p^2R_0^2} + (1-\nu)^2 \left(\frac{1}{k_1^2} - 1\right)$, $f_2 = \frac{2E^2h^2}{p^2R_0^2} + (1-\nu)^2 \left(\frac{1}{k_1^2} - 1\right)$,

$$f = \frac{f_1}{f_2}, \quad Q_1 = \sqrt{1 - 2f^2(1 - k_1^2)}.$$

Найти параметры деформированной оболочки по параметрам недеформированной оболочки можно, разрешая систему (3) численными методами.

2. Влияние кривизны роговицы и склеры на показатели ВГД при аппланационных методах измерения

Математическая модель измерения ВГД по методу Маклакова, учитывающая свойства склеры и роговицы, описана в работе [3]. При этом глазное яблоко (см. рис. 1 на вклейке) моделируется двумя сферическими сегментами. В данной работе рассматривается деформация оболочки вращения относительно вертикальной оси, которая в ненагруженном состоянии имеет форму двух соединенных сегментов эллипсоидов вращения (рис. 2).

Отношение длин вертикальной и горизонтальной полуосей сегмента, представляющего склеру (на рис. 2 снизу) до нагружения, составляет величину k_{1s} .

Отношение длин вертикальной и горизонтальной полуосей сегмента, представляющего роговицу (на рис. 2 сверху) до нагружения, составляет величину k_{1r} (здесь и далее индекс s означает склеру, r — роговицу, 0 соответствует величине, относящейся к недеформированной оболочке, 1 соответствует оболочке, растянутой только

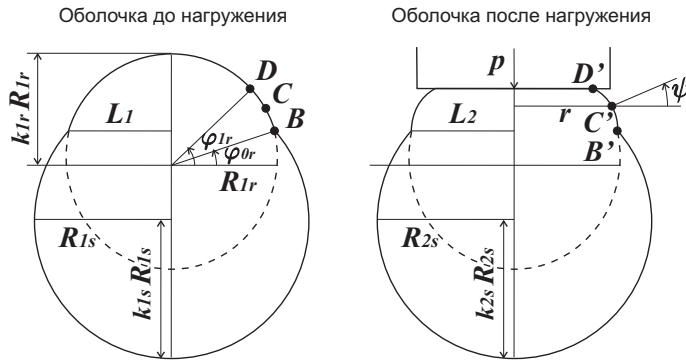


Рис. 2. Математическая модель глаза.

начальным внутренним давлением, 2 — значение величин после нагружения роговицы грузом.).

Точка D верхней оболочки переходит после нагружения в точку D' — крайнюю точку касания груза тонометра и роговицы.

Деформация и кривизна верхней оболочки в направлении $r = \text{const}$ обозначаются как $\varepsilon_{\chi r}$ и $\rho_{\chi r}$ соответственно. Деформация и кривизна оболочки в направлении $\chi = \text{const}$ — как ε_{rr} и ρ_{rr} . Выразим $\varepsilon_{\chi r}$, $\rho_{\chi r}$, ε_{rr} и ρ_{rr} через $r_r(\varphi)$ и $\psi_r(\varphi)$:

$$\varepsilon_{\chi r} = \frac{r_r}{R_{0r} \cos \varphi} - 1, \quad \rho_{\chi r} = \frac{\cos \psi_r}{r_r},$$

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{r'_r}{R_{0r} \sin \psi_r \sqrt{\sin^2 \varphi + k_{0r}^2 \cos^2 \varphi}} - 1, \quad \rho_{rr} = -\frac{\psi'_r}{r'_r} \sin \psi_r.$$

Уравнения равновесия элемента верхней оболочки в направлении нормали и меридиана $\chi = \text{const}$ представим в виде:

$$\rho_{rr}(\varphi) \varepsilon_{rr}(\varphi) + \rho_{\chi r}(\varphi) \varepsilon_{\chi r}(\varphi) = \frac{p(1-\nu)}{E_r h_r}, \quad \frac{\varepsilon'_{rr}(\varphi)}{r'_r(\varphi)} = \frac{\varepsilon_{\chi r}(\varphi) - \varepsilon_{rr}(\varphi)}{r_r(\varphi)}.$$

Поскольку рассматривается мягкая (безмоментная) оболочка под действием статической нагрузки, то величина внутреннего дав-

ления p после нагружения оболочки грузом P может быть определена соотношением

$$p = \frac{4P}{\pi d^2},$$

где d — диаметр круга — зоны контакта груза и роговицы.

Далее решение поставленной задачи строится по следующему алгоритму:

1. Предполагается, что внутреннее давление до нагружения оболочек грузом составляет некоторую величину p_1 . И при помощи соотношения (3), по геометрическим характеристикам оболочек после нагружения давлением p_1 находим начальные характеристики недеформированных оболочек $k_{0s}(k_{1s}, R_{1s})$, $R_{0s}(k_{1s}, R_{1s})$, $k_{0r}(k_{1r}, R_{1r})$ и $R_{0r}(k_{1r}, R_{1r})$.

2. Далее находим характеристики склеры $k_{2s}(k_{0s}, R_{0s})$ и $R_{2s}(k_{0s}, R_{0s})$ после нагружения давлением p и определяем величину L_2 — радиус лимба (окружности сопряжения склеры и роговицы):

$$L_2 = \frac{\frac{E_s^2 h_s^2}{p^2 R_{0s}^2} + (1 - \nu_s)^2 \left(\frac{1}{k_{2s}^2} - 1 \right)}{\frac{E_s^2 h_s^2}{p^2 \cos^2 \varphi R_{0s}^2} + (1 - \nu_s)^2 \left(\frac{1}{k_{2s}^2} - 1 \right)} \frac{R_{2s}}{\cos \varphi_{0s}},$$

где

$$\varphi_{0s} = \begin{cases} \arccos \left(\frac{L_1}{R_{1s}} \right), & \text{если } k_{1s} = 1, \\ \arccos \left(\frac{R_{1s} (E_s^2 h_s^2 k_{1s}^2 + p_1^2 R_{0s}^2 (1 - k_{1s}^2) (1 - \nu_s)^2 - K)}{2L_1 p_1^2 R_{0s}^2 (1 - k_{1s}^2) (1 - \nu_s)^2} \right), & \text{если } k_{1s} \neq 1. \end{cases}$$

Причем

$$K = \left(R_{1s} (E_s^2 h_s^2 k_{1s}^2 + p_1^2 R_{0s}^2 (1 - k_{1s}^2) (1 - \nu_s)^2) \right)^2 - 4E_s^2 h_s^2 k_{1s}^2 L_1^2 p_1^2 R_{0s}^2 (1 - k_{1s}^2) (1 - \nu_s)^2.$$

Определяем также объем сегмента склеры после нагружения:

$$V_{2s} = \frac{\pi}{3} k_{2s} \left(2R_{2s}^3 + (2R_{2s}^2 + L_2^2) \sqrt{R_{2s}^2 - L_2^2} \right).$$

3. Решение уравнений, описывающих деформированное состояние роговицы после нагружения грузом, производится численными методами при помощи пакета Mathematica 4.0:

на промежутке $(\varphi_{0r}, \varphi_{1r})$ с граничными условиями

$$r(\varphi_{0r}) = L_2, \quad r(\varphi_{1r}) = \frac{d}{2}, \quad \psi(\varphi_{1r}) = \frac{\pi}{2}$$

и на промежутке $(\varphi_{1r}, \pi/2)$ с граничными условиями

$$\psi \equiv \frac{\pi}{2}, \quad \rho_r \equiv 0, \quad \rho_\chi \equiv 0.$$

На втором промежутке первое уравнение равновесия преобразовывается в тождество, и, таким образом, исходная система упрощается до одного дифференциального уравнения и решается со следующими граничными условиями:

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad r(\varphi_{1r}) = \frac{d}{2}.$$

Также дополнительно, из решения на первом промежутке, берется значение $r'(\varphi_{1r})$.

4. Численно находится V_{2r} и сравнивается суммарный объем двух сегментов оболочек до нагружения грузом и после нагружения грузом. Далее в цикле подбирается такое значение p_1 , чтобы суммарный объем оставался неизменным. Это условие следует из несжимаемости внутренней жидкости.

Проведена широкая серия расчетов при различных параметрах. Безразмерные параметры, характеризующие отношение длин вертикальной и горизонтальной полуосей эллипсоидов склеры и роговицы варьировались от 0.8 до 1.2 с шагом 0.05. Моделирование тонометрии по методу Маклакова производилось для груза массой 5 г для диаметров следа: 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7 мм. Для груза массой 10 г результаты рассчитаны для диаметров следа: 5.5, 6, 6.5, 7 мм. По методу Гольдмана расчеты произведены для нагружений роговицы силой, эквивалентной давлению груза от 1 г до 3 г, с шагом 0.2 г.

В литературе имеются различные данные о модулях упругости склеры и роговицы [4]. Ниже на рис. 3 и 4. представлены результаты расчетов при следующих параметрах:

- 1) $E_r = 1.2$ МПа, $E_s = 6$ МПа,

- 2) $E_r = 1.4$ МПа, $E_s = 8$ МПа,
- 3) $E_r = 1.6$ МПа, $E_s = 10$ МПа.

Толстыми линиями обозначены табличные данные ВГД по методу Маклакова [5] либо уровень тонометрического ВГД по Гольдману.

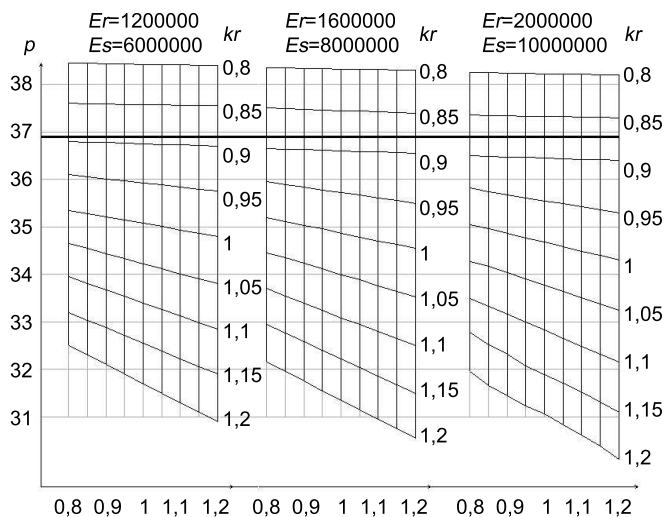


Рис. 3. Влияние кривизн роговицы и склеры на показатели тонометра Маклакова: $m = 5$ г, $d = 4$ мм.

Все расчеты показывают, что при любых механических и геометрических параметрах фиброзной оболочки глаза исследуемое истинное внутриглазное давление тем меньше, чем более вытянута роговица вдоль передне-задней оси глаза, при равных зонах контакта груза и роговицы. Кривизна роговицы оказывает на показания ВГД существенно большее влияние, чем кривизна склеры.

Небольшое изменение кривизны роговицы может изменить показатель ВГД, получаемый по методу Маклакова, на 8 мм рт. ст., а расхождение с табличными величинами может оказаться больше

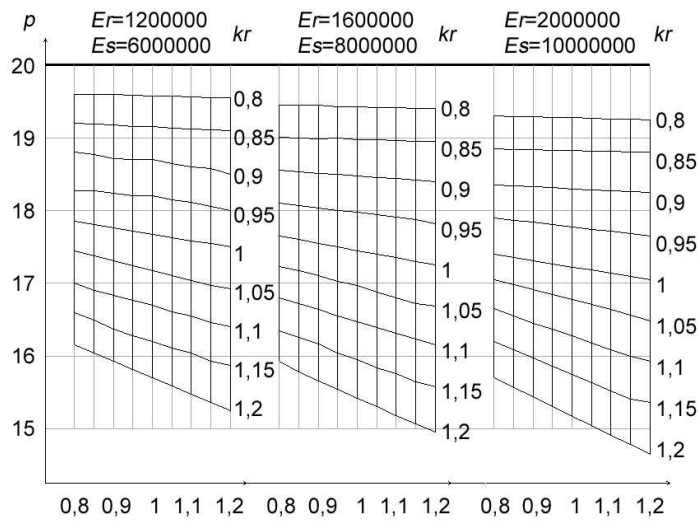


Рис. 4. Влияние кривизн роговицы и склеры на показатели тонометра Гольдмана: $m = 2$ г.

