

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2009–2010 гг.

Под редакцией *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2010

ББК 22.25
Т78

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),
д-р техн. наук, проф. *В. И. Сливкер* (Гипростроймост,
ПГУПС)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2009–2010 гг. / Под ред. А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. — 209 с.
ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ББК 22.25

© А. Л. Смирнов, Е. Ф. Жигалко,
сост., 2010

© Издательство С.-Петербургского
университета, 2010

ISSN 2218-7421

ДЕСТРУКЦИЯ ВИХРЯ

Е. Ф. ЖИГАЛКО, А. Г. КАРПЕНКО, А. И. ЦВЕТКОВ

В численном эксперименте исследуются свойства результатов расчета в системе ANSYS диффузии завихренности и разрушения свободного вихря в цилиндрическом и многогранном канале.

Для оценки и анализа параметров закрученного потока воздуха в аэродинамическом канале проведено приближенное моделирование такого течения в системе ANSYS. Успех численного моделирования различных примеров сложных течений газа и жидкости в системе ANSYS вдохновляет, но и делает актуальным вопрос об уточнении возможностей и эффективности этого подхода.

В докладе представлены результаты вычислительных экспериментов, проведенных для выяснения возможности расчета течения с рассеивающимися вихрями (рис. 1 на вклейке) и определения, таким образом, подхода к расчету практической задачи оценки меры снижения закрученности потока вследствие его взаимодействия со стенками многогранного канала, а также с лонжеронами, размещаемыми на этих стенках.

Из частных моделей, которые относились бы к рассматриваемому процессу, для которых имеется теоретическое решение ясного смысла и которые могли бы играть роль эталона, мы сосредоточились на теории Лэмба для ламинарного торможения вращающейся жидкости в остановившемся круговом цилиндре [1, 2] и модели свободного вихря. По теории Лэмба в решении нестационарной системы уравнений Навье–Стокса возникает дискретный спектр собственных чисел и связанная с ними последовательность собственных движений с соответственно усложняющимися модами, вещественная часть комплексной функции тока которых представ-

Доклад на семинаре 28 апреля 2009 г.

© Е.Ф. Жигалко, А. Г. Карпенко, А. И. Цветков, 2010

ляется в виде

$$\begin{aligned} \psi_{mn} = & A_{mn} \cos(n\varphi + \delta_{mn}) \times \\ & \times \left(J_n(\lambda_{mn}r) - J_n(\lambda_{mn}r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right) \exp(-\lambda_{mn}^2 \nu t) \quad (1) \\ & m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В этой формуле J_n — функция Бесселя 1-го рода, r_0 — радиус цилиндра, а собственные числа λ_{mn} находятся из характеристического уравнения

$$J_{n+1}(\lambda_{mn}r_0) = 0.$$

Примеры мод разного порядка показаны на рис. 1.

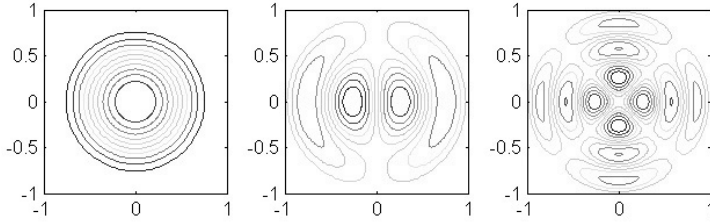


Рис. 1. Примеры мод собственных течений в теории Лэмба.

Не углубляясь в анализ связи этого решения с каким-либо конкретным реальным течением, укажем лишь, что в рамках теории с уравнениями Навье–Стокса, в медленном ламинарном течении жидкости в цилиндре возможны сепаратные вихри, а их затухание экспоненциально во времени, и тем сильнее (вследствие увеличения λ_{mn} с m и n), чем выше порядок моды.

В модели свободного вихря принимают, что жидкость вращается около центра так, что окружная скорость v_φ обратно пропорциональна расстоянию r до центра. В этой модели всюду, кроме центра, завихренность равна нулю, а циркуляция $\Gamma = 2\pi r v_\varphi$ постоянна.

Рассмотрено медленное нестационарное вязкое течение в полости между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами. В начальный момент жидкость покоится, а внутренний цилиндр (r_1)

вращается, как и в последующем, вокруг своей оси с постоянной скоростью $v_{\varphi 1}$. Скорость вращения внешнего цилиндра (r_2) принималась равной или нулю, или постоянной из теории свободного вихря:

$$v_{\varphi 2} = v_{\varphi 1} \frac{r_1}{r_2}.$$

В расчете до эффективного установления отслеживалась диффузия завихренности от внутреннего цилиндра.

Большинство расчетов рассматриваемой задачи выполнено на сетках 20×56 с использованием предоставляемых по умолчанию системой ANSYS ресурсов настройки Flotran 141. Предположение об осесимметричности течения не делается, то есть решается трехмерная задача.

На рис. 2 на вклейке показаны выразительные примеры получающихся полей вектора скорости при диффузии завихренности от вращающегося цилиндра: $r_1 = 0.1$, $r_2 = 1$.

Эти примеры можно считать типичными для всей серии расчетов, поскольку они иллюстрируют несколько общих выводов. Как упоминалось выше, граничные и начальные условия в задачах серии — вполне осесимметричные. Следовательно, в идеале, из условия сохранения импульса следует, что течение развивается как осесимметричное. Обычно его и рассматривают лишь в плоскости осевого сечения. В наших вычислительных экспериментах расчет велся в трехмерной области. Учет дополнительной степени свободы для неоднородности и движения в окружном направлении приводит к появлению (при осесимметричных начальных и краевых условиях) неосесимметричных компонентов в расчетном поле, имеющих сходство с собственными течениями теории Ламба. Легко обнаружить, что одной из причин этого является неоднородность алгоритма. Сепаратные вихри накладываются, как возмущение, на осесимметричный основной процесс, причем их вклад ослабевает с ростом порядка моды. Вследствие диффузии завихренности результирующее течение приближается к соответствующему стационарному ламинарному осесимметричному течению (например, Документация ANSYS, VM46, F.White), но функциональные свойства этой диффузии в расчете недостаточно отчетливы для сопоставления с теорией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sir Horace Lamb*. Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press, London, 1975.
2. *Hans J. Lugt, Ernst W. Schwiderski*. Birth and Decay of Vortices. The Physics of Fluids. Vol. 9. N 5. 1966. P. 851–859.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

С. И. Перегудин, С. Е. Холодова

Исследуются уравнения трехмерной экваториальной динамики идеальной электропроводной неоднородной вращающейся жидкости. Эти уравнения вследствие представления магнитного поля и поля скорости в виде суперпозиции невозмущенных полей, соответствующих стационарному состоянию среды, и индуцированных полей, обусловленных волновым движением, при помощи введения двух вспомогательных функций приводятся к специальному скалярному уравнению. Исследование этого уравнения позволит исследовать проблему разрешимости возникающих начально-краевых задач теории волн, распространяющихся в окрестности экваториальной зоны сферического слоя электропроводной вращающейся жидкости с неоднородной плотностью. Построены частные решения представленного скалярного уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды.

Целью статьи является редукция нелинейной системы уравнений в частных производных, моделирующей возмущения в идеальной электропроводной вращающейся жидкости, с учетом инерционных сил, сил тяжести, Кориолиса, Лоренца, а также неоднородностей плотности, для особого случая геометрии рассматриваемого объема, который учитывает особенности экваториальной зоны сферического слоя. Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд.

Представленные в статье исследования являются логическим продолжением исследований, опубликованных в работах [1]–[6].

Колебания идеальной электропроводной несжимаемой страти-

фицированной вращающейся жидкости описываются следующей системой уравнений [7]–[12]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} \operatorname{rot} \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (3)$$

где \mathbf{b} — вектор магнитной индукции, \mathbf{v} — скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, p — давление, ρ — плотность, g — величина ускорения силы тяжести. Предполагается, кроме того, что магнитная проницаемость μ постоянна.

Вблизи экватора нормальная компонента угловой скорости вращения Земли представляет собой малую величину и обращается в нуль на экваторе, и, как следствие, геострофическое приближение [6] перестает быть справедливым. Отсюда следует, что для описания природы экваториальной динамики необходим детальный анализ исходных магнитогидродинамических уравнений с учетом особенностей экваториальной области.

Итак, рассмотрим уравнения динамики волн в широтном поясе около экватора. Пусть масштаб движения в направлении север–юг достаточно мал, так, что геометрия движения допускает использование локальной декартовой системы координат, причем сферичность Земли учитывается лишь в изменении параметра Кориолиса с широтой, который может быть записан как

$$f = \beta_0 y_*, \quad (4)$$

где y_* — размерное расстояние к северу от экватора, $\beta_0 = -\frac{2\omega}{r_0}$ (r_0 — радиус жидкого ядра Земли).

Действительно, используя разложение в ряд в окрестности широты $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 - \sin \theta_0 (\theta - \theta_0) - \frac{\cos \theta_0}{2} (\theta - \theta_0)^2 + \dots,$$

с учетом соотношения

$$y_* = (\theta - \theta_0) r_0$$

получим выражение

$$f = 2\omega \cos \theta = -\frac{2\omega \sin \theta_0}{r_0} y_* = -\frac{2\omega}{r_0} y_* = \beta_0 y_*.$$

С помощью характерных масштабов введем в рассмотрение безразмерные переменные:

$$x_* = Lx, \quad y_* = Ly, \quad z_* = Dz, \quad t_* = Tt,$$

где в качестве масштаба времени выбрано время адвекции. Для компонент скорости и магнитного поля имеем

$$\begin{aligned} v_{x*} &= Uv_x, & v_{y*} &= Uv_y, & v_{z*} &= \frac{D}{L}Uv_z, \\ b_{x*} &= Ub_x, & b_{y*} &= Ub_y, & b_{z*} &= \frac{D}{L}Bb_z. \end{aligned}$$

Выбор масштабов для поля плотности и давления проводится с учетом того, что при малых скоростях горизонтальный градиент давления одинаков по порядку величины с силой Кориолиса, и с учетом предположения равенства по порядку величин сил плавучести и вертикального градиента давления, что следует из удовлетворения с большой степенью точности крупномасштабных движений приближению гидростатики. Итак, будем считать, что $p_s(z)$ и $\rho_s(z)$ определяют основное состояние, на фоне которого возникают возмущения, обусловленные движением. Поэтому давление p_* и плотность ρ_* представим соотношениями

$$p_* = p_s(z) + \tilde{p}(x, y, z, t), \quad \rho_* = \rho_s(z) + \tilde{\rho}(x, y, z, t),$$

в которых \tilde{p} и $\tilde{\rho}$ — изменяющиеся в пространстве и во времени отклонения от стандартных значений $p_s(z)$ и $\rho_s(z)$. Определим масштабы для величин \tilde{p} и $\tilde{\rho}$. Так как характерное значение силы Кориолиса представляется выражением

$$\rho_* v_{x*} f = O(\rho_s \beta_0 LU),$$

а характерная величина горизонтального градиента давления равна $\frac{\tilde{p}}{L}$, то получим представление

$$\tilde{p} = O(\rho_s \beta_0 L^2 U).$$

Следовательно, давление представимо в виде

$$p_* = p_s(z) + \rho_s(z) \beta_0 L^2 U \tilde{p}(x, y, z, t). \quad (5)$$

Для вертикального градиента давления \tilde{p} справедливо соотношение

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z_*} = O\left(\frac{\tilde{p}}{D}\right) = O\left(\frac{\rho_s \beta_0 L^2 U}{D}\right),$$

следовательно, если $\tilde{\rho}g$ имеет такой же порядок величины, то

$$\tilde{\rho} = O\left(\rho_s U \frac{\beta_0 L^2}{gD}\right).$$

Таким образом, плотность может быть представлена следующим образом:

$$\rho_* = \rho_s(z) \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho(x, y, z, t)\right). \quad (6)$$

Уравнения движения в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho\right) \frac{U}{T} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho\right) \frac{U^2}{L} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \\ & = -\beta_0 L U \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B^2}{2\mu L \rho_s(z)} \frac{\partial}{\partial x} (b_x^2 + b_y^2 + \delta^2 b_z^2) + \frac{\beta_0 L U y v_y \rho_*}{\rho_s(z)} + \\ & + \frac{B^2}{\mu L \rho_s(z)} \left(b_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_x}{\partial z}\right), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho\right) \frac{U}{T} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho\right) \frac{U^2}{L} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \\ & = -\beta_0 L U \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B^2}{2\mu L \rho_s(z)} \frac{\partial}{\partial y} (b_x^2 + b_y^2 + \delta^2 b_z^2) - \frac{\beta_0 L U y v_x \rho_*}{\rho_s(z)} + \\ & \quad + \frac{B^2}{\mu L \rho_s(z)} \left(b_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_y}{\partial z}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho\right) \left(\frac{\delta U}{T} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\delta U^2}{L} \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right) = \\ & = -\frac{1}{\rho_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s(z) p) - \frac{B^2}{\beta_0 \mu L^2 U \rho_s(z)} \left(b_x \frac{\partial b_x}{\partial z} + b_y \frac{\partial b_y}{\partial z} + \delta^2 b_z \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) - \\ & \quad - \rho + \frac{B^2 \delta^2}{\beta_0 L^2 U \rho_s(z)} \left(b_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial b_z}{\partial z}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\delta = \frac{D}{L}$.

Параметры $\frac{U}{T}$, $\beta_0 L U$, $\frac{B^2}{\mu L \rho_s}$ одного порядка, откуда масштаб для t_* определяется как

$$T = \frac{1}{\beta_0 L}. \quad (10)$$

В результате получим уравнение неразрывности

$$\frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \frac{d\rho}{dt} + \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho\right) \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{v_z}{\rho_s(z)} \frac{d\rho_s(z)}{dz} = 0, \quad (11)$$

уравнение соленоидальности магнитного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (12)$$

и уравнение индукции магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \langle \mathbf{b}, \nabla \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (13)$$

При $U = 1$ см/сек, $r_0 = 3,5 \cdot 10^8$ см, $2\omega \approx 1,4 \cdot 20^{-4}$ сек $^{-1}$, $D = 4 \cdot 10^6$ см получаем оценку:

$$\frac{\beta_0 L^2 U}{gD} = O(10^{-7}). \quad (14)$$

Оставляя только линейные члены в уравнениях (7)–(9) и (11)–(13), с учетом соотношения (10), оценки (14) и представлений

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'(x, y, z, t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'(x, y, z, t),$$

и предполагая, что малые возмущения скорости \mathbf{v}' и индукции магнитного поля \mathbf{b}' распространяются по некоторому стационарному однородному фону, описываемому постоянными величинами \mathbf{v}_0 , \mathbf{b}_0 (далее $\mathbf{v}_0 = 0$), получаем в результате уравнения в приближении экваториальной β -плоскости, в виде

$$\rho_s \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - yv_y \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\mu} D b_x = 0, \quad (15)$$

$$\rho_s \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + yv_y \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\mu} D b_y = 0, \quad (16)$$

$$\rho = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s v_z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathcal{D} \mathbf{v} + \mathbf{b}_0 \frac{\rho'_s}{\rho_s} v_z, \quad (20)$$

где $\eta = \rho_s p + \frac{1}{\mu} (b_{0x} b_x + b_{0y} b_y)$, $\mathcal{D} = (\mathbf{b}_0, \nabla)$ — дифференциальный оператор, обозначение для возмущения индукции магнитного поля сохранено прежним.

Замыкаем систему (15)–(20) термодинамическим уравнением (см. [10])

$$\frac{d\rho}{dt} = \varkappa \Delta \rho - \frac{\alpha \rho_0}{c_P} Q, \quad (21)$$

\varkappa — коэффициент температуропроводности, $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \Big|_p$ — коэффициент термического расширения, c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении, Q — скорость притока тепла от

внешних источников на единицу массы. Поскольку из представления (6) имеем

$$\rho_* = \rho_s(z) \left(1 + \frac{\beta_0 L^2 U}{gD} \rho(x, y, z, t) \right),$$

линеаризованное уравнение (21) приводится к безразмерной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z} \frac{D}{\beta_0^2 L^4} v_z = \frac{M_* g D}{\beta_0^2 L^3 U \rho_s(z)}, \quad M_* = \varkappa \Delta \rho_* - \frac{\alpha \rho_0}{c_P} Q,$$

или, вводя обозначения

$$\begin{aligned} N^2 &= -\frac{g}{\rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z_*} = -\frac{g}{D \rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z}, \\ S(z) &= \frac{N^2 D^2}{\beta_0^2 L^4} = -\frac{g}{D \rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z} \frac{D^2}{\beta_0^2 L^4} = -\frac{gD}{\beta_0^2 L^2 L^2 \rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z} = \\ &= -\left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{1}{\rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z} = O(1), \quad M = -\frac{M_* R}{LU \rho_s(z)}, \end{aligned}$$

где $R = \frac{\sqrt{gD}}{\beta_0 L}$ — экваториальный радиус деформации Россби, N^2 — квадрат частоты Вайсяля–Брента, получаем выражение

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + S(z) v_z = M. \quad (22)$$

Считая вертикальный масштаб плотности большим по сравнению с вертикальным масштабом вертикального движения, т. е. учитывая малость величины $\frac{1}{\rho_s(z)} \frac{\partial \rho_s(z)}{\partial z}$, уравнение (18) примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (23)$$

Эффект стратификации описывается параметром S , который может быть представлен как $S = \left(\frac{L_D}{L}\right)^2$, где $L_D = \frac{ND}{\beta_0 L}$. Выбирая в качестве характерного масштаба длины $L = \sqrt{\frac{ND}{\beta_0}}$, получаем

$S = O(1)$. Это соотношение вытекает из наблюдений, и не требуется априори [13].

В отсутствие диссипации уравнение (22) сводится к уравнению сохранения плотности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - S(z)v_z = 0. \quad (24)$$

Исключив функцию ρ из уравнения (24) и из результата дифференцирования уравнения (17) по t , систему (15)–(20), (23), (24) можно представить в форме

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - yv_y + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{\mu\rho_s}Db_x = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + yv_x + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} - \frac{1}{\mu\rho_s}Db_y = 0, \quad (26)$$

$$v_z = -\frac{1}{S(z)}\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t \partial z}, \quad (27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathcal{D}\mathbf{v}, \quad (30)$$

$$\tilde{\eta} = p + \frac{1}{\mu\rho_s}(b_{0x}b_x + b_{0y}b_y). \quad (31)$$

Введем в рассмотрение функции $\tilde{\eta}(x, y, z, t)$ и $\tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t)$, определяемые равенствами

$$\tilde{\eta}(x, y, z, t) = -(\mathcal{D}_t^2 + y^2)^2 \tilde{\eta}(x, y, z, t), \quad (32)$$

$$\mathbf{b}(x, y, z, t) = \mu\rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) \tilde{\mathbf{b}}(x, y, z, t), \quad (33)$$

где $\mathcal{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, $\tilde{\mathbf{b}} = (b_x, b_y)$. Заметим, что равенства (32) и (33) определяют функции $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ неоднозначно: если функция $\eta_0(x, y, z, t)$ удовлетворяет соотношению (32), то этому соотношению удовлетворяет и функция вида

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} = \eta_0(x, y, z, t) + [\eta_1(x, y, z) + \eta_2(x, y, z)y] \cos yt + \\ + [\eta_3(x, y, z) + \eta_4(x, y, z)y] \sin yt, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\eta_j(x, y, z)$, $(j = \overline{1, 4})$ — произвольные функции; аналогично равенство (33) определяет семейство функций $\tilde{\mathbf{b}}$ вида

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_0(x, y, z, t) + \mathbf{b}^{(1)}(x, y, z) \cos yt + \mathbf{b}^{(2)}(x, y, z) \sin yt, \quad (35)$$

где $\mathbf{b}^{(j)}$, $j = 1, 2$ — произвольные функции своих аргументов в рассматриваемой области.

Пусть далее $b_{0x} = b_{0y} = 0$. Подставив функции $\tilde{\eta}$ и \mathbf{b} из выражений (32) и (33) в уравнения (25) и (26), получим в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & -y \\ y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (\mathcal{D}^2 + y^2)^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y (\mathcal{D}_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} + (\mathcal{D}^2 + y^2) \mathcal{D} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Интегрирование соотношения (36) по t приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} \right] + C_1(x, y, z) \begin{pmatrix} \cos yt \\ -\sin yt \end{pmatrix} + C_2(x, y, z) \begin{pmatrix} \sin yt \\ \cos yt \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $C_1(x, y, z)$ и $C_2(x, y, z)$ — произвольные функции. Подставляя функции $\tilde{\eta}$, \tilde{b}_x и \tilde{b}_y из представлений (34) и (35) в равенство (37), получим

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} b_x^{(0)} \\ b_y^{(0)} \end{pmatrix} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[C_1(x, y, z) + 2y^2(\eta_1 + \eta_2 y) + yb_{0z} \left(\frac{\partial b_x^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial b_y^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos yt \\ -\sin yt \end{pmatrix} + \\
& + \left[C_2(x, y, z) + 2y^2(\eta_3 + \eta_4 y) + yb_{0z} \left(\frac{\partial b_y^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial b_x^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \begin{pmatrix} \sin yt \\ \cos yt \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{C}(x, y, z) = (C_2(x, y, z), -C_1(x, y, z), 0) \in \mathcal{H}_2(\mathbf{\Omega})$, $C_j(x, y, z) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{\Omega})$, $j = 1, 2$, где $\mathcal{H}_2(\mathbf{\Omega})$ — подпространство гильбертова пространства вещественных вектор-функций $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, определенных в ограниченной области $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей и имеющих компоненты v_k , $k = 1, 3$, принадлежащие гильбертову пространству вещественных функций L_2 :

$$\mathcal{H}_2(\mathbf{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{L}_2 : \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)\},$$

т. е. $\mathcal{H}_2(\mathbf{\Omega})$ представляет собой совокупность всех векторов $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_2(\mathbf{\Omega})$, имеющих нулевую третью компоненту.

Для дальнейшего исследования оказывается полезной следующая теорема о представлении векторов подпространства $\mathcal{H}_2(\mathbf{\Omega})$ [14].

Теорема. Для любого вектора $\mathbf{C}(x, y, z) \in \mathcal{H}_2(\mathbf{\Omega})$ найдется пара функций $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{\Omega})$ такая, что $\mathbf{C}(x, y, z) = (\varphi_x + \psi_y, \varphi_y - \psi_x, 0)$, где $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$ — частные производные функций $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$.

Используя теорему и полагая в (38)

$$\Delta_2 \psi(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \Delta_2 \varphi(x, y, z) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

где

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= -2y^2(\eta_1 + \eta_2 y) - yb_{0z} \frac{\partial}{\partial z} (b_x^{(2)} + b_y^{(1)}), \\
f_2(x, y, z) &= -2y^2(\eta_3 + \eta_4 y) - yb_{0z} \frac{\partial}{\partial z} (b_y^{(2)} - b_x^{(1)}),
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} + \mathcal{D} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} \right]. \quad (39)$$

Из уравнения (30) с учетом выражения (39) вытекает равенство

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_t \mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}_t \mathcal{D}^2 & -y \mathcal{D}^2 \\ y \mathcal{D}^2 & \mathcal{D}_t \mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}_t \mathcal{D}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = \\ = \mathcal{D} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \right]. \quad (40)$$

Вводя вместо функции $\tilde{\eta}$ функцию ξ по формуле $\tilde{\eta} = f^2 \xi$, где

$$f = \mathcal{D}_t^2 (\mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}^2)^2 + y^2 \mathcal{D}^4$$

есть дифференциальный оператор, и интегрируя соотношение (40), для горизонтальных компонент поля получим выражение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t [\mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}^2] & y \mathcal{D}^2 \\ -y \mathcal{D}^2 & \mathcal{D}_t [\mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}^2] \end{pmatrix} \times \\ \times \mathcal{D} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \left[(\mathcal{D}_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} f \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 2f'_y \xi + f \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{pmatrix} + 4y \begin{pmatrix} 0 \\ f \xi \end{pmatrix} \right]. \quad (41)$$

Произвольные функции результата интегрирования можно исключить используемым выше методом.

Вектор \mathbf{b} является решением системы (25)–(30), поэтому подстановка выражений (27), (39) и (41) в уравнение (28) приводит к

уравнению для функции $\xi(x, y, z, t)$:

$$A_1 \Delta_2 \xi + (B_1 - A'_{2y}) \xi_x + (A'_{1y} + B_2) \xi_y + \left[B'_{2y} + \frac{1}{S} \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + y^2)^2 \left(2f f'_z + f^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \xi = 0, \quad (42)$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x y}$ — оператор Лапласа,

$$\begin{aligned} A_1 &= (\mathcal{D}_t^2 + y^2) \mathcal{D}_t f^2 + \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + y^2) (\mathcal{D} h_1) - y (\mathcal{D}_t^2 + y^2) (\mathcal{D} h_2), \\ A_2 &= y (\mathcal{D}_t^2 + y^2) f^2 + \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + y^2) (\mathcal{D} h_2) + y (\mathcal{D}_t^2 + y^2) (\mathcal{D} h_1), \\ B_1 &= 2y (\mathcal{D}_t^2 + y^2) f f'_y + 4y^2 f^2 + \mathcal{D}_t \mathcal{D} [2 (\mathcal{D}_t^2 + y^2) h_4 + 4y h_2] + \\ &\quad + y \mathcal{D} [2 (\mathcal{D}_t^2 + y^2) h_3 + 4y h_1], \\ B_2 &= 2 \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + y^2) f f'_y + 4y \mathcal{D}_t f^2 + \mathcal{D}_t \mathcal{D} [2 (\mathcal{D}_t^2 + y^2) h_3 + 4y h_1] - \\ &\quad - y \mathcal{D} [2 (\mathcal{D}_t^2 + y^2) h_4 + 4y h_2], \quad h_1 = F_1 f, \quad h_2 = F_2 f, \quad h_3 = F_1 f'_y, \\ h_4 &= F_2 f'_y, \quad F_1 = (\mathcal{D}_t^2 f_1 - y^2 \mathcal{D}^2) \mathcal{D}, \quad F_2 = y \mathcal{D}_t (f_1 + \mathcal{D}^2) \mathcal{D}, \\ f_1 &= \mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}^2, \quad f = \mathcal{D}_t^2 + f_1^2 + y^2 \mathcal{D}^4 \end{aligned}$$

суть дифференциальные операторы. Функции v_z и b_z определяются из уравнений (27) и (30).

Итак, резюмируем полученные выше результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение. Любое решение $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, $\mathbf{b}(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ пространственной задачи о малых возмущениях крупномасштабных волновых движений стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости в экваториальной области, удовлетворяющее необходимым условиям гладкости, представимо в виде

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= -(\mathcal{D}_t^2 + y^2)^2 f^2 \xi, \\ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} (x, y, z, t) &= \mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} (x, y, z, t), \\ \begin{pmatrix} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t f_1 & y \mathcal{D}^2 \\ -y \mathcal{D}^2 & \mathcal{D}_t f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{pmatrix} \mathcal{D} \left[(\mathcal{D}_t^2 + y^2) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\begin{array}{c} f \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 2f'_y \xi + f \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{array} \right) + 4y \left(\begin{array}{c} 0 \\ f \xi \end{array} \right) \Bigg], \\ \left(\begin{array}{c} v_x \\ v_y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathcal{D}_t & y \\ -y & \mathcal{D}_t \end{array} \right) \left[(\mathcal{D}_t^2 + y^2) \left(\begin{array}{c} f^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ 2ff'_y \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{array} \right) + \right. \end{aligned} \quad (43)$$

$$\left. + 4y \left(\begin{array}{c} 0 \\ f^2 \xi \end{array} \right) + \mathcal{D} \left(\begin{array}{c} \tilde{b}_x \\ \tilde{b}_y \end{array} \right) \right], \quad (44)$$

$$v_z = \frac{1}{S} \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + y^2)^2 \left(2ff'_z \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right),$$

$$b_z = \frac{1}{S} \mathcal{D}_t (\mathcal{D}_t^2 + y^2)^2 \mathcal{D} \left(2ff'_z \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right),$$

$$\rho = (\mathcal{D}_t^2 + y^2)^2 \left(2ff'_z \xi + f^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right),$$

$$\mathcal{D}_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{D} = b_{0z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad f = \mathcal{D}_t^2 (\mu \rho_s (\mathcal{D}_t^2 + y^2) - \mathcal{D}^2)^2 + y^2 \mathcal{D}^4,$$

где функция ξ является решением уравнения (42).

Замечание: Верно и обратное утверждение: любое решение уравнения (42) порождает решение системы (15)–(20), моделирующей малые возмущения пространственных крупномасштабных движений в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости в широтном поле около экватора, если построенные по формулам (43) функции \mathbf{v} , \mathbf{b} , p , ρ удовлетворяют в рассматриваемой области условиям гладкости.

Итак, основным результатом проведенного исследования является редукция исходной нелинейной векторной системы уравнений в частных производных к скалярному уравнению и утверждение об аналитическом представлении решения задачи о малых возмущениях в идеальной несжимаемой стратифицированной электропроводной жидкости в экваториальной области.

Далее рассмотрим некоторые частные, но содержательные примеры распространения нестационарных волн в экваториальном ши-

ротном поясе.

Линейные уравнения в приближении экваториальной β -плоскости, полученные ранее, имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - yv_y + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}b_x = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + yv_x + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}b_y = 0, \quad (46)$$

$$v_z = -\frac{1}{S}\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial z}, \quad (47)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathcal{D}\mathbf{v}, \quad (49)$$

$$\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (50)$$

Уравнения (45) и (46) с учетом уравнения индукции (49) запишем следующим образом:

$$\left(\mathcal{D}_t^2 - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}^2\right)v_x - y\mathcal{D}_t v_y + \frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x} = 0, \quad (51)$$

$$\left(\mathcal{D}_t^2 - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}^2\right)v_y + y\mathcal{D}_t v_x + \frac{\partial^2 p}{\partial t\partial y} = 0. \quad (52)$$

Исследуем далее возможность существования нетривиальных волновых возмущений, для которых y -компонента скорости v_y тождественно равна нулю. Полагая v_y равным нулю и исключая давление из уравнений (51) и (52), получим уравнение для x -компоненты скорости v_x :

$$\left(\mathcal{D}_t^2 - \frac{1}{\mu\rho_s}\mathcal{D}^2\right)\frac{\partial v_x}{\partial y} - y\mathcal{D}_t\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Будем искать решения с разделяющимися переменными вида

$$v_x = u(x, y, t)G(z). \quad (54)$$

Подставляя (54) в уравнение (53), получаем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial y} - y\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - \lambda\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (55)$$

$$\frac{d^2 G}{dz^2} - \frac{\lambda \mu \rho_s}{b_{0z}^2} G = 0, \quad (56)$$

где λ — постоянная разделения.

Разделяя далее переменные в уравнении (55), т. е. полагая $u(x, y, t) = \tilde{u}(x, t)u_1(y)$, получим для определения функций $\tilde{u}(x, t)$ и $u_1(y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial x} - \lambda \tilde{u} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{du_1}{dy} - \frac{y}{\nu} u_1 = 0, \quad (58)$$

где ν — постоянная разделения. Ограниченное при больших y решение уравнения (58) существует при $\nu = -\nu_1^2 < 0$. Оно имеет вид

$$u_1(y) = e^{-\frac{y^2}{2\nu_1^2}}, \quad (59)$$

а решение уравнения (57) представляет собой линейную комбинацию произвольных функций вида $A_1(x + \alpha t)$ и $A_2(x - \alpha t)$, т. е. $\tilde{u} = A_1(x + \alpha t) + A_2(x - \alpha t)$, где функции $A_1(x + \alpha t)$ и $A_2(x - \alpha t)$, как это следует из уравнения (57), должны удовлетворять уравнениям ($\alpha \neq 0, \lambda \neq 0, \nu_1^2 \neq \alpha$):

$$A_1''(x + \alpha t) - \frac{\lambda}{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha} A_1(x + \alpha t) = 0, \quad (60)$$

$$A_2''(x - \alpha t) - \frac{\lambda}{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha} A_2(x - \alpha t) = 0. \quad (61)$$

Без ограничения общности можно считать $\alpha > 0$.

Решение уравнения (60) при $\frac{\lambda}{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha} < 0$ имеет вид

$$A_1(x + \alpha t) = d_1 \sin \sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + d_2 \cos \sqrt{\frac{-\lambda}{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t), \quad (62)$$

а решение уравнения (61) при $\frac{\lambda}{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha} < 0$ имеет вид

$$A_2(x - \alpha t) = d_3 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{\nu_1^2 \alpha - \alpha^2}}(x - \alpha t) + d_4 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{\nu_1^2 \alpha - \alpha^2}}(x - \alpha t). \quad (63)$$

Рассмотрим далее уравнение (56) для вертикальной структуры $G(z)$ горизонтальной компоненты v_x . Будем искать функцию $G(z)$ в виде

$$G(z) = \tilde{G}(\rho_s(z)).$$

С учетом соотношений

$$G'(z) = \tilde{G}'(\rho_s(z)) \rho_s'(z) \quad \text{и} \quad G''(z) = \tilde{G}''(\rho_s'(z))^2 + \tilde{G}'(\rho_s(z)) \rho_s''(z)$$

уравнение (56) переходит в уравнение для функции $\tilde{G}(\rho_s(z))$:

$$(\rho_s')^2 \tilde{G}'' + \rho_s'' \tilde{G}' - \frac{\lambda \mu \rho_s}{b_{0z}^2} \tilde{G} = 0. \quad (64)$$

Из равенства

$$S = -\frac{1}{F \rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} = \text{const}$$

получаем, что

$$\rho_s' = -SF \rho_s, \quad \rho_s'' = S^2 F^2 \rho_s,$$

поэтому уравнение (64) приводится к виду

$$\rho_s^2 \tilde{G}'' + \rho_s \tilde{G}' - \frac{\lambda \mu \rho_s}{b_{0z}^2 S^2 F^2} \tilde{G} = 0, \quad (65)$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций Бесселя и Неймана нулевого порядка (см.: [15]), т. е.

$$\tilde{G}(\rho_s(z)) = C_1 J_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} S F} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} S F} \right),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Если $\alpha = \nu_1^2$, то $A_2(x - \alpha t) \equiv 0$ и

$$A_1(x + \nu_1^2 t) = d_1 \sin \frac{|\lambda_1|}{\nu_1^2 \sqrt{2}} (x + \nu_1^2 t) + d_2 \cos \frac{|\lambda_1|}{\nu_1^2 \sqrt{2}} (x + \nu_1^2 t).$$

Итак, при $\lambda = -\lambda_1^2 < 0$ и $\alpha > \nu_1^2 > 0$ общее решение уравнения (53) имеет вид

$$\begin{aligned} v_x = e^{-\frac{y^2}{2\nu_1^2}} & \left[d_1 \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + d_2 \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + \right. \\ & \left. + d_3 \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x - \alpha t) + d_4 \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x - \alpha t) \right] \times \\ & \times \left[C_1 J_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} SF} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} SF} \right) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Примем следующие граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} v_z &= 0, \\ b_x &= 0, \quad b_y = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Учитывая, что мы ищем решения, сосредоточенные вблизи границы жидкого ядра с мантией, потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} v_x &\rightarrow 0, \\ b_x &\rightarrow 0, \quad b_y \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (68)$$

Интегрируя уравнение (49) по времени, получим выражения для компонент индукции магнитного поля:

$$\begin{aligned} b_x(x, y, z, t) &= b_{0z} e^{-\frac{y^2}{2\nu_1^2}} \left[\frac{C_1 |\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s'(z)}}{b_{0z} SF \sqrt{\rho_s(z)}} J_0' \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} SF} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{C_2 |\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s'(z)}}{b_{0z} SF \sqrt{\rho_s(z)}} J_0' \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} SF} \right) \right] \times \\ & \times \left[-\frac{d_1 \sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}}{\alpha |\lambda_1|} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d_2 \sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}}{\alpha |\lambda_1|} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + \\
& + \frac{d_3 \sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}}{\alpha |\lambda_1|} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x - \alpha t) - \\
& - \frac{d_4 \sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}}{\alpha |\lambda_1|} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x - \alpha t) \Big] + C_3(x, y, z), \quad (69)
\end{aligned}$$

$$b_y(x, y, z, t) = b_y(x, y, z, t),$$

$$\begin{aligned}
b_z(x, y, z, t) = & -b_{0z} e^{-\frac{y^2}{2\nu_1^2}} \left[C_1 J_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} S F} \right) + \right. \\
& + C_2 Y_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} S F} \right) \Big] \left[\frac{d_1}{\alpha} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + \right. \\
& + \frac{d_2}{\alpha} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) - \frac{d_3}{\alpha} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x - \alpha t) - \\
& \left. - \frac{d_4}{\alpha} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x - \alpha t) \right] + C_5(x, y, z). \quad (70)
\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение неразрывности по z , получим выражение для вертикальной компоненты скорости:

$$\begin{aligned}
v_z(x, y, z, t) = & -e^{-\frac{y^2}{2\nu_1^2}} \left[\frac{d_1 |\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) - \right. \\
& - \frac{d_2 |\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) + \\
& + \frac{d_3 |\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} \cos \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) - \\
& \left. - \frac{d_4 |\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} \sin \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{\alpha^2 - \nu_1^2 \alpha}} (x + \alpha t) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\times \int \left[C_1 J_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} SF} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{2|\lambda_1| \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{b_{0z} SF} \right) \right] dz + C_4(x, y, t). \quad (71)$$

Из первого равенства условий (67) получаем

$$C_4(x, y, t) = \tilde{u}'_x(x, t) u_1(y) \int \tilde{G} dz \Big|_{z=0},$$

выполнение второго равенства условий (67) приводит к равенству $C_2 = 0$ и к определению числа $|\lambda_1|$:

$$|\lambda_1| = \frac{\gamma_0^2 SF b_{0z}}{2\sqrt{\mu \rho_s(0)}},$$

где γ_0^2 — нуль функции Бесселя J_1 . Функция $b_y(x, y, z)$ связана с произвольными функциями $C_3(x, y, z)$ и $C_5(x, y, z)$ соотношением

$$\frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{\partial C_5}{\partial z} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0,$$

которое является следствием уравнения индукции магнитного поля. Пусть

$$C_3(x, y, z) = \Re e y e^{ikx - \frac{y^2}{2} z e^z}, \quad C_5(x, y, z) = \Re e y e^{ikx - \frac{y^2}{2} (z-1) e^z},$$

тогда

$$b_y(x, y, z) = \Re e \left((1 + ik) e^{ikx - \frac{y^2}{2} z e^z} \right),$$

и, следовательно, третье равенство граничных условий (67) также выполняется. Условие (68) выполняется вследствие известного поведения функций Бесселя при больших значениях аргумента и учета того, что функция $\rho'_s(z)$ в условиях рассматриваемой задачи при больших z равна нулю. Давление и плотность определяются из

уравнений (47) и (50) соотношениями

$$p(x, y, z, t) = -S \int_0^t \int_0^z v_z(x, y, \tilde{z}, \tau) d\tau d\tilde{z},$$

$$\rho(x, y, z, t) = S \int_0^t v_z(x, y, z, \tau) d\tau dz.$$

Таким образом, проведенный анализ свидетельствует о существовании в экваториальной зоне волн Кельвина, распространяющихся к востоку и к западу, причем зональная скорость в волне Кельвина не удовлетворяет геострофическому соотношению, что следует из уравнения (46), как это обычно бывает в неэлектропроводной жидкости. Вклад в отклонение от геострофичности скорости вносит наличие магнитного поля, а именно его меридиональная компонента.

Далее продолжим рассмотрение различных типов волн, возникающих в зоне экватора в случае отличной от нуля меридиональной компоненты скорости.

