

ISSN 2313-7304

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

ТОМ 4 (20)

**ТРУДЫ XLVIII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ**

Санкт-Петербург

3 – 6 апреля 2017 года

ISSN 2313-7304

***CONTROL PROCESSES
AND STABILITY***

Vol. 4 (20)

**PROCEEDINGS OF THE XLVIII
INTERNATIONAL CONFERENCE**

**St. Petersburg
April 3 – 6, 2017**

PUBLISHING HOUSE
FEDOROVA G.V.
2017

ББК 22.1
П84

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Петросян (отв. редактор) (СПбГУ),
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Смирнов (зам. отв. редактора) (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. И. Веремей (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. О. И. Дривотин (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Жабко (СПбГУ)
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. Д. Котина (СПбГУ)

Процессы управления и устойчивость. Том 4(20). № 1 / науч.
П84 ред. тома Н. В. Смирнов. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В.,
2017. 729 с.
ISSN 2313-7304

«Процессы управления и устойчивость» – ежегодное научное издание. Издается на факультете прикладной математики – процессов управления СПбГУ с 1998 года. Сборник традиционно формируется по результатам работы ежегодной Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» и включает статьи студентов, аспирантов, сотрудников СПбГУ и других высших учебных заведений, в том числе зарубежных, по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, информационным и компьютерным технологиям, теории управления социально-экономическими системами.

В Том 4(20) включены статьи участников 48-й Международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (3 – 6 апреля 2017 года), прошедшие рецензирование и рекомендованные к публикации. Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.1

*Сборник издается при финансовой поддержке
факультета прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета*

ISSN 2313-7304

© Издательский Дом Федоровой Г. В., 2017
© Смирнов Н. В., 2017

Содержание

1. Математическая теория процессов управления 11

<i>Агафонов Ю. О.</i> Минимизация времени переходного процесса в нелинейном наблюдателе	11
<i>Владимирова Л. В., Сетина И. А.</i> Поиск локально оптимальных планов для экспоненциальной регрессии	16
<i>Волошин М. В.</i> Об асимптотической устойчивости одного класса нелинейных разностных систем с насыщением и переключениями	22
<i>Горняк Д. Д.</i> Применение теории разреженных матриц при построении матриц Ляпунова для систем с запаздыванием	27
<i>Грушина В. Н.</i> О взаимосвязи решений второй задачи Золотарева и полиномиальной задачи	33
<i>Ежова Е. В.</i> О разрешимости в аналитическом виде одной полиномиальной фильтровой задачи	38
<i>Левина Е. Г.</i> Оценка робастности условия Ляпунова для систем с запаздываниями	43
<i>Нурисламова Э. Ф.</i> Исследование решений дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием и однородной правой частью	49
<i>Пежиров И. А.</i> Решение Второй задачи Золотарева при $n = 4$	54
<i>Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А.</i> Об одной модификации метода гиподифференциального спуска в задаче проецирования начала координат на эллипсоид	59
<i>Федорова Д. С.</i> Задача Лагранжа об объеме симплекса	64
<i>Цимфер С. А.</i> Метод Нелдера–Мида в задаче оценки параметров переходного процесса линейной дифференциально-разностной системы	69
<i>Шульга Г. С., Тамасян Г. Ш.</i> О предельной точке Люиле тетраэдра	75

2. Математические методы в механике и физике 80

<i>Бузин А. Э.</i> Заряды лигандов и электрические моменты металлоценов: расчеты с модельными потенциалами остова	80
<i>Быкова Д. С., Ермолаева Н. Н.</i> Расчет коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена по экспериментальным данным	85

<i>Виноградова Е. М., Калатурская Э. В.</i> Расчет полевых диода цилиндрической формы.....	91
<i>Давыденко А. А., Кондратьев А. С., Старков В. Н.</i> Варианты достижения космическим аппаратом гелиополярной области ..	95
<i>Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В.</i> Анализ напряженного состояния плоскости с межфазной трещиной для полулинейного материала.....	101
<i>Дремов Л. С., Перегудин С. И.</i> Математическое моделирование в задачах морской гидротехники	106
<i>Дривотин О. И., Стариков Д. А.</i> Применение методов второго порядка для численного решения задачи оптимального управления ансамблем динамических систем.....	113
<i>Еваева Е. С.</i> О влиянии двойника у свободной границы на распределение точечных дефектов	118
<i>Елаева М. В.</i> Расчет оптимальной толщины трубы под давлением в условиях внутренней коррозии	123
<i>Ермолаева Н. Н., Шалыгина А. М.</i> Расчёт характеристик неустановившегося потока газовой смеси, транспортируемой по морским газопроводам, с учётом рельефа трассы	128
<i>Ефимов М. Р., Виноградова Е. М.</i> Математическое моделирование системы полевых катодов	134
<i>Ефимова П. А., Алферов Г. В., Иванов Г. Г.</i> Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединёнными элементами.....	139
<i>Кобышева Н. В.</i> Свободноконвективное течение вязкой жидкости	144
<i>Коврижных Н. А., Винничек Н. Н.</i> Исследование устойчивости структурных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений	149
<i>Козлов А. А., Красун С. В.</i> Движение космического манипуляционного робота в среде с препятствиями.....	154
<i>Лебедев Н. А.</i> О расстоянии между кеплеровыми орбитами небесных тел.....	160
<i>Марнопольская Е. С., Кривовичев Г. В.</i> Исследование и оптимизация свойств разностных схем высокого порядка для уравнения переноса	165
<i>Маслова Т. А., Виноградова Е. М.</i> Моделирование эмиссионной системы с диэлектрическими прослойками.....	171

<i>Мишеев С. А., Кривовичев Г. В.</i> Анализ подходов к учету действия объемных сил в методе решеточных уравнений Больцмана.....	175
<i>Моисеев В. И.</i> Методы Рунге–Кутты для уравнений с запаздыванием нейтрального типа в MATLAB	181
<i>Моисеев О. С., Горбунов В. И.</i> Система копирующего управления роботом-манипулятором	186
<i>Найденова М. А.</i> Исследование периодического движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1	192
<i>Перегудин С. И., Перегудина Э. С., Холодова С. Е.</i> Динамика электропроводной жидкости с учетом эффектов геострофичности	199
<i>Петрухин Р. Р., Малькова Ю. В.</i> Расчет напряженного состояния композитной пластины с эллиптическим отверстием методом конечных элементов.....	203
<i>Поваляев Н. Д., Моисеев О. С., Горбунов В. И.</i> Компьютерная и математическая модели мобильного трехколесного робота	208
<i>Прохорова Е. А., Кривовичев Г. В.</i> Численное решение плоских задач гидродинамики с использованием неявных схем для системы кинетических уравнений	213
<i>Саакян А. Т., Виноградова Е. М.</i> Моделирование диодной системы с лезвийным катодом	219
<i>Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А.</i> Моделирование задымления городов от лесных пожаров	223
<i>Семенов А. Е., Малькова Ю. В.</i> Динамика металлической пластины, лежащей на резиновом слое	229
<i>Старикова А. В., Виноградова Е. М.</i> Моделирование мультипольной системы с электродами произвольной формы	234
<i>Суратов В. А., Матросов А. В.</i> Метод начальных функций в расчете защемленной пластинки	238
<i>Федоров В. М., Шарлай А. С.</i> Применение модифицированного алгоритма A^* для построения траектории обхода препятствий колесным роботом	245
<i>Чжао Ш.</i> Алгоритм расчета напряженного состояния пластинки с эллиптическим отверстием в MATLAB	251
<i>Шувалов Г. М., Костырко С. А.</i> Второе приближение метода возмущений в задаче о твердом теле со слабоискривленной границей	256

3. Математические модели медико-биологических систем 261

Каюмова Д. Ш., Ширококов М. В. Поиск оптимального набора признаков в задаче распознавания кодирующих и некодирующих областей ДНК 261

Кириллова А. А. Построение модели иммунного ответа при меланоме кожи 266

Маслов А. А., Лепихин Т. А. Адаптивная фильтрация сетевой помехи электрокардиосигнала 272

Мащенко Ю. Н. Анализ медицинских данных с использованием таблиц сопряженности 278

Мишнев М. С. Моделирование распространения вируса гриппа с учетом скрытых носителей 283

Савва Е. К. Анализ статистической зависимости супрессирующих факторов при меланоме кожи 288

Стегару Д. А. Динамическая модель популяции В-лимфоцитов при меланоме кожи 293

Стрельцова А. А. Алгоритм идентификации параметров камерной модели в исследованиях позитронной эмиссионной томографии сердца 298

4. Информационные и компьютерные технологии 304

Авдеева А. С. Распознавание математических формул и выражений 304

Арзуманян Н. К. Применение метода SVD в задаче коллаборативной фильтрации 309

Бебяков А. М. Разработка информационной системы для автоматизации биомедицинских исследований с использованием облачных технологий 315

Белезеко А. А., Кучумов Р. И., Фатъкина А. И., Ганкевич И. Г. Применение технологий параллельного программирования в задаче моделирования волны в программе MASNUM WAVE ... 321

Бендриковский А. Я. Обнаружение и классификация объектов на изображении с помощью нейросетевого алгоритма YOLO 326

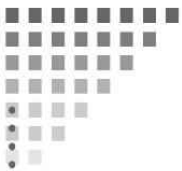
Верхотуров М. С., Завадский С. В. Цифровое управление сервоприводом на диагностическом комплексе МТУ-17 332

<i>Гавриков А. А., Свешникова С. Ю., Ганкевич И. Г.</i> Нейронные сети в задаче предсказания дорожного трафика	339
<i>Глушкова Е. Д.</i> Алгоритм предварительной обработки изображений электронных схем цифровых устройств	343
<i>Григорян Д. А.</i> Алгоритм обоснования операции на основе анализа данных группы пациентов	347
<i>Гусев Д. А., Глазырин А. Г., Горбунов В. И.</i> Компьютерное моделирование окружающей среды в робототехнических комплексах	351
<i>Дворянчикова В. Э.</i> Организация внешних и внутренних взаимодействий мультиагентных систем	356
<i>Завадский С. В., Разуваев С. С.</i> Моделирование цифровых подсистем квадрокоптера	361
<i>Зайцева О. О.</i> Модель семантического анализа в задаче наивной квалификации в теории уголовно-правовой оценки деяния	367
<i>Зубаков А. В.</i> Генерация заголовка изображения на основе технологии нейронных сетей	372
<i>Калинин В. И.</i> Подход к прогнозированию дорожного трафика через моделирование многомерных временных рядов	377
<i>Камалов М. В., Мартынов Р. С.</i> Сравнительный анализ алгоритмов онлайн-обучения ранжированию поисковой выдачи	382
<i>Касенков Н. А., Краснополянская Е. В., Лепихин Т. А.</i> Построение модели поведения гексакоптера при аварийной ситуации с использованием нечеткой логики	389
<i>Князькин Я. В.</i> Спектральный синтез H_2 -оптимального детектора динамических сбоев	394
<i>Коваленко Л. А., Салимов Т. А., Горбунов В. И.</i> Детектирование объектов с использованием системы технического зрения	401
<i>Красовская И. К.</i> Идентификация параметров модели морского судна в условиях внешнего возмущения	406
<i>Красун С. В., Ямицков С. А., Кравченко Л. А.</i> Нечеткая кластеризация игроков в техасский холдем	412
<i>Малых Е. А.</i> Использование сверточных нейронных сетей и Triplet Probabilistic Embedding в задаче автоматической идентификации по лицу	417
<i>Масловская М. А.</i> Сравнение методов тематического моделирования	423
<i>Мащинский Н. С., Пушко Ф. А.</i> Автоматизация генерации тестовых сигналов для цифровых схем с элементами памяти	428

