ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 421, № 5, с. 593–595

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

© 2008 г. В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков

Представлено академиком И.А. Ибрагимовым 08.02.2008 г.

Поступило 22.02.2008 г.

Быстрые алгоритмы играют важную роль при обработке дискретных периодических сигналов. Наиболее популярным и по-прежнему востребованным является быстрое преобразование Фурье (БПФ) [1–3]. Общий подход к построению БПФ связан с разложением матрицы Фурье в произведение слабо заполненных матриц. Варианты разложения зависят от арифметических свойств порядка матрицы Фурье и от разных представлений ее индексов. В статье используется параметрическое кодирование индексов. Получена наиболее глубокая параметрическая факторизация матрицы Фурье.

1. Основные обозначения: $\omega_N = \exp\dfrac{2\pi i}{N}$ – корень N-й степени из единицы, $\langle j\rangle_N$ – остаток от деления целого неотрицательного числа j на N, $\otimes$ – знак кронекерова умножения матриц, I_N – единичная матрица N-го порядка.

Пусть s и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ – натуральные числа, отличные от единицы. Положим

$$N = n_1 n_2 \ldots n_s;$$

$$\Delta_\nu = n_1 n_2 \ldots n_{\nu-1}$$

$$\text{при} \quad \nu \in \{2, 3, \ldots, s+1\}, \quad \Delta_1 = 1;$$

$$N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \ldots n_s$$

$$\text{при} \quad \nu \in \{0, 1, \ldots, s-1\}, \quad N_s = 1.$$

Очевидно, что $\Delta_\nu n_\nu N_\nu = N$ при всех $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

2. Рассмотрим усовершенствованный вариант общего подхода к вычислению дискретного преобразования Фурье (ДПФ), предложенного М.Б. Свердликом [4–6]. Возьмем матрицу Фурье F_N с элементами

$$F_N[k, j] = \omega_N^{kj}, \quad k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Предположим, что при всех $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$ найдутся числа p_ν, q_ν из $\{1, 2, \ldots, N-1\}$, взаимно простые с n_ν, и натуральные D_ν, G_ν, такие, что индексы k, j допускают представления

$$j = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu p_\nu D_\nu \right\rangle_N, \quad j_\nu \in \{0, 1, \ldots, n_\nu - 1\},$$

$$k = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} k_\nu q_\nu G_\nu \right\rangle_N, \quad k_\nu \in \{0, 1, \ldots, n_\nu - 1\}.$$

Векторы $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ и $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ будем называть векторами параметров.

Сокращение количества арифметических операций при вычислении ДПФ возможно в трех случаях выбора базисов $\{D_\nu\}$ и $\{G_\nu\}$:

1) $D_\nu = G_\nu = B_\nu$, где $B_\nu = \dfrac{N}{n_\nu}$; в этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu q_\nu}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту метода простых множителей для вычисления ДПФ.

2) $D_\nu = N_\nu$ и $G_\nu = \Delta_\nu$; в этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu} \prod_{\nu=2}^{s} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu p_\nu \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} k_\alpha q_\alpha \Delta_\alpha}$$

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту БПФ с прореживанием по времени.

3) $D_\nu = \Delta_\nu$ и $G_\nu = N_\nu$; в этом случае

$$\omega_N^{kj} = \prod_{\nu=1}^{s} \omega_{n_\nu}^{k_\nu j_\nu} \prod_{\nu=2}^{s} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu q_\nu \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha p_\alpha \Delta_\alpha}$$

Санкт-Петербургский государственный университет

при условии, что $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$ при всех $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Указанный выбор приводит к параметрическому варианту БПФ с прореживанием по частоте.

3. Рассмотрим более подробно параметрический вариант метода простых множителей. Любое число $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ с помощью последовательного деления можно единственным образом представить в виде

$$j = j_s(n_{s-1}\ldots n_1) + j_{s-1}(n_{s-2}\ldots n_1) + \ldots + j_2 n_1 + j_1 = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu \Delta_\nu,$$

где $j_\nu \in \{0, 1, \ldots, n_\nu - 1\}$. Коэффициенты j_ν этого разложения образуют смешанный код числа j,

$$j = (j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}.$$

Введем перестановку $\mathrm{perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$, сопоставляющую числу $j = (j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}$ число

$$\mathrm{perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu p_\nu B_\nu \right\rangle_N.$$

Эта перестановка определена и при $s = 1$. Запись $k = \mathrm{perm}_{n_1}^{(p_1)}(j)$ означает, что $k = \langle j p_1 \rangle_{n_1}$. Такая перестановка называется эйлеровой.