10 мм рт. ст. Эти погрешности являются очень значительными по величине и могут оказаться принципиальными при диагностировании ряда заболеваний глаза. Интересно отметить, что эти результаты согласуются с экспериментальными данными, представленными в работе [6].

Кривизны склеры и роговицы могут привести в результате замеров тонометром Гольдмана погрешность от 3 до 25%.

3. Влияние толщины роговицы на показатели ВГД при аппланационных методах измерения

Так как модель мягкой оболочки не может объяснить влияние изменений толщины роговицы на показатели ВГД, построим конечно-элементную модель двух сопряженных сегментов

трансверсально-изотропных оболочек эллиптической формы с разными диаметрами и разными упругими свойствами под действием внутреннего давления, нагруженных грузом с плоским основанием. Моделирование осуществляется в пакете прикладных программ ANSYS 8.0.

Отметим, что в ряде работ представлены некоторые конечно-элементные модели измерения ВГД, однако в основном эти работы касаются тонометрии по Гольдману. Зона контакта груза и роговицы в этом случае мала, и поэтому в этих работах предполагается, что возмущение, вносимое в фиброзную оболочку глаза тонометром, локализовано вблизи области контакта и на стыке роговицы со склерой уже достаточно мало, т. е. в этом случае деформирование роговицы в основном зависит от упругих свойств и геометрии роговицы.

Однако при моделировании измерения ВГД тонометром Маклакова, особенно грузом 10 г, т. е. в случае, когда зона контакта оказывается значительно большей, оболочка склеры может оказывать существенное влияние на процесс деформирования. Поэтому в нашей модели корнеосклеральная оболочка моделируется сопряженными оболочками.

Рассматриваемая задача является осесимметричной с осью симметрии Y , что используется при построении конечно-элементной модели. В силу симметрии задача является двумерной, поэтому в качестве конечного элемента выберем элемент PLANE42 с опцией Axisymmetric, а также опцией для задания механических свойств в локальной системе координат каждого элемента.

Построим в каждой точке срединной поверхности оболочки локальную декартову систему координат, где направление оси X совпадает с направлением нормали к поверхности, а направления осей Y и Z совпадают с направлениями координатных линий, лежащих в поверхности оболочки. Механические свойства оболочек задаем в узловой (элементной) системе координат в виде следующих отношений:

$$E_x \ll E_y = E_z, \quad \nu_{xy} = \nu_{xz} \ll \nu_{yz} = 0.499,$$

$$G_{xy} = G_{xz} \ll G_{yz} = \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})}.$$

На одну из оболочек, находящуюся под заданным внутренним

давлением p , давим вдоль оси Y металлическим цилиндром с плоским основанием (тонометром Маклакова или Гольдмана). Заметим, что диаметр области контакта всегда должен быть меньше диаметра цилиндра. При этом диаметр области контакта зависит от величины, приложенной к цилиндру силы и внутреннего давления. Согласно общей теории контактных взаимодействий (Джонсон, 1978), размеры площадки контакта зависят также от геометрии (толщина, радиус) и упругих свойств оболочек. Так как роговица намного мягче металлического цилиндра, деформацией последнего можно пренебречь и считать его абсолютно жестким. Наличие слезы между штампом и роговицей обеспечивает проскальзывание без трения в области контакта.

Важным моментом при построении конечно-элементной модели является выбор точек закрепления области, чтобы исключить движение тела как целого (что приводит к неустойчивости счета) при приложении сил. В силу локальности возмущений, вызванных контактным взаимодействием находящейся под внутренним давлением эллиптической оболочки с жестким штампом в рассматриваемом диапазоне приложенных к жесткому штампу сил, можно считать, что сечение шарового слоя экваториальной плоскостью может перемещаться только в этой плоскости (находиться в условиях скользящей заделки). С целью повышения точности определения силы при заданном диаметре площадки контакта в окрестности границы контакта проведено сгущение сетки.

Осуществлено разбиение области круговыми прямоугольниками на 1120 элементов (рис. 3 на вклейке).

Расчеты проводились для значений толщины роговицы 0.55 и 0.6 мм, параметр, характеризующий отношение длин вертикальной и горизонтальной полуосей роговицы, менялся от 0.9 до 1.1 мм с шагом 0.1, истинного давления от 10 мм рт. ст. до 20 мм рт. ст. с шагом 5 мм рт. ст. Для расчетов модуль Юнга роговицы и склеры примем равными соответственно $E_x = 1.2$ и $E_x = 6.0$:

$$E_x = \frac{E_y}{50}, \quad G_{xz} = \frac{G_{yz}}{30}, \quad \nu_{xy} = \frac{\nu_{yz}}{50}.$$

Решение задачи для каждого варианта механических и геометрических свойств оболочек, а также внутреннего давления проводилось

по отдельным алгоритмам для моделирования измерения ВГД тонометром Маклакова и тонометром Гольдмана.

3.1. Тонометрия методом Маклакова

На первом шаге прикладываем внутреннее давление и измеряем внутренний объем составной оболочки. На втором шаге к жесткому штампу (к пилотному узлу — pilot node) прикладываем силу

$$F = mg,$$

где m — масса груза, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, при этом внутренний объем изменялся.

Далее запускался цикл для восстановления внутреннего объема. На каждом шаге цикла внутреннее давление изменялось на 2 мм рт. ст. и далее, уменьшая шаг каждый раз вдвое. Если объем на предыдущем шаге был меньше начального, то давление увеличивалось, в противном случае — уменьшалось.

В результате внутреннее давление поднималось до уровня тонометрического давления. По полученной зоне контакта, используя таблицы истинного внутриглазного давления Нестерова–Вургафта–Киселева при тонометрии по Маклакову, находилось внутриглазное давление, определяемое тонометром.

3.2. Тонометрия методом Гольдмана

Сначала проводим замер аналогично методу Маклакова, нагружая глаз силой, эквивалентной давлению груза массой 2 г, и измеряем получаемый диаметр зоны контакта.

Далее в цикле менялась сила давления таким образом, чтобы зона контакта составила ровно 3.06 мм, учитывая, что зависимость радиуса контакта от силы нагружения — монотонно возрастающая функция.

На рис. 4 на вклейке представлены возникающие в оболочках сдвиговые напряжения.

В таблице приведены сводные результаты расчетов для некоторых параметров оболочек до и после операции LASIK, в результате которой толщина роговицы уменьшалась на 5 микрон.

Результаты расчетов

Истинное давление	Кривизна роговицы	Измерение по Маклакову 5 г		Измерение по Маклакову 10 г		Измерение по Гольдману	
		до	после	до	после	до	после
10	0.9	16.2	14.3	11.1	9	14.9	14.9
10	1.0	17.1	16.2	12.8	11.1	16.2	15.6
10	1.1	19	17.1	14.4	12.8	18.7	17.9
15	0.9	18	17.1	15.3	13.6	17.2	17.2
15	1.0	20	19	16.2	15.3	18.5	18.1
15	1.1	21.3	20	18.1	17.1	20.6	19.8
20	0.9	21.3	20	18.1	17.1	20	20
20	1.0	22.6	21.3	20	19	21	20.5
20	1.1	24	22.6	21	21	22.5	22

Влияние толщины роговицы на показатели ВГД оказывается значительнее, чем влияние кривизны. Это согласуется с экспериментальными данными [7] и может быть объяснено тем, что в оболочке в процессе нагружения возникают дополнительные моментные усилия, которые действуют сонаправленно с ВГД и компенсируют часть давления груза, что приводит к завышению результатов замеров. Из приведенной таблицы видно, что влияние толщины роговицы существенно зависит от способа измерения ВГД. Очевиден тот факт, что при измерении ВГД по Маклакову, чем более мы деформируем роговицу, тем более точные результаты получаем. Это обусловлено тем, что с ростом зоны контакта вклад моментов растет приблизительно пропорционально радиусу зоны контакта, а сила, оказываемая ВГД, растет пропорционально квадрату радиуса зоны контакта. И, соответственно, с ростом зоны контакта вклад моментов, зависящих от механических и геометрических свойств глаза, нивелируется и табличные значения ВГД становятся более точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lang G.K. Ophthalmology. Stuttgart; New York: Thieme, 2000. 566 p.
2. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
3. Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 24–39.
4. Иомдина Е.Н. Механические свойства тканей глаза человека // Сове-

менные проблемы биомеханики. Вып.11. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 183–200.

5. *Нестеров А.П., Вургафт М.Б.* Калибровочные таблицы для эластотометра Филатова–Кальфа // Вестник офтальмологии. 1972. № 2. С. 20–25.

6. *Тарутта Е.П., Еричев В.П., Ларина Т.Ю.* Контроль уровня ВГД после кераторефракционных операций // Биомеханика глаза. М., 2004. С. 120–122.

7. *Shimmyo M., Ross A.J., Moy A., Mostafavi R.* Intraocular pressure, Goldmann applanation tension, corneal thickness, and corneal curvature in Caucasians, Asians, Hispanics, and African Americans // American Journal of Ophthalmology, 136(4). 2003. С. 603–613.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ КОНТУРА ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ

Л. А. АЛЕКСАНДРОВА

Строится подземный контур заглубленной прямоугольной плотины, углы которого округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации, в случае, когда водопроницаемое основание подстилается криволинейным водоупором, характеризуемым постоянством скорости обтекания. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния основных определяющих параметров модели на форму и размеры подземного контура плотины и водоупора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема подбора плавных подземных профилей оснований гидротехнических сооружений впервые была рассмотрена в [1], где фигурировала так называемая обратная краевая задача теории плоской установившейся фильтрации грунтовых вод [2, 3]. Эта работа дала толчок к развитию целого направления — отысканию контуров гидротехнических сооружений по каким-либо заданным на них свойствам, принадлежащих главным образом казанской школе математиков и механиков [4]. Ниже с помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов проводится анализ структуры и характерных особенностей плавного подземного контура заглубленной плотины, основание которой характеризуется постоянством скорости обтекания, при наличии криволинейного водоупора, также характеризуемого постоянством скорости фильтрации.

движение подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $k = \text{const}$. Действующий на сооружение напор H , скорость обтекания v_0 и фильтрационный расход Q считаются заданными.

Введем комплексный потенциал движения (φ — потенциал скорости, ψ — функция тока) и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kH и H . Задача состоит в определении положения кривых BC , B_1C_1 и FF_1 при краевых условиях

$$\begin{aligned} A_1G_1 : y = 0, \varphi = -0.5H; & \quad A_1B_1 : x = -l, \psi = Q; \\ C_1DC : y = -d, \psi = Q; & \quad AB : x = l, \psi = Q; \\ AG : y = 0, \varphi = 0.5H; & \quad F_1EF : y = -T, \psi = 0; \\ G_1F_1 \text{ и } FG : \psi = 0; & \quad B_1C_1 \text{ и } BC : |w| = \nu_0; \\ G_1F_1 \text{ и } GF : |w| = u_0, & \end{aligned} \quad (1)$$

таким образом, чтобы скорость фильтрации вдоль криволинейных участков подземного контура плотины BC и B_1C_1 , а также водопора FF_1 имела постоянные значения v_0 (заданное) и u_0 (искомое) соответственно.

