

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2010–2011 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011

ББК 22.25
Т78

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),
канд. физ.-мат. наук, *Е. Б. Воронкова* (отв. секретарь) (КТН, Швеция),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),
проф. *Р. Вайанкур* (Университет Оттавы, Канада),
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2010–2011 гг. / СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2012. — 132 с.

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ISSN 2218-7421

ББК 22.25

© С.-Петербургский
государственный
университет, 2012

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА ГАУССА К ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛИ

Д. Н. ГАВРИЛОВ

Рассматривается возможность применения обобщенного принципа Гаусса для исследования задач управления колебаниями механических систем на примере гашения колебаний консоли. Наряду с классической постановкой исследуется возможность минимизации полной энергии колебаний консоли, как условие прекращения ее колебаний. Предлагаются способы упрощения решения за счет использования свойств симметрии системы.

В работе решается задача прекращения колебаний консоли в заданный момент времени и в заданном положении за счет специального выбора управления. Консоль предполагается однородной, постоянного поперечного сечения. Ее основание может перемещаться прямолинейно в плоскости, перпендикулярной оси консоли. Требуется определить, по какому закону должно изменяться ускорение основания консоли для того, чтобы за заданное время T основание консоли переместилось на расстояние a , и в момент остановки основания поперечные колебания консоли отсутствовали бы (см. рис. 1). Для простоты полагается, что в начальный момент консоль покоилась.

Для решения задачи удобно ввести две декартовы системы координат: неподвижную систему координат с началом в основании консоли и осью, совпадающей с направлением движения, и систему, жестко связанную с консолью, так что ее центр находится в основании консоли, ось OX направлена вдоль консоли, а ось OY — перпендикулярна ей и совпадает с направлением движения (рис. 1).

Доклад на семинаре 21 сентября 2010 г.

© Д. Н. Гаврилов, 2012

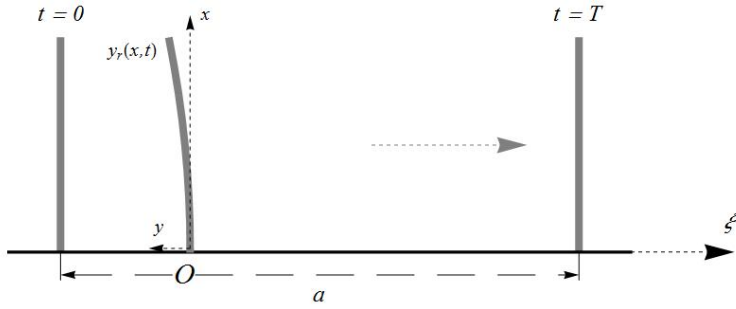


Рис. 1. Схема движения консоли

Абсолютное перемещение точек консоли, таким образом, может быть вычислено:

$$y_a(x, t) = \xi(t) + y_r(x, t),$$

где $y_r(x, t)$ — соответствует прогибу консоли.

Для вычисления прогиба консоли удобно использовать обобщенные лагранжевы координаты. Тогда прогиб $y_r(x, t)$ может быть найден как

$$y_r(x, t) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} q_{\sigma}(t) X_{\sigma}(x),$$

здесь q_{σ} — обобщенные лагранжевы координаты, X_{σ} — собственные формы консоли.

Как показано в работе [1], собственные числа λ_{σ} для однородной консоли постоянного сечения находятся из следующего уравнения:

$$\cos \lambda_{\sigma} \cosh \lambda_{\sigma} = -1,$$

а собственные формы $X_{\sigma}(x)$ задаются выражением

$$X_{\sigma}(x) = \sin \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} - \text{sh} \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} + A_{\sigma} \left(\text{ch} \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} - \cos \frac{\lambda_{\sigma} x}{l} \right).$$

Собственные частоты ω_{σ} связаны с собственными числами λ_{σ} следующими соотношениями:

$$\omega_{\sigma}^2 = \frac{EJ}{ml^3} \lambda_{\sigma}^4,$$

здесь l — длина консоли, m — ее масса, E — модуль Юнга, J — момент инерции.

Основным преимуществом использования обобщенных лагранжевых координат является то, что в них получаются простые выражения для потенциальной и кинетической энергии:

$$T_r = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_{\sigma} \dot{q}_{\sigma}^2}{2}, \quad (1)$$

$$\Pi = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{M_{\sigma} \omega_{\sigma}^2}{2} q_{\sigma}^2, \quad (2)$$

здесь M_{σ} — приведенные массы, которые могут быть найдены следующим образом:

$$M_{\sigma} = \frac{m}{l} \int_0^l X_{\sigma}^2(x) dx = mA_{\sigma}^2,$$

где

$$A_{\sigma} = \frac{\operatorname{sh} \lambda_{\sigma} + \sin \lambda_{\sigma}}{\operatorname{ch} \lambda_{\sigma} + \cos \lambda_{\sigma}}.$$

Полная кинетическая энергия системы может быть найдена по формуле

$$T = \frac{m}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y_a}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3)$$

Учитывая выражения для потенциальной и кинетической энергий (2), (3), с помощью уравнений Лагранжа получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{q}_{\sigma} + \omega_{\sigma}^2 q_{\sigma} = -\frac{a_{\sigma}}{A_{\sigma}^2} \ddot{\xi}, \quad \sigma = \overline{1, \infty}, \quad (4)$$

где

$$a_{\sigma} = \frac{1}{l} \int_0^l X_{\sigma}(x) dx.$$

В данной задаче удобно перейти к безразмерным переменным и безразмерному времени по формулам

$$x_0 = \frac{\xi}{l}, \quad x_\sigma = -\frac{A_\sigma^2 q_\sigma}{a_\sigma l}, \quad \tau = \omega_1 t. \quad (5)$$

Для простоты здесь и далее производная по безразмерному времени τ будет обозначаться точкой. С учетом замены (5) введем следующие обозначения для безразмерных постоянных:

$$\bar{a} = \frac{a}{l}, \quad \bar{T} = \omega_1 T, \quad \bar{\omega}_\sigma = \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2. \quad (6)$$

В качестве искомого управления возьмем функцию $u(\tau)$, связанную с ускорением основания консоли $\ddot{\xi}$ соотношением

$$u = \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\xi}{l}\right) = \frac{1}{\omega_1^2 l} \ddot{\xi}. \quad (7)$$

Подставляя выражения (5)–(7) в (4), получим следующие уравнения для нахождения $u(\tau)$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = u, \\ \ddot{x}_\sigma + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma = u, \quad \bar{\omega}_\sigma = \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2, \quad \sigma = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) содержит бесконечное число уравнений. Это объясняется наличием у консоли бесконечного числа собственных частот. Естественно, возникает вопрос, целесообразно ли в этом случае обеспечивать гашение колебаний в конце пути для всего спектра частот или можно ограничиться конечным числом. Так как ряды для кинетической и потенциальной энергий быстро сходятся, то разумно предполагать, что вклад высших форм колебания достаточно мал и можно ограничиться учетом лишь первых n форм колебаний консоли. Общее число уравнений будет при этом $s = n + 1$. Первое уравнение соответствует искомому управлению $u(\tau)$.

В данных предположениях задача о гашении колебаний консоли при перемещении ее основания за безразмерное время $\bar{T} = \omega_1 T$ на

заданную безразмерную величину \bar{a} сведется к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = u, \\ \ddot{x}_\sigma + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma = u, \quad \bar{\omega}_\sigma = \left(\frac{\omega_\sigma}{\omega_1}\right)^2, \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ x_0(0) = \dot{x}_0(0) = \dot{x}_0(\bar{T}) = 0, \quad x_0(\bar{T}) = \bar{a}, \\ x_\sigma(0) = \dot{x}_\sigma(0) = x_\sigma(\bar{T}) = \dot{x}_\sigma(\bar{T}) = 0, \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, что параметрами системы являются спектр собственных частот ($\bar{\omega}_\sigma$), время, за которое система должна быть остановлена (\bar{T}), и расстояние, которое она должна преодолеть (\bar{a}). При этом зависимость от расстояния \bar{a} является линейной, поэтому при вычислениях удобно полагать, что $\bar{a} = 1$.

Как отмечалось выше в системе (9), консоль, имеющая бесконечное число степеней свободы, моделируется системой с n степенями свободы. Конструктивное решение вопроса о возможности гашения только первых n форм было предложено Костиным в работе [2]. Он предложил вместо гашения минимизировать полную энергии консоли в момент остановки основания. И хотя этот подход тоже предлагает ограничиваться некоторым числом собственных колебаний, он позволяет оценить вклад высоких частот и выбрать необходимое число собственных колебаний. Кривая прогиба, входящая в выражения для полной энергии колебаний, определялась Костиным по методу интегриродифференциальных соотношений. Этот приближенный вычислительный алгоритм определения полной энергии колебаний консоли является и сложным, и громоздким. В данной работе эта идея реализуется на основании обобщенных лагранжевых координат, которые позволяют значительно упростить соответствующие вычисления.

Для использования энергетического подхода, предложенного Костиным, необходимо ввести полную энергию колебаний консоли. С учетом формул для кинетической (1) и потенциальной (2) энергий и замены переменной (5) она будет иметь вид

$$T_r + \Pi = \frac{ml^2}{2} \omega_1^2 \sum_{\sigma=1}^N \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2).$$

Здесь N — число рассматриваемых форм колебаний.

Для наглядности результатов удобнее ввести относительную полную энергию колебаний консоли, которая будет вычисляться в долях T^* — максимальной энергии консоли, как абсолютно твердого тела:

$$E_n(\tau) = \frac{T_r + \Pi}{T^*} = \frac{1}{v_m^2} \sum_{\sigma=1}^N \frac{a_\sigma^2}{A_\sigma^2} (\dot{x}_\sigma^2 + \bar{\omega}_\sigma^2 x_\sigma^2), \quad (10)$$

$$T^* = \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad v_{\max} = l\omega_1 v_m,$$

где v_m — максимальная скорость движения консоли как твердого тела.

Решение системы уравнений (9), в силу условий в момент времени $t = 0$, имеет вид:

$$\begin{aligned} x_0(\tau) &= \int_0^\tau u(t)(\tau - t) dt, \\ x_\sigma(\tau) &= \frac{1}{\bar{\omega}_\sigma} \int_0^\tau u(t) \sin(\bar{\omega}_\sigma(\tau - t)) dt, \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Известно, что существует бесконечное число различных управлений $u(\tau)$, которые позволят удовлетворить системе уравнений (9). Поэтому необходимо прибегнуть к какому-то критерию, который позволит устранить эту неопределенность. Наиболее часто в качестве условия выбора функции $u(\tau)$ выбирают условие минимальности функционала:

$$J = \int_0^{\bar{T}} u(\tau)^2 d\tau. \quad (12)$$

При решении краевой задачи (9) для определения вида той функции $u(\tau)$, при которой функционал (12) имеет минимум, необходимо воспользоваться принципом максимума Понтрягина. Применяя этот принцип, получим, что управление $u(\tau)$ следует искать в виде

$$u(\tau) = A_0 + B_0\tau + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\bar{\omega}_k\tau) + B_k \sin(\bar{\omega}_k\tau). \quad (13)$$

Так как управление $u(\tau)$ ищется в виде ряда по гармоническим функциям (13), то найденное управление будет состоять из n гармоник и при большом отношении $\frac{T}{T_1}$ будет иметь сильный колебательный характер.

В работах [3], [4] предлагается использовать другой критерий, а именно искать управление на основании обобщенного принципа Гаусса. Как показано в работе [5], данный подход в этой задаче по ряду параметров является более предпочтительным. Управляющее воздействие $u(\tau)$ при использовании обобщенного принципа Гаусса следует искать в виде

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{2s} C_k \tau^{k-1}, \quad (14)$$

где C_k — некоторые постоянные, а s ($s = n + 1$) — порядок системы уравнений (9).

Продемонстрируем разницу этих подходов на следующем примере.

Рассмотрим случай, когда $n = 2$, $\frac{T}{T_1} = 8$ и $\frac{T_1}{T_2} = 6.27$. Сплошной линией на рис. 2 показано управление, соответствующее минимизации функционала (12), а штрихованной — управление, соответствующее обобщенному принципу Гаусса. Обратим внимание не только на осцилляции управления $u(\tau)$, соответствующего принципу максимума Понтрягина, по второй гармонике, но и на разрыв по ускорению y всех точек системы при $t = 0$ и $t = T$. Отметим, что отношение $\frac{T_1}{T_2} = 6.27$ соответствует отношению периодов колебаний консоли постоянного поперечного сечения.

Подставляя выражение (14) в (9), в случае гашения n первых форм приходим к линейной системе алгебраических уравнений для определения постоянных C_k .

В случае минимизации необходимо выражение (14) подставить в решения (11), после чего эти решения подставить в формулу (10). Постоянные C_k могут быть найдены из условий в конечный момент времени для основания консоли и минимизации полученного выражения для $E_n(T)$ по C_k .

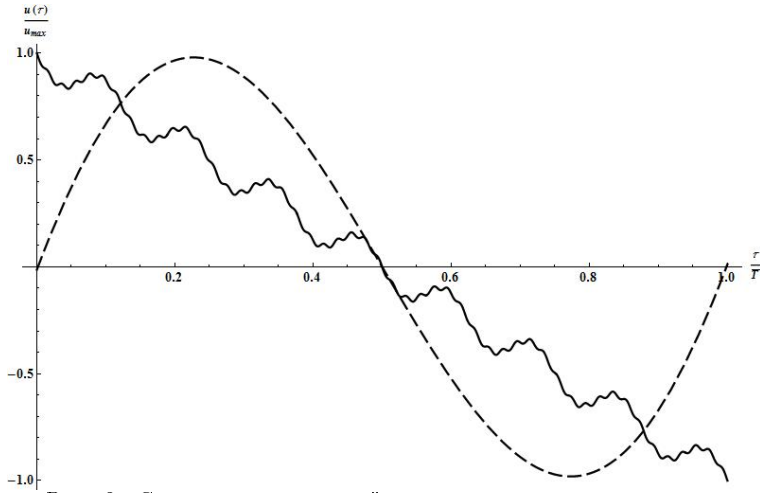


Рис. 2. Сравнение управлений, соответствующих применению принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса

Вычислительная процедура может быть существенно сокращена с помощью свойств симметрии, присущих данной задаче.

Покажем, что функции $u(\tau)$, $x_0(\tau)$ и $x_\sigma(\tau)$ ($\sigma = \overline{1, n}$) в задаче (9) являются такими, что

$$\begin{aligned} u(\tau) &= -u(\bar{T} - \tau), \\ x_0(\tau) &= \bar{a} - x_0(\bar{T} - \tau), \\ x_\sigma(\tau) &= -x_\sigma(\bar{T} - \tau), \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0(\tau) &= x_0(\bar{T} - \tau) - \bar{a}, \\ \tilde{x}_\sigma(\tau) &= x_\sigma(\bar{T} - \tau), \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Они таковы, что

$$\ddot{\tilde{x}}_0(\tau) = \ddot{x}_0(\tau), \quad \ddot{\tilde{x}}_\sigma(\tau) = \ddot{x}_\sigma(\bar{T} - \tau), \quad \sigma = \overline{1, n}.$$

Отсюда и из выражения (16) следует, что задача (9) в новых функ-

циях запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_0 = \tilde{u}, \\ \ddot{\tilde{x}}_\sigma + \omega_\sigma^2 \tilde{x}_\sigma = \tilde{u}, \\ \tilde{x}_0(0) = \dot{\tilde{x}}_0(0) = 0, \quad \tilde{x}_\sigma(0) = \dot{\tilde{x}}_\sigma(0) = 0, \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ \tilde{x}_0(\bar{T}) = -\bar{a}, \quad \dot{\tilde{x}}_0(\bar{T}) = 0, \quad \tilde{x}_\sigma(\bar{T}) = \dot{\tilde{x}}_\sigma(\bar{T}) = 0, \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь

$$\tilde{u}(\tau) = u(\bar{T} - \tau). \quad (18)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений пропорционально величине \bar{a} , и потому, сравнивая (9) и (17), видим, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0(\tau) &= -x_0(\tau), \\ \tilde{x}_\sigma(\tau) &= -x_\sigma(\tau), \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ \tilde{u}(\tau) &= -u(\tau). \end{aligned}$$

Из этих формул и выражений (16) и (18) следует, что соотношения (15) выполняются.

Таким образом, соотношения (15) накладывают дополнительные условия на функции $u(\tau)$, $x_0(\tau)$ и $x_\sigma(\tau)$. Воспользуемся ими для упрощения выражения (14) для $u(\tau)$.

Рассмотрим соотношение на $u(\tau)$:

$$u(\tau) = -u(\bar{T} - \tau). \quad (19)$$

Это свойство $u(\tau)$ есть не что иное, как антисимметрия относительно точки $\frac{\bar{T}}{2}$. Таким образом, достаточно построить управление на промежутке $\tau = \left[0, \frac{\bar{T}}{2}\right]$, а дальше продолжить решение по антисимметрии относительно момента времени $\tau = \frac{\bar{T}}{2}$.

Согласно обобщенному принципу Гаусса, управление $u(\tau)$ следует искать в виде (14). Используя соотношение (19), можно сократить количество неизвестных постоянных в выражении (14) до $n + 1$. Обозначим эти новые независимые постоянные также через

C_k , и этот новый полином, антисимметричный относительно момента времени $\frac{\bar{T}}{2}$, представим в виде

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k \left(\tau - \frac{\bar{T}}{2} \right)^{2k-1},$$

где, как и раньше, число n равно количеству гасимых собственных форм.

Вместе с уменьшением числа неизвестных постоянных C_k уменьшится и число граничных условий, из которых они могут быть найдены. Так как процесс управления может быть продолжен по антисимметрии для $\tau = \left[\frac{\bar{T}}{2}, \bar{T} \right]$, вместо условия в конечный момент времени теперь ставятся граничные условия в момент времени $\tau = \frac{\bar{T}}{2}$:

$$\begin{aligned} x_0 \left(\frac{\bar{T}}{2} \right) &= \bar{a}, \\ x_\sigma \left(\frac{\bar{T}}{2} \right) &= 0, \quad \sigma = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Это позволяет уменьшить порядок системы в два раза, что значительно упрощает нахождение решения.

Для реализации описанного решения использовался математический пакет Mathematica. Это позволило численно построить ряд решений и исследовать их свойства. Главной задачей было обосновать возможность гашения только n первых форм колебаний системы на основе принципа минимизации полной энергии колебаний консоли. Полученные результаты представлены в табл. 1.

Из нее видно, что при времени действия T , больших, чем первый период собственных колебаний, гашение и минимизация дают одинаковые результаты. Вклад энергий по частотам для этих случаев представлен в табл. 2.

Видно, что основной вклад в энергию дает, как правило, следующая частота за гасимым спектром. Вклад более высоких частот значительно меньше.

Таблица 1. Энергия колебаний $E_n(T)$ при гашении первой формы и при минимизации по одному параметру

$k = \frac{T}{T_1}$	Гашение	Минимизация
0.6	1.758	2.527
1.0	$0.163 \cdot 10^{-1}$	$0.168 \cdot 10^{-1}$
1.5	$0.256 \cdot 10^{-3}$	$0.256 \cdot 10^{-3}$
2.0	$0.185 \cdot 10^{-3}$	$0.184 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2. Вклад в энергию $E_n(T)$ по формам колебаний при гашении первой собственной частоты

$k = \frac{T}{T_1}$	Номер собственной частоты				
	1	2	3	4	5
0.6	0	1.747	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-2}$
1.0	0	$0.160 \cdot 10^{-1}$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-4}$
1.5	0	$0.225 \cdot 10^{-3}$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-6}$
2.0	0	$0.155 \cdot 10^{-3}$	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-7}$

Главным преимуществом применения обобщенного принципа Гаусса можно считать более удобный с практической точки зрения вид управления, не имеющий осцилляций по разным гармоникам. Для больших времен минимизация энергии колебаний и гашение дают одинаковый результат, но минимизация позволяет численно выяснить необходимое число собственных форм, а также исследовать влияние гашения n первых частот на последующие. Таким образом, минимизация является хоть и более сложным, но тем не менее и более универсальным приемом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М., 1965.
2. Костин Г. В., Саурин В. В. Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады академии наук. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.
3. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х. Применение обобщенного принципа

Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 20–25.

4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
5. Солтаханов Ш.Х. Гашение колебаний консоли // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. № 4. С. 105–112.

О ДЕФОРМАЦИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. А. КАРАМШИНА

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии трехслойной изотропной сферической оболочки, состоящих из слоев различной толщины с различными упругими свойствами под действием внутриглазного давления. Задача решается с использованием трехмерной теории упругости. Анализ напряженно-деформированного состояния глаза проводится с учетом возможности сосудистой оболочки изменять свои биомеханические свойства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Глазное яблоко имеет неравномерную толщину и состоит из трех основных оболочек: плотной наружной фиброзной оболочки — склеры, толщиной 0.6–1.0 мм, средней сосудистой оболочки — хориоидеи, толщиной 0.3–0.4 мм, и самой тонкой и мягкой внутренней оболочки — сетчатки, толщина которой меняется от 0.08 до 0.4 мм; всю внутреннюю полость глазного яблока заполняет внутриглазная жидкость (водянистая влага и стекловидное тело). Внутриглазная жидкость обеспечивает нормальное прилегание внутренних оболочек глаза, а также поддержание определенного уровня внутриглазного давления (ВГД). С внешней стороны на оболочку воздействуют экстраокулярные мышцы. В связи с этим в рассматриваемой задаче глазное яблоко моделируется напряженно-упругой замкнутой многослойной сферической оболочкой под действием внутреннего и внешнего давления.

Склера, хориоидея и сетчатка обладают разными биомеханиче-

Доклад на семинаре 2 ноября 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00140)

© Л. А. Карамшина, 2012

скими свойствами. Изучению механических характеристик склеры посвящен ряд исследований. О биомеханических свойствах сосудистой и сетчатой оболочках глаза известно пока крайне мало.

В табл. 1 приведены значения модуля упругости, полученные различными авторами при исследовании механических свойств основных глазных тканей (см. [1]).

Таблица 1. Основные свойства глазных тканей

Вид глазной ткани	Модуль упругости, МПа	Литература
Склера	5.5	A.Kobayashi et al., 1971
	4.76	J.Battaglioli, R.Kamm, 1984
	5.3 – 41	A.Arciniegas et al., 1986
	1.8 – 2.9	T.Friberg, J.Lace, 1984
	17.4 – 44.2	Е.Н.Иомдина, 1984, 2000
	28.5 – 36	E.Spoerl et al., 2005
Хориоидея	0.193 – 0.477	R.Moses, 1965
	0.555 – 0.52	J.Saulgozis et al., 2087
Сетчатка	0.02	W.Wu et al., 1987
		I.Jones et al., 1992

Сосудистая оболочка относится к “активным” структурам глаза (см. [2]): изменяя свой объем и жесткость в зависимости от кровенаполнения, она способна изменять свои механические свойства в течение суток.

Изменение биомеханических свойств сосудистой оболочки было выявлено и в результате исследований, проведенных Ю. Саулгозисом (см. [3]). В сосудистой оболочке при миопии были обнаружены такие биомеханические нарушения, как повышенная жесткость ткани и пониженная устойчивость к растяжению, которые, наряду с ее существенными трофическими и дегенеративными изменениями, могут привести к отслойкам или даже к разрывам внутренних оболочек глаза.

В настоящей работе построение математической модели, моделирующей глазное яблоко, проводится с учетом различных значений толщины и упругих свойств его внешних оболочек, а анализ

напряженно-деформированного состояния глаза проводится с учетом возможности сосудистой оболочки изменять свои биомеханические свойства.

Рассматриваемая задача может описывать изменение напряженно-деформированного состояния внешних оболочек глазного яблока при введении внутриглазных инъекций, а также оценить влияние упругих характеристик оболочек на возможное развитие отслоек.

2. Постановка задачи

Глазное яблоко моделируется трехслойной упругой сферической оболочкой, под действием нормального внутреннего и внешнего давления. Предполагается, что внешний слой оболочки является более жестким и отвечает биомеханическим характеристикам склеры, средний слой является “активным” слоем и отвечает биомеханическим характеристикам хориоидеи (сосудистой оболочке глаза), а внутренний слой — более мягким и отвечает биомеханическим характеристикам сетчатки.

Получим определяющие соотношения для напряжений и перемещений, возникающих в трехслойной сферической оболочке, находящейся под действием внутреннего и внешнего давления, в рамках трехмерной теории упругости. Для однородной изотропной сферы решение этой задачи описано в работе (см. [4]).

Обозначим R_1, R_4 — внутренний и внешний радиусы оболочки, R_2 и R_3 — радиусы зон контакта слоев ($R_1 < R_2 < R_3 < R_4$). Пусть p_1, p_4 — величины внутреннего и внешнего давления, p_2 и p_3 — величины давления, действующего в зоне контакта слоев.

Из соображений симметрии положим, что в сферической системе координат (ρ, φ, θ) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^i &= \sigma_{\theta\theta}^i(\rho), & \sigma_{\rho\rho}^i &= \sigma_{\rho\rho}^i(\rho), & \sigma_{\rho\theta}^i &= \sigma_{\rho\varphi}^i = \sigma_{\theta\varphi}^i = 0, \\ u_\rho^i &= u_\rho^i(\rho), & u_\theta^i &= u_\varphi^i = 0, & & i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1$ соответствует внутреннему, $i = 2$ — среднему, а $i = 3$ — внешнему слоям.

Предполагая, что имеет место жесткий контакт, запишем условия контакта оболочек:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^1 &= \sigma_{\rho\rho}^2, & u_\rho^1 &= u_\rho^2 & \text{при } \rho &= R_2, \\ \sigma_{\rho\rho}^2 &= \sigma_{\rho\rho}^3, & u_\rho^2 &= u_\rho^3 & \text{при } \rho &= R_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как объемные силы равны нулю, то для каждого слоя имеем уравнения равновесия (см. [4]):

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}^i}{d\rho} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho}^i - \sigma_{\theta\theta}^i - \sigma_{\varphi\varphi}^i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Деформации сферического слоя имеют вид

$$\begin{aligned} E_{\rho\rho}^i &= \frac{du_\rho^i}{d\rho}, & E_{\varphi\varphi}^i &= \frac{u_\rho^i}{\rho}, & E_{\theta\theta}^i &= \frac{u_\rho^i}{\rho}, \\ E_{\theta\varphi}^i &= E_{\rho\varphi}^i = E_{\rho\theta}^i = 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Из закона Гука имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^i &= \lambda_i \left(\frac{du_\rho^i}{d\rho} + 2\frac{u_\rho^i}{\rho} \right) + 2\mu \frac{du_\rho^i}{d\rho}, \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \sigma_{\varphi\varphi}^i = \lambda_i \left(\frac{du_\rho^i}{d\rho} + 2\frac{u_\rho^i}{\rho} \right) + 2\mu \frac{u_\rho^i}{\rho}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda_i = \frac{E_i \nu_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}$, $\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$, $i = 1, 2, 3$.

