САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

Г. Ш. ТАМАСЯН, А. В. ФОМИНЫХ

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2022

УДК 517.97
ББК 22.18
Т 17

Р е ц е н з е н т ы : докт. физ.-мат. наук, проф. *В. И. Ерохин* (Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского),
канд. физ.-мат. наук, доц. *Н. А. Степенко* (Санкт-Петербургский государственный университет)

Печатается по рекомендации Учебно – методической комиссии
по УГСН 01.00.00 Математика и механика
Санкт-Петербургского государственного университета

Т 17 **Оптимальная стабилизация линейных систем:** Учеб. пособие / Тамасян Г. Ш., Фоминых А. В. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2022. — 66 с. Библ. 14 назв.

ISBN 978-5-9651-1405-4

В данном учебном пособии рассмотрены вопросы оптимальной стабилизации линейных систем в пространстве состояний в случае полной обратной связи. Подробно представлены методы решения задачи оптимальной стабилизации непрерывных линейных систем управления по отношению к квадратичному функционалу качества. Приводятся алгоритмы построения оптимального стабилизирующего управления для различных частных случаев. Разобраны многочисленные примеры, демонстрирующие работу алгоритмов. Наличие задач для самостоятельной работы способствуют использованию пособия в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий. Все задачи снабжены ответами.

Пособие предназначено для студентов университетов, обучающихся по образовательной программе «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование» и разработано в рамках курсов «Теория управления», «Устойчивость движения» факультета ПМ–ПУ СПбГУ. Оно также может быть полезно научным работникам, специализирующимся в области математического моделирования, теории управления и теории устойчивости.

Библиогр. 14 назв.

УДК 517.97
ББК 22.18

Работа над пособием осуществлялась
в Институте проблем Машиноведения РАН
при финансовой поддержке Российского научного фонда
(проект № 20-71-10032)

ISBN 978-5-9651-1405-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем учебном пособии рассмотрена задача оптимальной стабилизации непрерывных линейных систем управления по отношению к квадратичному функционалу качества, которая относится к задачам аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

В первой главе собраны необходимые сведения из теории устойчивости и стабилизации линейных систем, а также используемые в тексте обозначения и понятия. В частности, во втором параграфе приведены алгоритмы построения стабилизирующего управления для линейных стационарных систем.

В пятом параграфе второй главы дается постановка задачи оптимальной стабилизации линейных систем в пространстве состояний в случае полной обратной связи. В шестом параграфе приведена основная теорема, содержащая необходимое и достаточное условие существования оптимального стабилизирующего управления: в виде существования оптимального стабилизирующего решения матричного уравнения типа Риккати. В седьмом параграфе описан алгоритм построения оптимального стабилизирующего управления в стационарном случае и на примерах подробно разобрана его работа. В восьмом параграфе тщательно разбирается скалярный случай. Конкретные реализации алгоритма построения оптимального стабилизирующего управления для различных частных случаев проиллюстрированы большим количеством примеров.

Третья глава посвящена методу последовательных приближений В. И. Зубова. Так же, как и во второй главе, отдельно рассмотрены стационарный и скалярный случаи. Разобраны многочисленные примеры, демонстрирующие работу метода и его уникальные свойства.

Наконец, в пособии приведены задачи для самостоятельной работы. Все задачи снабжены ответами.

24 февраля 2022 г. *Г. Ш. Тамасян*
А. В. Фоминых

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;
$\overline{1,n}$ — множество натуральных чисел от 1 до n;
$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ — квадратная $(n\times n)$-матрица с элементами a_{ij};
$\mathbf{A}^T$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}$;
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец;
$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ — евклидова норма вектора x;
$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^T$ — нулевой вектор-столбец;
$\mathbf{O}$ — матрица, все элементы которой равны нулю;
$\mathbf{E}_n$ или $\mathbf{E}$ — единичная $(n \times n)$-матрица;
$\det \mathbf{A}$ — определитель матрицы $\mathbf{A}$;
$\operatorname{rang} \mathbf{A}$ — ранг матрицы $\mathbf{A}$;
$f := c$, $c =: f$ — f равно c по определению;
$\blacksquare$ — конец доказательства;
$\square$ — конец примера;
(1.7) — седьмая выделенная формула в § 1;
ЛКЗ — линейно-квадратичная задача.

ГЛАВА 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Общая постановка задачи стабилизации

Пусть динамика объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v} + \mathbf{f}(t), \tag{1.1}$$

где t — (непрерывное) время, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния (фазового состояния) объекта, $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления (управляющие воздействия), $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор внешних возмущений или шумов.

Пусть известны начальные данные $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Рассмотрим некоторое программное управление $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\text{п}(t)$ и соответствующее ему программное (невозмущенное) движение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\text{п}(t)$. Как известно (см. [4], [7], [13], [14]), для ответа на вопрос об асимптотической устойчивости по Ляпунову программного движения $\mathbf{y}_\text{п}(t)$ строится система в отклонениях. Для этого в системе (1.1) сделаем замену переменных по формулам

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y}_\text{п}, \\ \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_\text{п}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — отклонение возмущенного движения от программного, $\mathbf{u}$ — отклонение возмущенного управления от программного. В новых переменных система (1.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}. \tag{1.3}$$

Очевидно, что при управлении $\mathbf{u}$ равном нулю имеем движение $\mathbf{x}$ равное нулю.

Таким образом, управлению $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\text{стаб}$, обеспечивающему асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.3), в силу (1.2), соответствует управление $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\text{стаб} + \mathbf{v}_\text{п}$. Если этим управлением замкнуть систему (1.1), то она будет иметь асимптотически устойчивое по Ляпунову программное движение.

Следующие три вопроса относятся к *общей постановке задачи стабилизации программных движений* [7], [8]:

1. Существует ли управление $\mathbf{u}$, при котором нулевое решение системы (1.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову?

2. Если такое управление существует, то как его построить?

3. Пусть такое управление можно построить не единственным образом. Как из их множества выбрать оптимальное в том или ином смысле?

В следующем параграфе приведены ответы на первые два вопроса в достаточном для дальнейшего понимания объеме. За более развернутыми ответами следует обратится к литературе [1], [6–14].

Ответу на третий вопрос посвящены последующие главы и многочисленные работы, в частности, [7], [11–13].

§ 2. Стабилизация линейных стационарных систем

Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы, соответственно.

Определение. Управление вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{M}$ — постоянная $(r \times n)$-матрица, будем называть *допустимым управлением.*

Замечание. Координаты вектора управления $\mathbf{u}$ обычно называют *входами* системы. Управление вида (2.2) означает, что на входы системы подаются сигналы управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, зависящие от всех координат вектора состояния системы $\mathbf{x}$ в каждый момент времени. В таком случае говорят, что *управление построено по принципу полной обратной связи.*

Напомним, что **задача стабилизации** системы (2.1) состоит в том, чтобы построить допустимое управление (2.2), при котором *замкнутая система* $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M})\mathbf{x}$ асимптотически устойчива, т. е. собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости (исключая мнимую ось).

Управления $\mathbf{u}$, решающие задачу стабилизации, называются *стабилизирующими.*

Важную роль при построении как программного, так и стабилизирующего управления играет следующий фундаментальный результат [8].

Теорема. (Критерий Калмана). *Линейная стационарная система* (2.1) *полностью управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\right) = n.$$

Опишем два алгоритма построения стабилизирующего управления для линейных стационарных систем, а именно: для систем, удовлетворяющих и не удовлетворяющих критерию Калмана.

2.1. Случай полностью управляемых систем. В основе первого алгоритма лежит следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если система* (2.1) *полностью управляема, то она стабилизируема. В этом случае выбором матрицы* $\mathbf{M}$ *можно доставить системе* (2.1) *любые наперед заданные собственные числа.*

Алгоритм I

1. Проверим систему (2.1) на полную управляемость. Для этого вычислим

   $$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}).$$

   Если $\operatorname{rang}\mathbf{S} = n$, то система полностью управляема и переходим к следующему шагу, иначе применяем Алгоритм II (на стр. 10).

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QM}$:

   $$\varphi(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{E} - [\mathbf{P} + \mathbf{QM}]\right) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

   Здесь коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$ в общем случае зависят от неизвестных коэффициентов матрицы $\mathbf{M} = [m_{ij}]$, т. е.

   $$p_1 = p_1(m_{11}, \ldots, m_{rn}), \ldots, p_n = p_n(m_{11}, \ldots, m_{rn}).$$

3. Выпишем эталонный полином $\psi(\lambda)$, имеющий наперед заданные корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$:

$$\psi(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \mu_k) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n.$$

4. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ и многочлена $\psi(\lambda)$. Получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов матрицы $\mathbf{M}$:

$$\begin{cases} p_1(m_{11}, \ldots, m_{rn}) = d_1, \\ \qquad \ldots \\ p_n(m_{11}, \ldots, m_{rn}) = d_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Решая систему (2.3), найдем искомое управление $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{x}$.

Пример 2.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - x_2 + u. \end{cases}$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее системе (2.1) собственные числа $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -3$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость:

$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 = n.$$

Значит, система полностью управляема. Следовательно, по теореме 2.1 она стабилизируема.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (m_1 + m_2)\lambda - (2m_1 + 4m_2 + 6).$$

Тогда $p_1 = -(m_1 + m_2)$, $p_2 = -(2m_1 + 4m_2 + 6)$.

3. Найдем коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2} (\lambda - \mu_j) = (\lambda - (-2))\,(\lambda - (-3)) = \lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

Имеем $d_1 = 5$, $d_2 = 6$.

4. Составим и решим систему (2.3):

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2) = 5, \\ -(2m_1 + 4m_2 + 6) = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -4, \\ m_2 = -1, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

О т в е т. Искомое стабилизирующее управление имеет следующий вид $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{x} = -4x_1 - x_2$.

2.2. Стабилизация систем со скалярным входом в случае неполной управляемости. Опишем алгоритм построения стабилизирующего управления (2.2) для не полностью управляемой системы (2.1) со скалярным управлением, т. е. когда $\mathbf{Q}$ — вектор-столбец. Наперед заданные эталонные числа обозначим $\mu_1, \ldots, \mu_k$.

А л г о р и т м II

1. Проверим систему (2.1) на полную управляемость. Для этого вычислим $\operatorname{rang} \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = (\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$.

   Если $\operatorname{rang} \mathbf{S} = n$, то для построения стабилизирующего управления используем **алгоритм I**, описанный в п. 2.1 или **алгоритм I′** из п. 2.3.

   Если $\operatorname{rang} \mathbf{S} = k < n$, то система не полностью управляема, и тогда переходим к следующему шагу.

2. Используя максимальное число линейно независимых векторов матрицы $\mathbf{S}$ (это будут первые k векторов), дополняем (произвольным образом) эту систему до n линейно независимых векторов. Пусть это будут вектора $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$. Строим матрицу

$$\mathbf{T} = (\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{k-1}\mathbf{Q}, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

3. В системе (2.1) сделаем замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$. Получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{z} + \widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{u},$$

где

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}.$$

Заметим, что $\widetilde{\mathbf{P}}$ — верхняя квазитреугольная матрица вида

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{11} & \widetilde{\mathbf{P}}_{12} \\ \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ — матрица Фробениуса размерности $(k \times k)$, $\mathbf{O}$ — нулевая матрица размерности $(n-k \times k)$. Матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеют следующий вид

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -p_1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Далее потребуется выполнение условий следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Если все собственные числа λ_j матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для всех $j = \overline{1, n-k}$, то система (2.1) стабилизируема.*

Если условия теоремы не выполнены, то система не стабилизируема.