Решение краевой задачи (1) получено в [5] и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{C \operatorname{sn}(2K\tau, k) \operatorname{cn}(2K\tau, k)}{\Delta(\tau)}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{C \operatorname{sn}(2K\tau, k) \operatorname{cn}(2K\tau, k) \exp((0.5 - \tau)\pi i)}{\nu_0 \Delta(\tau)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta(\tau) = \Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau)$, $\Delta_2(\tau) = \sqrt{(A^2 + (1 - A^2)\operatorname{sn}^2(2K\tau, k))}$, $\Delta_1(\tau) = \sqrt{(1 - \lambda^2\operatorname{sn}^2(2K\tau, k))(1 - n^2\operatorname{sn}^2(2K\tau, k))}$, $C > 0$ — масштабная постоянная моделирования, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k , $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $\lambda = \sqrt{1 - k'^2 B^2}$, $\operatorname{sn}(\varphi, k)$, $\operatorname{cn}(\varphi, k)$ — эллиптические функции Якоби, A и B — параметры конформного отображения.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $v_0 = 1$, $H = 2$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.296$ и $\Delta d = 0.295$ (базовые значения). Результаты расчетов влияния определяющих фильтрационных и

геометрических параметров Q , Δl и Δd на размеры плотины l_1 и d_1 и водоупора l_2 и T сведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Результаты расчетов величин ширины плотины l_1 и толщины d_1 при варьировании значений Q

Q	l_1	d_1	l_2	T
1.00	0.427	0.407	3.104	3.819
1.13	0.417	0.415	3.977	4.688
1.25	0.412	0.419	4.946	5.655
1.38	0.409	0.421	6.228	6.935
1.50	0.408	0.422	7.666	8.372

Таблица 2. Результаты расчетов величин ширины плотины l_1 и толщины d_1 при варьировании значений Δl и Δd

Δl	l_1	d_1	l_2	T	Δd	l_1	d_1	l_2	T
0.20	1.570	0.004	5.061	6.495	0.25	0.150	0.908	4.774	5.381
0.23	1.179	0.004	4.506	5.679	0.28	0.319	0.553	4.207	4.871
0.25	0.915	0.148	4.228	5.229	0.30	0.450	0.374	4.008	4.737
0.28	0.563	0.317	4.079	4.828	0.32	0.571	0.246	3.919	4.718
0.30	0.384	0.442	4.059	4.753	0.375	0.782	0.062	3.917	4.711

На рис. 2–4 представлены зависимости d_1 , l_1 , l_2 и T от v_0 , H и Q .

Анализ данных таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы.

Уменьшение скорости обтекания и увеличение действующего на сооружение напора приводят к росту всех размеров плотины l , l_1 , d и d_1 и, наоборот, к уменьшению размеров криволинейного водоупора l_2 и T . Величины l_1 и d_1 , а следовательно, ширина и толщина плотины, могут быть весьма значительными: из рис. 2 следует, что изменение скорости в 1.5 раза увеличивает ширину l_1 и толщину d_1 соответственно на 329 и 380.4%. Видно, что зависимости d_1 и l_1 от скорости обтекания и действующего напора, а также T и l_2 от всех определяющих параметров модели качественно подобны, причем при фиксированных значениях v_0 , H , Q , Δl и Δd глубина водоупора T всегда превосходит ширину l_2 в среднем на 10–20%.

Обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин l , l_1 , d и d_1 от параметров Q и Δl (см. табл. 1 и 2): увеличение фильтрационного расхода и разности Δl приводят

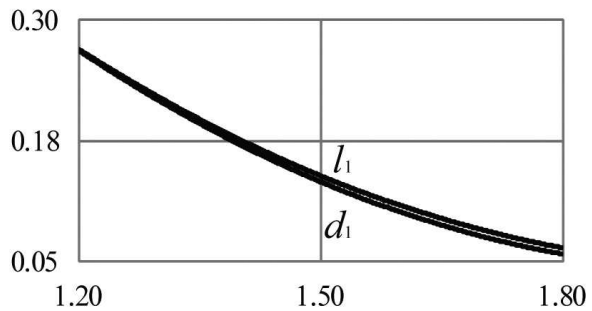


Рис. 2. Зависимость d_1 и l_1 от v_0 при $H = 2$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.296$ и $\Delta d = 0.295$.

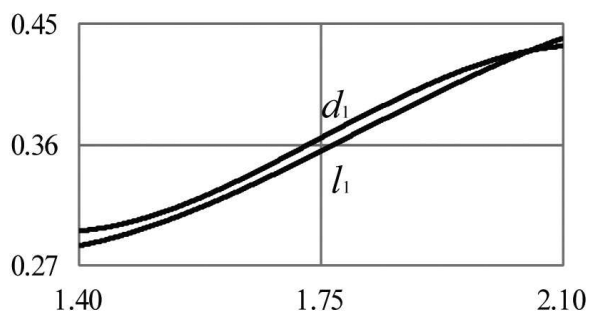


Рис. 3. Зависимость d_1 и l_1 от H при $v_0 = 1$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.296$ и $\Delta d = 0.295$.

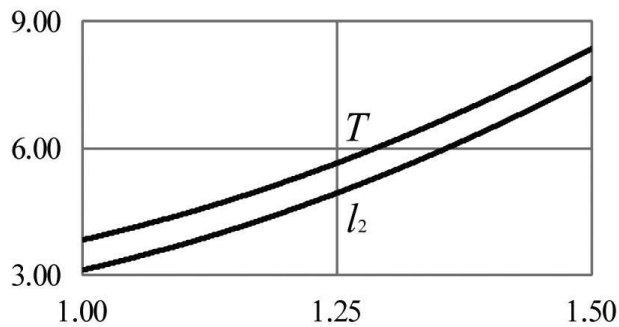


Рис. 4. Зависимость l_2 и T от Q при $H = 2$, $v_0 = 1$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.296$ и $\Delta d = 0.295$.

к росту толщины плотины d (величины d_1) и уменьшению ширины плотины l (величины l_1). В то же время наблюдается совершенно противоположный характер изменения размеров плотины при варьировании величин Δl и Δd . Разделы табл. 2, относящиеся к этим параметрам, отражают следующую закономерность: увеличению разности Δl (Δd) сопутствует убывание (рост) ширины плотины l и рост (убывание) ее толщины d . Так, с изменением Δl на 50% ширина l_1 уменьшается в 4.1 раза, толщина d_1 увеличивается в 110.5 раза, подобное же изменение величины Δd приводит к увеличению ширины l_1 в 5.2 раза и уменьшению толщины d_1 в 14.7 раза.

С ростом параметров v_0 , H , Δl и Δd глубина водоупора T и ширина l_2 уменьшаются (хотя и незначительно, в пределах 1.1–1.7 раза) и увеличиваются с возрастанием фильтрационного расхода Q , причем существенно: на 147 и 119% соответственно. При этом величины T и l_2 могут быть весьма значительными и в рассматриваемых случаях превосходить не только параметры d_1 и l_1 , но и сами размеры плотины d и l соответственно. Так, из рис. 2 вытекает, что при $H = 1.4$ имеем $l_1 = 0.285$, $l = 0.581$, $l_2 = 6.678$, значит, $\frac{l_2}{l} = 11.5$, а из табл. 2 следует, что при $\Delta l = 0.2$ получаем $d_1 = 0.004$, $d = 0.229$, $T = 6.495$, следовательно, $\frac{T}{d} = 21.7$. Таким образом, размеры l_2 и T превосходят ширину плотины l и ее толщину d в 10 и 20 раз соответственно.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе точного аналитического решения задачи об обтекании контура постоянной скорости основания плотины и с помощью численных расчетов дается гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров модели на картину течения. В частности, установлено, что увеличение действующего на сооружение напора и уменьшение скорости обтекания приводят к росту всех размеров плотины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я.* О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. Т. 16. 1952. С. 57–66.
2. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. *Аравин В.И., Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
4. *Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т. и др.* Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Итоги науки и техники: Математический анализ. 1980. Т. 18. С. 67–124.
5. *Береславский Э.Н.* Построение подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 5. С. 103–112.

ОБ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБТЕКАНИЯ ШПУНТА ЖУКОВСКОГО

Е. В. ПЕСТЕРЕВ

В рамках плоской установившейся фильтрации рассматривается задача об обтекании шпунта Жуковского в том случае, когда на некоторой глубине имеется горизонтальный пласт, состоящий из непроницаемого и хорошо проницаемого участков, при наличии инфильтрации на свободной поверхности. Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния всех физических параметров модели на картину течения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается плоское движение грунтовой воды под шпунтом OFB , когда на некоторой глубине T имеется горизонтальный пласт, состоящий из непроницаемого CD и хорошо проницаемого DA участков. Фильтрационные воды, обтекая шпунт с конечной скоростью на его конце, поднимаются за ним на некоторую высоту FB и образуют свободную поверхность AB , на которую поступают инфильтрационные воды с интенсивностью ε ($0 < \varepsilon < 1$) (отнесенной к коэффициенту фильтрации грунта $\kappa = \text{const}$). Действующий напор H , длина шпунта S , скорость обтекания его на конце V_F ($0 < V_F < \varepsilon$), а также глубина залегания пласта T считаются заданными. Введем комплексный потенциал течения $\omega = \varphi + i\psi$ и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к κT и T . Задача состоит в определении положения свободной поверхности AB и, стало быть, размеров d , L_1 и L_2 при следующих

краевых условиях:

$$\begin{aligned} OC : y = 0, \varphi = -H; \quad CD : y = -T, \psi = 0; \\ DA : y = -T, \varphi = 0; \quad AB : \varphi = -y - T, \psi = Q + \varepsilon x; \\ OFB : x = 0, \psi = Q, \end{aligned} \quad (1)$$

где Q — искомый фильтрационный расход.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи используется метод П.Я. Полубариновой-Кочкиной [1], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [1, 2]. Вводится вспомогательная переменная τ и функции $\omega(\tau)$ и $z(\tau)$, конформно отображающие прямоугольник τ на области ω и z (соответствие точек указано на рис. 1, а) и комплексная скорость $w = d\omega/dz$ (рис. 1, б).

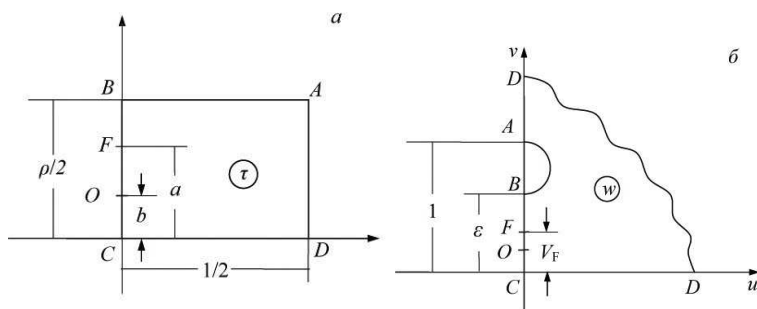


Рис. 1. Области вспомогательной параметрической переменной τ (а) и комплексной скорости w (б).