Исключая давление из уравнений импульса (51), (52) и (47), используя уравнение неразрывности (48), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\rho'_s}{S\mu\rho_s^2} \right)' \mathcal{D}^2 + 2 \frac{\rho'_s}{S\mu\rho_s^2} \mathcal{D}^2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{S} \left(\mathcal{D}_t^2 - \frac{1}{\mu\rho_s} \mathcal{D}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] v_x = \\ = - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{y}{S} \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\rho'_s}{S\mu\rho_s^2} \right)' \mathcal{D}^2 + 2 \frac{\rho'_s}{S\mu\rho_s^2} \mathcal{D}^2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{S} \left(\mathcal{D}_t^2 - \frac{1}{\mu\rho_s} \mathcal{D}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] v_y = \\ = - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} - \frac{y}{S} \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (73)$$

Будет искать решения для v_x и v_y вида

$$v_x = \Re u(y, z) e^{i(kx - \sigma t)}, \quad v_y = \Re v(y, z) e^{i(kx - \sigma t)},$$

тогда функции $u(y, z)$ и $v(y, z)$ должны удовлетворять уравнениям

$$-k^2 u + Au = -ik \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{i\sigma y}{S} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (74)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Av = -ik \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{i\sigma y}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (75)$$

где

$$A = \left(\frac{\rho'_s}{S\mu\rho_s^2} \right)' \mathcal{D}^2 + 2 \frac{\rho'_s}{S\mu\rho_s^2} \mathcal{D}^2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{S} \left(\mathcal{D}_t^2 - \frac{1}{\mu\rho_s} \mathcal{D}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

суть дифференциальный оператор. Решения с разделяющимися переменными уравнений (74) и (75) возможны при условии следующей меридиональной структуры поля скорости:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(y)u_1(z), & \tilde{u}(y) &= ye^{-C_0^2 \frac{y^2}{2}}, \\ v &= \tilde{v}(y)v_1(z), & \tilde{v}(y) &= e^{-C_0^2 \frac{y^2}{2}}, \end{aligned} \quad (76)$$

причем

$$v_1(z) = \frac{ik}{C_0^2} u_1(z) + \frac{i\sigma}{SC_0^4} \frac{d^2 u_1(z)}{dz^2}. \quad (77)$$

С учетом соотношений (76) и (77) уравнения (74) и (75) примут вид

$$Au_1 = \frac{\sigma^2}{S^2 C_0^4} \frac{d^4 u_1(z)}{dz^4}, \quad (78)$$

$$Au_1 + \frac{\sigma}{SkC_0^2} A \frac{d^2 u_1(z)}{dz^2} - \frac{\sigma}{kS} \frac{d^2 u_1(z)}{dz^2} = 0. \quad (79)$$

Вычисляя $u_1^{(4)}$ и Au_1 , с помощью уравнения (74) получим

$$\begin{aligned} u_1^{(4)} &= \frac{kS}{\sigma} \left(A'' u_1 + 2A' u_1' + Au_1'' \right) + \frac{1}{C_0^2} \left(A'' u_1'' + 2A' u_1^{(3)} + Au_1^{(4)} \right), \\ Au_1 &= -\frac{\sigma}{SkC_0^2} Au_1'' + \frac{\sigma}{kS} u_1'', \end{aligned}$$

где штрихи означают порядок производной, из которых получаем одно уравнение для функции $u_1(z)$:

$$-Au_1'' + C_0^2 u_1'' = \frac{\sigma k}{SC_0^2} \left\{ \frac{kS}{\sigma} (A''u_1 + 2A'u_1' + Au_1'') + \right. \\ \left. + \frac{1}{C_0^2} (A''u_1'' + 2A'u_1^{(3)}) + Au_1^{(4)} \right\}, \quad (80)$$

$$A = - \left[\left(\frac{F^2 S b_{0z}^2}{\mu \rho_s} + \frac{\sigma^2}{S} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{F b_{0z}^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{b_{0z}^2}{\mu \rho_s S} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right], \\ A' = - \left[\frac{F^3 S^2 b_{0z}^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{S F^2 b_{0z}^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{b_{0z}^2 F}{\mu \rho_s} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right], \quad (81) \\ A'' = - \left[\frac{F^4 S^3 b_{0z}^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{S^2 F^3 b_{0z}^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{b_{0z}^2 S F^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right].$$

С учетом соотношений (81) уравнение (80) запишем в виде

$$u_1'' \left[\frac{C_0^2 \mu \rho_s}{b_{0z}^2} + \frac{k^2 S^3 F^4}{C_0^2} \right] + u_1^{(3)} \frac{3k^2 S^2 F^3}{C_0^2} + u_1^{(4)} \left[F^2 S + \frac{4k^2 S F^2}{C_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{k\sigma S^2 F^4}{C_0^4} + \frac{\sigma^2 \mu \rho_s}{S b_{0z}} \left(1 + \frac{k^2}{C_0^2} \right) \right] + u_1^{(5)} \left[\frac{3k^2 F}{C_0^2} + \frac{3k\sigma S F^3}{C_0^4} \right] + \quad (82) \\ + u_1^{(6)} \left[\frac{1}{S} + \frac{k^2}{C_0^2 S} + \frac{4k\sigma S F^2}{C_0^4} + \frac{k\sigma^3 \mu \rho_s}{S^2 C_0^4 b_{0z}^2} \right] + u_1^{(7)} \frac{3k\sigma F}{C_0^4 S} + u_1^{(8)} \frac{k\sigma}{S^2 C_0^4} = 0.$$

При $k = 0$ порядок уравнения (82) понижается:

$$u_1'' \frac{C_0^2 \mu \rho_s}{b_{0z}^2} + u_1^{(4)} \left[F^2 S + \frac{\sigma^2 \mu}{S b_{0z}^2} \rho_s \right] + \frac{1}{S} u_1^{(6)} = 0.$$

Полагая в последнем уравнении $u_1''(z) = u_2(z)$, получим

$$u_2^{(4)} + u_2'' \left[F^2 S^2 + \frac{\sigma^2 \mu}{b_{0z}^2} \rho_s \right] + u_2 \frac{C_0^2 S \mu \rho_s}{b_{0z}^2} = 0.$$

При $\sigma^2 = \frac{C_0^2}{F^2 S}$ возможно интегрирование в квадратурах. Сделаем замену

$$G(z) = u_{2zz}'' + \frac{C_0^2 S \mu}{b_{0z}^2} u_2, \quad (83)$$

для функции $G(z)$ получим уравнение

$$G''(z) + \rho_s(z)G(z) = 0, \quad (84)$$

решение которого будем искать в виде уравнения

$$G(z) = \tilde{G}(\rho_s(z)).$$

Учитывая соотношения

$$G'(z) = \tilde{G}'(\rho_s(z))\rho_s'(z), \quad G''(z) = \tilde{G}''(\rho_s(z))(\rho_s'(z))^2 + \tilde{G}'(\rho_s(z))\rho_s''(z),$$

$$\rho_s'(z) = -SF\rho_s, \quad \rho_s''(z) = S^2F^2\rho_s,$$

преобразуем уравнение (84) в уравнение для функции $\tilde{G}(\rho_s(z))$:

$$\rho_s \tilde{G}'' + \tilde{G}' + \frac{\tilde{G}}{S^2 F^2} = 0,$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций Бесселя и Неймана нулевого порядка (см.: [15]):

$$\tilde{G}(\rho_s(z)) = C_1 J_0\left(\frac{2\sqrt{\rho_s}}{SF}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2\sqrt{\rho_s}}{SF}\right), \quad (85)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, функция $u_2(z)$, согласно соотношению (83), является решением уравнения

$$u_2'' + \frac{C_0^2 S \mu}{b_{0z}^2} u_2 = \tilde{G}. \quad (86)$$

Полагая $u_2(z) = \tilde{u}_2(\rho_s(z))$, для функции \tilde{u}_2 получаем неоднородное уравнение Эйлера

$$\rho_s^2 \tilde{u}_2'' + \rho_s \tilde{u}_2' + \frac{C_0^2 S \mu}{b_{0z}^2 S^2 F^2} \tilde{u}_2 = \frac{\tilde{G}}{S^2 F^2}. \quad (87)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение [15]:

$$\tilde{u}_{2g.h.} = C_3 \sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|) + C_4 \cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|), \quad (88)$$

где $\tilde{\mu} = \frac{2C_0}{b_{0z}F} \sqrt{\frac{\mu}{S}}$, а C_3, C_4 — произвольные постоянные. Следовательно, общее решение неоднородного уравнения (87) представимо в виде

$$\tilde{u}_{2g.n.} = C_3 y_1 + C_4 y_2 + y_2 \int y_1 \frac{\tilde{G}}{W} d\rho_s - y_1 \int y_2 \frac{\tilde{G}}{W} d\rho_s, \quad (89)$$

где $y_1 = \sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|)$, $y_2 = \cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|)$; $W = y_1 \frac{dy_2}{d\rho_s} - y_2 \frac{dy_1}{d\rho_s} = -\frac{\tilde{\mu}}{|\rho_s(z)|}$ — определитель Вронского функций $y_1(\rho_s(z))$, $y_2(\rho_s(z))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2g.n.} = & C_3 \sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|) + C_4 \cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|) - \\ & - \frac{\cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|)}{\tilde{\mu}} \int \rho_s \sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|) \tilde{G} d\rho_s + \\ & + \frac{\sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|)}{\tilde{\mu}} \int \rho_s \cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s(z)|) \tilde{G} d\rho_s. \end{aligned} \quad (90)$$

Далее, так как $u_1''(z) = u_2(z)$, то, если $u_1(z) = \tilde{u}_1(\rho_s(z))$, функция \tilde{u}_1 является решением уравнения

$$\rho_s^2 \tilde{u}_1'' + \rho_s \tilde{u}_1' = \frac{\tilde{u}_2(\rho_s(z))}{S^2 F^2},$$

общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1g.n.} = & C_5 \ln |\rho_s(z)| + C_6 - \frac{1}{S^2 F^2} \int \ln |\rho_s(z)| \tilde{u}_2 d(\ln |\rho_s(z)|) + \\ & + \frac{\ln |\rho_s(z)|}{S^2 F^2} \int \tilde{u}_2 d(\ln |\rho_s(z)|). \end{aligned} \quad (91)$$

Как и ранее, примем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v_z = 0, \quad b_x = 0, \quad b_y = 0, \quad \text{при} \quad z = 0; \\ v_x \rightarrow 0, \quad v_y \rightarrow 0, \quad b_x \rightarrow 0, \quad b_y \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (92)$$

Из уравнений неразрывности и индукции магнитного поля находим

$$\begin{aligned}
 v_z &= \Re \left[\frac{i\sigma}{SC_0^2} y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1'(z) \right], \\
 b_x &= \Re \left[-\frac{b_{0z}}{i\sigma} y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1'(z) \right] + c_1(x, y, z), \\
 b_y &= \Re \left[-\frac{b_{0z}}{SC_0^4} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1^{(3)}(z) \right] + c_2(x, y, z), \\
 b_z &= \Re \left[-\frac{b_{0z}}{SC_0^2} y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1''(z) \right] + c_3(x, y, z).
 \end{aligned} \tag{93}$$

Согласно выражениям (93) выполнение условий (92) эквивалентно выполнению следующих условий:

$$\begin{aligned}
 u_1'(0) = 0, \quad c_1(x, y, 0) = 0, \quad u_1''' = 0, \quad c_2(x, y, 0) = 0; \\
 u_1(z) \rightarrow 0, \quad u_1'(z) \rightarrow 0, \quad u_1''(z) \rightarrow 0, \quad u_1(z)''' \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \\
 c_1(x, y, z) \rightarrow 0, \quad c_2(x, y, z) \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow -\infty.
 \end{aligned} \tag{94}$$

Так как $u_1'(z) = C_5 \frac{\rho_s'}{\rho_s} + \frac{\rho_s'}{S^2 F^2 \rho_s} \int \tilde{u}_2 d(\ln \rho_s)$, то из условия $u_1'(0) = 0$ получаем

$$C_5 = -\frac{1}{S^2 F^2} \int \tilde{u}_2 d(\ln \rho_s) \Big|_{z=0}. \tag{95}$$

Далее выполнение условия $u_1'''(0) = 0$ требует, чтобы $u_2'(0) = 0$, откуда при $C_3 = C_4 = 0$ необходимым является условие

$$\left\{ \sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s|) \int \rho_s \sin(\tilde{\mu} \ln |\rho_s|) \tilde{G} \rho_s' dz + \right. \\
 \left. + \cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s|) \int \rho_s \cos(\tilde{\mu} \ln |\rho_s|) \tilde{G} \rho_s' dz \right\} \Big|_{z=0} = 0,$$

следствием которого является соотношение, связывающее параметры $C_0, b_{0z}, F, S, \mu, \rho_s(0)$. Из условия $u_1(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ следует выражение для произвольной постоянной C_6 :

$$C_6 = -C_5 \ln |\rho_s(-\infty)|. \tag{96}$$

Условия $u_1'(z) \rightarrow 0$ и $u_1''(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ выполняются вследствие представления данных выражений в виде произведения ограниченных функций на $\rho_s'(z)$, которая в условиях рассматриваемой задачи при больших z равна нулю. Отметим, что требование $C_3 = C_4 = 0$ является также следствием удовлетворения построенного решения граничным условием на бесконечности. Выполнение оставшихся граничных условий накладывает ограничение на выбор функций $c_1(x, y, z)$ и $c_2(x, y, z)$. Допустимыми являются, например, следующие выражения:

$$\begin{aligned} c_1(x, y, z) &= e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} + ik_1 x_z e^z, \\ c_2(x, y, z) &= -\frac{C_0^2 y}{ik} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} + ik_1 x_z e^z. \end{aligned} \quad (97)$$

Итак, магнитогидродинамические характеристики представляются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v_x &= \Re e y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1(z), & v_y &= \Re e \frac{i\sigma}{SC_0^4} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1''(z), \\ v_z &= \Re e \frac{i\sigma}{SC_0^2} y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1'(z), \\ b_x &= \Re e \left[-\frac{b_{0z}}{i\sigma} y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1'(z) \right] + c_1(x, y, z), \\ b_y &= \Re e \left[-\frac{b_{0z}}{SC_0^4} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1^{(3)}(z) \right] + c_2(x, y, z), \\ b_z &= \Re e \left[-\frac{b_{0z}}{SC_0^2} y e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1''(z) \right] + c_3(x, y, z), \\ p &= \Re e \left[\frac{y}{C_0^2} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1(z) + d_1(x, y, z) \right], \\ d_1(x, y, z) &= \frac{b_{0z}}{\mu\rho_s} \int c'_{1z}(x, y, z) dx, & c'_{1y} &= c'_{2x}, \\ c_1(x, y, z) &= e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} + ik_1 x_z e^z, & c_2(x, y, z) &= \frac{iC_0^2 y}{k} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} + ik_1 x_z e^z, \end{aligned}$$

$$c_3(x, y, z) = -\frac{i}{k_1} (k_1^2 + C_0^2 - y^2 C_0^4) (z - 1) e^{z - \frac{C_0^2 y^2}{2}} + ik_1 x,$$

$$\rho = -\Re \left[\frac{y}{C_0^2} e^{-\frac{C_0^2 y^2}{2}} - i\sigma t u_1'(z) + d_{1z}'(x, y, z) \right].$$

Вид произвольных функций $d_1(x, y, z)$ и $c_3(x, y, z)$, а также связь $c_1(x, y, z)$ и $c_2(x, y, z)$ обусловлены уравнениями импульса и соленоидальности магнитного поля.

Рассмотрим далее предельный случай экваториальной динамики, а именно непосредственно зону экватора. Полагая в основных уравнениях в приближении экваториальной β -плоскости $y = 0$ и все искомые функции не зависящими от y , при $v_x = \Re u(z) e^{i(kx - \sigma t)}$ для вертикальной структуры получим уравнение

$$-k^2 u(z) + Au(z) = 0 \tag{98}$$

как следствие более общего уравнения (72). Здесь

$$A(z) = - \left[\left(\frac{F^2 S b_{0z}^2}{\mu \rho_s} + \frac{\sigma^2}{S} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{F b_{0z}^2}{\mu \rho_s} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{b_{0z}^2}{\mu \rho_s S} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \tag{99}$$

суть дифференциальный оператор. Уравнение (98) с учетом выражения (99) запишем в виде

$$u^{(4)} + SFu''' + \left(F^2 S^2 + \frac{\sigma^2 \mu}{b_{0z}^2} \rho_s \right) u'' + \frac{\mu k^2 S}{b_{0z}^2} \rho_s u = 0, \tag{100}$$

которое удастся проинтегрировать аналитически при $k = 0$. В этом случае уравнение (100) выглядит следующим образом:

$$u^{(4)} + SFu''' + \left(F^2 S^2 + \frac{\sigma^2 \mu}{b_{0z}^2} \rho_s \right) u'' = 0.$$

Полагая далее $u''(z) = u_2(z)$, получим уравнение для $u_2(z)$:

$$u_2'' + SFu_2' + \left(F^2 S^2 + \frac{\sigma^2 \mu}{b_{0z}^2} \rho_s \right) u_2 = 0. \tag{101}$$

Будем искать решение уравнения (101) в виде $u_2(z) = \tilde{u}_2(\rho_s(z))$.
Учитывая соотношения

$$u_2'(z) = \tilde{u}_2'(\rho_s(z))(\rho_s'(z)), \quad u_2''(z) = \tilde{u}_2''(\rho_s(z))(\rho_s'(z))^2 + \tilde{u}_2'(\rho_s(z))\rho_s''(z),$$

$$\rho_s'(z) = -SF\rho_s, \quad \rho_s''(z) = S^2F^2\rho_s,$$

преобразуем уравнение (101) в уравнение для функции $\tilde{u}_2(\rho_s(z))$:

$$\rho_s^2 \tilde{u}_2'' + \left(1 + \frac{\sigma\mu}{b_{0z}^2 S^2 F^2} \rho_s\right) \tilde{u}_2 = 0,$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций Бесселя и Неймана [15]:

$$\tilde{u}_2 = \sqrt{\rho_s(z)} \left[C_1 J_\nu \left(\frac{2\sqrt{\sigma\mu}}{b_{0z} SF} \sqrt{\rho_s(z)} \right) + C_2 Y_\nu \left(\frac{2\sqrt{\sigma\mu}}{b_{0z} SF} \sqrt{\rho_s(z)} \right) \right],$$

где $\nu = i\sqrt{3}$ и C_1, C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, функция $\tilde{u}(\rho_s(z)) = u(z)$ является решением неоднородного уравнения

$$\tilde{u}'' + \frac{\tilde{u}'}{\rho_s} = \frac{\tilde{u}_2}{S^2 F^2 \rho_s^2},$$

общее решение которого имеет вид

$$\tilde{u}(\rho_s(z)) = u(z) = \int u_3(\rho_s(z)) d\rho_s,$$

где

$$u_3(\rho_s(z)) = \frac{C}{\rho_s} + \frac{1}{S^2 F^2 \rho_s} \int \frac{\tilde{u}_2}{\rho_s^2} d(\ln |\rho_s|).$$

Граничное условие $v_x \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ выполняется вследствие представления функции v_x в виде произведения ограниченных функций на $\rho_s'(z)$, которая в условиях рассматриваемой задачи равна нулю при больших значениях аргумента. Тогда из уравнения индукции магнитного поля получим

$$b_x(x, z) = \frac{ib_{0z}}{\sigma} e^{-i\sigma t} u'(z) + C_1(x, z).$$

Из условия $b_x \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ следует, что

$$\frac{ib_{0z}}{\sigma} e^{-i\sigma t} u'(z) + C_1(x, z) \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow -\infty.$$

Так как $u'(z) = u_3(\rho_s(z)) \rho'_s(z)$, то $u'(z) \rightarrow 0$ и при $z \rightarrow -\infty$, и, следовательно, необходимо выполнение условия: $C_1(x, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Из условия $b_x(x, 0) = 0$ следует $u'(0) = 0$ или $u_3(\rho_s(0)) = 0$ и $C_1(x, 0) = 0$, откуда

$$C = -\frac{1}{S^2 F^2} \int \frac{\tilde{u}_2}{\rho_s^2} d \ln |\rho_s| \Big|_{z=0}.$$

Из уравнения неразрывности и граничного условия $v_z = 0$ при $z = 0$ следует, что $v_z \equiv 0$, тогда из уравнения (47) получаем

$$p(x, z, t) = f_1(x, t) + f_2(x, z),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции своих аргументов. Из уравнений индукции и соленоидальности магнитного поля

$$b_z(x, z) = - \int C'_{1x}(x, z) dz,$$

а из уравнения импульса и уравнения (50)

$$\begin{aligned} f_1(x, t) + f_2(x, z) &= \frac{b_{0z}}{\mu \rho_z} \int C'_{1z}(x, z) dx + C_3(x, t), \\ \rho(x, z, t) &= \frac{b_{0z} \rho'_s}{\mu \rho_s^2} \int C'_{1z}(x, z) dx + \frac{b_{0z}}{\mu \rho_s} \int C''_{1zz}(x, z) dx + C'_{3z}(x, t). \end{aligned}$$

Пусть далее $k \neq 0$. Система уравнений (45)–(50) в условиях рассматриваемой задачи приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu \rho_s} \mathcal{D} b_x &= 0, \quad v_z = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial b_x}{\partial t} = \mathcal{D} v_x, \quad \frac{\partial b_z}{\partial t} = \mathcal{D} v_z, \quad \rho &= -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad v_y = 0, \quad b_y = 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Будем искать решение системы (102) в виде функций с разделяющимися переменными вида

$$\begin{aligned} v_x &= u(x, t)G(z), & v_z &= W(x, t)G_1(z), & p &= P(x, t)G_2(z), \\ b_x &= B_x(x, t)G_3(z), & b_z &= B_z(x, t)G_4(z). \end{aligned} \quad (103)$$

Подставляя выражения (103) в уравнения системы (102), получим условия, связывающие функции, которые описывают вертикальную структуру магнитогидродинамических полей:

$$\begin{aligned} G &= G_1 & G_1 &= \frac{1}{S}G_2', & G &= \frac{1}{S}G_2'', & G_3 &= \frac{b_{0z}}{S}G_2''', \\ G_4 &= b_{0z}G_1', & G_1' &= \frac{b_{0z}}{S}G_2'', \end{aligned} \quad (104)$$

и следующие уравнения:

$$\begin{aligned} W + \frac{\partial P}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + W &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} &= u, & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= W, & \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_z &= 0, \end{aligned} \quad (105)$$

в то время как первое уравнение системы (102) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}G_2 - \frac{b_{0z}}{\mu\rho_s}B_xG_3' = 0. \quad (106)$$

Для существования решения вида (103) необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = C_0B_x \quad (107)$$

или соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (108)$$

При выполнении соотношения (107) функция $G_2(z)$ с учетом уравнения (106) и соотношений (104) удовлетворяет уравнению

$$G_2^{(4)} + \frac{\lambda\mu}{b_{0z}^2}\rho_s G_2'' - \frac{C_0\mu}{b_{0z}^2}\rho_s G_2 = 0, \quad (109)$$

где λ — постоянная разделения, а система уравнений (105) дополнится уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda B_x = 0. \quad (110)$$

Из соотношения (107) следует, что

$$C_0 \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x},$$

тогда с учетом уравнения $\frac{\partial B_x}{\partial t} = u$ получим

$$u = \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}. \quad (111)$$

Уравнение (110) с учетом соотношений (107) и (111) принимает вид

$$\frac{\partial^3 P}{\partial t^2 \partial x} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$P(x, t) = \tilde{C}_1(x) \cos \sqrt{\lambda t} + \tilde{C}_2(x) \sin \sqrt{\lambda t}, \quad (112)$$

где $\tilde{C}_1(x), \tilde{C}_2(x)$ — произвольные функции своих аргументов. Из уравнений системы (105) получаем

$$W = -\frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

Исключая $u(x, t)$ из последнего уравнения с помощью соотношения (111), получим

$$\frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2} - C_0 \frac{\partial P}{\partial t} = 0,$$

и его общее решение

$$P(x, t) = C_3(t) \cos \sqrt{-C_0} x + C_4(t) \sin \sqrt{-C_0} x, \quad C_0 < 0, \quad C_0 = -\tilde{C}_0^2. \quad (113)$$

Проводя далее сравнение выражений (112) и (113), получаем следующее выражение для функции $P(x, t)$:

$$P(x, t) = \cos \left(\tilde{C}_0 x + \sqrt{\lambda t} \right). \quad (114)$$

Полагая далее $P(x, t) = e^{i(kx - \sigma t)}$ и подставляя $P(x, t)$ в систему (105) и соотношение (107), получим

$$\lambda = \sigma^2, \quad C_0 = -k^2. \quad (115)$$

Таким образом, функции $u(x, t)$, $B_x(x, t)$, $B_z(x, t)$ и $W(x, t)$ определяются уравнениями системы (105) и полученным выражением для $P(x, t)$:

$$W(x, t) - \frac{\partial P}{\partial t} = i\sigma e^{i(kx - \sigma t)}, \quad u(x, t) = \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} = \frac{k\sigma}{C_0} e^{i(kx - \sigma t)},$$

$$B_x(x, t) = \frac{1}{C_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{ik}{C_0} e^{i(kx - \sigma t)}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = W,$$

следовательно,

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{и} \quad B_z(x, t) = -P(x, t) + C_3(x) = -e^{i(kx - \sigma t)} + C_3(x).$$

Вертикальная структура всех искомым функций определяется функцией $G_2(z)$, которая удовлетворяет уравнению (109), решить которое аналитически затруднительно.

Проанализируем далее решение задачи в случае $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$. При этом переменные x, t и z в уравнении (106) разделяются, а уравнения (105) и (110) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda B_x = 0, \quad W + \frac{\partial P(t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + W = 0,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = W, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_z = 0,$$

откуда следует, что $W = W(t)$, $u = u(t)$, $W \equiv 0$, $P \equiv 1$, $B_x(x, t) = \int u(t) dt + C_1(x)$, $B_z = C_2(x)$, $C_2(x) = -C_1'(x)$, а функция $u = u(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u = 0,$$

откуда $u(t) = e^{i\sqrt{\lambda}t}$, следовательно,

$$B_x = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}t} + C_1(x).$$

При $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ из уравнения (106) получаем уравнение для функции $G_2(z)$:

$$G_2^{(4)} + \frac{\lambda\mu\rho_s}{b_{0z}^2} G_2'' = 0. \quad (116)$$

Полагая $G_2'' = \tilde{G}_2$, уравнение (116) принимает вид

$$\tilde{G}_2'' + \frac{\lambda\mu\rho_s}{b_{0z}^2} \tilde{G}_2 = 0. \quad (117)$$

Будем искать решение уравнения (117) в виде

$$\tilde{G}_2 = \tilde{\tilde{G}}_2(\rho_s(z)).$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2'(z) &= \tilde{\tilde{G}}_2'(\rho_s(z)) \rho_s'(z), \\ \tilde{G}_2''(z) &= \tilde{\tilde{G}}_2''(\rho_s(z)) (\rho_s'(z))^2 + \tilde{\tilde{G}}_2'(\rho_s(z)) \rho_s''(z), \\ \rho_s'(z) &= -SF\rho_s, \quad \rho_s''(z) = S^2F^2\rho_s, \end{aligned}$$

преобразуем уравнение (117) в уравнение для функции $\tilde{\tilde{G}}_2(\rho_s(z))$:

$$\tilde{\tilde{G}}_2''(\rho_s^2(z)) + \tilde{\tilde{G}}_2\rho_s + \frac{\lambda\mu\rho_s}{b_{0z}^2 S^2 F^2} \tilde{\tilde{G}}_2 = 0, \quad (118)$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций Бесселя и Неймана нулевого порядка [15]:

$$\tilde{\tilde{G}}_2(\rho_s(z)) = C_3 J_0\left(\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{b_{0z} SF} \sqrt{\rho_s(z)}\right) + C_4 Y_0\left(\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{b_{0z} SF} \sqrt{\rho_s(z)}\right), \quad (119)$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные. Полагая $G_2(z) = G_2(\rho_s(z))$, для функции $G_2(\rho_s(z))$ получаем неоднородное уравнение

$$G_2''\rho_s^2 + G_2'\rho_s = \frac{\tilde{G}_2}{S^2 F^2},$$

общее решение которого представимо в виде

$$G_{2g.n.}(\rho_s(z)) = C_1 + C_2 \ln |\rho_s(z)| + \frac{\ln |\rho_s(z)|}{S^2 F^2} \int \frac{\tilde{G}_2 d\rho_s(z)}{\rho_s^2 W} - \\ - \frac{1}{S^2 F^2} \int \frac{\ln |\rho_s(z)|}{\rho_s^2} \tilde{G}_2 \frac{d\rho_s(z)}{W},$$

где $W = \frac{1}{\rho_s(z)}$ — определитель Вронского функций 1 и $\ln |\rho_s(z)|$,
или в виде

$$G_2(\rho_s(z)) = G_2(z) = C_1 + C_2 \ln |\rho_s(z)| + \frac{\ln |\rho_s(z)|}{S^2 F^2} \int \tilde{G}_2 d(\ln |\rho_s(z)|) - \\ - \frac{1}{S^2 F^2} \int \ln |\rho_s(z)| \tilde{G}_2 d(\ln |\rho_s(z)|). \quad (120)$$

Граничные условия

$$v_x = 0, \quad b_y = 0, \quad \text{при} \quad z = 0$$

выполняются, так как $v_z \equiv 0$ и $b_y \equiv 0$. Выполнение условий

$$b_x = 0, \quad \text{при} \quad z = 0, \\ v_x \rightarrow 0, \quad b_x \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty$$

эквивалентно выполнению следующих условий для функции $G_2(z)$:

$$G_2''' = 0, \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (121)$$

$$G_2'' \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad G_2''' \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (122)$$

Выполнение условий (122) следует из следующих представлений:

$$G_2'' = G_2''(\rho_s(z)) (\rho_s'(z))^2 - SFG_2'(\rho_s(z)) \rho_s'(z),$$

$$G_2''' = G_2'''(\rho_s(z)) (\rho_s'(z))^3 + 3G_2''(\rho_s(z)) \rho_s'(z) \rho_s''(z) + S^2 F^2 G_2'(\rho_s(z)) \rho_s'(z),$$

и того факта, что $\rho_s'(z)$ равно нулю при больших значениях аргумента. Далее, так как

$$G_2''' = (-S^2 F^2 \rho_s) \left[G_2'''(\rho_s(z)) + 3\rho_s(z) G_2''(\rho_s(z)) + G_2'(\rho_s(z)) \right], \quad (123)$$

и из выражения (120) при $C_2 = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} G_2'(\rho_s(z)) &= \frac{1}{S^2 F^2 \rho_s} \int \frac{\tilde{G}_2 \rho_s'}{\rho_s} dz, \\ G_2''(\rho_s(z)) &= \frac{1}{SF \rho_s} \int \frac{\tilde{G}_2 \rho_s'}{\rho_s} dz + \frac{\tilde{G}_2}{S^2 F^2 \rho_s^2}, \\ G_2'''(\rho_s(z)) &= \frac{1}{\rho_s} \int \frac{\tilde{G}_2 \rho_s'}{\rho_s} dz + \frac{\tilde{G}_2}{SF \rho_s^2} - \frac{2\tilde{G}_2}{S^2 F^2 \rho_s^3}, \end{aligned}$$

то, удовлетворяя граничному условию (121), получим выражение

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho_s} + \frac{3}{SF} + \frac{1}{S^2 F^2 \rho_s} \right] \int \tilde{G}_2 d(\ln |\rho_s(z)|) + \left[\frac{1}{\rho_s} + \right. \\ \left. + \frac{3}{SF} - \frac{2}{SF \rho_s^2} \right] \frac{\tilde{G}_2}{SF \rho_s} = 0, \quad \text{при } z = 0, \end{aligned}$$

которое накладывает условие для параметров задачи. Например, можно положить

$$\frac{1}{\rho_s(0)} + \frac{3}{SF} + \frac{1}{S^2 F^2 \rho_s(0)} = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{G}_2(0) = 0,$$

откуда

$$\rho_s(0) = -\frac{3SF}{S^2 F^2 + 1},$$

в выражении (119) $CG_4 = 0$, а $\frac{2\sqrt{\mu\lambda\rho_s(0)}}{b_{0z}SF} = \gamma$, где γ — нуль функции J_0 , и, следовательно, $\lambda = \frac{b_{0z}^2 S^2 F^2}{4\mu\rho_s(0)} \gamma^2$. Итак, все граничные условия выполнены.

Положим в основных уравнениях $y = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}, v_y = 0, b_y = 0$. Тогда исходная система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu\rho_s} b_{0z} \frac{\partial b_x}{\partial z} = 0, \quad (124)$$

$$v_z = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z}, \quad (125)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (126)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0, \quad (127)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = b_{0z} \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad (128)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = b_{0z} \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (129)$$

$$\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (130)$$

Продифференцируем уравнение (124) по t :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} - \frac{1}{\mu \rho_s} b_{0z} \frac{\partial^2 b_x}{\partial t \partial z}, \quad (131)$$

а уравнение (128) по z :

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial t \partial z} = b_{0z} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}. \quad (132)$$

Исключив из уравнений (131) и (132) b_x , получим уравнения

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} - \frac{1}{\mu \rho_s} (b_{0z})^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (133)$$

или

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \rho_s} \mathcal{D}^2 \right] v_x = -\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x}. \quad (134)$$

Пусть

$$p = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \rho_s} \mathcal{D}^2 \right] v_x = -\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} \tilde{p}(x, z, t), \quad (135)$$

тогда уравнение (134) примет вид

$$f v_x = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f \tilde{p},$$

где f — дифференциальный оператор, $\left(f = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \rho_s} \mathcal{D}^2 \right)$, или

$$f v_x = f \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t \partial x}. \quad (136)$$

Применив к уравнению (136) оператор f^{-1} , получим

$$v_x = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} A(x, z, t),$$

где $A(x, z, t)$ — ядро оператора f , т. е.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu \rho_s} \mathcal{D}^2 \right] A = 0.$$

Пусть $A(x, z, t) = \Re e^{i(kx - \sigma t)} G(z)$, тогда $G(z)$ является решением уравнения

$$\left(\sigma^2 + \frac{1}{\mu \rho_s} b_{0z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(z) = 0$$

или

$$G'' + \frac{\sigma^2 \mu \rho_s(z)}{b_{0z}^2} G = 0,$$

решение которого имеет вид

$$G(z) = C_1 J_0 \left(\frac{2\sigma \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{SF b_{0z}} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{2\sigma \sqrt{\mu \rho_s(z)}}{SF b_{0z}} \right). \quad (137)$$

Уравнение (125) с учетом представления (135) примет вид

$$v_z = \frac{1}{S} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} f \tilde{p}(x, z, t),$$

откуда

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{S} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[f \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right].$$

Вычислив частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[f \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right] &= f'_z \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + f \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial z^2 \partial t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[f \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right] &= f''_z \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + 2f'_z \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z \partial t} + f_z \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial z^2 \partial t}, \end{aligned}$$

уравнение (126) примет вид

$$\frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial t \partial x^2} + ike^{i(kx - \sigma t)} G(z) + \frac{1}{S} f_z'' \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \frac{2}{S} f_z' \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z \partial t} + \frac{f}{S} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial z^2 \partial t} \quad (138)$$

или с учетом равенств

$$\begin{aligned} f_z' &= \frac{\rho_s'}{\mu \rho_s^2} b_{0z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{SF}{\mu \rho_s} b_{0z}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ f_z'' &= \frac{SF \rho_s'}{\mu \rho_s^2} b_{0z}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{S^2 F^2}{\mu \rho_s} b_{0z}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial t \partial x^2} + ike^{i(kx - \sigma t)} G(z) - \frac{SF^2}{\mu \rho_s^2} b_{0z}^2 \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial z^2 \partial t} - \\ - \frac{2F}{\mu \rho_s} b_{0z}^2 \frac{\partial^4 \tilde{p}}{\partial z^3 \partial t} + \frac{1}{S} \left[\frac{\partial^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu \rho_s} \mathcal{D}^2 \right] \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial t \partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (139)$$

Будем искать решение уравнения (139) в виде

$$\tilde{p} = \Re e^{i(kx - \sigma t)} G_1(z).$$

Тогда для функции $G_1(z)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} G_1^{(4)} + 2FSG_1''' + \left(S^2 F^2 + \frac{\sigma^2 \mu \rho_s}{b_{0z}^2} \right) G_1'' + \\ + \frac{kS\mu\rho_s}{b_{0z}^2} G_1' + \frac{k^2 S \mu \rho_s}{b_{0z}^2} G_1 = 0. \end{aligned} \quad (140)$$

Будем искать решение уравнения (140) в виде

$$G_1 = \tilde{G}_1(\rho_s(z)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_1' &= \tilde{G}_1' \rho_s', & G_1'' &= \tilde{G}_1'' \rho_s'^2 + \tilde{G}_1' \rho_s'' = \tilde{G}_1'' S^2 F^2 \rho_s^2 + \tilde{G}_1' S^2 F^2 \rho_s, \\ G_1''' &= \tilde{G}_1''' (-S^3 F^3) \rho_s^3 + 2\tilde{G}_1'' S^2 F^2 \rho_s^2 (-SF) + \tilde{G}_1'' (-S^3 F^3) \rho_s^2 - \\ &\quad - \tilde{G}_1' S^3 F^3 \rho_s = -S^3 F^3 \rho_s^3 \tilde{G}_1''' - 3S^3 F^3 \rho_s^2 \tilde{G}_1'' - S^3 F^3 \rho_s \tilde{G}_1', \\ \tilde{G}_1^{(4)} &= S^4 F^4 \rho_s^4 \tilde{G}_1^{(4)} + 6S^4 F^4 \rho_s^3 \tilde{G}_1''' + S^4 F^4 \rho_s \tilde{G}_1' + 7S^4 F^4 \rho_s^2 \tilde{G}_1'' = \\ &= S^4 F^4 \rho_s^4 \tilde{G}_1^{(4)} + 6S^4 F^4 \rho_s^3 \tilde{G}_1''' + 7S^4 F^4 \rho_s^2 \tilde{G}_1'' + S^4 F^4 \rho_s \tilde{G}_1'. \end{aligned}$$

Уравнение (140) в терминах функции $\tilde{G}_1(\rho_s(z))$ принимает вид

$$\begin{aligned} & S^4 F^4 \rho_s^4 \tilde{G}_1^{(4)} + 6S^4 F^4 \rho_s^3 \tilde{G}_1''' + 7S^4 F^4 \rho_s^2 \tilde{G}_1'' + S^4 F^4 \rho_s \tilde{G}_1' + \\ & + 2FS \left\{ -S^3 F^3 \rho_s^3 \tilde{G}_1''' - 3S^3 F^3 \rho_s^2 \tilde{G}_1'' - S^3 F^3 \rho_s \tilde{G}_1' \right\} + \\ & + \left(S^2 F^2 + \frac{\sigma \mu \rho_s}{b_{0z}} \right) \left[S^2 F^2 \rho_s^2 \tilde{G}_1'' + S^2 F^2 \rho_s \tilde{G}_1' \right] + \\ & + \frac{kS\mu\rho_s}{b_{0z}} \tilde{G}_1' + \frac{kS\mu\rho_s}{8b_{0z}^2} \tilde{G}_1 = 0 \end{aligned} \quad (141)$$

или

$$\begin{aligned} & \rho_s^4 \tilde{G}_1^{(4)} + 4\rho_s^3 \tilde{G}_1''' + \rho_s^2 \left[2 + \frac{\sigma \mu \rho_s}{S^2 F^2 b_{0z}^2} \right] \tilde{G}_1'' + \frac{\sigma \mu \rho_s^2}{S^2 F^2 b_{0z}^2} \tilde{G}_1' + \\ & + \frac{k^2 S \mu \rho_s}{S^4 F^4 b_{0z}^2} \tilde{G}_1' + \frac{k \mu \rho_s}{\sigma b_{0z}^2 S^3 F^4} G = 0, \end{aligned} \quad (142)$$

или

$$\begin{aligned} & \rho_s^3 \tilde{G}_1^{(4)} + 4\rho_s^2 \tilde{G}_1''' + \rho_s \left[2 + \frac{\sigma \mu \rho_s}{S^2 F^2 b_{0z}^2} \right] \tilde{G}_1'' + \frac{\sigma \mu \rho_s}{S^2 F^2 b_{0z}^2} \tilde{G}_1' + \\ & + \frac{k^2 \mu}{S^3 F^4 b_{0z}^2} \tilde{G}_1' + \frac{k \mu}{\sigma b_{0z}^2 S^3 F^4} G = 0. \end{aligned} \quad (143)$$

Так как

$$\tilde{G}_{1p.h.}(\rho_s(z)) = \alpha \rho_s(z), \quad \alpha = \text{const},$$

нетривиальное частное решение соответствующего однородного уравнения (при $G \equiv 0$) при $\sigma = -\frac{k^2}{S F^2}$, то замена

$$\tilde{G}_1(\rho_s(z)) = \tilde{G}_{1p.h.}(\rho_s(z)) \int \tilde{G}_2(\rho_s(z)) d(\rho_s(z))$$

приводит уравнение (143) к линейному уравнению третьего порядка:

$$\begin{aligned} & \rho_s^3 \tilde{G}_2''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_2'' + \rho_s \left[14 + \frac{\sigma \mu}{S^2 F^2 b_{0z}^2} \rho_s \right] \tilde{G}_2' + \\ & + \left[4 + 3 \frac{\sigma \mu \rho_s}{S^2 F^2 b_{0z}^2} \rho_s \right] \tilde{G}_2 = -\frac{k \mu}{\sigma \alpha S^3 F^4 b_{0z}^2} \rho_s G. \end{aligned} \quad (144)$$

Рассмотрим далее уравнение (144) в виде

$$\rho_s^3 \tilde{G}_2''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_2'' + [\alpha\rho_s^2 + 14\rho_s] \tilde{G}_2' + [3\alpha\rho_s + 4] \tilde{G}_2 = g_0(\rho_s), \quad (145)$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma\mu}{S^2 F^2 b_{0z}^2}, \quad g_0(\rho_s) = -\frac{k\mu}{\sigma\alpha S^3 F^4 b_{0z}^2 \rho_s} G(\rho_s).$$

Дифференциальное уравнение (145) с особой точкой $\rho_s = 0$ рассматривается при $\rho_s > 0$. Запишем уравнение (145) в виде

$$\rho_s^3 \tilde{G}_2''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_2'' + 14\rho_s \tilde{G}_2' + 4\tilde{G}_2 = g_0(\rho_s) - \alpha [3\rho_s \tilde{G}_2 + \rho_s^2 \tilde{G}_2'] \quad (146)$$

и будем считать величину α малым отрицательным параметром. Рассмотрим уравнение (146) при $\alpha = 0$:

$$\rho_s^3 \tilde{G}_2''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_2'' + 14\rho_s \tilde{G}_2' + 4\tilde{G}_2 = g_0(\rho_s). \quad (147)$$

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\rho_s^3 \tilde{G}_2''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_2'' + 14\rho_s \tilde{G}_2' + 4\tilde{G}_2 = 0 \quad (148)$$

является дифференциальным уравнением Эйлера. Подставляя в (148)

$$\begin{aligned} \rho_s &= e^{\tilde{\mu}}, & \tilde{G}_2' &= e^{-\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}}, & \tilde{G}_2'' &= e^{-2\tilde{\mu}} \left(\frac{d^2\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}^2} - \frac{d\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}} \right), \\ \tilde{G}_2''' &= e^{-3\tilde{\mu}} \left(\frac{d^3\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}^3} - 3\frac{d^2\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}^2} + 2\frac{d\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}} \right), \end{aligned}$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}^3} + 5\frac{d^2\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}^2} + 8\frac{d\tilde{G}_2}{d\tilde{\mu}} + 4\tilde{G}_2 = 0,$$

характеристическое уравнение которого имеет корни $k_1 = -1, k_2 = -2, k_3 = -2$. Следовательно,

$$\left\{ e_{10}(\rho_s) = \frac{1}{\rho_s}, \quad e_{20}(\rho_s) = \frac{1}{\rho_s^2}, \quad e_{10}(\rho_s) = \frac{\ln \rho_s}{\rho_s} \right\}$$

базис решений уравнения (148), а

$$\tilde{G}_{20} = \sum_{\varkappa=1}^3 (C_{\varkappa} + C_{\varkappa}(\rho_s)) e_{\varkappa 0}(\rho_s)$$

искмое общее решение дифференциального уравнения (147), где C_{\varkappa} — произвольные постоянные. Функции $C_{\varkappa}(\rho_s)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} C_1'(\rho_s) + \frac{1}{\rho_s} C_2'(\rho_s) + \frac{\ln \rho_s}{\rho_s} C_3'(\rho_s) &= 0, \\ C_1'(\rho_s) + \frac{2}{\rho_s} C_2'(\rho_s) + \frac{2 \ln \rho_s - 1}{\rho_s} C_3'(\rho_s) &= 0, \\ 2C_1'(\rho_s) + \frac{6}{\rho_s} C_2'(\rho_s) + \frac{6 \ln \rho_s - 5}{\rho_s} C_3'(\rho_s) &= g_0(\rho_s) \end{aligned}$$

в виде

$$\begin{aligned} C_1(\rho_s) &= \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} g_0(\tilde{\mu}) d\tilde{\mu}, & C_2(\rho_s) &= \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) g_0(\tilde{\mu}) d\tilde{\mu}, \\ C_3(\rho_s) &= - \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} g_0(\tilde{\mu}) d\tilde{\mu}, \end{aligned}$$

где $\rho_{s_0} > 0$ — некоторое число. Следовательно, общее решение уравнения (147) имеет вид

$$\tilde{G}_{20}(\rho_s) = C_1 e_{10}(\rho_s) + C_2 e_{20}(\rho_s) + C_3 e_{30}(\rho_s) + \tilde{G}_{20r}(\rho_s), \quad (149)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{20r}(\rho_s) &= e_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} g_0(\tilde{\mu}) d\tilde{\mu} + e_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} g_0(\tilde{\mu}) (\ln \tilde{\mu} - 1) d\tilde{\mu} - \\ &\quad - e_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} g_0(\tilde{\mu}) d\tilde{\mu}. \end{aligned} \quad (150)$$

Правая часть дифференциального уравнения (146) линейна относительно α , следовательно, аналитична, поэтому искомое решение $\tilde{G}_2(\rho_s, \alpha)$ при $\alpha < 0$ находим в виде степенного ряда относительно α :

$$\tilde{G}_2(\rho_s, \alpha) = \tilde{G}_{20}(\rho_s) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2n}(\rho_s) \alpha^n, \quad (151)$$

результатом подстановки которого в уравнение (146) является соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho_s^3 \tilde{G}_{2n}''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_{2n}'' + 14\rho_s \tilde{G}_{2n}' + 4\tilde{G}_{2n} \right) \alpha^n = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(3\rho_s \tilde{G}_{2n} + \rho_s^2 \tilde{G}_{2n}' \right) \alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , получаем рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_s^3 \tilde{G}_{2n}''' + 8\rho_s^2 \tilde{G}_{2n}'' + 14\rho_s \tilde{G}_{2n}' + 4\tilde{G}_{2n} = g_n(\rho_s), \quad (152)$$

$$g_n(\rho_s) = - \left(3\rho_s \tilde{G}_{2n-1} + \rho_s^2 \tilde{G}_{2n-1}' \right), \quad (153)$$

из которой функции \tilde{G}_{2n} будем находить с начальными условиями $\tilde{G}_{2n}(\rho_{s_0}) = 0, n \in \mathbb{N}$. Используя обозначения

$$\varphi_{\varkappa 1}(\rho_s) = \left(3\rho_s e_{\varkappa 0}(\rho_s) + \rho_s^2 e'_{\varkappa 0}(\rho_s) \right), \quad (154)$$

$$\begin{aligned} e_{\varkappa 1} = e_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \varphi_{\varkappa 1} d\tilde{\mu} + e_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) \varphi_{\varkappa 1} d\tilde{\mu} - \\ - e_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} \varphi_{\varkappa 1} d\tilde{\mu}, \end{aligned} \quad (155)$$

$$\tilde{g}_1(\rho_s) = - \left(3\rho_s \tilde{G}_{20r}(\rho_s) + \rho_s^2 \tilde{G}'_{20r}(\rho_s) \right), \quad (156)$$

$$\tilde{G}_{21r}(\rho_s) = e_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{g}_1 d\tilde{\mu} + e_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) \tilde{g}_1 d\tilde{\mu} -$$

$$-e_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} \tilde{g}_1 d\tilde{\mu}, \quad (157)$$

получим из уравнения (152) при $n = 1$

$$\tilde{G}_{2_1}(\rho_s) = C_1 e_{11}(\rho_s) + C_2 e_{21} + C_3 e_{31}(\rho_s) + \tilde{G}_{2_{1r}}(\rho_s).$$

Аналогично, используя обозначения

$$\varphi_{\varkappa n}(\rho_s) = -\left(3\rho_s e_{\varkappa, n-1}(\rho_s) + \rho_s^2 e'_{\varkappa, n-1}(\rho_s)\right), \quad (158)$$

$$e_{\varkappa n}(\rho_s) = e_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \varphi_{\varkappa n} d\tilde{\mu} + e_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) \varphi_{\varkappa n} d\tilde{\mu} - e_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} \varphi_{\varkappa n} d\tilde{\mu}, \quad (159)$$

$$\tilde{g}_n(\rho_s) = -\left(3\rho_s \tilde{G}_{2_{n-1,r}}(\rho_s) + \rho_s^2 \tilde{G}'_{2_{n-1,r}}(\rho_s)\right), \quad (160)$$

$$\tilde{G}_{2_{nr}}(\rho_s) = e_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \tilde{g}_n d\tilde{\mu} + e_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) \tilde{g}_n d\tilde{\mu} - e_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} \tilde{g}_n d\tilde{\mu}, \quad (161)$$

получим из (152) и (153)

$$\tilde{G}_{2_n}(\rho_s) = C_1 e_{1n}(\rho_s) + C_2 e_{2n} + C_3 e_{3n}(\rho_s) + \tilde{G}_{2_{1n}}(\rho_s).$$

В результате общее решение уравнения (146) имеет вид

$$\tilde{G}_2(\rho_s, \alpha) = \sum_{\varkappa=1}^3 C_{\varkappa} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_{\varkappa n}(\rho_s) \alpha^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_{2_{nr}}(\rho_s) \alpha^n. \quad (162)$$

Исследуем сходимость степенных рядов, представляющих общее решение (162). Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |G_{2nr}(\rho_s)| |\alpha|^n.$$

Пусть

$$A = \max \{e_{x0}(\rho_s)\}, \quad B = \max \{e'_{x0}(\rho_s)\}, \\ D = \max \{1; \rho_s (\ln \rho_s - 1); \rho_s\}, \quad B = \max |g_0(\rho_s)|,$$

где максимум вычисляется по ρ_s при $\rho_s \in [\rho_{s_0}; a]$, $a > \rho_{s_0}$. Из (150) получаем оценку

$$\left| \tilde{G}_{2_0r}(\rho_s) \right| \leqslant ADM (a - \rho_{s_0}). \quad (163)$$

Согласно (161)

$$\tilde{G}'_{2nr}(\rho_s) = e'_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{g}_n d\tilde{\mu} + e'_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) \tilde{g}_n d\tilde{\mu} - \\ - e'_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} \tilde{g}_n d\tilde{\mu}, \quad (164)$$

так как

$$e_{10}(\rho_s) + (\rho_s) (\ln \rho_s - 1) e_{20}(\rho_s) - \rho_s e_{30}(\rho_s) = \\ = \frac{1}{\rho_s} + \rho_s (\ln \rho_s - 1) \cdot \frac{1}{\rho_s^2} - \rho_s \cdot \frac{\ln \rho_s}{\rho_s^2} \equiv 0.$$

Из (164) при $n = 0$, где полагаем $\tilde{g}_0(\rho_s) \equiv g_0(\rho_s)$, получаем

$$\left| \tilde{G}'_{2_0r}(\rho_s) \right| \leqslant BDM (a - \rho_{s_0}). \quad (165)$$

Поэтому из (160) при $n = 1$ с учетом (163) и (165) получаем

$$|\tilde{g}_1(\rho_s)| \leqslant (3aA + a^2B) DM (a - \rho_{s_0}), \quad (166)$$

а из (161), (164) при $n = 1$ и (166) —

$$\begin{aligned} \left| \tilde{G}_{2_{1r}}(\rho_s) \right| &\leq AD^2 (3aA + a^2B) M (a - \rho_{s_0})^2, \\ \left| \tilde{G}'_{2_{1r}}(\rho_s) \right| &\leq BD^2 (3aA + a^2B) M (a - \rho_{s_0})^2. \end{aligned}$$

С целью использования метода полной математической индукции предположим, что верны оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_{n-1}(\rho_s)| &\leq D^{n-1} (3aA + a^2B)^{n-1} M (a - \rho_{s_0})^{n-1}, \\ \left| \tilde{G}_{2_{n-1,r}}(\rho_s) \right| &\leq AD^n (3aA + a^2B)^{n-1} M (a - \rho_{s_0})^n, \\ \left| \tilde{G}'_{2_{n-1,r}}(\rho_s) \right| &\leq BD^n (3aA + a^2B)^{n-1} M (a - \rho_{s_0})^n. \end{aligned}$$

Тогда из (160) следует оценка

$$|\tilde{g}_n(\rho_s)| \leq D^n (3aA + a^2B)^n M (a - \rho_{s_0})^n, \quad (167)$$

а из (161) с учетом (167) —

$$\left| \tilde{G}_{2_{nr}}(\rho_s) \right| \leq AD^{n+1} (3aA + a^2B)^n M (a - \rho_{s_0})^{n+1}. \quad (168)$$

Согласно методу полной математической индукции оценка (168) справедлива для всех $n \in \mathbb{N}$.