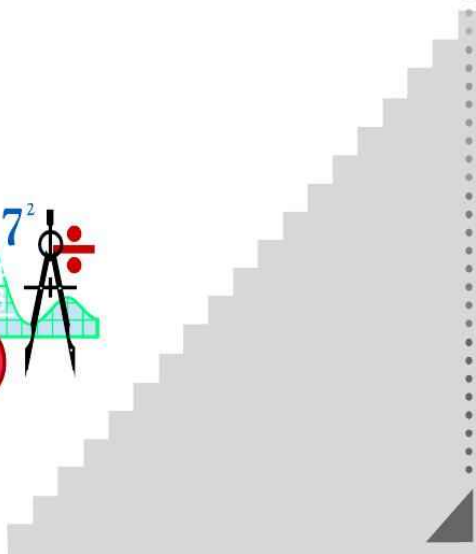
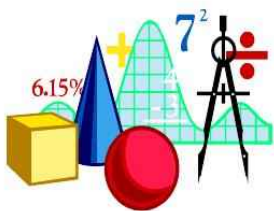
<i>Меньщиков М. А., Лепихин Т. А.</i> Применение модели MapReduce в архитектуре статического анализатора кода	433
<i>Нечиторок А. А., Лепихин Т. А., Щербинин А. В.</i> Моделирование и управление квадрокоптером	445
<i>Огурцова А. С.</i> Кластеризация русскоязычных новостных текстов с помощью графовых алгоритмов	452
<i>Павлов И. Н.</i> Нерекурсивный алгоритм построения независимого контура	458
<i>Павлов Ю. А.</i> Построение алгоритма распознавания речевых команд	462
<i>Пенкрат А. О.</i> Методы стереозрения. Модификация алгоритма AD-Sensus	467
<i>Пискунова А. С.</i> Разработка приложения для автоматического определения SMS спам-сообщений для устройств, работающих на платформе андроид	472
<i>Прус Е. А.</i> Система автоматической рекомендации статей для онлайн ресурса	477
<i>Ращенко Д. В., Ращенко Ю. В.</i> Применение методов обнаружения объекта по характерным точкам в алгоритме TLD	481
<i>Смирнов В. А.</i> Оптимизация вычислений в задаче об определении параметров надводной непотопляемости подводной лодки	486
<i>Смирнов К. В., Хмель Д. С.</i> Визуализация решения уравнения Блэка–Шоулза для цены азиатского опциона	492
<i>Сторублевцев Н. В.</i> Анализ потенциала ускорения CFD-вычислений с использованием технологии OpenCL	496
<i>Стученков А. Б., Улитина И. А.</i> Построение изображений по проекциям с использованием анатомического атласа	503
<i>Таранова О. В.</i> Сравнение методов обучения без учителя для иерархического выделения признаков в сверточных нейронных сетях	508
<i>Тоскин Н. Д., Севостьянов Р. А.</i> Распознавание траектории баллистического снаряда в удаленной лаборатории	514
<i>Туренко А. А.</i> Сравнительный анализ инструментов сбора данных о дискуссиях пользователей в социальных сетях	519
<i>Фаустов Б. А.</i> Поиск похожих изображений	524
<i>Холод Н. Г.</i> Наложение двух снимков земной поверхности	529
<i>Цаплина Д. Д.</i> Прогнозирование бюджета медицинских учреждений с использованием современных методов анализа данных	534

<i>Цыпушкин А. В.</i> Алгоритм поиска атрибутов преступления в тексте	538
<i>Юревич В. С.</i> Сравнительный анализ эффективности алгоритмов машинного обучения на примере болезни Паркинсона	543
<i>Churikov N.</i> Experience of using machine learning methods in document processing system	548
<i>Zgonnikova I. S.</i> Statistical analysis of dynamical features of human control in virtual stick balancing.....	555
5. Управление социально-экономическими системами..	560
<i>Арасланов А. А.</i> Задача равновесного распределения ресурсов	560
<i>Бабищукова Е. В.</i> Прогнозирование среднедушевого дохода населения Санкт-Петербурга	564
<i>Бакутеев А. Н.</i> Применение методов теории игр в оптимизации систем водоснабжения.....	569
<i>Бикташева А. М.</i> Задача распределения причалов в контейнерных терминалах	576
<i>Бойко А. В.</i> Применение адаптивного метода к задаче оптимального распределения капитальных вложений в отрасли ...	581
<i>Бубякина Г. И., Плеханова Т. М.</i> Теоретико-игровой подход в задаче сокращения затрат для транспортной сети Якутии	587
<i>Гаврилина А. В.</i> Приемлемость последовательности кузовов на автомобильном производстве	592
<i>Елфимов А. Н.</i> Стационарный режим обслуживания для детерминированной системы с двумя потоками требований	597
<i>Звягинцева А. А.</i> Количественная оценка синергетического эффекта сделок слияний и поглощений на примере ПАО «Роснефть» и ПАО «Башнефть»	601
<i>Иванов Н. Г.</i> Оценка горизонта прогнозирования на основе тригонометрических многочленов Чебышёва	606
<i>Каменская Е. А., Шилова К. А.</i> Задача распределения акторов по геополитическим проектам на основе алгоритма Гейла—Шепли	611
<i>Кирьянен А. И., Логоша Е. С.</i> Влияние времени оборота капитала на устойчивость положения равновесия двух конкурирующих фирм	617

<i>Колесова А. А.</i> Алгоритмы коррекции инвестиционных программ	625
<i>Курносых З. А., Губар Е. А.</i> Моделирование эволюционной игры с учетом сетевой структуры	631
<i>Латин Е. Д.</i> Анализ поведения модели эндогенного роста Лукаса при варьировании параметров	636
<i>Ложкин А.</i> Модель ценообразования в логистической задаче	642
<i>Малафеев О. А., Рылов Д. С.</i> Динамическая модель коррупционных и легальных капиталовложений	647
<i>Малахова А. П.</i> О динамической устойчивости принципов оптимальности в одной дифференциальной игре со случайным моментом окончания	652
<i>Никитина А. А.</i> О методике статистического анализа банковских рисков	657
<i>Реут А. В.</i> Аппроксимация оптимальной шкалы средних ставок подоходного налога	662
<i>Ринчинов Р. Ц., Парфенов А. П.</i> Многокритериальная задача оптимального размещения производства в сети	667
<i>Синицын Д. Д.</i> Использование модели Катаоки для анализа итогов президентских выборов в США	672
<i>Сквородина Т. В., Губар Е. А.</i> Моделирование эпидемического процесса с использованием модели NIMFA	676
<i>Смирнов Д. С.</i> Задача о многоруком бандите при наличии эксперта	681
<i>Спирidonov Д. Ю.</i> Анализ социально-экономических показателей методами прикладной статистики	686
<i>Староверова К. Ю.</i> Новая метрика для кластеризации временных рядов	691
<i>Хамзина А. Ж.</i> Экссессоподобные решения в игре банкротства	696
<i>Чугунова А. О., Власова Т. В.</i> Динамическая устойчивость модифицированного муравьиного алгоритма для решения задачи маршрутизации вывоза и доставки товаров	702
<i>Ямщиков С. А., Гулидова А. В.</i> Нечетко-множественный анализ среднего класса населения страны	707
Contents	716
Именной указатель	724



*1. Математическая
теория процессов
управления*



УДК 517.977.5

Агафонов Ю. О.

Минимизация времени переходного процесса в нелинейном наблюдателе

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. Асимптотические наблюдатели восстанавливают информацию о векторе состояния динамического объекта по результатам измерений доступных переменных. Естественно, что время восстановления играет существенную роль в достижении высокого качества тех процессов управления, где используются формируемые оценки. В связи с этим актуальна задача о минимизации времени переходного процесса за счет выбора параметров наблюдателя. Для линейных наблюдателей эта задача решается относительно просто с применением метода модальной параметрической оптимизации [2]. Если же наблюдатель нелинейный, то возникает ряд проблем аналитического и вычислительного характера. Данная работа посвящена их преодолению для частной ситуации, относящейся к синтезу системы управления динамическим позиционированием надводного судна [1]. Предлагается вычислительный подход к настройке нелинейного наблюдателя с использованием системы MATLAB Simulink.

2. Постановка задачи. В работе [1] рассмотрена нелинейная математическая модель динамики судна

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \Omega\xi, \\ \dot{\eta} &= J(y)v, \\ \dot{b} &= -T^{-1}b, \\ M\dot{v} &= -Dv + J^T(\eta)b + \tau, \\ y &= \eta + \Gamma\xi,\end{aligned}\tag{1}$$

где использованы следующие векторы: $\xi \in R^6$ — состояние морского волнения, $\eta \in R^3$ — положение судна (продольный и боковой

Агафонов Юрий Олегович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: agafon1995@gmail.com, тел.: +7(931)359-88-39

сдвиг, а также курсовой угол), $b \in R^3$ — внешнее медленно меняющееся воздействие (ветер, течение), $v \in R^3$ — скорость судна, $\tau \in R^3$ — управляющее воздействие, $y \in R^3$ — измеряемые переменные; $J(y) \in R^{3 \times 3}$ — матрица поворота.

Нелинейный наблюдатель для этой модели формируется следующим образом [1]:

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= \Omega \hat{\xi} + K_1 \tilde{y}, \\ \hat{\eta} &= J(y) \hat{v} + K_2 \tilde{y}, \\ \hat{b} &= -T^{-1} \hat{b} + \frac{1}{\gamma} \Lambda \tilde{y}, \\ M \hat{v} &= -D \hat{v} + J^T(y) \hat{b} + \tau + \frac{1}{\gamma} J^T(y) K \tilde{y}, \\ \tilde{y} &= y - \hat{y}, \\ \hat{y} &= \hat{\eta} + \Gamma \hat{\xi},\end{aligned}$$

где

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{13} \\ k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{15} & 0 \\ 0 & 0 & k_{16} \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

— матрицы коэффициентов наблюдателя, γ — дополнительный постоянный коэффициент наблюдателя. Здесь переменные $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{b}, \hat{v}, \hat{y}$ служат оценками для соответствующих переменных в (1).