Матрица эйлеровых перестановок $\mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$ определяется стандартным способом:

$$\mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = \mathrm{perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}(i), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 1$ получим матрицу руританских перестановок.

Т е о р е м а 1. *Справедливо разложение*

$$\mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)} = (\mathrm{Perm}_{n_s}^{(p_s)} \otimes \mathrm{Perm}_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Perm}_{n_1}^{(p_1)}) \times \prod_{\nu=2}^{s} (I_{N_\nu} \otimes \mathrm{Perm}_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1, 1)}).$$

Из теоремы 1 при $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 1$ следует разложение матрицы руританских перестановок

$$\mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(1, 1, \ldots, 1)} = \prod_{\nu=2}^{s} (I_{N_\nu} \otimes \mathrm{Perm}_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1, 1)}).$$

Более того, само заключение теоремы 1 можно переписать в виде

$$\mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)} = (\mathrm{Perm}_{n_s}^{(p_s)} \otimes \mathrm{Perm}_{n_{s-1}}^{(p_{s-1})} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Perm}_{n_1}^{(p_1)}) \times \mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(1, 1, \ldots, 1)}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $N = n_1 n_2 \ldots n_s$, где сомножители n_ν попарно взаимно просты.*

Тогда при любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление

$$F_N = (\mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(q_1, q_2, \ldots, q_s)})^T (F_{n_s} \otimes F_{n_{s-1}} \otimes \ldots \otimes F_{n_1}) \times \mathrm{Perm}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}, \qquad (1)$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ – сопряженный вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

В связи с теоремой 2 представляют интерес самосопряженные векторы параметров p, такие, что сопряженный вектор параметров q совпадает с p. В этом случае в разложении (1) присутствует только одна матрица перестановок.

Обозначим через b_ν единственное на множестве $\{1, 2, \ldots, n_\nu - 1\}$ решение уравнения $\langle x B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$. Самосопряженный вектор параметров существует тогда и только тогда, когда при всех $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$ число b_ν является квадратичным вычетом по модулю n_ν.

Пусть p_ν – решение уравнения $\langle x^2 \rangle_{n_\nu} = b_\nu$ при $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$. В таком случае вектор параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ будет самосопряженным. Например, при $s = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 25$ существуют четыре самосопряженных вектора параметров: $p = (1, 12)$, $p = (1, 13)$, $p = (3, 12)$ и $p = (3, 13)$.

Еще один пример: при $s = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ самосопряженным будет руританский вектор параметров $p = (1, 1, 1)$. Самосопряженными руританские коды будут также в случаях $n = (2, 3, 7, 41)$, $n = (2, 3, 11, 13)$, $n = (2, 3, 7, 83, 85)$, $n = (2, 3, 11, 17, 59)$.

4. Рассмотрим более подробно параметрический вариант быстрого преобразования Фурье в общем случае. Введем перестановки $\mathrm{mix}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$ и $\mathrm{rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$, сопоставляющие числу $j = (j_s, j_{s-1}, \ldots, j_1)_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}$ числа

$$\mathrm{mix}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu p_\nu \Delta_\nu \right\rangle_N,$$

$$\mathrm{rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu p_\nu N_\nu \right\rangle_N.$$

Матрицы перестановок $\mathrm{Mix}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$ и $\mathrm{Rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)}$ определяются стандартным способом. Отметим, что $\mathrm{Rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)} = \mathrm{Rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(1, 1, \ldots, 1)} \mathrm{Mix}_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}^{(p_s, p_{s-1}, \ldots, p_1)}$.

Т е о р е м а 3. *При $s \geq 2$ справедливы разложения*

$$\mathrm{Mix}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)} = \prod_{\nu=0}^{s-1} (\mathrm{Mix}_{n_{s-\nu}, N_{s-\nu}}^{(p_{s-\nu}, 1)} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}),$$

$$\mathrm{Rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)} = \prod_{\nu=1}^{s} (I_{N_\nu} \otimes \mathrm{Rev}_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1, p_\nu)}).$$

Нам потребуется диагональная параметрическая матрица вращений Twid с диагональными элементами

$$\mathrm{Twid}_{n_1, n_2, \ldots, n_{\nu-1}, n_\nu}^{(p_1, p_2, \ldots, p_{\nu-1}, p_\nu)}[j, j] = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu p_\nu \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha p_\alpha \Delta_\alpha},$$

$$\nu \in \{2, 3, \ldots, s\}.$$

Здесь $j = (j_\nu, j_{\nu-1}, \ldots, j_1)_{n_\nu, n_{\nu-1}, \ldots, n_1}$. По определению, $\mathrm{Twid}_{n_1}^{(p_1)} = I_{n_1}$.

