ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 436, № 2, с. 168–169

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

© 2011 г. В. Н. Малозёмов, Н. В. Чашников

Представлено академиком И.А. Ибрагимовым 09.06.2010 г.

Поступило 23.06.2010 г.

1. Зафиксируем $m \geq 2$ комплексных чисел

$$z(0),\ z(1),\ \ldots,\ z(m-1).$$

Возьмем натуральные r и n, $n \geq 2$. Положим $N = mn$.

Обозначим через $S_{r,n}(j)$, $j \in \mathbf{Z}$, дискретный N-периодический сплайн порядка r, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S_{r,n}(ln) = z(l), \quad l \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\}.$$

Такой сплайн существует и единствен [1].

Сформулируем основной результат данной работы.

Т е о р е м а. *При всех вещественных x существуют и равны между собой повторные пределы*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{r\to\infty} S_{r,n}(\lfloor nx\rfloor) = \lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_{r,n}(\lfloor nx\rfloor),$$

где $\lfloor nx\rfloor$ – целая часть числа nx. Общим пределом является тригонометрический m-периодический полином $T(x)$ порядка $\lfloor m/2\rfloor$, *удовлетворяющий интерполяционным условиям*

$$T(l) = z(l), \quad l \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\}. \tag{1}$$

2. Наметим схему доказательства, в котором используются некоторые идеи из [2, 3].

Пусть $X_r = \mathbf{F}_N(S_{r,n})$ – дискретное преобразование Фурье (ДПФ) порядка N от сплайна $S_{r,n}$ и $\delta_n(j)$ – дискретный n-периодический импульс, равный единице, когда j делится на n, и равный нулю при остальных $j \in \mathbf{Z}$.

Л е м м а 1. *Справедлива формула*

$$X_r = V_r Z,$$

где $Z = \mathbf{F}_m(z)$ и при $q \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$

$$V_r(qm+l) = \begin{cases} n\delta_n(q), & \textit{если} \quad l = 0; \\ n\left(\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\sin(\pi(qm+l)/N}{\sin(\pi(sm+l)/N)}\right)^{2r}\right)^{-1}, \\ \textit{если} \quad l \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\}. \end{cases}$$

Введем N-периодический спектр V_* следующим образом:

$$V_*(k) = \begin{cases} n & \text{при} \quad k \in \left\{0,\ 1,\ \ldots,\ \left\lfloor \dfrac{m-1}{2}\right\rfloor\right\}, \\ 0 & \text{при} \quad k \in \left\{\left\lfloor \dfrac{m}{2}\right\rfloor + 1,\ \ldots,\ \left\lfloor \dfrac{N}{2}\right\rfloor\right\}. \end{cases}$$

При четном m дополнительно положим $V_*\left(\dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{n}{2}$. С помощью равенства $V_*(N-k) = V_*(k)$ распространим V_* на весь основной период $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Л е м м а 2. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} V_r(k) = V_*(k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Напомним определение m-периодического ядра Дирихле:

$$D_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{m\sin\dfrac{\pi x}{m}} & \text{при нечетном} \quad m, \\ \dfrac{1}{m}\sin(\pi x)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{m} & \text{при четном} \quad m. \end{cases}$$

В обоих случаях $D_m(x)$ является четным m-периодическим тригонометрическим полиномом порядка $\left\lfloor \dfrac{m}{2}\right\rfloor$ удовлетворяющим условиям

$$D_m(l) = \delta_m(l), \quad l \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Обозначим $h_{m,n}(j) = D_m\left(\dfrac{j}{n}\right)$. Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{F}_N(h_{m,n}) = V_*.$$

Это равенство вместе с леммами 1, 2 и формулой обращения для ДПФ приводит к такому утверждению.

Л е м м а 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} S_{r,n}(j) = T_{m,n}(j), \quad j \in \mathbf{Z},$$

Санкт-Петербургский государственный университет

где

$$T_{m,n}(j) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, D_m\left(\frac{j}{n} - p\right).$$

Следующий факт практически очевиден.

Л е м м а 4. *При всех вещественных x*

$$\lim_{n\to\infty} T_{m,n}(\lfloor \mathrm{nx} \rfloor) = T(x),$$

где

$$T(x) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, D_m(x-p). \qquad (3)$$

На основании лемм 3 и 4 приходим к заключению

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{r\to\infty} S_{r,n}(\lfloor nx \rfloor) = T(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отметим, что предельная функция $T(x)$ является m-периодическим тригонометрическим полиномом порядка $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, который в силу (2) удовлетворяет интерполяционным условиям (1).

3. Обратимся к случаю, когда повторный предел вычисляется в другом порядке. Введем m-периодический B-сплайн первого порядка

$$B_1(x) = \begin{cases} 1-x & \text{при } x \in [0,\ 1), \\ 0 & \text{при } x \in [1,\ m-1], \\ x-m+1 & \text{при } x \in (m-1,\ m]. \end{cases}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим с помощью свертки

$$B_\nu(x) = \int_0^m B_{\nu-1}(t)\, B_1(x-t)\, dt, \quad \nu = 2,\ 3,\ \ldots$$

Можно показать, что существует единственный m-периодический сплайн порядка r вида

$$S_r(x) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p)\, B_r(x-p), \qquad (4)$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S_r(l) = z(l), \quad l \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\}.$$

Для коэффициентов $c(p)$ можно записать явные формулы.

Л е м м а 5. *При всех вещественных x*

$$\lim_{n\to\infty} S_{r,n}(\lfloor nx \rfloor) = S_r(x).$$

Интерполяционный сплайн (4) допускает представление через фундаментальный сплайн $h_r(x)$, удовлетворяющий условиям

$$h_r(l) = \delta_m(l), \quad l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Точнее, справедлива формула

$$S_r(x) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, h_r(x-p).$$

Л е м м а 6. *При всех вещественных x выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} h_r(x) = D_m(x),$$

где $D_m(x)$ — ядро Дирихле.

Теперь становится очевидным, что

$$\lim_{r\to\infty} S_r(x) = \sum_{p=0}^{m-1} z(p)\, D_m(x-p).$$

Согласно (3), правая часть этого равенства совпадает с $T(x)$.

Таким образом, при всех вещественных x

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{n\to\infty} S_{r,n}(\lfloor nx \rfloor) = T(x).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00676).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.
2. *Бер М.Г., Малоземов В.Н.* // Пробл. передачи информации. 1992. Т. 28. № 4. С. 60–68.
3. *von Golitschek M.* // Numer. Math. 1972. V. 19. № 2. P. 146–154.