Если нулевое положение равновесия для системы, записанной в ошибках оценивания, является асимптотически устойчивым, то при ненулевых начальных условиях по ошибкам вектор \hat{y} с неограниченным ростом времени будет сходиться к вектору y , и, начиная с некоторого момента времени, для любого заданного $\varepsilon > 0$ получим

$$\exists T_p \in \mathbb{R}^1: \quad \forall t > T_p, \quad \|y(t) - \hat{y}(t)\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Задача минимизации времени переходного процесса заключается в поиске такого набора $h = h_0 \in R^m$ коэффициентов наблюдателя (определенных элементов матриц K_1, K_2, K, Λ и коэффициента γ), что выполняется условие

$$T_p(h_0) = \min_{h \in \mathfrak{R}} T_p(h), \quad (3)$$

где \mathfrak{R} — такая совокупность искомых параметров, для которых сохраняется устойчивость.

3. Анализ чувствительности. В качестве конкретных числовых значений параметров судна и исходного набора коэффициентов наблюдателя примем данные из примера, предложенного в статье [1]. Заметим, что задача (3) в этой статье не рассматривалась, что позволяет улучшить приведенный в ней результат. Для выбора улучшаемых параметров, прежде всего, необходимо провести анализ чувствительности времени T_p к изменению коэффициентов наблюдателя. Для этого было произведено варьирование значений всех коэффициентов на 10% от исходных значений.

Отметим, что, в соответствии с [1], в рамках таких вариаций асимптотическая устойчивость для наблюдателя сохраняется.

Было установлено, что наибольшее влияние на время переходного процесса имеют коэффициенты матрицы K_2 и верхнего блока матрицы K_1 . Заметим, что элементы указанных матриц имеют влияние на качество сходимости по соответствующим компонентам вектора \hat{y} . В пространстве выявленных параметров производилось решение задачи (3).

4. Метод решения. В качестве численного метода решения задачи (3) выбран метод поиска безусловного локального экстремума Нелдера–Мида [3]. Причиной такого выбора стало то, что для его реализации не требуется вычисление производной минимизируемой функции, которая в рассматриваемой модели не задана явно. К тому же этот метод допускает поиск точек экстремума при введении шумов в измерения, что необходимо для развития полученных результатов в дальнейшей работе.

5. Решение задачи. В качестве нормы, используемой в (2), примем $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Выбранная норма для векторов позволяет находить минимальное время для каждой компоненты вектора в отдельности, поэтому рассмотрим решение поставленной задачи для первой компоненты вектора \hat{y} . Для остальных компонент поиск оптимального времени выполнялся аналогично. Значение ϵ выбрано как 5% от величины отклонения начальных условий для этой компоненты, что является общепринятым правилом при решении практических задач такого рода.

В качестве начальных значений параметров взяты значения $k_{11} = -2,2059$, $k_{12} = 1,1$, предложенные в [1]. Поскольку выбранный метод осуществляет поиск локального экстремума, то принято решение о поиске минимума функции T_p в каждом из узлов прямоугольной сетки, границы которой получены увеличением и уменьшением в два раза исходных значений коэффициентов. Это позволяет выбрать наилучший локальный минимум из прямоугольной окрестности начальных значений параметров.

В результате проведенных испытаний достигнуто уменьшение времени переходного процесса с 7,2 секунд до 4,5 секунд по первой компоненте вектора \hat{y} при величине расхождения начальных условий, равной 30 м.

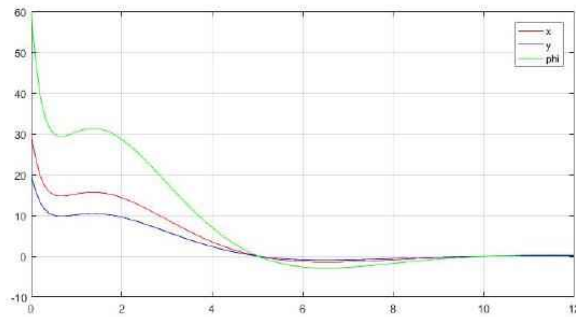


Рис. 1. Сходимость ошибки оценивания к нулевым значениям

Экспериментальным путем установлено, что полученный резуль-

тат достигается и при других значениях расхождения начальных условий с теми же значениями коэффициентов.

В конечном итоге найдены минимизирующие коэффициенты для всех компонент вектора \hat{y} , точные значения следующие: $k_{11} = -3,1579$, $k_{21} = 2,585$, $k_{12} = -3,1579$, $k_{22} = 2,585$, $k_{13} = -3,1579$, $k_{23} = 2,585$. Итоговый результат оптимизации приведен на рис. 1.

6. Заключение. Результат проделанной работы можно считать успешным. В ходе работы получены значения коэффициентов нелинейного наблюдателя, дающие наименьшее время переходного процесса.

Литература

1. Fossen T. I., Strand J. P. Passive nonlinear observer design for ships using Lyapunov methods: full-scale experiments with a supply vessel // *Automatica*. 1999. Vol. 35. No 1. P. 3–16.
2. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 448 с.
3. Nelder J. A., Mead R. A simplex method for function minimization // *The Computer Journal*. 1965. Vol. 7. P. 308–313.

УДК 519.242.5

Владимирова Л. В., Сетина И. А.

Поиск локально оптимальных планов для экспоненциальной регрессии

Введение. Предметом настоящей статьи является оптимальное планирование эксперимента для нелинейной экспоненциальной регрессии. Такая задача для нелинейной регрессии значительно сложнее аналогичной задачи для линейных моделей. Однако нелинейные регрессионные задачи на практике встречаются довольно часто [1, 2], например, в физике при решении линейных дифференциальных уравнений, при обработке результатов спектрального анализа, в задачах слежения за движущимися объектами. С помощью нелинейной регрессии описываются процессы распада в ядерной физике. Эти задачи встречаются также в химии и биологии.

Будем рассматривать нелинейную регрессионную модель, которая представляется некоторой вещественной функцией $\eta(x, \theta)$, $x \in X \subset R^n$, $\theta \in \Theta \subset R^m$. Эта функция известна с точностью до вектора параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, причем хотя бы один из этих параметров входит нелинейно в эту модель. Множество X является компактом и называется множеством планирования.

Классическая схема регрессии. Опишем классическую схему регрессионного эксперимента. Пусть в точках $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})$, $j = \overline{1, N}$, из множества планирования X наблюдаются значения случайных величин

$$y_j = \eta(x_j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ — случайные ошибки измерений. Будем предполагать, что ε_j центрированы и некоррелированы: $M\varepsilon_j = 0$, $M\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, $j \neq i$, $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2$. Для оценивания неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, используется один из наиболее распространенных методов оценивания параметров нелинейных регрессий — метод наименьших квадратов (МНК):

Владимирова Людмила Васильевна — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: sergvlad@sp.ru, тел.: +7(921)348-61-84

Сетина Ирина Андреевна — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: irina.fatyanova@mail.ru, тел.: +7(952)208-36-62

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{j=1}^N \left(y_j - \eta(x_j, \theta) \right)^2.$$

Для введенной схемы регрессионного эксперимента (1) при достаточно слабых предположениях с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$ верны следующие утверждения [3–7]:

$$\hat{\theta}_N \rightarrow \theta, \quad (2)$$

$$\frac{D \left(\hat{\theta}_N - \theta \right)}{\sqrt{N}} \rightarrow \sigma^2 M^{-1}(x, \theta), \quad (3)$$

где информационная $(m \times m)$ -матрица $M(x, \theta) = \varphi^T(x, \theta) \varphi(x, \theta)$. Здесь $\varphi(x, \theta) = \left(\frac{\partial \eta(x_j, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \eta(x_j, \theta)}{\partial \theta_m} \right)_{j=1}^N$. Таким образом, на основании (2), (3) можно сказать, что последовательность оценок (МНК) $\hat{\theta}_N$ является состоятельной, а последовательность распределений случайных векторов $\frac{(\hat{\theta}_N - \theta)}{\sqrt{N}}$ сходится к нормальному распределению с нулевым вектором средних и дисперсионной матрицей $\sigma^2 M^{-1}(x, \theta)$. В связи с этим в качестве критерия оптимальности для нахождения оптимального плана могут быть выбраны те же критерии, что и для линейной регрессии, например, критерий D -оптимальности: максимизация определителя информационной матрицы

$$\det M(x, \theta) \rightarrow \sup_{x \in X}. \quad (4)$$

В нелинейном случае информационная матрица зависит от вектора истинных значений параметров θ . В случае нормально распределенных ошибок, как в классической схеме регрессии, этот критерий соответствует требованию минимизации объема доверительного эллипсоида с любым фиксированным уровнем доверия. Решение задачи (4) при некотором фиксированном значении θ называется задачей поиска *локально оптимального плана* [5, 8].