Подставляя равенства (5) в уравнения (3), получаем, согласно работе [4],

$$\frac{d^2 u_\rho^i}{d\rho^2} + 2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{u_\rho^i}{\rho} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Решение уравнений (6) при $u^i = u_\rho^i(\rho)$ имеет вид

$$u^i = a_i \rho + \frac{b_i}{\rho^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где a_i и b_i — новые постоянные. Подставляя (7) в равенства (5), получаем

$$\sigma_{\rho\rho}^i = a_i \delta_i - \frac{\beta_i b_i}{\rho^3}, \quad \sigma_{\theta\theta}^i = a_i \delta_i + \frac{\beta_i b_i}{2\rho^3}, \quad (8)$$

где

$$\delta_i = \frac{E_i}{1 - 2\nu_i^3}, \quad \beta_i = \frac{2E_i}{1 + \nu_i^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Постоянные a_i и b_i определяются из граничных условий на внутренней, пограничных и внешней поверхностях оболочки. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^1 &= -p_1 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \\ \sigma_{\rho\rho}^1 &= -p_2 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \\ \sigma_{\rho\rho}^2 &= -p_2 \quad \text{при} \quad \rho = R_2, \\ \sigma_{\rho\rho}^2 &= -p_3 \quad \text{при} \quad \rho = R_3, \\ \sigma_{\rho\rho}^3 &= -p_3 \quad \text{при} \quad \rho = R_3, \\ \sigma_{\rho\rho}^3 &= -p_4 \quad \text{при} \quad \rho = R_4. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя соотношения (9) в равенства (8), получаем

$$a_i = \frac{p_i R_i^3 - p_{i+1} R_{i+1}^3}{\delta_i (R_{i+1}^3 - R_i^3)}, \quad b_i = \frac{R_i^3 R_{i+1}^3 (p_i - p_{i+1})}{\beta_i (R_{i+1}^3 - R_i^3)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Введем следующие обозначения:

$$n_i = \delta_i (R_{i+1}^3 - R_i^3), \quad m_i = \beta_i (R_{i+1}^3 - R_i^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Из условий $u^1 = u^2$ (при $\rho = R_2$) и $u^2 = u^3$ (при $\rho = R_3$) определяются величины давления, действующие в зонах контакта слоев:

$$p_2 = \frac{A_1 C_2 p_1 + B_1 B_2 p_4}{C_1 C_2 - B_1 A_2}, \quad p_3 = \frac{A_1 A_2 p_1 + B_2 C_1 p_4}{C_2 C_1 - B_1 A_2}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= R_1^3 n_2 m_2 (m_1 + n_1), \quad B_1 = n_1 m_1 R_3^3 (m_2 + n_2), \\ A_2 &= R_2^3 n_3 m_3 (m_2 + n_2), \quad B_1 = n_2 m_2 R_4^3 (m_3 + n_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= n_2 m_2 (R_2^3 m_1 + R_1^3 n_1) + n_1 m_1 (R_2^3 m_2 + R_3^3 n_2), \\ C_2 &= n_3 m_3 (R_3^3 m_2 + R_2^3 n_2) + n_2 m_2 (R_3^3 m_3 + R_4^3 n_3). \end{aligned}$$

Вектора перемещения полностью определяются с помощью формул

$$u^i = \frac{(p_i \psi_i^3 - p_{i+1})}{\delta_i (1 - \psi_i^3)} \rho + \frac{\psi_i^3 (p_i - p_{i+1})}{\beta_i (1 - \psi_i^3)} \frac{1}{\rho^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

где $\psi_i = R_i / R_{i+1}$.

Компоненты напряжения (8) для каждого слоя ($i = 1, 2, 3$) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^i &= \frac{1}{1 - \psi_i^3} \left[\psi_i^3 \left(1 - \frac{R_{i+1}^3}{\rho^3} \right) p_i - \left(1 - \frac{\psi_i^3 R_{i+1}^3}{\rho^3} \right) p_{i+1} \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{1 - \psi_i^3} \left[\psi_i^3 \left(1 + \frac{R_{i+1}^3}{2\rho^3} \right) p_i - \left(1 + \frac{\psi_i^3 R_{i+1}^3}{2\rho^3} \right) p_{i+1} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В предлагаемой модели, за счет разности упругих коэффициентов склеральной, сосудистой и сетчатой оболочек глаза, на поверхностях контакта наблюдается разрыв продольных и поперечных напряжений. В реальности с изменением внутриглазного давления возможно проскальзывание между оболочками, которое возникает из-за неравномерности напряжений на поверхности. В связи с этим на поверхностях контакта вводятся дополнительные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^1 &= \alpha_1 \sigma_{\theta\theta}^2 & \text{при } \rho &= R_2, \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= \alpha_2 \sigma_{\theta\theta}^3 & \text{при } \rho &= R_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где α_1, α_2 — вспомогательные коэффициенты, позволяющие оценить влияние разности упругих коэффициентов оболочек E_i, ν_i ($i = 1, 2, 3$) на разность значений продольных и поперечных напряжений на поверхностях контакта.

Коэффициенты α_1 , α_2 определяются из условий (15):

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{n_2 m_2 \left(\delta_1 m_1 (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3) + \frac{\beta_1}{2} R_1^3 n_1 (p_1 - p_2) \right)}{n_1 m_1 \left(\delta_2 m_2 (p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3) + \frac{\beta_2}{2} R_3^3 n_2 (p_2 - p_3) \right)}, \\ \alpha_2 &= \frac{n_3 m_3 \left(\delta_2 m_2 (p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3) + \frac{\beta_2}{2} R_2^3 n_2 (p_2 - p_3) \right)}{n_2 m_2 \left(\delta_3 m_3 (p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3) + \frac{\beta_3}{2} R_4^3 n_3 (p_3 - p_4) \right)}.\end{aligned}\quad (16)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Согласно экспериментальным данным работы [1], будем предполагать, что модуль Юнга для склеральной оболочки на порядок больше модуля Юнга для сосудистой оболочки и на два порядка больше модуля Юнга для сетчатой оболочки глаза. О величине коэффициента Пуассона для данных оболочек известно очень мало. Поэтому, опираясь на данные работы [1], будем считать, что для материала склеры, хориоидеи и сетчатки $\nu_i = \nu = 0.45$, $i = 1, 2, 3$.

Радиус кривизны внешнего слоя принимается равным 12 мм. Толщина склеры составляет $h_1 = 0.6$ мм, хориоидеи $h_2 = 0.3$ мм, сетчатки $h_3 = 0.1$ мм.

Чтобы оценить влияние упругих параметров склеральной, сосудистой и сетчатой оболочек глаза на распределение напряжений и перемещений на поверхностях контакта, проводятся две серии расчетов.

В первом случае рассматриваются слои с различными упругими свойствами:

$$E_1 = 0.02 \text{ МПа}, \quad E_2 = 0.2 \text{ МПа}, \quad E_3 = 17.4 \text{ МПа}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

где E_1 — модуль Юнга сетчатки, E_2 — хориоидеи, а E_3 — модуль Юнга склеры.

Во втором случае рассматриваются слои с одинаковыми упругими свойствами. Модуль Юнга для всех слоев принимается равным

их осредненному значению E :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad E = 10.5 \text{ МПа}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Осредненный модуль упругости определяется по формуле

$$E = \frac{1 - \nu^2}{h} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \nu^2} \right), \quad h = \sum_{k=1}^3 h_k. \quad (19)$$

На рис. 1–3 приведены зависимости перемещений и напряжений для внешней оболочки глаза, состоящей из внутренней сетчатой $\rho = [11.0; 11.1]$, средней сосудистой $\rho = [11.1; 11.4]$ и внешней склеральной $\rho = [11.4; 12.0]$ оболочек с различными упругими свойствами (17) для внутриглазного давления 15, 25, 35 мм рт. ст. На рис. 2 приведены зависимости перемещений для внешней однородной однослойной оболочки глаза $\rho = [11.0; 12.0]$ с осредненным значением модуля Юнга (18) для тех же значений внутриглазного давления.

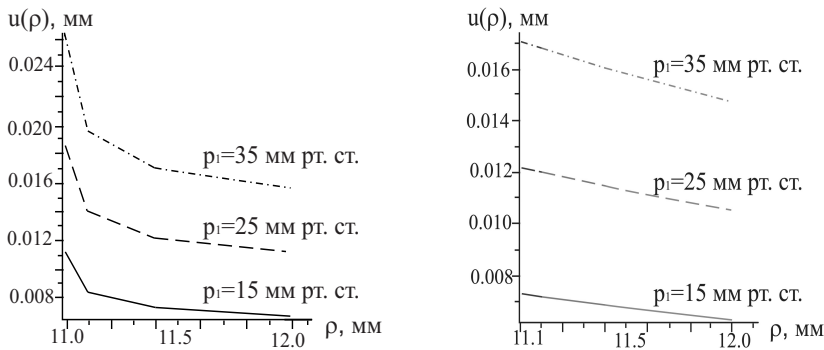


Рис. 1. Зависимости для перемещений: слева — для внешней оболочки глаза, состоящей из трех оболочек с различными упругими свойствами, справа — для однослойной внешней оболочки глаза с осредненным значением модуля Юнга..

Расчеты для оболочки, состоящей из трех слоев с различными упругими свойствам, показывают существенное изменение напряженно-деформированного состояния глаза, по сравнению с

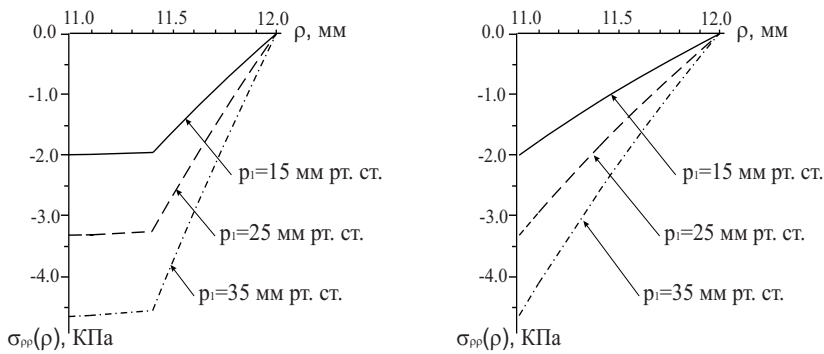


Рис. 2. Зависимости для нормальных напряжений: слева — для внешней оболочки глаза, состоящей из трех оболочек с различными упругими свойствами, справа — для однослойной внешней оболочки глаза с осредненным значением модуля Юнга.

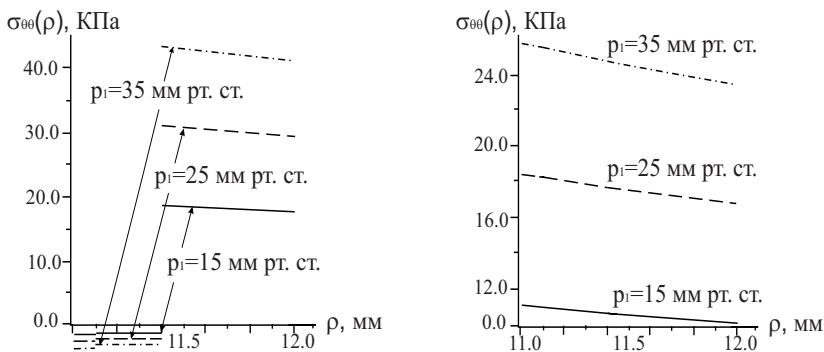


Рис. 3. Зависимости для тангенциальных напряжений: слева — для внешней оболочки глаза, состоящей из трех оболочек с различными упругими свойствами, справа — для однослойной внешней оболочки глаза с осредненным значением модуля Юнга.

расчетами, проведенными для однородной оболочки с осредненными значениями упругих коэффициентов. Для многослойной оболочки с различными упругими свойствами на графиках для перемещений $u^i(\rho)$, $i = 1, 2, 3$, и нормальных напряжений $\sigma_{\rho\rho}^i(\rho)$ появляются изломы в точках $\rho = [R_2, R_3]$, соответствующих грани-

цам контакта оболочек. На графиках для окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^i(\rho)$ на поверхностях сопряжения возникают разрывы. При увеличении внутриглазного давления наблюдается увеличение изломов на графиках для перемещений и нормальных напряжений, а также разрывов на графике для окружных напряжений. Последнее позволяет говорить о возможности возникновения разрывов, и, как следствие, отслоек внутренних, более мягких оболочек глаза — хориоидеи и сетчатки, при повышенном внутриглазном давлении.

Как отмечалось ранее, сосудистая оболочка относится к “активным” элементам глаза и способна изменять свои биомеханические свойства, за счет кровенаполнения, в течение суток (см. [1]). На рис. 4–5 приведены зависимости перемещений и напряжений при увеличении модуля Юнга сосудистой оболочки в три раза (от 0.2 МПа до 0.6 МПа) под действием внутриглазного давления 25 мм рт. ст. при следующих значениях упругих коэффициентов:

$$E_1 = 0.02 \text{ МПа}, \quad E_2 \in [0.2; 0.6] \text{ МПа}, \quad E_3 = 17.4 \text{ МПа}, \quad i = 1, 2, 3.$$

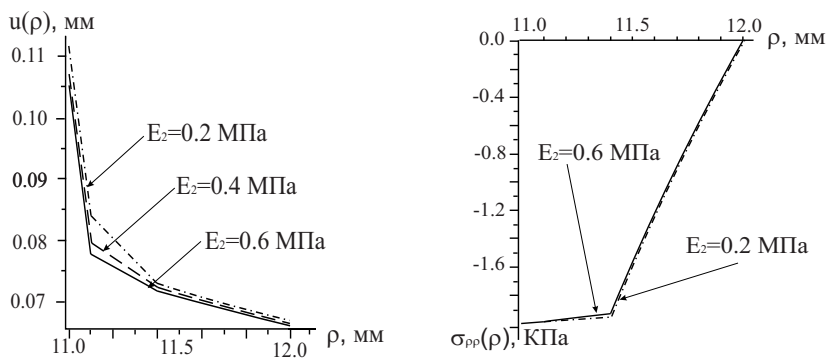


Рис. 4. Зависимости для перемещений (слева) и нормальных напряжений (справа) при увеличении модуля Юнга хориоидеи E_2 в 3 раза.

Толщина слоев после деформации определяется как разность $\Delta_i = (R_{i+1} + u^{i+1}(R_{i+1})) - (R_i + u^i(R_i))$, $i = 1, 2, 3$. В табл. 2 представлены результаты вычислений изменения толщины сетчатой, сосудистой и склеральной оболочек глаза при внутриглазном давлении 25 мм рт. ст.

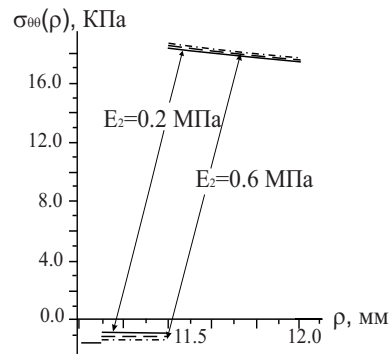


Рис. 5. Зависимости для тангенциальных напряжений при увеличении модуля Юнга хориоидеи E_2 в 3 раза.

Таблица 2. Изменения толщины сетчатой, сосудистой и склеральной оболочек глаза

Модуль Юнга хориоидеи E_2 , МПа	Сетчатка		Хориоидея		Склера	
	Толщина h_i , мм	Изменение толщины, %	Толщина h_i , мм	Изменение толщины, %	Толщина h_i , мм	Изменение толщины, %
0,2	0,094576	5,423	0,2980	0,637	0,599406	0,0989
0,4	0,094589	5,410	0,2988	0,370	0,599410	0,0982
0,6	0,094594	5,405	0,2992	0,280	0,599414	0,0977

Изменение упругих коэффициентов средней сосудистой оболочки глаза в наибольшей степени сказывается на перемещениях $u^i(\rho)$, $i = 1, 2, 3$. При более низких значениях модуля Юнга для сосудистой оболочки наблюдаются большие перемещения и более сильные истончения хориоидеи и сетчатки. Сильные истончения тканей также могут приводить к возникновению разрывов и отслоек.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для мягких оболочек — сетчатой и сосудистой характерны большие нормальные смещения и большие относительные изменения толщины, чем для жесткой склеральной оболочки при том же значении внутреннего давления.

При более низких значениях модулей упругости сосудистой оболочки глаза E_2 при одном значении внутриглазного давления наблюдаются большие нормальные смещения и более сильные изломы перемещений и напряжений.

Введение дополнительных коэффициентов α_1 и α_2 позволяет учесть возможность проскальзывания между оболочками, возникающего из-за неравномерного распределения напряжений на поверхности контакта при изменении внутриглазного давления.

Проведенные расчеты показали, что, чем больше разность упругих коэффициентов оболочек, тем сильнее возникают изломы перемещений и напряжений на поверхности контакта.

Полученные результаты позволяют оценить влияние упругих характеристик сетчатой, сосудистой и склеральной оболочек глаза на возможное развитие отслоек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иомдина Е. Н.* Механические свойства тканей глаза человека // Современные проблемы биомеханики. Вып.11. М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 183–200.
2. *Полоз М. В., Иомдина Е. Н.* Активные деформации человеческого глаза // Биомеханика-2010, X Всероссийская конференция, тезисы докладов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. С. 137–139.
3. *Саулгозис Ю. Ж.* Особенности деформирования склеры // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 505–514.
4. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М: Гостехиздат, 1955. 492 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ КАНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. В. ЛИХАЧЕВА (ЗАХАРЕНКОВА)

В рамках двумерной теории установившейся фильтрации рассматривается математическая модель течения воды из канала прямоугольного поперечного сечения при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Для ее изучения формулируется и с применением метода Полубариновой-Кочкиной решается смешанная краевая задача теории аналитических функций. На базе этой модели разработан алгоритм расчета размеров зоны насыщения в ситуациях, когда при фильтрации учитывается испарение со свободной поверхности, а также уровень воды в канале. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов проводится гидродинамический анализ структуры и характерных особенностей моделируемого процесса, а также влияния всех физических параметров на размеры зоны насыщения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследовано влияние капиллярности грунта при фильтрации из канала, уровень воды в котором предполагался бесконечно малым. Ниже изучается случай фильтрации из канала прямоугольного поперечного сечения при наличии воды в нем через слой грунта ограниченной мощности, подстилаемый горизонтальным непроницаемым основанием, с учетом испарения со свободной поверхности грунтовых вод. По сравнению с подобными задачами без учета воды в канале, здесь фильтрационная схема значительно усложняется из-за появления дополнительного граничного участка — эквипотенциали, отвечающей вертикальному откосу канала. Это, в свою очередь, приводит к появлению дополнительной угло-

Доклад на семинаре 16 ноября 2010 г.
© Н. В. Лихачева (Захаренкова), 2012

вой особой точки, увеличивающей общее число неизвестных параметров конформного отображения, которые возникают в процессе решения соответствующей краевой задачи с неизвестной свободной границей. Для ее решения используется метод Полубариновой-Кочкиной [2], [3], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [4], а также разработанных способов [5]–[7] конформного отображения областей специального вида, характерных для задач подземной гидромеханики [8]. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов изучаются характерные особенности моделируемого процесса при учете таких факторов, как уровень воды в канале и испарение со свободной поверхности грунтовых вод, и оценивается их совместное влияние на размеры зоны насыщения. Построенный алгоритм расчета позволяет в каждом конкретном случае судить о форме и размерах зоны растекания грунтовой воды в зависимости от ширины канала и уровня воды, а также интенсивности испарения и мощности пласта. Наконец, дается сопоставление результатов расчетов с подобной схемой, рассмотренной в [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 изображена картина плоского безнапорного установившегося течения грунтовых вод из канала прямоугольного поперечного сечения ширины $2l$ с уровнем воды в нем H ($0 \leq H < T$) в слой грунта мощности T , который подстилается горизонтальным водоупором. Расходным фактором, компенсирующим фильтрацию из канала, является равномерное испарение со свободной поверхности интенсивности ε ($0 < \varepsilon < 1$), отнесенной к коэффициенту фильтрации $k = \text{const}$.

Введем комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$, где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к kT и T . В силу симметрии ограничимся рассмотрением правой половины области течения $AB_1B_2A_1B_3B_4$.

Примем $\varphi = 0$ вдоль дна канала AB_4 и откоса B_3B_4 и $\psi = 0$

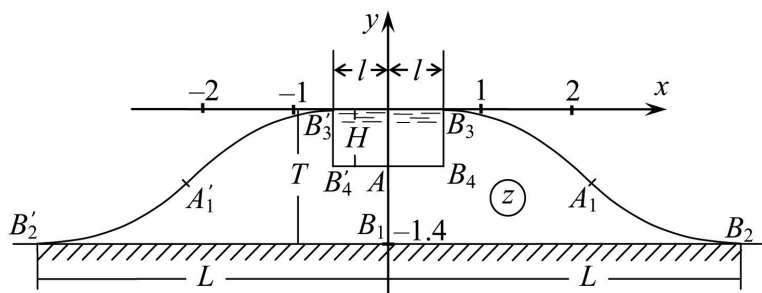


Рис. 1. Картина течения из канала, рассчитанная при $H = 0.6$, $\varepsilon = 0.35$, $l = 0.6$ и $T = 1.4$.

вдоль линии симметрии AB_1 . Тогда при указанном на рис. 1 выборе системы координат и при совмещении плоскости сравнения потенциалов с плоскостью $y = 0$ на границе области движения выполняются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} AB_4 : y = -H, \varphi = 0; & & B_3B_4 : x = l, \varphi = 0; \\ AB_1 : x = 0, \psi = 0; & & B_1B_2 : y = -T, \psi = 0; \\ B_2A_1B_3 : \varphi = -y, \psi = Q - \varepsilon(x - l), \end{aligned} \quad (1)$$

где H — глубина воды в канале. Полагая во втором условии (1) для участка $B_2A_1B_3$ $x = L$, получим

$$Q = \varepsilon(L - l), \quad (2)$$

где L — ширина растекания фильтрационных вод по горизонтальному непроницаемому основанию. Последнее соотношение выражает равенство расхода из канала величине испарения со свободной поверхности в условиях установившейся фильтрации.

Будем предполагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси и происходит в однородном изотропном грунте, который считается несжимаемым, как и фильтрующаяся через него жидкость. Мощность пласта T , ширина канала l и глубина воды H считаются заданными наряду с величиной испарения со свободной поверхности ε . Задача состоит в определении ширины L зоны насыщения и расхода Q .

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Для решения краевой задачи (1) используем метод П.Я. Полу-бариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [2]–[4]. Вводится вспомогательная переменная ζ и функции: $z(\zeta)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость ζ на область z (соответствие точек указано на рис. 2, а, комплексная скорость $w = d\omega/dz$ (рис. 2, б) и производные

$$F = \frac{d\omega}{d\zeta}, \quad Z = \frac{dz}{d\zeta}. \quad (3)$$

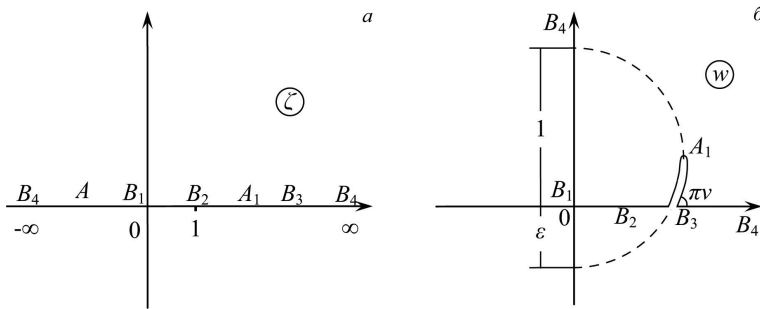


Рис. 2. Область вспомогательной параметрической переменной ζ (а) и комплексной скорости w (б).

Определяя показатели функций Z и F около особых точек A, B_1, B_2, A_1, B_3 и B_4 , найдем, что в данном случае они являются линей-

ными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [4]:

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \begin{array}{cccccc} -a^2 & 0 & 1 & a_1 & c & \infty \\ -0.5 & -0.5 & -0.5\nu & 0 & -0.5(1+\nu) & 2.5\varsigma \\ -0.5 & 0 & -1+0.5\nu & 2 & -0.5(1-\nu) & 2 \end{array} \right\} = \\
 & = \frac{1}{(1-\varsigma)\sqrt{(\varsigma+a^2)\varsigma\left[\frac{(c-\varsigma)}{(1-\varsigma)}\right]^\nu}} P \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & a_1 & c & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varsigma}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\nu & 2 & \nu & 0 \end{array} \right\} = \\
 & = \frac{Y}{\varsigma(1-\varsigma)\sqrt{(\varsigma+a^2)\varsigma[(c-\varsigma)/(1-\varsigma)]^\nu}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

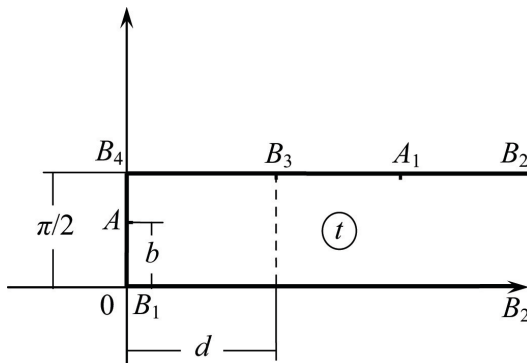
где $\nu = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon}/\pi$

Из соотношения (4) видно, что особая точка $\varsigma = -a^2$ является обыкновенной точкой функции Y . Принимая во внимание, что в правой части соотношения (4) стоит символ Римана, совпадающий с таковым для случая [1], а область комплексной скорости w (рис. 2, б) сохраняет свой прежний вид [1], получаем решение задачи в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\varepsilon} A \operatorname{ch} t \frac{(C \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^\nu e^{(1-\nu)t} - (C \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)^\nu e^{(\nu-1)t}}{\Delta(t)}, \\
 \frac{dz}{dt} &= A \operatorname{ch} t \frac{(C \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^\nu e^{(1-\nu)t} + (C \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)^\nu e^{(\nu-1)t}}{\Delta(t)}, \\
 \Delta(t) &= \sqrt{(\operatorname{sh}^2 t + B^2)(\operatorname{sh}^2 t + D^2)^{1+\nu}}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь A ($A > 0$) — масштабная постоянная моделирования, $C = D/(D^2 - 1)^{1/2}$, $B = \sin b$, $D = \operatorname{ch} d$, ордината b и абсцисса d — также неизвестные аффиксы точек A и B_3 в плоскости t (рис. 3). Можно проверить, что функции (5) удовлетворяют граничным условиям (1), сформулированным в терминах функций (3), и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись представлений (5) для разных участков границы области t с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области (рис. 3) приводит к замыканию области движения z и тем самым служит контролем вычислений.

Рис. 3. Область вспомогательной параметрической переменной t .

В результате получаем выражение для основных геометрических и фильтрационных характеристик:

$$\begin{aligned} A \int_b^{0.5\pi} X_{AB_4} dt = l, \quad A \sin \frac{\pi\nu}{2} \int_d^\infty Y_{B_2A_1B_4} dt = T, \\ A \int_0^d Y_{B_3B_4} dt = H, \end{aligned} \quad (6)$$

которые позволяют определить неизвестные параметры конформного отображения B и D , а также постоянную моделирования A . Численным путем проверяется монотонность функций, входящих в подынтегральные выражения левых частей уравнений системы (6) и, таким образом, устанавливается ее однозначная разрешимость. После нахождения неизвестных постоянных определяется ширина растекания воды по водоупору по формуле

$$L = A \int_0^\infty X_{B_1B_2} dt \quad (7)$$

и, наконец, по формуле (2) рассчитывается искомый фильтрационный расход Q .

В формулах (6) и (7) подынтегральные выражения — выражения правых частей (5) на соответствующих участках контура плоскости t .

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 изображена картина течения из канала прямоугольного поперечного сечения с водой, рассчитанная при $H = 0.6$, $\varepsilon = 0.35$, $l = 0.6$ и $T = 1.4$ (базовые значения). Результаты расчетов влияния определяющих физических характеристик H , ε , l и T на ширину растекания грунтовой воды L и расход Q сведены в табл. 1 и 2. В таблицах варьируется в 6 раз в допустимом диапазоне один из указанных параметров, а остальные фиксируются базовыми.

Таблица 1. Результаты расчетов L и Q при варьировании H и ε .

$H \cdot 10^2$	L	Q	$\varepsilon \cdot 10^2$	L	Q
17	2.4000	0.6299	10	4.8536	0.4254
38	2.6430	0.7250	22	3.4110	0.6184
60	2.7926	0.7674	35	2.7926	0.7674
81	2.8806	0.7982	47	2.4686	0.8782
102	2.9329	0.8165	60	2.2343	0.9806

Таблица 2. Результаты расчетов L и Q при варьировании l и T .

$l \cdot 10^2$	L	Q	$T \cdot 10^3$	L	Q
17	2.2731	0.7361	617	1.6532	0.3686
38	2.5471	0.7585	1388	2.7926	0.7674
60	2.7926	0.7674	2159	3.7013	1.0854
81	3.0126	0.7709	2930	4.4022	1.3308
102	3.2269	0.7724	3702	4.9507	1.5228

На рис. 4 представлены зависимости ширины растекания L (линии 1) и расхода Q (линии 2) от параметров H , ε , l и T .

Анализ данных таблиц и графиков сводится к следующему.