4. Составим матрицу $\mathbf{K}_1$ из коэффициентов $p_1, \ldots, p_{k-1}$ характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$ матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$, которые стоят в ее последнем столбце с противоположным знаком (см. (2.4)):

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-2} & p_{k-1} \\ 0 & 1 & p_1 & \cdots & p_{k-3} & p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Составим эталонный полином $\psi(\lambda)$, имеющий наперед заданные корни $\mu_1, \ldots, \mu_k$:

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \mu_j) = \lambda^k + d_1 \lambda^{k-1} + \ldots + d_{k-1}\lambda + d_k.$$

6. Используя коэффициенты $d_1, \ldots, d_k$ эталонного многочлена $\psi(\lambda)$ и коэффициенты $p_1, \ldots, p_k$ характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$, вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \big(p_1 - d_1, \ldots, p_k - d_k\big)\,. \tag{2.5}$$

7. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{T}\mathbf{K})^{-1}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{n-k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \big(\boldsymbol{\gamma}_1 \quad \boldsymbol{\gamma}_2\big)\,,$$

$\mathbf{E}_{n-k}$ — единичная матрица размерности $n-k$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ — нулевая строка длины $n-k$, соответствующая неуправляемой подсистеме.

8. Проверка. Если равны многочлены $\det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}))$ и $\psi(\lambda)\varphi_2(\lambda)$, где $\varphi_2(\lambda)$ — характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$, то вычисления проведены верно.

Пример 2.2. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, при котором управляемые собственные числа равны -1.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Вычислим

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} = 2.$$

   Так как $\operatorname{rang}\mathbf{S} < n = 3$, то система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Для этого из матрицы $\mathbf{S}$ выберем первые два линейно независимых столбца. Дополним их до базиса пространства $\mathbb{R}^3$. Например, так

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = -1$.

4. Проверим неуправляемую подсистему на асимптотическую устойчивость. Вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda + 1.$$

   Несложно проверить, что условие теоремы 2.2 выполнено, так как единственный корень полинома $\varphi_2(\lambda)$ равен -1.

5. Построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

   Матрица $\mathbf{K}_2$ для неуправляемого блока выбирается единичной, соответствующей размерности, т. е.

$$\mathbf{K}_2 = 1.$$

В результате имеем

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2} (\lambda - \mu_j) = (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Имеем $d_1 = 2$, $d_2 = 1$.

7. По формуле (2.5) вычислим строку $\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \end{pmatrix}$. Для неуправляемой подсистемы $\gamma_2 = 0$. Тогда

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{x}$. По формуле (2.6) находим

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

9. Осталось убедиться, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}$ равны -1.

$\square$

Пример 2.3. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} = 1 < n = 3.$$

Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Для этого из матрицы $\mathbf{S}$ выберем первый столбец. Дополним его до базиса пространства $\mathbb{R}^3$ двумя любыми независимыми векторами, например, так

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = 2$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

4. Вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ неуправляемой подсистемы

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Так как не все собственные числа матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ лежат в левой комплексной полуплоскости, то система не стабилизируема (см. теорему 2.2).

□

Пример 2.4. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -j$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим, выполнен ли критерий Калмана:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

   Так как $\operatorname{rang}\mathbf{S} < n = 4$, то система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Для этого из матрицы $\mathbf{S}$ выберем первые два линейно независимых столбца и дополним их до базиса пространства $\mathbb{R}^4$. Положим

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Проверим неуправляемую подсистему на асимптотическую устойчивость. Для этого вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Несложно проверить, что условие теоремы 2.2 выполнено, так как корни полинома $\varphi_2(\lambda)$ лежат в левой комплексной полуплоскости.

5. Построим матрицы

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2} (\lambda - \mu_j) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Имеем $d_1 = 3$, $d_2 = 2$.

7. По формуле (2.5) вычислим строку $\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}$. Для неуправляемой подсистемы имеем $\boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. По формуле (2.6) находим

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Сделаем проверку правильности вычислений. Для этого достаточно убедимся в том, что характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QM}$ равен $\varphi_2(\lambda)\psi(\lambda)$.

О т в е т. Стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{Mx} = -x_2 - 2x_3$.

2.3. Стабилизация полностью управляемой системы со скалярным входом. В п. 2.1 был описан **алгоритм I** построения стабилизирующего управления $\mathbf{u} = \mathbf{Mx}$, где коэффициенты матрицы $\mathbf{M}$ находятся из решения системы (2.3).

Однако, в случае полной управляемости решение системы уравнений (2.3) можно записать аналитически (см. [14]). Укажем, как в случае со скалярным входом вычислить коэффициенты вектор-строки $\mathbf{M}$, так чтобы у матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QM}$ спектр состоял из наперед заданных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Алгоритм I′

1. Строим матрицу $\mathbf{S} = (\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$.

2. Найдем коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$ характеристического полинома матрицы $\mathbf{P}$. Напомним, что они располагаются в последнем столбце с противоположным знаком в матрице Фробениуса $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{PS}$ (см. (2.4)).

3. Строим верхнетреугольную матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} \\ 0 & 1 & p_1 & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Выпишем эталонный многочлен

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \mu_j) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n.$$

5. Вычислим вектор-строку

$$\mathbf{\Gamma} = \big(p_1 - d_1, \ldots, p_n - d_n\big).$$

6. Находим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{Mx}$, где

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{S}^{-1}.$$

Пример 2.5. Рассмотрим задачу из примера 2.1 на стр. 9.
Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Имеем $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P}$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 6.$$

   Отсюда $p_1 = 0$, $p_2 = -6$.

3. Строим матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

   Имеем $d_1 = 5$, $d_2 = 6$.

5. Получим вектор-строку

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} p_1 - d_1 & p_2 - d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -12 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислим

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{SK})^{-1} =$$
$$= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Искомое стабилизирующее управление имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Mx} = -4x_1 - x_2.$$

□

§ 3. Неравенства Важевского

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}(t)\mathbf{x} \tag{3.1}$$

с вещественной непрерывной $(n \times n)$-матрицей $\mathbf{D}(t)$ при $t \geqslant 0$. Пусть заданы некоторые допустимые начальные условия $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ — решение задачи Коши, т. е. решение системы (3.1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Для линейных систем из устойчивости одного решения следует устойчивость всех решений, поэтому говорят об устойчивости самой линейной системы (3.1).

Определение. Система (3.1) называется экспоненциально устойчивой, если найдутся такие положительные числа α_1, β_1, α_2, β_2, при которых для любых $t \geqslant t_0$ имеют места неравенства

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}_0\| e^{-\beta_1(t-t_0)} \leqslant \|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant \alpha_2 \|\mathbf{x}_0\| e^{-\beta_2(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

Проверку условия (3.2) часто удобно проводить с помощью следующей теоремы (см. [4] на стр. 149).

Теорема 3.1. (Неравенства Важевского)
Пусть $\underline{\lambda}(t)$ и $\overline{\lambda}(t)$ — наименьшее и наибольшее собственное число соответственно матрицы $\widehat{\mathbf{D}}(t)$ при $t \geqslant t_0$, где

$$\widehat{\mathbf{D}}(t) := \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}^T(t)\right). \tag{3.3}$$

Тогда для любого начального условия $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ этой системы выполняются неравенства

$$||\mathbf{x}_0|| \exp\left(\int_{t_0}^t \underline{\lambda}(\tau) d\tau\right) \leqslant ||\mathbf{x}(t)|| \leqslant ||\mathbf{x}_0|| \exp\left(\int_{t_0}^t \overline{\lambda}(\tau) d\tau\right) \quad \forall\, t \geqslant t_0.$$

Замечание. Если $\underline{\lambda}(t)$ и $\overline{\lambda}(t)$ не зависят от t, то неравенства Важевского по форме совпадают с неравенствами (3.2).

§ 4. Матричное уравнение Ляпунова

Пусть заданы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — постоянные квадратные матрицы порядка n и m соответственно, $\mathbf{C}$ — постоянная $(n \times m)$-матрица.

Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова

$$\mathbf{AX} - \mathbf{XB} = \mathbf{C}, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{X}$ — искомая прямоугольная $(n \times m)$-матрица.

Уравнение (4.1) эквивалентно системе из nm скалярных линейных уравнений относительно элементов матрицы $\mathbf{X}$.

Справедливо следующее утверждение (см. [3] на стр. 195):

Теорема 4.1. *Если матрицы* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *не имеют общих собственных чисел, то уравнение* (4.1) *имеет одно и только одно решение.*

Следствие 4.1. *Если матрица* $\mathbf{A}$ *неособая и* $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^T$, *то уравнение* (4.1) *имеет единственное решение в виде квадратной матрицы* $\mathbf{X}$.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА

§ 5. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — n-мерный вектор (отклонение от программного движения), $\mathbf{u}(t)$ — r-мерный вектор (отклонение от программного управления), $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t) \not\equiv \mathbf{O}$ — вещественные непрерывные ограниченные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно, определённые на временном промежутке $t \geqslant 0$.

Пусть задан квадратичный функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\; dt, \tag{5.2}$$

в котором

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{u}.$$

Здесь $\mathbf{A}(t)$ — симметричная вещественная непрерывная ограниченная $(n\times n)$-матрица, $\mathbf{B}(t)$ — вещественная непрерывная ограниченная $(n \times r)$-матрица, $\mathbf{C}(t)$ — симметричная положительно определённая вещественная непрерывная ограниченная $(r \times r)$-матрица, определённые на временном промежутке $t \geqslant 0$.

Поясним *существенное* предположение о положительной определенности матрицы $\mathbf{C}$. Это, по определению, означает, что существует положительное число γ такое, что

$$\mathbf{u}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{u} \geqslant \gamma\mathbf{u}^T\mathbf{u} \quad \text{при всех } t \geqslant 0.$$

Определение 5.1. Вектор-функцию управления $\mathbf{u}$ назовём *допустимой*, если выполнены следующие условия:

1) она имеет вид линейной обратной связи

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{M}(t)\mathbf{x},$$

где $\mathbf{M}(t)$ — вещественная непрерывная ограниченная $(r \times n)$-матрица, заданная при $t \geqslant 0$;

2) каждое решение системы

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}(t))\,\mathbf{x}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ удовлетворяет неравенству

$$||\mathbf{x}(t)|| \leqslant c_1||\mathbf{x}_0||\mathrm{e}^{-c_2(t-t_0)}, \tag{5.3}$$

при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, где c_1, c_2 — некоторые положительные константы, зависящие в общем случае от элементов матрицы $\mathbf{M}(t)$.

Все множество управлений $\mathbf{u}$, построенных по принципу полной обратной связи, и стабилизирующих систему (5.1) (в смысле неравенства (5.3)), т. е. допустимых, обозначим через U.

Замечание. Из неравенства (5.3) видно, что при подстановке допустимого управления в систему (5.1), получаем систему с асимптотически устойчивым по Ляпунову равномерно по t_0 нулевым решением.

Замечание. Из неравенства (5.3) также следует, что функционал (5.2) является конечной величиной при любом фиксированном начальном условии $\mathbf{x}_0$ и на любом допустимом управлении. Обозначим эту величину через $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$.

Определение. Допустимое управление $\mathbf{u}_*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{M}_*(t)\mathbf{x}$ назовём *оптимальным* при фиксированном начальном условии $\mathbf{x}_0$, если для любого допустимого управления $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}$ выполняется неравенство $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_*) \leqslant J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$.