Нелинейная экспоненциальная регрессия. Рассмотрим теперь нелинейную экспоненциальную регрессию

$$\begin{aligned} \eta(x, \theta) &= \beta_1 e^{-\theta_1 x} + \beta_2 e^{-\theta_2 x}, \\ x \in [0, B] \subset R^1, \quad \beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0, \quad \theta_1 > \theta_2 > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

с вектором параметров $\theta = (\beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2)$. Здесь B — некоторая заданная величина, $n = 1$. Как видно, только параметры θ_1, θ_2 входят в (5) нелинейно. Будем рассматривать минимальное число узлов $N = 4$. Для функции регрессии (5)

$$\det M(x, \theta) = \det(\varphi^T(x, \theta))(\varphi(x, \theta)) = \det(\varphi^T(x, \theta))^2,$$

где

$$\det(\varphi^T(x, \theta)) = \beta_1 \beta_2 \begin{vmatrix} e^{-\theta_1 x_1} & e^{-\theta_1 x_2} & e^{-\theta_1 x_3} & e^{-\theta_1 x_4} \\ -x_1 e^{-\theta_1 x_1} & -x_2 e^{-\theta_1 x_2} & -x_3 e^{-\theta_1 x_3} & -x_4 e^{-\theta_1 x_4} \\ e^{-\theta_2 x_1} & e^{-\theta_2 x_2} & e^{-\theta_2 x_3} & e^{-\theta_2 x_4} \\ -x_1 e^{-\theta_2 x_1} & -x_2 e^{-\theta_2 x_2} & -x_3 e^{-\theta_2 x_3} & -x_4 e^{-\theta_2 x_4} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\det(M(x, \theta)) = \beta_1^2 \beta_2^2 A(x, \theta_1, \theta_2), \quad (6)$$

где

$$A(x, \theta) = \begin{vmatrix} e^{-\theta_1 x_1} & e^{-\theta_1 x_2} & e^{-\theta_1 x_3} & e^{-\theta_1 x_4} \\ -x_1 e^{-\theta_1 x_1} & -x_2 e^{-\theta_1 x_2} & -x_3 e^{-\theta_1 x_3} & -x_4 e^{-\theta_1 x_4} \\ e^{-\theta_2 x_1} & e^{-\theta_2 x_2} & e^{-\theta_2 x_3} & e^{-\theta_2 x_4} \\ -x_1 e^{-\theta_2 x_1} & -x_2 e^{-\theta_2 x_2} & -x_3 e^{-\theta_2 x_3} & -x_4 e^{-\theta_2 x_4} \end{vmatrix}^2 \quad (7)$$

есть функция, зависящая от переменных $x_i, i = \overline{1, 4}$ (точки множества планирования) с входящими в нее нелинейными параметрами θ_1, θ_2 . Линейные параметры β_1, β_2 являются множителями. Для определенности будем полагать $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Локально D -оптимальные планы для экспоненциальной регрессии. Задача нахождения локально оптимального плана для экспоненциальной регрессии сводится к нахождению максимума функции (7) по точкам из множества планирования с фиксированными нелинейными параметрами $\theta_{1,true}, \theta_{2,true}$, которые будем называть истинными:

$$\max_{x_1, x_2, x_3, x_4 \in X} A(x_1, x_2, x_3, x_4, \theta_{1,true}, \theta_{2,true}). \quad (8)$$

Будем предполагать, что $\theta_{1,true} > \theta_{2,true}$, так как если они равны $\theta_{1,true} = \theta_{2,true}$, то в (7) $A(x, \theta) \equiv 0$ из-за совпадения двух строк. Можно рассмотреть следующие варианты [5]:

$$\theta_{1,true} = 1 + \Delta_i, \quad \theta_{2,true} = 1 - \Delta_i, \quad \Delta_i = 0, 1 \cdot i, \quad i = \overline{1, 9}. \quad (9)$$

Реализация эксперимента. Функция (7) неотрицательна. В этом случае можно решать задачу (8), используя случайный поиск глобального экстремума с «памятью» на основе моделирования нормально распределенных случайных векторов. В результате пробные точки в основном будут сосредоточены в эллипсоиде рассеяния, центр которого является приближением экстремальной точки, полученной на предыдущей итерации. На нулевой итерации применяется простейший случайный поиск. Матрица ковариаций, элементы которой оцениваются в процессе поиска экстремума, несет в себе информацию о целевой функции. В связи с этим метод имеет название с «памятью». Это самообучающийся метод, так как осуществляет уточнение области поиска от итерации к итерации. Метод случайного поиска глобального экстремума с «памятью» хорошо зарекомендовал себя [9–11], так как он позволяет находить глобальный экстремум за 2–3 итерации для многомерных функций с большим числом локальных экстремумов. В [12] приводится теорема о сходимости этого метода.

Таблица. Значения локально оптимальных планов в зависимости от Δ_i

	1	2	3	4	5	6
i	Δ_i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$x_4^{(i)}$	$A(x^{(i)}, \theta_{1,true}^{(i)}, \theta_{2,true}^{(i)})$
1	0,1	0,078371	0,568601	1,87264	4,28987	4,20E-11
2	0,2	0,02889	0,477314	1,2182	3,56277	1,28E-08
3	0,3	0,087908	0,500682	2,02852	3,61996	2,47E-07
4	0,4	0,038685	0,577232	1,80619	3,7572	5,14E-06
5	0,5	0,013134	0,562389	1,37124	4,17177	4,19E-05
6	0,6	0,031447	0,649374	2,00118	5,37435	0,0002717
7	0,7	0,001671	0,661616	2,79935	7,27505	0,0013566
8	0,8	0,034846	0,473323	2,10385	9,65124	0,0089874
9	0,9	0,040175	0,463833	2,18561	8,40895	0,0834351

В таблице 1 представлены результаты работы программы для ЭВМ на основе алгоритма метода случайного поиска глобального экстремума с «памятью». Для заданных значений Δ_i (первый столбец) по формулам (9) получаем значения истинных параметров $\theta_{1,true}^{(i)}, \theta_{2,true}^{(i)}$. В столбцах 2–5 находятся значения локально D -оптимального плана $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, x_4^{(i)}$ как решение задачи (8) для каждого набора истинных параметров $\theta_{1,true}^{(i)}, \theta_{2,true}^{(i)}$. В столбце 6 приводятся значения функции (7) для $\theta_{1,true}^{(i)}, \theta_{2,true}^{(i)}$ и $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, x_4^{(i)})$. В работе [7] указан локально D -оптималь-

ный план $x^{(*)} = (0; 0,5; 2,7; 4,98)$ для Δ_9 . Для сравнения было вычислено значение $A(x^{(*)}, \Delta_9) = 0,031951$. Программа позволяет находить локально D -оптимальные планы для любого заданного значения Δ_i из (9). При Δ_9 , т. е. при $\theta_{1,true}^{(9)}, \theta_{2,true}^{(9)}$, значение $A(x^{(9)}, \Delta_9)$ получилось максимальное.

Литература

1. Wiese W. L. Atomic transition probabilities // Nucl. Inst. And Methods. 1970. No 90. P. 25.
2. Толстой Н. А., Феофилов П. П. Новый метод исследования релаксационных процессов и его применение к изучению некоторых физических явлений // Успехи физ. Наук. 1950. No 41. С. 44–107.
3. Seber G. A. F., Wild C. G. Nonlinear Regression. New York: Wiley, 1989.
4. Математическая теория планирования эксперимента / под ред. С. М. Ермакова. М.: Наука, 1983. 391 с.
5. Melas V. B. Optimal designs for exponential regression // Math. Operations forsh. Statist. Ser. Statistics. 1978. No 9. P. 45–59.
6. Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 319 с.
7. Мелас В. Б. Оптимальное планирование эксперимента для экспоненциальной регрессии // Математические методы планирования эксперимента. Новосибирск: Наука, 1981. С. 174–198.
8. Chernoff H. Locally optimal design for estimator parameters // Ann. Math. Stat. 1953. No 24. P. 586–602.
9. Владимирова Л. В. Использование случайного поиска с «памятью» в оценке параметров нелинейной регрессии // Вестник СПГУТД. Серия 1. 2013. No 4. С. 30–34.
10. Владимирова Л. В., Фатьянова И. А. Построение оптимального плана регрессионного эксперимента на основе случайного поиска с «памятью» с использованием параллельных вычислений //

Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции (Санкт-Петербург, 5-9 октября 2015 г.) / Под ред. А. П. Жабко, Л. А. Петросяна. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2015. С. 303–304.

11. Vladimirova L., Fatyanova I. Construction of regression experiment optimal plan using parallel computing // IEEE Proceedings of III International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP). St. Petersburg, Russia. 2015. P. 361–363.
12. Vladimirova L. Extremum search on the basis of density and its mode estimation // IEEE Proc. of 20th International Workshop: Beam Dynamics & Optimization (BDO). St. Petersburg, Russia. 2014. P. 186.

УДК 517.962.24

Волошин М. В.

Об асимптотической устойчивости одного класса нелинейных разностных систем с насыщением и переключениями

Рекомендовано к публикации профессором Александровым А. Ю.

1. Введение. В данной работе исследуется проблема устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с насыщением в правых частях и переключениями. Предполагается, что нелинейности удовлетворяют ограничениям секторного типа и при достаточно больших по модулю значениях переменных состояния испытывают насыщение, удерживая свои наибольшие и наименьшие значения. Система с переключениями состоит из семейства подсистем с насыщением и закона их переключения. Системы такого вида появляются при моделировании многих реальных процессов [1–4].

Рассматриваемые разностные системы могут получаться при численном интегрировании соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Разностные системы также представляют самостоятельный интерес, так как состояния многих реальных процессов изменяются в дискретные моменты времени [5–7].

Основной задачей работы является получение условий асимптотической устойчивости в целом для рассматриваемого класса систем.

2. Система с насыщением и переключениями. Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел, $\mathbb{M} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество моментов времени, $n \in \mathbb{N}$ — количество переменных состояния системы, $I = \{1, \dots, n\}$, $N \in \mathbb{N}$ — количество подсистем, $Q = \{1, \dots, N\}$.

Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = h\mathbf{P}_{\sigma(k)}\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$; скалярные функции $f_i(x_i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$, непрерывны и обладают свойствами $x_i f_i(x_i) > 0$ при

Волошин Михаил Витальевич — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: m.v.voloshin@spbu.ru, тел.: +7(965)030-89-90

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00587

$x_i \neq 0$, существуют такие числа $H_i > 0$, что

$$f_i(x_i) = f_i(-H_i) \quad \text{при } x_i < -H_i,$$

$$f_i(x_i) = f_i(H_i) \quad \text{при } x_i > H_i;$$

$\sigma(k): \mathbb{M} \rightarrow Q$ — кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения; $P_s: Q \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянные матрицы; $h > 0$ — шаг дискретизации.

Таким образом, в каждый момент времени работа системы (1) описывается одной из подсистем

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = hP_s \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)), \quad s \in Q. \quad (2)$$

Рассмотрим соответствующие подсистемам (2) системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = P_s \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad s \in Q. \quad (3)$$

Из свойств функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ следует, что системы (1)–(3) имеют нулевые решения.

Системы вида (2) и (3) широко применяются при изучении систем автоматического регулирования [5]. Они также используются при моделировании нейронных сетей [8].

3. Предположения. В работе [9] получены достаточные условия, при выполнении которых для семейства подсистем (3) существует общая функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом рассмотрено несколько возможных вариантов построения такой функции.

Предположим теперь, что гарантировать существование общей функции Ляпунова для подсистем (3) не удастся. Тогда обеспечить асимптотическую устойчивость можно за счет наложения специальных дополнительных ограничений на закон переключения (dwell-time approach [2, 10, 11]).

Обозначим через $\theta_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ моменты переключений между подсистемами, т. е. все такие числа θ_i , что $\sigma(\theta_i - 1) \neq \sigma(\theta_i)$, $\theta_1 < \theta_2 < \dots$. Будем считать, что эти моменты известны, а порядок, в котором происходит смена режимов функционирования системы, нет. Пусть $\theta_0 = 0$. Будем рассматривать только такие законы переключения,

для которых функция $\sigma(k)$ на промежутке $[0, +\infty)$ имеет бесконечное количество переключений. Обозначим длины промежутков между переключениями $T_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Далее наложим на правые части уравнений (1) некоторые ограничения.