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} AD^{n+1} (3aA + a^2B)^n M (a - \rho_{s_0})^{n+1} |\alpha|^n$$

сходится по признаку Даламбера при $\alpha \in (-R; R)$, где

$$R = \frac{1}{D (3aA + a^2B) (a - \rho_{s_0})}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}'_{2_{nr}}(\rho_s) \alpha^n$$

сходится абсолютно и равномерно по ρ_s при $\rho_s \in [\rho_{s_0}; a]$, $\alpha \in (-R; R)$.

Рассмотрим далее степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e_{\varkappa n}(\rho_s)| |\alpha|^n.$$

Из (154) получаем оценку

$$|\varphi_{\varkappa 1}(\rho_s)| \leq 3aA + a^2B, \quad (169)$$

а из (155) и следствия из (159) — выражение

$$\begin{aligned} e'_{\varkappa n}(\rho_s) = & e'_{10}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \varphi_{\varkappa n} d\tilde{\mu} + e'_{20}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} (\ln \tilde{\mu} - 1) \varphi_{\varkappa n} d\tilde{\mu} - \\ & - e'_{30}(\rho_s) \int_{\rho_{s_0}}^{\rho_s} \tilde{\mu} \varphi_{\varkappa n} d\tilde{\mu}, \end{aligned} \quad (170)$$

при $n = 1$ с учетом (169) имеем

$$\begin{aligned} |e_{\varkappa 1}(\rho_s)| & \leq AD (3aA + a^2B) (a - \rho_{s_0}), \\ |e'_{\varkappa 1}(\rho_s)| & \leq BD (3aA + a^2B) (a - \rho_{s_0}). \end{aligned}$$

Предполагая, что верны оценки

$$\begin{aligned} |\varphi_{\varkappa, n-1}(\rho_s)| & \leq D^{n-2} (3aA + a^2B)^{n-1} (a - \rho_{s_0})^{n-2}, \\ |e_{\varkappa, n-1}(\rho_s)| & \leq AD^{n-1} (3aA + a^2B)^{n-1} (a - \rho_{s_0})^{n-1}, \\ |e'_{\varkappa, n-1}(\rho_s)| & \leq BD^{n-1} (3aA + a^2B)^{n-1} (a - \rho_{s_0})^{n-1}, \end{aligned}$$

из (158) и (159) получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_{\varkappa n}(\rho_s)| & \leq D^{n-1} (3aA + a^2B)^n (a - \rho_{s_0})^{n-1}, \\ |e_{\varkappa n}(\rho_s)| & \leq BD^{n-1} (3aA + a^2B)^n (a - \rho_{s_0})^n. \end{aligned} \quad (171)$$

По индукции оценка (171) справедлива для всех $n \in \mathbb{N}$. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} AD^n (3aA + a^2B)^n (a - \rho_{s_0})^n |\alpha|^n$$

сходится по признаку Даламбера при $\alpha \in (-R; R)$; следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{\varkappa n}(\rho_s) \alpha^n, \quad \varkappa = 1, 2, 3$$

сходится абсолютно и равномерно по ρ_s при $\rho_s \in [\rho_{s_0}; a]$ и $\alpha \in (-R; R)$. Так как

$$A = \frac{1}{\rho_{s_0}^2}, \quad B = \frac{2}{\rho_{s_0}^3}, \quad D = a(\ln a - 1), \quad a > e^2,$$

то

$$R = \frac{\rho_{s_0}^3}{a^2(2a + 3\rho_{s_0})(a - \rho_{s_0})(\ln a - 1)}. \quad (172)$$

Итак, общее решение (162) сходится абсолютно и равномерно по ρ_s при $\rho_s \in [\rho_{s_0}; a]$ и $\alpha \in (-R; R)$, где величина R определяется равенством (172).

ЛИТЕРАТУРА

1. Холодова С.Е. Волновые движения в сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2007. Т. 47. № 12. С. 2107–2115.
2. Холодова С.Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой жидкости // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2008. Т. 48. № 5. С. 882–898.
3. Холодова С.Е. Квазигеострофические движения во вращающемся слое электропроводной жидкости // Прикл. мех. и техн. физика. 2009. Т. 50. № 1. С. 30–41.
4. Холодова С.Е. Математическое моделирование крупномасштабных движений стратифицированной электропроводной жидкости в сферическом слое // Вестн. С-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 1. С. 118–133.
5. Холодова С.Е. Волновые движения в стратифицированной электропроводной вращающейся жидкости // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2009. Т. 49. № 5. С. 916–922.

6. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 455 с.
7. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967. 260 с.
8. Алешков Ю.З. Математическое моделирование физических процессов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 264 с.
9. Гурько Ю.Ф., Норин А.В., Филиппов Б.В. Электромагнитная газодинамика плазмы. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. — 176 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. VI.: Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. VIII.: Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
12. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320 с.
13. Брагинский С.И. Магнитогидродинамика земного ядра // Геомагн. и аэронав. 1964, Т. 4, № 5, С. 898–916.
14. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
15. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Точные решения. М.: Физматлит, 1995. 560 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С МАЛЫМ УГЛОМ ОБРАЗУЮЩЕЙ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

А. Л. Смирнов, А. А. Харунжий

В статье исследуется применимость метода ортогональной прогонки С. К. Годунова решения краевой задачи с уравнением первого порядка для задачи свободных колебаний тонких упругих оболочек вращения. В качестве объектов исследования были выбраны цилиндрические и конические оболочки с малым углом образующей, при этом наибольшее внимание было обращено на поведение собственных частот и форм колебаний при изменении малого параметра угла образующей. Достоверность всех результатов, полученных в статье, была проверена применением различных конкурирующих методов решения; при этом проведено сравнение методов между собой по точности и на его основе дана положительная оценка применению алгоритма ортогональной прогонки для упомянутых задач.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи исследования свободных колебаний тонких упругих оболочек часто сводятся к системам дифференциальных уравнений с краевыми условиями, аналитически разрешить которые не представляется возможным. Основными методами их решения являются асимптотические методы, метод конечных элементов и различные численные методы решения краевых задач. Из последнего класса выделяется метод ортогональной прогонки С. К. Годунова (работа [1]). Целью данной статьи является исследование применимости этого метода для задачи свободных колебаний тонких упругих оболочек вращения. В качестве тестовой выбрана задача

Доклад на семинаре 30 марта 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00244а.

© А. Л. Смирнов, А. А. Харунжий, 2010

свободных колебаний упругой цилиндрической и слабokonической оболочек с различными вариантами условий на краях, поскольку эти задачи в тех или иных случаях допускают решение конкурирующими методами. Таким образом, становится возможным произвести сравнение результатов различных методов между собой, по результатам которого определить оптимальные параметры алгоритма ортогональной прогонки и очертить круг задач, для которых метод С. К. Годунова дает корректные результаты.

В статье методом ортогональной прогонки С. К. Годунова вычислены собственные частоты осесимметричных колебаний цилиндрической и слабokonических оболочек, а также наименьшие частоты, для которых удалось также построить графики собственных колебаний.

2. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ С.К. ГОДУНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При сведении трехмерной теории оболочек к двумерной с использованием гипотез Кирхгофа–Лява состояние оболочки описывается системой дифференциальных уравнений восьмого порядка, которые можно в известных пределах варьировать (см. работы [2], [3], [4]). В случае оболочки вращения функции этой системы допускают разделение переменных следующего вида (здесь и далее используются обозначения, предложенные в работе [2]):

$$u(s, \phi) = u_m(s) \cos(m\phi), \quad [w, \epsilon_i, \kappa_i, \gamma_1, T_i, M_i, Q_1],$$

$$v(s, \phi) = v_m(s) \sin(m\phi), \quad [\omega, \gamma_2, \tau, S_{ij}, H_{ij}, Q_2],$$

где в скобках перечислены функции, допускающие преобразование по тем же законам, $i, j = 1, 2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ — число волн в окружном направлении.

После разделения переменных и надлежащего выбора независимых функций, а именно набора

$$y = \left(u, v, w, \gamma_1, T_1, S_1^* = S_{21} + \frac{H_{21}}{R_2}, Q_1^* = Q_1 + \frac{m}{B} H_{21}, M_1 \right), \quad (1)$$

определяющего однородные граничные условия жесткой заделки

$$u = v = w = \gamma_1 = 0 \quad (2)$$

и свободного края

$$T_1 = S_1^* = Q_1^* = M_1 = 0, \quad (3)$$

система уравнений колебаний тонкой упругой оболочки вращения для любого наперед заданного m может быть записана в виде

$$y'(s) = A_m(\lambda, s)y(s), \quad (4)$$

где λ — частотный параметр. Отметим, что условия шарнирного опирания (условия Навье) также могут быть выражены через выбранные функции, оставляя их однородными.

Таким образом, для любого целого неотрицательного m мы получаем систему из восьми линейных дифференциальных уравнений с некоторыми краевыми условиями. В зависимости от способа перехода к безразмерным величинам, выбора направлений действия сил и значений параметров её можно представить в различных видах.

Решение поставленной краевой задачи может быть найдено численным методом ортогональной прогонки С. К. Годунова. Рассмотрим основные принципы этого алгоритма для спектральной задачи, т. е. задачи с однородной системой уравнений и граничными условиями.

Предположим, все функции, входящие в систему (4), непрерывны на отрезке $[0, l]$, где l — длина образующей оболочки. На концах отрезка $[0, l]$ поставлены однородные граничные условия:

$$By(0) = \mathbf{0}, \quad Cy(l) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Матрицы B и C — прямоугольные размером 4×4 , $\mathbf{0}$ означает нулевой вектор-столбец.

Суть рассматриваемого метода состоит в том, что 4 краевых условия с левого конца отрезка $[0, l]$, условно говоря, переносятся на правый конец, после чего доопределяются недостающие 4 условия. В результате на правом конце отрезка мы будем иметь уже все

8 условий, и, следовательно, решение исходной краевой задачи сводится к решению задачи Коши, что уже не составляет трудностей. Однако может возникнуть следующая трудность. При интегрировании по мере продвижения к точке l может возникнуть слипание векторов $\mathbf{y}_1(s), \dots, \mathbf{y}_4(s)$, когда они становятся почти линейно зависимыми.

Чтобы избежать подобной ситуации, применяется способ ортогонализации, заключающийся в следующем. На отрезке выбирается несколько точек $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = l$, которые назовем *точками ортогонализации*. При решении задачи Коши, проходя через эти точки, векторы $\mathbf{y}_1(\alpha_i), \dots, \mathbf{y}_4(\alpha_i)$ ортонормируются. При этом точки ортогонализации должны быть расставлены настолько часто, чтобы процесс слипания векторов решений не привел при подходе к каждой следующей точке ортогонализации к большой потере значащих цифр из-за роста вычислительной погрешности, если среди решений $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4$ есть быстро растущие с ростом s .

Описанный алгоритм тестировался на серии задач с параметрами из весьма широкого диапазона. Однако для однородности изложения далее, если не оговорено обратного, описываются результаты расчетов для задачи со следующими параметрами: толщина оболочки $h = 0.02$ м, длина оболочки $l = 3$ м, радиус основания оболочки $R = 1$ м, модуль Юнга $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па, плотность $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Угол наклона образующей варьировался в диапазоне от нуля (цилиндрическая оболочка) до $\pi/12$.

3. ЧАСТОТЫ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Известно, что спектр цилиндрической оболочки имеет в единице точку сгущения из осесимметричных частот. Представляется интересной задача исследования поведения этих частот при небольшом отклонении формы оболочки от цилиндрической, а именно небольшой её коничности. Это случай $m = 0$, $\lambda \sim 1$; матрица системы уравнений принимает более простой вид, так как от нее отделяются два уравнения, описывающие крутильные колебания оболочки.

В табл. 1 содержатся результаты работы алгоритма ортогональ-

ной прогонки, примененного к тестовой задаче с нулевым углом образующей, т.е. цилиндрической оболочке, в качестве краевых условий с обеих сторон взята жесткая заделка.

Таблица 1. Частоты осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки

Точное значение	Ортогональная прогонка	Асимптот. мет.
—	<u>0.42183</u>	—
0.82157	0.82152	0.82039
0.98213	0.98313	0.98126
0.99603	0.99513	0.99329
1.00418	1.00525	1.00467
1.01465	1.01504	1.01524
1.02986	1.02895	1.03096
1.05275	1.05451	1.05394
—	1.07492	—
1.1028	1.10327	1.0989
1.12840	1.12776	1.13071
1.19342	1.19490	1.18958
1.26062	1.26033	1.26592
1.36556	1.36537	1.36287
1.44440	1.44424	1.48399
1.52334	1.52380	1.50128
1.63506	1.63526	1.63565
—	<u>1.68708</u>	—
1.82056	1.82116	1.81626

Полученные значения сравниваются с результатами, полученными с помощью асимптотических оценок в работе [5]. Нетрудно заметить весьма удовлетворительное их совпадение.

В литературе (например, [2]) предложены различные асимптотические методы выяснения природы колебаний для каждой из частот. Эти оценки для цилиндрической оболочки с высокой степенью точности подтвердили результаты работы алгоритма ортогональной прогонки, представленные на рис. 1.

На нем отображено изменение частот осесимметричных колебаний конической оболочки с ростом угла конусности. Легко заметить, что большая часть частот монотонно растет, удаляясь друг

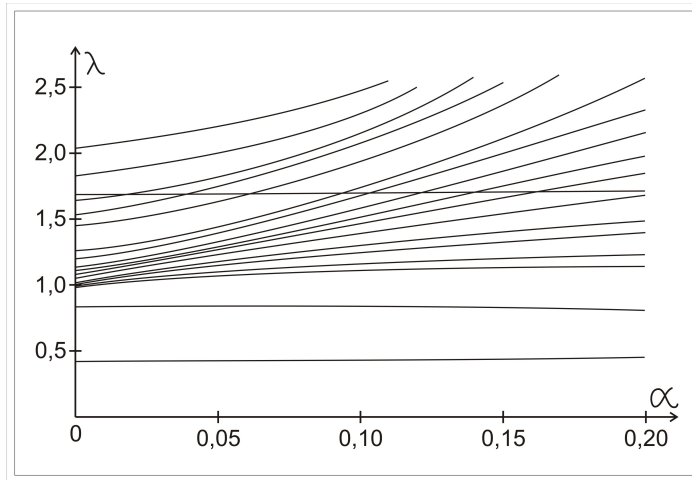


Рис. 1. Зависимость частот осесимметричных колебаний конической оболочки от угла конусности.

от друга, в то время как некоторые из них (а именно те, которые подчеркнуты в табл. 1) остаются практически постоянными. Этот факт объясняется различной природой частот, и в данном случае после обращения к асимптотическим формулам для цилиндрической оболочки из работы [2], которые позволяют сделать оценку для частот крутильных колебаний по формуле

$$\lambda^{(0)} = (2(1 + \nu))^{-1} p^2, \quad p \in \mathbf{N},$$

немедленно следует заключение, что не растущие с ростом угла частоты являются крутильными. Соответственно оставшиеся — частоты продольно-поперечных колебаний.

4. НИЗШИЕ ЧАСТОТЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

Сверхнизкими называются частоты колебаний, для которых выполнено условие $\lambda \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Оболочки нулевой гауссовой

кривизны, цилиндрические и конические, имеют сверхнизкие колебания с частотой $\lambda \sim h$. Этим частотам соответствуют колебания с большим числом волн по параллели: согласно результатам работы [2] верна оценка $m \sim h^{-1/4}$. Там же высказывается утверждение, что для достаточно тонких оболочек нулевой гауссовой кривизны нижняя часть спектра состоит из сверхнизких частот, нулевое приближение к значениям которых может быть найдено из вариационной задачи

$$\lambda' = \min_{\omega^{(0)}} \frac{\int s^3 (\omega^{(0)})^2 ds + a \rho^8 \int s^{-3} (\omega^{(0)})^2 ds}{b \rho^4 \int s (\omega^{(0)})^2 ds},$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda = \mu^2 \lambda', \quad m = \mu^{-1/2} \rho, \quad \mu^4 = h^2/3,$$

$$a = \frac{\tan^2 \alpha}{(1 - \nu^2) \sin^8 \alpha}, \quad b = \frac{\tan^2 \alpha}{\sin^4 \alpha}.$$

Отсюда следующие выражения для нулевого приближения к наименьшему значению λ и соответствующему ему m при условии жесткой заделки с обеих границ:

$$\lambda = \frac{\kappa(\beta) h \cos \alpha}{R l^2 \sqrt{2(1 - \nu^2)}}, \quad m^4 = \frac{\sqrt{2(1 - \nu^2)} R^3 \eta(\beta) \cos \alpha}{l^2 h}, \quad (6)$$

где функции $\kappa(\beta)$ и $\eta(\beta)$, зависящие от величины $\beta = l \sin \alpha / R$, на отрезке $[0, 1/2]$ с достаточной точностью могут быть представлены в виде интерполяционных полиномов:

$$\begin{aligned} \kappa(\beta) &= 1750\beta^5 - 1958.3\beta^4 + 22.1\beta + 770.8\beta^3 - 100.4\beta^2 + 44.4, \\ \eta(\beta) &= 916.7\beta^5 - 1250\beta^4 + 570.8\beta^3 - 72.5\beta^2 - 35.3\beta + 22.2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что вышесказанное о характере наинизших колебаний имеет место при любых условиях закрепления краев оболочки с единственной оговоркой: при наличии свободного либо слабо закрепленного края могут появиться частоты $\lambda \sim h^\alpha$, где $\alpha \geq 1$. Мы оставляем этот случай вне рассмотрения ввиду его нетипичности.

Задача нахождения наименьших частот колебаний конической оболочки методом ортогональной прогонки может быть решена при условии известности значения m , соответствующего данным колебаниям. Оценку для этой величины легко получить из формул (6).

Прежде всего, следует сделать оценку точности работы численного метода. В табл. 2 представлены результаты работы программы, примененной к тестовой задаче с $\sin \alpha = 0.1$, при различных значениях малого параметра относительной толщины. Полученные значения наименьшей частоты сравниваются с результатами расчетов методом конечных элементов в пакете ANSYS.

Таблица 2. Зависимость точности вычислений наименьшей частоты методом ортогональной прогонки от величины относительной толщины

Относительная толщина	ANSYS, МКЭ	Ортогональная прогонка	Отклонение, %
0.001	33.199	82.028	147.08
0.002	46.292	82.695	78.64
0.003	55.803	83.617	49.84
0.004	64.675	84.974	31.39
0.005	71.228	86.580	21.55
0.006	76.681	88.486	15.39
0.007	82.626	90.696	9.77
0.008	88.951	93.171	4.74
0.009	95.204	95.834	0.66
0.010	98.122	98.776	0.67
0.011	101.240	101.841	0.59
0.012	104.530	105.132	0.58

Нетрудно заметить, что при уменьшении h результаты существенно разнятся. Данная закономерность является предсказуемой и логичной по следующей причине: входящие в матрицу члены с отрицательными степенями относительной толщины h/R с её уменьшением начинают преобладать над прочими. Таким образом, следует считать, что применение метода ортогональной прогонки целесообразно при значении относительной толщины $h/R \sim 10^{-2}$; при этом отклонение результатов от результатов расчетов в пакете ANSYS (которые мы условно считаем точными в силу отсутствия

более точных) составляет доли процентов.

В табл. 3 представлены результаты расчетов методом конечных элементов, методом ортогональной прогонки, а также с помощью формул (6) для тестовой задачи с жестко заделанными краями, толщиной $h = 0.02$ для различных значений угла образующей α . Легко проследить монотонный рост значения наимизшей частоты с ростом угла α . Здесь же отметим, что приведенные асимптотические формулы дают более точное приближение при уменьшении относительной толщины оболочки.

Таблица 3. Характер изменения наимизшей частоты в зависимости от угла образующей

$\sin \alpha$	Асимптотические формулы	ANSYS, МКЭ	Ортогональная прогонка	Отклонение МКЭ от ОП, %
0	153.81	120.58	120.76	0.149
0.02	157.45	122.46	122.68	0.180
0.04	161.29	124.82	124.99	0.136
0.06	165.67	127.76	127.95	0.149
0.08	170.74	131.39	131.70	0.236
0.10	176.43	135.83	136.02	0.140

Необходимо отметить, что в условиях тестовой задачи с малым углом α наимизшие колебания соответствуют числу волн по параллели равному 4. Оценка этой величины формулой (6) совпала с результатами метода конечных элементов. В табл. 4 приведены аналогичные результаты для второй наимизшей частоты, соответствующей значению $m = 3$.

Картина распределения первых трех наимизших частот для различных значений m в случае жестко заделанной с обеих сторон тестовой задачи с $\sin \alpha = 0.1$ и $h = 0.01$ представлена на рис. 2.

Характер распределения хорошо соотносится с теоретическими оценками, данными в работах [5], [6]. Легко заметить, что строгий минимум находится в точке $m = 4$.

Метод ортогональной прогонки позволяет также строить собственные функции спектральной задачи, соответствующие конкретному собственному значению. Следовательно могут быть найдены формы собственных колебаний оболочки. На рис. 3(а) пред-

Таблица 4. Характер изменения второй наименьшей частоты в зависимости от угла образующей

$\sin \alpha$	ANSYS, МКЭ	Ортогональная прогонка	Отклонение МКЭ от ОП, %
0	142.04	142.14	0.070
0.02	141.01	141.41	0.280
0.04	140.53	140.75	0.159
0.06	139.89	140.16	0.191
0.08	138.97	139.64	0.479
0.10	138.74	139.23	0.349

ставлены формы колебаний по всем трем координатам u, v, w для жестко закрепленной цилиндрической оболочки с $h = 0.02$.

Как следует из разности в амплитудах колебаний, результаты хорошо соотносятся с утверждением, что наименьшая частота является квазипоперечной, т. е. $w \gg \max(u, v)$. То же можно сказать и о второй наименьшей частоте, соответствующей $m = 3$; формы колебаний конической оболочки с $\alpha = 0.1$ для неё представлены на рис. 3(b). Здесь и далее следует обратить внимание на поведение функций в окрестности правого конца интервала — отклонение от выполнения краевого условия (равенство нулю в правом конце) обусловлено накоплением ошибок при прямом и обратном ходе прогонки. Эта погрешность может быть минимизирована уменьшением шагов интегрирования и ортогонализации при одновременном увеличении количества значащих цифр в машинном представлении числа.

Заключительным для данного исследования является вопрос об изменении форм колебаний, соответствующих наименьшим частотам, с ростом малого параметра угла образующей конуса α . На рис. 3 на вклейке представлены графики собственных форм колебаний для жестко закрепленных цилиндрической и конических ($\alpha = 0.08, 0.1$) оболочек с $h = 0.02$. Отчетливо видно, что точка, соответствующая максимумам форм по v, w и пересечению формы по u с осью абсцисс, с ростом угла α сдвигается от середины (для цилиндрической оболочки) в сторону более узкого конца. Следовательно, при увеличении угла коничности преимущественные коле-

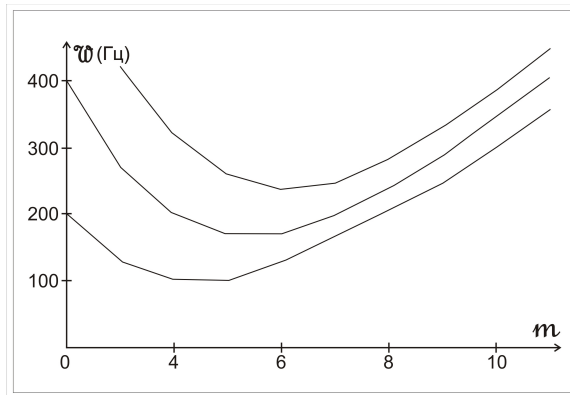


Рис. 2. Три низшие частоты колебаний конической оболочки для различных значений m при $\sin \alpha = 0.1$.

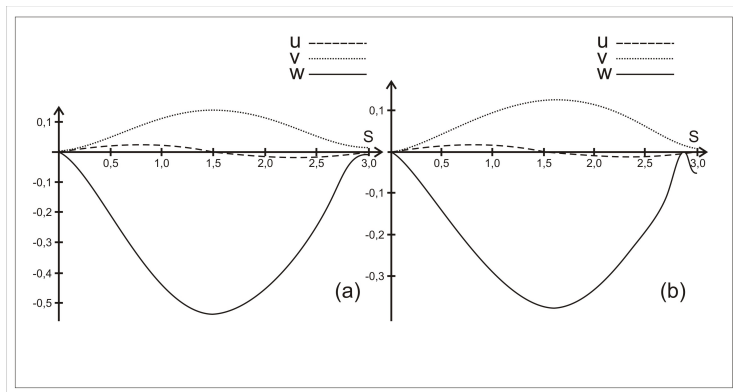


Рис. 3. Графики собственных форм колебаний жестко закрепленной цилиндрической (а) и конической с $\alpha = 0.1$ (б) оболочек.

бания смещаются в сторону более узкого конца оболочки.

Полезно также сравнить полученные результаты с результатами МКЭ. На рис. 4 на вклейке изображена деформированная коническая оболочка (а именно суммарный вектор перемещений) для первой и второй наименьших частот колебаний. Несложно проследить соответствие форм колебаний и числа волн по параллели с результатами работы алгоритма ортогональной прогонки.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованием программно-реализованного метода ортогональной прогонки для решения краевой задачи найдены некоторые из осесимметричных и наименьших частот цилиндрической и слабokonической оболочек. На основе произведенных расчетов исследовано поведение собственных частот и форм колебаний слабokonической оболочки в зависимости от величины угла образующей, выяснена природа исследуемых частот. Проведено сравнение полученных результатов с результатами конкурирующих методов, таких как МКЭ и некоторые из асимптотических методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. и др. Численный анализ. Новосибирск, 1989.
2. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.; Наука, 1979.
3. Handbook of structural stability. Tokio. Carona Publishing Company LMD.
4. Асламян А. Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., 1974.
5. Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б. Асимптотические методы в механике твердого тела. М.; Ижевск, 2007.
6. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, Т. III. М., 1959.

ПРИМЕНЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ.

В.В. Платонов

В статье исследуется возможность возникновения принципиально новых форм потери устойчивости трансверсально-изотропной сферической оболочки при нормальной динамической нагрузке. Задача рассматривается с использованием уточненной теории, учитывающей поперечные деформации сдвига согласно С.А. Амбарцумяну. Приводится сравнение величин критической нагрузки для случая трансверсально-изотропного и изотропного материалов. Строится полная система решений уравнения движения сферической оболочки. Определяются формы потери устойчивости и частоты собственных колебаний. Получены условия, при которых теория, учитывающая влияние поперечного сдвига, существенно уточняет классическую теорию.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из классов задач, требующих привлечения теорий более точных, чем теория Кирхгофа–Лява, являются динамические задачи — определение высших частот колебаний, проблема распространения волн, вызванных быстроизменяющейся нагрузкой и т. д. Применение классической теории Кирхгофа–Лява к исследованию устойчивости длинной цилиндрической оболочки под воздействием динамического радиального давления показало, что при внезапно приложенной нагрузке, превышающей статическую критическую нагрузку, может возникать новая форма потери устойчивости [1]. К оболочке была приложена нагрузка, заведомо большая, чем статическая критическая. Наблюдалась форма потери устойчивости, равная примерно $2/3$ от высшей формы при классической постановке. Эта форма устойчивости в статике была бы неустойчива. Число

Доклад на семинаре 20 октября 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00623а

© В.В. Платонов, 2010

форм динамической потери устойчивости тем больше, чем больше величина внезапно приложенной нагрузки. Так же к новым формам потери устойчивости в этом случае для трансверсально-изотропных оболочек приводит применение теории Тимошенко–Рейсснера. В работе [2] получено, что в задачах динамической устойчивости, как и при решении задач статики и колебаний оболочек [3], учет поперечного сдвига и инерции вращения может приводить к существенным поправкам по сравнению с классической теорией. Было показано, что при очень больших нагрузках с учетом теории Тимошенко–Рейсснера возникает заведомо новая форма потери устойчивости в сравнении с формой $2/3$ от высшей, полученной в классической постановке [1].

В данной статье исследуется возможность возникновения принципиально новых форм потери устойчивости трансверсально-изотропной сферической оболочки при нормальной динамической нагрузке. Задача рассматривается с использованием уточненной теории, учитывающей поперечные деформации сдвига согласно С.А. Амбарцумяну [4]. Проводится сравнение величин критической нагрузки для случая трансверсально-изотропного и изотропного материалов. Строится полная система решений уравнения движения сферической оболочки. Определяются формы потери устойчивости и частоты собственных колебаний. Определяются условия, при которых теория, учитывающая влияние поперечного сдвига, существенно уточняет классическую теорию.

2. Уточненные теории оболочек

Существуют различные варианты уточненных теорий оболочек, которые построены путем сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным с привлечением гипотез менее жестких, чем гипотезы Кирхгофа–Лява (полный или частичный отказ от гипотезы недеформируемых нормалей). Общая идея методов заключается в предварительной аппроксимации некоторых из величин u , v , w , σ_{ij} в виде конечных рядов

$$u_i = \sum_{k=0}^N u_{ik}(x, y)\phi_{ik}(z), \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^N \sigma_{ij}^k(x, y)\psi_{ik}(z)$$

с последующим определением остальных величин. Аппроксимирующие функции $\phi_{ik}(z)$ и $\psi_{ik}(z)$, как правило, считаются заданными, а для определения неизвестных функций u_{ik} , σ_{ij}^k выводятся дифференциальные уравнения с помощью вариационных принципов или с использованием трехмерных уравнений теории упругости.

В данной работе используется теория, учитывающая поперечные деформации сдвига согласно уточненной теории С.А. Амбарцумяна [4]. В этой теории метод перехода от трехмерных к двумерным уравнениям теории упругости заключается в следующем: поперечные касательные напряжения задаются в виде

$$\sigma_{xz} = f(z)\phi(x, y) + \frac{(X^+ + X^-)z}{h} + \frac{(X^+ - X^-)}{2},$$

$$\sigma_{yz} = f(z)\psi(x, y) + \frac{(Y^+ + Y^-)z}{h} + \frac{(Y^+ - Y^-)}{2},$$

а σ_z определяется из трехмерных уравнений равновесия. Здесь $X^+(x, y)$, $Y^+(x, y)$, $X^-(x, y)$, $Y^-(x, y)$ — тангенциальные компоненты векторов интенсивности поверхностных нагрузок, приложенных на поверхностях оболочки. Функция $f(z)$ считается заданной (обычно $f(z) = \frac{h^2}{4} - z^2$), а для неизвестных функций $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ выводятся дифференциальные уравнения из трехмерных уравнений равновесия теории упругости путем их интегрирования по толщине. Отметим, что при построении уточненной теории трансверсально-изотропной сферической оболочки не учитываются члены порядка $(hk_i)^2$ по сравнению с единицей, где h — толщина оболочки, k_i — главные кривизны.

3. РАЗРЕШАЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

Пусть срединная поверхность сферической оболочки R отнесена к географической системе координат α , β так, что α представляет угол широты, а β — угол долготы. Тогда для коэффициентов первой квадратичной формы будем иметь $A = R$, $B = R \sin \alpha$. В последующих выкладках учитывается, что A — величина постоянная, а B не зависит от β , и рассматривается задача устойчивости замкнутой сферической оболочки под действием равномерно распределенного внешнего давления.

Выражения для внутренних сил и моментов [4] имеют вид:

$$T_{1,2} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{1,2} + \nu\varepsilon_{2,1}) + T_{1,2}^0,$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega + T^0,$$

$$M_{1,2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\kappa_{1,2} + \nu\kappa_{2,1} + \frac{1}{R}(\varepsilon_{1,2} + \nu\varepsilon_{2,1}) \right] + M_{1,2}^0,$$

$$H = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left(\tau + \frac{\omega}{R} \right) + H^0,$$

где члены с индексом 0, представляющие явление поперечного сдвига, выглядят следующим образом:

$$M_1^0 = \frac{16R}{9}T_1^0 = \frac{Eh^5}{120(1-\nu^2)G'} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \nu \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \phi \right) \right],$$

$$M_2^0 = \frac{16R}{9}T_2^0 = \frac{Eh^5}{120(1-\nu^2)G'} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \phi + \frac{\nu}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right],$$

$$H^0 = \frac{16R}{9}T^0 = \frac{Eh^5}{240(1+\nu)G'} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\phi}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\psi}{B} \right) \right].$$

Исключив из уравнений равновесия сферической оболочки перерезывающие силы, получим следующую систему трех уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B \left(T_1 + \frac{M_1}{R} \right) \right] - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(T_2 + \frac{M_2}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(S + \frac{H}{R} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B \left(S + \frac{H}{R} \right) \right] + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(S + \frac{H}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(T_2 + \frac{M_2}{R} \right) \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_1 + T_2}{R} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_1) - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (AH) \right) \right] - \\ & - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BH) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} H + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_2) \right) \right] = Z, \end{aligned}$$

где Z — нормальная составляющая внешней нагрузки. Подставляя значения внутренних сил и моментов в уравнения равновесия, сделав некоторые преобразования, найдем

$$(\Delta + 1 - \nu)\vartheta - \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{12R^2} \Delta + 1 - \nu \right) (\Delta + 2)w = \frac{5h}{32RG'} (\Delta + 1 - \nu)Z,$$

$$\left(\frac{1 + \nu}{R} - \frac{h^2}{12R^2} \left[1 + \frac{6E}{5(1 - \nu)G'} \right] \Delta \right) \vartheta + \frac{h^2}{12R^4} (\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)w =$$

$$= \frac{1 - \nu^2}{Eh} \left(1 - \frac{Eh^2}{10R^2(1 - \nu^2)G'} \Delta \right) Z,$$

где введено следующее обозначение:

$$\vartheta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (Bu) + \frac{\partial}{\partial \beta} (Av) \right) + \frac{2w}{R}.$$

Здесь $\Delta = R^2 \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$ — оператор Лапласа в безразмерном виде. Исключая параметр ϑ из этих уравнений, получим одно уравнение шестого порядка относительно нормального перемещения w :

$$[c^2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta] (\Delta + 2)w = \frac{R^2}{Eh} (1 - h^* \Delta)(\Delta + 1 - \nu)Z, \quad (1)$$

где

$$c^2 = \frac{h^2}{12(1 - \nu)R^2}, \quad h^* = \frac{h^2}{10(1 - \nu^2)R^2} \frac{E}{G'},$$

E — модуль Юнга в тангенциальных направлениях, ν — коэффициент Пуассона, G' — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к поверхности оболочки.

4. СТАТИЧЕСКОЕ КРИТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

Для определения критического давления рассматривается основное напряженное состояние оболочки, которое до потери устойчивости является безмоментным. В классической теории пологих

оболочек компоненты интенсивности фиктивной поверхностной нагрузки имеют вид

$$X^* = 0, \quad Y^* = 0, \quad Z^* = -T_1^0 \kappa_1 - T_2^0 \kappa_2 - T^0 \tau, \quad (2)$$

где κ_1 , κ_2 и τ — изменения кривизны и кручения. Для замкнутой трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием равномерно распределенного по поверхности нормального внешнего давления q имеем:

$$T_1^0 = -\frac{qR}{2}, \quad T_2^0 = -\frac{qR}{2}, \quad T^0 = 0.$$

Тогда, учитывая разложения для изменений кривизны и кручения, согласно (2) получим:

$$Z^* = -\frac{qR}{2}(\Delta + 2)w.$$

Наличие слагаемого $-qRw$ означает, что рассматривается не локальная потеря устойчивости, а потеря устойчивости замкнутой сферической оболочки.

Уравнение устойчивости (1) сферической оболочки примет вид

$$\left[c^2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta \right] (\Delta + 2)w + \frac{qR}{2Eh} (1 - h^* \Delta)(\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)w = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) должно удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере. В силу малости параметров оболочки $c^2 \ll 1$, $h^* \ll 1$ и с принятой здесь точностью, следуя работе [5], ограничимся классом решений, являющихся решениями дифференциального уравнения:

$$\Delta w + \lambda w = 0.$$

Нетривиальное ограниченное решение этого уравнения существует только при $\lambda_n = n(n + 1)$. Тогда из уравнения (3) получим

$$\left[c^2(1 - \lambda)^2 + 1 - h^* \lambda + \frac{qR}{2Eh} (1 + h^* \lambda)(1 - \nu - \lambda) \right] (2 - \lambda) = 0.$$

Из условия существования нетривиального решения получим

$$c^2(1-\lambda)^2 + 1 - h^*\lambda + \frac{qR}{2Eh}(1+h^*\lambda)(1-\nu-\lambda) = 0.$$

Для определения критического давления имеем

$$q = \frac{2Eh c^2(\lambda-1)^2 + 1 + h^*\lambda}{R(1+h^*\lambda)(\lambda-1+\nu)}. \quad (4)$$

Минимизируем функцию $q = q(\lambda)$, приравнявая к нулю производную q по λ , с принятой точностью $\left(\frac{h}{R}\right)^2$. Для λ_{\min} имеем

$$\lambda_{\min}^{TI} = 1 - \nu + \frac{1}{c} + \frac{c\nu^2}{2} + (1-\nu)\frac{h^*}{c} + \frac{h^*}{c^2}. \quad (5)$$

Значение $\lambda_{\min}^{TI} \gg 1$, так как величина $\frac{1}{c} \gg 1$. Это означает, что всегда существует большое число n , такое что значение λ_{\min}^{TI} будет близко к λ_n . Подставляя (5) в выражение (4), определим критическое значение q_{kp}^{TI} :

$$q_{kp}^{TI} = \frac{2Eh}{R}(2c - 2\nu c^2 - h^*). \quad (6)$$

При значении $h^* = 0$ выражение критического давления для изотропной сферической оболочки принимает следующее выражение:

$$q_{kp}^I = \frac{2Eh}{R}(2c - 2\nu c^2). \quad (7)$$

Рассмотрим устойчивость замкнутой изотропной сферической оболочки под действием равномерно распределенного по поверхности нормального внешнего давления q , используя классическую теорию. Уравнение устойчивости [6] в этом случае можно записать в виде

$$\frac{D}{hR^2}\Delta^3 w + \frac{qR}{2h}\Delta^2 w + E\Delta w = 0.$$

В этом случае рассматривается локальная потеря устойчивости оболочки. Аналогично решение должно удовлетворять условиям

непрерывности и однозначности на сфере. Для определения критического давления получаем

$$q^{KL} = \frac{2Eh}{R} \left(c^2 \lambda + \frac{1}{\lambda} \right).$$

Минимизируем q^{KL} по λ , тогда $\lambda_{\min}^{KL} = \frac{1}{c}$ и соответствующее давление:

$$q_{kp}^{KL} = \frac{2Eh}{R} 2c. \quad (8)$$

Выражение (6) при этом можно переписать в следующем виде:

$$q_{kp}^{TI} = q_{kp}^{KL} \left(1 - \frac{\nu}{2\sqrt{3(1-\nu)}} \frac{h}{R} - \frac{2\sqrt{3(1-\nu)}}{10(1-\nu^2)} \frac{h}{R} \frac{E}{G'} \right). \quad (9)$$

Из этой формулы для трансверсально-изотропного материала видно, что при некоторых значениях отношений h/R , E/G' величина критического давления, найденная с учетом влияния поперечного сдвига, может существенно отличаться от критического давления, найденного по классической теории. Учет поперечных сдвигов снижает величину критического давления. Условие применимости формулы (9)

$$\frac{h}{R} \frac{E}{G'} \ll 1. \quad (10)$$

В случае невыполнения этого условия уточненная теория является асимптотически противоречивой [3].

В случае выполнения условия (10) будет автоматически выполняться условие $\left(\frac{h}{R}\right)^2 \ll \frac{G'}{E}$, из чего следует, что напряжение в оболочке в момент потери устойчивости

$$\sigma < G',$$

что необходимо для использования двумерной теории оболочек [3].

В табл. 1 показано влияние параметра поперечной жесткости на сдвиг при расчете статической критической нагрузки в сравнении с классической теорией пологих оболочек. Как видно из табл. 1,

Таблица 1. Влияние параметра поперечной жесткости на сдвиг

$q_{kp}^{TI}/q_{kp}^{KL}, h/R = 0.05$	$q_{kp}^{TI}/q_{kp}^{KL}, h/R = 0.01$	E/G'	G'/E
0.91	0.98	5	0.2
0.83	0.97	10	0.1
0.75	0.95	15	0.07
0.66	0.93	20	0.05
0.58	0.92	25	0.04
0.50	0.90	30	0.03
0.18	0.83	50	0.02

теория, учитывающая влияние поперечного сдвига, уточняет классическую теорию для трансверсально-изотропных материалов. Чем больше отношение h/R и меньше отношение G'/E , тем существеннее уточнение. Так же из табл. 1 можно проверить условие (10). Например, для $h/R = 0.05$ можно рассматривать отношение G'/E , величина которого больше 0.05, т. е. $G'/E > 0.2$. Для $h/R = 0.01$, как следует из табл. 1, нужно использовать величины $G'/E > 0.07$. В противном случае будет нарушаться условие (10). С принятой здесь точностью $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ члены большего порядка были отброшены. Это означает, что в случае нарушения условия (10) следующий член асимптотического разложения (9) может иметь большее влияние на величину критического давления, чем оставленные [3].

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Исследуется задача колебаний трансверсально-изотропной замкнутой сферической оболочки. Поверхность изотропии в каждой точке оболочки параллельна срединной поверхности. Нормальная составляющая внешней нагрузки в этом случае $Z = \gamma \frac{h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Для динамических задач [1] и для задач колебаний [3] решение представляется в виде

$$w(\alpha, \beta, t) = W(\alpha, \beta) \sin \omega t.$$

После подстановки значений Z и $w(\alpha, \beta, t)$ в выражение (1) для

$W(\alpha, \beta)$ получим следующее уравнение:

$$[c^2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^*\Delta] (\Delta + 2)W = \omega^2 \frac{R^2\gamma}{Eg} (1 - h^*\Delta)(\Delta + 1 - \nu)W. \quad (11)$$

Аналогично уравнению (3) решение уравнения (11) должно являться решением дифференциального уравнения:

$$\Delta W + \lambda W = 0.$$

Тогда из (11) получим выражение для частот собственных колебаний трансверсально изотропной сферической оболочки

$$\omega_{TI}^2 = \frac{gE}{\gamma R^2} (\lambda - 2) \frac{c^2(\lambda - 1)^2 + 1 + h^*\lambda}{(1 + h^*\lambda)(\lambda - 1 + \nu)}. \quad (12)$$

Полагая в выражении (12) $h^* = 0$, получим выражение для частот колебаний изотропной сферической оболочки:

$$\omega_I^2 = \frac{gE}{\gamma R^2} (\lambda - 2) \frac{c^2(\lambda - 1)^2 + 1}{(\lambda - 1 + \nu)}. \quad (13)$$

Рассмотрим колебания пологой сферической оболочки, используя классическую теорию [6]. В этом случае уравнение движения можно записать:

$$\frac{D}{hR^4} \Delta^3 w + \Delta \left(\frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{E}{R^2} \Delta w = 0, \quad (14)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки. Решая уравнение (14) так же, как в случае уточненной теории, для частот собственных колебаний получим следующее выражение:

$$\omega_{KL}^2 = \frac{gE}{\gamma R^2} (c^2 \lambda^2 + 1). \quad (15)$$

Сравнивая выражения (12), (13) и (15), можно получить следующее неравенство при $\lambda > 0$:

$$\omega_{KL} > \omega_I > \omega_{TI}. \quad (16)$$

Это означает, что учет кривизны (выражение (13)) и учет сдвига (выражение (15)) понижают значение частот собственных колебаний.

В табл. 2 представлен расчет частоты собственных колебаний для оболочки $h/R = 0.05$. Видно, что учет влияния параметра поперечной жесткости на сдвиг сказывается при больших λ . Чем больше λ и больше отношение G'/E , тем существеннее поправка.

Таблица 2. Сравнение частот собственных колебаний для оболочки $h/R = 0.05$

λ	$\omega_{TI}^2, \frac{G'}{E} = 0.1$	$\omega_{TI}^2, \frac{G'}{E} = 0.04$	$\omega_{TI}^2, \frac{G'}{E} = 0.02$	ω_I^2	ω_{KL}^2
0	2.8571	2.8571	2.8571	2.8571	1
2	0	0	0	0	1.0011
6	0.7603	0.7603	0.7603	0.7603	1.0107
12	0.9168	0.9168	0.9168	0.9168	1.0428
20	1.0328	1.0328	1.0328	1.0328	1.1190
30	1.1946	1.1947	1.1947	1.1948	1.2678
42	1.4525	1.4528	1.4529	1.4530	1.5250
56	1.8542	1.8550	1.8553	1.8556	1.9333
72	2.4518	2.4536	2.4541	2.4547	2.5428
90	3.3028	3.3062	3.3074	3.3085	3.4107
110	4.4715	4.4778	4.4799	4.4820	4.6011

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Для определения формы потери устойчивости будем искать решение уравнения (11) в виде

$$W(\alpha, \beta) = P(\alpha) \cos k\beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

После подстановки выражения для $W(\alpha, \beta)$ в уравнение (11) получим

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{k^2}{1-x^2} \right) P = 0, \quad x = \cos \alpha, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Решения этого уравнения подробно изучены в работе [7]. Нетривиальное ограниченное решение этого уравнения существует только

при собственных значениях

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

которым соответствуют собственные функции

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где P_n — полином Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Полная система решений уравнения (11) представлена в табл. 3, где $P_{n,\alpha}^0 = P_n^0(\cos \alpha)$. Полиномы Лежандра $P_{n,\alpha}$ в интервале изменения $0 < \alpha < \pi$ имеют n нулей. Собственные функции Лежандра $P_{n,\alpha}^k$ имеют $n - k$ нулей. Функции $\sin n\beta$ и $\cos n\beta$ обращаются в нуль на меридианах. Функции $P_{n,\alpha}^k$ обращаются в нуль на $n - k$ широтах. Таким образом, этими меридианами и широтами оболочка разбивается на участки, на которых W_n не обращается в нуль. Это означает, что параметр λ_n определяет вид формы колебаний оболочки. Чем больше параметр λ_n , тем меньше размеры полуволн. Любая форма потери устойчивости может быть выражена через эту систему. Таким образом, из выполненного рассмотрения следует, что для трансверсально-изотропной сферической оболочки под воздействием нормального динамического давления не возникают новые формы потери устойчивости. Аналогично учет поперечного сдвига согласно теории Тимошенко–Рейсснера, в этом случае существенных поправок к изменению формы потери динамической устойчивости не дает.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается устойчивость трансверсально-изотропной сферической оболочки под действием нормального давления в неклассической постановке. Приводится вывод разрешающего уравнения уточненной теории, основанной на гипотезах С.А. Амбарцумяна. Определяется критическое давление для случаев уточненной теории и классической постановки. Сравнение значений

Таблица 3. Полная система решений уравнения (11)

k	$W_n(\alpha, \beta)$	Первые члены ряда
0	$W_0(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^0$	$1, \cos \alpha, 0.5(3 \cos^2 \alpha - 1), \dots$
1	$W_{-1}(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^1 \sin \beta$	$0, \sin \alpha \sin \beta, 3 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta, \dots$
	$W_1(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^1 \cos \beta$	$0, \sin \alpha \cos \beta, 3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta, \dots$
2	$W_{-2}(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^2 \sin 2\beta$	$0, 0, 3 \sin^2 \alpha \sin 2\beta, \dots$
	$W_2(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^2 \cos 2\beta$	$0, 0, 3 \sin^2 \alpha \cos 2\beta, \dots$
...
n	$W_{-n}(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^n \sin n\beta$...
	$W_n(\alpha, \beta) = P_{n,\alpha}^n \cos n\beta$...