Уменьшение интенсивности испарения и увеличение мощности слоя, ширины канала, а также глубины воды в нем приводят к расширению зоны насыщения. Как и ранее [1] испарение оказывает значительное влияние на ширину растекания фильтрационной воды: данные табл. 1 показывают, что с убыванием параметра ε ширина L увеличивается в 2.2 раза. Однако по сравнению со схемой [1] наибольшие изменения ширина растекания воды претерпевает при варьировании мощности пласта: из табл. 2 видно, что с увеличением параметра T ширина L возрастает на 199.5%. Как и

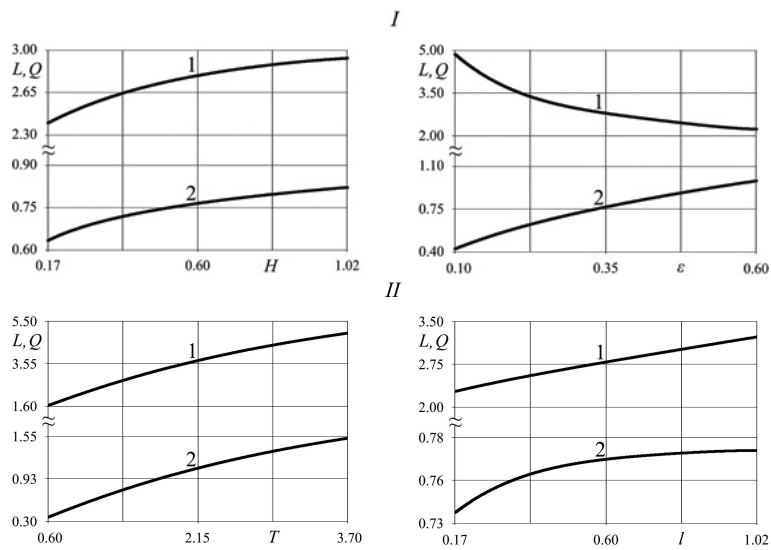


Рис. 4. Зависимости величин L, Q от H, ε (I) и от T, l (II).

в [1], зависимость L от ширины канала l оказывается близкой к линейной, а зависимости L и Q от уровня воды в канале качественно подобны, если иметь в виду равенство (2).

Из табл. 1 вытекает, что варьирование параметра H приводит к весьма незначительным изменениям ширины растекания воды L , а также расхода Q (в пределах 1.2–1.3 раза), так что влияние уровня воды в канале практически не сказывается на размерах зоны насыщения и фильтрационном расходе из канала.

В то же время наблюдается совершенно противоположный характер изменений ширины растекания L при изменении параметров H и ε . Данные табл. 1 отражают следующую закономерность: увеличение глубины воды в канале и уменьшение испарения — оба эти фактора, способствуя усилению подпора со стороны нижележащего водонепроницаемого основания приводят к расширению зоны насыщения.

Что касается расхода Q , то с увеличением всех характеристик H , ε , l и T расход увеличивается, при этом наибольшее влияние на величину Q опять же оказывает мощность слоя: из табл. 2 видно, что изменению параметра T сопутствует увеличение расхода на 313%, т. е. практически также, как и в схеме [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Береславский Э. Н., Захаренкова Н. В. Математическое моделирование зоны насыщения при фильтрации из канала // Вестник Херсонского национального университета 2010. № 3 (39). С. 72-76.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Кочина П. Я. (Полубаринова-Кочина П. Я.) Гидродинамика и теория фильтрации. Избранные труды. М.: Наука, 1991. 352 с.
4. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
5. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 33. № 3. С. 296-301.
6. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Док. РАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 439-443.
7. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 459-466.
8. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 9-17.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОСЛОЙНЫХ НАНОТРУБОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. М. ЕРМАКОВ

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние многослойных анизотропных цилиндрических оболочек, находящихся под действием локальной области давления. Такая задача может моделировать прогиб асбестовых нанотрубок, находящихся под воздействием исследовательского зонда. В более ранних работах показано, что применение классических теорий балок, для моделирования эксперимента, дает результат, плохо согласующийся с экспериментальными данными. Учет же дополнительных факторов, таких как изменение модуля сдвига в поперечном направлении (по теории Тимошенко-Рейсснера), слоистость структуры асбеста и цилиндрической анизотропии (теория Родионовой-Титаева-Черныха), приводит к более точным результатам. В данной работе для решения задачи автор применяет еще одну теорию оболочек — теорию Паляя-Спиро, разработанную для оболочек средней толщины. Также проводится сравнение с результатами, полученными для трехмерной теории при использовании пакета ANSYS 11.

1. ВВЕДЕНИЕ

Последнее время учеными активно обсуждается возможность применения методов классической механики к нанообъектам. В работах [1, 2] отмечается, что механические характеристики, соответствующие наноразмерным структурным элементам, таким как балки и пластинки, могут отличаться от механических характеристик, соответствующих структурам из того же материала, имею-

Доклад на семинаре 30 ноября 2010 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(гранты № 10-01-00244 и 09-01-00623)
© А. М. Ермаков, 2012

щим “обычные” геометрические размеры. Кроме размерных эффектов возможно проявление анизотропии нанообъектов. В работах [3–5] обсуждаются результаты экспериментов, в которых исследовались механические свойства нанотрубок из природного хризолитового асбеста, внутренняя полость трубки была заполнена водой, ртутью или теллуром под давлением.

Следующий эксперимент проводился в Физико-техническом институте имени А. Ф. Иоффе Российской академии наук под руководством А. В. Анкундинова. С помощью сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) измерялась жесткость нанотрубки. Под жесткостью понималось отношение приложенной силы к величине прогиба мостика, сформированного нанотрубкой, перекрывающей отверстие в пористой подложке (рис.1 на вклейке). Были исследованы механические свойства отдельных нанообъектов из природного хризолитового асбеста, формирующегося в виде нанотрубок с внешним диаметром около 32 нм и с внутренним около — 5 нм. Эксперименты показали, что трубка, наполненная водой, существенно мягче, чем “сухая” трубка — трубка без наполнителя. Трубки, наполненные теллуром или ртутью, несколько жестче, чем “сухие” трубки. В работе [5] проведено сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования в рамках континуальной теории упругости, рассмотрены простейшие классические модели изотропных балок и неклассические трансверсально-изотропные модели.

В частности, для аналитической оценки прогибов нанотрубок как балок использовалась теория Тимошенко–Рейсснера (ТР), так как слоистая структура асбестовых нанотрубок (рис.2 на вклейке) позволяет рассматривать ее как трансверсально-изотропную. Каждый слой может не менять своей структуры, но модуль сдвига в поперечном сечении G' может существенно меняться в зависимости от наполнителя. То, что трубка, наполненная водой, оказывается мягче, чем “сухая” трубка, может быть объяснено уменьшением модуля сдвига в поперечном сечении.

В изотропном случае теория ТР, учитывающая сдвиг, существенно уточняет классическую теорию, но для тел из трансверсально-изотропного материала “при умеренно малой поперечной жесткости на сдвиг” теория ТР существенно уточняет теорию Бернулли–Кирхгоффа–Лява и дает следующее асимптотиче-

ское приближение трехмерной теории (см. [6]). Тела “с умеренно малой поперечной жесткостью на сдвиг” — это тонкие тела, для которых параметр $g = G'/E'$ удовлетворяет соотношению $\mu^2 \ll g \ll 1$. Здесь E' — модуль Юнга в тангенциальном направлении, G' — модуль упругости при поперечном сдвиге, μ — параметр тонкостенности конструкции, причем для цилиндрической оболочки $\mu \sim h/R$, где h — толщина, а R — радиус оболочки.

В этой работе задача о деформации многослойной трубки, находящейся под действием локально приложенной нагрузки, решается с использованием теории анизотропных оболочек Родионовой–Титаева–Черныха (РТЧ) [7], которая кроме поперечных сдвигов позволяет учесть слоистую структуру асбеста и цилиндрическую анизотропию. Также для решения этой задачи используется теория анизотропных оболочек средней толщины, изложенная в работе О.М. Паляя и В.Е. Спира (ПС) [8]. В заключение проводится сравнение результатов, полученных по теории ТР, РТЧ, ПС, с результатами, получающимися при тех же параметрах МКЭ в пакете ANSYS 11 [9]. Подобное исследование для цилиндрических и сферических слоев проводилось в работе [10].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В первом приближении для аналитической оценки прогибов нанотрубок как балок использовалась теория Тимошенко–Рейсснера [6], так как длина асбестовых нанотрубок во много раз превосходит поперечные размеры сечения. Прогиб шарнирно закрепленной по краям балки длиной L , находящейся под действием точечной силы F , приложенной в точке L_v , имеет следующий вид:

$$w(L_v) = \frac{FL_v^2(L - L_v)^2}{3LEJ} \left(1 + \frac{1}{G'S} \frac{3nEJ}{L_v(L - L_v)} \right). \quad (1)$$

Здесь $J = \frac{\pi R^4}{4}$ — момент инерции цилиндрического сечения, E — модуль Юнга, $n = 5/6$ — коэффициент в формуле Журавского, $S = \pi R^2$ — площадь поперечного сечения.

Более точную модель эксперимента можно получить с использованием неклассических теорий анизотропных оболочек, которые

кроме поперечных сдвигов позволяют учесть слоистую структуру и цилиндрическую анизотропию асбестовых нанотрубок. В дальнейшем трубка рассматривается как многослойная замкнутая и шарнирно опертая по краям анизотропная цилиндрическая оболочка (рис. 1), находящаяся под действием локальной области давления (рис. 2).

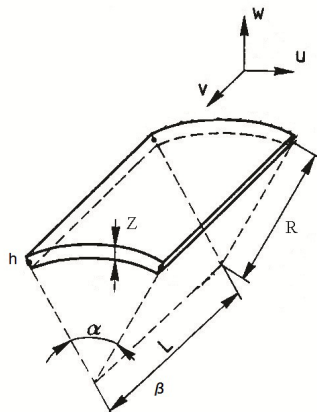


Рис. 1. Элемент круговой цилиндрической оболочки.

Пусть α и β — цилиндрические координаты на поверхности оболочки: α — полярный угол, β — координата вдоль образующей трубки, $h^{(i)}$ — толщины, $R^{(i)}$ — радиусы срединных поверхностей слоев оболочки, а L — длина трубки.

Для определения коэффициентов используем обозначение $A_j^{(i)}$. Нижний индекс j указывает, какой криволинейной координате соответствует рассматриваемая величина A , а верхний i — к какой оболочке она принадлежит. Так при $i = 1$ она относится к первой, внутренней оболочке, при $i = N$ — к последней, внешней. $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, E_3^{(i)}$ — модули упругости в тангенциальных и нормальном координатных направлениях, $\nu_{jk}^{(i)}$ — коэффициенты Пуассона. Определяется напряженно-деформированное состояние многослойной трубки, находящейся под действием локально приложенной на-

грузки, с использованием новой уточненной итерационной теории анизотропных оболочек Родионовой–Титаева–Черныха [7] и теории, предложенной в монографии Паляя–Спиро [8].

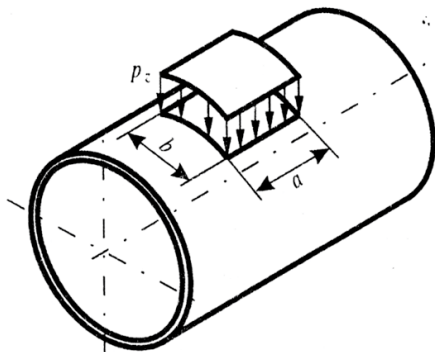


Рис. 2. Область нагружения на поверхности трубки.

Теория анизотропных оболочек Родионовой–Титаева–Черныха — это линейная теория однородных анизотропных оболочек постоянной толщины с учетом малой податливости поперечным сдвигам и деформированию в направлении нормали к срединной поверхности, а также поперечных нормальных напряжений и нелинейного распределения компонент вектора перемещения по толщине оболочки [7].

Функции, описывающие перемещение слоя оболочки $u_1(\alpha, \beta, z)$, $u_2(\alpha, \beta, z)$, $u_3(\alpha, \beta, z)$ по теории РТЧ предлагается искать в виде рядов по первым четырем полиномам Лежандра P_0, P_1, P_2, P_3 от нормальной координаты $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$:

$$\begin{aligned} u_j &= (u, v) \cdot P_0(z) + \gamma_j \cdot P_1(z) + \theta_j \cdot P_2(z) + \varphi_j \cdot P_3(z); \\ u_3 &= w \cdot P_0(z) + \gamma_3 \cdot P_1(z) + \theta_3 \cdot P_2(z); \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = \frac{2z}{h}, P_2(z) = \frac{6z^2}{h^2} - \frac{1}{2}, P_3(z) = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}, \quad (3)$$

где u, v, w — компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки, а γ_3 и θ_3 характеризуют изменение длины

нормали к этой поверхности, γ_1 и γ_2 — углы поворота нормали в плоскостях (α, z) и (β, z) соответственно. Величины θ_1 и φ_1 , описывают нормальную кривизну в плоскости (α, z) волокна, а θ_2 и φ_2 , описывают нормальную кривизну в плоскости (β, z) , которые до деформации были перпендикулярными к срединной поверхности оболочки.

Теория оболочек Паляя–Спиро [8] — это теория оболочек средней толщины, в которой приняты следующие гипотезы:

1) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;

2) косинус угла наклона оболочки таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига.

Математическая формулировка принятых гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \phi \cdot z, & u_2 &= v + \psi \cdot z, \\ u_3 &= w + F(\alpha, \beta, z), \\ \phi &= \gamma_1 + \phi_0, & \psi &= \gamma_2 + \psi_0, \\ \phi_0 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u, & \psi_0 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_2 v, \end{aligned} \quad (4)$$

где ϕ и ψ — углы поворота нормали в плоскостях (α, z) и (β, z) ; ϕ_0 , ψ_0 , γ_1 и γ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности и углы сдвига в тех же плоскостях. Функция $F(\alpha, \beta, z)$ характеризует изменение длины нормали к срединной поверхности.

Коэффициенты Ламэ и кривизны, определяющие геометрию цилиндрической оболочки, имеют вид

$$A_1^{(i)} = R^{(i)}, \quad A_2^{(i)} = 1, \quad k_1^{(i)} = \frac{1}{R^{(i)}}, \quad k_2^{(i)} = 0. \quad (5)$$

Приведем основные величины к безразмерному виду по следующим

формулам:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{u}^{(i)}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\gamma}_j^{(i)}, \tilde{\theta}_j^{(i)}, \tilde{\varphi}_k^{(i)}, \tilde{\phi}_{,0}^{(i)}, \tilde{\psi}_{,0}^{(i)} \right\} = \\
& = \frac{1}{h} \left\{ u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \gamma_j^{(i)}, \theta_j^{(i)}, \varphi_k^{(i)}, \phi_{,0}^{(i)}, \psi_{,0}^{(i)} \right\}, \\
& \left\{ \tilde{E}_{(k+1)} \right\} = \frac{1}{E_1} \left\{ E_{(k+1)} \right\}, \quad \left\{ \tilde{G}_{13}, \tilde{G}_{12}, \tilde{G}_{23} \right\} = \frac{1}{E_1} \left\{ G_{13}, G_{12}, G_{23} \right\}, \\
& \left\{ \tilde{P}_j^{-(i)}, \tilde{P}_j^{+(i)} \right\} = \frac{1}{E_1} \left\{ P_j^{-(i)}, P_j^{+(i)} \right\}, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (k = 1, 2), \\
& \left\{ \tilde{T}_{(j-1)}^{(i)}, \tilde{Q}_k^{(i)} \right\} = \frac{1}{R^{(i)} E_1} \left\{ T_{(j-1)}^{(i)}, Q_k^{(i)} \right\}, \\
& \left\{ \tilde{M}_{(j-1)}^{(i)} \right\} = \frac{\left\{ M_{(j-1)}^{(i)} \right\}}{R^{(i)} E_1 h}, \quad \tilde{R}^{(i)} = \frac{A_1^{(i)}}{A_2^{(i)}}, \quad \tilde{h}^{(i)} = \frac{h}{R^{(i)}},
\end{aligned} \tag{6}$$

где P_j^+ и P_j^- — давления на внутренней и внешней поверхностях оболочки.

Для удобства введем следующие параметры:

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{\tilde{E}_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_{22} = \frac{\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
E_z &= \frac{E_3}{1 - \nu_{13}\mu_1 - \nu_{23}\mu_2}, \quad \mu_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \mu_2 = \frac{\nu_{32} + \nu_{21}\nu_{31}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
K_{11} &= -E_{11}\tilde{h}^{(i)}, \quad K_{12} = E_{22}\tilde{h}^{(i)}, \quad K_{21} = \frac{3}{2}E_{11}\tilde{h}^{(i)}\mu_1, \quad K_{22} = \frac{3}{2}E_{22}\tilde{h}^{(i)}\mu_2, \\
K_{13} &= E_{11}\frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}(\mu_2 + 2\nu_{12}\mu_1), \quad K_{23} = E_{11}\frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}(\nu_{12}\mu_1 + 2\mu_2), \\
\tilde{m}_j^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\tilde{P}_j^{+(i)}\left(1 + \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\right) + \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\tilde{P}_j^{-(i)}\left(1 - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\right), \\
\tilde{q}_j^{(i)} &= \tilde{P}_j^{+(i)}\left(1 + \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\right) - \tilde{P}_j^{-(i)}\left(1 - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2}\right), \quad (j = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{7}$$

3. СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Деформации оболочки для рассматриваемых теорий выражаются через компоненты перемещения по следующим формулам:

Таблица 1. Компоненты деформации

Теория Родиновой-Титаева-Черныха	Теория Палия-Спиро
$\varepsilon_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{w}^{(i)} \right),$	$\varepsilon_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{w}^{(i)} \right),$
$\varepsilon_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{v}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$	$\varepsilon_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{v}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$
$\tilde{\eta}_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{\gamma}_3^{(i)} \right), \tilde{\eta}_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{\gamma}_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$	$\tilde{\eta}_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} \right), \tilde{\eta}_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{\psi}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$
$\varepsilon_{13}^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \frac{\partial \tilde{w}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} - \tilde{h}^{(i)} \tilde{u}^{(i)} + 2\tilde{\gamma}_1^{(i)},$	$\varepsilon_{13}^{(i)} = 0,$
$\varepsilon_{23}^{(i)} = \frac{\partial \tilde{w}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} + 2\tilde{\gamma}_2^{(i)},$	$\varepsilon_{23}^{(i)} = 0,$
$\tilde{\omega}_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \frac{\partial \tilde{v}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, \tilde{\omega}_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{u}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$	$\tilde{\omega}_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \frac{\partial \tilde{v}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, \tilde{\omega}_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{u}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$
$\tilde{\tau}_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \frac{\partial \tilde{\gamma}_2^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, \tilde{\tau}_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{\gamma}_1^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$	$\tilde{\tau}_1^{(i)} = \tilde{h}^{(i)} \frac{\partial \tilde{\psi}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, \tilde{\tau}_2^{(i)} = \frac{\partial \tilde{\phi}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}},$
$\tilde{\tau}^{(i)} = \tilde{\tau}_1^{(i)} + \tilde{\tau}_2^{(i)}, \tilde{\omega}^{(i)} = \tilde{\omega}_1^{(i)} + \tilde{\omega}_2^{(i)}$	

Подчеркиванием выделены отличающиеся для рассматриваемых теорий компоненты деформаций.

Приведем преобразованные для случая цилиндрической оболочки уравнения связи моментов и усилий с компонентами деформаций для теории РТЧ. Подставляя приведенные в табл. 1 зависимости в соотношения (8), можно получить уравнение их связи с компонентами перемещения:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_j^{(i)} &= E_{1j} \tilde{h}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + E_{j2} \tilde{h}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + \mu_j^{(i)} \tilde{T}_0^{(i)}, \\
 \tilde{M}_j^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6} \left(E_{1j} \tilde{\eta}_1^{(i)} + E_{j2} \tilde{\eta}_2^{(i)} \right) + \mu_j^{(i)} \tilde{M}_0^{(i)}, \\
 \tilde{T}_{12}^{(i)} &= \tilde{T}_{21}^{(i)} = \tilde{G}_{12}^{(i)} \tilde{h}^{(i)} \tilde{\tau}^{(i)}, \tilde{M}_{12}^{(i)} = \tilde{M}_{21}^{(i)} = \frac{1}{6} \tilde{G}_{12}^{(i)} \tilde{h}^{(i)} \tilde{\omega}^{(i)}, \\
 \tilde{Q}_j^{(i)} &= \frac{5\tilde{h}^{(i)} \tilde{G}_{j3}^{(i)}}{6} \varepsilon_j^{(i)} + \frac{\tilde{m}_j^{(i)}}{6} - \left(\tilde{h}^{(i)} \right)^2 \frac{\tilde{G}_{j3}^{(i)}}{6} \frac{\partial \theta_3^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, \\
 \tilde{T}_0^{(i)} &= \tilde{m}_3^{(i)} + \frac{(\tilde{h}^{(i)})^2}{12} \left(\frac{\partial \tilde{q}_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{q}_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} \right) - \tilde{h}^{(i)} \tilde{M}_1^{(i)}, \\
 M_0^{(i)} &= \frac{(\tilde{h}^{(i)})^2}{10} \tilde{q}_3^{(i)} + \frac{\tilde{h}^{(i)}}{60} \left(\frac{\partial \tilde{m}_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{m}_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} \right) - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{60} \tilde{T}_1^{(i)}, \\
 &(j = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Подставим следующие соотношения (9) для шести компонентов смещения в формулы (8), сведя их таким образом в зависимость от пяти основных компонентов смещения u, v, w, γ_1 и γ_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1^{(i)} &= \frac{\tilde{q}_1^{(i)}}{12G_{13}} - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6} \frac{\partial \tilde{\gamma}_3^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, & \tilde{\theta}_2^{(i)} &= \frac{\tilde{q}_2^{(i)}}{12G_{23}} - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6\tilde{R}^{(i)}} \frac{\partial \tilde{\gamma}_3^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}}, \\
\tilde{\varphi}_1^{(i)} &= \frac{m_1^{(i)} - \tilde{Q}_1^{(i)}}{10\tilde{h}^{(i)}\tilde{G}_{13}^{(i)}} - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{10} \frac{\partial \tilde{\theta}_3^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}}, & \tilde{\varphi}_2^{(i)} &= \frac{m_2^{(i)} - \tilde{Q}_2^{(i)}}{10\tilde{h}^{(i)}\tilde{G}_{23}^{(i)}} - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{10\tilde{R}^{(i)}} \frac{\partial \tilde{\theta}_3^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}}, \\
\tilde{\gamma}_3^{(i)} &= \frac{1}{2\tilde{h}^{(i)}} \frac{\tilde{T}_0^{(i)}}{\tilde{E}_z^{(i)}} - \frac{1}{2} \left(\mu_1 \varepsilon_1^{(i)} + \mu_2 \varepsilon_2^{(i)} \right), \\
\tilde{\theta}_3^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{h}^{(i)}} \frac{\tilde{M}_0^{(i)}}{\tilde{E}_z^{(i)}} - \frac{1}{6} \left(\mu_1 \eta_1^{(i)} + \mu_2 \eta_2^{(i)} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Проведем подобное преобразование для теории Паляя–Спиро. Уравнения связи деформаций с усилиями и моментами для данной теории имеют вид

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_j^{(i)} &= E_{1j} \tilde{h}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + E_{j2} \tilde{h}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + \\
&+ \frac{\tilde{h}^{(i)}}{12} \left((K_{j1} - K_{j2}) \tilde{\eta}_1^{(i)} - K_{j3} \tilde{\eta}_2^{(i)} \right) + \mu_j^{(i)} \frac{q_3^i}{2} \tilde{h}^{(i)}, \\
\tilde{T}_{(12,21)}^{(i)} &= \tilde{G}_{12}^{(i)} \tilde{h}^{(i)} \left(\tilde{\omega}_1^{(i)} + \tilde{\omega}_2^{(i)} - \frac{(\tilde{h}^{(i)})^2}{12} \tilde{\tau}_{(1,2)}^{(i)} \right), \\
\tilde{M}_j^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6} \left(E_{1j} \eta_1^{(i)} + E_{j2} \eta_2^{(i)} + (K_{j1} - K_{j2}) \tilde{\varepsilon}_j^{(i)} \right) - \\
&- \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6} K_{(3-j)3} \tilde{\varepsilon}_{(3-j)}^{(i)} + \mu_j^{(i)} \frac{q_3^i}{8} \tilde{h}^{(i)}, \\
\tilde{M}_{(12,21)}^{(i)} &= \tilde{G}_{12}^{(i)} \frac{\tilde{h}^{(i)}}{12} \left(\tilde{\tau}_1^{(i)} + \tilde{\tau}_2^{(i)} - (\tilde{h}^{(i)})^2 \tilde{\omega}_{(1,2)}^{(i)} \right), \\
\tilde{Q}_j^{(i)} &= \tilde{G}_{j3}^{(i)} \tilde{h}^{(i)} \gamma_j^{(i)}, \\
\sigma_{33} &= \frac{\tilde{P}_3^{+(i)} \left(1 + \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{\tilde{h}^{(i)}} \right) - \tilde{P}_3^{- (i)} \left(1 - \frac{\tilde{h}^{(i)}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{\tilde{h}^{(i)}} \right)}{1 + \frac{z}{\tilde{R}^{(i)}}}, \\
\tilde{F}(\alpha, \beta, z) &= \int_0^z \frac{\sigma_{33}}{E_z} dz - (\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2) z - \\
&- \left[\mu_1 \left(\eta_1 - \frac{\varepsilon_1}{\tilde{R}^{(i)}} \right) + \mu_2 \eta_2 \right] \frac{z^2}{2} + \left(\frac{\mu_1 \eta_1}{\tilde{R}^{(i)}} \right) \frac{z^3}{3} \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив в них уравнения для деформаций из табл. 1, перейдем к зависимости моментов и усилий от компонентов смещения u, v, w, γ_1 и γ_2 .

Таким образом, для обеих теорий получены уравнения связи усилий и моментов с компонентами перемещений. Подставляя их в уравнения равновесия цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{T}_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{T}_{21}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} + \tilde{Q}_1^{(i)} + \tilde{q}_1^{(i)} &= 0, \\
 \frac{\partial \tilde{T}_{12}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{T}_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} + \tilde{q}_2^{(i)} &= 0, \\
 \frac{\partial \tilde{Q}_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{Q}_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} - \tilde{T}_1^{(i)} + \tilde{q}_3^{(i)} &= 0, \\
 \frac{1}{\tilde{h}^{(i)}} \left(\frac{\partial \tilde{M}_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{M}_{21}^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} \right) - \tilde{Q}_1^{(i)} + \tilde{m}_1^{(i)} &= 0, \\
 \frac{1}{\tilde{h}^{(i)}} \left(\frac{\partial \tilde{M}_{12}^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} + \tilde{R}^{(i)} \frac{\partial \tilde{M}_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} \right) - \tilde{Q}_2^{(i)} + \tilde{m}_2^{(i)} &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

можно получить систему из пяти дифференциальных уравнений в частных производных с пятью неизвестными функциями. Для теории Родионовой–Гитаева–Черныха в общем виде система уравнений имеет 14-й порядок (см. [7]), а для теории Паляя–Спиро — 10-й порядок. Подставляя соответствующие компоненты деформации в расчетные формулы (2), (3), можно получить все составляющие напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для решения задачи используем систему уравнений оболочки в перемещениях (11). Перемещения срединной поверхности оболочки задаются в виде

$$\begin{aligned}
(u^{(i)}(\alpha, \beta), \gamma_1^{(i)}(\alpha, \beta)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (u_{nm}^{(i)}, \gamma_{1,nm}^{(i)}) \sin[n\alpha] \sin[\bar{m}\beta], \\
(v^{(i)}(\alpha, \beta), \gamma_2^{(i)}(\alpha, \beta)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (v_{nm}^{(i)}, \gamma_{2,nm}^{(i)}) \cos[n\alpha] \cos[\bar{m}\beta], \\
w^{(i)}(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{nm}^{(i)} \cos[n\alpha] \sin[\bar{m}\beta], \quad \bar{m} = (\pi m)/L.
\end{aligned} \tag{12}$$

Эти формулы учитывают симметрию деформации оболочки относительно плоскости $\alpha=0$ и обеспечивают нулевые перемещения u, γ_1 и w при $\beta=0$ и $\beta=L$. Выражения для v и γ_2 не удовлетворяют нулевым краевым условиям, однако, когда деформации не доходят до края участка, эти перемещения малы. Внешние и внутренние силы, действующие на поверхности оболочки, представим в виде произведения разложенных в ряд сил в сечениях. Пусть $X_1^{(i+1)}, X_2^{(i+1)}, X_3^{(i+1)}$ — составляющие давления, возникающего на внешней поверхности i -й оболочки, а $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}$ — давление на ее внутренней поверхности, индекс $i = 1$ соответствует внутренней, а $i = N + 1$ — внешней поверхности трубки, состоящей из N слоев. Следуя работе [7], примем условие жесткого защемления между слоями:

$$\tilde{u}_j^{(i)}(\alpha, \beta, h/2) = \tilde{u}_j^{(i+1)}(\alpha, \beta, -h/2), \quad j = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Локализованную на маленькой квадратной области нагрузку представим в виде произведения двух рядов Фурье функций нагружения в продольном и поперечном сечениях:

$$Pa[\alpha] = P \left(\frac{C}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}C\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha\right) \right). \tag{14}$$

Давление в продольном сечении трубки будет описываться соотношением

$$Pb[\beta] = P \left(\frac{4}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{L}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{L}C\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}L_v\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}\beta\right) \right), \tag{15}$$

где L_v — центр области приложения нагрузки, C — половина длины стороны квадратной области приложения нагрузки, P — давление в области.