Предположение 1. Пусть для каждого значения индекса $s \in Q$ существуют положительные числа $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}$, при которых матрица $P_s^T \Lambda_s + \Lambda_s P_s$ отрицательно определена. Здесь

$$\Lambda_s = \text{diag}(\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}).$$

Условия существования таких значений $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}$ исследовались в работах [9, 12].

Если выполнено предположение 1, то для каждого $s \in Q$ нулевое решение s -й подсистемы из (3) асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_i(x_i)$, причем для этой подсистемы функция

$$V_s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если бы требуемые значения $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}$ удалось подобрать одинаковыми для всех $s \in Q$, то это бы означало, что для подсистем (3) получилось построить общую функцию Ляпунова. Однако, условия существования такой общей функции Ляпунова являются гораздо более жесткими, нежели условия существования своей частной функции Ляпунова для каждой отдельной подсистемы.

Положим

$$A = \max \left\{ \frac{\lambda_i^{(s_1)}}{\lambda_i^{(s_2)}} \mid i \in I, s_1 \in Q, s_2 \in Q \right\}.$$

Предположение 2. Пусть функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условию Липшица на всей вещественной оси, т. е. существует положительное число L , при котором для всех $x'_i, x''_i \in \mathbb{R}$

$$|f_i(x'_i) - f_i(x''_i)| \leq L|x'_i - x''_i|, \quad i \in I.$$

Предположение 3. Пусть существуют такие положительные числа b_i и $\beta_i > 1$, что при $i \in I$ на промежутках $|x_i| \leq H_i$ функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают и удовлетворяют там неравенствам

$$|f_i(x_i)| \geq b_i |x_i|^{\beta_i}.$$

Положим

$$\gamma = \min \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_i} \mid i \in I \right\}, \quad B = A^{1-2/\gamma}.$$

4. Результаты. Используя известные частные функции $V_1(\mathbf{x}), \dots, V_N(\mathbf{x})$ для подсистем (3), построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(k)}(\mathbf{x})$ для системы (1), соответствующую закону переключения $\sigma(k)$. С помощью оценки приращения этой функции в силу системы (1) и последующей оценки нормы решений этой системы получим следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены предположения 1–3,

$$\sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i} B^{p-i} \rightarrow \infty$$

при $p \rightarrow \infty$ равномерно по отношению к $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{p-1} T_{1+i} A^{-i} \rightarrow \infty.$$

Тогда найдется такое положительное число h_0 , что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $h \in (0, h_0)$.

5. Заключение. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости решений рассмотренного класса нелинейных разностных систем с насыщением и переключениями. При этом асимптотическая устойчивость имеет глобальный характер и обеспечивается с помощью наложения ограничений на закон переключения.

Литература

1. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V. Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics // Proc. 21st Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED'2013). 2013. P. 622–627.
2. Decarlo R. A., Branicky M. S., Pettersson S., Lennartson B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems // Proc. IEEE. 2000. Vol. 88, No 7. P. 1069–1082.
3. Hu T., Lin Z. Control systems with actuator saturation: Analysis and design. Boston: Birkhäuser, 2001. 392 p.
4. Kapila V., Grigoriadis K. M. Actuator saturation control. New York: Marcel Dekker Inc, 2002. 320 p.
5. Kazkurewicz E., Bhaya A. Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhäuser, 1999. 267 p.
6. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 310 с.
7. Видаль П. Нелинейные импульсные системы. М.: Энергия, 1974. 336 с.
8. Hopfield J. J., Tank D. W. Computing with neural circuits: a model // Science. 1986. Vol. 233, No 4764. P. 625–633.
9. Александров А. Ю., Платонов А. В. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 1101–1116.
10. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Platonov A. V. On the asymptotic stability of switched homogeneous systems // Systems Control Lett. 2012. Vol. 61, No 1. P. 127–133.
11. Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1998. Vol. 43, No 4. P. 475–482.
12. Kamenetskiy V. A., Pyatnitskiy Ye. S. An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions // Systems Control Lett. 1987. Vol. 8, No 5. P. 445–451.

УДК 517.929

Горнак Д. Д.

**Применение теории разреженных матриц
при построении матриц Ляпунова
для систем с запаздыванием**

Рекомендовано к публикации профессором Харитоновым В. Л.

1. Введение. Вопрос об устойчивости решений является одним из основных в теории дифференциальных уравнений. В статье рассматриваются матрицы Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Определение. Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова, связанной с симметрической матрицей W , системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{j=0}^m A_j x(t - h_j), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

если она удовлетворяет свойствам:

1. Динамическое свойство:

$$\frac{d}{d\tau} U(\tau) = \sum_{j=0}^m U(\tau - h_j) A_j, \quad \tau \geq 0;$$

2. Симметрическое свойство:

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geq 0;$$

3. Алгебраическое свойство:

$$\sum_{j=0}^m [U(-h_j) A_j + A_j^T U(h_j)] = -W.$$

Горнак Дарья Дмитриевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st047585@student.spbu.ru, тел.: +7(911)7434870

Для вычисления матрицы Ляпунова рассмотрены специальные граничные условия и система дифференциальных уравнений без запаздывания. При построении матрицы Ляпунова применяются алгоритм построения матричной экспоненты и методы хранения и работы с разреженными матрицами.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему (1). Нужно определить вспомогательные матрицы

$$Y_j(\xi) = U(jh + \xi), \quad \xi \in [0, h],$$

новые системы дифференциальных матричных уравнений без запаздывания

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} Y_j(\xi) = \sum_{k=0}^m Y_{j-k}(\xi) A_k, & j = 0, \dots, m-1, \\ \frac{d}{d\xi} Y_{-j}(\xi) = -\sum_{k=0}^m A_k^T Y_{-j+k}(\xi), & j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

и новые граничные условия

$$\begin{aligned} Y_j(0) &= Y_{j-1}(h), \quad j = -m+1, \dots, m-1, \\ -W &= \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(0) A_k + A_k^T Y_k(0) + A_m^T Y_m(0) + Y_{m-1}(h) A_m. \end{aligned}$$

Данная система матричных дифференциальных уравнений решается, как описано в [1, 2]. В результате решения появляются разреженные матрицы больших размерностей.

3. Алгоритмы для работы с разреженными матрицами. В разделе описываются алгоритмы, использованные для работы с разреженными матрицами.

3.1. Алгоритм хранения разреженных матриц. Для хранения разреженных матриц выбран разреженный строчный формат. Эта схема предъявляет минимальные требования к памяти и в то же время оказывается очень удобной для нескольких важных операций над разреженными матрицами: сложения, перестановок строк, решения линейных систем с разреженными матрицами коэффициентов как прямыми, так и итерационными методами и т. д. [3–6]. В

соответствии с рассматриваемой схемой для хранения матрицы требуется три одномерных массива:

- массив ненулевых элементов матрицы, в котором они перечислены по строкам от первой до последней (обозначим его как *values*);
- массив номеров столбцов для соответствующих элементов массива *values* (обозначим его как *cols*);
- массив указателей позиций, с которых начинается описание очередной строки (обозначим его *pointer*). Описание *k*-й строки хранится в позициях с *pointer*[*k*]-й по (*pointer*[*k*+1] - 1)-ю массивов *values* и *cols*. Если *pointer*[*k*] = *pointer*[*k*+1], то *k*-я строка пустая. Если матрица состоит из *n* строк, то длина массива *pointer* будет *n* + 1.

Данный способ представления разреженной матрицы также является полным и упорядоченным, поскольку элементы каждой строки хранятся в соответствии с возрастанием столбцовых индексов.

Для примера рассмотрим представление матрицы *A* в разреженном строчном формате (см. таблицу):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

Таблица. Разреженный строчной формат

<i>values</i>	(1, -1, -3, -2, 5, 4, 6, 4, -4, 2, 7, 8, -5)
<i>cols</i>	(1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 2, 5)
<i>pointer</i>	(1, 4, 6, 9, 12, 14)

3.2. Вычисление экспоненты. Алгоритм вычисления экспоненты, описанный в [7], применяется в связи с тем, что в ходе решения появляются матрицы больших размерностей. В этом алгоритме матричная экспонента принимает вид

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left[\frac{t^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{m,n-k}}{(m+n)!} t^{m+n} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left[\frac{t^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} r_{m,k} t^{m+n} \right],$$

где t — время, связанное с необходимостью расчета высоких степеней матрицы A .

Данный алгоритм обеспечивает вычисление матричной экспоненты, используя только n степеней матрицы, в то время как классический алгоритм не детерминирован, и вычисления степеней матрицы продолжаются, пока не выполнится условие выхода из алгоритма.

4. Реализация программы. На рис. 1 представлена схема реализации описанного выше алгоритма.

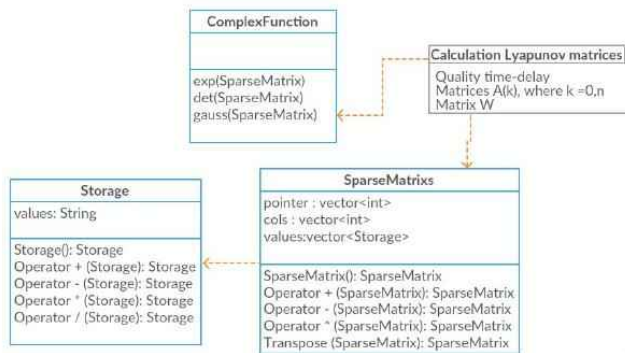


Рис. 1. Схема реализации программы

5. Пример. Пусть $M = 4, N = 4, h = 1,$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 4 & 0,1 & 0,9 \\ 0,1 & 1 & 0,5 & 8 \\ 0,9 & 5 & 1 & 2 \\ 0,4 & 0,7 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 6 & 1 & 4 & 0,4 \\ 4 & 5 & 0,9 & 0,8 \\ 3 & 5 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 6 & 1 & 0,5 & 0,7 \\ 1 & 2 & 0,6 & 0,4 \\ 2 & 7 & 0,9 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,1 & 3 \\ 6 & 5 & 0,1 & 0,3 \\ 9 & 2 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 3 & 0,4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 & 7 \\ 6 & 8 & 0,7 & 0,5 \\ 9 & 6 & 0,4 & 0,9 \\ 1 & 3 & 0,7 & 4 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 представлен результат работы программы в виде графика компонент $u_{3,4}$ и $u_{4,3}$, который показывает выполнение свойства симметрии матрицы U .