критических давлений показало, что учет влияния поперечного сдвига уточняет классическую теорию. Так же было выведено условие применимости уточненной теории, в случае невыполнения которого теория будет асимптотически противоречивой.

Для случая динамического давления было показано, что применение уточненной теории к решению задачи не приводит к возникновению принципиально новых форм потери устойчивости. Получена полная система решений, с помощью которой можно описать любую форму потери устойчивости. Определены частоты собственных колебаний для уточненной и классической теорий. Показано, что учет кривизны и учет сдвига понижают значение частот собственных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН Россия. Т. LXIV. 1949. С. 779–781.
2. Бауэр С. М., Клец О. Г., Морозов Н. Ф. О поведении трансверсально-изотропных цилиндрических оболочек при динамическом приложении радиального давления // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. Вып. 4. С. 19–25.
3. Товстик П. Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестник Санкт-Петербургского Государственного Университета. Сер. 1. 2007. Вып. 3.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
5. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // Прикл. мат. и мех. Сер. 8. № 2. 1944.
6. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматлит, 1963. 880 с.

7. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 399 с.

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АСБЕСТОВЫХ НАНОТРУБОК

КАШТАНОВА С. В.

С помощью сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) исследованы механические свойства отдельных нанотрубок из хризотилового асбеста с внешним диаметром около 30 нм и внутренним — около 5 нм. Определены жесткости — отношения приложенной силы к величине прогибов мостиков и консолей, сформированных нанотрубками, перекрывающими отверстия в пористой подложке. Представлены результаты экспериментальных исследований как полых асбестовых нанотрубок, так и содержащих различные наполнители: воду, ртуть и теллур.

Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования в рамках континуальной теории упругости. Для оценки модуля упругости нанотрубок по величине прогиба использовалась классическая теория Бернулли–Кирхгофа–Лява. Однако классическая теория хорошо работает для балок сплошного поперечного сечения из однородного материала и может давать существенные погрешности для многослойных балок. В связи с этим проводилось также определение прогибов нанотрубок по теории Тимошенко–Рейсснера, учитывающей поперечные сдвиги. Такой подход позволяет объяснить существенное влияние наполнителя на величину жесткости нанотрубок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача определения механических свойств нанобъектов является сложной как с точки зрения организации эксперимента, так и с позиций интерпретации результатов измерений. Настоящая работа посвящена методике экспериментального определения жесткости с помощью сканирующей зондовой микроскопии и последующему моделированию поведения отдельных нанотрубок со сложной внутренней структурой, а именно нанотрубок из природного хризотилового асбеста, как полых, так и содержащих различные

Доклад на семинаре 10 ноября 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-01-00623а

© Каштанова С. В., 2010

наполнители.

С целью построения адекватной модели поведения изучаемых нанотрубок рассмотрены различные подходы континуальной теории упругости. Показано, что простейшие классические модели изотропных балок не способны объяснить экспериментально наблюдаемые эффекты. В то же время неклассические модели теории трансверсально-изотропных объектов, позволяющие учесть слоистое строение асбестовых нанотрубок, обуславливающее анизотропию материала, а также возможный сдвиг слоев, вполне могут быть использованы для описания механических свойств нанообъектов.

Первая часть работы содержит краткий обзор экспериментальных результатов и описание методики экспериментального определения жесткости нанотрубок, разработанной в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН в работах А.В. Анкудинова и Ю.А. Кумзерова [1]-[3]. Во второй части приведены теоретические результаты моделирования изучаемых объектов при помощи различных подходов континуальной теории упругости.

2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ПОДХОДА

Экспериментальные исследования механических свойств отдельных нанотрубок из природного хризотилового асбеста (с внешним диаметром около 30 нм и с внутренним около 5 нм) проводились следующим образом (см. [2, 3]): на пористую лавсановую мембрану “накидывалась” нанотрубка, которая при частичном перекрытии поры в мембране образовывала консоль (кантилевер) или мостик, что позволяло провести измерения ее жесткости при помощи сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ), как отношение приложенной силы к прогибу нанотрубки.

В ходе выполнения экспериментов выяснилось, что механические характеристики (например, модуль Юнга) асбестовых нанотрубок имеют очень сильный разброс значений даже для трубок одинакового диаметра. Поэтому для повторяемости эксперимента использовался метод “перетаскивания” одной и той же нанотрубки по мембране с последующим проведением на ней различных по геометрической конфигурации экспериментов. На вклейке (рис. 5)

приведена последовательность кадров, иллюстрирующая пример такого перетаскивания.

Необходимо заметить, что при перетаскивании нанотрубка подвергается сильным деформациям, и довольно часто процесс перетаскивания приводит к отламыванию нанотрубки (см. последний кадр на рис. 5 на вклейке)). Тем не менее удалось провести несколько удачных экспериментов, которые показали, что жесткость нанотрубки, как правило, сильнее зависит от ее длины, чем предсказывает классическая теория упругости. Так, например, увеличение длины участка трубки (нанокантилевера), нависающего над порой на 10%, приводит к уменьшению минимальной жесткости почти на 50% вместо ожидаемых 25%.

Кроме экспериментов с пустыми нанотрубками удалось также осуществить измерения жесткости нанотрубок, заполненных различными материалами (наполнителями) — водой, ртутью, теллуrom и проч. [1]. При этом выяснилось, что, например, нанотрубка, наполненная водой, оказывается мягче, чем сухая трубка. Это объясняется тем, что вода является гидрофильным наполнителем, т.е. она хорошо смачивает асбест и сжимает внутренний диаметр трубки. С другой стороны, нанотрубка, заполненная ртутью, становится жестче за счет того, что ртуть не смачивает асбест и тем самым распирает саму нанотрубку.

Представленный в работе теоретический анализ является попыткой описать эти экспериментально обнаруженные эффекты.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Для начала рассмотрим классическую задачу определения соотношения между прогибом и модулем Юнга для консоли по теории Бернулли–Кирхгофа–Лява (БКЛ):

$$\text{уравнение равновесия: } EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = F(l - x);$$

$$\text{граничные условия: } w(0) = 0, w'(0) = 0;$$

$$\text{решение в точке, где приложена сила: } w(x_0) = \frac{4Fx_0^3}{3E\pi R^4},$$

и для свободно опертой балки (наномостика):

уравнения равновесия:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = 0, \quad EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = Q, \quad EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M, \quad EJ \frac{dw}{dx} = \theta;$$

граничные условия: $w(0) = w(l) = 0, w'(0) = w'(l) = 0$;

решение в точке, где приложена сила: $w(x_0) = \frac{4Fx_0^2(l-x_0)^2}{3EJ\pi R^4}$.

Здесь E — модуль Юнга, $J = \frac{\pi R^4}{4}$ — момент инерции для круглого сечения, F — приложенная сила, R — радиус нанотрубки, l — ее длина.

К сожалению, это простое решение не позволяет объяснить экспериментальные результаты. Дело в том, что в рассматриваемой нанотрубке наблюдается сильная анизотропия механических свойств в радиальном направлении — внутренняя полость трубки заполнена наполнителем, а сама трубка состоит из асбеста. А как отмечается в работе [4], классическая теория БКЛ, которая хорошо работает для балок сплошного поперечного сечения из однородного материала, может давать существенные погрешности для многослойных балок. Поэтому для аналитической оценки прогибов нанотрубок как балок использовалась теория Тимошенко–Рейсснера (ТР). По этой теории прогиб для трансверсально-изотропной консоли выражается как $w(x_0) = \frac{Fx_0^3}{3EJ} \left(1 + \frac{5\mu^2}{2g}\right)$, $\mu^2 \ll g \ll 1$, а для балки — $w(x_0) = \frac{Fx_0^2(l-x_0)^2}{3EJ} \left(1 + \frac{5\mu^2}{2g}\right)$. Здесь μ — безразмерный малый параметр (см. [5]), например, для консоли $\mu^2 = \frac{J}{S \cdot a^2} = \frac{i^2}{a^2}$, где a — расстояние от точки опоры до точки прижима, J — момент инерции поперечного сечения стержня, а S — его площадь, $i = \sqrt{\frac{J}{S}}$ — радиус инерции поперечного сечения.

Известно, что для тонких тел из изотропного материала теории типа БКЛ являются первым асимптотическим приближением трехмерной теории при $\mu \rightarrow 0$ [5]. В изотропном случае теория Тимошенко–Рейсснера, учитывающая сдвиг, дает результаты близкие к результатам классической теории. Но, как показано в работе [5], для тел из трансверсально-изотропного материала “при умеренно малой поперечной жесткости на сдвиг” теория ТР дает следующее асимптотическое приближение трехмерной теории, суще-

ственно уточняя теорию БКЛ. Тела “с умеренно малой поперечной жесткостью на сдвиг” — это тонкие тела, для которых малый параметр $g = \frac{G'}{E}$ (где E — модуль Юнга в тангенциальном направлении, G' — модуль упругости при поперечном сдвиге) удовлетворяет соотношению $\mu^2 \ll g \ll 1$. Заметим, что в рассматриваемой задаче, несмотря на то, что каждый слой не меняет своей структуры, модуль сдвига в поперечном сечении G' может существенно меняться в зависимости от наполнителя.

На вклейке (рис. 6) приведен пример моделирования изгиба нанотрубки из хризотилового асбеста, заполненной теллуром, опирающейся двумя концами на лавсановую мембрану (образуя “мостик” над порой в ней). Прогиб нанотрубки измерялся в серии экспериментов, в каждом из которых различные поперечные нагрузки прикладывались в различных точках наномостика. При теоретических расчетах значение модуля Юнга определялось по теории БКЛ из эксперимента, проведенного с “сухой” (незаполненной) нанотрубкой из той же партии.

Диаметр нанотрубки составляет 32 ± 2 нм, длина провисающей части около 490 нм, модуль Юнга $E = 7.72 \cdot 10^{10}$ Н/М², а рассчитанное значение модуля сдвига $G' = 2.3 \cdot 10^7$ Н/М². На рис. 1 представлены результаты экспериментального измерения прогиба и результаты моделирования по теориям Бернулли–Кирхгофа–Лява (БКЛ) и Тимошенко–Рейсснера (ТР).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, как и ожидалось, теория Тимошенко–Рейсснера позволяет получить гораздо более точное описание поведения асбестовых нанотрубок, чем классическая теория Бернулли–Кирхгофа–Лява. То есть с точки зрения моделирования механических свойств трансверсально-изотропных нанообъектов крайне важным оказывается учет их слоистого строения, обуславливающего анизотропию материала, а также возможного сдвига слоев.

При этом заметим, что рис. 1 демонстрирует плохое совпадение результатов моделирования с экспериментальными данными на краях и в самом центре наномостика, что объясняется некор-

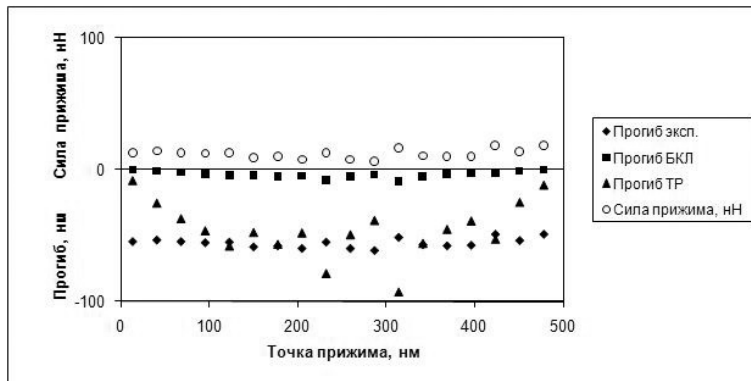


Рис. 1. Результаты экспериментального измерения прогиба и теоретического моделирования для наномостика.

ректностью использования граничных условий для жесткой мембраны, которая на самом деле не является таковой. Тем не менее предлагаемый подход, очевидно, дает очень хороший качественный результат, позволяющий говорить о правомерности использования методов континуальной теории упругости в рассматриваемой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анкудинов А. В., Бауэр С. М., Кашианова С. В., Морозов Н. Ф., Няшав И. А. Исследование механической жесткости уединенных асбестовых нанотрубок // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2009. С. 7–9.
2. Кумзеров Ю. А., Парфеньева Л. С., Смирнов И. А., Кривчиков А. И., Звягина Г. А., Филь В. Д., Мисиорек Х., Муза Я., Ежовский А. Тепловые и акустические свойства хризотилового асбеста // ФТТ, 2005. Т. 47. С. 357.
3. Белотоцкий П. Е., Кумзеров Ю. А., Фокин А. В. Генерация второй оптической гармоники в нанопроволоках сегнетоэлектрических материалов // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 87. С. 465.
4. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982.
5. Товстик П. Е. Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. С.-Петерб. ун-та, Сер. 1. 2007. Т. 3. С. 49.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

Л.А. АЛЕКСАНДРОВА, Е.В. ПЕСТЕРЕВ

В рамках двумерной стационарной фильтрации в однородном и изотропном грунте несжимаемой жидкости по закону Дарси исследуются некоторые фильтрационные течения под гидротехническим сооружением с участками постоянной скорости обтекания и под шпунтом Жуковского через орошаемый почвенный слой с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом. Решение соответствующих многопараметрических смешанных краевых задач теории аналитических функций осуществляется с помощью метода конформных отображений областей специального вида. Приводятся результаты численных расчетов и дается подробный гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров моделей на картину течений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изучались две математические модели течений под заглубленной плотиной и под шпунтом Жуковского. В первой задаче рассматривалось моделирование плавного подземного контура гидротехнического сооружения, при этом определялось очертание подстилающего водопроницаемое основание криволинейного водоупора, характеризуемого постоянством скорости обтекания. В настоящей статье исследуется случай, когда водоупор с подобными свойствами имеет более сложную конфигурацию и состоит из горизонтального и двух криволинейных участков. Следует отметить, что введение подобных криволинейных участков позволяет избежать рассмотрения нереальных полубесконечных и бесконечных областей, что особенно важно при разработке приближенных и численных методов (конечных элементов, граничных интеграль-

Доклад на семинаре 17 ноября 2009 г.

© Л.А. Александрова, Е.В. Пестерев, 2010

ных уравнений и т. п.). Во второй задаче работы [1] исследовалось течение при обтекании шпунта Жуковского через орошаемый почвенный слой в нижележащий хорошо проницаемый горизонтальный слой, не содержащий напорных грунтовых вод (фильтрация без напора, или так называемая свободная фильтрация), левая полубесконечная часть кровли которого моделировалась непроницаемым включением (твердая порода, водоупор). В настоящей статье рассматривается наиболее часто встречающийся в теории фильтрации и мелиорации случай, когда нижележащий сильнопроницаемый пласт содержит напорные грунтовые воды (так называемая фильтрация с подпором).

Для изучения этих моделей формулируются и с помощью конформных отображений областей специального вида решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. Дается конструктивное решение задач, получены точные аналитические представления для характерных размеров схем течения. Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния основных физических параметров моделей на размеры областей движения. Отмечаются предельные случаи, связанные с отсутствием горизонтального участка водоупора в первой схеме и подпора в нижележащем сильнопроницаемом слое во второй, исследованные ранее в работе [1].

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДЗЕМНОГО КОНТУРА ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ С УЧАСТКАМИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ОБТЕКАНИЯ

2.1. Постановка задачи и ее решение

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация (по закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$) несжимаемой жидкости в однородном и изотропном грунте под водонепроницаемым подземным контуром заглубленной плотины $ABCC_1B_1A_1$ (рис. 1).

Область течения ограничена снизу водоупором G_1G , состоящим из двух криволинейных участков G_1F_1 и GF , а также, в отличие от

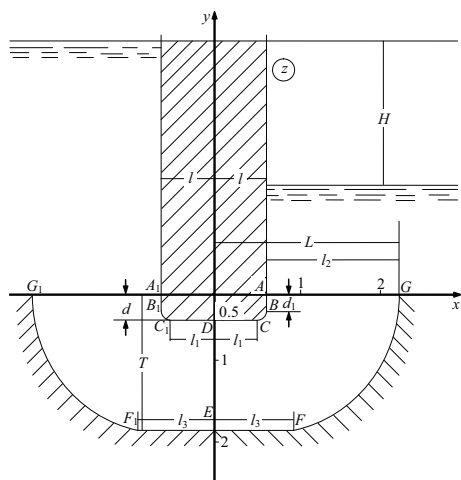


Рис. 1. Подземный контур заглубленной прямоугольной плотины, рассчитанный при $H = 2$, $v_0 = 1$, $T = 1.934$, $Q = 1.14$, $\Delta l = 0.308$ и $\Delta d = 0.295$.

рассмотренного ранее случая в работе [1], горизонтального участка F_1EF ; на них, как и на участках подземного контура гидросооружения BC и B_1C_1 , величина скорости обтекания постоянна.

Если ввести комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$ (рис. 2) и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к κH и H , где H — действующий на сооружение напор, то задача состоит в определении положения кривых BC , B_1C_1 , G_1F_1 и GF при краевых условиях

$$\begin{aligned}
 A_1G_1 : y = 0, \varphi = -0.5H; & \quad A_1B_1 : x = -l, \psi = Q; \\
 C_1DC : y = -d, \psi = Q; & \quad AB : x = l, \psi = Q; \\
 AG : y = 0, \varphi = 0.5H; & \quad G_1F_1, FG : \psi = 0; \\
 B_1C_1, BC : |w| = v_0; & \quad G_1F_1, FG : |w| = u_0; \\
 F_1EF : y = -T, \psi = 0 &
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

таким образом, чтобы скорость фильтрации вдоль криволинейных участков подземного контура плотины BC и B_1C_1 , а также горизонтального FEF_1 и криволинейных участков G_1F_1 и GF водоупо-

ра имела постоянные значения v_0 (заданное) и u_0 (искомое) соответственно ($0 \leq u_0 < v_0$).

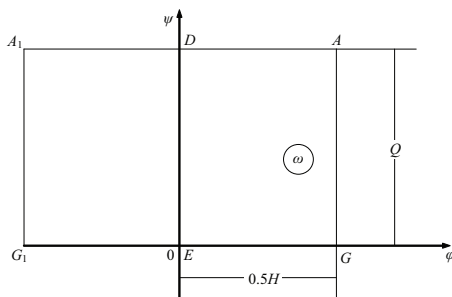


Рис. 2. Область комплексного потенциала течения ω .

Обратимся к области комплексной скорости w , которая изображена на рис. 3, *а*. то область, содержащая прямые углы и разрезы, принадлежит классу многоугольников в полярных сетках и отличается от таковой для случая, рассмотренного в работе [1], лишь горизонтальным разрезом F_1EF вдоль вещественной полуоси плоскости w , что позволяет воспользоваться принципом симметрии Римана–Шварца, который приводит к существенному сокращению неизвестных констант конформного отображения.

Поэтому, так же как в работе [1], принимая в качестве канонической области прямоугольник (рис. 3, *б*) и учитывая полную симметрию на плоскостях z , ω и w , ограничимся рассмотрением области движения $ABCDEF$ и соответствующих ей одноименных областей на плоскостях ω и w . Тогда, принимая во внимание совпадение области комплексной скорости с таковой для случая из работы [1], имеем

$$w(\tau) = v_0 \exp(\tau - 0.5)\pi i, \quad (2)$$

откуда определяется физический параметр $u_0 = v_0 \exp(-0.5\pi\rho)$.

Конформное отображение прямоугольника вспомогательной переменной τ на область комплексного потенциала ω дается форму-

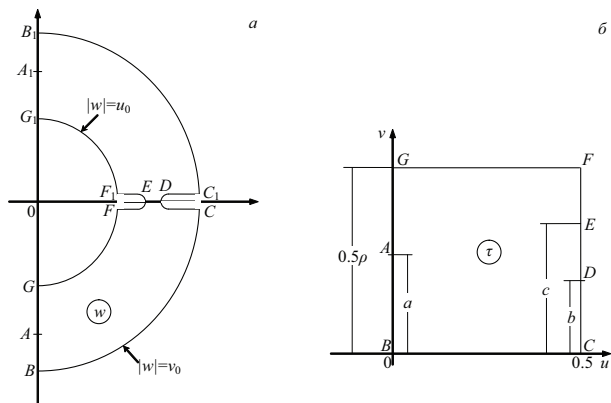


Рис. 3. Области комплексной скорости w (а) и вспомогательной параметрической переменной τ (б).

лой

$$\omega = \frac{0.5}{K(k)} F \left(\arcsin \frac{\lambda}{n} \sqrt{\frac{1 - n^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)}{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)}}, m \right). \quad (3)$$

В данной формуле $F(\varphi, m)$ — эллиптический интеграл первого рода при модуле $m = kn/\lambda [(1 - k'^2\alpha^2\beta^2)/(1 - k'^2\alpha^2\gamma^2)]^{1/2}$, $\lambda = (1 - k'^2\beta^2)^{1/2}$, $n = (1 - k'^2\gamma^2)^{1/2}$, $\alpha = \operatorname{sn}(2Ka, k')$, $\beta = \operatorname{sn}(2Kb, k')$, $\gamma = \operatorname{sn}(2Kc, k')$. При этом должно выполняться условие

$$\rho(m) = \frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{2Q}{H}, \quad (4)$$

связывающее физические параметры Q и H , которое служит для определения модуля k .

Принимая во внимание соотношения (2), (3) и $w = d\omega/dz$, и

поступая аналогично [1], придем к зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= -\frac{Mf(\tau)}{\Delta(\tau)}; \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{Mf(\tau) \exp((0.5 - \tau)\pi i)}{\nu_0 \Delta(\tau)}; \\ f(\tau) &= \operatorname{sn}(2K\tau, k) \operatorname{cn}(2K\tau, k) \operatorname{dn}(2K\tau, k); \\ \Delta(\tau) &= \left([1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)] [1 - n^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\alpha^2 + (1 - \alpha^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)] \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где M — масштабная постоянная моделирования ($M > 0$). Запись представлений (5) для разных участков границы области τ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к следующим выражениям для основных геометрических и фильтрационных характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{M}{v_0} \int_0^{0.5} X_{BC} dt &= \Delta l; \quad \frac{M}{v_0} \int_0^{0.5} Y_{BC} dt = \Delta d; \quad \frac{M}{u_0} \int_0^{0.5} Y_{FG} dt = T; \\ M \left(\int_0^{0.5\rho} \Phi_{EF} dt + \int_0^{0.5} \Phi_{FG} dt \right) &= 0.5H, \end{aligned} \quad (6)$$

для координат точек подземного контура гидросооружения BC :

$$\begin{aligned} x_{BC}(t) &= l - \frac{M}{v_0} \int_0^t X_{BC} dt; \\ y_{BC}(t) &= -d_1 - \frac{M}{v_0} \int_0^t Y_{BC} dt; \quad 0 \leq t \leq 0.5, \end{aligned} \quad (7)$$

для координат точек криволинейной части водоупора FG :

$$x_{FG}(t) = L - \frac{M}{u_0} \int_0^t X_{FG} dt; \tag{8}$$

$$y_{GF}(t) = -\frac{M}{u_0} \int_0^t Y_{FG} dt; \quad 0 \leq t \leq 0.5.$$

Здесь $\Delta l = l - l_1$, $\Delta d = d - d_1$, X_{BC} , Y_{BC} , Φ_{EF} , Φ_{FG} , X_{FG} , Y_{FG} — выражения правых частей (5) на соответствующих участках контура плоскости τ .

Полагая в уравнениях (6) и (7) $t = 0.5$, находим искомые размеры подземного контура плотины и криволинейного водоупора:

$$l_1 = x_{BC}(0.5); \quad d_1 = y_{BC}(0.5);$$

$$l_2 = \frac{M}{v_0} \int_0^{0.5\rho} \Phi_{AG} \exp(\pi t) dt; \quad l_3 = L - x_{FG}(0.5). \tag{9}$$

В прямой физической постановке параметры конформного отображения α , β , γ , модуль k и масштабная постоянная моделирования M являются искомыми и для их определения служат величины Δl , Δd , H и T , выражаемые уравнениями (6). Численным путем определяется монотонность функций, входящих в левые части этих уравнений, и таким образом устанавливается ее однозначная разрешимость относительно искомого констант. При этом постоянная моделирования M предварительно исключается из всех уравнений посредством четвертого выражения системы (6), фиксирующего величину $H = 1$.

Предельные случаи. Остановимся прежде всего на случае, когда точки F_1 , E и F в плоскости течения сливаются, т. е. когда горизонтальный непроницаемый участок отсутствует и на всем своем протяжении водоупор оказывается криволинейным [1]. В этом случае в плоскости τ параметр $\gamma = 0.5\rho$, и решение вытекает из формул (4)–(9), если в них положить $\gamma = 1$.

Другой предельный случай получается, когда водоупор на всем своем протяжении горизонтальный [2, 3]. Тогда в плоскости движения z точки G и F , а также G_1 и F_1 сливаются на бесконечности, а прямоугольник плоскости τ вырождается в полуполосу. Решение для этого случая вытекает из формул (4)–(9), если в них положить модуль $k = 0$, при этом выражения для H и T удастся проинтегрировать в явном виде:

$$H = \frac{2MK(k)}{\pi\sqrt{(1-\alpha^2\beta^2)(1-\gamma^2)}};$$

$$T = \frac{M}{v_0\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}}; \quad (10)$$

$$k = \sqrt{\frac{(1-\alpha^2\beta^2)(1-\gamma^2)}{(1-\alpha^2\gamma^2)(1-\beta^2)}}.$$

Последние формулы совпадают с известными в работе ([3], формулы (7.17) и (7.18)) с точностью до обозначений.

2.2. Анализ численных результатов

Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров v_0 , H , Q , T , Δl и Δd на размеры l_1 , d_1 (а следовательно, l и d), l_2 и l_3 приведены в табл. 1–3. В каждом из блоков таблиц один из указанных параметров варьируется в допустимом диапазоне, а значения остальных фиксируются: $v_0 = 1$, $H = 2$, $Q = 1.14$, $T = 1.934$, $\Delta l = 0.308$ и $\Delta d = 0.295$. На рис. 4, I представлены зависимости d_1 и l_1 от параметра T , на рис. 4, II — зависимости l_2 и l_3 от параметра Q .

Анализ данных табл. 1–3 и рис. 4, I, II позволяет сделать следующие выводы.

Уменьшение скорости обтекания и увеличение действующего на сооружение напора приводят к росту всех размеров плотины, а также величины горизонтального участка водоупора. Из табл. 1 следует, что изменение скорости в 1.4 раза увеличивает ширину l_1 и

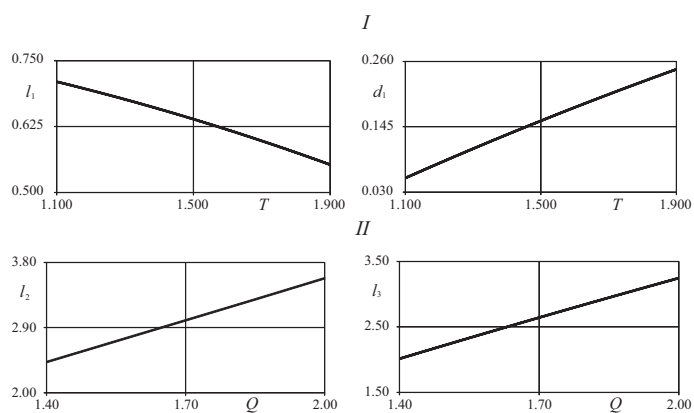


Рис. 4. Зависимости величин l_1, d_1 от T (I), l_2, l_3 от Q (II).

Таблица 1. Результаты расчетов величин l_1, d_1, l_2 и l_3 при варьировании значений v и H_0

v	l_1	d_1	l_2	l_3	H_0	l_1	d_1	l_2	l_3
0.85	0.838	0.375	2.038	1.835	0.12	0.085	0.076	2.646	0.900
0.10	0.397	0.161	1.640	1.051	0.16	0.273	0.186	2.228	1.160
0.12	0.359	0.118	1.026	1.018	0.18	0.395	0.230	2.072	1.288

Таблица 2. Результаты расчетов величин l_1, d_1, l_2 и l_3 при варьировании значений Q и T

Q	l_1	d_1	l_2	l_3	T	l_1	d_1	l_2	l_3
1.4	0.571	0.226	2.426	2.014	1.1	0.710	0.055	1.265	1.543
1.8	0.597	0.200	3.192	2.846	1.7	0.598	0.202	1.795	1.626
2.0	0.601	0.195	3.579	3.245	1.9	0.553	0.246	0.020	1.668

Таблица 3. Результаты расчетов величин l_1, d_1, l_2 и l_3 при варьировании значений Δl и Δd

Δl	l_1	d_1	l_2	l_3	Δd	l_1	d_1	l_2	l_3
0.30	0.298	0.290	2.233	1.509	0.25	0.340	0.588	2.135	1.519
0.44	0.088	0.676	2.174	1.331	0.35	0.721	0.066	1.949	1.600
0.50	0.000	0.735	2.173	1.254	0.40	0.757	0.000	1.928	1.618

толщину d_1 соответственно на 133 и 218%. При этом наиболее существенное влияние на ширину гидросооружения и ее глубину оказывает действующий напор: из 6–10-ого столбцов табл.1 видно, что при возрастании параметра H на 50% величины l_1 и d_1 изменяются в 4.6 и 3 раза соответственно.

Из данных 1–5-ого столбцов табл. 2 следует, что влияние фильтрационного расхода почти не сказывается на размерах плотины. В то же время заметна тенденция к росту ширины сооружения l_1 при увеличении фильтрационного расхода Q и уменьшении мощности пласта T (столбцы 6–10 табл. 2), а также к росту глубины d_1 , напротив, при уменьшении параметра Q и увеличении T (см. рис. 4, I). Обращает на себя внимание, что наряду с параметром H мощность пласта также сильно влияет на глубину d_1 , изменяя последнюю в 4.6 раза.

Данные табл. 3 отражают следующую закономерность: увеличению разности Δl (Δd) сопутствуют убывание (рост) ширины плотины l и рост (убывание) ее глубины d . Так, с изменением Δl на 47% ширина l_1 уменьшается в 3.4 раза, глубина d_1 увеличивается в 2.3 раза, а при изменении Δd на 40% ширина l_1 увеличивается в те же 2.3 раза, в то время как глубина d_1 убывает уже в 8.8 раза. Четвертая строка табл.3 соответствует случаям обтекания шпунта (зуба), когда $l_1 = 0$, $l = \Delta l$, и флютбета с горизонтальной вставкой, где $d_1 = 0$, $d = \Delta d$ (см. [3]).

Особый интерес представляют характер выхода воды в нижнем бьефе l_2 и размеры горизонтального участка водоупора l_3 . Согласно данным табл. 2 и рис. 4, II, с ростом параметров Q и T ширина l_2 увеличивается, а с ростом v_0 , H , Δd и Δl – уменьшается. При этом значения l_2 и l_3 могут быть весьма значительными: при $Q = 2$ имеем $l_2/l = 3.9$, $l_3/l = 3.6$, $l_2/d = 7.3$, $l_3/d = 6.6$.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ШПУНТА ЖУКОВСКОГО ЧЕРЕЗ ОРОШАЕМЫЙ ПОЧВЕННЫЙ СЛОЙ С НИЖЕЛЕЖАЩИМ СИЛЬНОПРОНИЦАЕМОМ НАПОРНЫМ ГОРИЗОНТОМ

3.1. Постановка задачи и ее решение

Рассматриваемый случай схематично представлен на рис. 5.

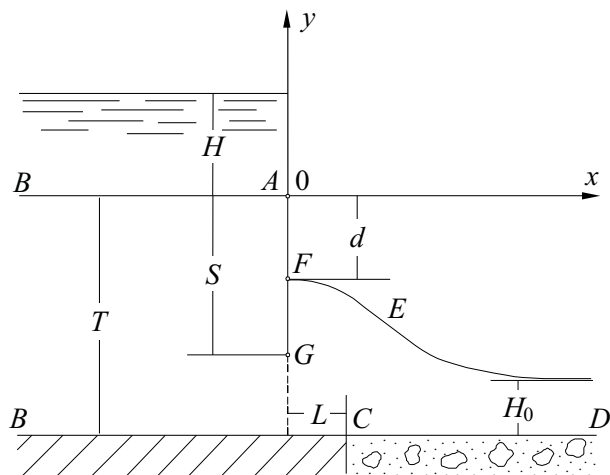


Рис. 5. Схема течения жидкости под шпунтом.

Исследуется течение жидкости под шпунтом Жуковского через орошаемый (с равномерной интенсивностью инфильтрации ε , $0 < \varepsilon < 1$) почвенный слой мощности T в нижележащий хорошо проницаемый водоносный горизонт, напор в котором имеет постоянное значение H_0 , при этом левая полубесконечная часть кровли пласта BC моделируется непроницаемым включением (водоупором, твердой породой и т. п.). Шпунт AGF обтекается грунтовой водой под влиянием разности напоров в верхнем бьефе и нижнем сильнопроницаемом слое грунта, за шпунтом вода поднимается на некоторую высоту GF и образует свободную поверхность DF . Од-

нако в отличие от работы [1] здесь коренным образом меняется характер течения: наличие подпора со стороны вод нижележащего горизонта вносит в фильтрационную схему дополнительную граничную точку — точку перегиба E свободной поверхности DF . Это обстоятельство значительно осложняет решение соответствующей краевой задачи, увеличивающей общее число неизвестных параметров конформного отображения. В рассматриваемом случае задача состоит в определении положения кривой депрессии DF при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} AB : y = 0, \varphi = -H; \quad BC : y = -T, \psi = 0; \\ DEF : \varphi = -y + H_0 - T, \psi = \varepsilon x + Q; \\ AGF : x = 0, \psi = Q; \quad CD : y = -T, \varphi = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где Q — фильтрационный расход. Нахождение высоты поднятия воды за шпунтом GF , т. е. величины d , а также расположение абсциссы точки C , т. е. величины L , представляют известный практический интерес. Действующий напор H , расход Q , глубина почвенного слоя T , длина шпунта S , а также скорость обтекания на его конце V_G ($0 < V_G < \varepsilon$) наряду с напором H_0 и ε считаются заданными.

Область комплексной скорости w , которая соответствует краевым условиям (11) и представлена на рис. 6, *a*, имеет прямые углы и круговой разрез и, стало быть, принадлежит классу круговых многоугольников в полярных сетках (см. [4]).

Поэтому вновь принимая в качестве вспомогательной параметрической переменной прямоугольник плоскости τ (рис. 6, *b*) и применяя разработанную Э.Н. Береславским и др. [5]–[8] методику построения отображающих функций для подобных многоугольников, найдем

$$w(\tau) = \sqrt{\varepsilon} i \frac{\vartheta_2(\tau + i\lambda) - \vartheta_2(\tau - i\lambda)}{\vartheta_2(\tau + i\lambda) + \vartheta_2(\tau - i\lambda)}; \quad \lambda = \frac{\operatorname{arth} \sqrt{\varepsilon}}{\pi}, \quad (12)$$

где $\vartheta_2(\tau)$ — вторая тета-функция с параметром $q = \exp(-\pi\rho)$, однозначно связанным с модулем k (см. [9]).

Используя метод П.Я. Полубариновой-Кочиной [3], который основан на применении аналитической теории линейных дифферен-

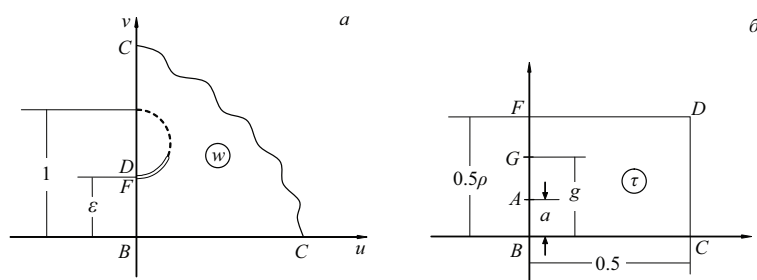


Рис. 6. Области комплексной скорости w (а) и вспомогательной параметрической переменной τ (б).

циальных уравнений В.В. Голубевым [10], и принимая во внимание соотношения $w = d\omega/dz$ и (12), решение краевой задачи (11) получим в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon} i M \frac{\vartheta_2(\tau + i\lambda) - \vartheta_2(\tau - i\lambda)}{\vartheta_1(\tau) \operatorname{dn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}; \\ \frac{dz}{d\tau} &= M \frac{\vartheta_2(\tau + i\lambda) + \vartheta_2(\tau - i\lambda)}{\vartheta_1(\tau) \operatorname{dn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}; \\ \Delta(\tau) &= \sqrt{\chi_1^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + \chi^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\chi_1 = (1 - \chi^2)^{1/2}$, $\chi = \operatorname{sn}(2Ka, \tau)$, a — ордината точки A в плоскости τ .

В рассматриваемом случае неизвестные константы конформного отображения χ (или a), g (ордината точки G в плоскости τ), модуль k и масштабная постоянная моделирования M определяются в результате решения такой системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} w(gi) &= V_G; \quad M \int_a^{0.5} Y_{AG} dt = S; \quad M \sqrt{\varepsilon} \int_0^{0.5} \Phi_{BC} dt = H; \\ \int_0^a \Phi_{AF} dt + k \int_0^{0.5} \Phi_{DF} dt - \int_0^{0.5} \Phi_{BC} dt &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

после чего вычисляются координаты точек свободной поверхности

$x_{DF}(t)$ и $y_{DF}(t)$, $0 \leq t \leq 0.5$. Полагая в этих уравнениях $t = 0.5$, находим исходные размеры:

$$\begin{aligned} d &= T - H_0 - M\sqrt{\varepsilon} \int_0^{0.5} \Phi_{DF} dt; \quad Q = M\sqrt{\varepsilon} \int_0^a \Psi_{AB} dt; \\ L &= M \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^{0.5-\delta} X_{DF} dt - \int_0^{0.5\rho-\delta} X_{CD} dt \right) \right|, \end{aligned} \quad (15)$$

где Y_{AG} , Φ_{BC} , Φ_{AF} в формулах (14) Ψ_{AB} , Φ_{DF} , X_{DF} и X_{CD} в формулах (15) — выражения правых частей (13) на соответствующих участках контура области τ .

3.2. Анализ численных результатов

Выделен небольшой диапазон изменения физических параметров модели.

На рис. 7 изображены кривые депрессии, координаты которых рассчитываются по формулам (15) при базовых значениях: $V_G = 0.35$, $\varepsilon = 0.4$, $T = 7$, $S = 5.8$ и значениях $H = 3$, $H_0 = 1$ (нижняя кривая) и $H = 1$, $H_0 = 3$ (верхняя кривая).

Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε , V_G , T , S , H и H_0 на размеры d и L представлены в табл. 4 и 5, состоящих из двух разделов, соответствующих двум базовым вариантам: для случая $H > H_0$ (строки 2–4 таблиц) и случая $H < H_0$ (строки 5–7 таблиц). На рис. 8 представлены зависимости величин d , L и Q от указанных параметров.

Таблица 4. Результаты расчетов величин d и L_1 при варьировании значений ε , V_G и T

H, H_0	ε	d	L_1	V_G	d	L_1	T	d
$H = 3$	0.2	5.130	88.10	0.05	5.324	5.932	6.9	4.691
и	0.5	4.993	7.686	0.20	5.014	16.84	7.5	5.291
$H_0 = 1$	0.8	3.915	3.299	0.35	4.791	98.59	8.0	5.791
$H = 1$	0.2	3.707	27.94	0.05	3.774	1.893	6.90	3.497
и	0.5	3.695	2.216	0.20	3.706	4.714	7.05	3.647
$H_0 = 3$	0.8	3.374	0.951	0.35	3.597	30.83	7.20	3.797

Анализ данных табл. 4–5 и рис. 8, I, II, III позволяет сделать следующие выводы.

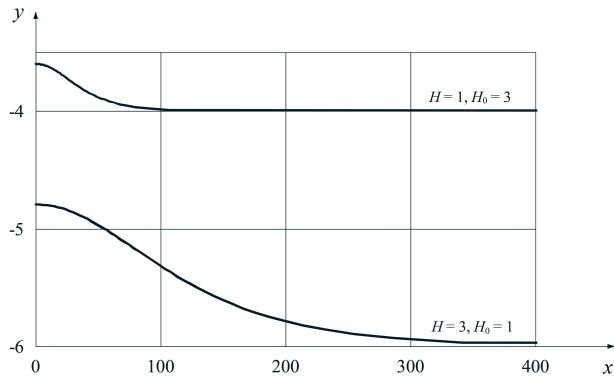


Рис. 7. Фрагмент картины течения в окрестности точки перегиба Е кривой депрессии при $V_G = 0.35$, $\varepsilon = 0.4$, $T = 7$, $S = 5.8$ и $H = 3$, $H_0 = 1$ и $H = 1$, $H_0 = 3$.

Таблица 5. Результаты расчетов величин d и L_1 при варьировании значений S , H и H_0

H, H_0	S	d	L_1	H	d	L_1	H_0	d
$H = 3$	4.8	4.788	99.0	2.0	5.204	64.70	0.5	5.291
и	5.4	4.790	98.7	3.5	4.586	115.4	0.8	4.991
$H_0 = 1$	5.9	4.792	98.6	5.0	3.973	165.5	1.1	4.691
$H = 1$	3.60	3.595	31.0	1.0	3.597	30.8	2.80	3.797
и	3.75	3.596	30.9	2.0	3.169	64.0	2.95	3.647
$H_0 = 3$	3.90	3.598	30.7	2.5	2.958	80.3	3.10	3.497

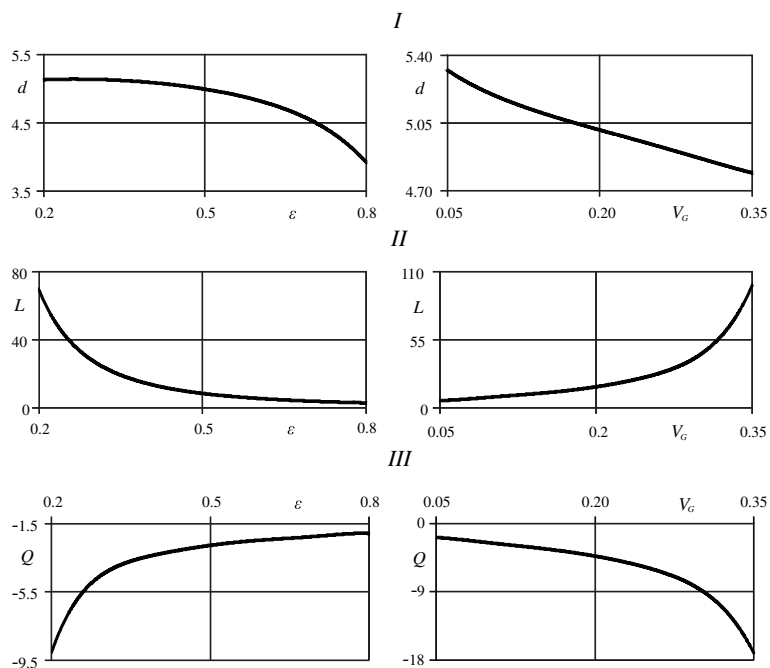


Рис. 8. Зависимость величин d (I), L (II) и Q (III) от ε и V_G .

Увеличение интенсивности инфильтрации, скорости обтекания, обоих напоров и уменьшение мощности слоя и длины шпунта приводят к уменьшению величины d , т. е. к увеличению ординаты точки F выхода кривой депрессии из-под шпунта. При этом наибольшее влияние на величину d оказывает мощность пласта T : данные табл. 4 показывают, что при возрастании параметра T всего в 1.1 раза значение d увеличивается на 23.5%. Из данных 9-ого столбца табл. 4 и 5 следует, что величина d изменяется линейно по T и H_0 , что естественно с физической точки зрения.

Особый интерес представляет расположение точки C , лежащей на границе непроницаемого основания и левого края нижележащего водоносного пласта, и в связи с этим поведение величины L . C

ростом параметров V_G и H и убыванием ε и S ширина L увеличивается. Так, варьирование интенсивности инфильтрации и скорости обтекания изменяет ширину L в 26.7 и 16.6 раза соответственно. Варьирование параметров T и H_0 приводит к одним и тем же значениям $L = 98.60$ в случае $H > H_0$ и $L = 30.83$ при $H_0 > H$, так, что влияние мощности слоя и напора в нижележащем водоносном горизонте не очень сказывается на положении координаты точки C .

Расчеты показывают также, что как и в предельном случае $H_0 = 0$, варьирование всех физических параметров модели приводит к весьма незначительным изменениям фильтрационного расхода (в пределах 1–1.3 раза), при этом наблюдается линейная зависимость величины Q от варьлируемых параметров.