Задача оптимальной стабилизации. Построить оптимальное стабилизирующее управление $\mathbf{u}_*(t, \mathbf{x})$, доставляющее минимальное значение функционалу $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ на множестве допустимых управлений U.

Сформулированная задача является одной из основных и хорошо изученных в теории управления (см., например, [1], [2], [7], [8], [11]). В отечественной литературе она называется *задачей об аналитическом конструировании регуляторов*, в западной — *задачей о линейно-квадратичном регуляторе.* Для краткости далее ее будем называть линейно-квадратичной задачей (ЛКЗ).

Иногда для сокращения записи будем опускать зависимость от t у величин, входящих в постановку задачи.

§ 6. Матричное уравнение Риккати

Сформулируем основное утверждение этой главы: о связи решения линейно-квадратичной задачи (ЛКЗ) оптимальной стабилизации с матричным дифференциальным уравнением Риккати (см. [7], [13]).

Теорема 6.1. *Для существования оптимального стабилизирующего управления* $\mathbf{u}_* = \mathbf{M}_*\mathbf{x}$ *в задаче* (5.1)–(5.2) *при любом выборе начального вектора* $\mathbf{x}_0$ *необходимо и достаточно, чтобы матричное дифференциальное уравнение Риккати*

$$\begin{gathered}\frac{d\Theta}{dt} + \Theta\mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\Theta + \Theta[\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T] + [\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T]^T\Theta - \\ -\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{O}\end{gathered} \tag{6.1}$$

имело вещественное, непрерывное, ограниченное решение, заданное при $t \geqslant 0$ *в виде такой симметричной* $(n \times n)$*-матрицы* $\Theta(t)$*, что управление*

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1}\left[\Theta\mathbf{Q} - \mathbf{B}\right]^T \mathbf{x} \tag{6.2}$$

стабилизирует систему (5.1)*. Оптимальное управление единственно и не зависит от* $\mathbf{x}_0$*. При этом матрица* $\mathbf{M}_*$ *в формуле оптимального управления определяется соотношением*

$$\mathbf{M}_* = \mathbf{C}^{-1}\left[\Theta\mathbf{Q} - \mathbf{B}\right]^T.$$

Замечание. В литературе иногда можно встретить матричное дифференциальное уравнение Риккати (6.1), записанное в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{d\Theta}{dt} - \Theta\mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\Theta + \Theta\left[\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T\right] + \left[\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T\right]^T\Theta + \\ +\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{O}.\end{gathered}$$

Несложно проверить, что это матричное уравнение даёт то же решение, что и уравнение Риккати (6.1), но с противоположным знаком. Тогда, соответствующее такой форме записи матричного уравнения Риккати, управление (6.2) примет вид

$$\mathbf{u} = -\mathbf{C}^{-1}[\Theta\mathbf{Q} + \mathbf{B}]^T\mathbf{x}.$$

На практике для решения ЛКЗ оптимальной стабилизации по теореме 6.1 нужно решить, если это возможно, матричное дифференциальное уравнение Риккати (6.1) и построить оптимальное управление $\mathbf{u}_*$ по формуле (6.2).

Замечание. Очевидно, что каждое постоянное решение (т. е. когда матрица $\Theta(t)$ не зависит от t) уравнения

$$\begin{gathered}\Theta\mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}^T\Theta + \Theta[\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T] + [\mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T]^T\Theta - \\ - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{O}\end{gathered} \tag{6.3}$$

является также и решением матричного дифференциального уравнения Риккати (6.1). Таким образом, в задаче (5.1)–(5.2) при поиске оптимального стабилизирующего управления целесообразно вначале попытаться найти постоянное вещественное решение уравнения (6.3) (см. пример 7.3 и следствие 10.1).

§ 7. Стационарный случай. Примеры

Далее в этом параграфе будем считать, что квадратичная форма $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ положительно определенная по совокупности переменных $(\mathbf{x},\mathbf{u})$[1], т. е. существует положительная константа γ такая, что

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \geqslant \gamma(\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{u}) \ \text{ для всех } \ (\mathbf{x},\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}, \qquad t \geqslant 0.$$

Как будет ниже показано (см. следствие 10.1), если матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}_0$ — постоянные и $\mathbf{u} = \mathbf{M}_0 x$ — допустимое управление, то искомое решение $\Theta(t)$ матричного дифференциального уравнения Риккати (6.1) не зависит от t (подробнее см. [7], [13]). В связи с этим, вместо решения дифференциального уравнения (6.1), можно рассмотреть матричное *алгебраическое* уравнение Риккати (6.3), в котором все (фигурирующие в нем) матрицы являются постоянными[2].

Учитывая вышесказанное, приведем «принципиальную схему» поиска оптимального стабилизирующего управления.

[1] В действительности, задача (5.1)–(5.2) имеет решение и при более слабых предположениях [13], в частности, когда только матрица $\mathbf{C}$ неотрицательно определенная.

[2] В российской (советской) литературе это уравнение также называют именем А. И. Лурье.

Алгоритм

1. Ищем решения уравнения Риккати (6.3) в виде постоянной вещественной симметрической матрицы Θ. Если такие решения нашлись, то переходим к следующему шагу, иначе ЛКЗ не имеет решения.

2. Для каждого решения Θ уравнения Риккати вычисляем матрицу $\mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1}[\Theta\mathbf{Q}-\mathbf{B}]^T$ и находим спектр матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QM}$.

3. Исключаем из рассмотрения те матрицы $\mathbf{M}$, у которых спектр матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QM}$ не лежит в левой комплексной полуплоскости.

   В результате, либо останется только одна матрица $\mathbf{M}_* := \mathbf{M}$, и тогда переходим к следующему шагу, либо ЛКЗ не имеет решения.

4. Искомым оптимальным стабилизирующим управлением является $\mathbf{u}_* = \mathbf{M}_*\mathbf{x}$.

Пример 7.1. Найти оптимальное стабилизирующее управление для стационарной ЛКЗ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \left(4x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1u + 4x_2u + u^2\right)\, dt.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = 1.$$

Составим матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$\Theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Theta + \Theta \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Theta -$$
$$- \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

В силу симметричности матрицы Θ, обозначим ее компоненты через θ_j, $j=\overline{1,3}$. Положим

$$\Theta=\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\\ \theta_2 & \theta_3\end{pmatrix}.$$

Произведя необходимые действия в уравнении Риккати и приравняв покомпонентно элементы получившейся слева матрицы к нулю, имеем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}\theta_1^2-2\theta_1-3=0,\\ \theta_1\theta_2-\theta_1-2\theta_2-1=0,\\ \theta_2^2-2\theta_3-2\theta_2-2=0.\end{cases}$$

У этой алгебраической нелинейной системы имеется два решения:

$$\Theta_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \Theta_2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Им соответствуют два управления, которые являются подозрительными на оптимальные

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{C}^{-1}(\Theta_1\mathbf{Q}-\mathbf{B})^T\mathbf{x}=\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{u}_2=\mathbf{C}^{-1}(\Theta_2\mathbf{Q}-\mathbf{B})^T\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Замыкая исходную систему примера управлением $\mathbf{u}_1$, находим её собственные числа $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$, из чего следует, что система при таком управлении не является устойчивой. Поэтому управление $\mathbf{u}_1$ не является допустимым.

Теперь замкнем систему управлением $\mathbf{u}_2$. Система при таком управлении асимптотически устойчива, т. к. её собственные числа равны -1 и -2. Нетрудно убедиться, что соответствующее её решение $\mathbf{x}$ удовлетворяет условию 2) определения 5.1. Таким образом, управление $\mathbf{u}_2$ является допустимым, а тогда по теореме 6.1 и оптимальным.

О т в е т. Искомое оптимальное стабилизирующее управление $\mathbf{u}_*=-2x_2$.

Пример 7.2. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$$

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \left(13x_1^2 + 6x_2^2 + u^2\right)\, dt.$$

Найти оптимальное стабилизирующее управление.
Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = 1.$$

Составим матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$\Theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Theta + \Theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Theta +$$
$$+ \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

В силу симметричности матрицы Θ, имеем систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_4 & \theta_5 \\ \theta_3 & \theta_5 & \theta_6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \theta_1^2 + 2\theta_2 - 13 = 0, \\ \theta_1\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0, \\ \theta_1\theta_3 - 3\theta_1 + \theta_5 = 0, \\ \theta_2^2 + 2\theta_5 - 6 = 0, \\ \theta_2\theta_3 - 3\theta_2 + \theta_6 = 0, \\ \theta_3^2 - 6\theta_3 = 0. \end{cases}$$

У этой системы имеется четыре вещественных решения и лишь одному из них соответствует допустимое управление, которое является оптимальным:

$$\Theta_* = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 \\ -6 & -30 & -15 \\ 0 & -15 & -18 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{M}_* = \mathbf{C}^{-1}(\Theta_* \mathbf{Q} - \mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

О т в е т. Искомое оптимальное стабилизирующее управление $\mathbf{u}_* = \mathbf{M}_* \mathbf{x} = -5x_1 - 6x_2$.

Пример 7.3. Найти оптимальное стабилизирующее управления для нестационарной ЛКЗ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin^2 t\, x_1 + \sin t \cos t\, x_2 + \cos t\, u_1 + \sin t\, u_2, \\ \dot{x}_2 = \sin t \cos t\, x_1 + \cos^2 t\, x_2 - \sin t\, u_1 + \cos t\, u_2, \end{cases}$$

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \left[4\cos^2 t\, x_1^2 - 4\sin(2t)\, x_1 x_2 + 4\sin^2 t\, x_2^2 + u_1^2 + u_2^2\right]\, dt.$$

Здесь

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \sin^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & \cos^2 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos^2 t & -2\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 4\sin^2 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{E}_2.$$

Составим матричное уравнение Риккати

$$\frac{d\Theta}{dt} - \Theta \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \Theta +$$

$$+ \Theta \begin{pmatrix} \sin^2 t & 1/2\sin(2t) \\ 1/2\sin(2t) & \cos^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2 t & 1/2\sin(2t) \\ 1/2\sin(2t) & \cos^2 t \end{pmatrix} \Theta +$$

$$+ \begin{pmatrix} 4\cos^2 t & -2\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 4\sin^2 t \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Видно, что решение подобного матричного дифференциального уравнения вызывает затруднение, поэтому постараемся найти стационарное решение этого уравнения (то есть постоянную вещественную матрицу Θ, которая бы удовлетворяла этому уравнению для всех $t \geqslant 0$). Такой матрицей будет

$$\Theta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда подозрительным на оптимальное будет управление

$$\mathbf{u} = -\mathbf{C}^{-1}(\Theta\mathbf{Q} + \mathbf{B})^T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2\cos t & 2\sin t \\ -2\sin t & -2\cos t \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Проверим допустимость этого управления с помощью теоремы 3.1. Замыкая исходную систему примера управлением $\mathbf{u}$, убеждаемся, что собственные числа матрицы $\widehat{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{P} + \mathbf{QM}$ не зависят от переменной t и имеют значения $\underline{\lambda} = -3/2 - \sqrt{5}/2$, $\overline{\lambda} = -3/2 + \sqrt{5}/2$. Поэтому из неравенства Важевского следует, что соответствующее её решение $\mathbf{x}$ удовлетворяет условию 2) определения 5.1. Таким образом, управление $\mathbf{u}$ является допустимым, а тогда по теореме 6.1 и оптимальным.