Область давления описывается функцией произведения рядов:

$$Pd[\alpha, \beta] = Pa[\alpha] \cdot Pb[\beta]. \quad (16)$$

Нагрузка прикладывается к внешней поверхности трубки:

$$X_{1,2}^{(N+1)} = 0, \quad X_3^{(N+1)} = Pd[\alpha, \beta]. \quad (17)$$

Расчёты показали, что влияние давления, вызванного наполнителем, на внутренней поверхности трубки пренебрежимо мало, поэтому в дальнейшем оно принимается равным нулю:

$$X_j^{(1)} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Подставим зависимости (12), (17) и (18) в систему уравнений равновесия оболочки (11) и в соотношения жесткого защемления слоев (13). В результате получается система из $5N$ алгебраических уравнений относительно компонентов деформаций оболочек:

$$\begin{cases} F_j \left(u_{nm}^{(i)}, v_{nm}^{(i)}, w_{nm}^{(i)}, \gamma_{1,nm}^{(i)}, \gamma_{2,nm}^{(i)}, X_{1,nm}^{(i+1)}, X_{1,nm}^{(i)} \right) = 0, & j = 1, 2, \\ F_j \left(u_{nm}^{(i)}, v_{nm}^{(i)}, w_{nm}^{(i)}, \gamma_{1,nm}^{(i)}, \gamma_{2,nm}^{(i)}, X_{2,nm}^{(i+1)}, X_{2,nm}^{(i)} \right) = 0, & j = 3, 4, \\ F_j \left(u_{nm}^{(i)}, v_{nm}^{(i)}, w_{nm}^{(i)}, \gamma_{1,nm}^{(i)}, \gamma_{2,nm}^{(i)}, X_{3,nm}^{(i+1)}, X_{3,nm}^{(i)} \right) = 0, & j = 5, \end{cases} \quad (19)$$

и система из $3(N-1)$ уравнений относительно сил взаимодействия между слоями оболочек:

$$\begin{cases} G_j^{(i+1)} \left(u_{nm}^{(i+1)}, v_{nm}^{(i+1)}, w_{nm}^{(i+1)}, \gamma_{1,nm}^{(i+1)}, \gamma_{2,nm}^{(i+1)}, X_{j,nm}^{(i+2)}, X_{j,nm}^{(i+1)} \right) = \\ = G_j^{(i)} \left(u_{nm}^{(i)}, v_{nm}^{(i)}, w_{nm}^{(i)}, \gamma_{1,nm}^{(i)}, \gamma_{2,nm}^{(i)}, X_{j,nm}^{(i+1)}, X_{j,nm}^{(i)} \right), & j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (20)$$

Каждый из коэффициентов систем $u_{nm}^{(i)}, v_{nm}^{(i)}, w_{nm}^{(i)}, \gamma_{1,nm}^{(i)}, \gamma_{2,nm}^{(i)}, X_{1,nm}^{(i)}, X_{2,nm}^{(i)}, X_{3,nm}^{(i)}$ будет общим членом ряда Фурье функций

деформаций и напряжений. Для реализации приведенного численного метода была разработана программа на основе пакета Mathematica 7.0.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь в качестве примера приведен расчет, выполненный для следующей трубки: внутренний радиус $R=2.5$ нм, внешний — $R=16$ нм, длина трубки $L=500$ нм, значения модуля упругости оболочки $E_1 = E_2 = E_3 = 1.75 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициенты Пуассона $\nu_{ij} = 0.3$, где $i, j = (1, 2)$ и сравнительно малом значении модуля сдвига $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 2.3 \cdot 10^7$ Па. Сила внешнего воздействия $F_v=10$ нН, площадь области приложенной нагрузки $[40 \cdot 40]$ нм², L_v — координата приложения силы на внешней поверхности оболочки. Ясно, что соотношение h/R рассматриваемой нанотрубки существенно превосходит область применимости теории оболочек; если рассматривать ее как однослойную, то будут получены некорректные результаты. Поэтому для решения поставленной задачи проводится разбиение трубки на n слоев. Расчеты показывают, что при следующем разбиении $n=100$, $h=0.135$ нм значения прогибов оказываются очень близким к результатам, полученным с использованием трехмерной теории. Дальнейшее увеличение числа слоев к уточнению результатов не приводит.

Приведем графики функций смещения и общую картину деформации для случая, когда нагрузка приложена к центру трубки. Из графиков (рис. 3) видно, что выполнялась предположенная малость функций прогиба v и γ_2 . Для графика функции прогиба w видно, что максимальный прогиб имеет место в области приложенного давления.

В таблице 2 проводится сравнение результатов, полученных по теории Тимошенко–Рейснера (TR), Родионовой–Титаева–Черныха (RTCH), Паляя–Спиро (PS), и результатов, получающихся при тех же параметрах МКЭ в пакете ANSYS 11, где был использован 3-мерный двадцати узловой элемент Solid 186. Строки “TR1”, “Ansys1” соответствуют значениям прогиба трубки с отверстием, строки “TR2”, “Ansys2” — прогибу сплошной трубки.

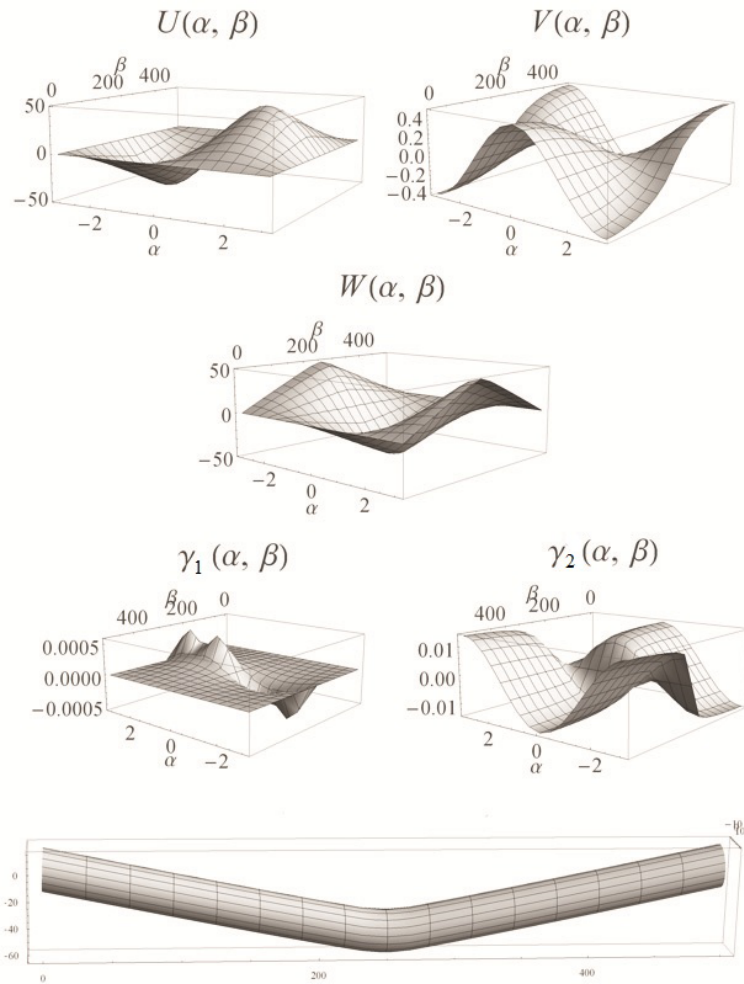


Рис. 5. Деформации оболочки.

Таблица 2. Сравнение величин прогибов многослойной трубки, нм.

L_v	250	200	150	120	100	70	40
TR1	60.61	58.07	50.52	43.65	38.12	28.47	17.24
TR2	59.2	56.72	49.34	42.62	37.22	27.79	16.82
RTCH	57.79	55.21	47.56	40.62	35.07	25.45	14.4
PS	57.54	54.97	47.35	40.45	34.92	25.34	14.34
Ansys1	54.11	51.7	45.1	39.02	34.07	25.37	15.37
Ansys2	52.39	50.12	43.71	37.81	33.02	24.6	14.91

Видно, что все теории дают близкие результаты. Однако результаты, полученные с использованием теорий оболочек, ближе к результатам трехмерной теории, что может быть объяснено более точным учетом цилиндрической формы трубки, цилиндрической анизотропией, а также учетом области приложения внешней нагрузки.

Проведем также сравнение результатов, полученных по трехмерной теории, используемой в пакете ANSYS 11 с результатами, получающимися по изложенным неклассическим теориям для однослойной цилиндрической оболочки с постоянным внешним радиусом $R=16$ нм и постепенно увеличивающейся толщины оболочки (как следствие, происходит уменьшение радиуса срединной поверхности оболочки). В табл. 3 приведены величины прогибов в центре рассматриваемых оболочек, внешняя сила $F_v=1$ нН.

Таблица 3. Сравнение величин прогибов для однослойной оболочки

h/R	1/15	1/10	1/5	1/4	1/3	1/2
TR1	46.33	31.91	17.55	14.71	11.88	9.13
RTCH	78.09	52.64	27.14	22.13	17.31	12.98
PS	75.28	49.82	24.29	19.26	14.39	9.9
Ansys1	76.36	46.44	20.37	15.9	11.95	8.92

Результаты, представленные в табл. 3 показывают, что обе теории оболочек РТЧ и ПС дают близкие значения прогибов. Также близки и другие величины, характеризующие напряженно-

деформированное состояние оболочек. При увеличении относительной толщины оболочки величины прогиба, получаемые по теории ПС ближе к значениям, получаемым методом конечных элементов. Чем ближе цилиндрическая трубка к сплошной, тем лучшие результаты дает теория ТР.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miller R. E., Shenoy V. B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology* 11. 2000. p.139–147.
2. *Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.* Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // *Доклады Академии наук*. 2001. Т.381. Вып.3. С.345–347.
3. *Анжудин А. В., Бауэр С. М., Каштанова С. В., Морозов Н. Ф., Няпшаев И. А.* Исследование механической жесткости уединенных асбестовых нанотрубок // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Актуальные проблемы механики. Естественные науки*. 2009. С.7–9.
4. *Каштанова С. В.* Исследование механических свойств асбестовых нанотрубок. // *Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды"*. 2009–2010 гг. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. С. 81–86.
5. *Анжудин А. В., Бауэр С. М., Ермаков А. М., Каштанова С. В., Морозов Н. Ф.* О механических параметрах асбестовых нанотрубок // *Современные проблемы механики сплошной среды. Труды конференции*. Т.1. С.35–38.
6. *Donnell L. H.* Beams, Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company. w.p. 1976.
7. *Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1996. 280 с.
8. *Палий О. М., Спири В. Е.* Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. Л.: Судостроение. 1977. С. 20–32.
9. *Bauer S. M., Ermakov A. M., Kashtanova S. V., Morozov N. F.* Nonclassical Models in the Shell Theory with Applications to Multilayered Nanotubes // *COMPdyn 2011, 3rd ECCOMAS, CD-MS06*. N 105. 10 p.
10. *Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.* Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоёв под действием нормального давления // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1*. 2011. Вып.3. С.85–92.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, АРМИРОВАННОЙ ВОЛОКНАМИ

И. В. ВИКТОРОВ

Рассматриваются три задачи устойчивости тонкой цилиндрической оболочки, армированной одной системой малорастяжимых нитей: при осевом сжатии, при внешнем давлении и при кручении. При этом ограничимся задачами, к которым применим метод локальной потери устойчивости (см. [3]). Обсуждаются особенности, которые вносит винтовая анизотропия по сравнению с оболочкой из изотропного материала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается тонкая изотропная цилиндрическая, подкрепленная системой волокон, наклонённых под углом θ к образующей (рис. 1). Предполагается, что волокна равномерно распределены

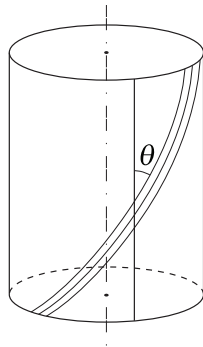


Рис. 1. Оболочка вращения, армированная волокнами.

по окружности оболочки и расположены симметрично относительно срединной поверхности оболочки. Такое армирование приводит к винтовой анизотропии.

2. СООТНОШЕНИЯ УПРУГОСТИ В ТОНКОЙ ОБОЛОЧКЕ, АРМИРОВАННОЙ ВОЛОКНАМИ

В цилиндрической системе координат деформации растяжения-сдвига $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega)$ и деформации изгиба-кручения $(\varkappa_1, \varkappa_2, \tau)$ срединной поверхности оболочки имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}, \quad (1)$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial s}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi}, \quad \tau = -\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial s}, \quad (2)$$

$$\gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u_2}{R}. \quad (3)$$

Здесь γ_1 и γ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности в направлении координат s и φ ; u_1 , u_2 и w — компоненты перемещения срединной поверхности; R — радиус цилиндрической оболочки.

Соотношения упругости, связывающие усилия T_1 , T_2 , S и моменты M_1 , M_2 , H с деформациями, были получены в работе [6] и имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 &= K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + K_{13}\omega, \\ T_2 &= K_{21}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + K_{23}\omega, \\ S &= K_{31}\varepsilon_1 + K_{32}\varepsilon_2 + K_{33}\omega, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + 2D_{13}\tau, \\ M_2 &= D_{21}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2 + 2D_{23}\tau, \\ H &= D_{31}\varkappa_1 + D_{32}\varkappa_2 + 2D_{33}\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты K_{ij} и D_{ij} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_{11} \\ D_{11} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} (F_0 + F_k c_k^4) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz, \\
\begin{bmatrix} K_{22} \\ D_{22} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} (F_0 + F_k s_k^4) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz, \\
\begin{bmatrix} K_{33} \\ D_{33} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1-\nu}{2} F_0 + F_k c_k^2 s_k^2 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz, \\
\begin{bmatrix} K_{12} \\ D_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{21} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (F_0 \nu + F_k c_k^2 s_k^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz, \\
\begin{bmatrix} K_{13} \\ D_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{31} \\ D_{31} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (F_k c_k^3 s_k) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz, \\
\begin{bmatrix} K_{32} \\ D_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{23} \\ D_{23} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (F_k c_k s_k^3) \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$F_0 = \frac{E_0 \delta_0^*}{1 - \nu^2}, \quad F_k = E_k \delta_k^*, \quad s_k = \sin \theta, \quad c_k = \cos \theta,$$

где E_0 и E_k — модули Юнга для изотропной матрицы и армирующих волокон соответственно, ν — коэффициент Пуассона для матрицы, δ_k^* — коэффициент, характеризующий распределение нитей в оболочке и их относительный объём, а коэффициент δ_0^* характеризует изотропную матрицу в армированной оболочке. Эффектом Пуассона для волокон пренебрегаем.

Конкретизируем коэффициенты (6), сделав ряд предположений относительно характера армирования оболочки. Будем считать, что

$$\delta_k^*(z) = \delta_k f_k(z),$$

где δ_k — относительный объём, занимаемый системой волокон, а от расстояния до срединной поверхности z зависит только $f_k(z)$ — четная функция, описывающая характер распределения нитей по

толщине оболочки. Причем

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_k(z) dz = h.$$

Предполагаем также, что относительный объём, занимаемый нитями, мал (то есть $\delta_k \ll 1$), и, следовательно, при вычислении жесткости матрицы можно пренебречь влиянием характера распределения волокон, считая что $\delta_0^*(z) = \delta_0$.

Для удобства дальнейшего анализа введём безразмерные параметры k и d имеющие смысл относительной жесткости системы волокон на растяжение-сжатие и на изгиб-кручение соответственно (см. [5]):

$$k = (1 - \nu^2) \frac{E_k \delta_k}{E_0 \delta_0},$$

$$d = (1 - \nu^2) \frac{12}{h^3} \frac{E_k \delta_k}{E_0 \delta_0} \int_{-h/2}^{h/2} f_k(z) z^2 dz, \quad 0 \leq d \leq 3k.$$

В нашей модели они полностью описывают характер армирования оболочки.

Параметр k не зависит от распределения волокон по толщине $f_k(z)$ и может принимать любое положительное значение (случай $k = 0$ соответствует оболочке, не подкрепленной системой нитей). В то же время параметр d сильно зависит от распределения волокон по толщине оболочки. Он изменяется от $d = 0$ (нити расположены на срединной поверхности) до $d = 3k$ (нити расположены на лицевых поверхностях: $z = \pm h/2$). В случае равномерного распределения нитей по толщине оболочки $d = k$.

Тогда коэффициенты K_{ij} и D_{ij} можно записать в виде

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_0(1 + kc_k^4), & K_{12} &= K_{21} = K_0(\nu + kc_k^2 s_k^2), \\ K_{22} &= K_0(1 + ks_k^4), & K_{33} &= K_0\left((1 - \nu)/2 + kc_k^2 s_k^2\right), \\ K_{13} &= K_{31} = K_0kc_k^3 s_k, & K_{23} &= K_{32} = K_0kc_k s_k^3, \\ D_{11} &= D_0(1 + dc_k^4), & D_{12} &= D_{21} = D_0(\nu + dc_k^2 s_k^2), \\ D_{22} &= D_0(1 + ds_k^4), & D_{33} &= D_0\left((1 - \nu)/2 + dc_k^2 s_k^2\right), \\ D_{13} &= D_{31} = D_0dc_k^3 s_k, & D_{23} &= D_{32} = D_0dc_k s_k^3, \end{aligned}$$

где

$$K_0 = \frac{E_0 \delta_0}{1 - \nu^2}, \quad D_0 = \frac{E_0 \delta_0 h^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

3. ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

Уравнения равновесия для элемента цилиндрической оболочки (см. [2]) запишем в виде

$$\begin{aligned} R \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} + R q_1 &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial S}{\partial s} + R \left(q_2 - \frac{Q_2}{R} \right) &= 0, \\ R \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + R \left(q_n + \varkappa_1 T_1 + 2\tau S + \left(\frac{1}{R} + \varkappa_2 \right) T_2 \right) &= 0, \quad (7) \\ R \frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} + R Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial H}{\partial s} + R Q_2 &= 0, \end{aligned}$$

где q_1, q_2, q_n — проекции интенсивности внешней нагрузки.

Третье уравнение в (7) содержит нелинейные члены $\varkappa_1 T_1, 2\tau S, \varkappa_2 T_2$, что позволяет использовать её для решения задач устойчивости.

Для рассматриваемого нами класса задач можно провести ряд упрощений. Так, в (7) может быть отброшено перерезывающее усилие Q_2 из второго уравнения, а в (2) и (3) можно отбросить малые по сравнению с w перемещения u_1 и u_2 , записав их как

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial \gamma_1}{\partial s}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varphi}, \quad \tau = -\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi}, \quad (8)$$

$$\gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \quad (9)$$

Эти упрощения приводят нас к уравнениям технической теории оболочек (см. [1]).

Предполагаем, что в результате нагружения начальное напряжённо-деформированное состояние оболочки безмоментное и задаётся обобщёнными усилиями T_1^0, T_2^0, S^0 . В этом случае начальные моменты равны нулю ($M_1^0 = M_2^0 = H^0 = 0$). Далее исследуем устойчивость такого состояния.

Уравнения бифуркации для уравнений равновесия (7) имеют вид

$$\begin{aligned} R \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial(S)}{\partial s} &= 0, \\ R \frac{\partial(Q_1)}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + T_2 + R(\varkappa_1 T_1^0 + 2\tau S^0 + \varkappa_2 T_2^0) &= 0, \quad (10) \\ R \frac{\partial(M_1)}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} + R Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial(H)}{\partial s} + B Q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения вместе с выражениями для деформаций (1), (8), (9) и соотношениями упругости (4), (5) формируют замкнутую систему.

Нагружение считаем однопараметрическим, определяемым параметром λ по формуле

$$\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda\{t_1, t_2, t_3\}.$$

Для удобства дальнейшего анализа перейдём к безразмерному виду. Для этого параметр нагружения λ , а также усилия T_1, T_2, S и моменты M_1, M_2, H , а стало быть, и коэффициенты из соотношений упругости K_{ij}, D_{ij} (где $i, j = 1, 2, 3$) отнесём к $E_0 \delta_0 h / (1 - \nu^2)$. Линейные величины R, h, s отнесём к радиусу оболочки R .

Воспользуемся методом локальной устойчивости (см. [3]), согласно которому форма потери устойчивости задаётся в виде двояко периодической функции, а граничные условия игнорируются.

Этот метод применим к рассматриваемым здесь задаче устойчивости цилиндрической оболочки средней длины при осевом сжатии и задаче устойчивости достаточно длинных цилиндрических оболочек при внешнем давлении и кручении. При этом предполагается, что закрепление краёв оболочки не допускает появления локализованных вблизи края форм потери устойчивости, связанных с его слабым закреплением.

Перемещения ищем в виде двояко периодических функций:

$$u_1 = u_1^0 \sin(ps + q\varphi), \quad u_2 = u_2^0 \sin(ps + q\varphi), \quad w = w^0 \cos(ps + q\varphi),$$

где u_1^0, u_2^0, w^0 — амплитуды, а p, q — волновые числа.

Находим параметр нарушения λ как функцию волновых чисел p и q :

$$\lambda = f(p, q) = \frac{B_\varepsilon + B_\varkappa}{B_t}, \quad (11)$$

где

$$B_\varepsilon = \frac{p^4}{\Delta}, \quad B_t = t_1 p^2 + 2t_3 p q + t_2 q^2,$$

$$B_\varkappa = D_{11} p^4 + 4D_{13} p^3 q + (D_{12} + 2D_{33}) p^2 q^2 + 4D_{23} p q^3 + D_{22} q^4,$$

$$\Delta = A_{22} p^4 - 2A_{23} p^3 q + (2A_{12} + A_{33}) p^2 q^2 - 2A_{13} p q^3 + A_{11} q^4.$$

Здесь ввели A_{ij} , элементы матрицы $A = K^{-1}$.

Переменные $B_\varepsilon, B_\varkappa$ и B_t пропорциональны соответственно потенциальным энергиям растяжения-сдвига Π_ε и изгиба-кручения Π_\varkappa срединной поверхности при дополнительной деформации и работе начальных усилий на повороте нормали Π_T .

Критическую нагрузку получим, минимизируя функцию $f(p, q)$ по ее аргументам. С этой целью, как и в работах [4]–[7], положим $p = r \cos \alpha, q = r \sin \alpha$. Тогда минимум по аргументу r находится явно:

$$\lambda_0 = \min_\alpha \frac{\sqrt{B_\varepsilon^*(\alpha) B_\varkappa^*(\alpha)}}{B_t^*(\alpha)}, \quad r_0^4 = \frac{B_\varepsilon^*(\alpha)}{B_\varkappa^*(\alpha)}, \quad (12)$$

где

$$B_\varepsilon = B_\varepsilon^*(\alpha), \quad B_\varkappa = r^4 B_\varkappa^*(\alpha), \quad B_t = r^2 B_t^*(\alpha), \quad \Delta = r^4 \Delta^*(\alpha).$$

Для удобства последующего анализа введем малый параметр толщины оболочки

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12}$$

и параметр нагружения

$$\lambda = 2\mu^2 \Lambda \sqrt{1 - \nu^2}. \quad (13)$$

Такой выбор параметра Λ дает $\Lambda = 1$ при осевом сжатии цилиндрической оболочки без нитей. Также введём в рассмотрение $D_{ij}^0 = D_{ij}/\mu^4$, где $i, j = 1, 2, 3$. Далее "0" будем опускать.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Исходя из формул для критической нагрузки (12) для случая осевого сжатия (считаем $t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0$), имеем

$$\Lambda = \min_{\alpha} \sqrt{\frac{B_{\varkappa}^*(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)}}, \quad (14)$$

где

$$\Delta^* = A_{22} \cos^4 \alpha - 2A_{23} \cos^3 \alpha \sin \alpha + (2A_{12} + A_{33}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 2A_{13} \cos \alpha \sin^3 \alpha + A_{11} \sin^4 \alpha,$$

$$B_{\varkappa}^* = \mu^4 \left(D_{11} \cos^4 \alpha + 4D_{13} \cos^3 \alpha \sin \alpha + (D_{12} + 2D_{33}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 4D_{23} \cos \alpha \sin^3 \alpha + D_{22} \sin^4 \alpha \right).$$

После упрощения выражения (14) получаем формулу

$$\Lambda = \min_{\alpha} \sqrt{\frac{(1 + k - \nu^2)(1 + d \cos^4 \xi)}{(1 + \nu)(1 - \nu + (2 - (1 + \nu) \cos^2 \xi)k \cos^2 \xi)}}, \quad (15)$$

где $\xi = \alpha - \theta$, а Λ — параметр нагружения, нормированный по формуле (13).

Видно, что критическую нагрузку можно определить, минимизируя функцию (15) не по углу волнообразования α , а по углу наклона вмятин относительно волокон ξ . Значит, результат не будет зависеть от направления армирования θ и будет иметь вид

$$\Lambda = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{4kd^* + t^2(d^*)} - t(d^*)}{2(1 + \nu)}},$$

$$\cos^2(\alpha - \theta) = \frac{2}{\sqrt{4kd^* + t^2(d^*)} + t(d^*)},$$

где

$$t(d^*) = (1 + \nu) + d^*(1 - \nu), \quad d^* = \frac{d}{k}, \quad 0 \leq d^* \leq 3.$$

Отдельно запишем эти соотношения для трёх частных случаев распределения волокон по толщине:

- $d = 0$ — волокна на срединной поверхности оболочки:

$$\Lambda = 1, \quad \cos^2(\alpha - \theta) = \frac{1}{1 + \nu}; \quad (16)$$

- $d = k$ — волокна равномерно распределены по толщине:

$$\Lambda = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{k+1} - 1}{1 + \nu}}, \quad \cos^2(\alpha - \theta) = \frac{1}{\sqrt{k+1} + 1}; \quad (17)$$

- $d = 3k$ — волокна на лицевых поверхностях оболочки:

$$\Lambda = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3k + (2 - \nu)^2} - (2 - \nu)}{1 + \nu}}, \quad (18)$$

$$\cos^2(\alpha - \theta) = \frac{1}{\sqrt{3k + (2 - \nu)^2} + (2 - \nu)}.$$

На рис. 2 слева показана зависимость критической нагрузки, а справа — разности углов армирования и волнообразования для трёх рассмотренных случаев (16)–(18) распределения волокон по

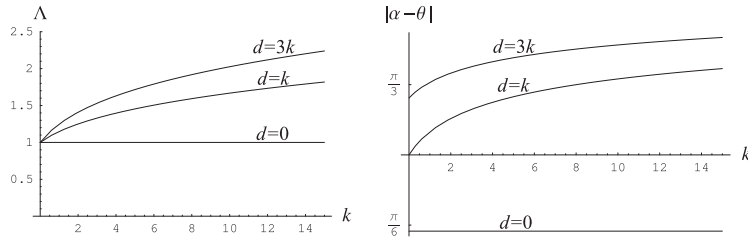


Рис. 2. Зависимость параметра нагружения Λ (слева) и угла $|\alpha - \theta|$ (справа) от относительной жёсткости армирования k .

толщине оболочки. При построении графиков считали, что $\nu = 0.3$.

Из (16)–(18) и рис. 2 видно, что в случае оболочки, армированной одной системой волокон, расположенной на срединной поверхности, увеличения критической нагрузки Λ по сравнению с изотропной оболочкой не происходит. В этом случае армирование влияет только на форму потери устойчивости.

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КРУЧЕНИИ И ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

При кручении и при внешнем давлении минимум λ по формуле (12) достигается при $\cos \alpha = 0$, откуда следует, что $|p| \ll q$, где $q \geq 2$ — целое (в силу периодичности в окружном направлении). Положим $t_1 = 0$ и, пользуясь неравенством $|p| \ll q$, приведем приближенное выражение (11). При этом неравенство

$$\{|u_1^0|, |u_2^0|\} \ll |w^0|$$

уже не имеет места, и для κ_2, τ, γ_2 нельзя использовать упрощенные выражения (8) и (9).