Сравнение результатов вычислений величины d при одних и тех же значениях варьлируемых параметров ε , V_G и T показывает, что в случае, когда $H > H_0$, высота подъема воды за шпунтом на 30–40% больше, а при изменении величины H даже на 64% превышает соответствующие значения величины d , чем при $H_0 > H$. Еще более существенные различия наблюдаются при сравнении ширины L : в случае $H > H_0$ при изменении параметров ε и V_G значение L на 213–215% больше величин, соответствующих случаю $H_0 > H$.

Существенную роль в формировании течения играют инфильтрация и напоры в бьефе и нижележащем водоносном горизонте. Выше было установлено, что усиление инфильтрации и повышение напора в нижележащем водоносном пласте приводят к уменьшению величины d , т. е. сопровождается подъемом свободной поверхности. При этом, как показывают расчеты, ее точка перегиба E , перемещаясь вдоль границы влево, приближается к шпунту, справа же кривая депрессии выполаживается и становится фактически горизонтальной границей (см. рис. 7), что является признаком начинающегося подтопления.

Таким образом, выявляется подпирющее воздействие инфильтрационного и напорного питания со стороны вод нижележащего пласта по отношению к фильтрации под шпунтом. В практике гидротехнического строительства и орошаемого земледелия случаи повышения напора в основании покровных обложений вследствие систематического просачивания инфильтрационной влаги при ее недостаточном естественном оттоке являются весьма типичными.

С последующим увеличением параметров ε и H_0 , но в рамках уже другой фильтрационной схемы, подтопление все больше развивается, и, по-видимому, можно ожидать появления на свободной поверхности и второй точке перегиба с последующим возникновением в зоне шпунта бугра грунтовых вод, подобно тому как это происходит в аналогичных схемах при фильтрации из каналов [11, 12].

Предельный случай течения $H_0 = 0$ (отсутствие подпора). Как показывает анализ, если зафиксировать все физические параметры схемы, то по мере убывания напора в нижнем хорошо проницаемом водоносном пласте точка перегиба свободной поверхности E , перемещаясь вдоль границы в направлении точки F , сливается с ней в пределе при $\lambda = \lambda_* = 0.5\rho$. При таком значении λ в области комплексной скорости w выпадает правая часть полукруга $|w - i(1 + \varepsilon)/2| < (1 - \varepsilon)/2$, а в плоскости течения z кривая депрессии выполаживается в точке D и выходит в ней на кровлю слоя под прямым углом. Учитывая, что при $\lambda = \lambda_*$ (см. [9])

$$\vartheta_2\left(\tau + \frac{i\rho}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{q}} e^{-\pi\tau i} \vartheta_3(\tau); \quad \vartheta_2\left(\tau - \frac{i\rho}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{q}} e^{\pi\tau i} \vartheta_3(\tau),$$

и используя известные соотношения между эллиптическими и тета-функциями:

$$\vartheta_1(\tau) = \sqrt{k} \operatorname{sn}(2K\tau, k) \vartheta_0(\tau); \quad \vartheta_3(\tau) = \frac{\operatorname{dn}(2K\tau, k) \vartheta_0(\tau)}{\sqrt{k'}},$$

в результате получаем выражения (12) и (13) в виде

$$w(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi\tau); \quad (16)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} M \frac{\sin(\pi\tau)}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}; \quad \frac{dz}{d\tau} = M \frac{\cos(\pi\tau)}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}. \quad (17)$$

Так как в этом предельном случае $\lambda = 0.5\rho = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon}$, то

$$\rho = \frac{K'}{K} = \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon}}{\pi}; \quad g = \frac{\operatorname{arctg}(V_G/\sqrt{\varepsilon})}{\pi}. \quad (18)$$

Формулы (16)–(18) совпадают с соответствующими формулами (10)–(12) работы [1].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первая из рассмотренных задач в подобной постановке относится к так называемым смешанным обратным краевым задачам теории фильтрации, т. е. к задачам, в которых одни участки границы области известны, а другие подлежат определению. Отметим, что впервые обратный подход к фильтрационному расчету подземного контура плотин был применен в известной работе И.Н. Кочиной и П.Я. Подубариновой-Кочиной, в которой был дан толчок к развитию целого направления — отысканию контуров гидротехнических сооружений по каким-либо заданным на них свойствам, и которая породила многочисленные работы, принадлежащие главным образом казанской школе математиков и механиков.

В отличие от этих исследований в работе не только сделано построение плавного подземного контура плотины, но и определяется очертание подстилающего водопроницаемое основание криволинейного водоупора, характеризуемого постоянством скорости обтекания.

Во второй задаче об обтекании шпунта применение функции Жуковского лишь тогда приводит к эффективным результатам, когда помимо свободной поверхности граница области течения содержит только горизонтальные линии равного потенциала и вертикальные линии тока. Однако в реальных условиях гидротехнического строительства, орошаемого земледелия и т. п. непосредственно под покровными отложениями наряду с горизонтальными напорными водоносными пластами более высокой проницаемости зачастую встречаются и горизонтальные водонепроницаемые включения, что коренным образом отражается на характере фильтрационных процессов. В рассмотренной задаче об обтекании шпунта Жуковского дается подробный гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров модели на картину течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береславский Э. Н., Александрова Л. А., Пестерев Е. В. Математическое моделирование некоторых фильтрационных течений в подземной гидромеханике // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 1. С. 12–22.

2. *Кочина И. Н., Полубаринова-Кочина П. Я.* О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // ПММ. 1952. Т.16. С. 57–66.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
4. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностран. лит., 1963. 406 с.
5. *Береславский Э. Н.* О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. №5. С. 3–7.
6. *Береславский Э. Н.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т.33. №3. С. 296–301.
7. *Береславский Э. Н.* Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Докл. РАН. 2009. Т.428. № 4. С. 439–443.
8. *Береславский Э. Н.* Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом // Дифференц. уравнения. 2010. Т.46. №4. С. 459–466.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1108 с.
10. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М. Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
11. *Береславский Э. Н.* О влиянии непроницаемого включения в нижележащем сильнопроницаемом напорном горизонте на режим грунтовых вод в орошаемом почвенном слое // ПМТФ. 1986. №3. С. 3–5.
12. *Береславский Э. Н.* О влиянии непроницаемого включения в орошаемом почвенном слое на фильтрацию из канала // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. №5. С. 71–76.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СОЗДАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЗЕРКАЛ

Н. Н. ЕРМОЛАЕВА, Г. И. КУРБАТОВА

В статье рассматривается упрощенная математическая модель изотермического процесса расширения в невесомости жидкого слоя в сферически-симметричном случае для несжимаемой ньютоновской жидкости, удовлетворяющей дополнительному требованию затвердевания в определенный момент времени. Найдено аналитическое решение гидродинамической задачи расчета полей скорости и давления в жидком расширяющемся слое. Решение уравнений модели выражено в виде зависимости от поведения внутреннего радиуса слоя $R(t)$. Функция $R(t)$ удовлетворяет нелинейному неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению. Обсуждаются подходы к решению этого уравнения. Сформулированы прямая и обратная задачи динамики жидкого слоя, критерий допустимости режима подачи газа в рассматриваемой задаче. На его основе и полученного аналитического решения гидродинамической задачи предложены рекомендации по выбору допустимых режимов проведения процесса и выбору материалов с требуемыми реологическими свойствами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея создания космических зеркал непосредственно вблизи космического летательного аппарата (КЛА) возникла ещё в 90-х годах прошлого столетия (см., например, [1]). Было предложено несколько схем получения таких зеркал. В рамках одной из них зеркало предлагалось изготавливать из поллой сферы большого диаметра, полученной за счет раздувания пузыря за бортом КЛА из специальной жидкости (типа олигомера). Она ведёт себя как ньютоновская вязкая жидкость в течение небольшого интервала времени t_k , а затем твердеет. Такие материалы существуют, они успешно использовались при проведении модельных экспериментов такого рода в

Доклад на семинаре 1 декабря 2009 г.

© Н. Н. Ермолаева, Г. И. Курбатова, 2010

земных условиях. Реализация этой схемы получения тонких полых сфер большого диаметра вблизи КЛА ставит целый ряд проблем. Большую роль в их преодолении играют построение математической модели процесса расширения жидкого слоя и проведение вычислительных экспериментов по выбору допустимых режимов подачи газа внутрь жидкой оболочки, обеспечивающих достижение необходимых размеров сферической оболочки за определённый интервал времени t_k . Этот интервал t_k жестко ограничен, с одной стороны, временем затвердевания материала, с другой стороны, требованием устойчивости режима раздувания по отношению к малым возмущениям внешних условий.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСШИРЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ЖИДКОГО СЛОЯ В НЕВЕСОМОСТИ

При построении математической модели процесса расширения сферической оболочки в невесомости считаются выполненными следующие *условия* проведения процесса:

- 1) массовые силы малы, их массовая плотность f по модулю составляет величину порядка $10^{-5}g$ (g – ускорение свободного падения);
- 2) обеспечены изотермические условия проведения процесса;
- 3) до начала затвердевания поведение материала оболочки моделируется ньютоновской вязкой жидкостью постоянной плотности ρ с постоянным коэффициентом динамической вязкости μ и с постоянным коэффициентом поверхностного натяжения σ ;
- 4) давление в газовой среде вне оболочки распределено однородно и равно P_n ;
- 5) подача газа внутрь оболочки осуществляется сферически симметрично;

- 6) распределение давления газа внутри расширяющейся жидкой оболочки однородно в пространстве и составляет величину $P_g(t)$, определяемую режимом подачи газа и параметрами жидкого слоя;
- 7) диффузией газа через оболочку можно пренебречь.

При перечисленных условиях изотермическое расширение жидкого слоя вплоть до начала затвердевания моделируется следующей системой уравнений:

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \bar{u}, \quad (2)$$

где $\bar{u} = \bar{u}(r, t)$ – вектор скорости жидкости, $p = p(r, t)$ – давление в жидкости, $\nabla \bar{u}$ – векторный градиент скорости, Δ – оператор Лапласа. В уравнении неразрывности (1) учтено постоянство плотности жидкости ρ . Уравнение (2) – уравнение Навье–Стокса, полученное из уравнения баланса импульса при реологическом поведении материала как ньютоновской вязкой жидкости.

2.1. Начальные условия задачи

Предполагается, что в начальный момент времени t_0 жидкость покоится и имеет форму сферического слоя G :

$$\{R(t_0) \leq r \leq \hat{R}(t_0), \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

центр сферической системы координат (r, ϑ, φ) расположен в центре сферического слоя. Внутренняя и внешняя граничные поверхности жидкости $S_1(t), S_2(t)$ представляют собой сферы радиусов $R(t)$ и $\hat{R}(t)$ соответственно. Начальные условия задачи имеют вид

$$\bar{u}(\bar{r}, t_0) = 0, \quad \bar{r} \in G. \quad (3)$$

Процесс расширения жидкого слоя при выполнении условий 1) – 7) для сферически-симметричных начальных условий (3) сферически симметричен. В любой момент времени выполняются следующие равенства:

$$u_\vartheta = u_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0; \quad (4)$$

$$\bar{u}(\bar{r}, t) = u_r(r, t)\bar{e}_r \equiv u(r, t)\bar{e}_r,$$

где \bar{e}_r — единичный вектор, направленный вдоль радиуса от центра сферической системы координат; $u(r, t)$ — радиальная составляющая скорости.

2.2. Граничные условия задачи

Рассмотрим, следуя работе [2], постановку кинематических и динамических граничных условий. Кинематические условия для скорости жидкости на внутренней и внешней поверхностях в произвольный момент времени имеют вид

$$u|_{S_1(t)} = \dot{R}, \quad u|_{S_2(t)} = \dot{R}. \quad (5)$$

Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени.

Динамические условия основаны на формуле Лапласа, определяющей величину скачка нормальной составляющей вектора напряжения при переходе через искривленную поверхность. Для сферической поверхности радиуса R величина скачка равна $\frac{2\alpha}{R}$, где α — коэффициент поверхностного натяжения. При этом абсолютная величина давления больше в той среде, в которой поверхность раздела является выпуклой.

Запишем динамические условия в проекции на радиальную ось

$$-p(r, t) + 2\mu \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = -P_n - \frac{2\alpha}{\hat{R}(t)}, \quad r \in S_2(t), \quad (6)$$

$$-\left(-p(r, t) + 2\mu \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}\right) = P_g(t) - \frac{2\alpha}{R(t)}, \quad r \in S_1(t). \quad (7)$$

Здесь $P_g(t)$, P_n — заданные давления в газе внутри полости, ограниченной слоем жидкости, и вне слоя соответственно.

Сферическая симметрия позволяет упростить уравнение Навье–Стокса (2), так как в силу равенств (4) $\text{rot } \bar{u} = 0$. Таким образом,

движение жидкости является потенциальным. В большинстве граничных задач для вязкой жидкости течение не может быть потенциальным всюду ввиду условия “прилипания” на граничных поверхностях. Специфика граничных условий делает рассматриваемую задачу исключением. Лапласиан от вектора скорости \bar{u} для потенциального течения несжимаемой жидкости равен нулю и уравнение Навье–Стокса (2) для вязкой жидкости при условии $\Delta \bar{u} = 0$ становится аналогичным уравнению Эйлера:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \right) = -\nabla p.$$

Влияние вязкости в модели проявляется только через граничные условия (6), (7) на поверхностях S_1, S_2 .

Запишем упрощенную математическую модель изотермического расширения жидкого слоя при выполнении предположений 1) – 7) в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad (9)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad r \in [R(0), \hat{R}(0)], \quad R|_{t=0} = R_0; \quad (10)$$

при $t \in [0, t_k]$

$$u|_{r=R} = \dot{R}, \quad u|_{r=\hat{R}} = \dot{\hat{R}}, \quad (11)$$

$$\left(p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = P_g(t) - \frac{2\alpha}{R}, \quad (12)$$

$$\left(p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\hat{R}} = P_n + \frac{2\alpha}{\hat{R}}, \quad (13)$$

$$\hat{R}^3(t) - R^3(t) = \text{const} = \kappa. \quad (14)$$

Здесь $u(r, t)$ – радиальная составляющая вектора скорости жидкости в слое, который в любой момент времени t ограничен сферическими поверхностями с внутренним радиусом $R(t)$ и внешним

радиусом $\widehat{R}(t)$ (внешний радиус $\widehat{R}(t)$ в любой момент времени однозначно определяется по внутреннему $R(t)$ и количеству материала); R_0 – начальное значение радиуса внутренней поверхности жидкого слоя; ρ, μ, α – плотность, коэффициент динамической вязкости и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, считающиеся неизменными; κ – константа, пропорциональная объему жидкого слоя, равному $\frac{4}{3}\pi\kappa$; t_k – время окончания процесса.

В математической модели (8)–(14): (8) – уравнение неразрывности, (9) – проекция уравнения движения на ось r сферической системы координат, (10) – начальные условия, (11) – кинематические условия на внутренней и внешней поверхностях слоя, (12), (13) – динамические условия на внутренней и внешней поверхностях слоя, (14) – условие неизменности объема слоя.

Уравнения неразрывности и движения в модели (8)–(14) допускают интегралы. Из интеграла уравнения неразрывности и граничных условий следует выражение для поля скорости в жидком слое

$$u(r, t) = R^2 \dot{R} / r^2. \quad (15)$$

Для определения поля давления запишем уравнение движения (9) в форме Громека–Ламба, учитывая потенциальность течения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) + \nabla\frac{u^2}{2} + \nabla\frac{p}{\rho} = 0.$$

Здесь $\varphi(r, t)$ – потенциал скорости. Из этого уравнения следует интеграл Лагранжа–Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t), \quad (16)$$

позволяющий найти поле давления $p(r, t)$ в жидкости по полю скорости $u(r, t)$. Потенциал скорости $\varphi(r, t)$ с учетом (15) имеет вид

$$\varphi(r, t) = \varphi(R, t) + \dot{R}R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (17)$$

Выразим давление в жидкости $p(r, t)$ через функцию $R(t)$ и ее производные. Для этого найдем функцию $F(t)$, которая не зависит

от r , на внутренней поверхности слоя, записав левую часть интеграла Лагранжа–Коши при $r = R$ и воспользовавшись граничными условиями (11), (12):

$$F(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=R} + \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{1}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + P_g(t) - \frac{2\alpha}{R} \right). \quad (18)$$

Из соотношений (15), (17) следуют выражения для $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $F(t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dR} \dot{R} - \dot{R}^2 + (2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right), \quad (19)$$

$$F(t) = -\frac{4\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{P_g(t)}{\rho} - \frac{2\alpha}{\rho R} - \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{d\varphi}{dR} \dot{R}. \quad (20)$$

Давление в жидкости с учетом представлений (19), (20) находится из интеграла Лагранжа–Коши (16) в виде

$$p(r, t) = P_g(t) - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - \frac{2\alpha}{R} - \rho(2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) + \\ + \frac{\rho}{2} R^4 \dot{R}^2 \left(\frac{1}{R^4} - \frac{1}{r^4} \right).$$

Запишем выражение для давления в безразмерной форме (штрихи опущены, обозначения те же):

$$p(r, t) = P_g(t) - \frac{A_m}{A_p} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{A_s}{A_p R} - \left(\frac{2\dot{R}^2 + R\ddot{R}}{A_p} \right) \left(1 - \frac{R}{r} \right) + \\ + \frac{\dot{R}^2}{2A_p} \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right). \quad (21)$$

Безразмерные комплексы A_m, A_s, A_p выражаются через параметры задачи и через характерные величины t_x, r_x, p_x по формулам

$$A_m = \frac{4\mu t_x}{\rho r_x^2}, \quad A_s = \frac{2\alpha t_x^2}{\rho r_x^3}, \quad A_p = \frac{P_x t_x^2}{\rho r_x^2}.$$

Полученные соотношения (15), (21) для полей скорости $u(r, t)$ и давления $p(r, t)$ в жидком слое позволяют получить полное решение гидродинамической части задачи как только известен закон поведения внутреннего радиуса $R(t)$.

В работе [2] в результате интегрирования вдоль жидкого слоя уравнений (8), (9) с учетом граничных условий (11)–(13) выведено обыкновенное дифференциальное уравнение для $R(t)$, которое в безразмерной форме в терминах введенных выше величин можно представить в виде

$$h\ddot{R} + \frac{\dot{R}^2}{2R} h^2(h^2 - 4h + 6) + \frac{\dot{R}}{R^2} A_m h(h^2 - 3h + 3) = -\frac{A_s(2-h)}{R^2} + \frac{A_p W(t)}{R}, \quad (22)$$

$$h = h(R(t)) = 1 - (1 + K/R^3)^{-1/3} = \frac{H(t)}{\hat{R}}, \quad (23)$$

$$W(t) = P_g(t) - P_n, \quad (24)$$

$$H(t) = \hat{R}(t) - R(t),$$

где $W(t)$ – управляющая функция, связанная с режимом подачи газа; $H(t)$ – толщина слоя; K – безразмерный объем слоя ($K = \frac{\kappa}{r^3}$).

Сформулируем прямую и обратную задачи динамики расширяющегося слоя жидкости.

Прямая задача заключается в расчете функции $R(t)$ по уравнению (22) при начальных данных

$$R|_{t=0} = R_0, \quad \dot{R}|_{t=0} = 0 \quad (25)$$

по управляющей функции $W(t)$ (24) и при заданных параметрах $\mu, \rho, \varkappa, K, R_0, P_n, t_k$ на интервале времени $[0, t_k]$.

Обратная задача заключается в расчете по заданному закону $R(t)$ управляющей функции $W(t)$ по уравнению (22) при заданном наборе параметров.

Решение обратной задачи существенно проще, чем прямой. Оно исследовалось, например, в работе [3]. На его основе можно найти

управляющую функцию $W(t)$, теоретически обеспечивающую заданное поведение радиуса слоя $R(t)$. Однако оценить влияние возможных отклонений реальных режимов от теоретических можно только из решения прямой задачи.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ $R(t)$

Выберем управляющую функцию $W(t)$, для чего зададим один из возможных законов поведения $R(t)$ и решим обратную задачу. Произвол выбора $R(t)$ ограничен следующими требованиями:

1. В начальный момент времени \dot{R} должно быть равно нулю.
2. За время t_k слой должен достичь нужных размеров.
3. По технологическим соображениям требуется, чтобы \dot{R} в конце процесса было близко к нулю.
4. На всем интервале времени $[0, t_k]$ функция $R(t)$ должна быть монотонно возрастающей ($\dot{R} \geq q_0$ для $t \in [0, t_k]$).

Рассматривалось несколько допустимых вариантов задания $R(t)$. В данной работе ограничимся следующим законом:

$$R(t) = 1 + (1 - \exp(-(a_1 t)^2))(a_2 \operatorname{th}(a_3 t)). \quad (26)$$

Здесь множитель $(1 - \exp(-(a_1 t)^2))$ быстро становится равным единице, смысл его введения заключается в том, чтобы обеспечить выполнение начальных условий $\dot{R} = 0$ при $t = 0$. Значение безразмерной величины t_k принято равным 120.

По заданному закону $R(t)$ в результате решения обратной задачи из уравнения (22) находится соответствующая управляющая функция $W(t)$. Исследование задачи Коши (22), (25) показало (см.: [4]), что она обладает широким спектром вычислительных трудностей. Свойства уравнения зависят от значений безразмерных комплексов и от выбранной управляющей функции $W(t)$. Для большинства рассмотренных параметров задачи, представляющих практический интерес, дифференциальное уравнение (22) оказалось жестким. Кроме того, на начальной и конечной стадиях процесса расширения уравнение (22), оставаясь жестким, обладает разными свойствами. В частности, в начале процесса спектральное

число обусловленности матрицы Якоби системы, соответствующей уравнению (22), обычно велико и составляет величину порядка 10^4 . При $t \rightarrow t_k$ толщина слоя $H(t)$ стремится к нулю, что приводит к появлению малого функционального параметра $h(t)$ (23) перед старшей производной в уравнении (22).

Большинство исследованных вычислительных алгоритмов не позволило по единой вычислительной схеме рассчитать весь процесс расширения жидкого слоя. Поэтому далее речь идет о двух этапах расчета: начальном и конечном.

Прямая задача состоит в решении задачи Коши для жесткого обыкновенного нелинейного неавтономного дифференциального уравнения второго порядка (22) при начальных условиях (25).

Как отмечается в обзорной работе Н.Н. Калиткина и С.Л. Панченко [5] о выборе оптимальных вычислительных схем для жестких неавтономных систем, во многих задачах нельзя предсказать заранее, какая именно из известных вычислительных схем окажется эффективной для решения исследуемой жесткой системы. Наши исследования [2, 4] подтвердили трудность выбора оптимальной вычислительной схемы для решения жесткого нелинейного неавтономного дифференциального уравнения (22). Задача выбора существенно облегчалась наличием точного аналитического решения уравнения (22) для некоторых заданных управляющих функций $W(t)$. Поэтому имелась возможность сравнения результатов численного решения по той или иной схеме с точным решением задачи в ряде случаев. Были рассмотрены различные вычислительные алгоритмы решения этой жесткой системы: метод типа предиктор - корректор (предложенный Рычковым [6]), чисто неявная двухстадийная схема, а также одно- и двухстадийные схемы типа Розенброка и модификации Ваннера и Новикова для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, который были предложенные в работе Н.Н. Калиткина и С.Л. Панченко [5].

Расчеты показали, что для исследуемой задачи ни одна из этих схем не приводит к успеху. А именно, начиная с некоторого достаточно короткого промежутка времени, все указанные схемы дают срыв. В связи с этим исследовались другие вычислительные алгоритмы. Достаточно эффективной в рассматриваемой задаче оказалась предложенная нами явная модифицированная схема [2, 4].

Численное решение задачи Коши (22), (25) по рассмотренным схемам сравнивалось с известным точным решением этой задачи при управляющей функции $W(t)$, рассчитанной по выбранному закону $R(t)$ (26). Расчеты показали (см.: [2, 4]), что для рассматриваемой задачи только модифицированная явная схема позволила численно решить дифференциальное уравнение (22) на первом этапе.

Проведенные расчеты начала процесса расширения жидкой оболочки для ряда управляющих функций $W(t)$, представляющих практический интерес, позволяют сделать выводы

- Для всех алгоритмов, как и следовало ожидать, устойчивость счета достигалась только при весьма малых значениях шага интегрирования (величина шага не превышала величины обратно пропорциональной максимальному (по t) числу обусловленности матрицы Якоби).
- Для всех алгоритмов требовалась большая точность вычислений.
- Наименьшие отклонения численного решения от точного, известного из решения обратной задачи, достигались при использовании явной модифицированной схемы, для нее и точность расчета была выше, и расчет оказался устойчив на значительно большем интервале времени.
- 4. Ни одна из опробованных схем для набора параметров задачи, представляющих практический интерес, не позволила получить численное решение уравнения (22) на всем интервале времени $[0, t_k]$.

Расчет первого этапа (при заданных параметрах задачи) позволяет найти время t_* перехода ко второму этапу решения задачи. Решение задачи на втором этапе приведено в работе [4]. После определения $R(t)$ из решения задачи Коши полное решение гидродинамической задачи дается полученными соотношениями (15), (21) для полей скорости $u(r, t)$ и давления $p(r, t)$ в жидком слое.

Найденное решение позволяет выбирать допустимые режимы подачи газа (см.: [7]). Режим, приводящий к разрыву жидкого слоя, считается недопустимым. Математически ситуация разрыва слоя

в данной задаче эквивалентна возникновению в жидкости отрицательного давления. Найденное решение позволяет определить ограничения на вид управляющей функции $W(t)$ и параметры A_m, A_s, A_p, K .

В прямой задаче известна управляющая функция $W = W(t)$ (24). Из уравнения (22) находится $R = R(W(t), K, A_m, A_s, A_p)$ в каждый момент времени. При этом выражение для давления (21) в жидком слое можно записать в виде зависимости

$$p(r, t) = p(r, W(t), P_n, K, A_m, A_s, A_p). \quad (27)$$

Необходимым условием допустимости вида управляющей функции $W(t)$ является отсутствие в слое отрицательных давлений, что приводит к неравенству

$$p(r, W(t), P_n, K, A_m, A_s, A_p) > 0 \quad (28)$$

в области

$$t \in [0, t_k], \quad r \in [R(t), (K + R(t)^3)^{1/3}]. \quad (29)$$

Для качественной оценки достаточно выяснить условия, к которым приводит требование положительности давления, например, на внутренней поверхности слоя. (Но в конечном счете допустимость вида управляющей функции должна быть подтверждена, конечно, во всей области (29).) Запишем неравенство (28) на внутренней границе. Выражение для давления p (27) найдено выше (см. (21)). В него входит функция $P_g(t)$ (24), которая в прямой задаче считается известной. Чтобы получить искомую оценку для давления, поступим следующим образом. Найдем $P_g(t)$ из решения обратной задачи, а именно зададимся законом $R(t)$, например (26), и определим $P_g(t)$ из уравнений (22), (24). При этом значении $P_g(t)$ неравенство (28) на внутренней поверхности слоя примет вид

$$P_n + \frac{R}{A_p} \left(h\ddot{R} + \frac{\dot{R}^2}{2R} h^2 (h^2 - 4h + 6) \right) + \quad (30)$$

$$+ \frac{A_m}{A_p} \frac{\dot{R}}{R} (h - 1)^3 + \frac{A_s}{A_p R} (1 - h) > 0,$$

где h задано формулой (23). Запишем неравенство (30) следующим образом:

$$P_n + \frac{R}{A_p} \left(h\ddot{R} + \frac{\dot{R}^2}{2R} h^2(h^2 - 4h + 6) \right) + \left(-\frac{A_m}{A_p} \frac{\dot{R}R^2}{\widehat{R}^3} \right) + \frac{A_s}{A_p \widehat{R}} > 0. \quad (31)$$

Неравенство (31) позволяет оценить роль сил вязкости, поверхностного натяжения и внешнего давления.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты для различных A_m, A_s при условии $P_n = 0$ показали, что удовлетворить требованию $p > 0$ возможно только при абсурдных с точки зрения физики коэффициентах вязкости $\mu < 0.238 \cdot 10^{-3} (\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2)$ и поверхностного натяжения $\alpha > 0.47 (\text{Н}/\text{м})$ или при очень большом значении t_k , не реальном с практической точки зрения.

Как показали расчеты, ситуация может быть исправлена только за счет введения противодействия вне слоя, т. е. только при условии $P_n > 0$.

Анализ неравенства (31) позволяет высказать некоторые практические рекомендации по выбору материалов и условий проведения процесса. Оно демонстрирует влияние изменений коэффициентов вязкости, поверхностного натяжения и давления P_n вне слоя на знак левой части неравенства (31). Первое и четвертое слагаемые в (31) всегда положительны, третье — всегда отрицательно, второе — в разные моменты времени может быть как положительным, так и отрицательным. Это дает возможность высказать следующие рекомендации:

- из всех материалов с необходимыми реологическими свойствами предпочтительнее те, у которых минимально возможная вязкость и максимально возможный коэффициент поверхностного натяжения;
- необходимо обеспечить максимально допустимое давление P_n вне жидкого слоя в газовой фазе искусственной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдусевский В.С.* От полета Гагарина к индустриализации космоса // 16е Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. М., 1986. С. 35–42.
2. *Ермолаева Н.Н., Курбатова Г.И.* Математическая модель расширяющегося жидкого слоя // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 29–38.
3. *Ивашевский С.Н., Старков В.Н.* Математическая модель раздувания сферического слоя ньютоновской жидкости в условиях невесомости // Труды 25х чтений К.Э. Циолковского, секция “К.Э. Циолковский и проблемы космического производства”, Калуга 11–14 сент. 1990 г. М., 1991. С. 84–89.
4. *Курбатова Г. И.* О методах решения одной жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2008. Вып. 4. С. 27–38.
5. *Калиткин Н.Н., Панченко С.Л.* Оптимальные схемы для жестких неавтономных систем // Математическое моделирование, 1999. Т.11, №6. С. 53–81.
6. *Рычков А.Д.* Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск, 1988.
7. *Ермолаева Н.Н., Курбатова Г.И.* Анализ режимов расширения сферических оболочек в космосе // Международная конференция “Шестые Окуневские чтения”, 23–27 июня 2008 г., Санкт-Петербург: Материалы докладов. Т. 1. СПб., 2008. С. 135–141. |

ЗАДАЧА О ВЫВОДЕ ГАЗОПРОВОДА НА ПЕРИОДИЧЕСКИЙ РЕЖИМ РАБОТЫ

Е. В. Груничева, Г. И. Курбатова, Е. А. Попова

Настоящая работа продолжает исследования по построению адекватной математической модели транспортировки газа по морским газопроводам, начатые в серии работ [1–5]. В представленной работе рассматриваются нестационарные процессы транспортировки газа. Основным режимом эксплуатации газопроводов является установившийся, однако существует ряд задач, для решения которых необходима нестационарная математическая модель, например задача о выходе газопровода на периодический режим или задача перевода системы на новый установившийся режим работы. Здесь исследованы медленно меняющиеся процессы и рассмотрено безударное неустановившееся неизотермическое турбулентное течение вязкой неидеальной химически инертной многокомпонентной газовой смеси по морскому трубопроводу кругового сечения с абсолютно жесткими стенками, имеющими многослойное покрытие.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени накоплен богатый опыт по расчетам транспортировки газа по магистральным газопроводам [6, 7]. Существенный вклад в решение этих задач внесли И.А. Чарный, Н.Н. Яненко, О.Ф. Васильев, С.К. Годунов, Э.А. Бондарев, А.Ф. Воледин, М.А. Каниболотский и многие другие исследователи. Одномерная нестационарная модель транспортировки неидеального сжимаемого газа по трубам, впервые предложенная в работе [6], широко используется и в настоящее время, например на ней основана модель работы [7], посвященной изучению нестационарных газодинамических процессов в газопроводе на подводном переходе через Черное море. На этой же модели основаны программно-

Доклад на семинаре 16 февраля 2010 г.

© Е. В. Груничева, Г. И. Курбатова, Е. А. Попова, 2010

математические комплексы <CorNet> и <AMADEUS> [8]. Предложенная ниже нестационарная математическая модель отличается от модели Васильева, Бондарева, Воеводина и Каниболотского [6] уравнением состояния и калорическим уравнением. Это связано с необходимостью возможно более точного описания термодинамических процессов при сверхвысоких давлениях.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Приведем в безразмерной форме математическую модель неизотермического нестационарного турбулентного течения вязкой неидеальной газовой смеси по трубопроводам постоянного сечения:
уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u^2 + m_1 p) = -m_2 \rho u^2 + m_3 \rho \cos \alpha(z), \quad (2)$$

уравнение баланса полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + m_{10} \frac{\rho u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u \varepsilon + m_{10} \frac{\rho u^3}{2} + m_5 u p \right) = \\ = m_6 (T^*(z, t) - T(\rho, \varepsilon)) + m_{11} \rho u \cos \alpha(z), \end{aligned} \quad (3)$$

уравнение состояния Редлиха–Квонга:

$$p = m_8 \frac{\rho T(\rho, \varepsilon)}{(1 - \delta_* \rho)} - m_9 \frac{\rho^2}{(1 + \delta_* \rho) T^{1/2}(\rho, \varepsilon)}. \quad (4)$$

В системе (1)–(4) приняты следующие обозначения: u , ρ , p , T — скорость, плотность, давление и температура газа соответственно, являющиеся функциями времени t и координаты z , направленной вдоль оси трубопровода; $\varepsilon = \varepsilon(z, t)$ — массовая плотность полной энергии; $\alpha(z)$ — угол между направлением силы тяжести и осью трубопровода в z -м сечении; $T^*(z, t)$ — температура окружающей

воды; δ_* — безразмерный параметр уравнения состояния Редлиха–Квонга (4).

Зависимость температуры T от плотности ρ и внутренней энергии ε имеет следующий вид (см.: [10]):

$$T(\rho, \varepsilon) = \frac{4}{3}\varepsilon \cos^2 \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{m_* \ln(1 + \delta_* \rho)}{2(\varepsilon/3)^{3/2}} \right) \right). \quad (5)$$

Безразмерные комплексы $m_1 - m_{11}$, m_* , δ_* выражаются через физические параметры задачи и характерные величины по формулам

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p_x}{\rho_x u_x^2}, & m_2 &= \frac{\lambda z_x}{4R}, & m_3 &= \frac{z_x g}{u_x^2}, & m_4 &= \frac{\lambda u_x^2 z_x}{4c_v R T_x}, \\ m_5 &= \frac{p_x}{\rho_x c_v T_x}, & m_6 &= \frac{2z_x}{c_v R^2 \rho_x u_x W}, & m_7 &= \frac{3c \rho_x}{2c_v T_x^{3/2}}, \\ m_8 &= \frac{h \rho_x T_x}{p_x}, & m_9 &= \frac{c \rho_x^2}{p_x T_x^{1/2}}, & m_{10} &= \frac{u_x^2}{\varepsilon_x}, \\ m_{11} &= \frac{z_x g}{\varepsilon_x}, & \delta_* &= \delta \rho_x, & m_* &= \frac{p_x}{\rho_x \varepsilon_x \delta_*}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$W = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \ln \left(1 + \frac{d_j}{r_{j-1}} \right) + \frac{1}{\lambda_*} \ln \left(1 + \frac{d_*}{r_m} \right), \quad r_{j-1} = R + \sum_{q=1}^{j-1} d_q;$$

$$h = R_g/M, \quad M = \sum_1^k \eta_i m_i, \quad \sum_1^k \eta_i = 1,$$

$$\delta = b/M, \quad c = a/M^2, \quad b = \Omega_b R_g T_c / p_c, \quad a = \Omega_a (R_g)^2 T_c^{2.5} / p_c.$$

Здесь введены характерные масштабы длины z_x , времени t_x , скорости u_x , плотности ρ_x , давления p_x , температуры T_x и внутренней энергии ε_x . Приняты следующие обозначения: R — внутренний радиус трубопровода; λ_j , d_j — коэффициент теплопроводности и толщина j -го слоя обшивки (они могут быть функциями z ,

т. е. на разных участках конструкция обшивки может быть различной); m — количество слоев обшивки трубы; λ_* , d_* — коэффициент теплопроводности и эффективная толщина слоя льда на внешней поверхности газопровода; g — ускорение силы тяжести; λ — коэффициент гидравлического сопротивления (в общем случае он может параметрически зависеть от z и t); R_g — газовая постоянная; m_i , η_i — молекулярный вес и доля i -й составляющей газовой смеси соответственно; k — количество компонент газовой смеси; Ω_a , Ω_b — числа, определяемые по значениям критических температуры T_c и давления p_c в соответствии с таблицами, приведенными в работе [9], для заданного химического состава газовой смеси; c_v — массовая плотность теплоемкости газа при постоянном объеме, которую в рассматриваемых задачах можно считать постоянной величиной, однако в общем случае $c_v = c_v(T)$; $t_x = z_x/u_x$, $\varepsilon_x = c_v T_x$. Безразмерный комплекс m_* входит в уравнение (5).

Система уравнений (1)–(4) дополняется начальными и граничными условиями, соответствующими исследуемой нестационарной задаче. В качестве примера в работе рассмотрена задача о выходе на периодический режим при заданном изменении расхода на правом конце газопровода. Начальными данными в этой задаче служат параметры установившегося режима $\rho_0(z)$, $T_0(z)$:

$$t = 0: \quad \rho u = \text{const}, \quad \rho = \rho_0(z), \quad T = T_0(z), \quad (7)$$

где $\rho_0(z)$, $T_0(z)$ — заданные неизменные плотность и температура поступающей на вход смеси газов соответственно.

Вопрос о задании граничных условий в задачах газовой динамики решается с помощью исследования поведения характеристик на границах области. В данной задаче на левом конце газ вытекает со скоростью, меньшей скорости звука, при этом, как известно, число условий должно быть равно $m+1$, где m — размерность задачи по пространству. На правом конце газ вытекает со скоростью, меньшей скорости звука, при этом ставится одно граничное условие. В рассматриваемой задаче граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} t > 0, z = 0: \quad & \rho = 1, \quad T = 1; \\ t > 0, z = L: \quad & \rho u = y_*(t). \end{aligned} \quad (8)$$

где $y_*(t)$ – известный закон изменения удельного расхода газа на правом конце газопровода.

Для решения системы уравнений модели (1)–(4) с граничными условиями (7), (8) достаточно эффективной оказалась модифицированная двухслойная схема Лакса–Вендроффа. Здесь каждый из двух этапов перехода на следующий временной слой рассчитывается явно.

Алгоритм этой численной схемы решения уравнений модели (1)–(4) реализован на языке C++. По сравнению с удобными при отладке программными пакетами типа Maple реализация на языке C++ дает существенное преимущество по времени счета характеристик потока газа. Оптимальная величина шага по времени определялась в результате численного эксперимента.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Ниже приведен пример расчета характеристик потока в задаче о выходе газопровода на периодический режим течения при периодическом изменении расхода на правом конце. На левом конце в этой задаче поддерживались неизменными температура 4°C и давление 150 атм, а в качестве начальных данных использовались параметры установившегося режима течения при постоянном расходе 400 кг/с. Расчеты проведены для модельного участка газопровода длиной 200 км. Изменение расхода на выходе задавалось в виде синусоиды: расход изменялся от 360 до 440 кг/с с периодом в два часа.

В качестве иллюстрации на рис. 1, 2, 3 приведены поведения расхода на левом конце газопровода и давления и температуры на правом конце соответственно.

В этой задаче время выхода газопровода на периодический режим работы составило 10,5 часа.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты многочисленных вариантов задачи (о выходе на новый установившийся или периодический режимы) позво-

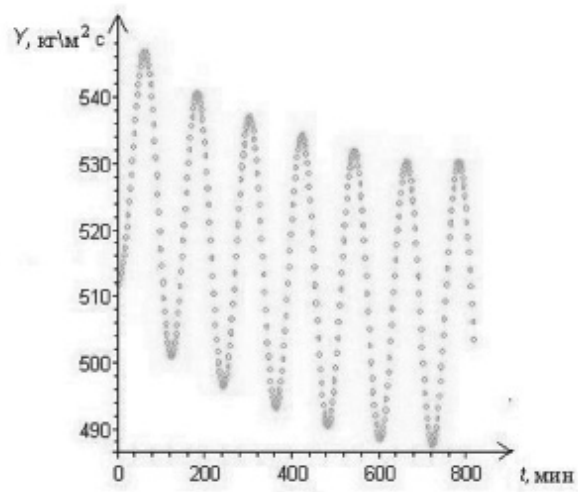


Рис. 1. Изменение расхода на левом конце газопровода.

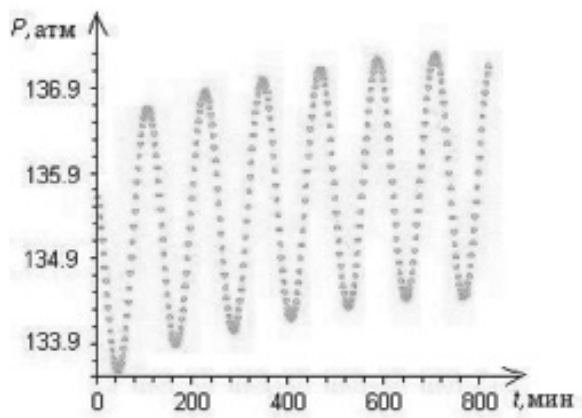


Рис. 2. Изменение давления на правом конце газопровода.

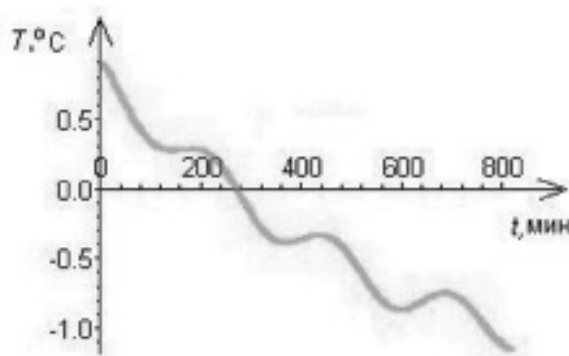


Рис. 3. Изменение температуры на правом конце газопровода.

ляют оценить влияние основных характеристик транспортировки газа на время вывода газопровода на заданный режим. Выбранная численная схема решения уравнений модели (1)–(4) является эффективной для расчета длительных нестационарных режимов течения газа и может быть использована для оценки возможности оледенения морских газопроводов в северных морях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курбатова Г.И., Филиппов Б.В., Филиппов В.Б. Неизотермическое турбулентное течение сжимаемого газа // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. №3. С. 92–108.
2. Дерцакян А.К., Курбатова Г.И., Неизвестнов Я.В., Филиппов В.Б. Некоторые научно-технические проблемы освоения шельфа арктических морей России // Труды XIII сессии Междунар. школы по моделям механики сплошных сред. СПб., 1996. С. 99–109.
3. Курбатова Г.И., Попова Е.А., Филиппов Б.В., Филиппов В.Б., Филиппов К.Б. Модели морских газопроводов. СПбГУ, 2005. С. 156.
4. Курбатова Г.И., Павловский В.А., Попова Е.А., Филиппов В.Б. О замыкающих уравнениях в моделях установившихся турбулентных течений в трубах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2003. Вып. 4. №19. С. 76–88.
5. Курбатова Г.И., Попова Е.А. Проблемы учета профиля скорости в расчетах турбулентных течений в трубах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2007. Вып. 2. С. 18–28.

6. Васильев О.Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск С.О.: Наука, 1978. С. 128.

7. Зубов В.И., Котеров В.Н., Кривцов В.М., Шипилин А.В. Нестационарные газодинамические процессы в газопроводе на подводном переходе через Черное море // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 4. С. 58–70.

8. Селезнев В.Е., Клишин Г.С., Алешин В.В., Прялов С.Н., Киселев В.В., Бойченко А.Л., Мотлохов В.В. Численный анализ и оптимизация газодинамических режимов транспорта природного газа. М.: УРСС, 2003. 223 с.

9. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1982. 532 с.

10. Груничева Е.В., Курбатова Г.И., Попова Е.А. Математическая модель нестационарного неизотермического течения смеси газов по морским газопроводам // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2010. Вып. 1. С. 42–49.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТЕРМОИЗОЛИРОВАННОЙ ДУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕРМОНАГРУЖЕНИИ

М. С. САЙКОВА

Выполнена оценка прочности сосуда давления с технологическим дефектом типа “расслоение” при переходных режимах эксплуатации. В качестве расчётной модели рассмотрена цилиндрическая оболочка с одной или несколькими теплоизолированными трещинами, находящаяся под воздействием нестационарного температурного поля. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния около термоизолированной дуговой трещины. Также проанализировано взаимодействие нескольких одинаковых трещин при их различном расположении относительно друг друга. Численные расчеты выполнены методом конечных элементов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы теории расчёта тел с трещинами под действием стационарного температурного поля хорошо разработаны и освещены в отечественной и зарубежной литературе. Следует отметить работы М.П. Саврука, Г.С. Кита и др. [1, 2], посвященные исследованию напряженно-деформированного состояния, а также взаимодействию трещин в упругой среде под действием стационарных тепловых нагрузок. При решении указанного класса задач авторы использовали метод сингулярных граничных интегральных уравнений, разработанный Н.И. Мусхелишвили в его основополагающих трудах.

В то же время в литературе практически отсутствуют исследования полей напряжений вблизи краев частично или полностью

Доклад на семинаре 2 марта 2010 г.

© М. С. Сайкова, 2010

теплонепроницаемых трещин при нестационарных температурных воздействиях. Из-за сложности аналитического решения приходится применять численные методы, например, метод конечных элементов.

К задачам нестационарной термоупругости для тел с теплоизолированными трещинами относится оценка прочности обечаек толстостенных сосудов (барабаны котлов высокого давления и другое оборудование тепловых электростанций) из листовой стали с расслоениями. Сосуды представляют собой цилиндрические оболочки (обечайки), закрытые эллиптическими днищами, и работают на внутреннее давление при температурах до 350–400 °С.

Расслоение является технологическим дефектом листа и представляет собой нарушение сплошности внутри металла. Причины появления такого рода дефекта могут быть различны. Как правило, расслоение представляет собой раскатанные крупные дефекты слитка (неметаллические включения и т.д.) [3]. В отдельных случаях расслоение металла листа может образовываться в процессе проката при недостаточном обжати или неправильно подобранном радиусе вала [4]. Дефект возникает в виде единичной трещины или совокупности трещин, расположенных параллельно срединной поверхности листа (рис. 7 на вклейке).