Область комплексной скорости w принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [3]. Применяя разработанную [4] методику построения отображающих функций для многоугольников подобного типа, найдем

$$w(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \pi \tau. \quad (2)$$

Принимая во внимание соотношение (2), решение краевой задачи (1) найдем в следующем параметрическом виде:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} C \frac{\sin \pi \tau}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}, \quad \frac{dz}{d\tau} = C \frac{\cos \pi \tau}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}, \quad (3)$$

где $\Delta(\tau) = \sqrt{B_1^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + B^2}$, C — масштабная постоянная моделирования, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k , $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $\rho = K'/K = 2 \operatorname{arth}(\sqrt{\varepsilon})/\pi$, $\operatorname{sn}(2K\tau, k)$ — эллиптическая функция Якоби, $B = \operatorname{sn}(2Kb, k')$, $B_1 = \sqrt{1 - B^2}$, $A = \operatorname{sn}(2Ka, k')$, $a = \pi^{-1} \operatorname{arth}(V_F/\sqrt{\varepsilon})$ — параметры конформного отображения. Запись представлений (3) для различных участков границы области τ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию области движения z и тем самым служит контролем вычислений. В результате получаем выражения для определяющих физических параметров модели S и H

$$C \int_b^a \frac{\operatorname{ch}(\pi\tau) \operatorname{cn}^2(2K\tau, k') d\tau}{\operatorname{sn}(2K\tau, k') \sqrt{\operatorname{sn}^2(2K\tau, k') - B^2}} = S, \quad (4)$$

$$C \sqrt{\varepsilon} \int_0^{0.5} \frac{\sin(\pi\tau) d\tau}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \sqrt{B_1^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + B^2}} = H,$$

которые используются для нахождения параметров отображения B и C . После определения этих постоянных вычисляются высота поднятия грунтовой воды за шпунтом d (длина отрезка OB), проекция свободной поверхности на ось x L_2 (длина отрезка AD), ширина непроницаемого участка слоя L_1 (длина отрезка OD) и расход Q . Имеем

$$d = T - Ck^2 \operatorname{sh}(0.5\pi\rho) \int_0^{0.5} \frac{\sin(\pi\tau) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) d\tau}{\sqrt{B^2 k^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + B_1^2}},$$

$$L_2 = Ck^2 \operatorname{ch}(0.5\pi\rho) \int_0^{0.5} \frac{\cos(\pi\tau) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) d\tau}{\sqrt{B^2 k^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + B_1^2}}, \quad (5)$$

$$L_1 = L_2 - C \int_0^{0.5\rho} \frac{\operatorname{sh}(\pi\tau) \operatorname{dn}^2(2K\tau, k') d\tau}{\sqrt{B^2 \operatorname{dn}^2(2K\tau, k') + B_1^2}},$$

$$Q = \sqrt{\varepsilon} C \int_0^{0.5\rho} \frac{\operatorname{ch}(\pi\tau) \operatorname{dn}^2(2K\tau, k') d\tau}{\sqrt{B^2 \operatorname{dn}^2(2K\tau, k') + B_1^2}} - \varepsilon L_2.$$

Основная вычислительная сложность задачи заключается в том, что приходится решать сложную систему трансцендентных уравнений (4), кроме того, необходимо устранять особенности на пределах интегрирования несобственных интегралов. Численным способом определяется монотонность функций, входящих в подынтегральные выражения системы (4), и, таким образом, устанавливается ее разрешимость.

На рис. 2 изображена картина течения, рассчитанная при $T = 5$, $V_F = 0.3$, $\varepsilon = 0.6$, $H = 5$, $S = 3.1$ (базовые значения).

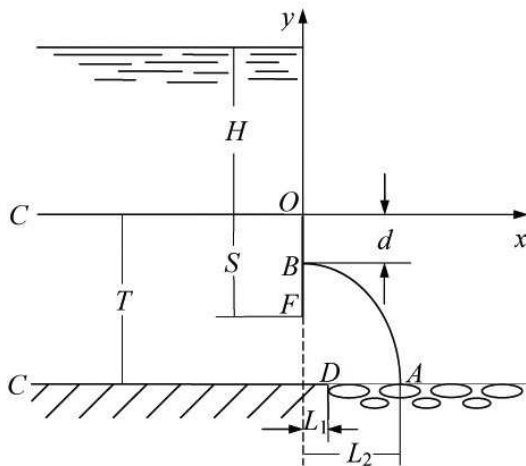


Рис. 2. Картина течения, рассчитанная при $V_F = 0.3$, $\varepsilon = 0.6$, $T = 5$, $H = 5$ и $S = 3$.

В табл. 1 и 2 сведены результаты расчетов по выяснению влияния параметров V_F , ε , H и S на фильтрационные характеристики d и L_1 (отрицательные величины означают, что свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс, а точка D лежит левее оси ординат), L_2 и Q .

На рис. 3–6 представлены зависимости фильтрационных характеристик d и L_2 от V_F , H , S и ε .

Таблица 1. Результаты расчетов величин d , L_1 , L_2 и Q при варьировании значений V_F и H .

V_F	d	L_1	L_2	Q	H	d	L_1	L_2	Q
0.15	1.956	0.470	2.358	1.735	3.1	2.929	0.338	1.614	1.159
0.2	1.757	0.519	2.521	1.826	4	2.238	0.466	2.165	1.532
0.3	1.453	0.612	2.784	1.947	5	1.453	0.612	2.784	1.947
0.4	1.246	0.693	2.971	2.009	6	0.671	0.761	3.405	2.360
0.5	1.134	0.743	3.077	2.036	7	-0.110	0.910	4.026	2.772

Таблица 2. Результаты расчетов величин d , L_1 , L_2 и Q при варьировании значений S и ε .

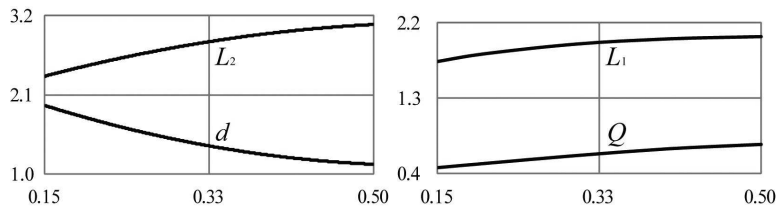
S	d	L_1	L_2	Q	ε	d	L_1	L_2	Q
1	1.236	0.697	2.981	2.012	0.4	0.706	2.873	4.624	1.268
2	1.334	0.656	2.890	1.985	0.5	1.025	1.628	3.615	1.615
3	1.453	0.612	2.784	1.947	0.6	1.453	0.612	2.784	1.947
4	1.569	0.573	2.681	1.905	0.7	1.972	-0.216	2.086	2.249
4.5	1.624	0.556	2.634	1.883	0.8	2.582	-0.890	1.481	2.515

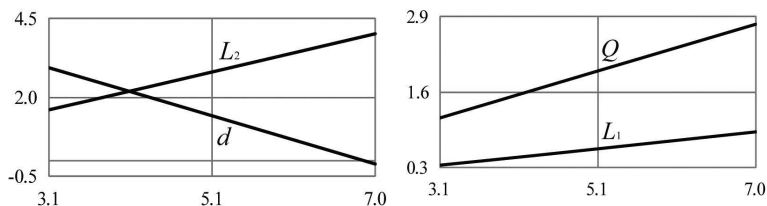
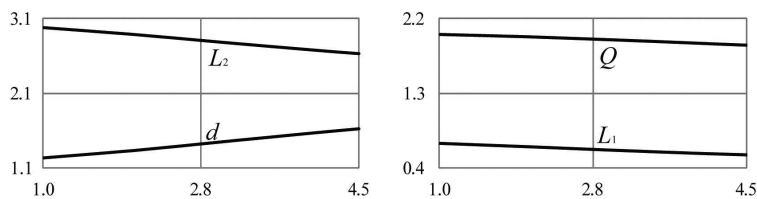
3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ приведенных выше таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы.

С ростом скорости V_F и напора H и убыванием длины шпунта S размеры L_1 , L_2 и расход Q увеличиваются и, наоборот, уменьшается высота поднятия грунтовой воды за шпунтом d . Так, из табл. 1 видно, что при увеличении напора H на 126% величины L_1 , L_2 и расход Q изменяются почти пропорционально — в 2.5, 2.7 и 2.4 раза соответственно.

В то же время наблюдается совершенно противоположный ха-

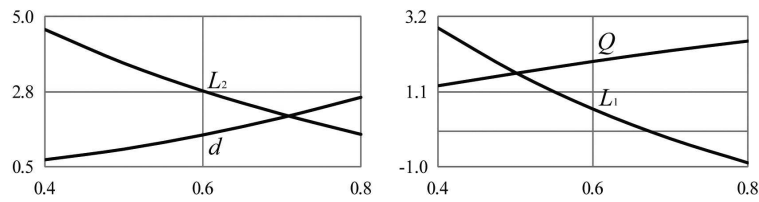
Рис. 3. Зависимости L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от V_F .

Рис. 4. Зависимости L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от H .Рис. 5. Зависимости L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от S .

рактический характер изменения размеров L_1 , L_2 и d при варьировании параметров S и ε . При этом величины L_1 , L_2 могут быть весьма значительными: из табл. 2 следует, что с уменьшением интенсивности инфильтрации ε в 2 раза размеры L_1 и L_2 возрастают в 17 и 3 раза соответственно.

С ростом параметров V_F , H , ε и, наоборот, с уменьшением длины шпунта S расход Q увеличивается.

Возрастание мощности пласта T , длины шпунта S и инфильтрации приводит к увеличению высоты поднятия воды d . При этом наиболее существенное влияние на параметр d оказывает мощность пласта. Так, с увеличением мощности T всего в 1.86 раза параметр d изменяется более чем в 60 раз. Примечательно, что при этом варьирование параметра T практически не сказывается на величинах L_1 , L_2 и расходе Q .

Рис. 6. Зависимости L_2 и d (а), Q и L_1 (б) от ε .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено точное аналитическое решение задачи об обтекании шпунта Жуковского при наличии инфильтрации на свободную поверхность в случае, когда на некоторой глубине под шпунтом залегает горизонтальный слой, состоящий из непроницаемого и хорошо проницаемого участков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Кочина П.Я. Гидродинамика и теория фильтрации // Избранные труды. М.: Наука, 1991. 351 с.
3. Береславский Э.Н. О конформном отображении круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. №5, 1980. С. 3-7.
4. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во "Иностр. лит.", 1963. 406 с.

НОВАЯ ТРАКТОВКА ОДНОГО ВАРИАНТА ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ

С. П. Помыткин

Рассматривается вариант эндохронной теории неупругости, в котором параметрический тензор порождает упругие деформации. Рекомендуется простой способ обобщения определяющих соотношений на область больших деформаций и поворотов. Отмечается, что в процессе обобщения уравнений возникает новая мера упругих деформаций. Подчеркивается, что сформулированные уравнения удобны для решения задач мягкого нагружения.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В работах [1]–[3] был предложен вариант эндохронной теории неупругости для малых деформаций. В безындексной форме записи определяющие соотношения связи тензоров напряжений и деформаций имели следующий вид:

$$\frac{1}{2G} \left(\sigma + \alpha \tau \frac{d\sigma}{|dr|} \right) = \tau \frac{dr}{|dr|} + \frac{r}{(1+g)\alpha - g}, \quad (1)$$

$$r = \frac{\sigma}{2G} - (1 - \alpha)\varepsilon, \quad (2)$$

$$\sigma_0 + \gamma \frac{d\sigma_0}{|dr|} = \frac{1}{\beta(r_0)} \sigma_0 \frac{dr_0}{|dr|}, \quad (3)$$

$$r_0 = \varepsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii}. \quad (4)$$

Доклад на семинаре 30 марта 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №08-01-00036.

© С. П. Помыткин, 2009

Здесь ε и σ — девиаторы тензоров деформаций и напряжений, r — девиатор вспомогательного параметрического тензора, G — модуль сдвига, α — параметр эндохронности, τ — аналог деформационного предела текучести, g — аналог модуля упрочнения, K — объемный модуль, γ и k_1 — параметры материала; $|a| = \sqrt{a : a}$ — двойное скалярное произведение симметричного тензора второго ранга a .

Отметим, что при $\alpha = 1$ параметрический тензор r переходит в тензор упругих деформаций с сохранением свойства эндохронности самих определяющих соотношений.