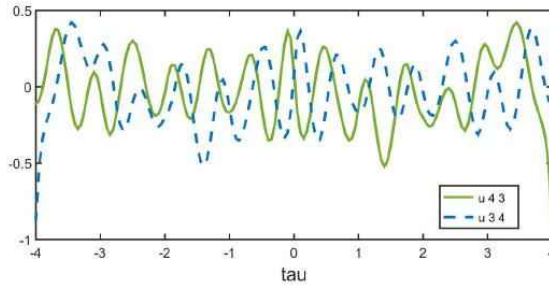


Рис. 2. График компонент $u_{3,4}$ и $u_{4,3}$

6. Заключение. Рассмотрен алгоритм вычисления матрицы Ляпунова. Для его построения использованы приемы работы с разреженными матрицами. На примере показан результат работы программы, вычисляющей матрицы Ляпунова для систем с запаздыванием.

Литература

1. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. № 1. С. 110–117.
2. Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. New York: Birkhauser, 2013. 311 p.
3. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.
5. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
6. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 416 с.
7. Безгин С. В., Пчелинцев А. Н. Организация матричных и символьных вычислений для исследования поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Системы управления и информационные технологии. 2012. Т. 47. №1. С. 4–7.

УДК 512.622

Грунина В. Н.

О взаимосвязи решений второй задачи Золотарева и полиномиальной задачи

Рекомендовано к публикации доцентом Тамасяном Г. Ш.

Введение. Ряд практически важных задач приводит к необходимости минимизации функции. Такие задачи возникают при решении вопросов управления, исследования операций и некоторых других. Рассматриваемые в настоящей работе задачи Золотарева и полиномиальная относятся именно к такому классу. Ниже проводится анализ возможности нахождения решения задачи Золотарева через полиномиальную.

Вспомогательные сведения. Постановка задачи. Пусть $a > 1$, $A \in \mathbb{R}$. Вторая задача Золотарева ставится так [1]: среди всех алгебраических полиномов вида

$$H_n(z, t) = t^n + z_1 t^{n-1} + \dots + z_n, \quad (1)$$

удовлетворяющих условию $H_n(z, a) = A$, найти полином, у которого величина $\varphi(z) = \max_{t \in [-1, 1]} |H_n(z, t)|$ принимает наименьшее значение.

Решение этой задачи существует и единственно. Обозначим его z^* . Полином $H_n^*(t) = H_n(z^*, t)$ называется полиномом Золотарева с параметрами a, A .

Постановка полиномиальной задачи [2]. Пусть $a > 1$, $\mathbb{A}, b < -1$, $M > 0$ — вещественные параметры и

$$P_n(x, t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n$$

— алгебраический полином степени не выше n , $n \geq 1$. Ставится и исследуется следующая экстремальная задача:

$$\begin{cases} P_n(x, b) \rightarrow \max, \\ |P_n(x, t)| \leq M, \quad t \in [-1, 1], \\ P_n(x, a) = \mathbb{A}. \end{cases} \quad (2)$$

Грунина Вера Николаевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vegrunina@mail.ru, тел.: +7(921)449-41-04

Обозначим через Ω множество векторов $x = (x_0, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (2). Элементы $x \in \Omega$ будем называть планами.

Обозначим $\mathbb{A}_n = MT_n(a)$, где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — полином Чебышева. Далее потребуются следующие утверждения, справедливые при $n \geq 2$ (см. [3]).

Утверждение 1. При $\mathbb{A} \in [-\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_n]$ решение задачи (2) существует и единственно.

Утверждение 2. При четном n старший коэффициент $x_0^*(\mathbb{A})$ экстремального полинома $P_n(x^*(\mathbb{A}), t)$ положителен при $\mathbb{A} \in (-\mathbb{A}_{n-1}, \mathbb{A}_n)$, равен нулю при $\mathbb{A} = -\mathbb{A}_{n-1}$ и отрицателен при $\mathbb{A} \in (-\mathbb{A}_n, -\mathbb{A}_{n-1})$. При нечетном n старший коэффициент $x_0^*(\mathbb{A})$ экстремального полинома $P_n(x^*(\mathbb{A}), t)$ положителен при $\mathbb{A} \in (\mathbb{A}_{n-1}, \mathbb{A}_n)$, равен нулю при $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{n-1}$ и отрицателен при $\mathbb{A} \in (-\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_{n-1})$.

Теорема. Пусть $P_n(x^*, t)$ — решение полиномиальной задачи (2) с параметрами $a > 1$, $b < -1$, $\mathbb{A} \in (-\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_n)$, $M > 0$. Тогда при $\mathbb{A} \neq -\mathbb{A}_{n-1}$ в случае четного n и при $\mathbb{A} \neq \mathbb{A}_{n-1}$ в случае нечетного n справедливо тождество

$$\frac{1}{x_0^*} P_n(x^*, t) \equiv H^*(t), \quad (3)$$

где x_0^* — старший коэффициент полинома $P_n(x^*, t)$ и $H^*(t)$ — полином Золотарева с параметрами a , \mathbb{A}/x_0^* .

Замечание. Решение задачи Золотарева и полиномиальной задачи находится в два этапа. На первом этапе все искомые коэффициенты выражаются через один из коэффициентов, который взят в качестве параметра. На втором этапе находим выражение для выбранного параметра, зависящее от A в случае задачи Золотарева и от \mathbb{A} — в случае полиномиальной задачи.

Целью настоящей работы является поиск решения второй задачи Золотарева, опираясь на решение полиномиальной задачи в зависимости от параметра A .

Решение задачи. При $n = 1$ решение задачи Золотарева выписывается сразу в явном виде: $H_1(z, t) = t + (A - a)$.

При $n = 2$ и $n = 3$ предлагается следующий алгоритм:

1. Задаем значения параметров: a — для задач Золотарева и полиномиальной; A — для задачи Золотарева; M и b — для поли-

номиальной задачи и выписываем из полиномиальной задачи явную формулу $x_0^*(\mathbb{A})$, подходящую для заданного A .

2. Решаем уравнение

$$Ax_0^*(\mathbb{A}) - \mathbb{A} = 0 \quad (4)$$

относительно \mathbb{A} .

3. Найденное значение параметра \mathbb{A} подставляем в известное решение полиномиальной задачи (2).
4. Решение задачи Золотарева находится по формуле (3):

$$H_n(z^*, t) = \frac{P_n(x^*, t)}{x_0^*(\mathbb{A})}.$$

Далее подробно рассмотрим случай $n = 2$.

В этом случае, коэффициент при старшей степени полиномиальной задачи выражается через параметр c [3] следующим образом:

$$x_0^* = \begin{cases} \frac{M}{2c}, & |c| \geq 1, \\ -\frac{2M}{(c-1)^2}, & c \in (-1, 0), \\ \frac{2M}{(c+1)^2}, & c \in (0, 1). \end{cases} \quad (5)$$

В работе [4, с. 3] получена формула для $A(c) := H(z(c), a)$. Каждому значению $A(c)$ сопоставляется однозначно интервал изменения параметра c . Аналогичным образом происходит и в полиномиальной задаче. Далее устанавливается взаимосвязь изменения параметра c между обеими задачами. Это позволяет в зависимости от A однозначно определить вид коэффициента $x_0^*(\mathbb{A})$ полиномиальной задачи.

Введем обозначения: $A_{-1} = A(-1) = a^2 + 2a - 1$, $A_0 = A(0) = a^2 - \frac{1}{2}$, $A_1 = A(1) = a^2 - 2a - 1$.

Рассмотрим подробнее каждый интервал в отдельности (о разбиении на интервалы см. [4]).

1) При $A \in (-\infty, A_1] \cup [A_{-1}, +\infty)$ имеем (см. (5)) $x_0^*(\mathbb{A}) = \frac{M}{2c}$, $c(\mathbb{A}) = \frac{M(a^2 - 1)}{2(\mathbb{A} + Ma)}$. При этом, полином Золотарева принимает вид

$$H^*(t) = t^2 - \frac{2tM(a^2 - 1)}{2\mathbb{A} + 2Ma} - 1,$$

где

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(A) = \frac{MaA}{a^2 - 1 - A}.$$

2) При $A \in (A_0, A_{-1})$ из (5) имеем

$$x_0^*(\mathbb{A}) = -\frac{2M}{(c-1)^2}, \quad c(\mathbb{A}) = \frac{a - \sqrt{\frac{M-\mathbb{A}}{2}}}{1 - \sqrt{\frac{M-\mathbb{A}}{2M}}}.$$

Выпишем решение уравнения (4):

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(A) = -2M \left(\left(\frac{-y_2 - \sqrt{y_2^2 - 4y_1y_3}}{2y_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \right),$$

где $y_1 = \frac{A}{(a-1)^2} - 1$, $y_2 = -\frac{2A}{(a-1)^2}$, $y_3 = \frac{A}{(a-1)^2} + \frac{1}{2}$.

В результате полином Золотарева принимает следующий вид:

$$H^*(t) = \frac{P(x^*, t)}{x_0^*} = -\frac{1}{x_0^*} M \left(2 \left(\frac{t-c}{c-1} \right)^2 - 1 \right).$$

3) При $A = A_0$ воспользоваться теоремой не удастся, поскольку в этом случае $\mathbb{A} = -\mathbb{A}_{n-1}$.

4) При $A \in (A_1, A_0)$ из (5) имеем $x_0^* = \frac{2M}{(c+1)^2}$, $c = \frac{a - \sqrt{\frac{M+\mathbb{A}}{2M}}}{1 + \sqrt{\frac{M+\mathbb{A}}{2M}}}$.

Решая уравнение (4), находим

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(A) = 2M \left(\left(\frac{-y_2 - \sqrt{y_2^2 - 4y_1y_3}}{2y_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \right),$$

где $y_1 = \frac{A}{(a+1)^2} - 1$, $y_2 = \frac{2A}{(a+1)^2}$, $y_3 = \frac{A}{(a+1)^2} + \frac{1}{2}$.

В итоге полином Золотарева принимает следующий вид:

$$H^*(t) = \frac{P(x^*, t)}{x_0^*} = \frac{1}{x_0^*} P(x^*, t) = M \left(2 \left(\frac{t-c}{c+1} \right)^2 - 1 \right).$$

Заключение. В настоящей работе показан вид решения второй задачи Золотарева с помощью полиномиальной задачи в зависимости от значения параметра A .