Нестационарные режимы эксплуатации энергооборудования, такие как пуск, останов и тепловой удар, приводят к появлению неравномерности температурного поля в стенках сосуда. Присутствие расслоений вносит существенный вклад в неоднородность тепловых полей, что приводит к возникновению дополнительных напряжений, и, в свою очередь, может быть причиной появления новых трещин и распространения уже имеющихся.

По данным разрушающего контроля “сплошное” по результатам ультразвука расслоение состоит из отдельных раскатанных включений, параллельных друг другу. Случаи протяжённого непрерывного расслоения единичны. Поэтому для изучения процессов развития расслоений важно знать напряженно-деформированное состояние непосредственно в зоне возможного зарождения трещин (т.е. в окрестности расслоений и в области между ними) с учетом их взаимовлияния.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем прочность обечайки сосуда с расслоением при переходных режимах эксплуатации методами линейной механики разрушения. Рассмотрим плоскую задачу для цилиндрической оболочки с одной или двумя дуговыми теплоизолированными трещинами (рис. 1). На внешней поверхности заданы условия идеальной теплоизоляции, а на внутренней осуществляется конвективный теплообмен со средой, коэффициент теплоотдачи которой λ считаем неизменным. Выделим два идеализированных вида изменения температуры среды в сосуде, соответствующие основным нестационарным режимам эксплуатации: изменение с постоянной скоростью V (пуск — выход на рабочие параметры — останов) и скачкообразное (тепловой удар).

Проанализируем влияние скорости изменения температуры среды и длины трещины на напряженно-деформированное состояние вблизи единичной трещины, а также характер взаимодействия трещин при их различном расположении относительно друг друга.

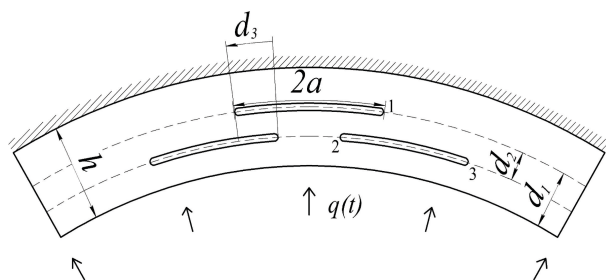


Рис. 1. Расположение трещин в цилиндрической оболочке.

В условиях смешанного нагружения компоненты напряжений вблизи конца трещины характеризуются коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) K_I , K_{II} и в локальной системе коор-

динат (см. [5]) имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) + o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

где r, θ – полярные координаты, f_{ij}^α – функции полярного угла.

В плоском случае условие срагивания трещины описывается уравнением

$$f(K_I, K_{Ic}, K_{II}, K_{IIc}) = 0, \quad (2)$$

где K_{Ic}, K_{IIc} – критические значения КИН. Для большинства конструкционных материалов величина трещиностойкости K_{IIc} не известна. Существует мнение, что разрушение изотропного материала по типу II маловероятно. Практически все известные критерии разрушения для изотропных материалов в плоском случае можно представить в виде

$$K_{eq} = g(K_I, K_{II}) = K_{Ic}, \quad (3)$$

где K_{eq} – эквивалентный коэффициент интенсивности напряжений; функция g определяется из эксперимента или физических соображений.

Для расчёта траектории распространения трещины обычно используют теорию, основанную на критерии максимальных нормальных напряжений [6]. Согласно данной теории, направление подрастания трещины θ_* является функцией отношения K_I к K_{II} и определяется выражением

$$\theta_* = 2 \arctan \left(\frac{-\frac{K_{II}}{K_I}}{1 + \sqrt{1 + 8\frac{K_{II}}{K_I}}} \right), \quad (4)$$

а K_{eq} вычисляется по формуле

$$K_{eq} = \left\{ \frac{K_I}{4} \left(\cos \frac{\theta_*}{2} + \cos \frac{3\theta_*}{2} \right) - \frac{3K_{II}}{4} \left(\sin \frac{\theta_*}{2} + \sin \frac{3\theta_*}{2} \right) \right\}. \quad (5)$$

3. МЕТОДИКА РАСЧЁТА. РЕШЕНИЕ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ

Численное решение задачи было получено методом конечных

элементов в программном комплексе ANSYS. Решение происходило в два этапа. На первом этапе решалась нестационарная задача теплопроводности, на втором этапе найденное температурное поле пошагово прикладывалось к оболочке и на каждом временном шаге определялось ее напряженно-деформированное состояние. Затем методом экстраполяции перемещений с использованием сингулярного элемента и методом эквивалентного объёмного интегрирования вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений. При решении плоской задачи теплопроводности оболочка аппроксимировалась восьмиузловыми плоскими элементами PLANE77, а при определении напряженно-деформированного состояния восьмиузловыми элементами PLANE183. Для корректного определения вектора теплового потока и напряженно-деформированного состояния в окрестности вершин трещин была построена регулярная сетка, выполненная в виде набора 12 слоев из восьмиузловых элементов, которые вырождаются в шестиузловые элементы, охватывающие вершину трещины. Радиус первого слоя, окружающего кончик трещины, составлял 0,33 мм.

Как уже отмечалось, в литературе отсутствуют данные по результатам решения нестационарных задач термоупругости для тел с теплонепроницаемыми трещинами. Для проверки работоспособности выбранной методики была рассмотрена задача стационарной термоупругости для пластины с центральной теплоизолированной трещиной длины $2l$ при плоской деформации; боковые края пластины теплоизолированы, на нижнем и верхнем краях заданы температуры $-T_1$ и T_1 соответственно. Сравнение полученных результатов с литературными данными [7] показало, что оба метода позволяют определить коэффициенты интенсивности напряжений с хорошей точностью (см. рис. 8, (a),(b) на вклейке).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ ДЛЯ ОДНОЙ ТРЕЩИНЫ

Расчёты были выполнены для оболочки из стали 22К (внутренний диаметр $D = 1600$ мм, $h = 90$ мм, $\lambda = 10000$ Вт/(м·°C)). Начальная температура среды и оболочки принималась равной 0 °C, конечная температура составляла 350 °C

Характерный вид распределения температурного поля вблизи трещины представлен на рис. 9 на вклейке. Основной характеристикой возмущенного трещиной температурного поля является скачок температуры при переходе через линию трещины ΔT^\pm . На рис. 2 и рис. 3 показано, как меняется максимум величины ΔT^\pm в зависимости от длины трещины и скорости нагрева. Вычисления

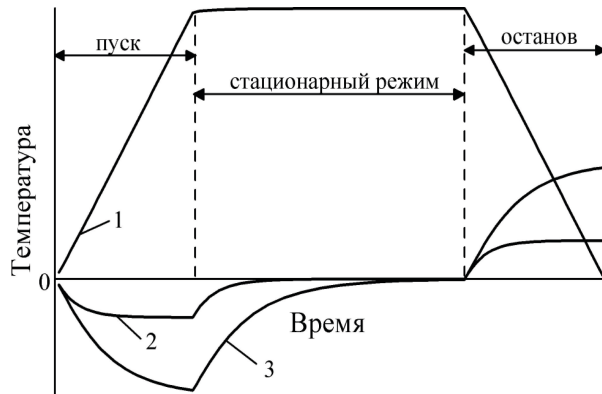


Рис. 2. Изменение характерных температур в цикле “пуск – выход на стационарный режим – останов”: 1 – температура внутренней поверхности, 2 – перепад температур между верхней и нижней поверхностями вдали от трещины, 3 – максимальный скачок температуры через линию трещины ΔT_{\max}^\pm .

показывают, что при нагреве вблизи вершины трещины напряженное состояние является поперечным сдвигом ($K_I = 0, K_{II} \neq 0$). При охлаждении реализуется сложное нагружение ($K_I \neq 0, K_{II} \neq 0$). Максимальные значения КИН соответствуют тому моменту времени, когда разность между температурами верхнего и нижнего берегов трещины достигает наибольшего значения. При конечных скоростях нагрева максимум достигается в конце нестационарного режима, при тепловом ударе – через несколько минут после начала взаимодействия со средой (рис. 4).

Рассмотрим, как изменяются значения коэффициентов интенсивности при увеличении длины трещины. Величины K_I и K_{eq}

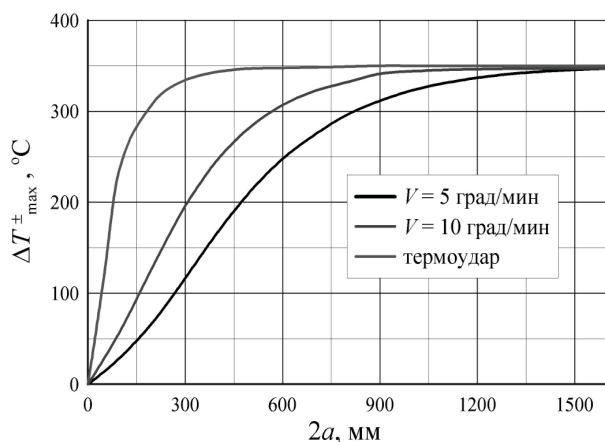


Рис. 3. Расчётные зависимости ΔT_{\max}^{\pm} от длины трещины $2a$ ($d_1 = h/2$).

монотонно растут, пока длина трещины не достигнет некоторого значения ($2a = 600$ мм при скорости охлаждения 5 град/мин; $2a = 400$ мм при термоударе), а затем начинает убывать (рис. 5). Объясняется это тем, что начиная с некоторой величины a , которая зависит от теплофизических свойств материала, скорости изменения температуры среды, положения трещины по толщине и других параметров, скачок температур через линию трещины достигает своего максимального значения.

На рис. 5 штриховой линией показана зависимость относительного раскрытия трещины $\frac{\delta}{2a}$ от его длины (δ — раскрытие трещины в центре). На основании полученных результатов можно ввести понятие эквивалентной длины расслоения $2a^*$, определив ее как величину, при которой достигается максимум K_{eq} .

Как правило, расслоение по толщине расположено в средней трети прокатного листа. Поэтому вычисления проводились для случаев $d_1 = h/3$, $d_1 = h/2$, $d_1 = 2h/3$. Было получено, что при смещении трещины к наружной поверхности коэффициенты интенсивности напряжений несколько увеличиваются, а при смещении к внут-

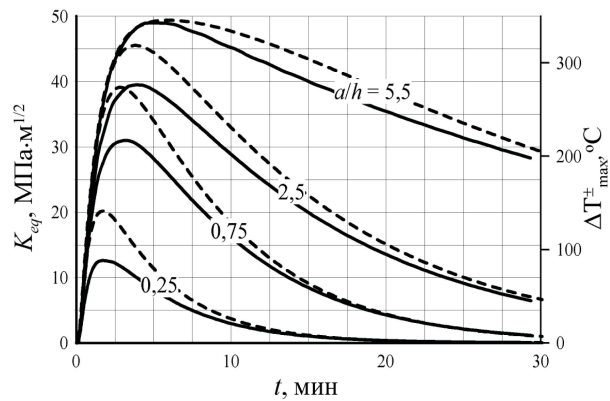


Рис. 4. Временная зависимость величин ΔT_{\max}^{\pm} и K_{eq} при тепловом ударе.

ренней — уменьшаются.

В режиме нагрева максимальное значение K_{eq} достигается при температуре $350\text{ }^{\circ}\text{C}$, которая значительно выше переходной температуры хрупкости T_k материала. При расхолаживании максимум K_I и K_{eq} достигается при сравнительно невысоких температурах ($T \approx T_k$ для стали 22К, $T_k \approx 70\text{ }^{\circ}\text{C}$), поэтому этот режим наиболее опасен с позиций разрушения. В рассмотренном примере K_{eq} не достигает критического значения при любой длине трещины: для стали 22К $K_{Ic} > 80\text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Следовательно, изолированное расслоение в обечайках рассматриваемого оборудования не может привести к разрушению.

Необходимо отметить, что оценка прочности по плоской модели идёт в запас. Полученные из решения плоской задачи значения КИН будут близки к точным для расслоений, сильно вытянутых в осевом направлении.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ ДЛЯ АНСАМБЛЯ ТРЕЩИН

В случае нестационарной задачи для совокупности одинаковых

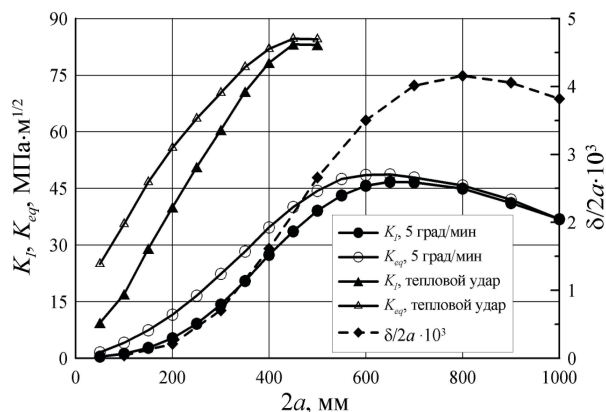


Рис. 5. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от длины трещины при расколаживании ($d_1 = h/2$).

трещин показано, что взаимодействие трещин приводит к увеличению коэффициентов интенсивности напряжений по сравнению со случаем изолированной трещины (см. рис. 5, 6). Оказалось, что наибольшие значения K_I , K_{II} , K_{eq} достигаются при небольшом перекрытии трещин ($d_3 < 0$). Величина коэффициентов интенсивности определяется скоростью изменения температуры, положением по толщине оболочки и размером трещин.

Анализ напряжений показал, что нормальные напряжения достигают наибольших значений в вытянутой области между соседними вершинами трещин. В этом месте наиболее вероятно “проскакивание” трещины между соседними вершинами 1 и 2 на рис. 1. Из полученных результатов следует, что близкорасположенные трещины могут объединяться.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Сформулирована и реализована расчётная модель сосуда высокого давления с технологическим дефектом типа рассло-

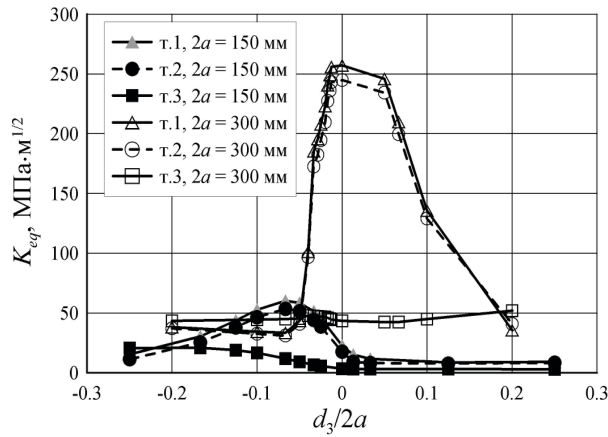


Рис. 6. Эквивалентный коэффициент напряжений K_{eq} в вершинах трещин при различном их взаимном расположении ($d_1 = h/2$).

ние при переходных режимах эксплуатации. Для оценки трещиностойкости численно исследована задача нестационарной термоупругости для цилиндрической оболочки с термоизолированными дуговыми трещинами.

- Показано, что метод конечных элементов является эффективным при решении задач нестационарной термоупругости для тел с термоизолированными трещинами.
- Выполненная оценка трещиностойкости обечаек сосудов с расслоением показала, что при основных режимах эксплуатации расслоение непосредственно не приводит к разрушению, хотя и является концентратором напряжений.
- Согласно результатам расчётов, выполненных для ансамбля трещин, близкорасположенные расслоения могут объединяться. Поэтому при расчёте отдельные расслоения, расположенные на одном уровне по толщине или достаточно близко друг

к другу, следует моделировать одной эквивалентной трещиной.

5. Численно подтверждаются данные многолетних наблюдений за состоянием зон расслоя в обечайках барабанов котлов высокого давления: появления новых участков расслоя в процессе эксплуатации не происходит, в то же время возможным является увеличение отдельных участков расслоя за счет их слияния (объединения).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саврук М. П.* Двумерные задачи для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Термоупругое состояние плоскости, ослабленной произвольно ориентированными теплоизолированными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. Вып. 1, 1975. С. 48–54.
3. *Зверьков Б. В., Балашов Ю. В., Надцина Л. В.* О расслоении листов в барабанах котлов высокого давления // Труды ЦКТИ. Вып. 272. СПб. 1992. С. 27–31.
4. *Чэсу У. Д., Авицур Б.* Критерий расслоения полосы при прокатке // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Б, Вып. 2, 1989. С. 165–174.
5. *Партоп В. З.* Механика разрушения. М.: Наука, 1990. 78 с.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 149 с.
7. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М.: Мир, 1990. 750 с.

ПОВЕДЕНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО SD МАТЕРИАЛА ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

Р. Ю. Юшин

На основе решения задачи упругопластического изгиба круглой изотропной пластины, находящейся под действием гидростатического давления при условии ее свободного опирания, построено решение для трансверсально-изотропных круглых пластин с эффектом SD. Изучено влияние коэффициентов анизотропии и разносопротивляемости на напряженно-деформируемое состояние таких пластин.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач механики твердого деформируемого тела является определение механических условий, вызывающих появление и развитие пластических деформаций в элементах конструкций. Изучению условий текучести и упрочнения различных материалов в условиях сложного напряженного состояния посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ.

С каждым годом человечество ставит перед собой все более сложные задачи при проектировании и строительстве. Обычные материалы и сплавы порой не справляются с возложенными на них функциями. Для улучшения характеристик различными методами получают новые материалы, с особыми свойствами. Однако их поведение в сложных конструкциях еще далеко не изучено. Более того, старые методы расчетов на прочность порой невозможно применить, поэтому они должны совершенствоваться для учета новых свойств материалов.

За последние годы круг исследований в этой области значительно расширился в связи с использованием пластически анизотроп-

Работа выполнена при поддержке РФФИ, № 10-01-00244а.

Доклад на семинаре 16 марта 2010 г.

© Р. Ю. Юшин, 2010

ных, в частности, текстурованных металлов. Особый интерес представляет трансверсально-изотропный листовой прокат с повышенной сопротивляемостью пластическим деформациям в направлении толщины. Такие металлы обладают большими преимуществами по сравнению с изотропными при работе в условиях двухосного напряженного состояния, что находит применение в конструкциях, по форме близких к сфере или цилиндру, работающих под давлением. Однако в тех случаях, когда речь идет о толстолистовом металле, лабораторные исследования его пластических свойств в условиях двухосного напряженного состояния являются сложной технической проблемой. Одним из возможных путей её решения является проведение исследований на свободно опертой круглой пластине при её изгибе равномерным давлением. Этому исследованию должен предшествовать расчет напряженно-деформированного состояния анизотропной пластины, позволяющий описать развитие пластических областей.

В данной работе представлено решение задачи упругопластического изгиба круглой, свободно опертой пластины, равномерно нагруженной по одной из поверхностей, обладающей свойствами трансверсальной анизотропии и эффектом разносопротивляемости растяжению и сжатию. В зарубежной литературе данный эффект встречается под названием “эффект SD” (strength-different). Подробный вывод разрешающих уравнений был приведен в работах [1, 2]. В качестве отправной точки было использовано решение В.В. Соколовского для изотропной пластины, изложенное в работе [3]. Следует отметить, что это решение является приближенным и содержит ряд допущений, а именно: на границе между упругой и пластическими областями в пластине сохраняется непрерывность деформаций и интенсивности касательных напряжений, но не выполнено условие непрерывности интенсивности деформаций сдвига и самих напряжений. В качестве условия текучести используется критерий, предложенный О. Г. Рыбакиной [4], который учитывает и анизотропию, и эффект SD:

$$\sqrt{F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2} + \frac{\alpha_1}{3}\sigma_1 + \frac{\alpha_2}{3}\sigma_2 + \frac{\alpha_3}{3}\sigma_3 = 1. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные нормальные напряжения, $F, G, H, \alpha_1,$

α_2, α_3 — постоянные.

Для трансверсально-изотропной пластины при плоском напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$) выполняются равенства

$$F = G = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sigma_e^{(z)}} + \frac{1}{\sigma_c^{(z)}} \right)^2, \quad H = \frac{A}{8} \left(\frac{1}{\sigma_e} + \frac{1}{\sigma_c} \right)^2,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sigma_e} - \frac{1}{\sigma_c} \right),$$

где $\sigma_e^{(z)}, \sigma_e$ — пределы текучести при одноосном растяжении в направлении оси z и плоскости пластины соответственно, $\sigma_c^{(z)}, \sigma_c$ — пределы текучести при одноосном сжатии в направлении оси z и плоскости пластины соответственно.

Критерий текучести (1) для трансверсально-изотропной SD пластины имеет вид

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} + \beta\sigma = k, \quad (2)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad k = 2 \left(\frac{1}{\sigma_e} + \frac{1}{\sigma_c} \right)^{-1},$$

$$\beta = 3 \frac{\sigma_c - \sigma_e}{\sigma_e + \sigma_c}, \quad A = 2 - \left(\frac{1}{\sigma_e^{(z)}} + \frac{1}{\sigma_c^{(z)}} \right)^2 \left(\frac{1}{\sigma_e} + \frac{1}{\sigma_c} \right)^{-2}. \quad (3)$$

Будем называть A — коэффициентом анизотропии, β — коэффициентом разносопротивляемости (SD).

2. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

На рис. 1 изображено сечение круглой пластины радиуса a , толщины $2h$, находящейся в упругопластическом состоянии. Учет SD свойств материала пластины приводит к нарушению симметричного развития пластических областей сверху и снизу пластины [5]. А нейтральная поверхность, т.е. та, на которой напряжения обращаются в ноль, в этом случае уже не совпадает со срединной.

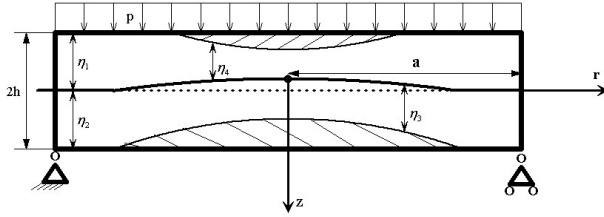


Рис. 1. Уругоупластическое состояние SD пластины.

Используя метод решения, предложенный в [3] и вводя новые переменные, как показано в [2], в этом случае также удастся построить систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая поддается численному интегрированию.

Уравнение равновесия приобретает вид

$$A_0 \frac{d\omega}{d\rho} + A_1 \frac{da_3}{d\rho} + A_2 \frac{da_4}{d\rho} + A_3 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{\rho B_1}{3} \left[t \sin \psi (\cos \psi - F \sin \psi) \left(\frac{(a_2 - a_3)^2}{(1 + t \cos \psi)^2} - \frac{(a_1 - a_4)^2}{(1 - t \cos \psi)^2} \right) - \right. \\ & \left. - (\sin \psi + F \cos \psi) \left(\frac{(a_2 - a_3)^2}{1 + t \cos \psi} - \frac{(a_1 - a_4)^2}{1 - t \cos \psi} \right) \right] - \\ & - \frac{\rho}{2} [(\sin \omega + F \cos \omega)(a_1^2 + a_2^2 - (a_2 - a_3)^2 - (a_1 - a_4)^2)], \\ A_1 = & \frac{\rho}{3} (\cos \psi - F \sin \psi) \left(\frac{2(a_1 - a_4)T_1}{1 - t \cos \psi} - \frac{2(a_2 - a_3)(1 + T_1)}{1 + t \cos \psi} \right) + \\ & + \frac{\rho}{2} [(\cos \omega - F \sin \omega + t)(2a_3 T_1(-1) + 2(a_2 - a_3)) + \\ & + (\cos \omega - F \sin \omega - t)2a_4 T_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{\rho}{3} (\cos \psi - F \sin \psi) \left(\frac{2(a_2 - a_3)T_2}{1 + t \cos \psi} - \frac{2(a_1 - a_4)(1 + T_2)}{1 - t \cos \psi} \right) + \\
&+ \frac{\rho}{2} [(\cos \omega - F \sin \psi + t)2a_3T_2 + (\cos \omega - F \sin \omega - t) \times \\
&\quad \times (2a_1 - 2a_4(1 + T_2))], \\
A_3 &= \frac{2\rho^2}{\sqrt{3}} - \frac{2F \sin \psi}{3} \left(\frac{(a_2 - a_3)^2}{(1 + t \cos \psi)} + \frac{(a_1 - a_4)^2}{(1 - t \cos \psi)} \right) - \\
&- F \sin \omega (a_1^2 + a_2^2 - (a_2 - a_3)^2 - (a_1 - a_4)^2).
\end{aligned}$$

Здесь

$$B_1 = \frac{(1 - \nu)(2 + A) \cos^2 \psi}{(1 + \nu)(2 - A) \cos^2 \omega}, \quad tg \psi = \frac{(1 - \nu)(2 + A)}{(1 + \nu)(2 - A)} tg \omega.$$

Уравнение совместности деформации для нашей задачи распадается на два — для верха и низа пластины. Для верхней части оно записывается так:

$$A_4 \left(2T_2 \frac{da_4}{d\rho} - (2T_1 + 1) \frac{da_3}{d\rho} \right) + A_5 \frac{d\omega}{d\rho} + A_6 = 0, \quad (5)$$

а для нижней части:

$$A_7 \left(2T_1 \frac{da_3}{d\rho} - (2T_2 + 1) \frac{da_4}{d\rho} \right) + A_8 \frac{d\omega}{d\rho} + A_9 = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
A_4 &= \rho \cos(\psi - \mu_0)(1 - t \cos \psi); \\
A_5 &= \rho B_1 (a_1 - a_4)(\sin(\psi - \mu_0) - t \sin \mu_0); \\
A_6 &= -2(a_1 - a_4)(1 - t \cos \psi) \sin \psi \sin \mu_0; \\
A_7 &= \rho \cos(\psi - \mu_0)(1 + t \cos \psi); \\
A_8 &= \rho B_1 (a_2 - a_3)(\sin(\psi - \mu_0) + t \sin \mu_0); \\
A_9 &= -2(a_2 - a_3)(1 + t \cos \psi) \sin \psi \sin \mu_0; \\
T_1 &= \frac{\sigma_e^{(z)}}{\sigma_e^{(z)} + \sigma_c^{(z)}}, \quad T_2 = \frac{\sigma_e^{(z)}}{\sigma_e^{(z)} + \sigma_c^{(z)}}.
\end{aligned}$$

Если теперь объединить (4), (5) и (6), то получаем систему дифференциальных уравнений, содержащую три уравнения и три неизвестные функции $a_3(\rho)$, $a_4(\rho)$ и $\omega(\rho)$. Система имеет третий порядок и нелинейные коэффициенты. Численная реализация проводится разностным методом с шагом по ρ , начиная вблизи центра пластины (так как $\rho = 0$ — особая точка, используется известный подход о введении в центр жесткой вставки малого размера). В результате расчета строятся зависимости $\omega_i(\rho_i)$, $a_3(\rho_i)$, $a_4(\rho_i)$ на каждом шаге. Расчет имеет промежуточную точку $a_4 = 0$, после чего принимается $a_4 \equiv 0$ и расчет продолжается для a_3 .

Значение $\rho_i^{(up)}$ при $a_4 = 0$ фиксируется и определяет безразмерный радиус пластической области на верхней поверхности пластины. При достижении условия $a_3 = 0$ фиксируется значение $\rho_i^{(down)}$, определяющее безразмерный радиус пластической области на нижней поверхности пластины.

Замыкание задачи осуществляется склеиванием упругопластического решения и известного решения для упругого кольца, используя требование непрерывности моментов в радиальном и круговом направлениях, а также условие свободного опирания пластины $M_r(a) = 0$, как подробно показано в работе [2]. Таким образом, удастся решить задачу до конца, т. е. построить зависимость “нагрузка – прогиб” в центре пластины.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Отметим, что уравнения (4), (5), (6) можно использовать и для решения частных случаев постановки задачи, а именно, при $A = 1$, $\beta = 0$ они существенно упрощаются и становятся разрешающими уравнениями для решения изотропной задачи, а при $A > 1$, $\beta = 0$ — для трансверсально-изотропной задачи.

Изотропная задача была решена В.В. Соколовским [3] для $\nu = 0.25$ и $\nu = 0.5$. На рисунках 2 и 3 проведено графическое сравнение известных результатов для $\nu = 0.5$ и расчетов по новым формулам. На рисунке 2 изображены зависимости “глубина–радиус” пластической области пластины, на рисунке 3 — “приведенная нагрузка–приведенная стрела прогиба” для “классического” и нового решений.

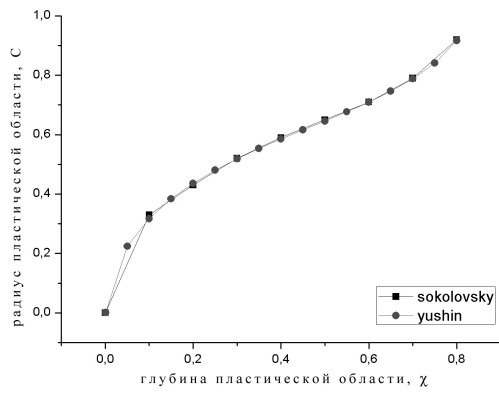


Рис. 2. Зависимость “глубина–радиус” пластической области при возрастании нагрузки, $\nu = 0,5$.

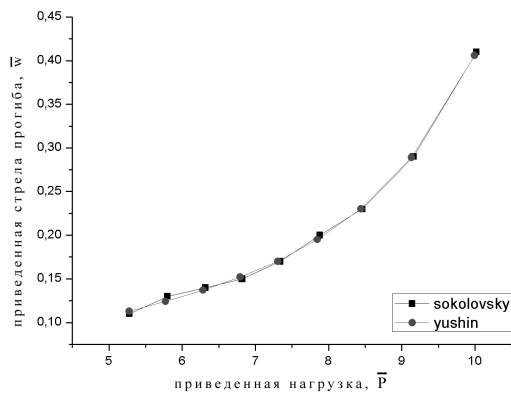


Рис. 3. Зависимость “приведенная нагрузка–приведенная стрела прогиба”, $\nu = 0,5$.

Видно, что графики совпадают почти идеально, а в некоторых случаях новые результаты даже имеют лучшую гладкость по сравнению со старыми, полученными без использования средств ЭВМ. Таким образом, результаты качественно совпадают и новое решение численно уточняет старое.

Аналогичные результаты получаются и при сравнении решений для трансверсально-изотропных случаев, полученных Г.В. Павилайнен в работе [6] и при решении по новым формулам (рис. 4).

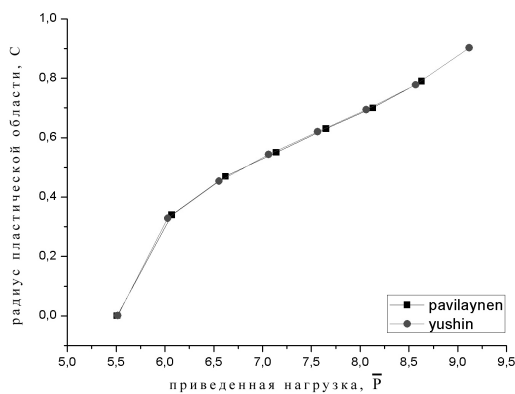


Рис. 4. Зависимость “приведенная нагрузка-радиус пластической области”, $A = 1,32, \nu = 0,35$.

Перейдем к сравнению результатов решений задачи упругопластического изгиба трансверсально-изотропных SD пластин. Выясним влияние коэффициента β таких пластин. Для этого зафиксируем значение коэффициента $A = 1,2$, примем за единицу некоторое значение σ_e и зададим набор значений σ_c , которые будут возрастать относительно σ_e .

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma_e^{(z)}} - \frac{1}{\sigma_c^{(z)}} = 2 \left(\frac{1}{\sigma_e} - \frac{1}{\sigma_c} \right), \\ A = 2 - \left(\frac{\sigma_c \sigma_e}{\sigma_c^{(z)} \sigma_e^{(z)}} \left(\frac{\sigma_e^{(z)} + \sigma_c^{(z)}}{\sigma_e + \sigma_c} \right) \right)^2. \end{cases} \quad (7)$$

найдем значения коэффициентов β , $\sigma_e^{(z)}$ и $\sigma_c^{(z)}$. Составим таблицу, в которой приведены четыре предела текучести материала и соответствующие значения коэффициента анизотропии A и SD-коэффициента β :

Таблица 1. Параметры трансверсально-изотропных SD пластин.

№	A	β	σ_e	σ_c/σ_e	$\sigma_e^{(z)}/\sigma_e$	$\sigma_c^{(z)}/\sigma_e$
1	1,2	0,143	1	1,1	1,059	1,311
2	1,2	0,273	1	1,2	1,014	1,531
3	1,2	0,333	1	1,25	0,995	1,653
4	1,2	0,391	1	1,3	0,978	1,784
5	1,2	0,447	1	1,35	0,964	1,926

Во всех случаях были рассмотрены круглые пластины радиуса 100 см, толщины 20 см, $\nu = 0.3$, $E = 120000$ МПа.

На основе результатов, полученных для каждой пластины из Табл. 1, построим графики для соответствующего набора коэффициентов β . Зависимость “глубина–радиус” пластической области приведена на рисунке 5, “приведенная нагрузка–радиус” пластической области — на рисунке 6, “приведенная нагрузка–глубина” пластической области — на рисунке 7, “приведенная нагрузка–приведенная стрела прогиба” — на рисунке 8.

Видно, что при одинаковой глубине пластической области, ее радиус уменьшается с ростом β . В то же время, при одинаковом радиусе пластической области наблюдается рост ее глубины при росте β и такая зависимость прослеживается независимо от изменения параметра A .

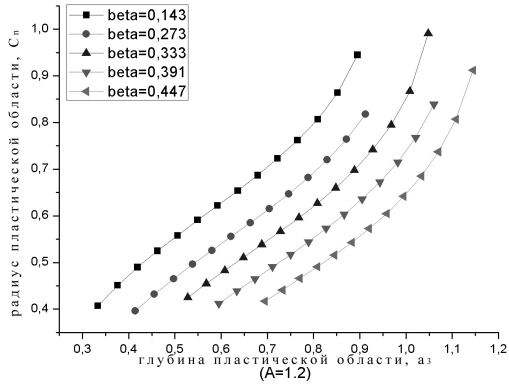


Рис. 5. Зависимость “глубина–радиус” пластической области, $A = 1.2$.

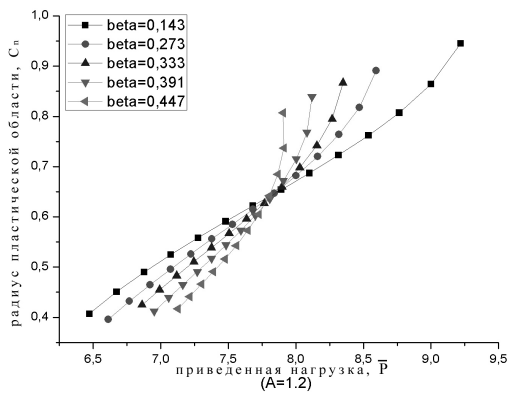


Рис. 6. Зависимость “приведенная нагрузка–радиус пластической области”, $A = 1.2$.

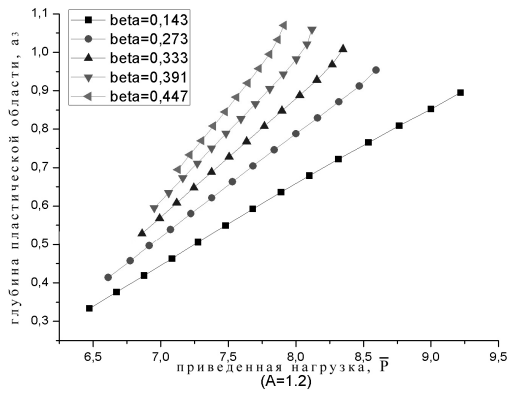


Рис. 7. Зависимость “приведенная нагрузка-глубина пластической области”, $A = 1.2$.

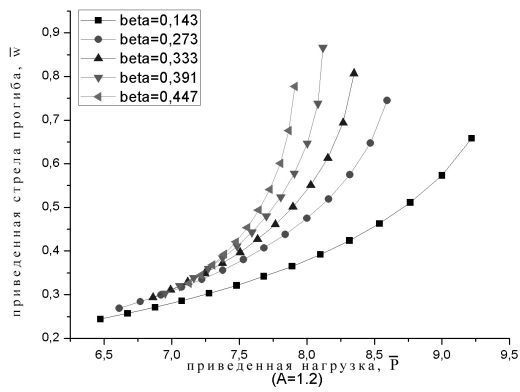


Рис. 8. Зависимость “приведенная нагрузка-приведенная стрела прогиба”, $A = 1.2$.

Интересна зависимость “приведенная нагрузка-радиус” пластической области. При малых нагрузках и, соответственно, при мало развитой пластичности, при фиксированной нагрузке радиус пластической области с ростом β сначала уменьшается, а потом начинает увеличиваться. А для получения пластических областей с одинаковым радиусом, с ростом β к пластинам при мало развитой пластичности нужно прикладывать большую нагрузку, но при развитии пластичности ситуация меняется и нагрузка уменьшается.

С ростом SD-параметра β наблюдается увеличение глубины пластической области при одинаковых нагрузках. Видно, что глубина начинает расти быстрее и при росте параметра анизотропии A .

Видно, что происходит снижение несущей способности пластины с ростом параметра β , ведь при одинаковых нагрузках стрела прогиба становится гораздо больше. Аналогично, для получения одинаковой стрелы прогиба, пластина с меньшим SD-коэффициентом должна быть нагружена сильнее.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на основе построенных решений могут исследоваться пластины из любых современных титановых сплавов, кроме этого, возможно решение обратной задачи: по указанной величине нагрузки могут быть подобраны величины коэффициентов анизотропии и разносопротивляемости, обеспечивающие заданную прочность конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юшин Р.Ю. Упругопластический изгиб трансверсально-изотропных пластин: Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”/ Под ред. А.Л. Смирнова, Е.Ф. Жигалко. Изд. СПбГУ, 2007. С. 55–75.
2. Юшин Р.Ю. О Возможности учета пластической анизотропии при изгибе круглых пластин// Вестник С.-Петербург. ун-та. 2010. № 1. С. 134–140.
3. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. С. 607.
4. Рыбакина О.Г. Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности//Вестн. Ленингр. ун-та., 1982. №14. С. 132–142.
5. Матвеева Е.В. Павилайнен Г.В. Учет эффекта разносопротивляемости материала при изгибе пластин. Вторые Поляховские чтения: Избранные труды.

СПб., 2000., С. 294–304.

6. *Павилайтис Г.В.* Упругопластический изгиб круглой трансверсально-изотропной пластинки // Вестн. Ленингр. ун-та. 1983. № 13. С. 70–75.

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ КОНСОЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

В. Я. Павилайнен, А. Н. Тулкина

На основе теории С.П. Тимошенко получены точные решения задач о свободных и вынужденных колебаниях системы двух различных шарнирно соединенных консольных стержней, первый из которых имеет заданные вынужденные колебания левого заземленного конца с амплитудой A_0 , а второй жестко заземлен на правом конце. Дано развитие построенного решения на случай, когда между стержнями введено упругое сопряжение с коэффициентом податливости s . Получены расчетные формулы для определения прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил. Выполнены числовые расчеты на основе решений указанных задач, результаты которых иллюстрируются в таблицах и на графиках и сравниваются с результатами, полученными на основе классической теории Бернулли–Эйлера.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В динамических задачах расчета колебаний консольного стержня необходимо, по сравнению с классической теорией Бернулли–Эйлера, учесть влияния в уравнениях равновесия инерционных нагрузок при повороте элемента поперечного сечения, введенный Д.В. Стреттом (Рэлеем) [1]. В дальнейшем С.П. Тимошенко дополнил уравнение Рэлея еще одним слагаемым, учитывающим деформации сдвига, и в окончательном виде в теории оно получило название уравнения С.П. Тимошенко [2].

В данной статье рассматриваются задачи о свободных и вынужденных колебаниях, вызываемых поперечными гармоническими колебаниями заземленного левого конца одного из стержней при заданных амплитуде и частоте.

Рассмотрим систему из двух консольных стержней, соединен-

ных между собой шарнирно. Первый стержень длиной l_1 , ось которого Ox_1 лежит в вертикальной плоскости симметрии x_1Oy_1 ($0 \leq x_1 \leq l_1$), а конец $x_1 = l_1$ шарнирно соединен с концом второго стержня $x_2 = l_2$, (концы $x_1 = 0$ первого стержня и $x_2 = 0$ второго стержня жестко заделаны). Положительные направления изгибающего момента M_i и поперечной силы Q_i в сечениях x_i и $x_i + dx_i$, а также распределенной на оси инерционной поперечной нагрузки $q_i(x_i, t)$ и распределенного инерционного момента $m_i(x_i, t)$ при повороте элемента показаны на рис. 1. Где i — номер стержня ($i = 1, 2$), A_0 и ω — заданные амплитуда и круговая частота вынужденных колебаний системы на конце $x_1 = 0$ первого стержня.

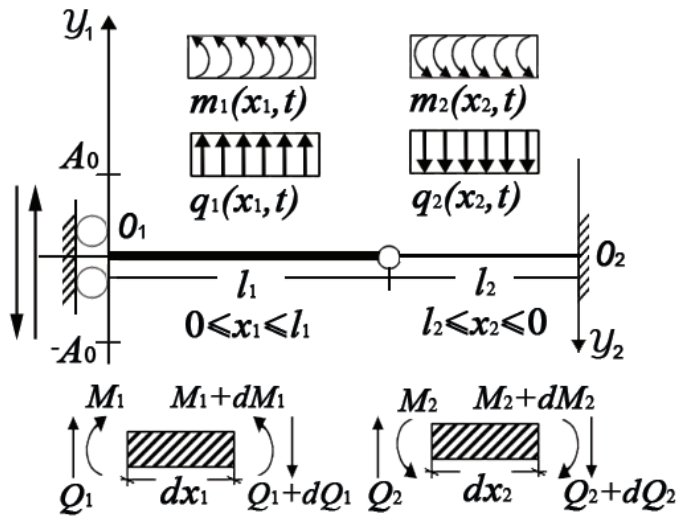


Рис. 1. Система координат и действующие нагрузки.

Уравнения равновесия малого элемента i -го стержня (неизменные для всех рассматриваемых в дальнейшем задач) имеют вид

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_i} - Q_i + m_i(x_i, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = q_i(x_i, t), \quad (2)$$

отличающийся от уравнений С.П. Тимошенко [2] только знаками некоторых слагаемых вследствие принятого противоположного направления оси Oy_i (см. рис. 1).

Нагрузки $q_i(x_i, t)$ и $m_i(x_i, t)$ определяются формулами

$$q_i(x_i, t) = -\rho F \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$m_i(x_i, t) = -\rho J \frac{\partial^3 y_i}{\partial t^2 \partial x_i}, \quad (4)$$

в которых $y_i = y_i(x_i, t)$ — уравнение изогнутой оси i -го стержня, ρ_i, F_i, J_i — соответственно плотность материала, площадь и момент инерции его поперечного сечения.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ СИСТЕМЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Данное решение приводится здесь в кратком изложении, что необходимо для его обобщения на дальнейшие задачи и сравнения получаемых результатов. Система (1), (2) с учетом только нагрузки (3) приводится в работе [2] к уравнению равновесия:

$$E_i J_i \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_i^4} + \rho_i F_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

При изучении нормальных форм гармонических колебаний применением метода Фурье к функции $y_i(x_i, t) = X_i(x_i) \sin \omega t$ и после введения безразмерного аргумента $\xi_i = x_i/l_i$ ($0 \leq \xi_i \leq 1$) (далее индекс i у аргумента ξ_i опускается) уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^4 X_i}{\partial \xi^4} - \frac{\rho_i F_i}{E_i J_i} \omega^2 l_i^4 X_i = 0, \quad (6)$$

и его решение в рассматриваемых задачах должно удовлетворять граничным условиям для первого стержня в задаче о свободных колебаниях:

$$X_1(0, t) = \left. \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = M_1(1, t) = 0, \quad (7)$$

в задаче о вынужденных колебаниях:

$$X_1(0, t) = A_0 \sin \omega t, \quad \left. \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = M_1(1, t) = 0, \quad (8)$$

и для второго стержня в обеих задачах:

$$X_2(0, t) = \left. \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = M_2(1, t) = 0, \quad (9)$$

а также в каждой задаче кинематическому и статическому условиям сопряжения стержней:

$$X_1(1, t) = -X_2(1, t), \quad (10)$$

$$Q_1(1, t) = Q_2(1, t). \quad (11)$$

Изгибающие моменты M_i и поперечные силы Q_i определяются формулами

$$M_i(\xi) = \frac{E_i J_i}{l_i^2} \frac{\partial^2 X_i}{\partial \xi^2}, \quad Q_i(\xi) = \frac{E_i J_i}{l_i^3} \frac{\partial^3 X_i}{\partial \xi^3}. \quad (12)$$

Если обозначить

$$\frac{\rho_i F_i}{E_i J_i} \omega^2 l_i^4 = k_i^4, \quad (13)$$

то для i -го стержня (6) имеет корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm k_i$, $\lambda_{3,4} = \pm i k_i$, дающие общее решение для системы

$$X_1(\xi) = A_1 \cosh k_1 \xi + B_1 \sinh k_1 \xi + C_1 \cos k_1 \xi + D_1 \sin k_1 \xi, \quad (14)$$

$$X_2(\xi) = A_2 \cosh k_2 \xi + B_2 \sinh k_2 \xi + C_2 \cos k_2 \xi + D_2 \sin k_2 \xi. \quad (15)$$

На основе уравнения (6) можно построить решение задачи о свободных колебаниях, с учетом граничных условий (7) и (9) получаем

$$X_1(\xi) = A_1 \left\{ \cosh k_1 \xi - \cos k_1 \xi - \frac{\cosh k_1 + \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\sinh k_1 \xi - \sin k_1 \xi) \right\}, \quad (16)$$

$$X_2(\xi) = A_2 \left\{ \cosh k_2 \xi - \cos k_2 \xi - \frac{\cosh k_2 + \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} (\sinh k_2 \xi - \sin k_2 \xi) \right\}. \quad (17)$$

Частотное уравнение получаем из условий сопряжения (10), (11) которое после некоторых преобразований окончательно имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 (1 + \cosh k_1 \cos k_1) (\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2) + \\ & + \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 (1 + \cosh k_2 \cos k_2) (\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Значения k_i из уравнения (18) можно найти численным методом, после чего из (13) определяется спектр собственных круговых частот:

$$\omega_n = \frac{k_i^2}{l_i^2} \sqrt{\frac{E_i J_i}{\rho_i F_i}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (19)$$

где n — номера корней уравнения (18) и соответствующей собственной круговой частоты.