О т в е т. Искомое оптимальное стабилизирующее управление $\mathbf{u}_* = \mathbf{M}_*\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2x_1\cos t + 2x_2\sin t \\ -2x_1\sin t - 2x_2\cos t \end{pmatrix}$.

Пример 7.4. Найти оптимальное стабилизирующее управления для нестационарной ЛКЗ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + x_2(3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}) + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 2), \end{cases}$$

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \left[x_1^2 + x_2^2(4 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}) - 2x_1x_2(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}) + u^2\right]\, dt.$$

Здесь

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} & 3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 1 & 4 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{C}(t) = 1.$$

Составим матричное уравнение Риккати

$$\frac{d\Theta}{dt} - \Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Theta +$$

$$+ \Theta \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} & 3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} & 1 \\ 3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 2 \end{pmatrix} \Theta +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 1 & 4 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Решение полученного матричного дифференциального уравнения вызывает затруднение. Однако найти его можно в виде

$$\Theta(t) = \Theta_0(t) + \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\Theta_1(t) + \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\Theta_2(t),$$

то есть

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{110} + \theta_{111}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \theta_{112}\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} & \theta_{120} + \theta_{121}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \theta_{122}\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \\ \theta_{120} + \theta_{121}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \theta_{122}\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} & \theta_{220} + \theta_{221}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \theta_{222}\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \end{pmatrix}.$$

Действительно, произведя необходимые действия в уравнении Риккати и приравняв покомпонентно элементы получившейся слева матрицы к нулю, имеем систему из трёх уравнений с девятью неизвестными:

$$\begin{aligned}
&(-\theta_{111} - 2\theta_{110} + 2\theta_{121} - 2\theta_{110}\theta_{111})\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \\
&+ (-2\theta_{112} - 2\theta_{111} + 2\theta_{122} - 2\theta_{110}\theta_{112} - \theta_{111}^2)\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + \\
&+ (-2\theta_{112} - 2\theta_{111}\theta_{112})\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}} - \theta_{112}^2\mathrm{e}^{-4\mathrm{t}} + 2\theta_{120} - \theta_{110}^2 + 1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-\theta_{110}\theta_{121} - \theta_{111}\theta_{120} + \theta_{221} - 3\theta_{121} + 3\theta_{110} + 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \\
&+ (-\theta_{110}\theta_{122} - \theta_{111}\theta_{121} - \theta_{112}\theta_{120} + \\
&+ \theta_{222} - 4\theta_{122} - \theta_{110} + 3\theta_{111})\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + \\
&+ (-\theta_{111}\theta_{122} - \theta_{112}\theta_{121} - \theta_{111} + 3\theta_{112})\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}} + \\
&+ (-\theta_{112}\theta_{122} - \theta_{112})\mathrm{e}^{-4\mathrm{t}} + \theta_{220} - 1 - 2\theta_{120} - \theta_{110}\theta_{120} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-5\theta_{221} + 6\theta_{120} + 2\theta_{220} - 2\theta_{120}\theta_{121} - 2)\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \\
&+ (-6\theta_{222} - 2\theta_{120} + 6\theta_{121} + 2\theta_{221} - 2\theta_{120}\theta_{122} - \\
&- \theta_{121}^2 + 1)\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + (-2\theta_{121} + 6\theta_{122} + 2\theta_{222} - 2\theta_{121}\theta_{122})\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}} + \\
&+ (-2\theta_{122} - \theta_{122}^2)\mathrm{e}^{-4\mathrm{t}} - 4\theta_{220} - \theta_{120}^2 + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку эти равенства должны выполняться при всех $t \geqslant 0$, то приравняем к нулю все коэффициенты при различных степенях экспоненты. Получаем следующие пять подсистем:

при $\mathrm{e}^{-4\mathrm{t}}$:

$$\begin{cases} -\theta_{112}^2 = 0, \\ -\theta_{112}\theta_{122} - \theta_{112} = 0, \\ -2\theta_{122} - \theta_{122}^2 = 0, \end{cases}$$

при $\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}$:

$$\begin{cases} -2\theta_{112} - 2\theta_{111}\theta_{112} = 0, \\ -\theta_{111}\theta_{122} - \theta_{112}\theta_{121} - \theta_{111} + 3\theta_{112} = 0, \\ -2\theta_{121} + 6\theta_{122} + 2\theta_{222} - 2\theta_{121}\theta_{122} = 0, \end{cases}$$

при $\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}$:

$$\begin{cases} -2\theta_{112} - 2\theta_{111} + 2\theta_{122} - 2\theta_{110}\theta_{112} - \theta_{111}^2 = 0, \\ -\theta_{110}\theta_{122} - \theta_{111}\theta_{121} - \theta_{112}\theta_{120} + \theta_{222} - \\ \qquad - 4\theta_{122} - \theta_{110} + 3\theta_{111} = 0, \\ -6\theta_{222} - 2\theta_{120} + 6\theta_{121} + 2\theta_{221} - 2\theta_{120}\theta_{122} - \theta_{121}^2 + 1 = 0, \end{cases}$$

при $\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$:

$$\begin{cases} -\theta_{111} - 2\theta_{110} + 2\theta_{121} - 2\theta_{110}\theta_{111} = 0, \\ -\theta_{110}\theta_{121} - \theta_{111}\theta_{120} + \theta_{221} - 3\theta_{121} + 3\theta_{110} + 1 = 0, \\ -5\theta_{221} + 6\theta_{120} + 2\theta_{220} - 2\theta_{120}\theta_{121} - 2 = 0, \end{cases}$$

при e^{0}:

$$\begin{cases} 2\theta_{120} - \theta_{110}^2 + 1 = 0, \\ \theta_{220} - 1 - 2\theta_{120} - \theta_{110}\theta_{120} = 0, \\ -4\theta_{220} - \theta_{120}^2 + 4 = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Начнём исследование этих систем с последней системы (7.2). Эта система имеет четыре решения. Будем далее рассматривать только первое из них: $\theta_{110} = 1$, $\theta_{120} = 0$, $\theta_{220} = 1$. Из первого уравнения основной системы приравняем к нулю коэффициент при e^{-4t}, получим $-\theta_{112}^2 = 0$, откуда $\theta_{112} = 0$. Подставив уже четыре эти найденных значения в третье уравнение основной системы, приравняем к нулю коэффициент при e^{-t}, получим $-5\theta_{221} = 0$, откуда $\theta_{221} = 0$. Подставив уже пять найденных значений во второе уравнение основной системы, приравняем к нулю коэффициент при e^{-t}, получим $-4\theta_{121}+4 = 0$, откуда $\theta_{121} = 1$. Подставив шесть этих найденных значений в первое уравнение основной системы, приравняем к нулю коэффициент при e^{-t}, получим $-3\theta_{111} = 0$, откуда $\theta_{111} = 0$, и тут же подставив это значение в это же уравнение, приравняем к нулю коэффициент при e^{-2t}, получим $2\theta_{122} = 0$, откуда $\theta_{122} = 0$. Наконец, подставив уже восемь этих найденных значений в третье уравнение основной системы, приравняем к нулю коэффициент при e^{-3t}, получим $-2 + 2\theta_{222} = 0$, откуда $\theta_{222} = 1$ (или приравняем к нулю коэффициент при e^{-2t}, получим $-6+6\theta_{222} = 0$, откуда также $\theta_{222} = 1$). Окончательно убеждаемся, что полученные значения удовлетворяют основной системе и обращают её в тождество при всех $t \geqslant 0$. Запишем полученное решение

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} & 1 + \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Тогда подозрительным на оптимальное будет управление

$$\mathbf{u} = -\mathbf{C}^{-1}(\Theta\mathbf{Q} + \mathbf{B})^T\mathbf{x} = (-1 \ \ -\mathrm{e}^{-t})\mathbf{x}.$$

Проверим допустимость этого управления с помощью теоремы 3.1. Замыкая исходную систему примера управлением $\mathbf{u}$, убеждаемся, что собственные числа матрицы $\widehat{\mathbf{D}}$ (см. (3.3)), где $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \mathbf{QM}$, имеют следующий вид

$$\underline{\lambda}(t) = -3/2 - 1/2\sqrt{2 + 6\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-4t}},$$
$$\overline{\lambda}(t) = -3/2 + 1/2\sqrt{2 + 6\mathrm{e}^{-2t} - 4\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-4t}},$$

поэтому из неравенств Важевского следует, что соответствующее её решение $\mathbf{x}$ удовлетворяет условию 2) определения 5.1. Поскольку, как легко проверить, справедливы неравенства

$$\underline{\lambda}(t) < 0 \quad \text{и} \quad \overline{\lambda}(t) \leqslant -3/2 + 1/2\sqrt{5} < 0 \quad \forall t \geqslant 0.$$

Таким образом, управление $\mathbf{u} = -x_1 - e^{-t}x_2$ является допустимым, а тогда по теореме 6.1 и оптимальным. □

§ 8. Скалярный случай. Примеры

Рассмотрим линейное скалярное уравнение в отклонениях

$$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t)u(t), \tag{8.1}$$

где x — фазовая траектория, u — функция управления, $p(t)$, $q(t)$ — вещественные непрерывные и ограниченные функции, определённые при $t \geqslant 0$.

Пусть задан квадратичный функционал

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty W(x(t), u(t))dt,$$

в котором

$$W(x, u) = a(t)x^2 + 2b(t)xu + c(t)u^2,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — вещественные непрерывные и ограниченные функции определённые при $t \geqslant 0$, при этом дополнительно предположим, что $c(t) > 0$ при всех $t \geqslant 0$.

Понятно, что на скалярный случай распространяются введенные в § 5 понятия допустимого и оптимального управлений. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 8.1. (О связи решения ЛКЗ оптимальной стабилизации с уравнением Риккати). *Для существования оптимального управления* $u_*(t) = m_*(t)x(t)$ *системы* (8.1) *при любом выборе начального условия* x_0 *необходимо и достаточно, чтобы скалярное дифференциальное уравнение Риккати*

$$\dot{\theta} + \frac{q^2}{c}\theta^2 + 2\left(p - \frac{qb}{c}\right)\theta - a + \frac{b^2}{c} = 0 \tag{8.2}$$

имело вещественное непрерывное ограниченное решение $\theta(t)$, *заданное при* $t \geqslant 0$ *и такое, чтобы управление*

$$u(t, x) = \frac{1}{c}(q\theta - b)x \tag{8.3}$$

было допустимым. При этом функция $m_*(t)$ *в формуле оптимального управления определяется соотношением*

$$m_*(t) = \frac{1}{c}(q\theta - b).$$

Замечание. В скалярном случае нестационарное уравнение Риккати исследовано наиболее полно. Но даже в этом случае задача не решена полностью (см. [5]).

Рассмотрим скалярное уравнение Риккати подробнее, переписав его в стандартном виде

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)y^2(t) + c(t),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные непрерывные функции на рассматриваемом промежутке.

Утверждение. (О представлении общего решения скалярного уравнения Риккати). *Если известно некоторое частное решение $w(t)$ скалярного уравнения Риккати, то его общее решение представимо в виде*

$$y(t) = w(t) + h(t),$$

где функция $h(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\dot{h}(t) = b(t)h^2(t) + (2b(t)w(t) + a(t))\, h(t).$$

Отметим, что если удаётся подобрать некоторое частное решение скалярного уравнения Риккати, то это утверждение позволяет получить решение в явном виде, поскольку задача сведена к уравнению Бернулли, для которого известен метод построения явного решения.