Литература

1. Полное собрание сочинений Е.И. Золотарева [Электронный ресурс] // Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации. URL:<http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/monograf.shtml> (дата обращения: 18.03.2017).
2. Агафонова И.В., Малоземов В.Н. Об одной экстремальной задаче, связанной с полиномами Золотарева [Электронный ресурс] // Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации. URL:<http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/OneExstrProblem.pdf> (дата обращения: 14.03.2017).
3. Тамасян Г.Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи [Электронный ресурс] // Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации. URL:http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Filtr_n12.pdf (дата обращения: 14.03.2017).
4. Малоземов В.Н., Сукач М.П., Тамасян Г.Ш. Этюд на тему второй задачи Золотарева [Электронный ресурс] // Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации. URL:http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Zolotarev_n2.pdf (дата обращения: 14.03.2017).

О разрешимости в аналитическом виде одной полиномиальной фильтровой задачи

Рекомендовано к публикации доцентом Тамасяном Г. Ш.

1. Постановка задачи. Задача полиномиальной фильтрации естественным образом возникает во многих задачах прикладной математики. Фильтры в виде полиномов используются для «очистки» входящего сигнала, например, от шума (при анализе электрических сигналов) или случайных выбросов (при обработке статистических данных).

Пусть заданы вещественные параметры $b < -1$, $a > 1$, $M > 0$ и A . Рассмотрим задачу условной оптимизации

$$P_4(x, b) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$|P_4(x, t)| \leq M, \quad t \in [-1, 1], \quad (2)$$

$$P_4(x, a) = A, \quad (3)$$

где

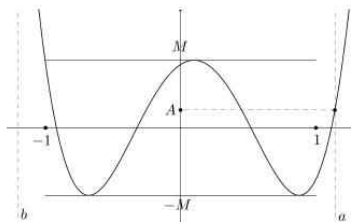


Рис. 1. Геометрическая интерпретация

$$P_4(x, t) = x_0 t^4 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t + x_4. \quad (4)$$

Задача (1)–(3) называется фильтровой полиномиальной задачей (см. [1–3]). Вектор коэффициентов $x = (x_0, \dots, x_4)$ полинома $P_4(x, t)$, удовлетворяющего ограничениям задачи (1)–(3), назовём *планом*. Множество планов обозначим $\Omega \subset \mathbb{R}^5$.

2. Вспомогательные сведения. Приведём необходимые теоретические результаты, подробно изложенные в [1].

Рассмотрим полином Чебышёва четвёртой степени

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1.$$

Положим

$$A_4 = MT_4(a).$$

Ежова Екатерина Викторовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: catherine1704@yandex.ru, тел.: +7(911)822-76-65

Теорема 1. При $A \in [-A_4, A_4]$ решение задачи (1)–(3) существует и единственно. В граничных точках отрезка A_4 и $-A_4$ решением являются полиномы $MT_4(t)$ и $-MT_4(t)$ соответственно.

Теорема 2. Для того чтобы план $x^* \in \Omega$ был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы полином $P_4(x^*, t)$ обладал четырёхточечным альтернансом, т. е. чтобы нашлись четыре точки $-1 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leq 1$, в которых выполняются равенства

$$\begin{aligned} P_4(x^*, t_1) &= M, & P_4(x^*, t_2) &= -M, \\ P_4(x^*, t_3) &= M, & P_4(x^*, t_4) &= -M. \end{aligned} \quad (5)$$

3. Решение задачи. С помощью теоремы 2 в работах [2, 3] решены фильтровые полиномиальные задачи при $n = \overline{1, 3}$. В данной статье рассмотрим случай $n = 4$. Решение находится в два этапа. На первом этапе построим однопараметрическое семейство полиномов четвёртой степени, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ четырёхточечным альтернансом, используя условие (5). На втором этапе выделим из этого семейства полином, удовлетворяющий условию (3). Такой полином и будет решением задачи (1)–(3).

Пусть c, d, e — вещественные числа, попарно неравные между собой. Рассмотрим некоторое сужение семейства полиномов (4)

$$P_4(x, t) = x_0 t^4 - \frac{4}{3} x_0 (c + d + e) t^3 + 2x_0 (cd + ce + de) t^2 - 4x_0 cde t + h. \quad (6)$$

Здесь

$$P_4'(x, t) = 4x_0(t - c)(t - d)(t - e),$$

поэтому c, d, e — точки локального экстремума. Будем считать, что d — точка локального максимума, c — точка локального минимума, e — точка локального экстремума, меняющая свою характеристику.

В семействе (6) выделим однопараметрическое семейство полиномов, обладающих на отрезке $[-1, 1]$ четырёхточечным альтернансом. В качестве параметра возьмём d . Возможны четыре случая расположения точек c, d, e относительно отрезка $[-1, 1]$:

- 1) $-1 < c < d < e \leq 1$, 2) $-1 < c < d < 1 < e$,
- 3) $e < -1 < c < d < 1$, 4) $-1 \leq e < c < d < 1$.

Подробно рассмотрим решение задачи в первом случае.

3.1. Первый этап решения. Точками альтернанса будут $t_1 = -1$, $t_2 = c$, $t_3 = d$, $t_4 = e$. Альтернансные условия (5) принимают вид

$$P_4(x, -1) = M, \quad P_4(x, c) = -M, \quad P_4(x, d) = M, \quad P_4(x, e) = -M.$$

Эта система имеет единственное решение при $d \in [0, 3 - 2\sqrt{2}]$:

$$x_0 = \frac{8M}{(d+1)^4}, \quad c = d - \frac{\sqrt{2}}{2}d - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e = d + \frac{\sqrt{2}}{2}d + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$h = -\frac{M(-d^2 + 6d + 4\sqrt{2}d + 3 + 2\sqrt{2})(d^2 - 6d + 4\sqrt{2}d - 3 + 2\sqrt{2})}{(d+1)^4}.$$

При подстановке полученных выражений для коэффициентов x_0 , c , e и h в (6) получим зависящий только от параметра d полином

$$P_{41}(x(d), t) = \frac{M}{(d+1)^4} \left(8t^4 - 32dt^3 + (40d^2 - 16d - 8)t^2 + \right. \\ \left. + (-16d^3 + 32d^2 + 16d)t + d^4 - 12d^3 - 2d^2 + 4d + 1 \right), \quad (7)$$

индекс «41» указывает на то, что это вид полинома для первого случая. Отметим, что значения полинома $P_{41}(x(d), t)$ на концах отрезка области изменения параметра d принимают вид

$$P_{41}(x(0), t) = MT_4(t),$$

$$P_{41}(x(3-2\sqrt{2}), t) = \frac{M(17+12\sqrt{2})}{8} \left(t^2 + 2t(2\sqrt{2}-3) + 13 - 10\sqrt{2} \right) \times \\ \times \left(t^2 + 2t(2\sqrt{2}-3) + 2\sqrt{2}-3 \right).$$

3.2. Второй этап решения. На втором этапе используем условие (3), чтобы получить зависимость всех коэффициентов полинома x_0 , c , d , e и h от параметра A .

Подставляя $t = a$ в (7) и приравнявая к A , получаем уравнение

$$(M - A)d^4 + [-4A + M(-16a - 12)]d^3 + [-6A + M(40a^2 + \\ + 32a - 2)]d^2 + [-4A + M(-32a^3 - 16a^2 + 4 + 16a)]d + \\ + M(8a^4 - 8a^2 + 1) - A = 0. \quad (8)$$

Найдём его решение относительно d . В случае $M = A$ имеем

$$d = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}.$$

При $A \neq M$ можно разделить (8) на коэффициент при d^4 и перейти к уравнению вида

$$d^4 + b_1 d^3 + c_1 d^2 + d_1 d + e_1 = 0.$$

Делая замену переменных $x = d - \frac{b_1}{4}$, придём к неполному уравнению четвёртой степени

$$x^4 + p_1 x^2 + q_1 x + r_1 = 0.$$

Для его решения составим резольвенту Феррари

$$y^3 - p_1 y^2 - 4r_1 y + (4p_1 r_1 - q_1^2) = 0.$$

Делая замену переменных $y = z + \frac{p_1}{3}$, приходим к неполному уравнению третьей степени

$$z^3 + p_2 z + q_2 = 0,$$

дискриминант которого

$$D = \frac{q_2^2}{4} + \frac{p_2^3}{27} = \frac{32768 M^3 (1+a)^{12} (A+M)^2}{27 (A-M)^5}.$$

Знак дискриминанта зависит от значений параметров A и M : если $M < A \leq A_4$, то $D > 0$ и уравнение имеет один вещественный корень; если $-M < A < M$, то $D < 0$ и уравнение имеет три вещественных корня.

Случай $M < A \leq A_4$. Корень резольвенты Феррари имеет вид

$$y_1 = u_1 + v_1 + \frac{p_1}{3}, \quad u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{D}}, \quad v_1 = -\frac{p_2}{3u_1}.$$

Тогда корень исходного уравнения (8) вычисляется по формуле

$$d = \frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4\left(\frac{y_1}{2} + L_1\right)}}{2} - \frac{b_1}{4}, \quad K_1 = \sqrt{y_1 - p_1}, \quad L_1 = -\frac{q_1}{2K_1}.$$

Случай $-M < A < M$. Корень резольвенты Феррари вычисляется по формуле

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p_2}{3}} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{p_1}{3}, \quad \varphi = \arccos \frac{3q_2}{2p_2} \sqrt{-\frac{3}{p_2}}.$$

С помощью него находим корень исходного уравнения (8)

$$d = \frac{-K_2 - \sqrt{K_2^2 - 4\left(\frac{y_2}{2} + L_2\right)}}{2} - \frac{b_1}{4}, \quad K_2 = \sqrt{y_2 - p_1}, \quad L_2 = -\frac{q_1}{2K_2}.$$

Таким образом, для первого случая задача полностью решена. Подставляя полученные выражения для d в (8), выразим все коэффициенты искомого полинома через параметры A , M , a задачи (1)–(3).

Для четвёртого случая расположения точек альтернанса, пользуясь этим же алгоритмом, можно получить аналогичные результаты.

4. Заключение. Рассмотренную фильтровую задачу удалось полностью решить для первого и четвёртого случая расположения точек альтернанса. Вопрос разрешимости задачи во втором и третьем случае остаётся открытым.

Литература

1. Агафонова И. В., Малозёмов В. Н. Об одной экстремальной задаче, связанной с полиномами Золотарёва [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 13 ноября 2014 г. URL: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/OneExstrProblem.pdf> (дата обращения: 10.03.2017).
2. Тамасян Г. Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ($n = 1, 2$) [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 27 ноября 2014 г. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Filtr_n12.pdf (дата обращения: 10.03.2017).
3. Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ($n = 3$) [Электронный ресурс] // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 12 марта 2015 г. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2015/Filtr_n3.pdf (дата обращения: 10.03.2017).

Оценка робастности условия Ляпунова для систем с запаздываниями

Рекомендовано к публикации профессором Харитоновым В. Л.