Тогда выражение (11) принимает вид

$$\lambda = \min_{\beta, q} \frac{\frac{\beta^4}{A_{11}} \left(1 + \frac{2A_{13}\beta}{A_{11}}\right) + \mu^4(q^2 - 1)^2 D_{22} \left(1 + \frac{4D_{23}\beta}{D_{22}}\right)}{2t_3\beta(q^2 - 1) + t_2(q^2 - 1)^2 q^{-2}}, \quad (19)$$

где $\beta = p/q$ — тангенс угла наклона вмятин к образующей. В формуле (19) сохранены главные члены и члены первого порядка малости по отношению к β .

В случае кручения положим в формуле (19) $t_2 = 0$, $t_3 = \pm 1$, где знак указывает на направление кручения. Вычисляя минимум, получаем

$$\begin{aligned}\lambda &= \min_q \lambda_0 \left(1 + \mu \beta_0 \lambda_1 + O(\mu^2) \right), \\ \beta_0 &= t_3 \mu^4 \sqrt[4]{\frac{D_{22} A_{11} (q^2 - 1)^2}{3}} + O(\mu^2), \\ \lambda_0 &= \frac{2}{3} \mu^3 \sqrt[4]{\frac{3 D_{22}^3 (q^2 - 1)^2}{A_{11}}}, \quad \lambda_1 = \frac{2 D_{23}}{D_{22}} + \frac{A_{13}}{2 A_{11}}.\end{aligned}\tag{20}$$

Как и следовало ожидать, минимум критической нагрузки достигается при $q = 2$. В отличие от ортотропной оболочки для оболочки с винтовой анизотропией критическая нагрузка зависит от направления кручения. Из полученной формулы видно, что эта зависимость проявляется только в первом приближении, которое для ортотропной оболочки равно 0. Для изотропной оболочки формула (20) совпадает с формулой Шверина в работе [1].

В случае внешнего давления ($t_2 = 1$, $t_3 = 0$)

$$\begin{aligned}\lambda &= \min_q \mu^4 q^2 D_{22} \left(1 + \frac{3 D_{23}}{4 D_{22}} \beta \right), \\ \beta &= \mu^{4/3} \sqrt[3]{-(q^2 - 1)^2 D_{23} A_{11}}.\end{aligned}\tag{21}$$

Минимум, опять же, достигается при $q = 2$.

В отличие от ортотропной оболочки в случае винтовой анизотропии при потере устойчивости появляется малый угол наклона вмятин к образующей. Для изотропной оболочки формула (21) согласуется с формулой Грасгофа–Бресса (см. [1]) $\lambda = 3\mu^4 D_{22}$, которая, в отличие от (21), учитывает следящий характер внешнего давления.

На рис. 3 слева показана зависимость параметра нагружения $\Lambda^* = \lambda/\mu^3$ от угла армирования θ при кручении, а справа — при

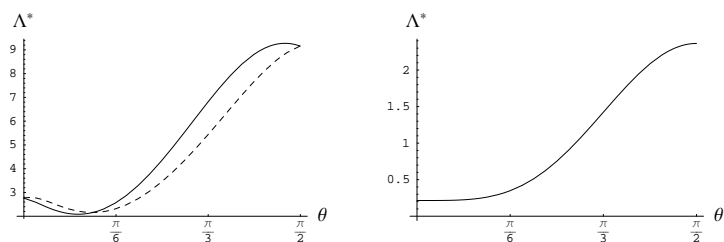


Рис. 3. Зависимость параметра нагружения от угла армирования при кручении (слева) и при внешнем давлении (справа).

равномерном внешнем давлении. Считалось, что $\nu = 0.3$, $k = 10$, $h/R = 1/100$, а волокна равномерно распределены по толщине оболочки ($d = k$). На графике для критической нагрузки при кручении сплошная линия соответствует случаю $t_3 = 1$, а пунктирная — случаю $t_3 = -1$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе при помощи локального подхода были найдены явные приближённые формулы для критической нагрузки и формы выпучивания для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией при осевом сжатии. Выяснилось, что критическая нагрузка не зависит от угла наклона нитей. Отдельно были рассмотрены три частных случая расположения армирующего волокна: нити расположены на срединной поверхности, армирование равномерно по толщине, волокна расположены на лицевых поверхностях оболочки. В первом из этих случаев подкрепляющего эффекта армирования при помощи локального подхода обнаружено не было. Также в работе рассмотрена локальная устойчивость цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией при кручении и внешнем давлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М., 1978. 360 с.
2. Новожиллов В. В. Теория упругих тонких оболочек. Л.: Судпромгиз,

1962. 428с.
3. *Товстик П. Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. МТТ. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
 4. *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320с.
 5. *Товстик П. Е., Викторов И. В.* Локальные формы потери устойчивости конструктивно ортотропных оболочек // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина. М.: Физматлит, 2006. С. 800–808.
 6. *Hasegawa M. E., Smirnov A. L., Tovstik P. E.* Buckling of Thin Anisotropic Shells // Trans. CSME. Vol. 24. 1B. 169–178.
 7. *Smirnov A. L., Tovstik P. E.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic shells. World Scientific. Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 2002. 347p.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ДВИЖЕНИИ ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА

К. О. Лахман

В работе рассматривается оболочка глаза, заполненная средой из нескольких компонентов, которая вращается в жидкости под воздействием крутящих моментов, создаваемых тремя парами прикрепленных к главному яблоку мышц. Центр вращения глазного яблока остается неподвижным.

Допуская, что внутриглазная жидкость является идеальной несжимаемой и однородной, рассматривается классическая задача о вихревом движении такой жидкости внутри глазного яблока. В предлагаемой модели рассматривается частный вид движения жидкости – однородное вихревое движение. Обладая экспериментальными данными о зависимости угловой скорости движения глаза от времени в процессе различных тестов (при чтении, рассматривании картин и устремлении взглядов в одну точку), можно оценивать затраченную энергию в этом процессе. Для проведения исследований использована система «Jazz Novo Standard».

1. ВВЕДЕНИЕ

Оболочка глаза, заполненная средой из нескольких компонентов (рис. 1), вращается в вязкой жидкости под воздействием крутящих моментов, создаваемых тремя парами прикрепленных к главному яблоку мышц (рис. 2).

Центр вращения глазного яблока остается неподвижным и в норме находится в среднем на расстоянии 13.5 мм от вершины роговицы. У близоруких глаз это расстояние больше, у дальнозорких – меньше. Движение глазного яблока вокруг неподвижной точки определяется осью зрения и может быть сведено к повороту двух осей (рис. 3).

Доклад на семинаре 15 марта 2010 г..

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00140

© К. О. Лахман, 2012

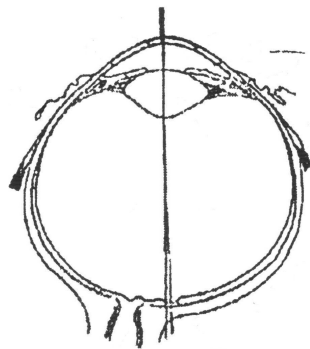


Рис. 1. Внешняя фиброзная оболочка глаза.

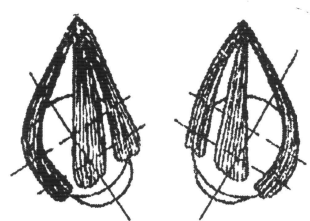


Рис. 2. Глазные мышцы.

Независимо от исходного положения глаза и траектории поворота конечное положение основного меридиана и экватора сетчатки относительно зрительной оси является функцией только направления этой оси. Ось глаза A составляет с осью вращения косых мышц B угол около 35° , а ось вращения верхней и нижней прямых мышц D – угол 70° . Угол между осями B и D примерно 75° .

Работа мышц глаза скоординирована с работой зрачковой мышцы и аккомодационных мышц хрусталика, что определяет четкое видение. Движение глаз при смене точек фиксации во фронтальной плоскости совершается скачком. Отклонение от точки фиксации равно $5 - 6'$. Траектории движения правого и левого глаза при фиксации неподвижной точки различны. При неточном скачке глаз

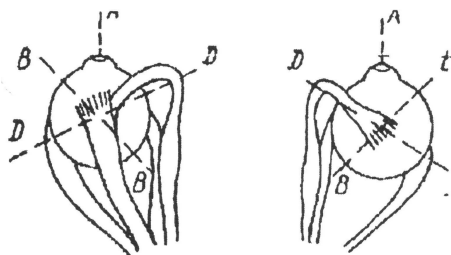


Рис. 3. Простейшее движение глазного яблока – поворот вокруг двух осей.

совершает дополнительный доскок.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЁ РЕШЕНИЕ

Допуская, что внутриглазная жидкость является идеальной несжимаемой и однородной, рассмотрим задачу о вихревом движении такой жидкости внутри глазного яблока.

Задача о вихревом движении идеальной несжимаемой однородной жидкости внутри эллипсоидальной капсулы является классической (см.[1, 2]). Для идеальной несжимаемой однородной жидкости справедливо уравнение Эйлера [3]:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1)$$

где v – скорость жидкости, p – давление, ρ – плотность.

При отсутствии теплообмена между отдельными участками жидкости, а также между жидкостью и соприкасающимися с ней телами (капсулой глаза) движение происходит адиабатически (см.[3]). Используя соотношение

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = [\bar{v}, \text{rot} \bar{v}] + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}, \quad (2)$$

можно записать (1) в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - [\bar{\vartheta}, \text{rot} \bar{\vartheta}] = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\vartheta^2}{2} \right). \quad (3)$$

Применив к обеим частям (3) операцию rot , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \bar{\vartheta}) = \text{rot} [\bar{\vartheta}, \text{rot} \bar{\vartheta}]. \quad (4)$$

Уравнение (4) с условием бездивергентности

$$\text{div} \bar{\vartheta} = 0 \quad (5)$$

и условием на границе S (поверхность глазного яблока)

$$(\bar{\vartheta} \cdot \nabla) V|_{S=0} = 0 \quad (6)$$

полностью описывает вихревое движение идеальной несжимаемой однородной жидкости внутри объема V с поверхностью S .

Поверхность глазной капсулы в наиболее общем случае считаем эллипсоидальной:

$$S(x, y, z) = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} - 1 = 0, \quad (7)$$

где $a_i (i = 1, 2, 3)$ – главные полуоси эллипсоида.

Существует частный вид движения жидкости – однородное вихревое движение, в котором $\bar{\Omega} = \text{rot} \bar{\vartheta}$ в каждый момент времени остается постоянным в пространстве и одинаковым для всех частиц жидкости. В рассматриваемой задаче имеются три линейно независимых поля скорости, соответствующие стационарному однородному вращению жидкости вокруг каждой из трех главных осей эллипсоида. Эти бездивергентные векторные поля скорости зависят линейно от координат, удовлетворяют граничному условию (2) и являются точными решениями уравнения (4) (см.[4]). Это векторное поле можно записать (см.[5]) в виде

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= -\frac{a_2}{a_3} z \bar{j} + \frac{a_3}{a_2} y \bar{k}, \\ \bar{W}_2 &= -\frac{a_3}{a_1} x \bar{k} + \frac{a_1}{a_3} z \bar{i}, \\ \bar{W}_3 &= -\frac{a_1}{a_2} y \bar{i} + \frac{a_2}{a_1} x \bar{j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Они удовлетворяют условию на границе (6), являются бездивергентными, линейно независимыми и ортогональными в том смысле, что

$$\int_V W_i \cdot W_j dV = 0 \quad (9)$$

для $i \neq j$. Следуя работе [6] решение (4) будем искать в виде

$$\bar{\vartheta}(\bar{x}, t) = \omega_1(t)\bar{W}_1(\bar{x}) + \omega_2(t)\bar{W}_2(\bar{x}) + \omega_3(t)\bar{W}_3(\bar{x}), \quad (10)$$

Запишем $\bar{\vartheta}$ в ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{\vartheta} = \bar{i} \left(\frac{a_1}{a_3} z\omega_2 - \frac{a_1}{a_2} y\omega_3 \right) + \bar{j} \left(\frac{a_2}{a_1} x\omega_3 - \frac{a_2}{a_3} z\omega_1 \right) + \bar{k} \left(\frac{a_3}{a_2} y\omega_1 - \frac{a_3}{a_1} x\omega_2 \right), \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в уравнение (4) и произведя все необходимые вычисления, получим систему

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= (J_3 - J_1)\omega_2\omega_3, \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1, \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $J_1 = a_2^2 + a_3^2$, $J_2 = a_3^2 + a_1^2$, $J_3 = a_1^2 + a_2^2$.

Полученная система (12) совпадает с уравнением Эйлера для движения гироскопа (см.[7]). Общая теория таких гидродинамических конечномерных моделей основывается на теоретико-групповых соображениях (см.[7]). Уравнение Эйлера (12) имеет два квадратичных интеграла движения:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2), \\ K^2 &= (J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где E – кинетическая энергия жидкости, K^2 – квадрат кинетического момента.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предварительные эксперименты были проведены на системе «Jazz Novo Standard» в Институте физиологии им. И.П. Павлова. Испытуемым было предложено: 1) смотреть в одну точку, 2) читать текст, 3) рассматривать картину. Если соответствующие затраты энергии обозначить E_1, E_2, E_3 , то оказалось, что

$$E_3 \geq E_2 > E_1.$$

То есть рассматривание картин вызывает наибольшие затраты энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. Русск. физ.-хим. общ., 1885. Т.17. Отд.1. № 6. С. 81–113; № 7. С. 145–199; № 8. С. 231–280.
2. *Обухов А. М.* Об интегральных характеристиках в системах гидродинамического типа // ДАН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 309–312.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц В. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
4. *Ламб Н.* Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947. 929 с.
5. *Моисеев Н. Н.* Избранные труды. Т.1. Гидродинамика и механика. Оптимизация исследования и теория управления. М.: Тайдекс, 2003. 375 с.
6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961. 203 с.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НА РОЛИКАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

М. Л. БОЯРСКАЯ

Рассматривается цилиндрическая оболочка, подкрепленная расположенными по окружности абсолютно жесткими цилиндрическими роликами. В предположении шарнирного закрепления краев получены уравнения для нахождения частот колебаний невращающейся оболочки. Приводятся численные значения частот при наличии трех роликов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривалась задача о колебаниях круговой цилиндрической оболочки с нерастяжимым меридианом, подкрепленной абсолютно жесткими цилиндрическими роликами. Длина оболочки предполагалась бесконечной. Были получены формулы для определения частот и форм колебаний оболочки в случае произвольного числа роликов.

Модель бесконечной оболочки дает близкие к реальным значения частот колебаний для достаточно длинных оболочек. В данной работе рассматривается подкрепленная роликами цилиндрическая оболочка конечной длины. На краях оболочки предполагаются заданными граничные условия шарнирного закрепления.

Формы колебаний представляются в виде рядов Фурье по окружной координате. На движение оболочки накладываются связи, обусловленные наличием подкрепляющих роликов. Уравнения частот получены из уравнений Лагранжа второго рода с множителями.

Цилиндрическая оболочка, подкрепленная роликами, является

Доклад на семинаре 29 марта 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №10-01-00244.

© Боярская М. Л., 2012

моделью оболочки центробежного концентратора, используемого для обогащения руд (см. [2]). В данной работе приводятся результаты для оболочки с тремя и шестью роликами, так как именно такое их количество имеется в центробежных концентраторах.

2. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Уравнения колебаний цилиндрической оболочки конечной длины (см. [3]) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} Q_2 &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \cdot T_2 &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi}, \quad Q_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S = B \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{12}, \\ M_1 &= D(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2), \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1), \\ M_{12} &= D(1-\nu) \varkappa_{12}, \quad B = \frac{EH}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

x – координата вдоль образующей, φ – угол в окружном направлении, t – время, ρ – плотность материала, T_1 , T_2 , S , Q_1 , Q_2 – усилия, M_1 , M_2 , M_{12} – моменты, u , v , w – проекции перемещений, ε_1 , ε_2 , ε_{12} , \varkappa_1 , \varkappa_2 , \varkappa_{12} – деформации, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, H и R – толщина и радиус оболочки.

Геометрические соотношения связывают деформации с проекциями перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varkappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \varkappa_{12} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ БЕЗ РОЛИКОВ

Предположим, что меридиан оболочки нерастяжим, а на ее краях заданы граничные условия шарнирного опирания. Тогда $\varepsilon_2 = 0$,

$$T_1 = v = w = M_1 = 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = L,$$

где L – длина оболочки. Решение краевой задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, t) &= u_0 \cos m\varphi \cos(\pi nx/L) \sin \Omega t, \\ v(x, \varphi, t) &= v_0 \sin m\varphi \sin(\pi nx/L) \sin \Omega t, \\ w(x, \varphi, t) &= w_0 \cos m\varphi \sin(\pi nx/L) \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (4)$$

где n – число волн вдоль образующей, m – число волн по параллели, Ω – частота колебаний.

Подставляя выражения (4) в дифференциальные уравнения (1)–(3) с учетом равенства $\varepsilon_2 = 0$, получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_0, v_0 :

$$L_{11}u_0 + L_{12}v_0 = 0, \quad L_{21}u_0 + L_{22}v_0 = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{\alpha^2}{(1-\nu)\mu^4} + \omega^2(1+\nu) - \frac{m^2}{2\mu^4}, \quad L_{12} = \frac{\alpha}{2\mu^4 m(1+\nu)}, \\ L_{21} &= \frac{\alpha m}{2\mu^4}, \quad L_{22} = -\frac{\alpha^2}{2\mu^4 m^2(1+\nu)} - 1 - \frac{2\alpha^2(1-\nu)}{m^2} + \frac{\omega^2}{m^2} + \\ &\quad + 2\alpha^2(2-\nu) + 2m^2 - \alpha^4 - m^4 - 2m^2\alpha^2 + \omega^2, \end{aligned}$$

$\mu^4 = h^2/12$, $h = H/R$, $\alpha = \pi n/l$, $l = L/R$, ω – безразмерная частота, которая связана с размерной частотой Ω по формуле

$$\omega = \frac{\Omega R}{\mu^2} \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}.$$

Условие существования нетривиальных решений системы (5) имеет вид

$$L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} = 0. \quad (6)$$

Значение $\alpha = 0$ соответствует оболочке бесконечной длины.

Для оболочки с параметрами $h = 1/15$, $\nu = 0.3$, $l = 2.5$ при $n = 1$ уравнение (6) имеет корни:

$$\omega_1 = 11.6, \quad \omega_2 = 119, \quad \text{при } m = 3,$$

$$\omega_1 = 36.1, \quad \omega_2 = 205, \quad \text{при } m = 6.$$

В табл. 1 содержатся результаты расчетов безразмерной первой частоты колебаний ω_1 для оболочек различной безразмерной длины и толщины.

Табл. 1 Первая частота колебаний оболочки ω_1 для $m = 3$ и $m = 6$

l	ω			
	$h = 1/15$		$h = 1/50$	
	$m = 3$	$m = 6$	$m = 3$	$m = 6$
2.5	11.6	36.1	26.1	36.8
5.0	8.20	34.9	10.6	34.9
10	7.69	34.6	7.89	34.6
∞	7.59	34.5	7.59	34.5

В последней строке табл. 1 для сравнения приведена безразмерная первая частота колебаний бесконечной оболочки.

4. ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ С РОЛИКАМИ

Рассмотрим шарнирно опертую оболочку с нерастяжимым меридианом, подкрепленную N роликами по образующим $\varphi = \varphi_j$. Решение

$$\begin{aligned}
 u &= R \sum_{k=1}^N (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \cos(\pi n x/L), \\
 v &= -R \sum_{k=1}^N \left(\frac{a_k}{k} \sin k\varphi - \frac{b_k}{k} \cos k\varphi \right) \sin(\pi n x/L), \\
 w &= R \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \sin(\pi n x/L)
 \end{aligned} \tag{7}$$

удовлетворяет граничным условиям и равенству $\varepsilon_2 = 0$. Безразмерные коэффициенты A_k, B_k, a_k, b_k зависят от времени t .

Запишем кинетическую и потенциальную энергии оболочки:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho H}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\varphi dx, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L (T_1 \varepsilon_1 + S \varepsilon_{12} + M_1 \varkappa_1 + M_2 \varkappa_2 + 2H \varkappa_{12}) R d\varphi dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Выразим в формуле для Π величины $T_1, S, \varepsilon_1, \varepsilon_{12}, M_1, M_2, H, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ через проекции перемещений u, v, w при помощи уравнений состояния (2) и геометрических соотношений (3). Поставив после этого в T и Π выражения для перемещений (7), получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi \rho H L R^3}{4} \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{1}{k^2} + 1 \right) (\dot{a}_k^2 + \dot{b}_k^2) + (\dot{A}_k^2 + \dot{B}_k^2) \right], \\ \Pi &= \frac{\pi E H L R \mu^4}{4} (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5), \end{aligned} \quad (9)$$

где точка означает производную по времени,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\alpha^2}{(1 - \nu^2) \mu^4} \sum_{k=1}^N (A_k^2 + B_k^2), \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2(1 + \nu) \mu^4} \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{\alpha a_k}{k} + k A_k \right)^2 + \left(\frac{\alpha b_k}{k} + k B_k \right)^2 \right], \\ \Pi_3 &= \frac{\alpha^2}{1 - \nu^2} \sum_{k=1}^N [(\alpha^2 - \nu + \nu k^2)(a_k^2 + b_k^2)], \\ \Pi_4 &= \frac{1}{1 - \nu^2} \sum_{k=1}^N [(a_k^2 + b_k^2)(k^2 - 1)(k^2 - 1 + \alpha^2 \nu)], \\ \Pi_5 &= \frac{2\alpha^2}{1 + \nu} \sum_{k=1}^N \left(k - \frac{1}{k} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Для описания колебаний оболочки используем уравнения

Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} &= \sum_{j=1}^N \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial a_k}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial b_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_k} &= \sum_{j=1}^N \Lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial b_k}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial A_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial A_k} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{B}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial B_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial B_k} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где Λ_j – множители Лагранжа, $k = 1, \dots, N$.

Уравнения связи получаем из условия равенства нулю прогиба w на подкрепленных роликах образующих цилиндра $\varphi = \varphi_j$:

$$f_j = \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi_j + b_k \sin k\varphi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (11)$$

где $\varphi_j = 2\pi j/N$ в случае равномерного расположения роликов.

Подставим в уравнения Лагранжа (10) выражения для кинетической и потенциальной энергий (9) и функций f_j (11). После перехода к безразмерным переменным по формулам

$$\tau = \Omega_0 t, \quad \lambda_j = \frac{\Lambda_j}{R^3 \rho h \pi \Omega_0^2}, \quad \Omega_0^2 = \frac{E \mu^4}{\rho R^2 (1 - \nu^2)}$$

получим уравнения малых колебаний в безразмерном виде

$$\begin{aligned} c_k \ddot{a}_k + e_k^2 a_k + f A_k &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \cos k\varphi_j, \\ c_k \ddot{b}_k + e_k^2 b_k + f B_k &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \sin k\varphi_j, \\ \ddot{A}_k + g_k A_k + f a_k &= 0, \quad \ddot{B}_k + g_k B_k + f b_k = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где двумя точками обозначена вторая производная по безразмер-

ному времени τ ,

$$c_k = \left(\frac{1}{k^2} + 1 \right), \quad e_k^2 = \frac{\alpha^2}{2\mu^4 k^2 (1 + \nu)} + \alpha^2 (\alpha^2 - \nu + \nu k^2) + \\ + (k^2 - 1)(k^2 - 1 + \alpha^2 \nu) + 2(1 - \nu)\alpha^2 \left(k - \frac{1}{k}\right)^2, \\ f = \frac{\alpha}{2\mu^4 (1 + \nu)}, \quad g_k = \frac{\alpha^2}{\mu^4 (1 - \nu^2)} + \frac{k^2}{2\mu^4 (1 + \nu)}, \\ k = 1, 2, \dots, N.$$

После подстановки $a_k = \hat{a}_k e^{i\omega\tau}$, $b_k = \hat{b}_k e^{i\omega\tau}$, $A_k = \hat{A}_k e^{i\omega\tau}$, $B_k = \hat{B}_k e^{i\omega\tau}$, $\lambda_j = \hat{L}_j e^{i\omega\tau}$ в уравнения колебаний и уравнения связей получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными \hat{a}_k , \hat{b}_k , \hat{A}_k , \hat{B}_k , \hat{L}_j :

$$\begin{aligned} (-c_k \omega^2 + e_k^2) \hat{a}_k + f \hat{A}_k &= \sum_{j=1}^N c_{jk} \hat{L}_j, \\ (-c_k \omega^2 + e_k^2) \hat{b}_k + f \hat{B}_k &= \sum_{j=1}^N s_{jk} \hat{L}_j, \\ \hat{A}_k (g_k - \omega^2) + f \hat{a}_k &= 0, \\ \hat{B}_k (g_k - \omega^2) + f \hat{b}_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N (c_{jk} \hat{a}_k + s_{jk} \hat{b}_k) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим случай равномерного расположения роликов. Тогда

$$c_{jk} = \cos \frac{2\pi jk}{N}, \quad s_{jk} = \sin \frac{2\pi jk}{N}.$$

Выражая в третьей и четвертой группах уравнений последней системы \hat{A}_k через \hat{a}_k и \hat{B}_k через \hat{b}_k по формулам

$$\hat{A}_k = -\frac{f}{g_k - \omega^2} \hat{a}_k, \quad \hat{B}_k = -\frac{f}{g_k - \omega^2} \hat{b}_k$$

и подставляя их в ее первую и вторую группы уравнений, получим

$$\hat{a}_k \left[e_k^2 - c_k \omega^2 - \frac{f^2}{g_k - \omega^2} \right] = \sum_{j=1}^N c_{jk} \hat{L}_j, \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{14}$$

$$\hat{b}_k \left[e_k^2 - c_k \omega^2 - \frac{f^2}{g_k - \omega^2} \right] = \sum_{j=1}^N s_{jk} \hat{L}_j, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Пусть число роликов $N = 2n_1 + 1$, где n_1 – натуральное число. Ввиду того, что

$$\begin{aligned} c_{jk} &= \cos \frac{2\pi jk}{N} = \cos \frac{2\pi j(N-k)}{N} = c_{j, N-k}, \\ s_{jk} &= \sin \frac{2\pi jk}{N} = -\sin \frac{2\pi j(N-k)}{n} = -s_{j, N-k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n_1, \quad c_{jN} = 1, s_{jN} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

уравнения связи (11) принимают вид

$$\sum_{k=1}^N \left(c_{jk} (\hat{a}_k + \hat{a}_p) + s_{jk} (\hat{b}_k + \hat{b}_p) \right) + \hat{a}_N = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где $p = N - k$. Системе (17) удовлетворяют значения

$$\hat{a}_k = -\hat{a}_p, \quad \hat{b}_k = \hat{b}_p, \quad \hat{a}_N = 0. \quad (18)$$

Для $N < 9$ других решений система (17) не имеет (см.[1]).

Из k -го уравнения системы (14) вычтем ее p -е уравнение, а k -е уравнение системы (15) сложим с ее p -м уравнением. Добавим к полученным $2n_1$ уравнениям N -е уравнение системы (15). Принимая во внимание равенства (16) и (18), получим следующую систему уравнений:

$$\hat{a}_k (\xi_k + \xi_p) = 0, \quad \hat{b}_k (\xi_k + \xi_p) = 0, \quad \hat{b}_n \xi_n = 0, \quad (19)$$

где

$$\xi_k = e_k^2 - c_k \omega^2 - \frac{f^2}{g_k - \omega^2}, \quad k = 1, \dots, n_1.$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем уравнения частот:

$$\begin{aligned} e_k^2 - c_k \omega^2 - \frac{f^2}{g_k - \omega^2} + e_p^2 - c_p \omega^2 - \frac{f^2}{g_p - \omega^2} &= 0, \\ k = 1, \dots, n_1, \quad e_N^2 - c_N \omega^2 - \frac{f^2}{g_N - \omega^2} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Последнее уравнение в системе (20) равносильно уравнению (6). Это связано с тем, что при $N = m$ оболочка с роликами и оболочка без роликов имеют одинаковую форму колебаний:

$$w = w_0 \sin m\varphi \sin(\pi n x/L).$$

В случае $\alpha = 0$, который соответствует бесконечной оболочке, уравнения (20) совпадают с уравнениями из работы [1].

В табл.2 приведены результаты расчетов безразмерной частоты, получаемой из первого уравнения (20) для оболочек различной безразмерной длины и толщины. Здесь $N = 3$, $\nu = 0.3$, $\alpha = \pi/l$.