2. ПЕРЕХОД В ОБЛАСТЬ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В [4] был предложен вариант обобщения эндохронной теории на область больших деформаций при введении нового понятия меры напряжений. В настоящей статье поясняется выбор новой меры деформации, названной здесь мерой упругой деформации. В определяющие соотношения (1)–(4) вместо тензоров ε , σ и r вводятся тензоры приведенных деформаций E , приведенных упругих деформаций T и приведенного параметрического тензора N по формулам

$$E = R^T \varepsilon R, \quad T = R^T \frac{\sigma}{2G} R = R^T \varepsilon_{el} R, \quad N = R^T r R, \quad (5)$$

$$\dot{E} = \overline{R^T \dot{\varepsilon} R}, \quad \dot{T} = R^T P R, \quad \dot{N} = \overline{R^T \dot{r} R}.$$

При этом используются следующие определения, обозначения и формулы: F — градиент упругой деформации, $L = \dot{F} F^{-1}$ — градиент скорости упругой деформации, $P = (L + L^T)/2$ — тензор скорости упругой деформации, $W = (L - L^T)/2$ — соответствующий тензору скорости упругой деформации спин, $F = R \cdot U$ — полярное разложение градиента упругой деформации, R — ортогональный тензор поворота, U — правый тензор упругого удлинения, причем $U^2 = F^T F$ и $R = F U^{-1}$, точка над объектом — дифференцирование по физическому времени.

После процедуры преобразования тензоров и их производных по схеме $R^T(\bullet)R$ производится исключение больших поворотов рассматриваемого континуума, и определяющие соотношения (1)–(4)

в пространственной системе координат принимают вид

$$|\dot{r}| E + \alpha \tau \dot{E} = \tau \dot{N} + \frac{1+g}{(1+g)\alpha - g} |\dot{r}| N, \quad (6)$$

$$r = \varepsilon_{el} - (1 - \alpha)\varepsilon.$$

После процедуры обратного преобразования $R(\bullet)R^T$ уравнения связи между напряжениями и деформациями в материальной системе координат запишутся в форме

$$|\dot{r}|\overset{\circ}{\varepsilon}_{el} + \alpha \tau \overset{\circ}{\varepsilon}_{el} = \tau \overset{\circ}{r} + \frac{1+g}{(1+g)\alpha - g} |\dot{r}| r, \quad (7)$$

$$\overset{\circ}{r} = P - (1 - \alpha)\overset{\circ}{\varepsilon}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{el} = P,$$

$$\sigma_0 + \gamma \frac{d\sigma_0}{|dr|} = \frac{1}{\beta(r_0)} \sigma_0 \frac{dr_0}{|dr|},$$

$$r_0 = \varepsilon_0 - \frac{k_1}{K} \sigma_0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}, \quad \sigma_0 = \sigma_{ii}.$$

Символ (\circ) над тензорами обозначает объективную производную Грина–Нахгди (Ω — тензор вихря):

$$\overset{\circ}{A} = \dot{A} + A\Omega - \Omega A, \quad \Omega = \dot{R}R^T. \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что соотношения (5) фактически определяют новую меру упругой деформации по формуле

$$\varepsilon_{el} = R \left[\int (R^T P R) dt \right] R^T, \quad (9)$$

отличающуюся от традиционных мер упругих деформаций. Иначе говоря, мера упругой деформации (9) порождается в процессе исключения больших поворотов нейтральной коротационной производной типа (8) и может быть вычислена из третьего уравнения (7). Если $\alpha = 1$, то соотношения (7) примут наиболее простой вид

$$|\dot{\varepsilon}_{el}| \varepsilon + \tau \overset{\circ}{\varepsilon}_{el} = \tau P + (1+g)|\dot{\varepsilon}_{el}|\varepsilon_{el}. \quad (10)$$

Этот вариант теории наиболее удобен для решения задач мягкого нагружения.

Таким образом, если в [5] автор использовал понятие градиента полной деформации, то в предлагаемой читателям статье используется понятие градиента упругой деформации, предложенное Ли еще в 1969 г. [6]. Отличие состоит в том, что мера упругой деформации принимается в форме, рекомендованной Бровко [7] для полной деформации.

Замечание

Напомним, что для жесткого нагружения (когда задаются скорости полных деформаций) в [5] был предложен иной вариант эндохронной теории неупругости для области деформаций и поворотов. Определяющие уравнения для девиаторов записывались в форме

$$\left(|\dot{r}| \sigma + \beta \tau \overset{\circ}{\sigma} \right) \frac{1}{2G} = \tau \overset{\circ}{r} + \frac{|\dot{r}|r}{g + \beta}, \quad (11)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = D, \quad r = \varepsilon - \frac{1 - \beta}{2G} \sigma, \quad \overset{\circ}{r} = D - \frac{1 - \beta}{2G} \overset{\circ}{\sigma}.$$

Здесь D — тензор скоростей полных деформаций, β — параметр эндохронности. Еще раз подчеркнем, что соотношения (11) удобно использовать при анализе жестких нагружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадашев Ю. И., Помыткин С. П.* Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости. // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 59. Москва: КМК, 1998. С. 72-76.
2. *Кадашев Ю. И., Помыткин С. П.* Учет дилатансии в эндохронной теории пластичности // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. СПб., 2001. С. 127-129.
3. *Кадашев Ю. И., Помыткин С. П.* Теория пластического течения и эндохронная теория неупругости, учитывающие уплотнение материала // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: "Механика". Вып. 1(4). Нижний Новгород, 2002. С. 35-38.
4. *Кадашев Ю. И., Помыткин С. П.* Анализ эндохронных вариантов теории пластичности для конечных деформаций // Научные труды II международного семинара "Современные проблемы прочности" имени В. А. Лихачева. (5-9 октября 1998 г., Старая Русса). В 2 т. Новгород, 1998. Т. 2. С. 154-158.

5. *Кадашев Ю. И., Помыткин С. П.* Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства*. СПб., 1996. С. 124–127.

6. *Lee E. H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // *Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36. P. 1–6.

7. *Бровко Г. Л.* Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // *Прикладная математика и механика*. Т. 54. Вып. 5. 1990. С. 814–824.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ КОСТЕЙ КОНЕЧНОСТЕЙ ПРИ ЧРЕСКОСТНОМ ОСТЕОСИНТЕЗЕ

З. Т. ИЗМАЙЛОВА

Построены компьютерные модели костей конечностей для чрескостного остеосинтеза и проведен анализ напряженно-деформированного состояния предплечья и бедренной кости при регенерации. Анализ моделей чрескостного остеосинтеза при различных переломах костей конечностей, построенных на основе рентгеновских снимков в программе SolidWorks, позволяет оценить влияние мышечных усилий и модульной трансформации на процесс регенерации костей, а также определить жесткость аппаратов внешней фиксации. Проведены экспериментальные исследования жесткости аппаратов внешней фиксации для оценки точности компьютерного моделирования при сгибании-разгибании, приведении-отведении и ротации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Чрескостный остеосинтез (ЧО) широко используется при переломах и патологиях опорно-двигательного аппарата. Несмотря на всю универсальность, он не лишен недостатков, а именно: воспаления мягких тканей в области введения чрескостных элементов, недостаточная жесткость фиксации костных отломков, относительная сложность применения чрескостных аппаратов, вторичное травмирование и образование ложных суставов, необходимость постоянного квалифицированного врачебного мониторинга. Совершенствованием ЧО занимаются как в институтах травматологии и ортопедии, так и в лабораториях с инженерным уклоном. В последние годы для этих целей активно используется компьютерное моделирование. Целью исследования является: биомеханическое исследование состояния костей конечностей при чрескостном остео-

Доклад на семинаре 14 апреля 2009 г.

© З. Т. Измайлова, 2009

синтезе. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) построить содержательные и геометрические модели костей конечностей при чрескостном остеосинтезе;
- 2) провести вычисления напряжений, перемещений, деформаций и исследование состояния костей в зоне перелома при ЧО;
- 3) провести экспериментальные исследования жесткости ЧО.

2. ОСТЕОСИНТЕЗ ПРЕДПЛЕЧЬЯ

Предплечье образуют две кости, мышцы, соединительнотканые структуры и сосудисто-нервные пучки, расположенные близко друг к другу (рис. 1).

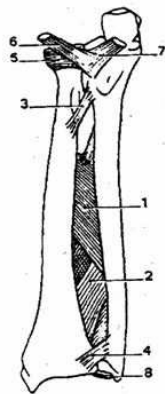


Рис. 1. Схема предплечья: 1 — межкостная мембрана, 2 — задние волокна межкостной мембраны, 3 — косой тяж, 4 — передняя связка нижнего лучелоктевого сустава, 5 — кольцевая связка, 6 — наружная коллатеральная связка, 7 — передние волокна внутренней коллатеральной связки, 8 — треугольная связка.

При повреждении одной из костей другая выступает в роли распорки, при повреждении обеих костей за счет разнонаправленной тяги мышц происходят значительные смещения костных отломков

с выраженной деформацией предплечья. Соединительно-тканые структуры участвуют в передаче нагрузок от одной кости к другой. При переломе одной из костей межкостная мембрана берет на себя основную нагрузку, при ее разрыве передача усилий нарушается.

Содержательная модель предплечья построена при следующих допущениях: 1) материалы костей, спиц, стержней, колец и соединительно-тканых структур — однородные и изотропные; 2) среда сплошная; 3) начальные напряжения в биологических структурах и во всех элементах конструкции аппарата, кроме спиц, не учитываются; 4) начальное натяжение спиц P_c ; 5) предплечье жестко закреплено по проксимальной поверхности; 6) к дистальному концу предплечья приложены сосредоточенные силы P , P_1 и P_2 (рис. 2).

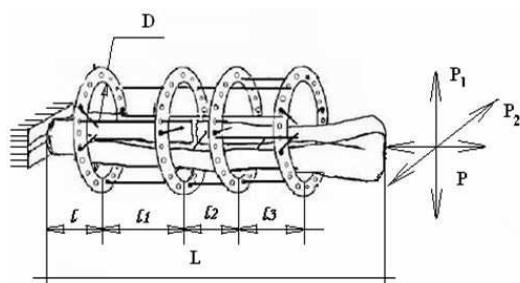


Рис. 2. Схема содержательной модели предплечья: L — длина предплечья, D — внутренний диаметр колец, l — расстояние от места закрепления кости до кольца, l_i — расстояние между кольцами, P — осевая нагрузка, P_1 — поперечная нагрузка в сагиттальной плоскости, P_2 — поперечная нагрузка во фронтальной плоскости.

Построение геометрической модели костей предплечья (рис. 3) осуществлено на основе томографических и рентгеновских снимков.

Проведены экспериментальные исследования кольцевидной связки лучевой кости, межкостной мембраны предплечья и треугольного фиброзно-хрящевого комплекса, с целью определения их геометрических параметров и механических характеристик.

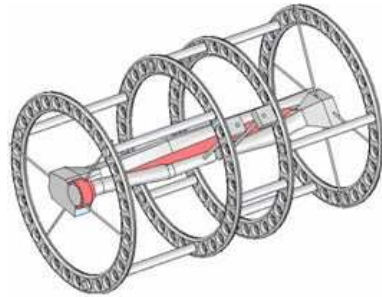


Рис. 3. Геометрическая модель предплечья.

Соединительно-тканые структуры фиксировались в биомеханическом стенде и проводились серии экспериментов с нагружением. Был выбран рабочий участок, относительное удлинение которого фиксировалось с помощью датчика линейных перемещений. Результаты исследований представлены в табл. 1. Оценка результатов проведена по закону распределения Стьюдента при числе измерений $n=20$ и с доверительной вероятностью 0.9.