Пример 8.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{-t}x + u$$

и минимизируемый функционал

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \left(x^2 + u^2\right)\, dt.$$

Здесь

$$p(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad q = 1,$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Составим дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{\theta} + \theta^2 + 2\mathrm{e}^{-t}\theta - 1 = 0.$$

Несложно проверить, что ему удовлетворяет семейство решений

$$\theta(t, C_1) = \frac{\mathrm{e}^t + C_1 \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} - 2C_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{-t}}}{C_1 \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} + \mathrm{e}^t + 2}. \tag{8.4}$$

Попытаемся найти такое значение постоянной интегрирования C_1, при котором это решение было бы вещественным непрерывным и ограниченным при $t \geqslant 0$. А также, чтобы управление u, вычисленное по формуле $\frac{1}{c}(q\theta - b)x$, было допустимым. Итак, замкнём исходное уравнение управлением

$$u(t, x) = \frac{\mathrm{e}^t + C_1 \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} - 2C_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{-t}}}{C_1 \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} + \mathrm{e}^t + 2} x.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{-t} x + \frac{\mathrm{e}^t + C_1 \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} - 2C_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{-t}}}{C_1 \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} + \mathrm{e}^t + 2} x.$$

Его общим решением будет

$$x(t, C_2, C_1) = C_2 \big(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}+t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}+t} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\big).$$

Вычислим $\lim_{t\to\infty} x(t, C_2, C_1) = \operatorname{sign}(C_2(C_1+1))\cdot\infty$. Отсюда видно, что кроме тривиального случая $C_2 = 0$, соответствующего начальному условию $x(0) = 0$, решение может быть допустимым только при $C_1 = -1$. Очевидно, что при $C_1 = -1$ и при любом C_2 полученное решение удовлетворяет условию (5.3). Далее, поскольку функция $\theta(t, -1)$ (см. (8.4)) является вещественной непрерывной и ограниченной при $t \geqslant 0$, то по теореме 8.1 управление

$$u(t, x) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{-t}}}{-\mathrm{e}^{t+2\mathrm{e}^{-t}} + \mathrm{e}^t + 2} x$$

является оптимальным. □

Замечание. Из теории известно, что решение скалярного дифференциального уравнения Риккати (8.2) в общем случае не может быть выражено в квадратурах, либо обычно это очень трудоемкий процесс. Поэтому вместо решения уравнения (8.2) вначале стоит попытаться найти постоянные вещественные корни уравнения

$$\frac{q^2}{c}\theta^2 + 2\left(p - \frac{qb}{c}\right)\theta - a + \frac{b^2}{c} = 0. \tag{8.5}$$

В некоторых случаях (см. следствие 11.1 на стр. 53) этого достаточно для исследования рассматриваемой задачи.

Утверждение 8.1. *Если квадратичная форма $W(x,u)$ положительно определенная по совокупности переменных (x,u), то алгебраическое уравнение Риккати (8.5) всегда имеет два различных вещественных корня.*

Доказательство. Из положительной определённости квадратичной формы $W(x,u)$ по совокупности переменных (x,u) в силу критерия Сильвестра имеем $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, откуда

$$c > 0 \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} - \left(\frac{b}{c}\right)^2 > 0.$$

Поэтому для дискриминанта D квадратного уравнения Риккати (8.5) справедливо неравенство

$$\frac{1}{4}D = \left(p - \frac{qb}{c}\right)^2 + q^2\left(\frac{a}{c} - \left(\frac{b}{c}\right)^2\right) > 0.$$

А это означает, что у квадратного уравнения Риккати два различных вещественных корня. ■

Пример 8.2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = 2x + u$$

и минимизируемый функционал

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \left(5x^2 + u^2\right)\, dt.$$

Здесь

$$p = 2, \quad q = 1,$$

$$a = 5, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Составим алгебраическое уравнение Риккати

$$\theta^2 + 4\theta - 5 = 0.$$

У этого уравнения имеется два решения

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = -5$$

и соответствующие им два управления, которые являются подозрительными на оптимальные

$$u_1(t,x) = \frac{1}{c}(q\theta_1 - b)x = x,$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{c}(q\theta_2 - b)x = -5x.$$

Замыкая исходную систему примера управлением u_1, находим её решение $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{3t}$, из чего следует что уравнение при таком управлении не является устойчивым, а следовательно и оптимальным.

Теперь замкнем систему управлением u_2. Находим её решение $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-3t}$, из чего следует что это решение является допустимым, а тогда по теореме 8.1 и оптимальным. $\square$

Приведем примеры, в которых у квадратичной формы $W(x,u)$ нарушено условие положительной определенности по совокупности переменных (x,u) (см. первую сноску на стр. 25).

Пример 8.3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = px + qu$$

и минимизируемый функционал

$$J(x,u) = \int_0^\infty \left(ax^2 + 2bxu + cu^2\right)\, dt.$$

Положим $m := 2\big(p - \frac{qb}{c}\big)$, $\frac{q^2}{c} =: \ell > 0$. При этом будем считать, что $a - \frac{b^2}{c} = 0$.

Пусть сначала $m > 0$. Составим алгебраическое уравнение Риккати

$$\ell\theta^2 + m\theta = 0.$$

Возьмём решение этого уравнения

$$\theta = -\frac{m}{\ell}$$

и построим соответствующее ему управление, которое является подозрительным на оптимальное

$$u(t, x) = \frac{1}{c}\left(-\frac{m}{\ell}q - b\right)x.$$

Замыкая систему этим управлением, находим её решение $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\frac{m}{2}t}$. Из чего следует, что это управление является допустимым, а тогда по теореме 8.1 и оптимальным.

Пусть теперь $m < 0$. Составим алгебраическое уравнение Риккати

$$\ell\theta^2 - m\theta = 0.$$

Возьмём решение этого уравнения $\theta = 0$ и построим соответствующее ему управление, которое является подозрительным на оптимальное

$$u(t, x) = -\frac{b}{c}x.$$

Замыкая систему этим управлением, находим её решение $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\frac{m}{2}t}$, из чего следует, что это управление является допустимым, а тогда по теореме 8.1 и оптимальным.

Наконец, заметим, что в обоих случаях были опущены решения уравнений Риккати, которым соответствуют недопустимые управления. $\square$

Пример 8.4. Пусть $p \neq 0$, $q \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = px + qu$$

и минимизируемый функционал

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (px + qu)^2 \ dt.$$

Здесь

$$a = p^2, \quad b = pq, \quad c = q^2.$$

Составим скалярное уравнение Риккати

$$\theta^2 = 0.$$

У этого уравнения имеется единственное решение $\theta = 0$ и соответствующее ему управление, которое является подозрительным на оптимальное

$$u(t,x) = -\frac{p}{q}x.$$

Замыкая исходную систему полученным управлением u, находим её решение $x(t) = x_0$, которое не является допустимым.

Мы рассмотрели управление, построенное по решению алгебраического уравнения Риккати, и оказалось, что оно не является допустимым.

Покажем, что в данном случае нет также ни одного допустимого управления, построенного по решению дифференциального уравнения Риккати (см. (8.2)):

$$\dot{\theta} + \theta^2 = 0.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$\theta(t, C_1) = \frac{1}{t + C_1},$$

(тождественно нулевое решение $\theta(t) = 0$ получается при $C_1 = \infty$), поэтому подозрительным на оптимальное будет управление

$$u(t,x) = \Big(\frac{1}{q(t + C_1)} - \frac{p}{q}\Big)x.$$

Замкнув исходное уравнение этим управлением, получим

$$\dot{x} = \frac{1}{t + C_1}x.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$x(t) = C_2(t + C_1).$$

Видно, что, кроме тривиального случая $C_2 = 0$, соответствующего начальному условию $x(0) = 0$, это решение не является ограниченным при $t \geqslant 0$ ни при каких значениях постоянных интегрирования C_1, C_2, поэтому построенное управление не является допустимым, следовательно, оно тем более не является оптимальным.

Таким образом, из теоремы 8.1 следует, что в этом примере не существует оптимального управления. □

Замечание. Заметим, что для исследования примера 8.4 мы рассматривали как алгебраическое, так и дифференциальное уравнения Риккати, несмотря на то, что данный пример является стационарным. Однако следствие 11.1 (см. стр. 53) покажет, что в некоторых случаях для построение оптимального управления достаточно ограничиться исследованием только алгебраического уравнения Риккати.

ГЛАВА 3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В. И. ЗУБОВА

Как видно из теоремы 6.1, для построения оптимального стабилизирующего управления в ЛКЗ достаточно найти решение (матрицу Θ_*) матричного дифференциального уравнения Риккати (6.1) (с указанными в теореме свойствами), тогда оптимальное управление даётся формулой (6.2). Однако основная трудность в нахождении матрицы Θ_* заключается в нелинейности уравнения Риккати и в отсутствии информации о начальных условиях. Поэтому для поиска решения прибегают к приближенным методам.

Ниже будет рассмотрен метод последовательных приближений, предложенный В. И. Зубовым. Основные его черты заключаются в последовательном решении линейных матричных дифференциальных (или алгебраических) уравнений и нахождении приближений к матрице Θ_* с любой наперёд заданной точностью.

§ 9. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}, \tag{9.1}$$

и минимизируемый функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt, \tag{9.2}$$

в котором

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{C}(t)\mathbf{u}.$$

В этой главе считаем, что квадратичная форма $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ положительно определенная по совокупности переменных $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, т. е. существует положительная константа γ такая, что

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqslant \gamma(\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{u}) \ \text{ для всех } \ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0}, \quad t \geqslant 0.$$

Также предположим, что ЛКЗ оптимальной стабилизации имеет хотя бы одно допустимое управление (см. определение 5.1 на стр. 22).

Возьмём некоторое допустимое управление

$$\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x}) = \mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$$

и рассмотрим соответствующее ему линейное матричное дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\begin{gathered}\frac{d\Theta}{dt} + \Theta(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_0) + (\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_0)^T\Theta - \\ - [\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_0 + (\mathbf{B}\mathbf{M}_0)^T + \mathbf{M}_0^T\mathbf{C}\mathbf{M}_0] = \mathbf{O}.\end{gathered} \tag{9.3}$$

По теории (см. теорему 9.1), это уравнение имеет единственное вещественное непрерывное ограниченное решение $\Theta_1(t)$, заданное при $t \geqslant 0$. Положим

$$\mathbf{u}_1(t,\mathbf{x}) = \mathbf{M}_1(t)\mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}^{-1}\left[\Theta_1\mathbf{Q} - \mathbf{B}\right]^T.$$

Тогда это управление также будет допустимым. Заменяя в уравнении (9.3) матрицу $\mathbf{M}_0$ на построенную матрицу $\mathbf{M}_1$, найдем его решение $\Theta_2(t)$. Далее действуем аналогично. В результате получим две последовательности:

$$\begin{array}{ccccc} \Theta_1 & \Theta_2 & \ldots & \Theta_k & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_k & \ldots \end{array}$$

где

$$\mathbf{u}_k(t,\mathbf{x}) = \mathbf{M}_k(t)\mathbf{x},$$
$$\mathbf{M}_k = \mathbf{C}^{-1}[\Theta_k\mathbf{Q} - \mathbf{B}]^T.$$

Здесь при каждом $k = 1, 2, \ldots$ управление $\mathbf{u}_k$ является допустимым, а матрица $\Theta_k(t)$ — единственным вещественным непрерывным ограниченным решением матричного уравнения (9.3) (с заменённым в нём индексом 0 на индекс $k-1$) при $t \geqslant 0$.