Табл.2 Частота ω для трех роликов

l	ω	
	$h=1/15$	$h=1/50$
5	8.65	28.2
10	3.19	9.17
15	2.11	4.60
20	1.83	2.98
∞	1.66	1.66

Еще одна частота находится из последнего уравнения (20). Ее численные значения приведены в табл.1 при $m = 3$. От значений параметров h и l зависит, какая из частот является первой.

Результаты, приведенные в табл.1 и 2, показывают, что различие между частотами колебаний оболочек конечной и бесконечной длины увеличивается не только с уменьшением длины оболочки, но и с уменьшением ее толщины и числа волн по параллели.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм поиска частот колебаний подкрепленной роликами круговой цилиндрической оболочки конечной длины с нерастяжимым меридианом. Выведены общие формулы для нахождения частоты и приведены ее конкретные численные значения. Полученные в работе результаты позволяют оценить область применимости уравнений бесконечной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боярская М. Л., Филиппов С. Б.* Малые свободные колебания вращающейся на роликах бесконечной цилиндрической оболочки // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2011. Вып. 1, С. 31–37.
2. *Краснов А. А.* Динамика центробежного обогатительного конуса с принудительно деформируемой эластичной стенкой // Обогащение руд, 2001 N 3, С. 34–38.
3. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек - М.: Наука, 1979. 384 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УКЛАДКИ ПОДВОДНОГО ТРУБОПРОВОДА S-МЕТОДОМ

Т. В. ЗИНОВЬЕВА

Поставлена и численно решена контактная задача об изгибе трубопровода при его укладке на твердое дно. Трубопровод моделируется полубесконечной упругой балкой. Длина ее свободно провисающего участка неизвестна и определяется в результате расчета. Получено и использовано в расчетах новое выражение гидростатической нагрузки. Определены форма свободного участка, реакция морского дна, построены зависимости внутренних усилий и напряжений от угла закрепления трубопровода и расстояния до дна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Строительство и эксплуатация подводных трубопроводов сопряжены с риском причинения ущерба людям и окружающей среде, поскольку нарушение целостности трубопровода может привести к выбросу углеводородов и их дальнейшему воспламенению. Высокие стандарты безопасности определяют актуальность математического моделирования напряженно-деформированного состояния трубопровода.

Повреждение трубопровода может возникнуть уже в процессе его укладки с судна на дно. Традиционно на водных глубинах до 1 км используется так называемый S-метод установки трубопровода. Название метод получил по характерной форме, которую принимает трубопровод на пути с судна к морскому дну (рис.1).

Судно-трубоукладчик служит платформой для наращивания плети трубопровода, обычно к ее концу привариваются трубы длиной от 12 до 24 м, качество сварки проверяется, наносится защитный слой, судно продвигается вперед, опуская трубопровод в море.

Доклад на семинаре 12 апреля 2011 г.

© Т. В. Зиновьева, 2012

Он движется к корме судна по наклоненному скату, соприкасаясь в конце с изогнутой ферменной конструкцией — стингером [1]. Под

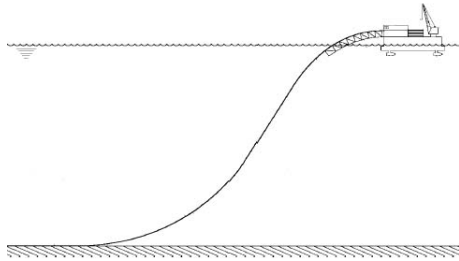


Рис. 1. Схема установки трубопровода S-методом.

действием веса трубопровод изгибается, и напряжения в нем могут превысить допустимые. Под каким углом следует подавать плеть трубопровода с кормы судна, чтобы снизить нагрузку на нее, зависит от глубины укладки и является предметом исследования.

Поскольку относительная толщина рассматриваемого участка трубопровода мала, в основу расчетов может быть положена теория стержней. Преобладающий в литературе упрощенный учет гидростатической нагрузки на стержень [2–4] в ряде случаев приводит к значительным погрешностям, точная формула остается малоизвестной [5, 6].

2. МОДЕЛЬ С УПРОЩЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Трубопровод моделируется полубесконечной балкой, жестко закрепленной на левом конце под заданным углом θ_* . Балка нагружена собственным весом и испытывает давление со стороны жидкости. Дно считается жестким и гладким. Расстояние h между закреплением и дном считается заданным (рис. 2). Длина свободно провисающего участка l неизвестна и должна быть найдена. За отсчетную конфигурацию принимается прямое ненапряженное состояние. Допустим сначала, что гидростатическая нагрузка постоянна.

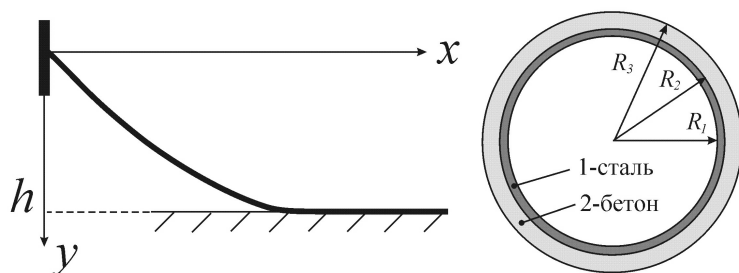


Рис. 2. Трубопровод и его сечение.

В классической модели поворот сечений балки $\theta(x)$ связан с прогибом $u(x)$, уравнения баланса и соотношения упругости приводят к уравнению четвертого порядка:

$$\underline{Q' + q = 0, \quad M' + Q = 0, \quad M = a\theta', \quad \theta = u' \Rightarrow a\partial^4 u = q,} \quad (1)$$

здесь a — жесткость балки на изгиб, $\partial \equiv (\dots)'$ — дифференцирование по x ; Q , M — перерезывающая сила и изгибающий момент, q — внешняя сила на единицу длины балки.

При $x < l$ имеем $q = w = const$ — погонный вес балки в жидкости, интегрируя соотношения (1) при граничных условиях $\theta(0) = \theta_*$, $u(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} Q &= -wx + Q_0, \quad M = \frac{w}{2}x^2 - Q_0x + M_0, \\ \theta &= a^{-1} \left(\frac{w}{6}x^3 - \frac{Q_0}{2}x^2 + M_0x \right) + \theta_*, \\ u &= a^{-1} \left(\frac{w}{24}x^4 - \frac{Q_0}{6}x^3 + \frac{M_0}{2}x^2 \right) + \theta_*x. \end{aligned} \quad (2)$$

На участке прилегания $x > l$ перемещение задано: $u \equiv h \Rightarrow q = 0$, значит, в начальной точке есть сосредоточенная сила:

$$q(x) = -R\delta(x-l) \quad \Rightarrow \quad Q \Big|_{l-0}^{l+0} = R = wl - Q_0. \quad (3)$$

В этой точке непрерывны функции u , θ , M :

$$\frac{w}{2}l^2 - Q_0l + M_0 = 0, \quad a^{-1} \left(\frac{w}{6}l^3 - \frac{Q_0}{2}l^2 + M_0l \right) + \theta_* = 0,$$

$$a^{-1} \left(\frac{w}{24}l^4 - \frac{Q_0}{6}l^3 + \frac{M_0}{2}l^2 \right) + \theta_*l = h.$$

Это система для определения силы Q_0 и момента M_0 в заделке, длины l и силы R :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{2}{3}wl - \frac{2}{l^2}a\theta_*, & M_0 &= \frac{1}{6}wl^2 - \frac{2}{l}a\theta_*, \\ h &= \frac{wl^4}{72a} + \frac{1}{3}l\theta_*, & R &= \frac{wl}{3} + \frac{2}{l^2}a\theta_*. \end{aligned} \quad (4)$$

На участке прилегания внешняя распределенная нагрузка

$$q(x) = w - P_{\text{cont}},$$

поэтому контактное давление может быть найдено по формуле

$$P_{\text{cont}} = w + R\delta(x - l). \quad (5)$$

Для оценки влияния поперечного сдвига рассмотрим модель балки Тимошенко. В системе (1) сохраняются три подчеркнутых уравнения, но четвертое заменяется следующим (см. [7]):

$$Q = b(u' - \theta), \quad (6)$$

где b — жесткость на сдвиг. Чтобы найти контактное давление на участке прилегания, выпишем уравнение для u :

$$a\partial^4 u = q - \Lambda^{-2}\partial^2 q; \quad \Lambda^2 \equiv b/a.$$

Отсюда, учитывая тождество $u(x) \equiv h$, получим функцию распределения суммарной внешней нагрузки

$$x > l : q = q_0 e^{-\Lambda\xi} \quad (\xi \equiv x - l) \quad (7)$$

вместо сосредоточенной силы (3). Распределение контактного давления на участке прилегания для балки Тимошенко

$$P_{\text{cont}} = w - q_0 e^{-\Lambda \xi} \quad (8)$$

ближе к реальному, по сравнению с распределением для классической балки (5).

Длина l и все константы интегрирования системы четырех уравнений с нагрузкой (см. 7) определяются из граничных условий.

Расчеты проводились для трубопровода с сечением из двух колец (см. рис. 2): внутреннего стального и внешнего бетонного, с радиусами $R_1 = 0.565$ м, $R_2 = 0.6$ м, $R_3 = 0.7$ м. Эти параметры соответствуют трубопроводу компании Nord Stream [8], который пройдет по дну Балтийского моря. Свойства стали: модуль упругости $E_1 = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0.28$; объемная плотность $\rho_1 = 7800$ кг/м³; свойства бетона — $E_2 = 27.5$ ГПа; $\nu_2 = 0.2$; $\rho_2 = 2450$ кг/м³. Плотность морской воды $\rho_h = 1028$ кг/м³.

При определении жесткостей составной балки считалось, что стальная и бетонная балки работают параллельно, поэтому их жесткости складываются:

$$a = a_1 + a_2, \quad a_n = E_n I_n, \quad I_n = \frac{\pi}{4} (R_{n+1}^4 - R_n^4),$$

$$b = b_1 + b_2, \quad b_n = \mu_n S_n K, \quad \mu_n = \frac{E_n}{2(1 + \nu_n)}, \quad n = 1, 2,$$

где I_n — осевые моменты инерции сечений, S_n — их площади, μ_n — модули сдвига материалов, $K = 0.5$ — коэффициент сдвига для тонкого кольца [7].

Численные расчеты показали, что податливость на сдвиг заметно влияет только на контактное давление. Для глубины $h = 50$ м и угла закрепления $\theta_* = 0^\circ$ длина свободно провисающего участка балки l в модели Кирхгофа оказалась равной 279.7 м, со сдвигом — 278.8 м; значения силы и момента в сечении отличаются на доли процента. Для определения контактного давления на участке прилегания вычислим вес балки в жидкости $w = 4.09$ кН и величины $R = 0.38$ МН, $q_0 = -0.39$ МН, $\Lambda = 1.04$ м⁻¹.

3. ГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

Особого внимания требует определение гидростатической нагрузки на стержень. Точную формулу можно легко получить, используя закон Архимеда для элемента стержня, полностью погруженного в жидкость.

Введем в рассмотрение дуговую координату s вдоль деформированной оси стержня. Запишем уравнение баланса сил для вырезанного куска стержня длиной ds (рис. 3), распределенная нагрузка вместе с силами на торцах равна силе Архимеда:

$$\underline{q}ds - \underline{Q}(s) + \underline{Q}(s + ds) = -\gamma F ds \underline{j}, \quad (9)$$

здесь F — площадь сечения, γ — вес жидкости на единицу объема. Силы со стороны жидкости на торцы найдем интегрированием

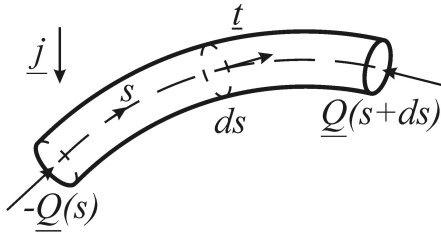


Рис. 3. Элемент стержня.

давления по площади поперечного сечения стержня:

$$-\underline{Q}(s) = -\underline{n}(s) \int_F p(y) dF = Fp[y(s)]\underline{t}(s),$$

$$\underline{Q}(s + ds) = -Fp[y(s + ds)]\underline{t}(s + ds)$$

откуда следует

$$\Rightarrow -\underline{Q}(s) + \underline{Q}(s + ds) = -(p\underline{t})' F ds, \quad (10)$$

где p — давление жидкости, \underline{n} — орт нормали к сечению, \underline{t} — орт касательной к оси стержня, $(\dots)'$ — дифференцирование по s .

Из формул (9), (10) получим выражение для гидростатической силы, действующей на единицу длины стержня:

$$\underline{q} = F \left[-\gamma \underline{j} + (\dot{p} \underline{t}) \right]. \quad (11)$$

Заметим, что в распространенной формуле (используемой в параграфе 2) отсутствует второе слагаемое, учитывающее перепад давления в жидкости и искривленность деформированной оси стержня. Формула (11) может быть получена более убедительно, как результат интегрирования давления по боковой поверхности трубы.

4. ТРУБОПРОВОД КАК КЛАССИЧЕСКАЯ БАЛКА В ЖИДКОСТИ

Рассмотрим задачу об изгибе классической балки в жидкости, учитывая гидростатическую нагрузку по формуле (11). Допустим, что перепад давления в жидкости обусловлен только ее весом:

$$p = p_0 + \gamma u,$$

p_0 — давление жидкости на уровне крепления $y = 0$.

Полагая перемещения балки малыми, приходим к выражению нагрузки на участке $x < l$:

$$q = w + F [p_0 u'' + \varphi(u, u', u'')], \quad \varphi \equiv \gamma (uu'' + u'^2/2). \quad (12)$$

Здесь $w \equiv (mg - F\gamma)$ — погонный вес балки в жидкости. Удержание малого слагаемого φ обязательно, иначе не учесть зависимость давления в жидкости от глубины.

На участке прилегания $x > l$ будут справедливы выводы параграфа 2:

$$u \equiv h, \quad \theta = 0, \quad Q = 0, \quad M = 0, \quad Q(l-0) = -R,$$

где R — пока неопределенная сосредоточенная сила.

Систему (1) с нагрузкой (12), граничными условиями в заделке и условиями непрерывности можно решать асимптотическим методом, вводя формальный малый параметр λ перед слагаемым φ

(см. [9]). Однако эффективнее оказывается использование метода конечных разностей.

После введения координаты $\xi \equiv l^{-1}x \in (0, 1)$ система ОДУ и граничных условий аппроксимируется разностными уравнениями с равномерным шагом $\delta = 1/N$; функции Q, M, θ, u непрерывного аргумента ξ заменяются сеточными функциями Q_i, M_i, θ_i, u_i , ($i = 0, \dots, N$). Численная схема позволяет вычислить приближенные значения функций в узлах. Сами функции затем восстанавливаются посредством интерполяции [10, 11].

Система ОДУ задачи представляется в виде

$$\frac{dY}{d\xi} = G(\xi, l, Y), \quad Y = (Q, M, \theta, u)^T.$$

Для аппроксимации этой системы используется неявная симметричная одношаговая разностная схема, имеющая второй порядок точности:

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\delta} = \frac{G_i + G_{i+1}}{2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (13)$$

Это система $4N$ разностных алгебраических уравнений. Общее количество неизвестных задачи складывается из значений 4 искомых функций в узлах $4(N+1)$ и дополнительной неизвестной l . Системе уравнений необходимо дополнить разностными аналогами пяти граничных условий:

$$u_0 = 0, \quad \theta_0 = \theta_*, \quad u_N = h, \quad \theta_N = 0, \quad M_N = 0.$$

Решение полученной системы алгебраических уравнений проводилось методом Ньютона, в качестве начального приближения использовано решение задачи с упрощенной гидронагрузкой. Изложенный алгоритм был реализован в пакете Mathematica.

Расчеты проводились при тех же значениях параметров, что и в параграфе 2, с использованием двух подходов к учету гидростатической нагрузки. На рис. 4 представлена деформированная форма трубопровода для значений $h = 50$ м, $\theta_* = 30^\circ$, $p_0 = 0.4$ МПа. Длина участка l при упрощенном учете равна 204.5 м, при точном — 232.7 м.

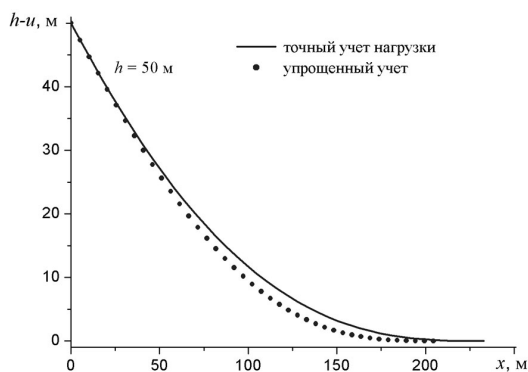


Рис. 4. Деформированная форма.

На рис. 5 представлены графики изгибающего момента для различных значений глубины h . Из графиков видно, что с ростом h расхождение между значениями, полученными по двум подходам, увеличивается.

После определения изгибающего момента M в составной балке необходимо оценить возникающие напряжения в стали и бетоне. Известна инженерная формула для расчета максимального по сечению осевого напряжения:

$$|\sigma_n^{\max}| = \frac{|M_n|}{I_n} R_{n+1}, \quad M_n = \frac{M a_n}{a}, \quad n = 1, 2. \quad (14)$$

Графики максимального напряжения, возникающего в сечениях стальной балки, при различных углах закрепления θ_* (для $h = 20$ м) представлены на рис. 6. Эти графики позволяют определить угол укладки трубопровода, при котором не превышаетя предел прочности стали: $[\sigma_1] = 400$ МПа. Для заданной глубины оптимальным углом будет $\theta_* = 10^\circ$.

Расчеты показали, что предел прочности бетона на растяжение $[\sigma_2] = 1.35$ МПа значительно превышаетя во всем рассмотренном диапазоне углов.

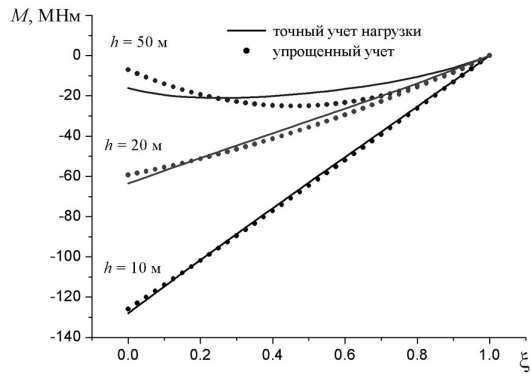


Рис. 5. Изгибающий момент в трубопроводе.

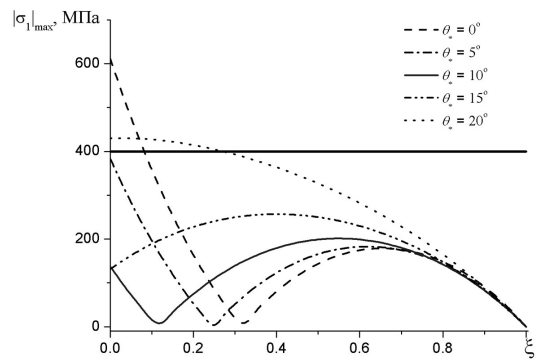


Рис. 6. Максимальные напряжения в стали.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработана математическая модель трубопровода как упругого стержня в процессе его укладки на морское дно S-методом. Получено и использовано в расчетах новое выражение гидростатической нагрузки. Показано, что упрощенный ее учет как силы Архимеда, деленной на длину стержня, приводит к значительным погрешностям. Сделан вывод о том, что для анализа контактного давления между трубопроводом и дном следует отдать предпочтение модели Тимошенко. Результаты работы могут быть использованы для определения оптимального угла наклона трубопровода.

Автор благодарен профессору В. В. Елисееву за советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kyriakides S., Corona E.* Mechanics of offshore pipelines. Vol. 1: Buckling and collapse. Slovenia, Elsevier, 2007. 400 p.
2. *Lenci S., Callegari M.* Simple analytical models for the J-lay problem. // Acta Mechanica. 2005. Vol. 178 P. 23–39.
3. *Raman-Nair W., Baddour R.E.* Three-dimensional dynamics of a flexible marine riser undergoing large elastic deformations. // Multibody System Dynamics. 2003. Vol. 10. P. 393–423.
4. *Svetlitsky V. A.* Dynamics of Rods. Springer, 2005. 448 p.
5. *Pedersen P. T.* Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying. // Int. Shipbuilding Progress. 1975. Vol. 22. P. 399–408.
6. *Stump D. M., Van Der Heijden G. H. M.* Matched asymptotic expansions for bent and twisted rods: applications for cable and pipeline laying. // Journal of Engineering Mathematics. 2000. V. 38. P. 13–31.
7. *Елисеев В. В.* Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
8. Nord Stream: факты. Выпуск 3. 2007. URL: <http://www.nord-stream.com/ru/informatsiya/biblioteka>.
9. *Зиновьева Т. В.* Анализ напряженно-деформированного состояния трубопровода при укладке на морское дно // Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело". 2011. №1. С. 220–236. URL: http://www.ogbus.ru/authors/Zinovieva/Zinovieva_1.pdf
10. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Г.* Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 624 с.
11. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.

В. А. Кочерыжкин, Б. А. Ершов

В работе рассматривается модифицированный метод сглаженных частиц WCSPH (англ. weakly-compressible smoothed particle hydrodynamics) для решения нестационарных задач гидродинамики. “Несжимаемость” моделируется при помощи выбора подходящего уравнения состояния и тем самым замыкается система уравнений движения жидкости. Представлены результаты численного моделирования и их сравнение с известными решениями. Расчеты произведены с использованием технологии многопоточных вычислений Nvidia CUDA.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод сглаженных частиц далее SPH является одним из бессеточных интерполяционных методов, использующих переменные Лагранжа. Он позволяет проводить расчеты течений с большими деформациями границы и потерей связности расчетной области, так как определение связей является частью метода. Это позволяет рассматривать более широкий класс задач по отношению, например, к методам конечных элементов, не допускающих топологических изменений сетки. Впервые метод был применен для решения задач астрофизики [1, 2]. Впоследствии стал использоваться для решения уравнений механики сплошной среды. Так в работе [3] рассматривается течение несжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. В работе [4] рассматривается течение со свободной поверхностью. В работе [5] представлено несколько моделей, решенных с использованием метода сглаженных частиц. Целью данной работы является исследование модифицированного

Доклад на семинаре 26 апреля 2011 г.

© В. А. Кочерыжкин, Б. А. Ершов, 2012

метода сглаженных частиц для моделирования течений слабосжимаемой вязкой жидкости при наличии свободной границы.

2. МЕТОД СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Наиболее подробно метод описан в работах [6, 7]. Ниже кратко представлены основные положения метода.

В основе SPH интерполяции лежит следующее выражение:

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) A(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1)$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция Дирака, \mathbf{r} — радиус вектор, $A(\mathbf{r})$ — макрохарактеристика.

Далее дельта функция аппроксимируется так называемой сглаживающей функцией или функцией ядра W :

$$\langle A(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, h) d\mathbf{r}', \quad (2)$$

где $\langle \cdot \rangle$ оператор усреднения, h — радиус сглаживания.

Затем интеграл аппроксимируется на ансамбле частиц:

$$A(\mathbf{r}) \approx \sum_j V_j A_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h), \quad (3)$$

или

$$A(\mathbf{r}) \approx \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h), \quad (4)$$

где j пробегает по всем соседним частицам, m_j — масса частицы j , \mathbf{r}_j — положение частицы j , V_j — объем частицы j , ρ_j — плотность частицы j и A_j — соответствующая физическая величина, определенная в частице \mathbf{r}_j .

Таким образом, SPH работает путем деления жидкости на конечное число дискретных элементов (частиц), каждая из которых является носителем массы, количества движения и других физических величин. Поле физических величин в каждой точке пространства определяется путем интерполяции соответствующих значений,

определенных на соседних частицах. Определение количества соседних частиц не детерминировано и зависит от выбранной длины сглаживания h .

Для построения функции W постулируются определенные свойства, которым она должна удовлетворять в зависимости от рассматриваемой задачи. Как правило, такими свойствами являются: четность, нормализованность, компактность, гладкость. Так, имея четную функцию ядра, мы говорим об интерполяции второго порядка точности.

Масса и плотность в уравнении (4) являются следствием того, что каждая частица имеет свой объем $V_i = m_i/\rho_i$. В данной работе масса каждой частицы m_i постоянна и одинакова для всех частиц, плотность же ρ_i допускает отклонения в определенных постановкой задачи границах и ее необходимо вычислять на каждом временном шаге. Используя уравнение (4) получим, к примеру, выражение для плотности в точке \mathbf{r} :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) = \sum_j m_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (5)$$

Для решения уравнений гидродинамики также необходимо знать производные соответствующих величин. В большинстве случаев градиент A может быть представлен в виде:

$$\nabla A(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (6)$$

В тоже время лапласиан A имеет вид:

$$\Delta A(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \Delta W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (7)$$

Необходимо отметить, что приближения, построенные по определению, такие как (6, 7), не всегда гарантируют сохранение интегралов движения и поэтому требуют модификации и приведения к более строгому виду.

В качестве примера ниже приведена функция ядра [6]:

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h) = \alpha_d \begin{cases} (1 + 3R)(1 - R)^3 & , R \leq 1 \\ 0 & , R > 1, \end{cases}$$

где $R = \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}{h}$, $\alpha_d = \frac{5}{4h}$, $\frac{5}{\pi h^2}$, $\frac{105}{16\pi h^3}$ соответственно для размерности пространства $d = 1, 2, 3$.

Заметим, что плотность и другие физические характеристики тоже имеют размерность зависящую от размерности пространства.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ SPH АППРОКСИМАЦИЙ.

В изотермическом случае движение вязкой ньютоновской жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнением Навье-Стокса. В данной работе система замыкается уравнением состояния:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0; \quad (8)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v}; \quad (9)$$

$$P = B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (10)$$

где ρ_0 — начальная плотность, \mathbf{v} — вектор скорости, μ — коэффициент динамической вязкости, $B = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}$ — модуль объемного сжатия, γ — показатель адиабаты, c_0 — начальная скорость звука.

3.1. Уравнение неразрывности

По определению SPH плотность континуума может быть записана так, как это сделано в (5). Однако, при рассмотрении течений со свободной границей или течений в ограниченной области, граничные частицы будут иметь меньше соседних частиц, а значит содержать ошибки интерполяции (меньшую плотность). Чтобы устранить такие артефакты, Монаган [4] предложил использовать уравнение неразрывности для вычисления плотности:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \nabla_i W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h), \quad (11)$$

где $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$.

При вычислении плотности по формуле (11) значительно упрощается процесс инициализации модели. Так, достаточно просто задать одно и тоже начальное значение плотности в каждой частице.

3.2. Давление

Следуя определению (4) выражение для градиента давления имеет вид:

$$-\nabla p(\mathbf{r}_i) = - \sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (12)$$

В данном представлении сила, действующая на частицу j со стороны частицы i , вообще говоря, не будет равна силе, действующей на частицу i со стороны j . Поэтому, для того, чтобы гарантировать сохранение импульса и момента импульса, следует привести выражение (12) к симметричному виду:

$$-\nabla p(\mathbf{r}_i) = - \sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (13)$$

3.3. Вязкость

Аналогично следуя определению (4), выражение для вязкого члена в уравнение Навье-Стокса имеет вид:

$$\mu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) = \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j}{\rho_j} \Delta W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (14)$$

Так как сила вязкости зависит только от относительных скоростей частиц, а не от их абсолютных значений, существует естественный способ приведения выражения к симметричному виду:

$$\mu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) = \mu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \Delta W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (15)$$

3.4. Интегрирование системы уравнений

Вместе с начальными и граничными условиями задача сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для каждой частицы:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i; \quad (16)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{\nabla P_i}{\rho_i} + \mathbf{g} + \frac{\mu\Delta\mathbf{v}_i}{\rho_i}. \quad (17)$$

Последнее уравнение вытекает из уравнения движения (9).

Шаг по времени определяется условием Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\Delta t = C_{CFL} \frac{h}{c + |\mathbf{v}|}, \quad (18)$$

где h — радиус сглаживания, c — скорость звука, \mathbf{v} — характерная скорость частицы, $C_{CFL} \in (0, 1)$

4. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ.