Таблица 1. Геометрические размеры и механические свойства

Соединительно-тканые структуры	Длина, l , мм	Ширина, b , мм	Толщина, d , мм	Площадь поперечного сечения, S , м^2	Модуль упругости, E , МПа
Кольцевидная связка	80	14	1.5–2	28	34.13
Межкостная мембрана	10	2–2.5	1–1.9	25	120
Радиоульнарное сочленение	8	30	15	45	9.93
Передняя связка	10	7	1	7	16

Вычисления напряжений, перемещений и деформаций предплечья при ЧО проведены в программе COSMOSWorks методом конечных элементов. Для достижения необходимой точности, при минимальных затратах времени на вычисления перемещений костных отломков относительно друг друга модель разбита на 70 тыс. тет-

раздальных конечных элементов. Задача вычислений сводилась к определению величины силы, которая приводит к перемещению костных отломков относительно друг друга на 1 мм. Перемещение более 1 мм может привести к неправильному срастанию костных отломков или вторичному травмированию. Например, проведены вычисления перемещений для ЧО предплечья при следующих геометрических параметрах и механических характеристиках: длина костей предплечья $L=250$ мм, расстояние от места крепления кости до первого кольца $l=30$, расстояние между кольцами $l_1 = 85$, $l_2 = 50$, $l_3 = 85$, модуль упругости колец и спиц $E_{kc} = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_{kc} = 0.29$, модуль упругости кости $E = 11 \cdot 10^6$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. На рис. 4 на вклейке представлена эпюра перемещений костных отломков при переломе средней трети лучевой кости и поперечной силе $P_2 = 80$ Н, действующей во фронтальной плоскости кнутри.

Для оценки точности компьютерного моделирования совместно с сотрудником РосНИИТО им. Р.Р. Вредена П.Н. Кулешом проведены экспериментальные исследования жесткости аппаратов внешней фиксации при переломах костей предплечья. Экспериментальные исследования проведены на стенде для исследования жесткости остеосинтеза (рис. 7 на вклейке), который дает возможность: 1) жестко фиксировать предплечье, 2) подвести к любой выбранной точке аппарата или кости датчик для измерения перемещения [1].

Аппараты внешней фиксации смонтированы на модели комплекса «предплечье», включавшей в себя локтевую и лучевую кости. Имитаторы костей предплечья, изготовленные из дерева, вместе с аппаратом внешней фиксации жестко крепятся на стенде за проксимальный конец имитатора локтевой кости. Взаиморасположение моделей костей соответствует среднему между супинацией и пронацией положению предплечья.

Стендовые исследования жесткости аппаратов внешней фиксации проведены для девяти основных типов переломов при спицевом и спицестержневом чрескостном остеосинтезе. В табл. 2 представлены результаты исследований коэффициента жесткости c для спицевых и спицестержневых аппаратов внешней фиксации при переломе дистальной трети лучевой кости.

На рис. 4 сопоставлены результаты вычислений жесткости в

Таблица 2. Результаты экспериментальных исследований при переломе средней трети лучевой кости

Компоновка	Спицевая		Спицестержневая	
	P_1 , Н	c , Н/мм	P_1 , Н	c , Н/мм
Направление приложения нагрузки				
Кверху	39	38.07	64	48
Книзу	4	36.36	52	84
Направление приложения нагрузки	P_1 , Н	c , Н/мм	P_1 , Н	c , Н/мм
Кнутри	65	69,28	75	72.51
Кнаружи	72	70.79	82	85.96

программе COSMOSWorks с экспериментальными данными.

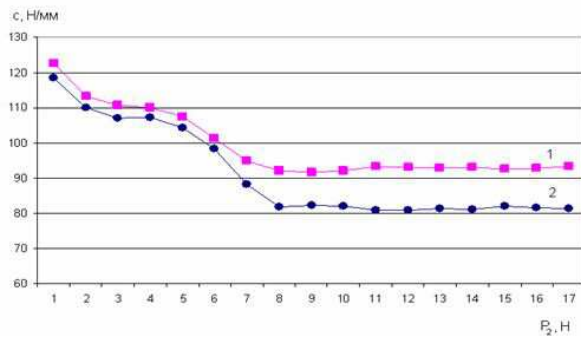


Рис. 4. Зависимость коэффициента жесткости от поперечной силы P_2 , полученной: 1 — при экспериментальных исследованиях, 2 — в программе COSMOSWorks.

3. ОСТЕОСИНТЕЗ БЕДРЕННОЙ КОСТИ

В отличие от допущений, принятых при построении содержательной модели костей предплечья, введены следующие: 1) бедренная кость жестко закреплена по дистальной поверхности; 2) к головке бедренной кости приложена сосредоточенная сила P под углом α к оси кости; 3) мышечные нагрузки P_i приложены в зоне при-

крепления мышц к бедренной кости под углами α_i к ее оси (рис. 5).

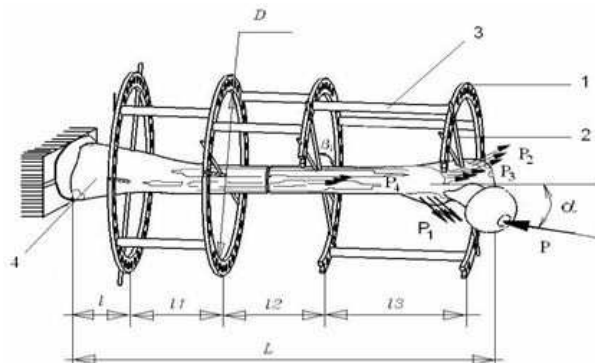


Рис. 5. Схема содержательной модели бедренной кости: 1 — опорные кольца, 2 — спицы, 3 — стержни, 4 — костный отломок.

При компьютерном моделировании чрескостного остеосинтеза бедренной кости на каждом из уровней, согласно Унифицированному Методу Обозначения Чрескостного Остеосинтеза [2], определены геометрические параметры и механические характеристики бедра и мышц бедра. Исследования рентгенограмм пациентов с переломами бедра показали, что на II уровне форма бедренной кости в поперечном сечении близка к прямоугольной, на III и VI — к неправильному овалу, на IV и V — к треугольнику. Так как бедренная кость в проксимальной и дистальной областях имеет специфическую конусовидно-расширяющуюся форму, то уровни O, I, VII, VIII и IX изучены на основе томографических снимков, выполненных с шагом 2 мм.

Исследования напряженно-деформированного состояния проведены при переломах проксимальной, средней и дистальной трети бедренной кости, а также при одноопорном, двуопорном стоянии, приведении-отведении и сгибании-разгибании бедра. Нагрузки на головку бедренной кости варьируют как по величине, так и по направлению в весьма широких пределах. В зависимости от места расположения или перемещений центра тяжести надсуставной

части тела, а также от наклона и тяги ягодичных мышц общая равнодействующая сила на головку бедренной кости колеблется в пределах от 0.3 до 4.5 G (G — вес тела без опорной конечности). Для построения геометрических моделей используется программа SolidWorks.

Например, геометрическая модель чрескостного остеосинтеза бедренной кости построена при следующих геометрических параметрах: $L = 430$ мм, $l_1 = 88$ мм, $l_2 = 88$ мм, $l_3 = 132$, $t_2 = 27$, $t_3 = 27.72$, $t_4 = 27$, $t_5 = 28.55$, $t_6 = 34.6$, $D = 180$ мм, $d_c = 1.8$ мм, $d_c = 8$ мм, $n = 2$, углы $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha_i = 25^\circ$ (рис. 6).

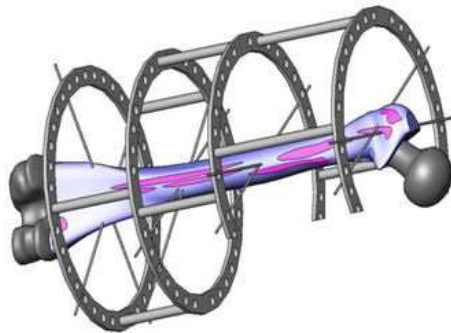


Рис. 6. Геометрическая модель бедренной кости при чрескостном остеосинтезе.

Перемещение костных отломков при двуопорном стоянии без учета мышечных усилий при внешней нагрузке $P=100$ Н составляет 0.14 мм, в то время как при одноопорном стоянии при внешней нагрузке $P=1000$ Н — 1.6 мм, что превышает допустимую норму.

При внешней нагрузке 100 Н и мышечной нагрузке 100 Н, создаваемой подвздошно-поясничной мышцей, максимальное перемещение костных отломков относительно друг друга составляет 0.7 мм. Увеличение мышечной нагрузки до 300 Н, при внешней нагрузке 100 Н, приводит к смещению костных отломков на величину 3.6 мм, что может плохо отразиться на срастании костных отломков. Исследования продольной жесткости фиксации при спицестержневом

остеосинтезе при переломе средней трети бедренной кости показали, что смещение 1 мм и более наступает при нагрузке 50 Н, после проведения модульной трансформации жесткость уменьшается и критическое смещение наступает при 18 Н (см. рис. 8 на вклейке).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенные модели позволяют оценить жесткость различных компоновок внешней фиксации, проводить исследования влияния мышечных нагрузок и модульной трансформации, а также учитывать изменения механических свойств элементов костных отломков и костного регенерата. Проведены экспериментальные исследования жесткости аппаратов внешней фиксации для девяти основных типов переломов костей предплечья при спицевом и спицестержневом чрескостном остеосинтезе. Проведен сравнительный анализ результатов вычислений жесткости аппаратов внешней фиксации, полученных при экспериментальных исследованиях и в программе COSMOSWorks.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров В.А. Метод исследования жесткости чрескостного остеосинтеза при планировании операций: Метод. рекомендации. СПб., С.30.
2. Соломин Л.Н. Чрескостный остеосинтез. Травматология и ортопедия. Руководство для врачей. СПб.: "Гиппократ". Т. 1, 2004. С. 336–388.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С МАЛЫМ УГЛОМ ОБРАЗУЮЩЕЙ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

Доклад на семинаре 9 сентября 2008 г.

А. А. Харунжий

РЕЗЮМЕ

Целью работы стало исследование применимости метода ортогональной прогонки С. К. Годунова к решению задачи о свободных колебаниях тонких упругих оболочек вращения. Как объект исследования были выбраны цилиндрические и конические оболочки с малым углом образующей, при этом наибольшее внимание было обращено на поведение собственных частот и форм колебаний при изменении малого параметра угла образующей. Достоверность результатов, полученных в работе, была проверена применением различных конкурирующих методов решения; при этом проведено сравнение методов между собой по точности и на его основе дана положительная оценка применению алгоритма ортогональной прогонки для упомянутых задач.

**Устойчивость сжатой пластины с нависающим краем
(ДИСКРЕТНАЯ ПОСТАНОВКА)**

Доклад на семинаре 7 октября 2008 г.

А. Ю. Ересько

РЕЗЮМЕ

В работе предпринята попытка рассмотреть задачу устойчивости линейной формы бесконечной в одном направлении сжатой пластины в дискретной постановке. Пластина рассматривалась с точки зрения модели твёрдого тела с микроструктурой – идеального монокристалла, т. е. в виде множества взаимодействующих друг с другом частиц. Для взаимодействия частиц, описываемого парным потенциалом, приведены результаты численного моделирования процесса квазистатического деформирования пластины. Производится сравнение с результатами макроскопической (континуальной) теории сплошной среды.

**Устойчивость прямоугольных пластин,
ослабленных отверстием**

Доклад на семинаре 2 декабря 2008 г.

А. В. ЛЕБЕДЕВ

РЕЗЮМЕ

Доклад посвящен исследованию задачи о потере устойчивости тонкой изотропной упругой прямоугольной пластины, ослабленной квадратным центральным отверстием, подвергнутой сжимающему нагружению, приложенному к торцам. Исследуется влияние геометрических параметров пластины и отверстия, граничных условий закрепления пластины на величину критической нагрузки и на форму потери устойчивости.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОКРАЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНО-ПОЛОСАТОЙ МЫШЦЫ

Доклад на семинаре 17 февраля 2008 г.