Теорема 9.1. (О сходимости метода последовательных приближений Зубова). *Пусть* $T > 0$. *Если квадратичная форма* $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ *положительно определена по совокупности переменных* $(\mathbf{x},\mathbf{u})$, *а управление* $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x}) = \mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$ *допустимо, то*:

1) *для системы* (9.1) *существует управление, оптимальное по отношению к функционалу* (9.2) *для любого начального условия* $\mathbf{x}_0$;

2) *последовательность* $\Theta_1(t), \Theta_2(t), \ldots$ *сходится равномерно на каждом конечном промежутке* $[0, T]$ *к вещественной непрерывной ограниченной матрице* $\Theta_*(t)$ *при* $t \geqslant 0$, *являющейся решением уравнения Риккати* (*см.* (6.1) *на стр. 24*);

3) *последовательность* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ *сходится к оптимальному управлению* $\mathbf{u}_*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{M}_*(t)\mathbf{x}$ *равномерно в каждой ограниченной области изменения переменных* $\mathbf{x}$, t.

Следствие. *Для любых* $t_0 \geqslant 0$ *и* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *справедливо*

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_*) = \mathbf{x}_0^T \Theta_*(t_0)\mathbf{x}_0.$$

Следствие. *Каково бы ни было допустимое управление* $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{M}_0(t)\mathbf{x}$, *играющее роль начального приближения, матрица* $\Theta_*(t)$ *не изменится ввиду единственности оптимального управления. Следовательно, от начального приближения зависит лишь быстрота сходимости последовательности приближений.*

§ 10. Стационарный случай. Примеры

В этом параграфе рассматривается только стационарная ЛКЗ оптимальной стабилизации.

Утверждение 10.1. *Если матрицы* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}_0$ — *постоянные и* $\mathbf{u} = \mathbf{M}_0\mathbf{x}$ — *допустимое управление, то вместо матричного дифференциального уравнения Ляпунова* (*см.* (9.3)) *достаточно решить соответствующее матричное алгебраическое уравнение Ляпунова*

$$\begin{aligned} &\Theta(\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_k) + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_k)^T\Theta - \\ &- [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_k + (\mathbf{B}\mathbf{M}_k)^T + \mathbf{M}_k^T\mathbf{C}\mathbf{M}_k] = \mathbf{O}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Доказательство. Предположим, что существует такая постоянная матрица $\mathbf{M}_0$, что соответствующее управление $\mathbf{u}_0$ будет допустимым. При этом определитель $\det(\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_0)$ будет ненулевым, поскольку в противном случае у замкнутой управлением $\mathbf{u}_0$

системы было бы нулевое собственное число (так как $\lambda = 0$ удовлетворяло бы в этом случае уравнению $\det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_0)) = 0$), что противоречит допустимости управления $\mathbf{u}_0$.

Тогда для этой матрицы $\mathbf{M}_0$ из уравнения (10.1) находим Θ_1, это решение существует и единственно по следствию 4.1. А поскольку в методе последовательных приближений система (9.3) обладает единственным вещественным непрерывным ограниченным при $t \geqslant 0$ решением, то найденное Θ_1 и есть это решение при $k = 0$.

Далее, поскольку в методе последовательных приближений матрица $\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}^{-1}[\Theta_1\mathbf{Q} - \mathbf{B}]^T$ порождает допустимое управление $\mathbf{u}_1$, то $\det(\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_1) \neq 0$, что доказывается точно так же, как в случае матрицы $\mathbf{M}_0$. Тогда для матрицы $\mathbf{M}_1$ из уравнения (10.1) находим единственное его решение Θ_2, а поскольку в методе последовательных приближений уравнение (9.3) обладает единственным вещественным непрерывным ограниченным при $t \geqslant 0$ решением, то найденное Θ_2 и есть это решение при $k = 1$.

Рассуждая аналогично для $k \geqslant 2$, убеждаемся, что на каждой итерации действительно достаточно решать матричное алгебраическое уравнение Ляпунова (10.1). ■

Из утверждения 10.1 и теоремы 9.1 вытекает

Следствие. *Если квадратичная форма* $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ *положительно определена по совокупности переменных* $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, *и существует постоянная матрица* $\mathbf{M}_0$, *порождающая допустимое управление* $\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}_0\mathbf{x}$, *то, начиная с этого управления* $\mathbf{u}_0$, *метод последовательных приближений Зубова приводит к оптимальному управлению, причём на каждом шаге достаточно решать матричное алгебраическое уравнение Ляпунова* (10.1).

Поскольку в этом случае на каждом шаге получается постоянная матрица Θ_k, то по теореме 9.1 эта последовательность сходится к решению уравнения Риккати (6.3) в виде постоянной матрицы. Тем самым мы получаем следующий результат.

Следствие 10.1. *Если квадратичная форма* $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ *положительно определена по совокупности переменных* $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, *то в случае существования постоянной матрицы* $\mathbf{M}_0$, *порождающей допустимое управление* $\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}_0\mathbf{x}$, *матричное алгебраическое уравнение Риккати* (6.3) *всегда имеет множество решений. Причём только одно из них порождает оптимальное управление, вычисляемое по формуле* (6.2).

Метод последовательных приближений В. И. Зубова

1. Находим матрицу $\mathbf{M}_0$ такую, чтобы управление $\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}_0\mathbf{x}$ было допустимым, т. е. собственные числа матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_0$ лежали в левой комплексной полуплоскости. Для этого можно воспользоваться алгоритмами, описанными в § 2.

   Если допустимое управление не удается найти, то оптимального стабилизирующего управления не существует.

2. Пусть уже имеется k-ое приближение, а именно матрица $\mathbf{M}_k$. Используя матрицу $\mathbf{M}_k$, составляем соответствующее матричное уравнение Ляпунова:

$$\begin{gathered}\Theta(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_k)+(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{M}_k)^T\Theta-\\ -\left[\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_k+(\mathbf{B}\mathbf{M}_k)^T+\mathbf{M}_k^T\mathbf{C}\mathbf{M}_k\right]=\mathbf{O}.\end{gathered} \tag{10.2}$$

   Обозначим его решение через Θ_{k+1}.

3. Вычисляем очередное приближение по формуле

$$\mathbf{M}_{k+1}=\mathbf{C}^{-1}\left[\Theta_{k+1}\mathbf{Q}-\mathbf{B}\right]^T.$$

Замечание. В дальнейшем, при реализации метода последовательных приближений Зубова, в качестве правила для прекращения вычислений, мы будем ограничиваться количеством построенных приближений.

Пример 10.1. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1-x_2+u,\\ \dot{x}_2=-x_2,\end{cases}$$

$$J(\mathbf{x}_0,\mathbf{u})=\int_0^\infty\left(4x_1^2-2x_1x_2+6x_2^2-2x_1u+4x_2u+u^2\right)\,dt.$$

Требуется построить три последовательных приближения методом Зубова.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-2&-1\\0&-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-1\\-1&6\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=1.$$

1. В силу того, что матрица $\mathbf{P}$ верхнетреугольная, и на главной диагонали стоят отрицательные (собственные) числа, то в качестве начального допустимого управления $\mathbf{u}_0$ можно взять тождественный нуль, т. е. $\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Запишем уравнение Ляпунова (10.2):

$$\Theta \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Theta - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{O}. \qquad (10.3)$$

   Пусть $\Theta = \left(\begin{smallmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_3 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда уравнение (10.3) примет вид:

$$\begin{cases} -4\theta_1 - 4 = 0, \\ -\theta_1 - 3\theta_2 + 1 = 0, \\ -2\theta_2 - 2\theta_3 - 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = -1, \\ \theta_2 = \frac{2}{3}, \\ \theta_3 = -\frac{11}{3}, \end{cases} \Rightarrow \Theta_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим второе приближение:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}^{-1} \left[\Theta_1 \mathbf{Q} - \mathbf{B}\right]^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

4. Используя $\mathbf{M}_1$, запишем уравнение Ляпунова (10.2) :

$$\Theta \begin{pmatrix} -2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -\frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix} \Theta - \begin{pmatrix} 4 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{22}{9} \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

   Имеем

$$\begin{cases} -4\theta_1 - 4 = 0, \\ -\frac{7}{3}\theta_1 - 3\theta_2 - \frac{1}{3} = 0, \\ -\frac{14}{3}\theta_2 - 2\theta_3 - \frac{22}{9} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = -1, \\ \theta_2 = \frac{2}{3}, \\ \theta_3 = -\frac{25}{9}, \end{cases} \Rightarrow \Theta_2 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{25}{9} \end{pmatrix}.$$

5. Вычислим третье приближение:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{C}^{-1} \left[\Theta_2 \mathbf{Q} - \mathbf{B}\right]^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица Θ_2 удовлетворяет матричному уравнению Риккати (6.3), а значит управление $\mathbf{u}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{x}$ является оптимальным (см. теорему 6.1). □

Пример 10.2. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации из примера 7.2 (см. стр. 28). Построим три последовательных приближения методом Зубова.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = 1.$$

1. Несложно убедиться, что критерий Калмана (полной управляемости) выполнен, поэтому система стабилизируема (см. теорему 2.1). Построим допустимое управление $\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}_0\mathbf{x}$ такое, чтобы спектр матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_0$ состоял из эталонных чисел $\mu_k = -1$, $k = \overline{1,3}$.

   Положим $\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Для поиска вещественных чисел m_1, m_2 и m_3, приравняем коэффициенты характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{M}_0$ и эталонного многочлена $\psi(\lambda) = \prod_{k=1}^{3}(\lambda - \mu_k)$. Имеем

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \\ \varphi(\lambda) &= \lambda^3 - m_1\lambda^2 - m_2\lambda - m_3 + 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -3, \\ m_2 = -3, \\ m_3 = 2. \end{cases}$$

   Итак, матрица $\mathbf{M}_0$ равна $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Запишем уравнение Ляпунова (10.2):

$$\begin{aligned} \Theta \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Theta - \\ - \begin{pmatrix} 22 & 9 & -6 \\ 9 & 15 & -6 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{O}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

   Пусть $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_4 & \theta_5 \\ \theta_3 & \theta_5 & \theta_6 \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение (10.4) примет вид:

$$\begin{cases} -6\theta_1 + 2\theta_2 - 22 = 0, \\ -3\theta_1 - 3\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 9 = 0, \\ -\theta_1 - 3\theta_3 + \theta_5 + 6 = 0, \\ -6\theta_2 + 2\theta_5 - 15 = 0, \\ -\theta_2 - 3\theta_3 + \theta_6 + 6 = 0, \\ -2\theta_3 - 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \Theta_1 = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 105 & 139 & 32 \\ 139 & 556 & 297 \\ 32 & 297 & 331 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим второе приближение:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{C}^{-1}\left[\Theta_1\mathbf{Q} - \mathbf{B}\right]^T = \begin{pmatrix} -\frac{105}{16} & -\frac{139}{16} & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Используя $\mathbf{M}_1$, запишем уравнение Ляпунова (10.2):

$$\Theta\begin{pmatrix} -\frac{105}{16} & -\frac{139}{16} & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{105}{16} & 1 & 0 \\ -\frac{139}{16} & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Theta - \begin{pmatrix} \frac{14353}{256} & \frac{14595}{256} & \frac{105}{8} \\ \frac{14595}{256} & \frac{20857}{256} & \frac{139}{8} \\ \frac{105}{8} & \frac{139}{8} & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Имеем

$$\begin{cases} -\frac{105}{8}\theta_1 + 2\theta_2 - \frac{14353}{256} = 0, \\ -\frac{139}{16}\theta_1 - \frac{105}{16}\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \frac{14595}{256} = 0, \\ -5\theta_1 - \frac{105}{16}\theta_3 + \theta_5 - \frac{105}{8} = 0, \\ -\frac{139}{8}\theta_2 + 2\theta_5 - \frac{20857}{256} = 0, \\ -5\theta_2 - \frac{139}{16}\theta_3 + \theta_6 - \frac{139}{8} = 0, \\ -10\theta_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Находим

$$\Theta_2 = -\frac{1}{426080}\begin{pmatrix} 2242763 & 2773745 & 170432 \\ 2773745 & 13224720 & 6739975 \\ 170432 & 6739975 & 7946213 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислим третье приближение:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2242763}{426080} & -\frac{554749}{85216} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\mathbf{M}_2 \approx \begin{pmatrix} -5,26 & -6,51 & -0,40 \end{pmatrix}$ является довольно хорошим приближением к $\mathbf{M}_*$, оптимального управления $\mathbf{u}_* = \mathbf{M}_*\mathbf{x}$. Действительно, если отбросить дробную часть элементов матрицы $\mathbf{M}_2$, то получим $\mathbf{M}_*$. А если отбросить дробную часть элементов матрицы Θ_2, то получим Θ_* (см. (7.1)), которое удовлетворяет матричному уравнению Риккати. □