4.1. Течение Пуазёйля

Рассматривается ламинарное течение между двумя бесконечно длинными пластинами, расположенными на расстоянии $y = 0$ и $y = L$. Первоначально жидкость находится в покое. Количество расчетных частиц 16×64 (16 вдоль потока). Радиус сглаживания $h = 6r$. Таким образом, у каждой частицы оказывается в среднем по 25 соседних частиц. Показатель адиабаты в уравнении состояния (10) $\gamma = 1$. На горизонтальных границах заданы условия прилипания с помощью трех слоев виртуальных частиц Морриса [3]. Движение жидкости происходит за счет разности давлений, заданных на противоположных границах. Предполагается, что при малых числах Рейнольдса отклонение градиента давления по отношению к гидростатическому градиенту давления мало [3]. Таким образом, общее давление представляется в виде:

$$P_t = P_d + P_h, \quad (19)$$

где P_t — общее давление, P_d — динамическая составляющая давления, P_h — гидростатическая составляющая давления.

Тогда градиент давления имеет вид:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla P_t = -\frac{1}{\rho}\nabla P_d + \mathbf{F}, \quad (20)$$

где $\mathbf{F} = -\frac{P_{out}-P_{in}}{\rho L}$ — массовые силы.

В работе [3] приведен известный профиль скорости в аналитическом виде для течения Пуазёйля:

$$v_x(y, t) = \frac{F}{2\nu}y(y-L) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4FL^2}{\nu\pi^3(2n+1)^3} \sin\left(\frac{\pi y}{L}(2n+1)\right) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2\nu}{L^2}t\right).$$

Сравнение аналитического решения и расчетов, полученных методом сглаженных частиц, продемонстрировано на рис.

$$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}, L = 10^{-3} m, \rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}, F = 10^{-4} \frac{m}{s^2}.$$

Максимальная скорость течения $v = 1.25 \cdot 10^{-5}$ м/с, что соответствует числу Рейнольдса $Re = \frac{vL}{\nu} = 1.25 \cdot 10^{-2}$. Максимальное отклонение численного решения от аналитического не превышает 0.8%, что соответствует работам [3] (0.7%) и [5] (0.8%). Расчеты доступны по ссылке, указанной в Приложении .

4.2. Обрушение столба жидкости

Рассматривается задача об обрушении столба жидкости. В начальный момент $t = 0$ столб вязкой жидкости начинает обрушаться под действием силы тяжести. Для расчета используются следующие параметры: $\mu = 10^{-3}$ кг/(м · с) — коэффициент динамической вязкости, $\rho = 1000$ кг/м³ — плотность жидкости, $\Delta t = 10^{-4}$ с — постоянный шаг по времени. Радиус сглаживания $h = 6r$. Для моделирования жесткой границы используются виртуальные частицы первого типа [6]. На рис. 3 на вклейке приведены картины течений

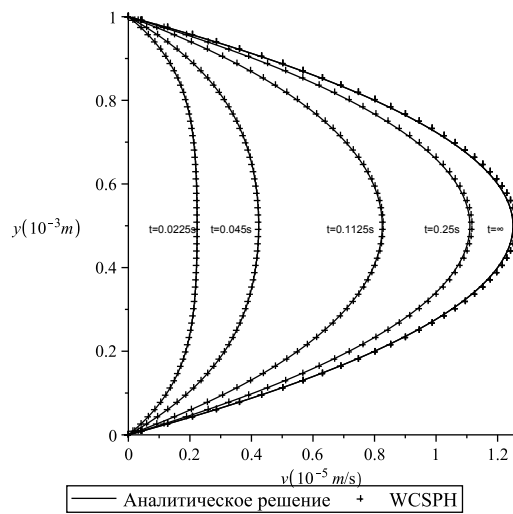


Рис. 1. Сравнение расчетов профиля скорости, полученных методом WSPH и аналитически для течения Пуазейля.

в различные моменты времени для двухмерного случая. Используемое количество частиц — 1024. Наблюдается хорошее качественное совпадение результатов с расчетами, полученными в работе [5]. Однако при большей разрешающей способности с количеством частиц 16384 можно наблюдать качественно новые картины течения (рис. 4 на вклейке). На последних двух кадрах отчетливо видно образование полости, что также соответствует картинам, полученным в работе [9].

Следует отметить, что благодаря технологии многопоточных вычислений Nvidia CUDA время расчета удается сократить многократно. Так, время вычислений в задаче об обрушении столба жидкости с шагом по времени 10^{-4} и количеством частиц 16384 составляет 2.5 минуты на 2 секунды реального времени, в то время, как модель в работе [9] из 5000 частиц и таким же шагом по времени рассчитывалась 71 минуту.

Для сравнения с экспериментальными данными [8] используется конфигурация из 128×256 частиц. Правая перегородка отсутствует. Высота столба жидкости $H = 2W$. На рис. приведены сравнения с данными эксперимента переднего фронта волны и высоты столба жидкости. Листинг доступен по адресу <http://cmag.googlecode.com>

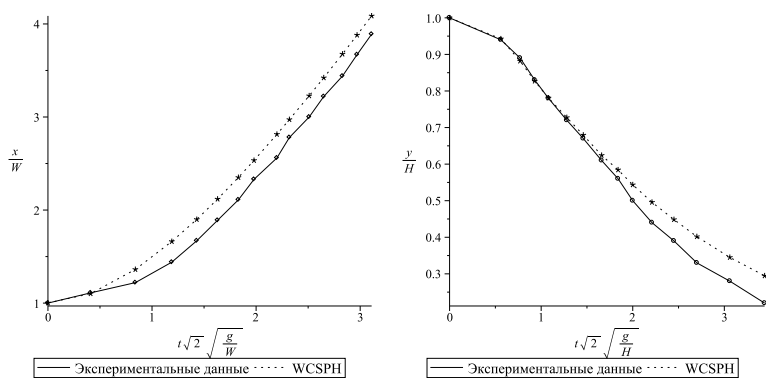


Рис. 2. Сравнение с экспериментальными данными. Слева — передний фронт волны, справа — высота столба жидкости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы возможности модифицированного метода сглаженных частиц WCSPH для слабосжимаемой жидкости. Проведено сравнение расчетов, полученных методом WCSPH, и аналитического решения для течения Пуазёйля. Рассмотрена двухмерная модель течения вязкой жидкости со свободной границей и приведены сравнения расчетов с данными эксперимента. В дальнейшем будет исследована возможность применения метода для решения задач гидроупругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucy L. B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis *Astron. J.* 1977. Vol. 82. P. 1013–1024.
2. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1977. Vol. 181. P. 375–389.
3. *Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.* Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH *J. of Comp. Phys.* 1997 Vol. 136. P. 214–226.
4. *Monaghan J. J.* Simulating free surface flows with SPH *J. of Comp. Phys.* 1994. Vol. 110. N 2. P. 399–406.
5. *Афанасьев К. Е., Ильясов А. Е., Макаручук Р. С., Попов А. Ю.* Численное моделирование течений жидкости со свободными границами методами SPH и MPS *Вычисл. технологии.* 2006. Т. 11. Спецвыпуск: Избранные доклады семинара по численным методам и информационным технологиям Кемеровского государственного университета. С. 26–44.
6. *Liu G. R., Liu M. B.* Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method. World Scientific, 2003.
7. *Li S., Liu W. K.* Meshfree Particle Methods. Berlin: Springer Verlag, 2004.
8. *Martin J. C., Moyce W. J.* And experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* 1952. Ser. A, Vol. 244. P. 312–324.
9. *Hughes J. P., Graham D. I.* Comparison of incompressible and weakly-compressible SPH models for free-surface water flows. *J. Hydr. Res.* 2010. Vol. 48(Extra Issue). P. 105–117.

ДОКЛАДЫ, НЕ ВОШЕДШИЕ В СБОРНИК

РАССЕЯНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ В ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

Доклад на семинаре 5 октября 2010 г.

М.Г. Жучкова, Д.П. Коузов

РЕЗЮМЕ

Исследуются периодические волновые процессы в тонкой упругой пластине, плавающей на поверхности несжимаемой жидкости. Пластина целиком покрывает свободную поверхность жидкости и совершает изгибные колебания, сопутствующие гравитационным волнам. Режим свободных колебаний пластины нарушен вдоль некоторой прямой или набора параллельных прямых. Изучаются прохождения и отражения изгибно-гравитационной волны, набегающей под прямым углом на сосредоточенные препятствия в пластине. Находятся точные аналитические выражения для изгибного поля в пластине и волнового поля в жидкости, коэффициенты прохождения и отражения набегающей волны. Получены аналитические представления полей в двух предельных случаях мелкой и бесконечно глубокой воды. Сначала рассматривается общая схема исследования при наличии произвольных сосредоточенных препятствий в пластине. Затем, в качестве иллюстрации общей схемы решения, используются три типа препятствий: жесткий задел, скользящий задел и бесконечно тонкая трещина. По полученным явным выражениям численно рассчитываются коэффициенты прохождения и отражения, прогиб пластины, внутренние усилия в каждом закреплении пластины. Выясняются условия применимости приближений мелкой и бесконечно глубокой воды.

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КОНТУРА ТЕКУЧЕСТИ
АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Доклад на семинаре 19 октября 2010 г.

И.В. Ефимов

РЕЗЮМЕ

Доклад посвящен актуальным вопросам обработки экспериментальных исследований. Цель — построение контуров текучести различных конструктивных материалов, имеющих сложную реологию. Задача сводится к нахождению минимума целевой функции коэффициентов контура и является классической задачей регрессионного анализа. Рассматриваются три метода построения контура текучести по экспериментальным данным: ручной подбор, метод покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска. На их основе предложена методика, позволяющая с наименьшей погрешностью достичь результата. Разработана программа, реализующая данную методику.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАВНЫХ ПОДЗЕМНЫХ КОНТУРОВ ОСНОВАНИЯ
ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ
С УЧАСТКАМИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ОБТЕКАНИЯ**

Доклад на семинаре 15 февраля 2011 г.

Л.А. АЛЕКСАНДРОВА

РЕЗЮМЕ

Рассматривается моделирование плавных подземных контуров заглубленной прямоугольной плотины, углы которой округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации, в случае, когда водопроницаемое основание подстилается криволинейным водопором, в состав которого входит горизонтальный участок. Водопор характеризуется постоянством скорости обтекания. Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния основных физических параметров модели на форму и размеры подземного контура плотины, а также водопора.

ХРОНИКА

ТРЕТЬЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ В ДИНАМИКЕ КОНСТРУКЦИЙ И СЕЙСМОИНЖЕНЕРИИ

25–28 мая 2011 г. на о. Корфу (Греция) состоялась Третья Международная конференция по вычислительным методам в динамике конструкций и сейсмоинженерии (COMPDYN2011), которая является одной из тематических конференций Европейского общества по вычислительным методам в прикладных науках (ECCOMAS) и специализированной конференцией Международной ассоциации по вычислительной механике (IASM). Конференция была также поддержана Европейским комитетом по вычислительной механике конструкций и твердых тел (ECCSM). Первая подобная конференция прошла в 2007 г. на о. Крите, а вторая — в 2009 г. на о. Родосе. Основным организатором конференции выступает национальный технический университет Афин, а председателем оргкомитета — проф. М. Пападракакис.

В этом году в рамках конференции прошел мини-симпозиум “Механика мягких оболочек в биологии и медицине”, посвященный 75-летию проф. П.Е. Товстика — заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, лауреату государственной премии РФ, заслуженному деятелю науки РФ. Организаторами мини-симпозиума выступили сотрудники кафедры теоретической и прикладной механики (А.Л. Смирнов) и гидроупругости (С.М. Бауэр) СПбГУ и департамента механики Королевского технического университета Стокгольма (А. Эрикссон).

Изучение конструкций из мягких оболочек и других тонкостенных конструкций весьма важно в настоящее время, особенно в биомеханике и медицине, например, при моделировании органов зрения и слуха, кровеносной системы и т.д., а также при исследованиях на клеточном уровне.

В работе конференции и минисимпозиума приняла участие

большая группа российских ученых во главе с академиком РАН Н.Ф. Морозовым и директором Института проблем машиноведения чл.-корр. АН РАН Д.А. Индейцевым. В составе группы были активные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”: профессора П.Е. Товстик, С.М. Бауэр, С.Б. Филиппов, доцент А.Л. Смирнов, канд. физ.-мат. наук Е.Б. Воронкова, асп. А.М. Ермаков (см. рис. 5–6 на вклейке). Основной доклад мини-симпозиума “Неклассические модели в теории оболочек с приложениями к многослойным нанотрубкам” был прочитан проф. С.М. Бауэр в соавторстве с акад. Н.Ф. Морозовым, асп. А.М. Ермаковым и С.В. Каштановой. Всего в минисимпозиум, в подготовке и проведении которого участвовали ученые России, Белоруссии, Швеции, Италии, Германии, Израиля и США, было включено 8 докладов. Статьи, написанные на основе докладов, вошли в сборник, изданный к конференции.

Следующую, четвертую, конференцию COMPDYN планируется провести в 2013 г.

С.М. Бауэр, Е.Б. Воронкова, А.Л. Смирнов

24-й СЕМИНАР СЕВЕРНЫХ СТРАН ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

03–04 ноября 2011 г. в Хельсинки (Финляндия) прошел 24-й семинар Северных стран по вычислительной механике. Организатором семинара являлась Северная ассоциация вычислительной механики (NoACM, <http://www.noasm.org/>), представляющая интересы международной ассоциации (IASM). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гетеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители из стран Северной Европы: Дании, Финляндии, Исландии, Норвегии, Швеции и Прибалтики (Эстония, Латвия и Литва). В 2011 г. в семинаре приняли участие представители российской научной школы, постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”:

С.М. Бауэр, Л.А. Карамшина, А.В. Лебедев. и А.Л. Смирнов (СПб-ГУ). Организаторами семинара со стороны Финляндии в 2011 году были профессора Рейо Коухиа и Йоуни Фройнд из Университета Аалто (Aalto University).

Семинар был посвящен вопросам, связанным с вычислительными методами их приложениям к широкому классу задач механики. В дополнение к обычным пленарным лекциям NSCM были представлены доклады специально приглашенных участников, посвященные одному из основателей семинара профессору университета Аалто Мартти Миккола, отмечавшему свое 75-летие. Тематические секции были посвящены изометрическому анализу, механике системы многих тел, многомасштабному моделированию в механике твердого тела. Каждая секция состояла либо из основной лекции продолжительностью 30 минут и четырех докладов по 15 минут либо из шести презентаций по 20 мин. (см. рис. 7–8 на вклейке). Статьи, написанные на основе докладов, были включены в сборник трудов семинара.

Научный уровень докладов был очень высоким, атмосфера на семинаре — творческой и дружественной, чему способствовали комфортные условия для общения, равноправие участников, отсутствие барьеров для обмена мнениями, обсуждение актуальных задач и перспективы партнерства по итогам конференции.

Следующий, 25-й семинар планируется провести в Лунде — городе на юге Швеции, в провинции Сконе 25–26 октября 2012 г.

С.М. Бауэр, Л.А. Карамшина, А.В. Лебедев, А.Л. Смирнов

ОБ АВТОРАХ

Александрова Людмила Александровна — аспирантка второго года обучения кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского Государственного Университета Гражданской Авиации. Область научных интересов — математическое моделирование задач аэродинамики, разработка прикладных программ. Научный руководитель — проф. Э.Н. Береславский. E-mail: mymila@mail.ru

Боярская Мария Леонидовна — студентка магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — проф. С.Б. Филиппов. E-mail: marusya1904@mail.ru

Викторов Иван Викторович — окончил кафедру теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета в 2002 г. Автор десяти опубликованных работ. В 2011 г. защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук. Научный руководитель — проф. П.Е. Товстик. E-mail: viktorov.i@inbox.ru

Гаврилов Дмитрий Николаевич — аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — проф. С.А. Зегжда. E-mail: dimonicman@mail.ru

Ермаков Андрей Михайлович — ассистент кафедры математики Санкт-Петербургского Морского технического университета. Окончил СПбГМТУ в 2007 г. (инженер-математик), магистратуру Санкт-Петербургского государственного университета (“Механика, Прикладная математика”) в 2009 г. и аспирантуру СПбГУ, защитив в 2011 г. диссертацию на степень кандидата физико-математических наук. Автор 13 опубликованных работ. Область научных интересов — неклассические теории оболочек. Научный

руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: khopesh_ra@mail.ru

Ершов Борис Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой гидроупругости Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — гидроупругость. E-mail: bae_1925@mail.ru

Ефимов Иван Владимирович — выпускник кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. В настоящее время — аспирант СПбГУ. Сфера научных интересов — изучение прочностных свойств материалов со сложной реологией и построение моделей деформирования таких материалов. Научный руководитель — доц. Г. В. Павилайнен.

Жучкова Марина Геннадьевна — старший преподаватель кафедры прикладной математики и математического моделирования Санкт-Петербургского Морского технического университета. Окончила СПбГМТУ в 2000 г., аспирантуру — в 2003 г. Автор 6 научных трудов. Область научных интересов — “Уравнения математической физики”. Научный руководитель — проф. Д. П. Коузов.

Зиновьева Татьяна Владимировна — кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерных технологий в машиностроении Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Автор 17 научных и учебно-методических работ. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. E-mail: tatiana.zinovieva@gmail.com

Карамшина Людмила Александровна — выпускница кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (2008 г.). В настоящее время — аспирантка кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ. Автор трех опубликованных работ. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: l_karamshina@mail.ru

Кочерыжкин Владимир Алексеевич — окончил магистратуру Санкт-Петербургского государственного университета (“Механика, Прикладная математика”) в 2008 г. В настоящее время — аспирант кафедры гидроупругости СПбГУ. Автор трех опубликованных работ. Научный руководитель — проф. Б. А. Ершов. E-mail: vladimir@kocheryzhkin.com

Коузов Даниил Петрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и математического моделирования Санкт-Петербургского Морского технического университета, ведущий научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН. Соросовский профессор. Основная область научных занятий — математическая акустика. Разработал теорию гранично-контактных задач акустики (ГКЗА). Занимался изучением структурных полей в изолированных упругих конструкциях, фрикционных колебаний упругих тел и ряда других проблем математической акустики. Автор свыше 130 научных и методических печатных работ. Руководит регулярным Санкт-Петербургским семинаром по вычислительной и теоретической акустике Научного Совета по акустике РАН.

Лахман Кирилл Олегович — студент 5-го курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ. Автор одной публикации. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр. E-mail: lakhman.kirill@gmail.com

Лихачева (Захаренкова) Наталья Владимировна — выпускница кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета гражданской авиации (2010 г.). В настоящее время — аспирантка данного университета по специальности: "Механика жидкости, газа и плазмы". Автор 6 работ по проблемам фильтрационных течений из каналов. Научный руководитель — проф. Э. Н. Береславский. E-mail: nataly_gate@mail.ru

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ В 2010–2011 гг.**

Лебедев Александр Владимирович — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2010. Научный руководитель — доц. А. Л. Смирнов.

Юшин Роман Юрьевич — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2011. Научный руководитель — доц. Г. В. Павилайнен.

Викторов Иван Викторович — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2011. Научный руководитель — проф. П. Е. Товстик.

Ермаков Андрей Михайлович — канд. физ.-мат. наук (СПбГУ), 2011. Научный руководитель — проф. С. М. Бауэр.

Сайкова Мария Сергеевна — канд. технических наук (ОАО «НПО ЦКТИ»), 2011. Научный руководитель — проф. Ю. К. Петреня.

SUMMARIES

Boyarskaya M.L. **Frequencies and modes of a cylindrical shell rotating on rollers.**

This work continues the investigation initiated in [1] of the problem of vibrations of a cylindrical shell with inextensible meridian supported by absolutely rigid cylindrical rollers arranged around the circumference. In [1] the shell length was assumed to be infinite. The formulas for determining the shell frequencies and mode shapes for an arbitrary number of rollers were found and the concrete values of the frequencies at fixed parameters are given. In the present paper the problem of vibrations of a supported shell of finite length with hinged edges is solved. The equations of vibrations of cylindrical shells are taken from [3].

First, vibrations of the shell without rollers are considered. In this case the problem of searching for the vibration frequencies is reduced to solving a biquadratic equation for the frequency. The numerical values of the frequency in the presence of three and six rollers are given. The vibration frequency of infinite shell calculated with the same parameter values is also given for comparison.

Next, a finite shell supported by absolutely rigid rollers is considered. The solution is represented as a Fourier series of the circumferential coordinate whose time-dependent coefficients are chosen as generalized coordinates. This form of solution is used in compiling the potential and kinetic energies of the system and then, thereby, in deriving Lagrange equations. The constraint equations caused by the presence of rollers are added to these equations. In the case of a uniform arrangement of rollers the biquadratic equation of vibration frequency are obtained. It turns out that some of the modes of vibrations of a shell with rollers coincide with the modes of vibrations of a shell without rollers. The results of calculations of frequency for shells of various length and thickness in the presence of three rollers and also the infinite shell frequencies corresponding to the same parameter values are given. It was found that the difference

between the vibration frequencies of shells of finite and infinite length becomes more significant when reducing the length of the shell and also when decreasing its thickness or the number of waves in the circumferential direction.

REFERENCES

1. *Boyaruskaya M. L., Filippov S. B.* Small free vibrations of an infinite cylindrical shell rotating on rollers. Vestnik St. Petersburg University, Ser. 1, 2011, No. 1, pp. 31–37. (in Russian).
2. *Krasnov A. A.* The dynamics of a centrifugal enrichment cone with forcibly deformed elastic wall. Obogashchenie rud, 2001, No. 3, pp. 34–38. (in Russian).
3. *Goldenweiser A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E.* Free vibrations of thin elastic shells. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).

***Ermakov A.M.* Evaluation of the mechanical parameters of multilayered nanotubes by means of nonclassical theories of anisotropic shells.**

The investigation of the mechanical behavior of multilayered nanotubes is an actual and important problem. In particular, the definition of nanotube stiffness has been studied by means of scanning probe microscopy. The stiffness is defined as the ratio of the value of the local load (applied to a tube) to the value of the displacement. The nanotubes made of natural chrysotile asbestos with different filling materials are analyzed. Experiments show that the stiffness of a tube depends on the filling materials. Tubes filled with water are softer than tubes without filling materials and tubes filled with mercury are more rigid than tubes without filling materials. It was previously shown that the classical theory of beam bending could not explain the experimental results, but the experimental results well agree with the Timoshenko–Reissner theory (at least qualitatively) when the interlaminar shear modulus of elasticity changes for different filling materials. When additional factors such as lamination of structure and cylindrical anisotropy are taken into account the theory of Rodionova–Titaev–Chernykh (RTC) permits to obtain much more reliable results. In this work the authors also applied one more nonclassical shell theory, namely the shell theory of Paliy–Spiro (PS) developed for medium-thickness shells and considered radial pressure. The comparison of

nonclassical shell theories (RTC and PS) with experimental data and finite elements method calculations are presented in the report. An estimation of the ratio h/R on the convergence of the obtained results is done. By increasing the relative thickness of the shell, the deflection values obtained by the shell theory are closer to the values obtained by the finite element method.

REFERENCES

1. *Miller R. E., Shenoy V. B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 2000, No.11, pp. 139-147.
2. *Krivtsov A. M., Morozov N. F.* Anomalies in mechanical characteristics of nanometer-size objects. *Doklady Physics*, 2001, Vol. 46, No. 11, pp. 825-827.
3. *Ankudinov A. V., Bauer S. M., Kashtanova S. V., Morozov N. F., Nyapshaev I. A.* Study of mechanical stiffness of a solitary asbestos nanotub. *Bulletin of Higher Educational Institutions. The North Caucasus Region. Series Natural Sciences* 7-9 (2009).
4. *Kashtanova S. V.* Analysis of mechanical properties of asbestos nanotubes, *The Transactions of the Seminar "Computer Methods in Mechanics of Continuum 2008*, St. Petersburg University Press, pp. 81-86. (in Russian).
5. *Ankudinov A. V., Bauer S. M., Ermakov A. M., Kashtanova S. V., Morozov N. F.* On mechanical properties of asbestos nanotubes. *XIV International Conference Modern Problems of the Mechanics of Solid Media*. Azov, Russia, 2010. *Conference Proceedings*, Vol. 1, pp. 35-38.
6. *Donnell L. H.* *Beams, Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, 1976.
7. *Rodionova V. A., Titaev B. F., Chernykh K. F.* *Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells*. St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 1996.
8. *Paliy O. M., Spiro V. E.* *Anisotropic shells in shipbuilding. Theory and analysis*. Sudostroenie, Leningrad, 1977, p. 20-32.
9. *Bauer S. M., Ermakov A. M., Kashtanova S. M., Morozov N. F.* Nonclassical models in the shell theory with applications to multilayered nanotubes. *COMPADYN 2011*, 3rd ECCOMAS, CD-MS06, N 105, 10p
10. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Nonclassical shell theories for the analysis of transversally isotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure, *Vestnik St. Petersburg University, Ser. 1, No. 3*, pp. 85-92. (in Russian),

***Ershov B. A., Kocheryzhkin V. A.* Weakly compressible smoothed particle hydrodynamics method for viscous fluid flow.**

Weakly compressible form of the Smoothed Particle Hydrodynamics method (SPH) for fluid flow based on the Tait equation is presented. The basic smooth-particle approach is to represent all continuum properties (the density, the velocity, the stress tensor etc.) as

interpolated sums of particle properties, where the particles are described by “weight functions”, expressing the range of influence of the particles in space. WCSPH suggests user-defined small density fluctuation (Tait equation) to overcome solving the time consuming Poisson equation. Two problems are considered: plane Poiseuille flow and classical dam break.

A Poiseuille flow between parallel infinite plates was simulated to check the accuracy of the SPH. Infinite plates were modeled using periodic boundary conditions. Solid walls were modeled using virtual particles. Simulation shows a close agreement with the analytic series solution for plane Poiseuille flow at low Reynolds numbers.

The original bursting dam 2D problem and impact against a vertical wall was modeled. The proposed problem involves free surface flow. Method adaptation for free boundary condition were investigated and discussed. Qualitatively new fluid flow patterns were obtained. The results are compared with experimental data.

Basic principles and restrictions of the method are described. Test examples illustrate both the capabilities of the technique and the relative ease with which the method can be applied to model complex non-stationary hydrodynamic problems. The entire SPH models are implemented using the Compute Unified Device Architecture (Nvidia CUDA), resulting in tremendous speed up in CPU time. The technique is appropriate for medium-scale and small-scale simulation.

REFERENCES

1. *Lucy L.B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astron. J.*, 1977, Vol. 82, pp. 1013–1024.
2. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1977, Vol. 181, pp. 375–389.
3. *Morris J.P., Fox P.J., Zhu Y.* Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *J. of Comp. Phys.*, 1997, Vol. 136, pp. 214–226.
4. *Monaghan J.J.* Simulating free surface flows with SPH, *J. of Comp. Phys.*, 1994, Vol. 110, No. 2, pp. 399–406.
5. *Afanasyev K.E., Iliasov A.E., Makarchuk R.S., Popov A.Y.* Numerical simulation of free boundary flows using SPH and MPS, *Computational Technologies*, 2006, Vol. 11, Special issue, pp. 26-44,
6. *Liu G.R., Liu M.B.* Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. World Scientific, 2003.

7. *Li S., Liu W.K.* Meshfree Particle Methods. Berlin: Springer Verlag, 2004.

8. *Martin J.C., Moyce W.J.* Experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1952, Ser. A, Vol. 244, pp. 312–324.

9. *Hughes J.P., Graham D.I.* Comparison of incompressible and weakly-compressible SPH models for free-surface water flows, J. Hydr. Res., 2010, Vol. 48 (Extra Issue), pp. 105–117.

***Gavrilov D.N.* On the generalized Gauss principle in the problem of the console vibration damping.**

The homogeneous constant cross-section cantilever in equilibrium state is considered. The task is to find the control law, which allows to move the cantilever base through a given distance in a given time and the oscillations of the cantilever should be absent. It is supposed that the movement is in a straight line and friction is absent. This means that the oscillation arises because of inertia force. There is an infinite number of control laws, which allows to solve this problem. The choice of the best control law here is the generalized Gauss principle. Some advantages of this choice have been discussed and some comparisons are made.

By using generalized Lagrangian coordinates and dimensionless variables it is possible to get a system of equations which has an explicit solution, but contains constants, which can be found from the boundary conditions. In a major number of tasks it is enough to suppress the first n frequencies. In this case the control law will be the solution of an algebraic system of $2n + 2$ equations. If n becomes large the construction of the solution might be difficult. To decrease the number of equations it is proposed to use the symmetry property of the task. The symmetry property means that there is no difference if we move the cantilever forward or backward, because the control law will be the same. As a result, the number of equations in the system can be decreased to $n + 1$.