Е. А. Селицкая

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается математическая модель возбуждения мышцы. На основе этой модели проведен численный эксперимент с учетом сократительных свойств и структурной организации мышечного волокна, а также нервного возбуждения, поступающего из центральной нервной системы. В результате численного моделирования получена зависимость усилия в мышце для различных типов возбуждения.

Деструкция вихря

Доклад на семинаре 28 апреля 2009 г.

Е. Ф. Жигалко, А. И. Цветков, А. Г. Карпенко

РЕЗЮМЕ

Для расчёта параметров закрученного потока в аэродинамическом канале проведено моделирование в системе ANSYS течения вязкого воздуха. Рассмотрено трёхмерное течение. Основное внимание уделено определению меры подавления заданной закрученности потока его взаимодействием со стенками канала, сечением которого является многоугольник, а также с лонжеронами, размещаемыми на этих стенках.

ОБ АВТОРАХ

Александрова Людмила Александровна — студентка кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации. Научные интересы — математическое моделирование задач аэрогидродинамики, разработка прикладных программ. Опубликовано 6 работ. Научный руководитель — проф. Э.Н. Береславский.

Ересько Алексей Юрьевич — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Окончил магистратуру СПбГУ (“Механика, Прикладная математика”) в 2008 г. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик.

Ермаков Андрей Михайлович — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Окончил магистратуру СПбГУ (“Механика, Прикладная математика”) в 2009 г. Автор четырех опубликованных работ. Область научных интересов — биомеханика. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр.

Жигалко Евгений Фаддеевич — заведующий кафедрой прикладной математики ПГУПС, профессор, доктор физико-математических наук, автор многочисленных работ по вопросам гидромеханики и прикладной математики.

Измайлова Заира Татархановна — аспирант кафедры прикладной механики и инженерной графики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина)). Является автором 15 публикаций. Область научных интересов — биомеханика. Научный руководитель — проф. П.И. Бегун.

Карпенко Антон Григорьевич — магистр БГТУ-Военмеха. Область научных интересов — вычислительная гидродинамика и аэрогазодинамический эксперимент.

Краковская Елена Викторовна — окончила магистратуру СПбГУ (“Механика, Прикладная математика”) по специальности “Биомеханика” в 2005 г. Автор 8 опубликованных работ. В 2009 г. защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности “Механика деформированного твердого тела”. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Лебедев Александр Владимирович — окончил математико-механический факультет СПбГУ, получив дипломы бакалавра (2003) и магистра (2005) по специальности “Механика. Прикладная математика”. Окончил аспирантуру СПбГУ. Автор 5 опубликованных работ. Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов.

Морщинина Алина Алексеевна — аспирантка кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ. Научный руководитель — проф. Ю. М. Даль.

Павилайнен Вольдемар Яковлевич — лауреат Государственной премии СССР, доцент кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, автор более 80 работ (в том числе двух монографий) в области механики деформируемого твердого тела (теория оболочек), специалист по проектированию и расчету армированных железобетонных конструкций.

Перегудин Сергей Иванович — профессор кафедры информационных систем факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ. Автор более 100 научных работ, включая 2 монографии. Область интересов — гидродинамика, теория волн.

Пестерев Егор Васильевич — студент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации. Научный руководитель — проф. Э.Н. Берславский.

Помыткин Сергей Павлович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров. Область научных интересов — нелинейные теории пластичности, ползучести и прочности. Автор более 100 научных работ.

Селицкая Екатерина Александровна — окончила факуль-

тет ПМ–ПУ СПбГУ в 2006 г., в настоящее время аспирантка кафедры механики управляемого движения факультета ПМ–ПУ СПбГУ, автор четырех опубликованных работ. Научный руководитель — проф. В.С. Новоселов.

Типяев Альберт Сергеевич — окончил магистратуру СПбГУ (“Механика, Прикладная математика”) в 2000 г., а в 2003 г. — аспирантуру СПбГУ. Специализация — “Теоретическая механика”. Автор 5 опубликованных работ. В 2009 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Научный руководитель — проф. С.М. Бауэр.

Тулкина Анна Николаевна — выпускница кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ (2006). В настоящее время аспирантка кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ. Тема научной работы — исследование механических свойств наноструктур. Научный руководитель — доц. В.Я. Павилайнен.

Харунжий Александр Александрович — окончил бакалавриат механико-математического факультета Новосибирского государственного университета по кафедре геометрии и топологии и магистратуру математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — динамика тонкостенных конструкций. Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов.

Холодова Светлана Евгеньевна — кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики–процессов управления СПбГУ. Автор более 90 научных работ, включая одну монографию. Область интересов — гидродинамика, теория волн.

Цветков Алексей Иванович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник математико-механического факультета СПбГУ, специалист в области волновой и нестационарной газовой динамики.

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2008–2009 г.г.**

Краковская Елена Викторовна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2009. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Типяев Альберт Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2009. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Кухарева Анна Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2009. Научный руководитель — проф. А. Е. Волков.

СОДЕРЖАНИЕ

Взгляд назад	3
<i>А. М. Ермаков</i> Напряженно-деформированное состояние ортотропных неоднородных сопряженных эллиптических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления	4
1. Введение	4
2. Постановка задачи	5
3. Деформация корнеосклеральной оболочки глаза	11
4. Сопряженные сферическая и имеющая форму вытянутого эллипсоида оболочки	12
5. Сопряженные сферическая и имеющая форму сплюснутого эллипсоида оболочки	13
6. Деформация оболочек, приводящая к миопии	14
7. Деформация оболочек, приводящая к гиперметропии	15
8. Выводы	16
<i>В. Я. Павилайнен, А. Н. Тулкина</i> Исследование и расчет вынужденных колебаний консольных стержней на основе теории С. П. Тимошенко	17
1. Постановка задачи и исходные соотношения	17
2. Решение задачи в классической постановке	19
3. Вынужденные колебания консольного стержня с учетом инерционных нагрузок при повороте сечений и деформаций сдвига в теории С. П. Тимошенко	21
4. Вынужденные колебания стержня в случае объединения задач типов I и II	28
5. Методика расчета вынужденных колебаний консольного стержня в задачах типа II	33
6. Выводы	34
<i>С. И. Перегудин, С. Е. Холодова</i> К вопросу динамики вращающегося сферического слоя идеальной несжимаемой стратифицированной электропроводной жидкости	35
<i>Е. В. Краковская</i> Деформация ортотропных круглых пластин под действием нормального давления	63

1. Введение	63
2. Аналитическое решение задач	64
2.1. Теория Кирхгофа–Лява	64
2.2. Теория Тимошенко–Рейсснера	65
2.3. Уточненная теория Амбарцумяна	67
2.4. Уточненная теория Родионовой–Гитаева–Черныха ..	65
3. Полученные результаты	69
3.1. Трансверсально-изотропная пластина	69
3.2. Цилиндрически ортотропная пластина	72
4. Заключение	74
А. А. Морцинина К вопросу о математическом моделировании глаукомы	76
1. Введение	76
2. Осесимметричная деформация несжимаемой полой сферы и сферической оболочки	77
2.1. Линейное решение для сферы и сферической	77
2.2. Геометрически нелинейное решение для сферической оболочки	80
3. Физически и геометрически нелинейное решение для сферы	86
4. Осесимметричная деформация изотропной тонкостенной трубки	91
4.1. Линейное решение	91
4.2. Геометрически нелинейное решение	93
5. Заключение	95
А. С. Титяев Оценка влияния толщины и формы роговицы и склеры на показатели внутриглазного давления	98
1. Деформация эллипсоида вращения под действием внутреннего давления	98
2. Влияние кривизны роговицы и склеры на показатели ВГД при аппланационных методах измерения	101
3. Влияние толщины роговицы на показатели ВГД при аппланационных методах измерения	106
3.1. Тонометрия методом Маклакова	109
3.2. Тонометрия методом Гольдмана	109

<i>Л.А. Александрова</i> Математическое моделирование обтекания контура постоянной скорости гидотехнического сооружения.....	112
1. Введение.....	112
2. Постановка задачи и ее решение.....	113
3. Анализ численных результатов.....	114
4. Заключение.....	118
<i>Е.В. Пестерев</i> Об одной гидродинамической модели обтекания шпунта Жуковского.....	119
1. Введение.....	119
2. Решение задачи.....	120
3. Обсуждение результатов.....	125
4. Заключение.....	125
<i>С. П. Помыткин</i> Новая трактовка одного варианта эндохонной теории неупругости, учитывающей большие деформации.....	126
1. Определяющие уравнения для малых деформаций.....	126
2. Переход в область больших деформаций.....	127
<i>З.Т. Измайлова</i> Компьютерное моделирование состояния костей конечностей при чрескостном остеосинтезе.....	131
1. Введение.....	131
2. Остеосинтез предплечья.....	132
3. Остеосинтез бедренной кости.....	136
4. Заключение.....	139
Доклады, не вошедшие в сборник.....	141
Об авторах.....	145

РЕФЕРАТЫ

УДК 532.546

Александрова Л.А. **Математическое моделирование обтекания контура постоянной скорости основания гидротехнического сооружения** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 112–118.

Строится подземный контур заглубленной прямоугольной плиты, углы которого округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации, в случае, когда водопроницаемое основание подстилается криволинейным водоупором, характеризуемым постоянством скорости обтекания. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния основных определяющих параметров модели на форму и размеры подземного контура плиты и водоупора.

Библиогр. 5 назв. Ил. 4. Табл. 2.

УДК 539.3

Ермаков А.М. **Напряженно-деформированное состояние ортотропных неоднородных сопряженных эллиптических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 4–16.

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние двух сопряженных анизотропных эллиптической и сферической оболочек, находящихся под действием внутреннего давления. Такая задача может моделировать поведение корнеосклеральной оболочки глаза при увеличении внутриглазного давления. Проведен анализ деформации оболочек при различных соотношениях величин полюсей эллипсоида и модулей упругости составных оболочек

Библиогр. 9 назв. Ил. 6.

УДК 612.76

Измайлова З.Т. **Компьютерное моделирование состояния костей конечностей при чрескостном остеосинтезе** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 131–140.

Построены компьютерные модели костей конечностей для чрескостного остеосинтеза и проведен анализ напряженно-деформированного состояния предплечья и бедренной кости при регенерации. Анализ моделей чрескостного остеосинтеза при различных переломах костей конечностей, построенных на основе рентгеновских снимков в программе SolidWorks, позволяет оценить влияние мышечных усилий и модульной трансформации на процесс регенерации костей, а также определить жесткость аппаратов внешней фиксации. Проведены экспериментальные исследования жесткости аппаратов внешней фиксации для оценки точности компьютерного моделирования при сгибании-разгибании, приведении-отведении и ротации.

Библиогр. 2 назв. Ил. 6. Табл. 2.

УДК 539. 3

Краковская Е. В. **Деформация ортотропных круглых пластин под действием нормального давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 63–75.

Рассматриваются задачи о деформации круглых пластин под действием нормального давления с учетом их анизотропии. Приводится расчет прогиба круглой пластины с использованием классической теории, теории Тимошенко–Рейсснера и уточненной теории Амбарцумяна. Проводится расчет прогиба трансверсально-изотропной и цилиндрически ортотропной круглой пластины с помощью уточненной теории Родионовой–Титаева–Черныха. Аналитические результаты сравниваются с численными результатами, полученными методом конечных элементов в пакете ANSYS.

Библиогр. 11 назв. Ил. 5.

УДК 539. 3

Морщинина А. А. **К вопросу о математическом моделировании глаукомы** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 76–97.

На основе дельта-метода получено аналитическое решение геометрически нелинейной задачи для осесимметричной деформации

сферической оболочки (склеры) и тонкостенного кругового цилиндра (сосуда зрительного нерва). Рассмотрена физически и геометрически нелинейная задача для поллой сферы.

Библиогр. 20 назв. Ил. 5.