§ 11. Скалярный случай. Примеры

Рассмотрим линейное скалярное уравнение в отклонениях

$$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t)u(t), \tag{11.1}$$

и квадратичный функционал

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty W(x(t), u(t))dt, \tag{11.2}$$

в котором

$$W(x, u) = a(t)x^2 + 2b(t)xu + c(t)u^2.$$

Здесь квадратичная форма $W(x, u)$ положительно определена по совокупности переменных (x, u), что, в силу критерия Сильвестра, означает выполнение условий:

$$a > 0, \qquad ac - b^2 > 0.$$

Отсюда следует, что $c > 0$. Предположим также, что ЛКЗ оптимальной стабилизации имеет хотя бы одно допустимое управление.

Возьмём некоторое допустимое управление

$$u_0(t, x) = m_0(t)x$$

и рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{\theta} + 2\theta(p + qm_0) - (a + 2m_0b + m_0^2c) = 0. \tag{11.3}$$

По теории (см. теорему 11.1) это уравнение имеет единственное вещественное непрерывное ограниченное решение $\theta_1(t)$, заданное при $t \geqslant 0$.

Положим

$$u_1(t,x) = m_1(t)x,$$

где

$$m_1(t) = \frac{1}{c}(q\theta_1 - b).$$

Это управление будет допустимым. Заменяя в уравнении (11.3) функцию m_0 на построенную функцию m_1, найдем и его решение θ_2. Далее действуем аналогично.

В результате получим последовательность допустимых управлений u_k, где

$$u_k(t,x) = m_k(t)x,$$
$$m_k(t) = \frac{1}{c}\left(q\theta_k - b\right). \tag{11.4}$$

Здесь при каждом $k = 1, 2, \ldots$ функция $\theta_k(t)$ является единственным вещественным непрерывным ограниченным решением скалярного уравнения (11.3) (с заменённым в нём индексом 0 на соответствующий индекс k) при $t \geqslant 0$.

Замечание. Уравнение (11.3) называют скалярным уравнением Ляпунова.

Теорема 11.1. (О сходимости метода последовательных приближений Зубова). *Если выполнены условия $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, а управление $u_0(t,x) = m_0(t)x$ допустимо, то*:

1) *для системы* (11.1) *существует управление, оптимальное по отношению к функционалу* (11.2) *для любого начального условия x_0;*

2) *последовательность $\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots$ сходится равномерно на каждом конечном промежутке $[0, T]$ к вещественной непрерывной ограниченной функции $\theta_*(t)$, являющейся решением уравнения Риккати* (8.2) *при $t \geqslant 0$;*

3) *последовательность $u_1(t,x)$, $u_2(t,x), \ldots$ сходится к оптимальному управлению $u_*(t,x) = m_*(t)x$ равномерно в каждой ограниченной области изменения переменных x, t. Здесь $m_*(t) = \frac{1}{c}\left(q\theta_* - b\right)$.*

Утверждение 11.1. *Если p, q, a, b и c — постоянные, то вместо дифференциального уравнения Ляпунова* (11.3) *достаточно на каждой итерации решать линейное алгебраическое уравнение Ляпунова*

$$2\theta(p + qm_k) - (a + 2m_k b + m_k^2 c) = 0. \tag{11.5}$$

Доказательство. Так как $q \not\equiv 0$, то положим на первой итерации $m_0 = -\frac{1+p}{q}$. Имеем $p + qm_0 = -1$, поэтому соответствующее управление u_0 будет допустимым, так как замкнутая им система имеет решение $x(t) = x_0\mathrm{e}^{-t}$. Тогда для этого m_0 из уравнения (11.5) находим решение θ_1, а поскольку в методе последовательных приближений уравнение (11.3) обладает единственным вещественным непрерывным ограниченным при $t \geqslant 0$ решением, то найденное θ_1 и есть это решение при $k = 0$.

Далее в методе последовательных приближений m_1 равное $\frac{1}{c}(q\theta_1 - b)$ порождает допустимое управление u_1, при котором $p + qm_1 < 0$ (в противном случае $p + qm_1 \geqslant 0$, а тогда замкнутая управлением u_1 система имела бы решение $x(t) = x_0 e^{(p+qm_1)t}$, у которого $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, что противоречит допустимости управления u_1 при $x_0 \neq 0$). Таким образом, для m_1 из уравнения (11.5) находим решение θ_2, а поскольку в методе последовательных приближений уравнение (11.3) обладает единственным вещественным непрерывным ограниченным при $t \geqslant 0$ решением, то найденное θ_2 и есть это решение при $k = 1$.

Рассуждая аналогично для $k \geqslant 2$, убеждаемся, что на каждой итерации действительно достаточно решать линейное алгебраическое уравнение Ляпунова (11.5). ■

Из утверждения 11.1 и теоремы 11.1 вытекает

Следствие. *Если квадратичная форма $W(x, u)$ положительно определена по совокупности переменных (x, u), то начиная с любого допустимого управления (например, с управления u_0 равного $-\frac{1+p}{q}x$), метод последовательных приближений Зубова сходится к оптимальному управлению, причём на каждом шаге достаточно решать алгебраическое уравнение Ляпунова* (11.5).

Поскольку в этом случае на каждом шаге получается конкретное значение θ_k, то по теореме 11.1 эта числовая последовательность сходится к решению уравнения (8.5), тем самым мы получаем следующий результат, усиливающий утверждение 8.1.

Следствие 11.1. *Если квадратичная форма* $W(x,u)$ *положительно определена по совокупности переменных* (x,u), *то алгебраическое уравнение Риккати* (8.5) *всегда имеет два различных вещественных корня, причём один из них порождает оптимальное управление, вычисляемое по формуле* (8.3).

Приведём пример реализации метода последовательных приближений в нестационарном случае.

Пример 11.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \frac{1}{t+1}x + u$$

и минимизируемый функционал

$$J(x,u) = \int_0^{\infty} \left(x^2 + u^2\right)\, dt.$$

Здесь

$$p(t) = \frac{1}{t+1}, \quad q = 1,$$
$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Легко проверить, что управление $u_0(t,x) = m_0(t)x$, где $m_0(t) = -\frac{1}{t+1} - 2$, является допустимым. Составим дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\dot{\theta} + 2\theta(-2) - 1 - \Big(-\frac{1}{t+1} - 2\Big)^2 = 0.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$\theta_1(t, C_1) = \mathrm{e}^{4t}C_1 - \frac{9+5t}{4(t+1)}.$$

Видно, что данное решение является вещественным непрерывным и ограниченным при $t \geqslant 0$ лишь при $C_1 = 0$. Тогда, согласно методу последовательных приближений, построим $m_1(t) = -\frac{9+5t}{4(t+1)}$ и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\theta} + 2\theta\Big(-\frac{5}{4}\Big) - 1 - \Big(-\frac{9+5t}{4(t+1)}\Big)^2 = 0.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$\theta_2(t, C_2) = \mathrm{e}^{2t} C_2 - \frac{t+2}{t+1}.$$

Полученное решение является вещественным непрерывным и ограниченным при $t \geqslant 0$ лишь при $C_2 = 0$. Тогда вычисляем $m_2(t) = -\frac{t+2}{t+1}$. Ему соответствует дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\dot{\theta} + 2\theta(-1) - 1 - \Big(-\frac{t+2}{t+1}\Big)^2 = 0.$$

Его общим решением является

$$\theta_3(t, C_3) = \mathrm{e}^{2t} C_3 - \frac{t+2}{t+1}.$$

Видно, что это решение является вещественным непрерывным и ограниченным при $t \geqslant 0$ лишь при $C_3 = 0$ и совпадает с решением, полученным на предыдущей итерации. Поэтому далее будем иметь тождества $m_2 = m_3 = m_4 = \dots$, то есть метод последовательных приближений Зубова сошелся в этом примере к управлению

$$u(t, x) = -\frac{t+2}{t+1} x,$$

которое является оптимальным по теореме 11.1. □

Заметим, что применение метода последовательных приближений для нестационарного случая существенно затруднено, поскольку в общем случае невозможно определить (как это сделано в примере 11.1) значение постоянной интегрирования, при которой решение дифференциального уравнения (11.3) будет на данной итерации вещественным непрерывным и ограниченным при $t \geqslant 0$.

Пример 11.2. Исследуем методом Зубова следующую скалярную ЛКЗ:

$$\dot{x} = 3x + u,$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty \left(4x^2 + 6xu + u^2\right)\, dt.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что в качестве начального приближения можно выбрать управление $u = m_0 x$, где $m_0 < -3$. Положим

$$m_0 = -4.$$

Находим решение θ_1 соответствующего m_0 уравнения Ляпунова (11.5). Имеем

$$\theta_1 = \frac{a + 2m_0 b + m_0^2 c}{2(p + q m_0)} = 2.$$

Вычислим первое приближение $u_1 = m_1 x$, где

$$m_1 = \frac{1}{c}\,(q\theta_1 - b) = -1.$$

Так как $m_1 > -3$, то управление u_1 не является допустимым. Следовательно ЛКЗ не имеет решения.

В отсутствии решения ЛКЗ также легко убедиться, если рассмотреть соответствующее уравнение Риккати (8.5):

$$\theta^2 + 5 = 0.$$

Очевидно, что вещественных корней не существует. □

Замечание. Отсутствие оптимального управления в предыдущем примере, является следствием того, что нарушено условие положительной определенности по совокупности переменных (x, u) у квадратичной формы $W(x, u)$, хотя коэффициенты a и c — положительные.

Пример 11.3. Пусть a и c — положительные константы. Исследуем методом Зубова следующую скалярную ЛКЗ:

$$\dot{x} = px + qu,$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty \left(ax^2 + cu^2\right)\, dt.$$

Р е ш е н и е. Пусть нам известно k-ое приближение $u_k = m_k x$, которое является допустимым. Поэтому $p + q m_k < 0$.

Запишем решение уравнения Ляпунова (11.5):

$$\theta_{k+1} = \frac{a + m_k^2 c}{2(p + q m_k)}.$$

Тогда коэффициент m_{k+1} очередного приближения u_{k+1} вычисляется по формуле (см. (11.4)):

$$m_{k+1} = \frac{q}{c}\theta_{k+1} = \frac{q(a + m_k^2 c)}{2c(p + qm_k)}. \tag{11.6}$$

Таким образом, получили нелинейное рекуррентное выражение для коэффициента m_{k+1} через m_k.