The obtained results are compared with the minimization of the full energy of the cantilever oscillation, which was suggested in article [2]. Instead, putting conditions for the absence of oscillations in a given time, it is proposed to put milder conditions, that is, the condition of minimum oscillation energy in a given time. That allows suppressing a

spectrum of natural frequencies. Because for time larger than the first natural period of vibration the first frequencies have a significant value, the results are almost identical. It proves that for the major tasks the number of suppressed first frequencies n should not be large.

REFERENCES

1. *Babakov I.M.* Theory of Vibrations. Foreign Technology Div. Wright-Patterson AFB Ohio. 1964. p.762.
2. *Kostin G.V., Saurin V.V.* The optimization of the motion of an elastic rod by the method of integro-differential relations. J. Computer and Systems Sciences International. 2006, Vol. 45, No. 2, pp. 217-225.
3. *Zegzhda S.A., Soltakhanov Sh.Kh.* Application of the generalized Gaussian principle to the problem of damping vibrations of mechanical systems. J. Computer and Systems Sciences International, 2010, Vol. 49, No. 2, pp. 186-191.
4. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M.P., Zegzhda S.A.* Mechanics of Non-holonomic Systems: A New Class of Control Systems. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. p. 329.
5. *Soltakhanov Sh. Kh.* Suppression of cantilever oscillations. Vestnik St. Petersburg University, Ser. 1, 2009, No. 4, pp. 105–112. (in Russian).

***Karamshina L.A.* Models of sandwich shells in ophthalmology. On the deformation of a three-layer isotropic spherical shell.**

The problem of the stress-strain state of isotropic three-layer spherical shell composed of layers of different thickness with different elastic properties under the influence of the intraocular pressure is considered. For each of the layers the Lamé problem is solved — the stress-strain state of a spherical layer within the three-dimensional theory of elasticity in spherical coordinates is governed. The conditions of rigid contact of the layers are assumed. Analysis of the stress-strain state of the eye is carried out taking into account the possibility of the choroid to change its biomechanical properties. Tangential stresses on the contact surfaces have discontinuities. The magnitude of discontinuities is determined. The distribution of displacements and stresses through-the-thickness for given values of the elastic constants and pressure are presented in graphs. The change of the thickness of each layer for different values of Young's modulus is determined. The results obtained for three-layered shell are compared with results obtained for a homogeneous cornea with average values of the elastic properties of its constituent layers for the same values of intraocular

pressure. The obtained results can be used to simulate the deformation of the eye, whose mechanical properties are determined by the properties of the scleral, vascular and retinal eye shells. In particular, it is possible to evaluate the influence of the elastic characteristics of the scleral, vascular and retinal shells on the possibility of discontinuities, and as a consequence, detachments of vascular and retinal shells under increased intraocular pressure.

REFERENCES

1. *Iomdina E. N.* Mechanical properties of tissues of the human eye, Modern problems of biomechanics. V.11. Moscow: Moscow University Press, 2006, pp. 183–200. (in Russian).
2. *Poloz M. V., Iomdina E. N.* Active deformations of human eyes, Biomechanics, 2010, X All-Russian Conference abstracts. Saratov: Press of Saratov University, 2010, pp. 137–139. (in Russian).
3. *Saulgozis J. J.* Features of the deformation of the sclera // Mechanics of composite materials, 1981, No. 3. pp. 505–514.
4. *Lurje A. I.* Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity. Interscience Publishers, New York/London/Sydney, 1964, 493 p.

***Lakhman K. O.* Hydrodynamic model of the intraeye liquid motion caused by motion of the eyeball.**

Nowadays there is a lot of surgeries on human eyes all over the world. It is not well known what is preferable for the human eye: to have a rest after the surgery or to apply some kind of tension on the eyes immediately (reading, walking, etc).

In this article, an eyeball shell is considered. The shell rotates under the influence of rotation moments. Three pairs of muscles attached to the eye generate rotation moments. The rotation center of eyeball is fixed.

Assuming that the intraocular liquid is ideal, incompressible and homogeneous, the classical problem of vortex motion of such liquid is considered. Accordingly, the equation which describes the vortex motion of an ideal incompressible homogeneous liquid is found. The homogeneous vortex motion of a liquid as a particular case is considered. As a result, the obtained system of equations coincides with the Euler equations for gyroscope motion. The Euler equations have two quadratic integrals of motion: the kinetic energy and the

kinetic moment. The dependence of the angular velocity of the eye motion on time was experimentally found working in collaboration with the Pavlov Institute of Physiology of the Russian Academy of Science. The experimental data was obtained by the Polish system Jazz Novo Standard. Based on this data, the energy consumption of the human eye in different types of actions such as reading a text, looking at a picture, looking at a fixed point was calculated. According to calculations, the most energy-intensive process is viewing a picture and the least energy-intensive process is looking at a fixed point. The obtained results can be used in ophthalmologic practice.

REFERENCES

1. *Zhukovsky N.E.* On the motion of a rigid body with cavities filled with homogenous fluid, Zh. Russian Phys.-Chem. Soc., 1885, Vol.17, Sect.1. No. 6. pp. 81–113; No. 7. pp. 145–199; No. 8. pp. 231–280.
2. *Obukhov A.M.* On integral characteristics in hydrodynamic type systems, Sov. Phys. Dokl., 1969, Vol. 14, pp. 32–35.
3. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Vol 6 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann, 1986. 733 p.
4. *Lamb H.* Hydrodynamics. Dover Publications, New York, 1945. 374 p.
5. *Moiseev N.N.* Selected works. Vol. 1. Hydrodynamics and mechanics. Optimization, operation research and control theory. Moscow, Taideks, 2003. 375 p. (in Russian).
6. *Ladyzhenskaya O.A.* The mathematical theory of viscous incompressible flow. Fizmatgiz, 1961. Ed.: Gordon and Breach, New York, 1963. 203 p.
7. *Arnold V.I.* Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, 1989. 472 p

***I. V. Lihachova (Zaharenkova)* Modeling of filtration currents from channels in the presence of transpiration from a free surface**

Flat erected filtration in a ground from sprinklers through a soil stratum with underlying permeable pressure aquifer is considered. In this hydrodynamic statement, the ground is homogeneous and isotropic and a capillarity of the ground and transpiration from the free surface are considered. The mixed multiparameter boundary-value problem of the theory of analytic functions is stated. It is solved by applying a method of P.J. Polubarinova-Kochina and methods of a conformal mapping of areas of a special view, which meet in

underground hydromechanics. On the basis of this model, the algorithm for calculating a capillary diffuence of water and the filtrational flux rate is developed. Situations when at a filtration of water from sprinklers the ground capillarity is considered, transpiration from the free surface of subsoil waters, and also skids from waters of underlaying well pervious layer are viewed. The hydrodynamic analysis of the structure and the prominent features of the modelled process, and also the influence of all physical properties of the system on filtrational performances is carried out. The analysis is done by means of the gained exact analytical dependences and numerical calculations. Limiting and special cases are considered. They are related to the lack of one or two of the three factors characterising the modelled process: a ground capillarity, transpiration from the free surface, and also skids from waters underlaying permeable stratum. At last, computed results are compared at identical filtrational performances with similar plans at a filtration from channels.

REFERENCES

1. *Bereslavskii E. N. Zakharenkova N. V.* Influence of the ground capillarity and of evaporation from the free groundwater surface on filtration from canals. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2010, Vol. 83, No. 3, pp. 496-504.
2. *Polubarinova-Kochina, P. Y.* *Theory of Ground Water Movement*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962, 613 p.
3. *Kochina P. Ja. (Polubarinova-Kochina P. Ja.)* Hydrodynamics and the filtration theory. The selected transactions. Moscow, Nauka, 1991, 352 p. (in Russian).
4. *Golubev V. V.* Lectures on the analytical theory of linear differential equations. Moscow, Leningrad, PhysMatLit, 1950, 436 p. (in Russian).
5. *Bereslavskii E. N.* Fuchs-class differential equations related to conformal mapping of circular polygons in polar grids. *Differential Equations*, 1997, Vol. 33, No.3, pp. 292-297.
6. *Bereslavskii E. N.* Closed-form integration of some Fuchsian-class differential equations found in hydro- and aeromechanics. *Doklady Mathematics*, 2009, Vol. 80, No.2, pp. 706-709.
7. *Bereslavskii E. N.* On closed-form integration of some Fuchsian differential equations related to a conformal mapping of circular pentagons with a cut. *Differential equation*, 2010, Vol. 46, No. 4, pp.463-469.
8. *Bereslavskii E. N. Kochina P. Ya.* Differential Equations of the Fuchs Class Encountered in Some Problems of Mechanics of Liquids and Gases. *Fluid Dynamics*, 1998, Vol. 32, No. 5, pp. 619-625.

Viktorov I.V. Stability of a cylindrical shell reinforced by fibers.

A thin isotropic cylindrical shell reinforced by A system of fibers, inclined at an angle θ to the generatrix is considered. It is assumed that the fibers are equidistributed around the shell circumference and located symmetrically about the middle surface. Such reinforcement leads to a spiral anisotropy.

The method of local stability is used (see [3]), according to which the buckling is defined as a doubly periodical function, and boundary conditions are ignored. This method is applicable to the present problem of stability of cylindrical shells of medium length under axial compression and to the stability problem of sufficiently long cylindrical shells under external pressure and torsion. It is assumed that fixing the edges of the shell does not allow buckling modes localized near the edge due to its weak support.

For the stability problem of a cylindrical shell with spiral anisotropy under axial compression, an explicit approximate formula of the critical load and buckling modes is obtained where the critical load does not depend on the angle of inclination of the fibers θ to the generatrix. Separately, three special cases of the location of the reinforcing fibers are considered: filaments located on the middle surface, reinforcing filaments uniform in thickness, threads located on the front surfaces of the shell. For a shell with fibers only on the medial surface of the increase of the critical load, in comparison with the isotropic shell, does not occur in this case since the reinforcement only affects the buckling mode.

For problems of torsion and uniform external pressure of shells with spiral anisotropy, explicit approximate expressions of the critical load and buckling modes are found. The results obtained are compared with those for an orthotropic shell, i.e. basically isotropic shell symmetrical reinforced with two systems of fibers.

REFERENCES

1. *Grigolyuk E.I., Kabanov V.V.* Stability of shells. Moscow, Nauka, 1978, 360p. (in Russian)
2. *Novozhilov V.V.* Theory of Thin Elastic Shells, 2nd edn, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

3. *Tovstik P. E.* Local buckling of plates and shallow shells on an elastic foundation, *Mech. Solids*, 2005, Vol. 40, No. 1, pp. 120-131.

4. *Tovstik P. E.* Buckling of Thin Shells. Asymptotic Methods. Moscow, Nauka, 1995. 320p. (in Russian)

5. *Tovstik P. E., Viktorov I. V.* Local buckling of structurally orthotropic shells in Problems of Mechanics of Deformable Rigid Bodies and Rocks, Collected Papers Dedicated to the 75th Birthday of E. I. Shemyakin (Fizmatlit, Moscow, 2006), pp. 800-808. (in Russian)

6. *Haseganu M. E., Smirnov A. L., Tovstik P. E.* Buckling of thin anisotropic shells. *Trans. CSME*, 2000, Vol. 24, No. 1B, pp. 169-178.

7. *Smirnov A. L., Tovstik P. E.* Asymptotic Methods in the Buckling Theory of Elastic Shells. World Scientific, Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 2002. 347p.

***Zimovieva T. V.* Modeling of offshore pipeline laying by means of the S-method.**

The construction of sea gas pipelines is presently carried out with high intensity. The safety of people, environment, and equipment is one of the primary goals of the pipeline construction and maintenance. Damage to the integrity of a pipeline can lead to gas leakage and its further ignition. High safety standards pose high engineering requirements to the design, which stipulates the relevance of researches on the stress-strain analysis of a sea pipeline. Damage of a pipeline can occur already in the process of its laying down on the sea bottom from a vessel.

Contact analysis of a pipeline bending in laying it on a rigid seabed is carried out. The pipeline is modeled by a semi-infinite elastic beam. The length of its sagging part is not known and is defined as a result of calculations. A formula for hydrostatic loading of a rod is derived in the paper; it is shown that, in some cases, simplified accounting of the loading by reduction of the rod's weight for the weight of the liquid superseded leads to significant errors.

An analysis of the pipeline stress-strain state is considered. Analytical expressions are derived and numerical results are obtained by finite difference methods. The form of the sagging part is defined and internal moments and stresses are shown to depend on the angle of the pipeline fixing and the distance from the seabed. The seabed reaction is found for two rod models: the classical and the Timoshenko ones. The paper shows that it is preferable to use the Timoshenko model for

the analysis of the contact pressure between the pipeline and the sea bottom.

REFERENCES

1. *Kyriakides S., Corona E.* Mechanics of offshore pipelines. Vol. 1: Buckling and collapse. Slovenia: Elsevier, 2007. 400 p.
2. *Lenci S., Callegari M.* Simple analytical models for the J-lay problem, *Acta Mechanica*, 2005, Vol. 178, pp. 23–39.
3. *Raman-Nair W., Baddour R. E.* Three-dimensional dynamics of a flexible marine riser undergoing large elastic deformations, *Multibody System Dynamics*, 2003, Vol. 10, pp. 393–423.
4. *Svetlitsky V. A.* Dynamics of Rods. Springer, 2005. 448 p.
5. *Pedersen P. T.* Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying, *Int. Shipbuilding Progress*, 1975, Vol. 22, pp. 399–408.
6. *Stump D. M., Van Der Heijden G. H. M.* Matched asymptotic expansions for bent and twisted rods: applications for cable and pipeline laying, *J. Engineering Mathematics*, 2000, Vol. 38, pp. 13–31.
7. *Yeliseyev V. V.* Mechanics of elastic bodies, SPb.: SPbSPU, 2003, 336 p.(in Russian).
8. Nord Stream: Facts. Issue 3. 2007. URL: <http://www.nord-stream.com/press-info/library>
9. *Zinovieva T. V.* Analysis of pipeline stress-strain state in seabed laying, *The electronic scientific journal "Oil and Gas Business* 2011, No. 1, pp. 237–253. URL: http://www.ogbus.ru/eng/authors/Zinovieva/Zinovieva_1e.pdf
10. *Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. G.* Numerical Methods, Moscow: The BKL Publishers, 2000. 624 p.(in Russian).
11. *Samarskiy A. A., Gulin A. V.* Numerical Methods, Moscow, Nauka, 1989. 432 p.(in Russian).

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Гаврилов Д.Н.</i> Применение обобщенного принципа Гаусса к задаче гашения колебаний консоли	3
<i>Карамзина Л.А.</i> О деформации трехслойной изотропной сферической оболочки	15
1. Введение	15
2. Постановка задачи	17
3. Результаты расчетов.....	21
4. Заключение	26
<i>Лихачева(Захаренкова) Н.В.</i> Моделирование фильтрационных течений из каналов при наличии испарения со свободной поверхности	27
1. Введение	27
2. Постановка задачи	28
3. Построение решений	30
4. Анализ численных результатов	60
5. Устойчивость длинных цилиндрических оболочек при кручении и при внешнем давлении.....	60
6. Заключение	66
<i>Ермаков А.М.</i> Исследование механических параметров многослойных нанотрубок с использованием неклассических теорий	36
1. Введение	36
2. Постановка задачи	38
3. Соотношения теории оболочек.....	42
4. Численный метод	45
5. Заключение	48
<i>Викторов И.В.</i> Устойчивость цилиндрической оболочки, армированной волокнами	52
1. Введение	52
2. Соотношения упругости в тонкой оболочке, армированной волокнами.....	53
3. Локальная устойчивость безмоментного напряженного состояния	56

4. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии.....	59
5. Устойчивость длинных цилиндрических оболочек при кручении и при внешнем давлении.....	61
6. Заключение.....	63
<i>Лазман К.О. Гидродинамическая модель движения внутриглазной жидкости, возникающего при движении глазного яблока.....</i>	<i>65</i>
1. Введение.....	65
2. Постановка задачи и её решение.....	67
3. Заключение.....	70
<i>Боярская М.Л. Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки.....</i>	<i>71</i>
1. Введение.....	71
2. Уравнения колебаний.....	72
3. Частоты колебаний оболочки без роликов.....	73
4. Частоты колебаний оболочки с роликами.....	74
<i>Зиновьева Т.В. Моделирование укладки подводного трубопровода S-методом.....</i>	<i>81</i>
1. Введение.....	81
2. Модель с упрощенной нагрузкой.....	82
3. Гидростатическая нагрузка.....	86
4. Трубопровод как классическая балка в жидкости.....	87
5. Заключение.....	91
<i>Кочерыжкин В.А., Ершов Б.А. Моделирование течений слабосжимаемой вязкой жидкости методом сглаженных частиц.....</i>	<i>92</i>
1. Введение.....	92
2. Метод сглаженных частиц.....	92
3. Основные уравнения и их SPH аппроксимаций.....	95
3.1. Уравнение неразрывности.....	95
3.2. Давление.....	96
3.3. Вязкость.....	96
3.4. Интегрирование системы уравнений.....	97
4. Модельные задачи.....	97
4.1. Течение Пуазейля.....	97
4.2. Обрушение столба жидкости.....	98

5. Заключение	100
Доклады, не вошедшие в сборник	102
Хроника	105
Об авторах	108
Summaries	112

РЕФЕРАТЫ

УДК 532.546

Боярская М. Л. **Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 71–80.

Рассматривается цилиндрическая оболочка, подкреплённая расположенными по окружности абсолютно жесткими цилиндрическими роликами. В предположении шарнирного закрепления краев получены уравнения для нахождения частот колебаний невращающейся оболочки. Приводятся численные значения частот при наличии трех роликов.

Библиогр. 3 назв. Табл. 2.

УДК 539.3

Викторов И. В. **Устойчивость цилиндрической оболочки, армированной волокнами.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 52–65.

Рассматриваются три задачи устойчивости тонкой цилиндрической оболочки, армированной одной системой малорастяжимых нитей: при осевом сжатии, при внешнем давлении и при кручении. При этом ограничиваемся задачами, к которым применим метод локальной потери устойчивости. Обсуждаются особенности, которые вносит винтовая анизотропия по сравнению с оболочкой из изотропного материала.

Библиогр. 7 назв. Ил. 3.

УДК 534.11

Гаврилов Д. Н. **Применение обобщенного принципа Гаусса к задаче гашения колебаний консоли.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 3–14.

Рассматривается возможность применения обобщенного принципа Гаусса для исследования задач управления колебаниями механических систем на примере гашения колебаний консоли. Наряду

с классической постановкой исследуется возможность минимизации полной энергии колебаний консоли, как условие прекращения ее колебаний. Предлагаются способы упрощения решения за счет использования свойств симметрии системы.

Библиогр. 5 назв. Ил. 2. Табл. 2.

УДК 539.3

Ермаков А.М. Исследование механических параметров многослойных нанотрубок с использованием неклассических теорий // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 36–51.

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние многослойных анизотропных цилиндрических оболочек, находящихся под действием локальной области давления. Такая задача может моделировать прогиб асбестовых нанотрубок, находящихся под воздействием исследовательского зонда. В более ранних работах показано, что применение классических теорий балок, для моделировании эксперимента, дает результат плохо согласующийся с экспериментальными данными. Учет же дополнительных факторов, таких как изменение модуля сдвига в поперечном направлении (по теории Тимошенко–Рейсснера), слоистость структуры асбеста и цилиндрической анизотропии (теория Родиновой–Титаева–Черныха) приводит к более точным результатам. В данной работе автор для решения задачи применяют еще одну теорию оболочек — теорию Палия–Спиро, разработанную для оболочек средней толщины. Так же проводится сравнение с результатами, полученными для трехмерной теории при использовании пакета ANSYS 11.

Библиогр. 10 назв. Ил. 5. Табл. 3.

УДК 532.546

Зиновьева Т.В. Применение обобщенного принципа Гаусса к задаче гашения колебаний консоли. // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 81–91.

Поставлена и численно решена контактная задача об изгибе трубопровода при его укладке на твердое дно. Трубопровод моделируется полубесконечной упругой балкой. Длина ее свободно прови-

сающего участка неизвестна и определяется в результате расчета. Получено и использовано в расчетах новое выражение гидростатической нагрузки. Определена форма свободного участка, реакция морского дна, построены зависимости внутренних усилий и напряжений от угла закрепления трубопровода и расстояния до дна.

Библиогр. 11 назв. Ил. 6.

УДК 539.3

Карамичина Л. А. О деформации трехслойной изотропной сферической оболочки // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 15–26.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии трехслойной изотропной сферической оболочки, состоящей из слоев различной толщины с различными упругими свойствами под действием внутриглазного давления. Задача решается с использованием трехмерной теории упругости. Анализ напряженно-деформированного состояния глаза проводится с учетом возможности сосудистой оболочки изменять свои биомеханические свойства.

Библиогр. 4 назв. Ил. 5. Табл. 2.

УДК 519.6:532.53

Кочерыжскин В.А., Ершов Б.А. Моделирование течений слабосжимаемой вязкой жидкостт методом сглаженных частиц, // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 92–101.

В работе рассматривается модифицированный метод сглаженных частиц WCSPH (англ. weakly-compressible smoothed particle hydrodynamics) для решения нестационарных задач гидродинамики. «Несжимаемость» моделируется при помощи выбора подходящего уравнения состояния и тем самым замыкается система уравнений движения жидкости. Представлены результаты численного моделирования и их сравнение с известными решениями. Расчеты произведены с использованием технологии многопоточных вычислений Nvidia CUDA.

Библиогр. 9 назв. Ил. 2.

УДК 519.6

Лазман К.О. **Гидродинамическая модель движения внутриглазной жидкости, возникающего при движении глазного яблока.** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011 гг. С. 65–70.

В работе рассматривается оболочка глаза, заполненная средой из нескольких компонентов, которая вращается в жидкости под воздействием крутящих моментов, создаваемых тремя парами прикрепленных к главному яблоку мышц. Центр вращения глазного яблока остается неподвижным.

Допуская, что внутриглазная жидкость является идеальной несжимаемой и однородной, рассматривается классическая задача о вихревом движении такой жидкости внутри глазного яблока. В предлагаемой модели рассматривается частный вид движения жидкости - однородное вихревое движение. Обладая экспериментальными данными о зависимости угловой скорости движения глаза от времени в процессе различных тестов (при чтении, рассматривании картин и устремлении взглядов в одну точку) можно оценивать затраченную энергию в этом процессе. Для проведения исследований использована система «Jazz Novo Standard».

Библиогр. 7 назв. Ил. 3.

УДК 532.546

Лихачева(Захаренкова) Н.В. **Моделирование фильтрационных течений из каналов при наличии испарения со свободной поверхности** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2010–2011гг. С. 27–35.

В рамках двумерной теории стационарной фильтрации (по закону Дарси) рассматривается математическая модель течения из канала прямоугольного поперечного сечения при наличии испарения со свободной поверхности. Для ее изучения формулируется и с применением метода Полубариновой-Кочиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса, решается смешанная краевая многопараметрическая задача теории аналитических функций. В отличие от предыдущей задачи, где учитывалась капиллярность грунта, здесь разработан алгоритм расчета размеров зоны насыщения в ситуаци-

ях, когда при фильтрации приходится учитывать уровень воды в канале. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов проводится детальный гидродинамический анализ структуры и характерных особенностей моделируемого процесса, а также влияния всех физических параметров модели на размеры зоны насыщения.

Библиогр. 8 назв. Ил. 4. Табл. 2.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

2010–2011 гг.

Печатается без издательского редактирования

Подписано в печать . . . 2011. Формат $60 \times 84^1/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 7,67+0,23 вкл. Тираж 115 экз. Заказ № 76
Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21
Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22
E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

Типография Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41

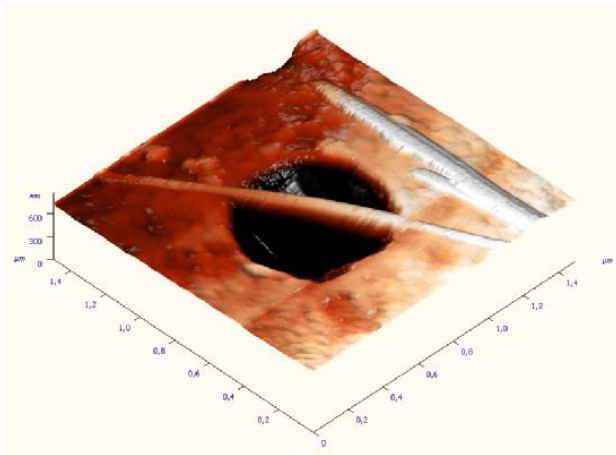


Рис. 1. Асбестовая нанотрубка над порой лавсановой мембраны. (к статье А.М. Ермакова).

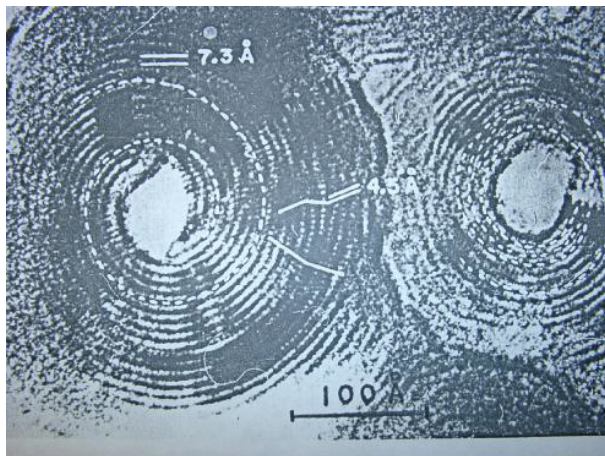


Рис. 2. Сечение нанотрубки. (к статье А. М. Ермакова).

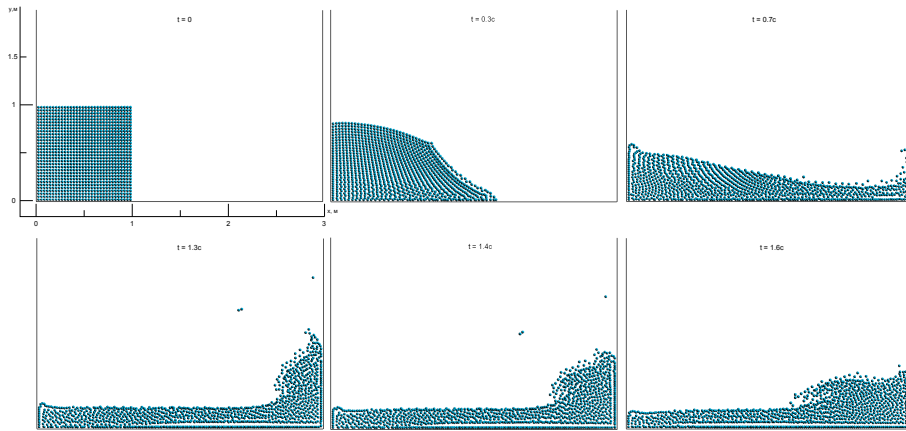


Рис. 3. Задача об обрушении столба жидкости (количество частиц 1024)
(к статье В. А. Кочерыжкина).

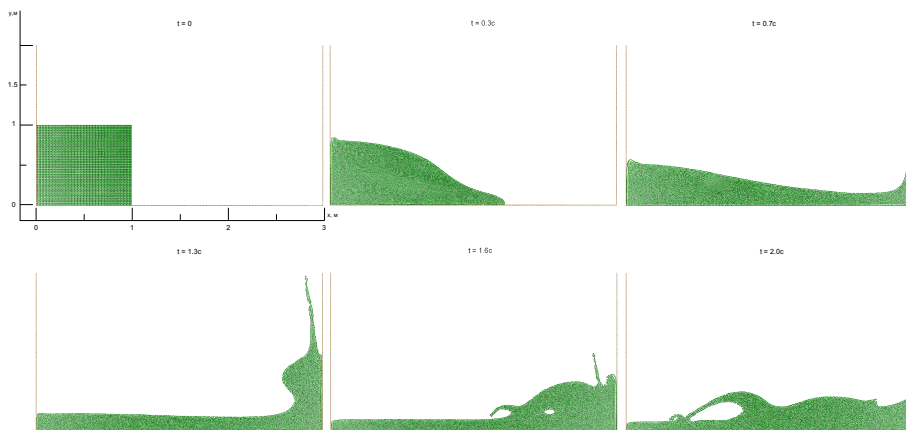


Рис. 4. Задача об обрушении столба жидкости (количество частиц 16385)
(к статье В. А. Кочерыжкина).