УДК 534.1

Павилайнен В.Я., Тулкина А.Н. **Исследование и расчет частот вынужденных колебаний консольных стержней на основе теории С.П. Тимошенко** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 17–34.

Дан вывод уравнений вынужденных колебаний при кинематическом возбуждении консольного стержня по теории С.П. Тимошенко. Получены расчетные формулы определения собственных частот для двух типов инерционных нагрузок при повороте поперечных сечений, а также формулы для определения прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил при вынужденных колебаниях.

Библиогр. 6 назв. Ил. 2. Табл. 4.

УДК 532.591

Перегудин С.И., Холодова С.Е. **К вопросу динамики вращающегося сферического слоя идеальной несжимаемой стратифицированной электропроводной жидкости** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 35–62.

Проводится исследование механизмов генерации магнитного поля Земли вследствие трехмерного крупномасштабного движения невязкой, несжимаемой, неоднородной (стратифицированной) идеально проводящей электропроводной вращающейся жидкости, сосредоточенной в жидком земном ядре. Получено аналитическое решение системы нелинейных уравнений в частных производных, моделирующей геострофическое движение в слое идеальной электропроводной стратифицированной вращающейся жидкости. Анализ структуры представленных полей магнитогидродинамических величин позволяет сделать вывод о справедливости гипотезы С.И. Брагинского о существовании сильных изменений в тонком слое земного ядра, примыкающем к границе с мантией.

Библиогр. 17 назв.

УДК 532.546

Пестерев Е.В. **Об одной гидродинамической модели обтекания шпунта Жуковского** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 119–125.

В рамках плоской установившейся фильтрации рассматривается задача об обтекании шпунта Жуковского в том случае, когда на некоторой глубине имеется горизонтальный пласт, состоящий из непроницаемого и хорошо проницаемого участков, при наличии инфильтрации на свободной поверхности. Дано аналитическое решение соответствующей смешанной задачи теории аналитических функций. Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния всех физических параметров модели на картину течения.

Библиогр. 4 назв. Ил. 6. Табл. 2.

УДК 539.374

Помыткин С.П. **Новая трактовка одного варианта эндохронной теории неупругости, учитывающей большие деформации** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 126–130.

Рассматривается вариант эндохронной теории неупругости, в котором параметрический тензор порождает упругие деформации. Рекомендуется простой способ обобщения определяющих соотношений на область больших деформаций и поворотов. Отмечается, что в процессе обобщения уравнений возникает новая мера упругих деформаций. Подчеркивается, что сформулированные уравнения удобны для решения задач мягкого нагружения.

Библиогр. 7 назв.

УДК 539.3

Тягачев А.С. **Оценка влияния толщины и формы роговицы и склеры на показатели внутриглазного давления** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2008–2009 гг. С. 98–111.

При апланационной тонометрии роговица глаза деформируется грузом с плоским основанием и образуется круг сплющивания

или апланации. По диаметру этого круга при фиксированной нагрузке (тонометр Маклакова) или по нагрузке при фиксированной зоне контакта (тонометр Гольдмана) определяется внутриглазное давление (ВГД). При этом предполагается, что и роговица и склера имеют сферическую форму и средние механические параметры. Однако известно, что глаза при миопии и гиперметропии (близорукости и дальнозоркости) имеют отклонения от сферической формы, причем это может быть вызвано как изменением формы склеры и удлинением при миопии или укорочением при гиперметропии передне-задней оси, так и изменением кривизны роговицы. Кроме того, роговицы различных глаз могут сильно отличаться по толщине.

Библиогр. 7 назв. Ил. 4. Табл. 1.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2008–2009 гг.

Под ред. *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейцторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать *xx.xx.2009*. Формат $60 \times 84^{1/16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл.-печ. л. 7,9. Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41

Схема глаза человека

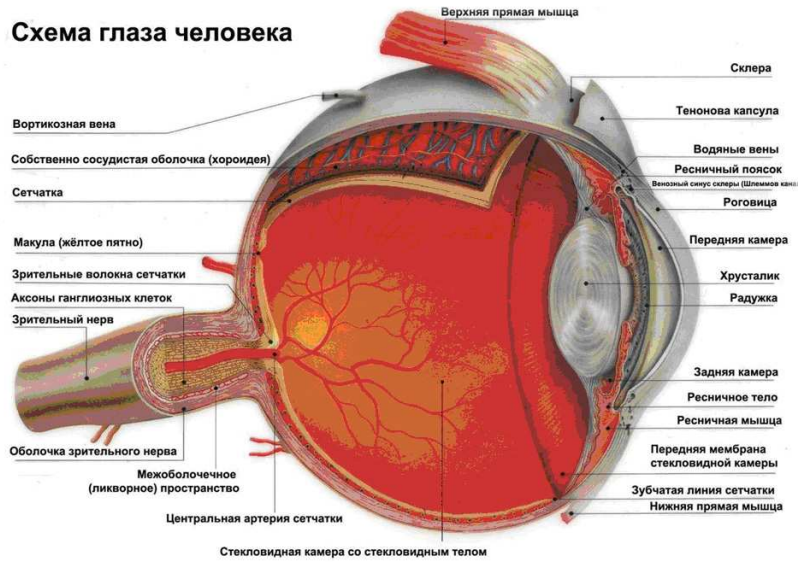


Рис. 1. Схема человеческого глаза (к статьям А. Ермакова, Е. Краковской, А. Морщиной, А. Типяева).

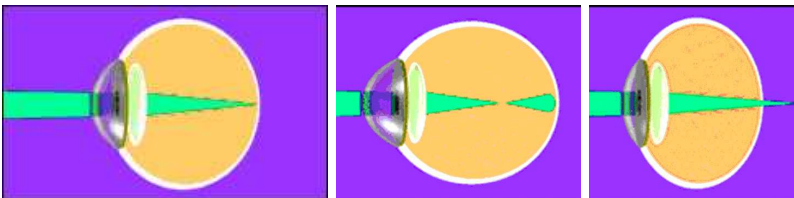


Рис. 2. Преломление света в глазе: в норме, с миопией и с гиперметропией (к статье А. Ермакова).

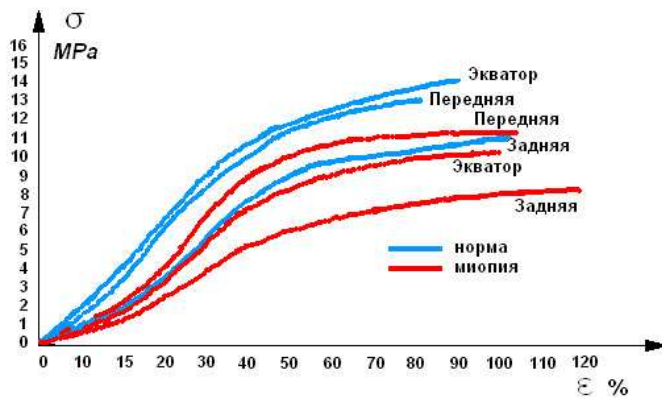


Рис. 3. Зависимость напряжение – деформация различных областей склеры глаз с нормальной и миопической рефракцией (к статье А. Морщиной).

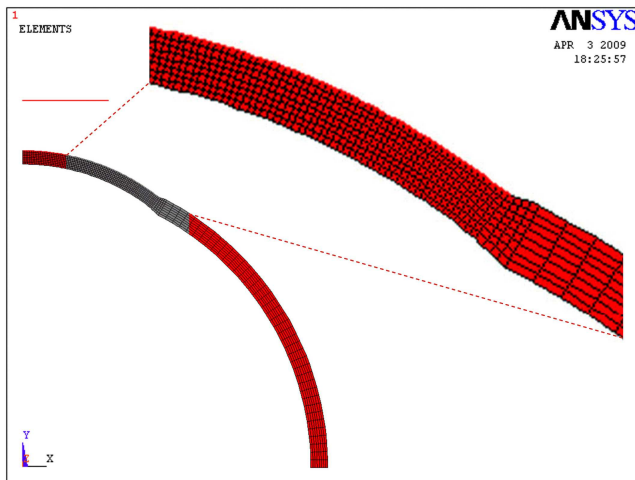


Рис. 4. Разбиение модели на элементы (к статье А. Тиляева).

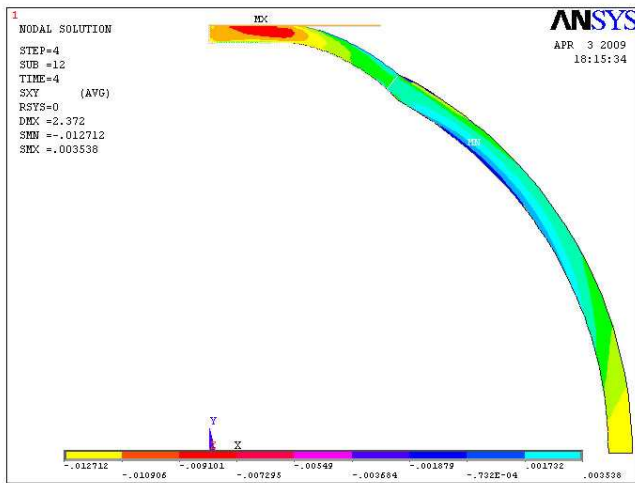


Рис. 5. Сдвиговые напряжения (к статье А. Тицяева).



Рис. 6. Стенд для исследования жесткости остеосинтеза.

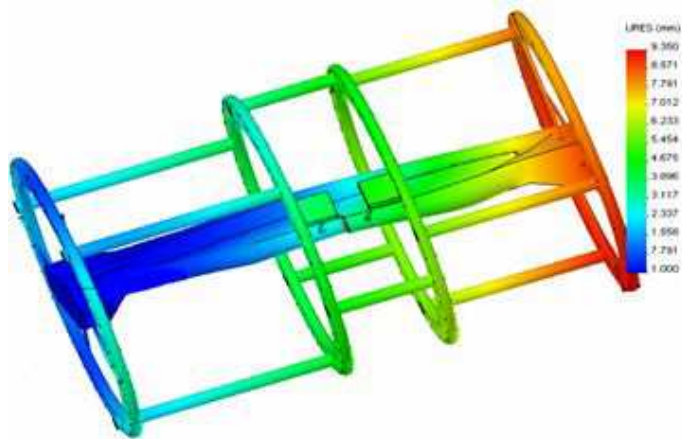


Рис. 7. Эпюра перемещений при переломе средней трети лучевой кости (к статье З. Измайловой.)

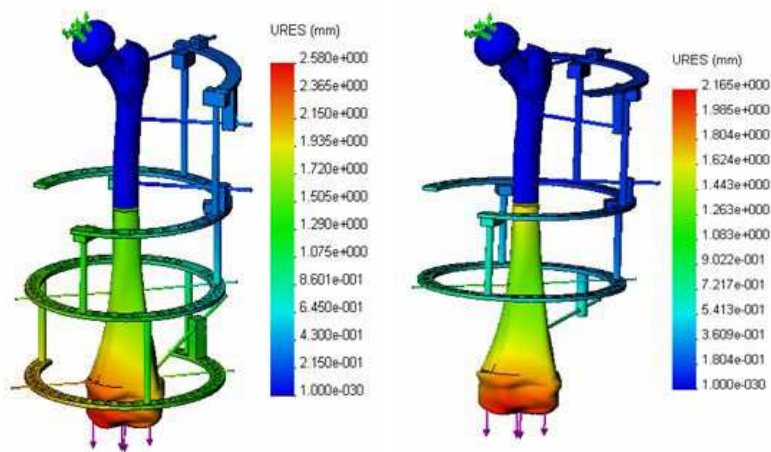


Рис. 8. Эпюра перемещений при комбинированном чрескостном остеосинтезе до (a) и после (b) модульной трансформации (к статье З. Измайловой.)