Положим

$$y_k = -(p + qm_k). \tag{11.7}$$

В силу (11.6), непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенства

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}\left(y_k + \frac{p^2 + \frac{1}{c}q^2 a}{y_k}\right).$$

Полученное соотношение есть не что иное, как итерационная формула Герона для вычисления квадратного корня. В выражении для y_{k+1} перейдем к пределу по $k \to \infty$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} y_{k+1} = \sqrt{p^2 + \frac{1}{c}q^2 a}.$$

Тогда из (11.7) следует, что искомое оптимальное управление u_* равно $m_* x$, где

$$m_* = -\frac{1}{q}\left(p + \sqrt{p^2 + \frac{1}{c}q^2 a}\right). \tag{11.8}$$

В справедливости полученного решения также можно убедиться, если решить соответствующее алгебраическое уравнение Риккати:

$$\frac{q^2}{c}\theta^2 + 2p\theta - a = 0. \tag{11.9}$$

В силу следствия 11.1 (см. также утверждение 8.1), оно имеет два вещественных корня, одному из которых соответствует решение (11.8).

Наконец, приведем и еще одно обоснование. Заметим, что по теореме 11.1 последовательность управлений $u_k = m_k x$ равномерно сходится к оптимальному $u_* = m_* x$, т. е. справедливо

$\lim\limits_{k\to\infty} m_k = m_*$. Учитывая это, и перейдя к пределу (по $k \to \infty$) в равенстве (11.6), получим уравнение относительно m_*:

$$m_* = \frac{q(a + m_*^2 c)}{2c(p + q m_*)}.$$

Несложно догадаться, что это и есть уравнение Риккати (11.9), если вместо m_* подставить $\frac{q}{c}\theta$.

§ 12. Дополнительные свойства метода

Наряду с указанными ранее свойствами метода последовательных приближений В. И. Зубова, приведем еще несколько уникальных его особенностей, имеющих принципиальную важность при практическом его применении (см. [2], [6], [7], [13]):

- Если известно, что оптимальное управление существует, то метод последовательных приближений приводит к оптимальному управлению независимо от того, является ли квадратичная форма $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ положительно определенной по совокупности переменных или нет (см. пример 10.2).

- Если метод последовательных приближений приводит к стабилизирующему управлению, то это управление оптимально (см. примеры 10.2 и 11.1).

- Если последовательность приближений расходится или сходится к управлению, не стабилизирующему систему, то оптимального управления не существует (см. пример 11.2).

- Метод последовательных приближений можно трактовать как аналог метода Ньютона (см. пример 11.3).

Таким образом, метод последовательных приближений В. И. Зубова является одновременно инструментом как для проверки существования оптимального управления, так и для его построения.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Ниже приведены задачи для выполнения самостоятельной работы по построению оптимального стабилизирующего управления для линейной стационарной системы по отношению к квадратичному функционалу качества. Все задачи могут быть решены методом последовательных приближений В. И. Зубова. Предлагается построить первые три последовательных приближения. Для первых 17 задач поиск оптимального стабилизирующего управления также может быть осуществлен из анализа решения матричного уравнения Риккати (без привлечения специализированного программного обеспечения).

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 u + \frac{1}{2}u^2.$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{7}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_2 u + \frac{1}{2}u^2.$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 u + 2x_2 u + u^2.$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 u + u^2.$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 u + 2x_2 u + u^2.$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 u + u^2.$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + u, \end{cases} \qquad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 u + \frac{1}{2}u^2.$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1u - 2x_2u + u^2.$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1u + 2x_2u + u^2.$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + u^2.$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1u + 2x_2u + \frac{1}{2}u^2.$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -4x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1u + 2x_2u + \frac{1}{2}u^2.$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1u + u^2.$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + u^2.$

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_2u + u^2.$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1u - 2x_2u + u^2.$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1u + 2x_2u + u^2.$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$ $\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 5x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_3 + \\ + 14x_2x_3 + 6x_3u + u^2. \end{aligned}$

19. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1u + 2x_3u + u^2.$

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2.$

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = -x_3, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2.$

22. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1u - 2x_2u - 2x_3u + u^2.$

23. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_2x_3 + 2x_2u + u^2.$

24. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_3, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+8x_1x_3+u^2.$

25. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 9x_1^2 + 12x_2^2 + 12x_3^2 - 18x_1x_2 + u^2.$

26. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_2x_3 + u^2.$

27. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases}$ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + u^2.$

28. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - x_3, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 u + 2x_2 u + u^2.$

29. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + u, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2.$

30. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + u_1^2 + u_2^2.$

31. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2 + u_2, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u_1^2 + u_2^2.$

32. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_2, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + u_1^2 + u_2^2.$

33. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u_2, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + u_1^2 + u_2^2.$

34. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_3 + u_1, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + u_1^2 + u_2^2.$

35. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 3u_2, \\ \dot{x}_3 = 3x_3 + 2u_1, \end{cases}$ $\quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + u_1^2 + u_2^2.$

ОТВЕТЫ

1. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{13}{18} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -\frac{2}{3}x_2\,.$

2. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}+1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{(\sqrt{6}+6)}{2} \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_* = -(\sqrt{6}+1)x_1 + (\sqrt{6}+2)x_2\,.$

3. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\frac{15}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -\frac{3}{4}x_1 - x_2\,.$

4. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -(\sqrt{3}+1) & 0 \\ 0 & -3(\sqrt{3}+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -(\sqrt{3}+1)x_1 - x_2\,.$

5. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -(\sqrt{13}+2) & 4 \\ 4 & 3-2\sqrt{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -(\sqrt{13}+1)x_1 + 3x_2\,.$

6. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\frac{11}{8} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = \frac{3}{2}x_1 - 5x_2\,.$

7. $\Theta_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{23}{8} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -x_1 - 5x_2\,.$

8. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = (\sqrt{2}-1)x_1 + (2-\frac{\sqrt{2}}{2})x_2\,.$

9. Не существует.

10. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}-1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{8}-\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -(\sqrt{3}+1)x_1 - x_2\,.$

11. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{3}{2} & \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{7}{18}-\frac{2\sqrt{7}}{9} \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_* = -(\sqrt{7}+1)x_1 - (\frac{2\sqrt{7}}{3}+\frac{4}{3})x_2\,.$

12. Не существует.

13. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -3x_1 - 3x_2\,.$

14. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -22 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -4x_1 - 6x_2\,.$

15. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\sqrt{11} - 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{11} - 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = (1 - \sqrt{11})x_1 - x_2\,.$

16. Не существует.

17. Не существует.

18. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3\,.$

19. Не существует.

20. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -(1 + \sqrt{2})(x_2 + x_3)\,.$

21. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 \\ -1 - \sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -(1 + \sqrt{2})(x_1 + x_2)\,.$

22. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -3x_1 - x_2 + x_3\,.$

23. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -2x_1 - x_2\,.$

24. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -4 & -6 & \frac{44}{7} \\ -6 & -22 & \frac{164}{7} \\ \frac{44}{7} & \frac{164}{7} & -\frac{1426}{49} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -4x_1 - 6x_2 + \frac{44}{7}x_3\,.$

25. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{29}{9} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_* = -3x_1 - \frac{2}{3}x_3\,.$

26. Не существует.

27. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}-2\sqrt{3} & -\sqrt{2}-1 & -2-\sqrt{6} \\ -\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-\sqrt{3} & -\sqrt{6}-1 \\ -2-\sqrt{6} & -\sqrt{6}-1 & 1-3(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \end{pmatrix},$

$\mathbf{u}_* = -(\sqrt{2}+1)x_1 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})x_2 - (\sqrt{6}+1)x_3\,.$

28. Не существует.

29. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -5\sqrt{3}-7 & -2\sqrt{3}-3 & -2-\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}-3 & -\sqrt{3}-2 & -1 \\ -2-\sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$

$\mathbf{u}_* = -(2+\sqrt{3})x_1 - x_2 - \sqrt{3}x_3\,.$

30. $\Theta_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{3}{8}(9-5\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{5}{8}(5-3\sqrt{3}) \\ \frac{3}{8}(9-5\sqrt{3}) & \frac{5}{8}(5-3\sqrt{3}) & \frac{45}{32}(8-5\sqrt{3}) \end{pmatrix},$

$\mathbf{u}_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{3}{8}(9-5\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{5}{8}(5-3\sqrt{3}) \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

31. $\Theta_* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2}-\sqrt{3} & -2-\sqrt{6} & 1-\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{6} & -3\sqrt{2}-2\sqrt{3} & -2-\sqrt{6} \\ 1-\sqrt{2}-\sqrt{3} & -2-\sqrt{6} & -1-\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix},$

$\mathbf{u}_* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2}-\sqrt{3} & -2-\sqrt{6} & 1-\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{2}-\sqrt{3} & -2-\sqrt{6} & -1-\sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

32. $\Theta_* = \begin{pmatrix} -1-r & -2-\sqrt{6}-r & 0 \\ -2-\sqrt{6}-r & 5-r-2\sqrt{6}-r\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix},$

$$\mathbf{u}_* = \begin{pmatrix} -1-r & -2-\sqrt{6}-r & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

где $r = \sqrt{6+2\sqrt{6}}$.

33. $$\Theta_* = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -3-2\sqrt{6}-r & -r \\ 0 & -r & -3-\sqrt{6}+\frac{3}{r} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_* = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -r & -3-\sqrt{6}+\frac{3}{r} \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

где $r = 1+\sqrt{6}+\sqrt{4+2\sqrt{6}}$.

34. $$\Theta_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-r\sqrt{3}) & -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) & -\frac{1}{4}(1+r) & 0 \\ 0 & 0 & -2-\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2-\sqrt{6} \\ -1-\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{r}{2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

где $r = \sqrt{9+4\sqrt{3}}$.

35. $$\Theta_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(1-r\sqrt{7}) & -\frac{1}{9}(1+2\sqrt{7}) & 0 \\ -\frac{1}{9}(1+2\sqrt{7}) & -\frac{1}{9}(2+r) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7} & -\frac{1}{3}-\frac{r}{3} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

где $r = \sqrt{26+8\sqrt{7}}$.

Авторы надеются, что материал данного пособия был полезен и интересен читателю. Предложения и пожелания направляйте на адреса: grigoriytamasjan@mail.ru, alexfomster@mail.ru.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
2. *Войтенко С.С., Смирнов Е.Я.* Теория оптимальной стабилизации. Л.: ЛГУ, 1983. 116 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 552 с.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Егоров А.И.* Уравнение Риккати. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
6. *Жабко А.П., Прасолов А.В., Харитонов В.Л.* Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2003. 286 с.
7. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
8. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
9. *Карелин В.В., Харитонов В.Л., Чижова О.Н.* Лекции по теории стабилизации программных движений: Учеб. пособие / Под общ. ред. В.И. Зубова. — СПб., 2003. — 80 с.
10. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 421 с.
11. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — 4-е изд. М.: Физматгиз, 1983. 392 с.
13. *Смирнов Е.Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. 307 с.
14. *Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е., Тамасян Г.Ш.* Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи. — 3-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2017. — 128 с.

Учебное издание

Тамасян Григорий Шаликович
Фоминых Александр Владимирович

Оптимальная стабилизация линейных систем

Учебное пособие

Подписано в печать 21.04.2022. Формат $60 \times 84\,^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Century Schoolbook. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,84. Тираж 100 экз. Заказ № 1720.

Отпечатано в Издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.