Т е о р е м а 4. *При $N = n_1 n_2 \ldots n_s$ и любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление*

$$F_N = (\mathrm{Rev}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(q_1, q_2, \ldots, q_s)})^T \times$$

$$\times \left(\prod_{\nu=1}^{s} (I_{N_\nu} \otimes \mathrm{Twid}_{n_1, n_2, \ldots, n_{\nu-1}, n_\nu}^{(p_1, p_2, \ldots, p_{\nu-1}, q_\nu)})(I_{N_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}) \right) \times$$

$$\times \mathrm{Mix}_{n_1, n_2, \ldots, n_s}^{(p_1, p_2, \ldots, p_s)},$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ – сопряженный вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Алгоритм БПФ, соответствующий факторизации матрицы Фурье в теореме 4, связан с прореживанием по частоте. Как следствие можно получить факторизацию матрицы Фурье, соответствующую БПФ с прореживанием по времени:

$$F_N = (\mathrm{Mix}_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}^{(q_s, q_{s-1}, \ldots, q_1)})^T \times$$

$$\times \left(\prod_{\nu=1}^{s} (I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu})(I_{\Delta_\nu} \otimes \mathrm{Twid}_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_{\nu+1}, n_\nu}^{(q_s, q_{s-1}, \ldots, q_{\nu+1}, p_\nu)}) \right) \times$$

$$\times \mathrm{Rev}_{n_s, n_{s-1}, \ldots, n_1}^{(p_s, p_{s-1}, \ldots, p_1)}.$$

Вектор параметров можно подобрать таким образом, что число нетривиальных элементов (отличных от ± 1 и $\pm i$) в параметрической матрице вращений уменьшится по сравнению с обычной (непараметрической) матрицей вращений. Например, если положить $n = (2, 3, 4)$, то $\mathrm{Twid}_{2,3}^{(1,1)}$ содержит два нетривиальных элемента, $\mathrm{Twid}_{2,3,4}^{(1,1,1)}$ – 12 элементов. Если положить $p = (3, 2, 3)$ и $q = (1, 2, 3)$, то в матрице $\mathrm{Twid}_{2,3}^{(3,2)}$ все диагональные элементы станут тривиальными ($\mathrm{Twid}_{2,3}^{(3,2)} = I_6$), а в матрице $\mathrm{Twid}_{2,3,4}^{(3,2,3)}$ останется только шесть нетривиальных элементов.

5. На основе предыдущих результатов можно предложить параметрический вариант метода простых множителей с последовательными перестановками. Для соответствующего алгоритма БПФ не требуются сложные перестановки данных до или после преобразования, а вычисления происходят совместно с перестановками.

Т е о р е м а 5. *Пусть $N = n_1 n_2 \ldots n_s$, где сомножители n_ν попарно взаимно просты.*

Тогда при любом векторе параметров $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление

$$F_N = \prod_{\nu=1}^{s} ((\mathrm{Perm}_{n_\nu, N_\nu}^{(q_\nu, 1)})^T \otimes I_{\Delta_\nu}) \times$$

$$\times (I_{N_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu})(I_{N_\nu} \otimes \mathrm{Perm}_{\Delta_\nu, n_\nu}^{(1, p_\nu)}),$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ – сопряженный вектор параметров, компоненты которого определяются условием $\langle q_\nu p_\nu B_\nu \rangle_{n_\nu} = 1$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

6. В заключение отметим, что наиболее эффективно параметрическая техника работает в многомерном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnson J., Johnson R.W., Rodriguez D., Tolimieri R.* // J. Circuits, Systems, and Signal Processing. 1990. V. 9. № 4. P. 449–500.
2. *Frigo M., Johnson S.G.* // IEEE Trans. Signal Processing. 2007. V. 55. № 1. P. 111–119.
3. *Малозёмов В.Н., Машарский С.М.* // Тр. СПб. матем. общества. 2001. Т. 9. С. 97–119.
4. *Свердлик М.Б.* // РЭ. 1983. № 10. С. 1931–1938.
5. *Свердлик М.Б.* // РЭ. 1984. № 2. С. 265–274.
6. *Свердлик М.Б., Троянский А.В.* // Радиоэлектроника. 1995. № 7. С. 27–33.