Таким образом, амплитуды свободных колебаний определяются формулами (16) и (17), где постоянная A_1 — произвольная, а A_2 выражается через A_1 из кинематического условия сопряжения (10)

$$A_2 = -A_1 \frac{\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \frac{\sinh k_2 + \sin k_2}{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}. \quad (20)$$

На основе (6) можно построить решение задачи о вынужденных колебаниях, с учетом граничных условий (8) и (9) получаем

$$X_1(\xi) = A_1 (\cosh k_1 \xi - \cos k_1 \xi) + B_1 (\sinh k_1 \xi - \sin k_1 \xi) + A_0 \cos k_1 \xi, \quad (21)$$

$$X_2(\xi) = A_2 (\cosh k_2 \xi - \cos k_2 \xi) + B_2 (\sinh k_2 \xi - \sin k_2 \xi). \quad (22)$$

Постоянные B_i находим из условий $M_i = 0$

$$B_1 = -A_1 \frac{\cosh k_1 + \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} + A_0 \frac{\cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1}, \quad (23)$$

$$B_2 = -A_2 \frac{\cosh k_2 + \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2}. \quad (24)$$

Тогда решение системы принимает вид

$$X_1(\xi) = A_1 \left\{ \cosh k_1 \xi - \cos k_1 \xi - \frac{\cosh k_1 + \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\sinh k_1 \xi - \sin k_1 \xi) \right\} + \\ + A_0 \left\{ \cos k_1 \xi + \frac{\cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\sinh k_1 \xi - \sin k_1 \xi) \right\}, \quad (25)$$

$$X_2(\xi) = A_2 \left\{ \cosh k_2 \xi - \cos k_2 \xi - \frac{\cosh k_2 + \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} (\sinh k_2 \xi - \sin k_2 \xi) \right\}. \quad (26)$$

В формулах (25), (26) A_1 и A_2 определяются на конце $\xi = 1$ из условий сопряжения (10), (11) приводящих к системе

$$A_1 \frac{\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} + A_2 \frac{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} = \\ = -A_0 \frac{\sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1}, \quad (27)$$

$$A_1 \frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} - A_2 \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} = \\ = A_0 \frac{E_1 J_1}{2l_1^3} k_1^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1 + \sinh k_1 \sin k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1}, \quad (28)$$

имеющей решение

$$A_1 = A_0 \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad A_2 = A_0 \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (29)$$

где

$$\Delta = -\frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \frac{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} -$$

$$-\frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} \frac{\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} \frac{\sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} - \\ & - \frac{E_1 J_1}{2l_1^3} k_1^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1 + \sinh k_1 \sin k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \times \\ & \times \frac{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2}, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 \frac{(1 + \cosh k_1 \cos k_1) \sinh k_1 \cos k_1}{(\sinh k_1 + \sin k_1)^2} + \\ & + \frac{E_1 J_1}{2l_1^3} k_1^3 (1 + \cosh k_1 \cos k_1 + \sinh k_1 \sin k_1) \times \\ & \times \frac{(\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1)}{(\sinh k_1 + \sin k_1)^2}. \quad (32) \end{aligned}$$

После подстановки формул (30), (31), (32), с учетом (29) в (25), (26) окончательно получаем решение задачи о вынужденных колебаниях консольного стержня, учитывающее все возможные случаи резонанса при $\Delta = 0$ (из (30), после сокращения на постоянный множитель получаем частотное уравнение (18)). Изгибающие моменты и поперечные силы определяются формулами (12) и окончательно принимают вид

$$\begin{aligned} M_1(\xi) = & \frac{E_1 J_1}{l_1^2} k_1^2 \left\{ A_1 \left\{ \cosh k_1 \xi + \cos k_1 \xi - \frac{\cosh k_1 + \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\sinh k_1 \xi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin k_1 \xi) \right\} + A_0 \left\{ -\cos k_1 \xi + \frac{\cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\sinh k_1 \xi + \sin k_1 \xi) \right\} \right\}, \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2(\xi) = & \frac{E_2 J_2}{l_2^2} k_2^2 A_2 \left\{ \cosh k_2 \xi + \cos k_2 \xi - \right. \\ & \left. - \frac{\cosh k_2 + \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} (\sinh k_2 \xi + \sin k_2 \xi) \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

$$Q_1(\xi) = \frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 \left\{ A_1 \left\{ \sinh k_1 \xi - \sin k_1 \xi - \frac{\cosh k_1 + \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\cosh k_1 \xi + \cos k_1 \xi) \right\} + A_0 \left\{ \sin k_1 \xi + \frac{\cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} (\cosh k_1 \xi + \cos k_1 \xi) \right\} \right\}, \quad (35)$$

$$Q_2(\xi) = \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 A_2 \left\{ \sinh k_2 \xi - \sin k_2 \xi - \frac{\cosh k_2 + \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} (\cosh k_2 \xi + \cos k_2 \xi) \right\}. \quad (36)$$

В частном случае одинаковых стержней из формул (30) – (32) получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= -2(1 + \cosh k \cos k)(\cosh k \sin k - \sinh k \cos k), \\ \Delta_1 &= (1 + \cosh k \cos k) \sinh k \cos k - \\ &- \frac{1}{2}(1 + \cosh k \cos k + \sinh k \sin k)(\cosh k \sin k - \sinh k \cos k), \\ \Delta_2 &= (1 + \cosh k \cos k) \sinh k \cos k + \\ &+ \frac{1}{2}(1 + \cosh k \cos k + \sinh k \sin k)(\cosh k \sin k - \sinh k \cos k). \end{aligned}$$

3. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ШАРНИРНО СОЕДИНЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

В задачах о свободных и вынужденных колебаниях уравнения равновесия (1), (2) сохраняют свой вид, а угол поворота поперечного сечения в теории С.П. Тимошенко записывается в виде суммы:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \psi_i + \gamma_i,$$

где γ_i — угол сдвига i -го стержня, а ψ_i — угол поворота, определяющий величину изгибающего момента (касательные напряжения, соответствующие углу γ_i , момента не вызывают).

Тогда связь момента M_i и угла поворота ψ_i представима формулой

$$M_i = E_i J_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad (37)$$

а соотношение между поперечной силой Q_i и углом сдвига γ_i , полученное по формуле Журавского, будет иметь вид

$$\frac{nQ_i}{F_i} = \tau_i = -G_i \gamma_i = -G_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \psi_i \right), \quad (38)$$

откуда следует

$$Q_i(x) = -\frac{G_i F_i}{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \psi_i \right). \quad (39)$$

Здесь G_i — модуль сдвига i -го стержня, n — коэффициент формы поперечного сечения, имеющий значение $n = 3/2$ в случае прямоугольника (см.[3]). Знак «минус» в формуле (38) необходим для соблюдения равенства знаков в левой и правой частях формулы (39), так как при положительных значениях поперечной силы Q_i (см. рис. 1) угол сдвига в плоскости $x_i O y_i$ будет отрицательным. Такой же вид имеет аналогичная формула в работе [4].

С учетом формул (37), (39), а также (3), (4) уравнения равновесия (1), (2), связывающие статические величины M_i , Q_i с функцией прогиба $y_i = y_i(x_i, t)$ и угла поворота $\psi_i = \psi_i(x_i, t)$, примут вид

$$E_i J_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} + \frac{G_i F_i}{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \psi_i \right) - \rho_i J_i \frac{\partial^3 y_i}{\partial t^2 \partial x_i} = 0, \quad (40)$$

$$-\frac{G_i F_i}{n} \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) + \rho_i F_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = 0 \quad (41)$$

и представляют собой систему уравнений равновесия в перемещениях с искомыми функциями $y_i(x_i, t)$ и $\psi_i(x_i, t)$.

Применяя метод Фурье и исключая из системы (40), (41) функцию $\Psi_i(\xi)$, получаем разрешающее уравнение относительно функции $X_i(\xi)$:

$$\frac{\partial^4 X_i}{\partial \xi^4} + \left(\frac{\rho_i}{E_i} + \frac{n\rho_i}{G_i} \right) \omega^2 l_i^2 \frac{\partial^2 X_i}{\partial \xi^2} - \frac{\rho_i F_i}{E_i J_i} \omega^2 l_i^4 X_i = 0, \quad (42)$$

а при исключении из (40), (41) функции $X_i(\xi)$ — разрешающее уравнение относительно угла поворота $\Psi_i(\xi)$:

$$\frac{\partial^4 \Psi_i}{\partial \xi^4} + \left(\frac{\rho_i}{E_i} + \frac{n\rho_i}{G_i} \right) \omega^2 l_i^2 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \xi^2} - \frac{\rho_i F_i}{E_i J_i} \omega^2 l_i^4 \Psi_i = 0, \quad (43)$$

в котором оператор в левой части относительно $\psi_i(x_i, t)$ точно совпадает с оператором относительно $y_i(x_i, t)$ в (42). С использованием формулы (13) имеют место одинаковые характеристические уравнения для первого и второго стержня

$$\lambda^4 + \left(1 + \frac{nE_i}{G_i} \right) k_i^4 \alpha_i \lambda^2 - k_i^4 = 0, \quad (44)$$

где $\alpha_i = \frac{1}{12} \left(\frac{h_i}{l_i} \right)^2$ — малый параметр, и при $\lambda^2 = \beta$ находим

$$\beta_{1,2} = - \left(1 + \frac{nE_i}{G_i} \right) \frac{k_i^4 \alpha_i}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{nE_i}{G_i} \right)^2 \frac{k_i^8 \alpha_i^2}{4} + k_i^4},$$

корни уравнения (44) для первого стержня $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\beta_1} = \pm \gamma_1$ при $\beta_1 > 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|\beta_2|} = \pm i \gamma_2$ при $\beta_2 < 0$, для второго $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\beta_1} = \pm \delta_1$ при $\beta_1 > 0$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{|\beta_2|} = \pm i \delta_2$ при $\beta_2 < 0$.

Таким образом, системой фундаментальных решений уравнений (42), (43), как и ранее, будут функции

$$\cosh \gamma_1 \xi, \sinh \gamma_1 \xi, \cos \gamma_2 \xi, \sin \gamma_2 \xi, \cosh \delta_1 \xi, \sinh \delta_1 \xi, \cos \delta_2 \xi, \sin \delta_2 \xi,$$

а их общими решениями для обеих стержней —

$$X_1(\xi) = A_1 \cosh \gamma_1 \xi + B_1 \sinh \gamma_1 \xi + C_1 \cos \gamma_2 \xi + D_1 \sin \gamma_2 \xi, \quad (45)$$

$$\Psi_1(\xi) = \overline{A_1} \cosh \gamma_1 \xi + \overline{B_1} \sinh \gamma_1 \xi + \overline{C_1} \cos \gamma_2 \xi + \overline{D_1} \sin \gamma_2 \xi, \quad (46)$$

$$X_2(\xi) = A_2 \cosh \delta_1 \xi + B_2 \sinh \delta_1 \xi + C_2 \cos \delta_2 \xi + D_2 \sin \delta_2 \xi, \quad (47)$$

$$\Psi_2(\xi) = \overline{A_2} \cosh \delta_1 \xi + \overline{B_2} \sinh \delta_1 \xi + \overline{C_2} \cos \delta_2 \xi + \overline{D_2} \sin \delta_2 \xi, \quad (48)$$

где $A_i, B_i, C_i, D_i, \overline{A}_i, \overline{B}_i, \overline{C}_i, \overline{D}_i$ — произвольные постоянные. Определим их. Уравнение (41) можно записать для обеих стержней в виде

$$\frac{d^2 X_1}{d\xi^2} = a_{11} X_1 + a_{12} \frac{d\Psi_1}{d\xi}, \quad \frac{d^2 X_2}{d\xi^2} = b_{11} X_2 + b_{12} \frac{d\Psi_2}{d\xi}. \quad (49)$$

где $a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}$ — постоянные коэффициенты

$$a_{11} = -\frac{n\rho_1\omega^2 l_1^2}{G_1}, \quad a_{12} = l_1, \quad b_{11} = -\frac{n\rho_2\omega^2 l_2^2}{G_2}, \quad b_{12} = l_2. \quad (50)$$

После приравнивания коэффициентов при соответствующих фундаментальных функциях в (49) получаем выражения для постоянных

$$\begin{aligned} \overline{A}_1 &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 a_{12}} B_1, & \overline{B}_1 &= \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1 a_{12}} A_1, & D_1 &= \frac{\gamma_2 a_{12}}{\gamma_2^2 + a_{11}} \overline{C}_1, \\ \overline{D}_1 &= -\frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2 a_{12}} C_1, & \overline{A}_2 &= \frac{\delta_1^2 - b_{11}}{\delta_1 b_{12}} B_2, & \overline{B}_2 &= \frac{\delta_1^2 - b_{11}}{\delta_1 b_{12}} A_2, \\ D_2 &= \frac{\delta_2 b_{12}}{\delta_2^2 + b_{11}} \overline{C}_2, & \overline{D}_2 &= -\frac{\delta_2^2 + b_{11}}{\delta_2 b_{12}} C_2. \end{aligned} \quad (51)$$

Из граничных условий для задачи о свободных колебаниях системы $X_1(0) = \Psi_1(0) = 0$ и $X_2(0) = \Psi_2(0) = 0$ следует

$$C_1 = -A_1, \quad \overline{C}_1 = -\overline{A}_1, \quad C_2 = -A_2, \quad \overline{C}_2 = -\overline{A}_2. \quad (52)$$

Из граничных условий для задачи о вынужденных колебаниях системы $X_1(0) = A_0, \Psi_1(0) = 0$ и $X_2(0) = \Psi_2(0) = 0$ следует

$$C_1 = A_0 - A_1, \quad \overline{C}_1 = -\overline{A}_1, \quad C_2 = -A_2, \quad \overline{C}_2 = -\overline{A}_2. \quad (53)$$

В задаче о свободных колебаниях, используя граничные условия для моментов $M_i(1) = 0$, с учетом (37) находим коэффициенты B_i

$$B_1 = -A_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 - a_{11}} \frac{(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2}, \quad (54)$$

$$B_2 = -A_2 \frac{\delta_1}{\delta_1^2 - b_{11}} \frac{(\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 + (\delta_2^2 + b_{11}) \cos \delta_2}{\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2}. \quad (55)$$

Тогда решения (45) – (48) можно записать так:

$$X_1(\xi) = A_1 \left\{ \cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi - \frac{(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)} (\gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \xi - \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \sin \gamma_2 \xi) \right\}, \quad (56)$$

$$\Psi_1(\xi) = \frac{A_1}{a_{12}} \left\{ - \frac{(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2} \times \right. \\ \left. \times (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 \xi + \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \xi \right\}, \quad (57)$$

$$X_2(\xi) = A_2 \left\{ \cosh \delta_1 \xi - \cos \delta_2 \xi - \frac{(\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 + (\delta_2^2 + b_{11}) \cos \delta_2}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} (\delta_1(\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \xi - \delta_2(\delta_1^2 - b_{11}) \sin \delta_2 \xi) \right\}, \quad (58)$$

$$\Psi_2(\xi) = \frac{A_2}{b_{12}} \left\{ - \frac{((\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 + (\delta_2^2 + b_{11}) \cos \delta_2)}{\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2} \times \right. \\ \left. \times (\cosh \delta_1 \xi - \cos \delta_2 \xi) + \frac{\delta_1^2 - b_{11}}{\delta_1} \sinh \delta_1 \xi + \frac{\delta_2^2 + b_{11}}{\delta_2} \sin \delta_2 \xi \right\}. \quad (59)$$

Из условий сопряжения (10), (11) выведем частотное уравнение. С учетом формулы для поперечной силы

$$Q_i(\xi) = \frac{E_i J_i}{l_i^2} \frac{d^2 \Psi_i}{d\xi^2} + \frac{\rho_i J_i \omega^2}{l_i} \frac{dX_i}{d\xi} \quad (60)$$

получаем кинематическое условие сопряжения в явном виде

$$\begin{aligned}
 & A_1 \frac{\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\}}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)} \times \\
 & \times \{\gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2\} + \\
 & + A_2 \frac{\{\delta_1^2 + \delta_2^2\}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} \times \\
 & \times \{\delta_2(\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1(\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2\} = 0 \quad (61)
 \end{aligned}$$

и статическое условие сопряжения

$$\begin{aligned}
 & A_1(A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) + \\
 & + A_2(\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) = 0, \quad (62)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \gamma_1^2 \left[\gamma_1^2 - a_{11} + \frac{\rho l^2 \omega^2}{E} \right] + \gamma_2^2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho l^2 \omega^2}{E} \right], \\
 B &= \gamma_1^2(\gamma_2^2 + a_{11}) + \gamma_2^2(\gamma_1^2 - a_{11}) + \frac{\rho l^2 \omega^2}{E} \frac{\gamma_1^2(\gamma_2^2 + a_{11})^2 - \gamma_2^2(\gamma_1^2 - a_{11})^2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})}, \\
 C &= -\gamma_1 \gamma_2 \left[\gamma_1^2 - \gamma_2^2 - 2a_{11} + 2 \frac{\rho l^2 \omega^2}{E} \right], \quad (63) \\
 \bar{A} &= \delta_1^2 \left[\delta_1^2 - b_{11} + \frac{\rho_2 l_2^2 \omega^2}{E_2} \right] + \delta_2^2 \left[\delta_2^2 + b_{11} - \frac{\rho_2 l_2^2 \omega^2}{E_2} \right], \\
 \bar{B} &= \delta_1^2(\delta_2^2 + b_{11}) + \delta_2^2(\delta_1^2 - b_{11}) + \frac{\rho_2 l_2^2 \omega^2}{E_2} \frac{\delta_1^2(\delta_2^2 + b_{11})^2 - \delta_2^2(\delta_1^2 - b_{11})^2}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})}, \\
 \bar{C} &= -\delta_1 \delta_2 \left[\delta_1^2 - \delta_2^2 - 2b_{11} + 2 \frac{\rho_2 l_2^2 \omega^2}{E_2} \right].
 \end{aligned}$$

После преобразований из (61), (62) получаем частотное уравнение в окончательном виде

$$\frac{E_2 J_2}{l_2^3} \frac{\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\}}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})} (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \} + \\
& + \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{\{ \delta_1^2 + \delta_2^2 \}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})} (A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \times \\
& \times \{ \delta_2(\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1(\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \} = 0, \quad (64)
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что уравнение (64) в частных случаях переходит в соответствующие частотные уравнения классической теории для разных и одинаковых стержней.

В задаче о вынужденных колебаниях константы определяются формулами (51), (53), B_1 находится из $M_1(1) = 0$ и имеет вид

$$\begin{aligned}
B_1 = A_0 \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 - a_{11}} \frac{(\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2} - \\
- A_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 - a_{11}} \frac{(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2}, \quad (65)
\end{aligned}$$

B_2 , как и ранее, определяется формулой (55). Таким образом, решения (45) – (48) можно записать так:

$$\begin{aligned}
X_1(\xi) = A_1 \left\{ \cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi - \right. \\
- \frac{(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)} (\gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \xi - \\
\left. - \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \sin \gamma_2 \xi) \right\} + \\
+ A_0 \left\{ \frac{\cos \gamma_2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)} (\gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \xi - \right. \\
\left. - \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \sin \gamma_2 \xi) + \cos \gamma_2 \xi \right\}, \quad (66) \\
\Psi_1(\xi) = \frac{A_1}{a_{12}} \left\{ - \frac{(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 + (\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) + \frac{\gamma_1^2 - a_{11}}{\gamma_1} \sinh \gamma_1 \xi + \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2} \sin \gamma_2 \xi \Big\} + \\ & + \frac{A_0}{l_1} \left\{ \frac{-\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_2} \sin \gamma_2 + \frac{(\gamma_2^2 + a_{11}) \cos \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2} (\cosh \gamma_1 \xi - \cos \gamma_2 \xi) \right\}, \end{aligned} \quad (67)$$

а $X_2(\xi)$, $\Psi_2(\xi)$ определяются формулами (57), (58).

Из условий сопряжения (10), (11) найдем коэффициенты A_1 , A_2 . С учетом формулы (60) получаем кинематическое условие сопряжения в явном виде

$$\begin{aligned} & A_1 \frac{\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\}}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)} \times \\ & \times \{\gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2\} + \\ & + A_2 \frac{\{\delta_1^2 + \delta_2^2\}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} \times \\ & \times \{\delta_2(\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1(\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2\} = \\ & = -A_0 \frac{\gamma_1 \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\} \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)}, \end{aligned} \quad (68)$$

и статическое условие сопряжения

$$\begin{aligned} & A_1(A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) + \\ & + A_2(\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) = \\ & = A_0(\tilde{A} + \tilde{B} \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \tilde{C} \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2), \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \gamma_2^2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho_1 l_1^2 \omega^2}{E_1} \right], \quad \tilde{B} = \gamma_1^2 \frac{\gamma_2^2 + a_{11}}{\gamma_1^2 - a_{11}} \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho_1 l_1^2 \omega^2}{E_1} \right], \\ \tilde{C} &= \gamma_1 \gamma_2 \left[\gamma_2^2 + a_{11} - \frac{\rho_1 l_1^2 \omega^2}{E_1} \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

Записывая уравнения (68), (69) в виде

$$A_1\alpha_{11} + A_2\alpha_{12} = A_0\eta_1, \quad A_1\alpha_{21} + A_2\alpha_{22} = A_0\eta_2, \quad (71)$$

где α_{ij}, η_i ($i, j = 1, 2$) — соответствующие коэффициенты уравнений в (68), (69), из системы (71) находим коэффициенты A_1, A_2 по формулам (29), где

$$\begin{aligned} \Delta = & -\frac{E_2 J_2}{l_2^3} \{ \gamma_2 (\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1 (\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \} \times \\ & \times \frac{ \{ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \} (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) }{ (\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2) } - \\ & - \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \{ \delta_2 (\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1 (\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \} \times \\ & \times \frac{ \{ \delta_1^2 + \delta_2^2 \} (A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) }{ (\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2) }. \end{aligned} \quad (72)$$

Величина Δ_1 определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{E_2 J_2}{l_2^3} \frac{\gamma_1 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}{(\gamma_1^2 - a_{11})} \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \times \right. \\ & \times (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) - \\ & - \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{\{ \delta_1^2 + \delta_2^2 \}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})} (\tilde{A} + \tilde{B} \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \tilde{C} \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \times \\ & \left. \times \{ \delta_2 (\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1 (\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \} \right\}, \quad (73) \end{aligned}$$

а величина Δ_2 :

$$\Delta_2 = \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)^2} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} &\gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 (A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) + \\ &+ \{ \gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \} \times \\ &\times (\tilde{A} + \tilde{B} \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \tilde{C} \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \end{aligned} \right\}. \quad (74)$$

Подставляя формулы (72) – (77), с учетом выражений (29), в (57), (58), (66), (67) получаем формулы для прогибов, формулы для моментов и поперечных сил не приводятся в данной статье из-за громоздкости, находятся по формулам (37) и (60) соответственно.

Нетрудно показать, что уравнения для прогибов, моментов и поперечных сил в частном случае неучета деформаций сдвига и деформаций поворота ($\gamma \rightarrow 0$ при $G \rightarrow \infty$, слагаемые с коэффициентом a_{11}, b_{11} и функции $\psi_i(x_i, t)$ не вводятся), переходят в соответствующие формулы в случае Бернулли–Эйлера.

4. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ СТЕРЖНЕЙ, СОЕДИНЕННЫХ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ, В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ТЕОРИИ С. П. ТИМОШЕНКО

Введем в ранее рассмотренную систему упругий элемент с коэффициентом податливости c , как показано на рис. 2.

Уравнения равновесия, граничные условия остаются такими же, как и в предыдущей задаче, и следовательно, решения тоже. Условия сопряжения в данной задаче имеют вид

$$X_1(1, t) + X_2(1, t) = \delta = cQ, \quad (75)$$

$$Q_1(1, t) = Q_2(1, t) = Q, \quad (76)$$

где δ – удлинение (сжатие) упругого элемента, Q – растягивающая (сжимающая) сила в упругом элементе, c – коэффициент податливости упругого элемента ($c = 0$ – только шарнир).

Частотное уравнение получаем из условий сопряжения (75), (76), которое после некоторых преобразований окончательно имеет

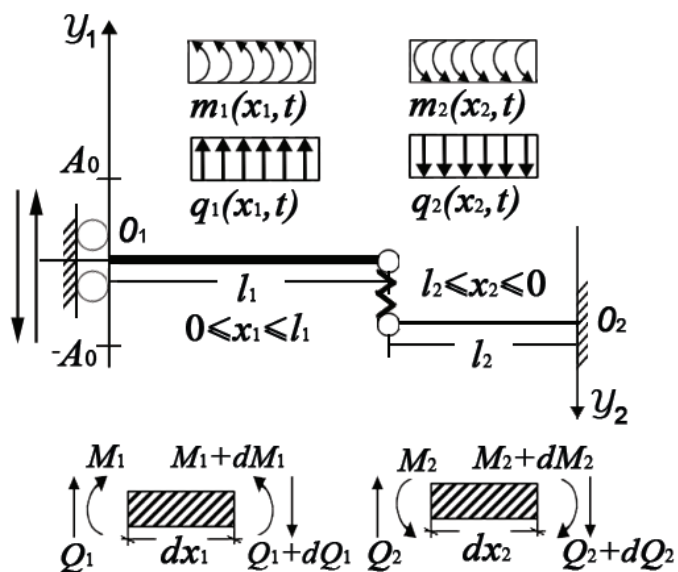


Рис. 2. Система координат и действующие нагрузки.

вид

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 (1 + \cosh k_1 \cos k_1) (\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2) + \\ & + \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 (1 + \cosh k_2 \cos k_2) (\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1) + \\ & + c \frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 (1 + \cosh k_2 \cos k_2) (1 + \cosh k_1 \cos k_1) = 0. \quad (77) \end{aligned}$$

Система для определения коэффициентов A_1 и A_2 в классической теории принимает вид

$$A_1 \frac{\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} + A_2 \left\{ \frac{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} + \right.$$

$$+c \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} \} = -A_0 \frac{\sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1}, \quad (78)$$

второе уравнение остается таким же, как и в предыдущей задаче (формула (28)). Коэффициенты определяются по формулам (29), где

$$\Delta = -\frac{E_1 J_1}{l_1^3} k_1^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \frac{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} -$$

$$-\frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} \frac{\cosh k_1 \sin k_1 - \sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} -$$

$$-c \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2}, \quad (79)$$

$$\Delta_1 = \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} \frac{\sinh k_1 \cos k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} -$$

$$-\frac{E_1 J_1}{2l_1^3} k_1^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1 + \sinh k_1 \sin k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \times$$

$$\times \frac{\cosh k_2 \sin k_2 - \sinh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2} -$$

$$-c \frac{E_2 J_2}{l_2^3} k_2^3 \frac{1 + \cosh k_1 \cos k_1 + \sinh k_1 \sin k_1}{\sinh k_1 + \sin k_1} \frac{1 + \cosh k_2 \cos k_2}{\sinh k_2 + \sin k_2}, \quad (80)$$

формула для Δ_2 остается прежней (32).

Подставляя выражения (32), (79), (80), с учетом формулы для коэффициентов (29), в (25), (26), (33) – (36) соответственно находим прогибы, изгибающие моменты и поперечные силы в теории Бернулли–Эйлера.

В теории С. П. Тимошенко частотное уравнение принимает вид

$$\frac{E_2 J_2}{l_2^3} \frac{\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\}}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})} (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) \times$$

$$\times \{\gamma_2(\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1(\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2\} +$$

$$+ \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{\{\delta_1^2 + \delta_2^2\}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})} (A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \delta_2 (\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1 (\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \} + \\
& + c \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{E_2 J_2}{l_2^3} (A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \times \\
& \times (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) = 0. \quad (81)
\end{aligned}$$

В задаче о вынужденных колебаниях кинематическое условие в системе (75), (76) записывается так:

$$\begin{aligned}
& A_1 \frac{\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\}}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)} \times \\
& \times \{ \gamma_2 (\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1 (\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \} + \\
& + A_2 \left\{ \frac{\{\delta_1^2 + \delta_2^2\}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} \times \right. \\
& \times \{ \delta_2 (\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1 (\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \} + \\
& \left. + c \frac{E_2 J_2}{l_2^3} \frac{(\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2)}{\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2} \right\} = \\
& = -A_0 \frac{\gamma_1 \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\} \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)}, \quad (82)
\end{aligned}$$

статическое условие сопряжения, как и раньше, определяется (69). Решение системы (69), (82) находится по формулам (29), где

$$\begin{aligned}
\Delta = & -\frac{E_2 J_2}{l_2^3} \{ \gamma_2 (\gamma_1^2 - a_{11}) \cosh \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1 (\gamma_2^2 + a_{11}) \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \} \times \\
& \times \frac{\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2\} (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2)}{(\gamma_1^2 - a_{11})(\gamma_2^2 + a_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} - \\
& - \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \{ \delta_2 (\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1 (\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \} \times \\
& \times \frac{\{\delta_1^2 + \delta_2^2\} (A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2)}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} -
\end{aligned}$$

$$-c \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{E_2 J_2}{l_2^3} \frac{A + B \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + C \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2}{\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2} \times \\ \times \frac{\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2}{\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2}, \quad (83)$$

здесь коэффициенты $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ определяются формулами (63), (70).

$$\Delta_1 = \frac{1}{(\gamma_1 \sinh \gamma_1 + \gamma_2 \sin \gamma_2)(\delta_1 \sinh \delta_1 + \delta_2 \sin \delta_2)} \times \\ \times \left\{ \frac{E_2 J_2}{l_2^3} \frac{\gamma_1 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}{(\gamma_1^2 - a_{11})} \sinh \gamma_1 \cos \gamma_2 \times \right. \\ \times (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) - \\ - \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{\{\delta_1^2 + \delta_2^2\}}{(\delta_1^2 - b_{11})(\delta_2^2 + b_{11})} (\tilde{A} + \tilde{B} \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \tilde{C} \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \times \\ \times \left\{ \delta_2 (\delta_1^2 - b_{11}) \cosh \delta_1 \sin \delta_2 - \delta_1 (\delta_2^2 + b_{11}) \sinh \delta_1 \cos \delta_2 \right\} + \\ + c \frac{E_1 J_1}{l_1^3} \frac{E_2 J_2}{l_2^3} (\tilde{A} + \tilde{B} \cosh \gamma_1 \cos \gamma_2 + \tilde{C} \sinh \gamma_1 \sin \gamma_2) \times \\ \left. \times (\bar{A} + \bar{B} \cosh \delta_1 \cos \delta_2 + \bar{C} \sinh \delta_1 \sin \delta_2) \right\}, \quad (84)$$

величина Δ_2 вычисляется, как и ранее, по формуле (74).

Подставляя (74), (83), (84), с учетом формулы для коэффициентов (29), в (57), (58), (66), (67) соответственно находим уравнения прогибов амплитудных функций системы стержней, соединенных упругим элементом с коэффициентом податливости c по теории С.П. Тимошенко. Расчетные формулы для изгибающих моментов и поперечных сил не приводятся из-за их громоздкости.

Нетрудно показать, что при коэффициенте податливости упругого элемента $c = 0$ (только шарнирное соединение) получаем первую задачу.

6. ПРИМЕР ЧИСЛОВОГО РАСЧЕТА

На основе полученных решений выполнен расчет для системы двух стальных стержней прямоугольного поперечного сечения $F = bh$ со значениями длины $l = 5$ см, высоты $h = 0.25$ см и ширины $b = 0.1$ см, коэффициент податливости $c = 0, 0.02, 0.04$ см/кг, амплитуда кинематического возбуждения $A_0 = 0.1$ см, вынуждающая круговая частота $\omega = 100$ с⁻¹.

В табл. 1 даны спектры первых семи собственных круговых частот системы в классической теории и теории С.П. Тимошенко при коэффициенте податливости $c = 0$.

Таблица 1. Спектры собственных частот системы при $c = 0$

n	ω (классика), с ⁻¹	ω (Тимошенко), с ⁻¹	в %
1	5216	5204	-0.24
2	32690	32161	-1.62
3	91532	88120	-3.73
4	179367	167558	-6.58
5	296506	267039	-9.94
6	442928	382645	-13.61
7	618635	510770	-17.44

Справа от столбцов частот показано соответствующее уменьшение частоты в процентах (по сравнению с классическим случаем).

На рис. 3 представлены графики этих спектров, где используются обозначения n — номер частоты, (1) — классический вариант (Бернулли-Эйлера), (2) — учет инерции поворота сечений и деформаций сдвига (Тимошенко).

На рис. 4 представлены графики прогибов на основе теории С.П. Тимошенко заданной вынуждающей частоты $\omega = 100$ с⁻¹ для различных коэффициентов податливости $c = 0, 0.02, 0.04$ см/кг.

Из графиков видно, что кинематическое условие сопряжения выполняется. Статическое условие сопряжения также выполняется, в статье не приводятся для краткости.

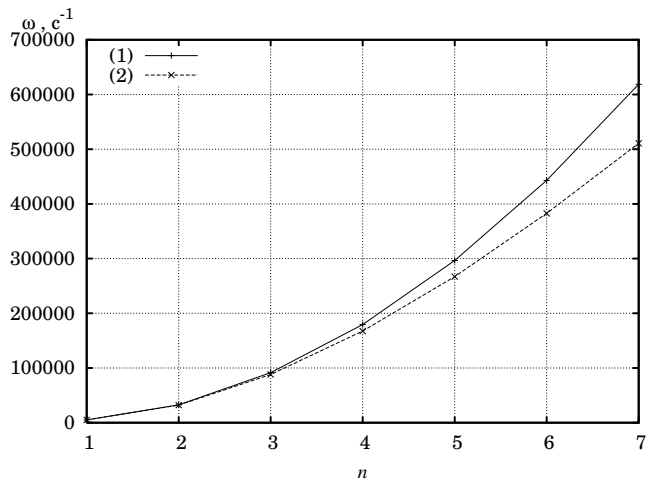


Рис. 3. Спектры собственных частот.

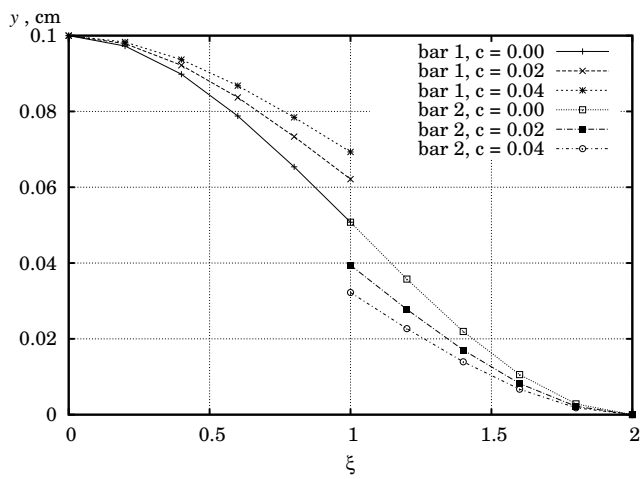


Рис. 4. Формы вынужденных колебаний при $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ на основе теории С.П. Тимошенко.

7. Выводы

В предлагаемой статье изложены методика и решения задач о свободных и вынужденных колебаниях системы двух стержней при возбуждении колебаний со стороны правого заземленного стержня, колеблющегося по закону $y(0, t) = A_0 \sin \omega t$, где A_0 и ω — заданные амплитуда и частота вынужденных колебаний соответственно. В качестве примера выполнен числовой расчет для системы одинаковых консольных стержней, иллюстрирующийся некоторыми таблицами и графиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Стретт (Рэлей). Теория звука. М.,Л.: Гостехтеориздат, 1940. Том I. 499 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
3. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. М.: Физматгиз, 1959.
4. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.Н. Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1959. Том III. С. 320.

ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНОСТИ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Н. В. ЗАХАРЕНКОВА

Впервые влияние капиллярного поднятия жидкости на фильтрацию из каналов исследовалось в работах В.В. Веригина и Б.К. Ризенкампа. Дальнейшие существенные результаты связаны с работами Н.Н. Веригина, где была доказана необходимость введения зон выхода капиллярных вод на поверхность земли, а для эффективного решения задач предложена новая аналитическая функция. Это позволило значительно расширить класс практически важных задач, связанных с работой каналов, дренажных коллекторов и т. п. Тем самым в работах Н.Н. Веригина по сути дела была создана теория фильтрации в капиллярных грунтах при любых видах внешних границ области течения. По сравнению с подобными задачами без учета капиллярности грунта в предложенной работе фильтрационные схемы значительно усложняются из-за появления дополнительного граничного участка — линии тока. Это приводит к появлению дополнительной угловой точки, увеличивающей общее число неизвестных параметров конформного отображения, которые возникают в процессе решения соответствующей краевой задачи с неизвестной свободной границей. Для ее решения используется метод Полубариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов изучаются характерные особенности моделируемых процессов с учетом капиллярности грунта, испарения со свободной поверхности грунтовых вод, и оценивается совместное влияние этих факторов на размеры зоны насыщения. Построенный таким образом алгоритм расчета позволяет в каждом конкретном случае судить о форме и размерах зоны растекания жидкости из каналов в зависимости от их ширины и уровня воды в них, капиллярности грунта и интенсивности испарения воды со свободной поверхности и мощности грунтового пласта.

1. ВВЕДЕНИЕ

До сих пор во всех предыдущих исследованиях по данной тематике [1]–[3] рассматривались области течения, которые снизу огра-

Доклад на семинаре 27 апреля 2010 г.
© Н. В. Захаренкова, 2010

ничивались водопроницаемой границей. В данной статье изучается случай фильтрации из канала в слое грунта ограниченной мощности, подстилаемом горизонтальным водоупором, при наличии как капиллярности грунта, так и испарения со свободной поверхности грунтовых вод. По сравнению с подобными задачами без учета капиллярности грунта здесь фильтрационная схема значительно усложняется из-за появления дополнительного граничного участка – линии тока. Это приводит к появлению еще одной дополнительной угловой точки, увеличивающей общее число неизвестных параметров конформного отображения, которые возникают в процессе решения соответствующей краевой задачи с неизвестной свободной границей. Для ее решения используется метод Полубариновой-Кочкиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [2]–[5], а также разработанных [6]–[8] способов конформного отображения областей специального вида, которые характерны в задачах гидро- и аэромеханики [9]. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов изучаются характерные особенности моделируемого процесса при учете таких факторов, как капиллярность грунта и испарение со свободной поверхности, и оценивается их совместное влияние на размеры зоны насыщения. Построенный алгоритм расчета позволяет в каждом конкретном случае судить о форме и размерах зоны растекания в зависимости от ширины канала, капиллярности грунта и интенсивности испарения, а также мощности пласта.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

На рис. 1 изображена картина плоского безнапорного установившегося течения грунтовых вод из канала ширины $2l$ с малой глубиной воды в слой грунта мощности T , подстилаемого горизонтальным водоупором.

Расходным фактором, компенсирующим фильтрацию из канала, является равномерное испарение со свободной поверхности интенсивности ε ($0 < \varepsilon < 1$), отнесенной к коэффициенту фильтрации $k = \text{const}$.

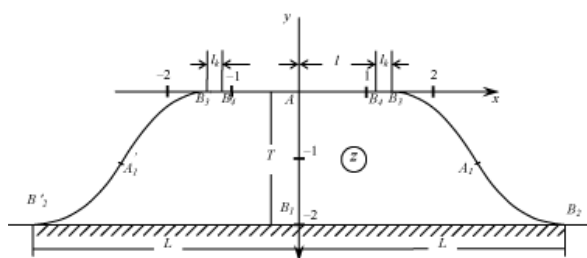


Рис. 1. Картина течения из канала с малой глубиной воды, рассчитанная при $h_k = 0.4$, $\varepsilon = 0.4$, $l = 1.2$ и $T = 2.0$.

Введем комплексный потенциал движения $\omega = \phi + i\psi$, где ϕ – потенциал скорости, ψ – функция тока, и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kT и T . В силу симметрии ограничимся рассмотрением правой половины области течения $AB_1B_2A_1B_3B_4$.

Примем $\phi = 0$ вдоль дна канала AB_4 и $\psi = 0$ вдоль линии симметрии AB_1 . На участке B_3B_4 положим $\psi = Q$, где Q – искомый фильтрационный расход из канала. Таким образом, согласно Н.Н. Веригину [1]–[3], участок B_3B_4 считается непроницаемой линией выхода капиллярных вод на поверхность земли. При указанном на рис. 1 выборе системы координат и при совмещении плоскости сравнения потенциалов с плоскостью $y = 0$ на границе области движения выполняются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}
 AB_4 : \quad & y = 0, \phi = 0; \\
 AB_1 : \quad & x = 0, \psi = 0 \\
 B_1B_2 : \quad & y = -T, \psi = 0, \\
 B_3B_4 : \quad & y = 0, \psi = Q; \\
 B_2A_1B_3 : \quad & \phi = -y + h_k, \psi = Q - \varepsilon(x - l - l_k),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где h_k – статическая высота капиллярного поднятия грунтовой воды, l_k – искомая ширина капиллярного растекания воды. Полагая во втором условии (1) для участка $B_2A_1B_3$ $x = L$, получим

$$Q = \varepsilon(L - l - l_k), \tag{2}$$

где L – ширина растекания фильтрационных вод по горизонтальному непроницаемому основанию. Последнее соотношение выражает равенство расхода из канала величине испарения со свободной поверхности в условиях установившейся фильтрации.

Будем предполагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность пласта T , ширина канала l , величина испарения со свободной поверхности ε и статическая высота капиллярного растекания воды h_k считаются заданными. Задача состоит в определении размеров l_k и L зоны насыщения.

Для решения краевой задачи (1) используем метод П.Я. Полу-бариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса. Вводится вспомогательная переменная t , областью изменения которой является полуполоса $0 < \operatorname{Re} t < \infty$, $0 < \operatorname{Im} t < 0.5\pi$, и функции: $z(t)$, конформно отображающая полуполосу плоскости t на область z , и производные $d\omega/dt$ и dz/dt .

Обратимся к области комплексной скорости w

$$w = \frac{d\omega}{dz}, \quad (3)$$

соответствующей граничным условиям (1), которая изображена на рис. 2.

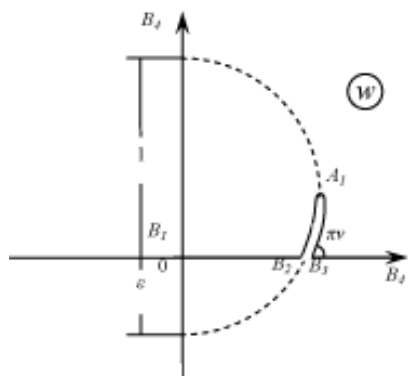
Функция, совершающая конформное отображение полуполосы плоскости t на область w , изучена в работах [6]–[8] и имеет следующий вид:

$$w(t) = \sqrt{\varepsilon} \frac{(C + \operatorname{th} t)^\nu \exp(1 - \nu)t - (C - \operatorname{th} t)^\nu \exp(\nu - 1)t}{(C + \operatorname{th} t)^\nu \exp(1 - \nu)t + (C - \operatorname{th} t)^\nu \exp(\nu - 1)t}, \quad (4)$$

где $C = D/\sqrt{D^2 - 1}$, $D = \operatorname{ch} d$, абсцисса d – неизвестный аффикс точки B_3 в плоскости t .

Используя методику определения показателей функций $d\omega/dt$ и dz/dt около особых точек [2, 5] и учитывая соотношения (3) и (4), находим

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\varepsilon} A \frac{(C \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^\nu \exp(1 - \nu)t - (C \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)^\nu \exp(\nu - 1)t}{\Delta(t)},$$

Рис. 2. Область комплексной скорости w .

$$\frac{dz}{dt} = A \frac{(C \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^\nu \exp(1 - \nu)t + (C \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)^\nu \exp(\nu - 1)t}{\Delta(t)}, \quad (5)$$

$$\Delta(t) = \sqrt{(\operatorname{sh}^2 t + B^2)(\operatorname{sh}^2 t + D^2)^\nu},$$

где $A > 0$ — масштабная постоянная моделирования, $B = \sin b$, ордината b — неизвестный аффикс точки A в плоскости t . Можно проверить, что функции (5) удовлетворяют условиям (1), сформулированным в терминах функций $d\omega/dt$ и dz/dt , и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись представлений (5) для различных участков границы области t с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию области движения z и тем самым служит контролем вычислений.

В результате получаем выражения для основных геометрических и фильтрационных характеристик:

$$\sqrt{\varepsilon} A \int_0^d \Phi_{B_3 B_4} dt = h_k, \quad A \int_b^{0.5\pi} X_{AB_4} dt = l, \quad A \sin \frac{\pi\nu}{2} \int_d^\infty Y_{B_2 A_1 B_3} dt = T, \quad (6)$$

которые позволяют определить неизвестные параметры конформного отображения B и D , а также постоянную моделирования A . Численным путем проверяется монотонность функций, входящих в подынтегральные выражения левых уравнений системы (6), и, таким образом, устанавливается ее однозначная разрешимость. После нахождения неизвестных постоянных последовательно рассчитываются искомые размеры зоны насыщения:

$$l_k = A \int_0^d X_{B_3 B_4} dt, \quad L = A \int_0^\infty X_{B_1 B_2} dt, \quad (7)$$

и, наконец, определяется расход Q по формуле (2).

Контролем счета служат другие выражения для расхода Q и мощности T :

$$Q = -\sqrt{\varepsilon} A \int_b^{0.5\pi} \Psi_{AB_4} dt = \sqrt{\varepsilon} A \sin \frac{\pi\nu}{2} \int_d^\infty Y_{B_2 A_1 B_3} dt, \quad T = A \int_0^b Y_{AB_1} dt. \quad (8)$$

В формулах (6) – (8) подынтегральными функциями являются выражения правых частей (5) на соответствующих участках контура плоскости t .

В предельном случае, когда $h_k = 0$, т. е. отсутствует капиллярность грунта, в плоскости комплексной скорости w вершина разреза A_1 выходит на ось ординат и круговой пятиугольник вырождается в круговой треугольник. В плоскости течения z точка перегиба A_1 , сливаясь с точкой B_3 , выходит на ось абсцисс. В этом случае параметр $d = 0$, $D = 1$, $C = \infty$, и из первой формулы (6) вытекает, что $l_k = 0$, получают результаты [10].

3. ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 изображена картина течения из канала с малой глубиной, рассчитанная при $h_k = 0.4$, $\varepsilon = 0.4$, $l = 1.2$, $T = 2.0$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров h_k , ε , l и T на размеры зоны насыщения l_k , L и расход Q приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Результаты расчетов размеров зоны насыщения L , l_k и расхода Q при варьировании значений h_k и ε

h_k	l_k	L	Q	ε	l_k	L	Q
0.10	0.0425	3.461	0.888	0.10	0.4998	7.752	0.605
0.25	0.1207	3.769	0.979	0.25	0.2742	5.008	0.884
0.40	0.2163	4.031	1.046	0.40	0.2163	4.031	1.046
0.55	0.3291	4.271	1.097	0.55	0.1888	3.495	1.158
0.60	0.3700	4.3487	1.1113	0.60	0.1825	3.364	1.1889

Таблица 2. Результаты расчетов размеров зоны насыщения L , l_k и расхода Q при варьировании значений l и T

l	l_k	L	Q	T	l_k	L	Q
0.30	0.1577	2.326	0.748	0.50	0.4245	2.408	0.313
0.75	0.1943	3.372	0.971	1.25	0.2761	3.278	0.721
1.20	0.2163	4.031	1.046	2.00	0.2163	4.031	1.046
1.65	0.2285	4.571	1.077	2.75	0.1880	4.644	1.302
1.80	0.2311	4.7388	1.0830	3.00	0.1821	4.8188	1.3747

В каждом из блоков таблиц (она разделены вертикальными линиями) варьируется в 6 раз в допустимом диапазоне один из указанных параметров, а остальные фиксируются $h_k = 0.4$, $\varepsilon = 0.4$, $l = 1.2$ и $T = 2.0$. На рис. 3–6 представлены зависимости капиллярного растекания воды l_k (линия 1) и ширины растекания воды по водоупору L (линия 2) от параметров h_k и ε , l и T .

Анализ табл. 3 и 4 и рисунков позволяет сделать следующие выводы.

Увеличение ширины канала и высоты вакуума, обусловленного капиллярными силами в грунте, и уменьшение испарения приводят к расширению зоны насыщения. При этом обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин l_k и L от параметров h_k , ε и l . Можно заметить также, что зависимости величины L от характеристик h_k и l близки к линейным.

Наибольшее влияние на ширину растекания воды по водоупору оказывает испарение со свободной поверхности: данные табл. 1 показывают, что при убывании параметра ε значение L увеличивается в 2.3 раза. Испарение также значительно влияет и на ширину капиллярного растекания воды.

Правый блок табл. 2 отражает закономерность, естественную с физической точки зрения: увеличение мощности пласта T приводит

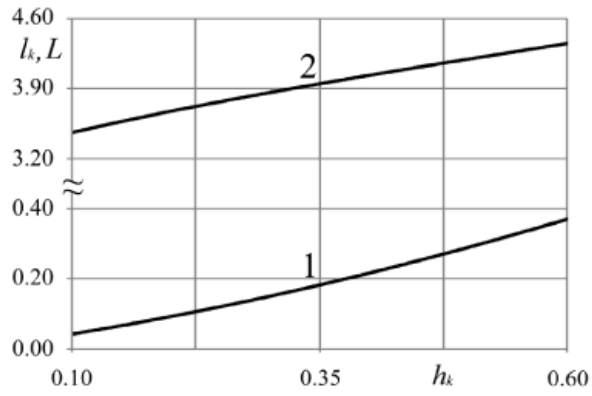


Рис. 3. Зависимости величин l_k (1) и L (2) от h_k .

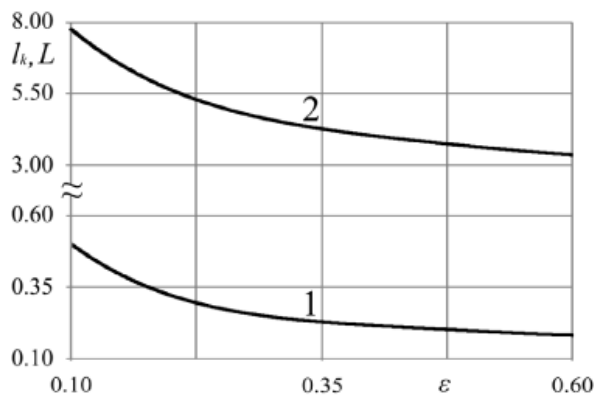
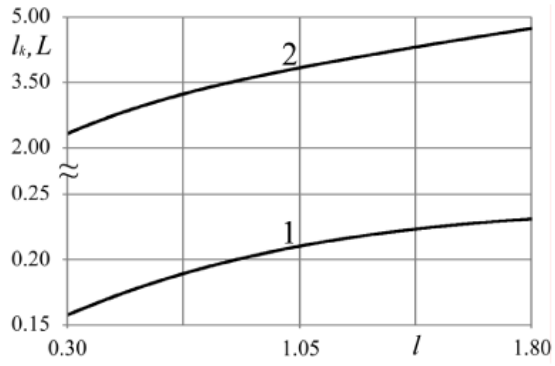
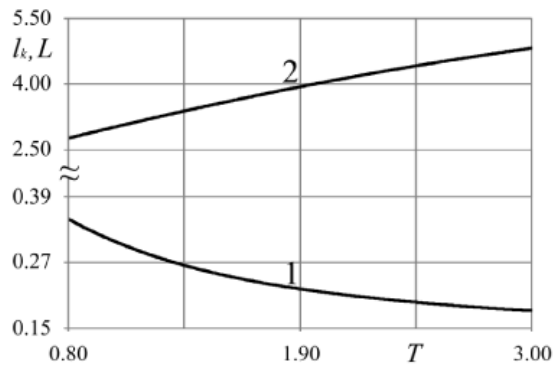


Рис. 4. Зависимости величин l_k (1) и L (2) от ϵ .

Рис. 5. Зависимости величин l_k (1) и L (2) от l .Рис. 6. Зависимости величин l_k (1) и L (2) от T .

к увеличению ширины растекания воды по водоупору и, наоборот, к уменьшению ширины капиллярного растекания воды.

Однако наиболее существенное влияние на величину капиллярного растекания l_k оказывает капиллярность грунта.

Из двух правых блоков табл. 1 и 2 можно заметить, что при $T = 0.5$ и $\varepsilon = 0.1$ получаем $l_k = 0.4225$ и $l_k = 0.4998$ соответственно, и, следовательно, $l_k/h_k = 1.0613$ и 1.2495 . Причем подобные отношения станут еще более значительными с уменьшением T и ε . Таким образом, подтверждается впервые отмеченное Н.Н. Веригиным [1]–[3] существенное значение горизонтального всасывания воды (в том числе и для слабокапиллярных грунтов).

О характере влияния определяющих физических параметров на фильтрационный расход можно судить по правым разделам всех блоков табл. 1–2: видно, что с увеличением всех параметров ε , h_k , l и T расход увеличивается. При этом наиболее заметное влияние на расход оказывает мощность пласта: из табл. 2 вытекает, что расход может увеличиваться на 339.2%.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено точное аналитическое решение задачи о вычислении размеров зоны насыщения при фильтрации из каналов при наличии капиллярности грунта и испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Посредством числовых расчетов установлено существенное влияние этих параметров на картину течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Михайлов Г. К., Николаевский В. Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах. Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 585–648.
4. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М. Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
5. Кочина П. Я., Береславский Э. Н., Кочина Н. Н. Аналитическая теория линейных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1. Препринт № 576. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 122 с.

6. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 296–301.

7. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 439–443.

8. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 459–466.

9. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 9–17.

10. Береславский Э. Н., Панасенко Л. А. Об определении размеров зоны насыщения при фильтрации из канала с малой глубиной воды // ПМТФ. 1981. № 5. С. 92–94.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

Динамика и устойчивость тонких пластин и оболочек с учетом различных возмущающих факторов.

Доклад на семинаре 22 сентября 2009 г.

А. Л. Смирнов

РЕЗЮМЕ

В докладе рассматриваются задачи колебаний и устойчивости тонкостенных конструкций в рамках линейной теории типа Кирхгофа–Лява. Анализируется влияние на устойчивость и спектр частот собственных колебаний:

- геометрических неоднородностей в виде переменности толщины конструкции, включая наличие отверстий;
- изотропности материала, включая материалы с непостоянными модулями упругости;
- иных возмущающие факторов, например вращение конструкций.

**НОВЫЙ СТРУКТУРНО-КОНТИНУАЛЬНЫЙ ПОДХОД
В МЕХАНИКЕ ПРОЧНОСТИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Доклад на семинаре 15 декабря 2009 г.

А. В. КАШТАНОВ

РЕЗЮМЕ

Начиная с первых попыток решить задачу прогнозирования динамической прочности материалов, основные усилия специалистов по механике разрушения оказались сосредоточены на определении пороговых прочностных характеристик, как функций материала, по аналогии с классическими квазистатическими представлениями о феномене разрушения. К настоящему времени подобный подход уже не выглядит ни перспективным, ни тем более удобным с точки зрения использования в инженерной практике. Разработанный в последние годы структурно-временной подход, основанный на принципах нелокальной механики разрушения и концепции инкубационного времени, позволил не просто объяснить многие феномены динамического разрушения, но и сформулировать простой критерий динамического разрушения материалов — критерий инкубационного времени. Обсуждается новый кинетический подход, основанный на концепции инкубационного времени и позволяющий описать кинетику инкубационных процессов, предвещающих акт макроразрушения. При этом соответствующее кинетическое уравнение, с одной стороны, является обобщением классических критериев и уравнений мгновенной и длительной прочности, а с другой — позволяет получить критерий динамического разрушения. Представлены важные фундаментальные результаты, позволяющие не только уточнить значения параметров критерия инкубационного времени на основе экспериментов по квазистатическому нагружению. Фактически это позволяет полностью прогнозировать динамическую прочность, основываясь исключительно на данных квазистатических экспериментов, что, очевидно, существенно снижает расходы на тестирование материалов и конструкций, предназначенных для работы в условиях высокоскоростного нагружения. Кроме того обсуждаются новые соотношения между параметрами классических уравнений в теории ползучести и усталостного разрушения. Получение таких соотношений является не только фундаментальным результатом, они также важны для увеличения точности обработки экспериментов по длительной прочности и уменьшения трудоемкости процесса тестирования материалов.

**О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
НА ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ**

Доклад на семинаре 30 марта 2010 г.

Д. П. Коузов

РЕЗЮМЕ

Рассматривается простейшая баротропная энергетически замкнутая модель упругих колебаний газа в однородном поле тяжести. Обсуждаются новые физические явления, которые имеют место в такой модели (наличие дисперсии, зависимость давления в плоской волне от высоты, наличие “послезвука” при распространении нестационарной волны).

ХРОНИКА

23ий СЕМИНАР СЕВЕРНЫХ СТРАН ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ МЕХАНИКЕ

21-22 октября 2010 г. в Стокгольме (Швеция) прошел 23ий семинар Северных стран по компьютерной механике. Организатором семинара являлась северная ассоциация компьютерной механики (NoАСМ, <http://www.noasm.org/>), представляющая интересы международной ассоциации (IАСМ). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гетеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители из Швеции, Финляндии, Норвегии, Дании, Исландии и Прибалтики (Эстония, Латвия и Литва). В 2010 г. в семинаре впервые приняли участие представители российской научной школы, постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”: С.М. Бауэр, Е.Б. Воронкова и Е.В. Краковская (СПбГУ). Организаторами семинара со стороны Швеции в 2010 г. были профессора Андерс Эрикссон и Гюннер Тиберт из Королевского Технического Университета (КТН).

Семинар затрагивает такие актуальные темы современной физики, как биомеханика, оптимизация компьютерных методов, моделирование и визуализация, механика твердого тела и жидкости, динамика, механика материалов и разрушений, конечно-элементные методы и др. Докладчикам предоставлялось 20 минут для презентации и ответов на вопросы, кроме того, состоялись четыре пленарные лекции. Статьи, написанные на основе докладов, были включены в сборник, изданный к семинару.

Атмосфера на семинаре царил очень дружелюбная, обсуждалось множество интересных и злободневных тем. Особый интерес представлял инструментарий современных механиков: новое программное обеспечение, методы и алгоритмы численного решения задач, средства для красочного и динамического представления результатов.

Следующий, 24ый семинар планируется провести в Хельсинки (Финляндия) с 3 по 4 ноября 2011 г.

С.М. Бауэр и Е.В. Краковская

ОБ АВТОРАХ

Александрова Людмила Александровна — аспирантка кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации. Научные интересы — математическое моделирование задач аэрогидродинамики, разработка прикладных программ. Автор 11 опубликованных работ. Научный руководитель — проф. Э.Н. Береславский. e-mail: lyumila@mail.ru

Груничева Екатерина Викторовна — аспирантка 2го курса кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — проф. Г.И. Курбатова. e-mail: grunicheva_k@mail.ru

Ермолаева Надежда Николаевна — аспирантка 2го курса кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — проф. Г.И. Курбатова. e-mail: Vlohinadja@yandex.ru.

Жигалко Евгений Фаддеевич — заведующий кафедрой прикладной математики ПГУПС, профессор, доктор физико-математических наук, автор многочисленных работ по вопросам гидромеханики и прикладной математики. e-mail: e.zhigalko@yandex.ru

Захаренкова Наталья Владимировна — выпускница кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации. Научный руководитель — проф. Э.Н. Береславский. e-mail: nataly_gate@mail.ru

Карпенко Антон Григорьевич — магистр БГТУ-Военмеха. Область научных интересов — вычислительная гидродинамика и аэрогазодинамический эксперимент. e-mail: aspera.2003.ru@mail.ru

Каштанов Арсений Вячеславович — доцент кафедры теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета. Окончил магистратуру СПбГУ в 2000 г. (механика, прикладная математика), в 2003 г. защитил кандидатскую диссертацию под руководством академика Н.Ф. Морозова по специальности «Механика деформируемого твердого тела». Научные интересы — теория упругости, механика разрушения. Автор 36 опубликованных работ. e-mail: a.kashtanov@ir.ru

Каштанова Станислава Викторовна — аспирантка 1го курса кафедры теории упругости СПбГУ. Автор одной опубликованной работы. Научные руководители — акад. Н.Ф. Морозов и проф. С.М. Бауэр. e-mail: kastasya@yandex.ru

Коузов Даниил Петрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования Морского технического университета, ведущий научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН. Соросовский профессор. Основная область научных занятий — математическая акустика. Разработал теорию гранично-контактных задач акустики (ГКЗА). Занимался изучением структурных полей в изолированных упругих конструкциях, фрикционными колебаниями упругих тел и рядом других проблем математической акустики. Автор свыше 130 научных и методических печатных работ. Руководит регулярным Санкт-Петербургским семинаром по вычислительной и теоретической акустике Научного совета по акустике РАН.

Курбатова Галина Ибрагимовна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета. Специалист в области механики сплошных сред, гидромеханики, математического моделирования. e-mail: gi_kurb@mail.ru

Павилайнен Вольдемар Яковлевич — лауреат Государственной премии СССР, доцент кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ, автор более 80 работ (в том числе двух монографий) в области механики деформируемого твердого тела (теория оболочек), специалист по проектированию и расчету армированных железобетонных конструкций.

Перегудин Сергей Иванович — профессор кафедры информационных систем факультета прикладной математики–процессов управления СПбГУ. Автор более 100 научных работ, включая 2 монографии. Область интересов — гидродинамика, теория волн. e-mail: peregudinsi@yandex.ru

Пестерев Егор Васильевич — студент кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации. Научные интересы — математическое моделирование, разработка прикладных программ. Автор 12 опубликованных работ. Научный руководитель — проф. Э.Н. Береславский. e-mail: yogurt@live.ru

Платонов Виктор Викторович — аспирант кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — уточненные теории пластин и оболочек. Автор 3 опубликованных работ. Научный руководитель — доц. Б.Н. Семенов. e-mail: viktorplatonov@yandex.ru

Попова Елена Анатольевна — доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного горного института (технического университета), выпускница факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета.

Сайкова Мария Сергеевна — окончила магистратуру СПбГУ в 2003 г. (механика, прикладная математика), а в 2006 г. — аспирантуру СПбГУ. Специализация — “Механика твердого деформируемого тела”. Автор 6 опубликованных работ. В настоящее время — инженер-конструктор отдела прочности и ресурса энергооборудования НПО ЦКТИ им. Ползунова. Научный руководитель — проф. СПбГПУ Ю.К. Петреня. e-mail: sms@math.spbu.ru

Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, автор публикаций по вопросам механики тонкостенных конструкций. e-mail: a_1_smirnov@mail.ru

Тулкина Анна Николаевна — выпускница кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ (2006). В настоящее время — аспирантка кафедры теории упругости математико-механического факультета СПбГУ. Тема научной работы — исследование механических свойств наноструктур. Научный руководитель — доц. В.Я. Павилайнен. e-mail: anyatoolkina@mail.ru

Харунжий Александр Александрович — окончил бакалавриат механико-математического факультета Новосибирского государственного университета по кафедре геометрии и топологии и магистратуру математико-механического факультета СПбГУ. Область научных интересов — динамика тонкостенных конструкций. Научный руководитель — доц. А.Л. Смирнов. e-mail: harunjik@gambler.ru

Холодова Светлана Евгеньевна — кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры управления медико-биологическими системами факультета прикладной математики-процессов управления СПбГУ. Автор более 90 научных работ, включая одну монографию. Область интересов — гидродинамика, теория волн. e-mail: peregudinsi@yandex.ru

Цветков Алексей Иванович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник математико-механического факультета СПбГУ, специалист в области волновой и нестационарной газовой динамики.

Юшин Роман Юрьевич — окончил бакалавриат ПМ-ПУ и магистратуру математико-механического факультета СПбГУ, получив диплом магистра по специальности "Механика. Прикладная математика" по специализации "аэрогидроупругость" (2004). Направление научных исследований — нелинейные задачи теории пластичности. В настоящее время аспирант СПбГУ. Научный руководитель — доц. Г.В. Павилайнен. e-mail: djromen@gmail.com

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2009–2010 гг.**

Курова (Якимова) Ирина Владимировна — канд. техн. наук, БГТУ (“Военмех”), 2009. Научный руководитель — проф. В. Н. Емельянов.

Атрощенко Елена Игоревна — PhD (Mathematics), University of Waterloo, Canada, 2010. Scientific supervisor — Asso. Prof. S. Potapenko.

Жучкова Марина Геннадьевна — канд. физ.-мат. наук, ИПМаш РАН, 2010. Научный руководитель — проф. Д. П. Коузов.

Измайлова Заира Татархановна — канд. техн. наук, СПбГЭТУ (“ЛЭТИ”), 2010. Научный руководитель — проф. П. И. Бегун.

Морщинина Алина Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ), 2010. Научный руководитель — проф. Ю. М. Даль.

Морщинина Диана Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ), 2010. Научный руководитель — проф. Ю. М. Даль.

SUMMARIES

Alexandrova L.A. and Pesterev I.V. **Mathematical modelling of currents in subsurface hydrodynamics (II).**

Within the framework of two-dimensional stationary filtering in uniform soil of the incondensable liquid under the law Darsi are researched some filtration currents under hydrotechnical building with sites of constant velocity of a flow and under a groove of Zhukovsky through an irrigated soil stratum with underlying nontight pressure head horizon. The Decision corresponding to multivariable mixed marginal problems to theories analytical function is realized by means of method conformal mappings of the areas of the special type. Happen to the results numerical calculation and is given detailed hydrodynamic analysis of the influence defining physical parameter of the models on picture of the currents.

Ermolaeva N.N. and Kurbatova G.I. **On one method of space mirrors production.**

The report covers the mathematical model of expansion process of a layer of liquid in the state of weightlessness. This process underlies one of methods of producing space mirrors. The solution of the system of equations for the model is obtained. In particular, the comparative analysis of computational algorithms to solve differential equation that simulates behaviour of the inner radius of the layer is made.

Grunicheva E.V., Kurbatova G.I., and Popova E.A. **Computer modeling of non-stationary flow in a sea gas pipeline.**

In the report the mathematical model of non-stationary non-isothermal flow of multicomponent chemically inert mix of gases in a sea gas pipeline, with taking into account the form of the pipeline and heat-exchange conditions is presented. Various computing algorithms for the solution of system of equations of model are analyzed. A calculation of a periodic flow regimen in a gas pipeline in real conditions is given as an example.

Kashtanova S.V. **Mechanical Properties of Asbestos Nanotubes.**

Mechanical properties of asbestos nanotubes filled by different

materials are studied. The diameter of such nanotubes is about 30 nm and interior diameter is about 5 nm. Their bending stiffness depends on “filler” material: e.g. if a nanotube is filled by water it becomes softer and if by mercury — more rigid. The theoretical description of nanotubes behavior are obtained based on the classical theory of shells as well as on the nonclassical theory of Timoshenko–Reissner (TR). TR theory accounts the shear modulus and allows to explain the changing of bending stiffness depending on different fillers.

Pavilainen V.Ya. and Toolkina A.N. **The forced oscillations of two console rods system on the basis of Timoshenko’s theory.**

The solution of the problem on the forced oscillations of system of two identical console rods joined by a hinge was deduced on the basis of Timoshenko’s theory. The first rod has the given forced oscillations of the left end with amplitude A , and the second rod (connected to the first by a hinge) is rigidly jammed on the right end. Development of the constructed exact solutions on a case when between rods the spring with coefficient of a flexibility d is reduced. Numerical calculations on the basis of solutions of the showed problems which results are illustrated in tables and on graphs and also compared to the results received on the basis of the theory of Bernulli–Euler.

Peregudin S.I., Kholodova S.E. **Mathematical Modeling of Dynamics of a Rotating Layer of an Ideal Electrically Conducting Incompressible Inhomogeneous Fluid in an Equatorial Region.**

The equations describing the three-dimensional equatorial dynamics of an ideal electrically conducting inhomogeneous rotating fluid are studied. The magnetic and velocity fields are represented as superpositions of unperturbed steady-state fields and those induced by wave motion. As a result, after introducing two auxiliary functions, the equations are reduced to a special scalar one. Based on the study of this equation, the solvability of initial–boundary value problems arising in the theory of waves propagating in a spherical layer of an electrically conducting density inhomogeneous rotating fluid in an equatorial zone is analyzed. Particular solutions of the scalar equation are constructed that describe small-amplitude wave propagation.

Platonov V.V. Dynamic Stability of Plates and Shells due to the Theory of Timoshenko–Reissner.

The possibility of fundamentally new forms of buckling in transversely isotropic spherical shell under dynamic normal loading is investigated in this paper. The problem is considered using a refined theory which takes into account transverse shear deformation according Ambartsumian. Comparison of the critical load for the case of a transversely isotropic and isotropic materials are proposed. The complete system of solutions of the equation of motion of a spherical shell is constructed. Buckling forms and natural oscillation frequencies in both solutions are determined. Conditions under which the theory takes into account the influence of transverse shear, significantly refines the classical theory are obtained.

Saykova M.S. Finite element simulation of a stress field near the tips of an insulated arc-shaped crack in a thick cylindrical shell subjected to thermal loading.

The mathematical model of the shell of a boiler drum with laminations is considered. The solution of considered problem is obtained by means of finite element method. Interaction of the layers under thermal load is examined.

Smirnov A.L., Kharunzhy A.A. The study of behaviour of eigenvalues and vibration modes of a conic shell with the small angle at the vertex by means of orthogonal sweep method.

The purpose of the research is to study the applicability of the orthogonal sweep method by S.K. Godunov to solution of the problem of free vibrations of elastic thin shells of revolution. Cylindrical and conical shell with the small angles at the vertex are analyzed. Special attention is devoted to the effect of the small parameter (the value of the angle at the vertex) on natural frequencies and modes. The accuracy of the results obtained with different methods (asymptotic, FEM and sweep method) is examined.

Yushin R. Yu. **The behaviour of the SD material under elastoplastic bending.**

A round transverse isotropy plate simply bearing by one of the border and uniformly pressurized was considered. The resolving system of a three differential equations with non-linear coefficients was built. The main idea consists by solving task with semi-inverse method. Taking up one plate with a known yield points under the pressing and stretching in a plane of a plate and in a plane which is perpendicular our plate. By setting different depths of a plastic domain in a center of a plate from above, we obtain values of depths of a plastic domains below. Using numerical computation we obtain values of integration steps when the plastic domains from above and below comes out to a border of the plate. After that we obtain values of loads under which these plastic domains evolves and obtain real size of plastic domains. After that we obtain flexure at the center of the plate. Results were obtained for transversal-isotropic plates with different coefficients of anisotropy and transversal-isotropic SD plates with different SD coefficients. The results are presened at pictures.

Zakharenkova N.V. **The hydrodynamic effect of capillary rise of fluid.**

A mathematical model of groundwater outflow from the channel at capillarity of soil and water evaporation is investigated within the frame of stationary filtration. Appeared mixed boundary value problem is solved with the use of POB method of Polubarinova-Kochina, as well as that of conformal mapping of specific domains, met in hydro- and aerodynamics.

Zhigalko E.Th., Karpenko A.G., Cvetkov A.I. **On Vortex Destruction.**

Some results are reported of computational experiments over viscous flow in cylindrical and polyhedral ducts. The study aimed to clearing up the opportunities of correct calculation of decay of vortices in ANSYS.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Жигалко Е. Ф., Карпенко А. Г., Цветков А. И.</i> Деструкция вихря	3
<i>Перегудин С. И., Холодова С. Е.</i> Математическое моделирование динамики вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой неоднородной жидкости в экваториальной области	7
<i>Смирнов А. Л., Харунжигий А. А.</i> Исследование поведения собственных частот и форм колебаний конической оболочки с малым углом образующей методом ортогональной прогонки	55
1. Введение	55
2. Метод ортогональной прогонки С.К. Годунова для решения краевой задачи	56
3. Частоты осесимметричных колебаний	58
4. Низшие частоты и соответствующие им формы колебаний	60
5. Заключение	66
<i>Платонов В. В.</i> Применение уточненной теории к исследованию трансверсально-изотропной сферической оболочки	67
1. Введение	67
2. Уточненные теории оболочек	68
3. Разрешающее уравнение уточненной теории	69
4. Статическое критическое давление	71
5. Определение частот собственных колебаний	75
6. Определение формы потери устойчивости	77
7. Заключение	78
<i>Капитанова С. В.</i> Механические свойства асбестовых нанотрубок	81
1. Введение	81
2. Описание экспериментального подхода	82
3. Теоретический анализ	83
4. Заключение	85

<i>Александрова Л. А., Пестерев Е. В.</i> Математическое моделирование некоторых течений в подземной гидромеханике (II)	87
1. Введение	87
2. Моделирование подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания	88
2.1. Постановка задачи и ее решение	88
2.2. Анализ численных результатов	94
3. Моделирование обтекания шпунта Жуковского через орошаемый почвенный слой с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом	97
3.1. Постановка задачи и ее решение	97
3.2. Анализ численных результатов	100
5. Заключение	105
<i>Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И.</i> Об одном методе создания космических зеркал	107
1. Введение	107
2. Математическая модель динамики расширения сферического жидкого слоя в невесомости	108
2.1. Начальные условия задачи	109
2.2. Граничные условия задачи	110
3. Численное решение дифференциального уравнения (22)	115
4. Заключение	119
<i>Груничева Е. В., Курбатова Г. И., Попова Е. А.</i> Задача о выводе газопровода на периодический режим работы	121
1. Введение	121
2. Математическая модель	122
3. Пример расчета	125
4. Заключение	125
<i>Сайкова М. С.</i> Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с термоизолированной дуговой трещиной при нестационарном термонагружении	129
1. Введение	129
2. Постановка задачи	131
3. Методика расчёта. Решение тестовой задачи	132

4. Результаты расчётов для одной трещины	133
5. Результаты расчётов для ансамбля трещин	136
6. Заключение	137
<i>Юшин Р. Ю. Поведение трансверсально-изотропного SD</i> <i>материала при упругопластическом изгибе</i>	140
1. Введение	140
2. Разрешающие уравнения	142
3. Анализ результатов расчетов	145
4. Заключение	151
<i>Павилайнен В. Я., Тулжина А. Н. Вынужденные колеба-</i> <i>ния системы консольных стержней на основе тео-</i> <i>рии С.П. Тимошенко</i>	153
1. Постановка задачи и исходные соотношения	153
2. Решение задач о свободных и вынужденных колебаниях сопряженной системы в классической постановке	155
3. Свободные и вынужденные колебания системы шарнир- но соединенных стержней на основе теории С. П. Тимо- шенко	160
4. Свободные и вынужденные колебания системы стерж- ней, соединенных упругим элементом, в классической теории и теории С. П. Тимошенко	169
5. Пример числового расчета	174
6. Выводы	176
<i>Захаренкова Н. В. Влияние капиллярности в гидродинами-</i> <i>ке</i>	177
1. Введение	177
2. Постановка задачи и ее решение	178
3. Обсуждение численных результатов	182
4. Заключение	186
Доклады, не вошедшие в сборник	188
Хроника	191
Об авторах	192
Summaries	196

РЕФЕРАТЫ

УДК 532.546

Александрова Л. А., Пестерев Е. В. **Математическое моделирование некоторых течений в подземной гидромеханике (II)** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 87–106.

В рамках двумерной стационарной фильтрации в однородном и изотропном грунте несжимаемой жидкости по закону Дарси исследуются некоторые фильтрационные течения под гидротехническим сооружением с участками постоянной скорости обтекания и под шпунтом Жуковского через орошаемый почвенный слой с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом. Решение соответствующих многопараметрических смешанных краевых задач теории аналитических функций осуществляется с помощью метода конформных отображений областей специального вида. Приводятся результаты численных расчетов и дается подробный гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров моделей на картину течений

Библиогр. 12 назв. Ил. 8. Табл. 5.

УДК 533

Груничева Е. В., Курбатова Г. И., Попова Е. А. **Задача о выводе газопровода на периодический режим работы** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 121–128.

Настоящая работа продолжает исследования по построению адекватной математической модели транспортировки газа по морским газопроводам, начатые в серии работ [1]–[4]. В статье рассматриваются нестационарные процессы транспортировки газа. Основным режимом эксплуатации газопроводов является установившийся, однако существует ряд задач, для решения которых необходима нестационарная математическая модель, например задача о выходе газопровода на периодический режим или задача перевода системы на новый установившийся режим работы. Здесь исследованы медленно меняющиеся процессы и рассмотрено безударное неустановившееся неизотермическое турбулентное течение вязкой неиде-

альной химически инертной многокомпонентной газовой смеси по морскому трубопроводу кругового сечения с абсолютно жесткими стенками, имеющими многослойное покрытие.

Библиогр. 10 назв. Ил. 3.

УДК 532

Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. **Об одном методе создания космических зеркал** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 107–120.

В статье рассматривается упрощенная математическая модель изотермического процесса расширения в невесомости жидкого слоя в сферически-симметричном случае для несжимаемой ньютоновской жидкости, удовлетворяющей дополнительному требованию затвердевания в определенный момент времени. Найдено аналитическое решение гидродинамической задачи расчета полей скорости и давления в жидком расширяющемся слое. Решение уравнений модели выражено в виде зависимости от поведения внутреннего радиуса слоя $R(t)$. Функция $R(t)$ удовлетворяет нелинейному неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению. Обсуждаются подходы к решению этого уравнения. Сформулированы прямая и обратная задачи динамики жидкого слоя и критерий допустимости режима подачи газа в рассматриваемой задаче. На его основе и полученного аналитического решения гидродинамической задачи предложены рекомендации по выбору допустимых режимов проведения процесса и выбору материалов с требуемыми реологическими свойствами.

Библиогр. 7 назв.

УДК 532.5

Жигалко Е. Ф., Карпенко А. Г., Цветков А. И. **Деструкция вихря** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 3–6.

В статье представлены результаты вычислительных экспериментов, проведенных для выяснения возможности расчёта течения с рассеивающимися вихрями и определения таким образом подхода к расчёту практической задачи оценки меры снижения закрученности потока вследствие его взаимодействия со стенками много-

гранного канала, а также с лонжеронами, размещаемыми на этих стенках.

Библиогр. 2 назв. Ил. 3.

УДК 532.546

Захаренкова Н. В. **Влияние капиллярности в гидродинамике** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 177–187.

До сих пор во всех предыдущих исследованиях по данной тематике рассматривались области течения, которые снизу ограничивались водопроницаемой границей. В данной работе изучается случай фильтрации из канала в слое грунта ограниченной мощности, подстилаемом горизонтальным водоупором, при наличии как капиллярности грунта, так и испарения со свободной поверхности грунтовых вод. По сравнению с подобными задачами без учета капиллярности грунта здесь фильтрационная схема значительно усложняется из-за появления дополнительного граничного участка – линии тока. Это приводит к появлению еще одной дополнительной угловой точки, увеличивающей общее число неизвестных параметров конформного отображения, которые возникают в процессе решения соответствующей краевой задачи с неизвестной свободной границей. Для ее решения используется метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса, а также разработанный способ конформного отображения областей специального вида, которые характерны в задачах гидро- и аэромеханики. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов изучаются характерные особенности моделируемого процесса при учете таких факторов, как капиллярность грунта и испарение со свободной поверхности, и оценивается их совместное влияние на размеры зоны насыщения. Построенный алгоритм расчета позволяет в каждом конкретном случае судить о форме и размерах зоны растекания в зависимости от ширины канала, капиллярности грунта и интенсивности испарения, а также мощности пласта.

Библиогр. 10 назв. Ил. 6. Табл. 2.

УДК 539

Каштанова С. В. **Механические свойства асбестовых нанотрубок** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 81–86.

С помощью сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) исследованы механические свойства отдельных нанотрубок из хризотилового асбеста с внешним диаметром около 30 нм и внутренним около 5 нм. Определены жесткости — отношения приложенной силы к величине прогибов мостиков и консолей, сформированных нанотрубками, перекрывающими отверстия в пористой подложке. Представлены результаты экспериментальных исследований как полых асбестовых нанотрубок, так и содержащих различные наполнители: воду, ртуть и теллур.

Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования в рамках континуальной теории упругости. Для оценки модуля упругости нанотрубок по величине прогиба использовалась классическая теория Бернулли–Кирхгофа–Лява. Однако классическая теория хорошо работает для балок сплошного поперечного сечения из однородного материала и может давать существенные погрешности для многослойных балок. В связи с этим проводилось также определение прогибов нанотрубок по теории Тимошенко–Рейсснера, учитывающей поперечные сдвиги. Такой подход позволяет объяснить существенное влияние наполнителя на величину жесткости нанотрубок.

Библиогр 5 назв. Ил. 3.

УДК 532.591

Перегудин С. И., Холодова С. Е. **Математическое моделирование динамики вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой неоднородной жидкости в экваториальной области** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 7–54.

Исследуются уравнения трехмерной экваториальной динамики идеальной электропроводной неоднородной вращающейся жидкости. Эти уравнения вследствие представления магнитного поля и поля скорости в виде суперпозиции невозмущенных полей, соответствующих стационарному состоянию среды, и индуцированных

полей, обусловленных волновым движением, при помощи введения двух вспомогательных функций приводятся к специальному скалярному уравнению. Исследование этого уравнения позволяет изучить проблему разрешимости возникающих начально-краевых задач теории волн, распространяющихся в окрестности экваториальной зоны сферического слоя электропроводной вращающейся жидкости с неоднородной плотностью. Построены частные решения представленного скалярного уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды.

Библиогр. 15 назв.

УДК 539

Платонов В. В. **Применение уточненной теории к исследованию трансверсально-изотропной сферической оболочки.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 67–80.

В статье исследуется возможность возникновения принципиально новых форм потери устойчивости трансверсально-изотропной сферической оболочки при нормальной динамической нагрузке. Задача рассматривается с использованием уточненной теории, учитывающей поперечные деформации сдвига согласно С.А. Амбарцумяну. Приводится сравнение величин критической нагрузки для случая трансверсально-изотропного и изотропного материалов. Строится полная система решений уравнения движения сферической оболочки. Определяются формы потери устойчивости и частоты собственных колебаний. Получены условия, при которых теория, учитывающая влияние поперечного сдвига, существенно уточняет классическую теорию.

Библиогр. 7 назв. Табл. 3.

УДК 539

Сайкова М. С. **Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с термоизолированной дуговой трещиной при нестационарном термонагружении** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 129–139.

Выполнена оценка прочности сосуда давления с технологическим дефектом типа “расслоение” при переходных режимах эксплуатации. В качестве расчётной модели рассмотрена цилиндрическая оболочка с одной или несколькими теплоизолированными трещинами, находящаяся под воздействием нестационарного температурного поля. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния около термоизолированной дуговой трещины. Также проанализировано взаимодействие нескольких одинаковых трещин при их различном расположении относительно друг друга. Численные расчеты выполнены методом конечных элементов.

Библиогр. 7 назв. Ил. 9.

УДК 539.3, 534.1

Смирнов А. Л., Харунжий А. А. **Исследование поведения собственных частот и форм колебаний конической оболочки с малым углом образующей методом ортогональной прогонки** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 55–66.

Целью работы стало исследование применимости метода ортогональной прогонки С. К. Годунова к решению задачи о свободных колебаниях тонких упругих оболочек вращения. Как объект исследования были выбраны цилиндрические и конические оболочки с малым углом образующей, при этом наибольшее внимание было обращено на поведение собственных частот и форм колебаний при изменении малого параметра угла образующей. Достоверность результатов, полученных в работе, была проверена применением различных конкурирующих методов решения; при этом проведено сравнение методов между собой по точности и на его основе дана положительная оценка применению алгоритма ортогональной прогонки для упомянутых задач.

Библиогр. 6 назв. Ил. 5. Табл. 4.

УДК 534.1

Павилайнен В. Я., Тулкина А.Н. **Свободные и вынужденные колебания системы консольных стержней на основе теории С.П. Тимошенко** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 153–176.

На основе теории С.П. Тимошенко получено решение задач о свободных и вынужденных колебаниях системы двух различных шарнирно соединенных стержней, первый из которых имеет заданные вынужденные колебания левого конца с амплитудой A_0 , а второй (соединенный с первым шарнирно) жестко защемлен на правом конце. Дано развитие построенного точного решения на случай, когда между стержнями введена пружина с коэффициентом податливости s . Получены расчетные формулы для определения прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил. Выполнены числовые расчеты на основе решений указанных задач, результаты которых иллюстрируются в таблицах и на графиках, а также сравниваются с результатами, полученными на основе теории Бернулли—Эйлера.

Библиогр. 4 назв. Ил. 4. Табл. 1.

УДК 539

Юшин Р. Ю. Поведение трансверсально-изотропного SD материала при упругопластическом изгибе // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2009–2010 гг. С. 140–152.

На основе решения задачи упругопластического изгиба круглой изотропной пластины, находящейся под действием гидростатического давления при условии ее свободного опирания, построено решение для трансверсально-изотропных круглых пластин с эффектом SD. Изучено влияние коэффициентов анизотропии и разносопротивляемости на напряженно-деформируемое состояние таких пластин.

Библиогр. 8 назв. Ил. 11. Табл. 2.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2009–2010 гг.

Под ред. *А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигалко*

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*
Корректор *Н. В. Ермолаева*
Компьютерная верстка *А. М. Вейцторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

Подписано в печать . . . 2010. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. . . Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22
E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76

E-mail: post@unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41

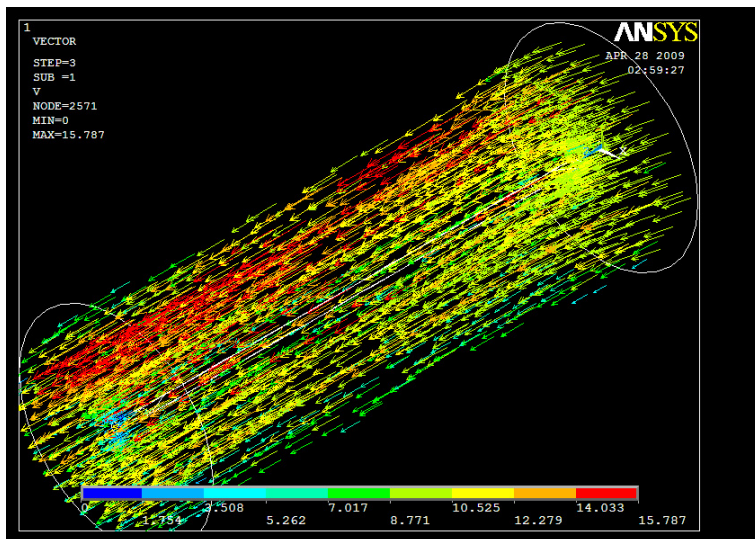


Рис. 1. Пример расчёта течения с рассеивающимися вихрями (к статье Е.Ф. Жигалко, А.Г. Карпенко, А.И. Цветкова).

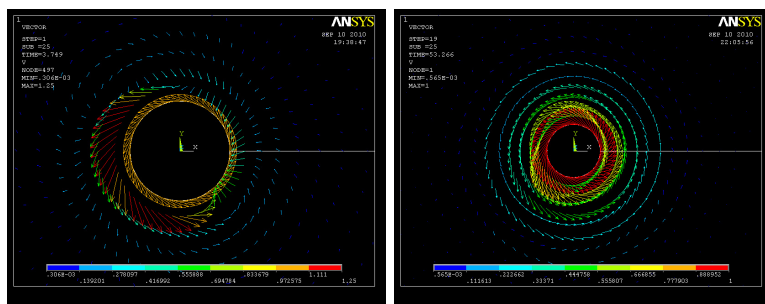


Рис. 2. Характерные примеры расчётных полей скорости при диффузии завихрённости от вращающегося цилиндра (к статье Е.Ф. Жигалко, А.Г. Карпенко, А.И. Цветкова).

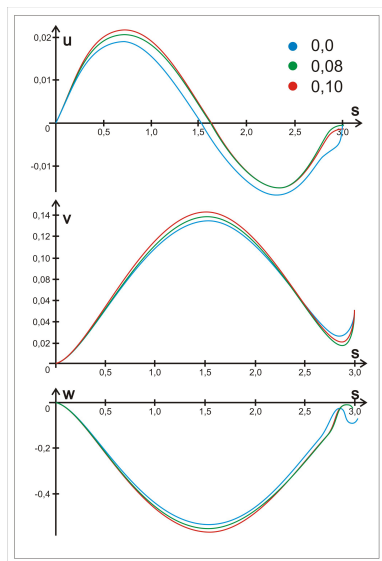


Рис. 3. Графики собственных форм колебаний для жестко закрепленных цилиндрической ($\alpha = 0.1$) и конических (при $\alpha = 0.08$ и $\alpha = 0.1$) оболочек толщины $h = 0.02$ (к статье А.Л. Смирнова и А.А. Харунжего).

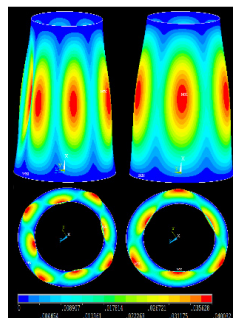


Рис. 4. Формы деформированной конической оболочки для первой и второй наименьших частот, полученные МКЭ в пакете ANSYS (к статье А.Л. Смирнова и А.А. Харунжего).

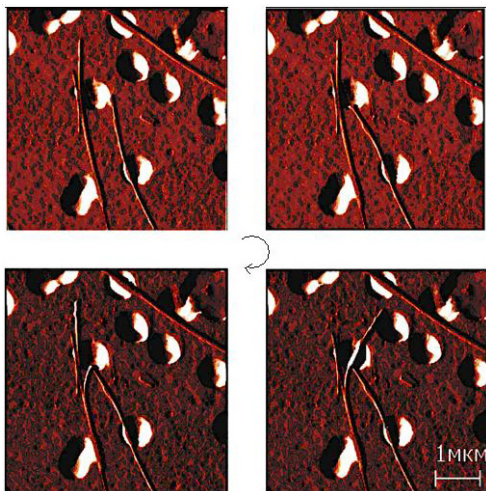


Рис. 5. Манипуляция отдельными нанотрубками асбеста, заполненными сегнетовой солью. Исходное состояние изображено на верхнем левом рисунке. Круговая стрелка в центре указывает направление хода времени (к статье С.В. Каштановой).

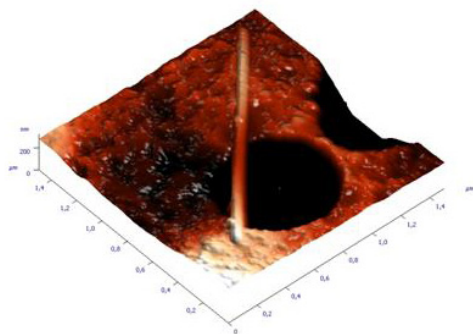


Рис. 6. АСМ топография (3D изображение) участка мембраны с порой перекрытой мостиком из асбестовой нанотрубки, наполненной теллуром (к статье С.В. Каштановой).



Рис. 7. Вид поперечного сечения образца, вырезанного из зоны расслоения (к статье М.С. Сайковой).

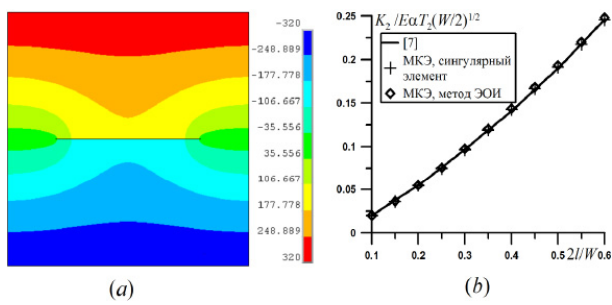


Рис. 8. Решение тестовой задачи: (а) – температурное поле в пластине, возмущенное теплоизолированной трещиной; (б) – результаты численного расчёта коэффициента интенсивности напряжений (к статье М.С. Сайковой).

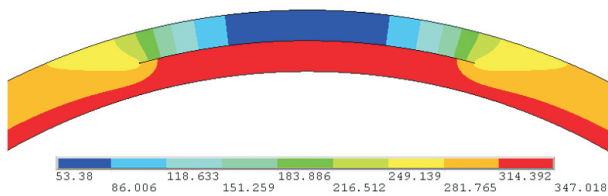


Рис. 9. Возмущенное теплоизолированной трещиной температурное поле ($^{\circ}\text{C}/\text{мин}$) при нагреве со скоростью изменения температуры 10°C в момент достижения температуры среды 350°C ($2a = 500 \text{ мм}$) (к статье М.С. Сайковой).