1. Введение. Системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами со второй половины прошлого века были описаны во многих работах [1–3]. Одним из основных методов в исследовании таких систем является метод функционалов Ляпунова. Он впервые был предложен в работах [2, 4]. Позднее появилось множество статей, посвященных матрице Ляпунова [5, 6]. В работе [2] был рассмотрен вопрос о построении квадратичного функционала с помощью матрицы Ляпунова.

Определение 1. Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^m A_k x(t - kh), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

если она удовлетворяет свойствам:

1. Динамическому: $\frac{d}{d\tau}U(\tau) = \sum_{k=0}^m U(\tau - kh)A_k, \quad \tau \geq 0,$
2. Алгебраичности: $\sum_{k=0}^m [U(-kh)A_k + A_k^T U(-kh)] = -W,$
 $W \geq 0,$
3. Симметричности: $U^T(\tau) = U(-\tau), \quad \tau \geq 0.$

Следующий вопрос, который возник после введения в рассмотрение определения, — это вопрос существования. Для его решения в работе [7] было введено условие Ляпунова.

Определение 2. Система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если ее спектр

$$\Lambda = \{s \mid \det[sE - \sum_{k=0}^m e^{-khs} A_k] = 0\}$$

Левина Елизавета Геннадьевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st016239student.spbu.ru, тел.: +7(911)9511079

не содержит точку s_0 такую, что точка $-s_0$ также содержится в множестве Λ .

В работе [5] доказано, что для существования матрицы Ляпунова необходимо и достаточно, чтобы система удовлетворяла условию Ляпунова.

Теорема 1 [7]. Система (1) удовлетворяет условиям Ляпунова тогда и только тогда, когда

$$\det(M + Ne^{Lh}) \neq 0, \quad (2)$$

где матрицы M, N, L вычисляются по формулам

$$L = \begin{pmatrix} E \times A_0 & \dots & E \times A_{m-1} & E \times A_m & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & E \times A_0 & E \times A_1 & \dots & E \times A_m \\ -A_m^T \times E & \dots & -A_1^T \times E & -A_0^T \times E & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & -A_m^T \times E & -A_{m-1}^T \times E & \dots & -A_0^T \times E \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$M = \begin{pmatrix} E \times E & O \times O & \dots & O \times O & O \times O \\ O \times O & E \times E & \dots & O \times O & O \times O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O \times O & O \times O & \dots & E \times E & O \times O \\ A_{m-1}^T \times E & \dots & A_0^T \times E + E \times A_0 & \dots & E \times A_m \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$N = \begin{pmatrix} O \times O & -E \times E & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O \times O & O \times O & \dots & -E \times E \\ A_m^T \times E & O \times O & \dots & O \times O \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $A \times B$ — кронекерово умножение, O — нулевая матрица.

В данной работе рассмотрен вопрос о влиянии возмущения в системах дифференциальных уравнений с запаздываниями на выполнение условия Ляпунова. Найдено ограничение на возмущения,

рассмотрены примеры и получены допустимые изменения параметров возмущения, при которых системы удовлетворяют условию Ляпунова.

2. Постановка задачи. Условие Ляпунова для возмущенных систем. Пусть дана система уравнений с запаздываниями (1). Будем считать, что она удовлетворяет условию Ляпунова. Рассмотрим семейство возмущенных систем

$$\frac{dy(t)}{dt} = \sum_{k=0}^m [A_k + \Delta_k]y(t - kh), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где Δ_k постоянные матрицы, удовлетворяющие ограничениям

$$\|\Delta_k\| \leq p_k, \quad p_k \geq 0, \quad k = \overline{0, m}. \quad (7)$$

Матрицы (3)–(5) для семейства (6), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 &= L + \Delta_L, \quad M_1 = M + \Delta_M, \quad N_1 = N + \Delta_N, \\ \Delta_L &= \begin{pmatrix} E \times \Delta_0 & \dots & E \times \Delta_{m-1} & E \times \Delta_m & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & E \times \Delta_0 & E \times \Delta_1 & \dots & E \times \Delta_m \\ -\Delta_m^T \times E & \dots & -\Delta_1^T \times E & -\Delta_0^T \times E & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & -\Delta_m^T \times E & -\Delta_{m-1}^T \times E & \dots & -\Delta_0^T \times E \end{pmatrix}, \\ \Delta_M &= \begin{pmatrix} O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & O \times O \\ \Delta_{m-1}^T \times E & \dots & \Delta_0^T \times E + E \times \Delta_0 & \dots & E \times \Delta_m \end{pmatrix}, \\ \Delta_N &= \begin{pmatrix} O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_m^T \times E & \dots & O \times O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем, при каких $p_k, k = \overline{0, m}$, условие Ляпунова выполняется для всех систем семейства (6), (7). Матрица

$$M_1 + N_1 e^{L_1 h} = M + \Delta_M + [N + \Delta_N] e^{(L + \Delta_L)h}.$$

Для дальнейшего преобразования введем следующую лемму.

Лемма. *Норма матрицы $\bar{\Delta} = e^{(L + \Delta_L)h} - e^{Lh}$ допускает оценку*

$$\|\bar{\Delta}\| \leq e^{\|L\|h} (e^{\|\Delta_L\|h} - 1). \quad (8)$$

Доказательство этого утверждения можно провести методом математической индукции.

Рассмотрим разность матриц

$$\tilde{\Delta} = M_1 + N_1 e^{L_1 h} - [M + N e^{Lh}] = \Delta_M + N \bar{\Delta} + \Delta_N (e^{Lh} + \bar{\Delta}).$$

Система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, поэтому определитель (2) для семейства (6), (7) можно представить в виде

$$\det(M_1 + N_1 e^{L_1 h}) = \det(M + N e^{Lh}) \det(E + (M + N e^{Lh})^{-1} \tilde{\Delta}).$$

Откуда следует, что для выполнения условия Ляпунова для семейства (6), (7)

$$\|\tilde{\Delta}\| < 1 / \|(M + N e^{Lh})^{-1}\|.$$

С учетом оценок норм матриц $\Delta_M, \Delta_N, \Delta_L$

$$\|\Delta_M\| \leq 2 \sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m, \quad \|\Delta_N\| \leq p_m, \quad \|\Delta_L\| \leq \sum_{i=0}^m p_i$$

получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Семейство (6), (7) удовлетворяет условию Ляпунова, если $p_k, k = 0, m$, удовлетворяют неравенству*

$$2 \sum_{i=0}^m p_i + \left[\|N\| e^{\|L\|h} + 1 \right] (e^{\sum_{i=0}^m p_i h} - 1) < 1 / \|(M + N e^{Lh})^{-1}\|. \quad (9)$$

3. Примеры. Рассмотрим уравнение с двумя запаздываниями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t-1) - x(t-2).$$

Определитель в формуле (2) для данного примера отличен от нуля, следовательно, система удовлетворяет условию Ляпунова. Перейдем теперь к рассмотрению возмущенного уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = \Delta_0 y(t) + (\Delta_1 - 1)y(t-1) + (\Delta_2 - 1)y(t-2),$$

где $|\Delta_k| \leq p, k = 0, 1, 2$.

Получаем ограничения на значения p , при которых заданное семейство возмущенных уравнений удовлетворяет условию Ляпунова:

$$p \leq 0,013.$$

Рассмотрим систему второго порядка с двумя запаздываниями:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0,7 \\ 0,7 & 0 \end{pmatrix} x(t-1) + \\ & + \begin{pmatrix} -0,49 & 0 \\ 0 & -0,49 \end{pmatrix} x(t-2). \end{aligned}$$

Определитель вида (2) отличен от нуля, следовательно, система удовлетворяет условию Ляпунова. Перейдем теперь к рассмотрению возмущенного уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A_0 + \Delta_0)y(t) + (A_1 + \Delta_1)y(t-1) + (A_2 + \Delta_2)y(t-2).$$

где $\|\Delta_k\| \leq p, k = 0, 1, 2$.

Получаем ограничение $p \leq 0,0093$.

4. Заключение. Получены условия, при которых возмущенная система удовлетворяет условию Ляпунова. В ходе исследования найдены искомые ограничения на возмущения. Также рассмотрены примеры, для которых, используя полученные условия, найдены допустимые значения изменения возмущений.

Литература

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
2. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956. № 3. С. 315-327.

3. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. В. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
4. Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. № 3. С. 564–566.
5. Huang W. Generalization of Liapunov's Theorem in a Linear Delay System // Mathematical Analysis and Applications. 1989. № 142. P. 83–94.
6. Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach for robust stability of time delay systems // Automatica. 2003. № 39. P. 15–20.
7. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. New York: Birkhauser, 2013. 311 p.

УДК 517.929

Нурисламова Э. Ф.

Исследование решений дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием и однородной правой частью

Рекомендовано к публикации доцентом Чижовой О. Н.

1. Введение. Большинство результатов анализа устойчивости систем с последействием получены для случая постоянного запаздывания [1, 2]. Однако уравнения, описывающие взаимодействие объектов, удаляющихся друг от друга с течением времени, содержат транспортное запаздывание — время, необходимое для передачи информации от одного объекта к другому. Математические модели в технике или химии должны учитывать время, необходимое для протекания процессов. Величина таких запаздываний также может линейно возрастать с течением времени. Если линейные уравнения с таким видом запаздывания ранее рассматривались [3, 4], то нелинейные уравнения являются почти не изученными. Отдельные результаты по устойчивости и неустойчивости таких уравнений получены в [5]. В данной статье приведены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейных однородных уравнений с линейным запаздыванием; получены некоторые оценки решений уравнений при наличии внешних возмущений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное однородное уравнение с линейным временным запаздыванием с нечетным показателем однородности. Пусть поставлена основная начальная задача — определены начальный момент времени t_0 и начальная функция $\varphi(t)$, заданная и непрерывная на $E_{t_0} = [\alpha t_0, t_0]$:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^{2n-1}(t) + bx^{2n-1}(\alpha t), & t > t_0, \\ x(t) \equiv \varphi(t), & t \in E_{t_0}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $t_0 > 0$.

Нурисламова Эльвина Фацуровна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nurislamova-1993@mail.ru, тел.: +7(952)273-66-63

При $\varphi(t) \equiv 0$ уравнение (1) имеет нулевое решение. Необходимо найти область в пространстве коэффициентов a и b , соответствующую области асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1), а также получить некоторые оценки решений при коэффициентах a и b из области асимптотической устойчивости.

3. Выделение в пространстве коэффициентов области асимптотической устойчивости. Для исследования нулевого решения на предмет асимптотической устойчивости применим метод Разумихина [6]. Рассмотрим функцию Ляпунова следующего типа:

$$V(t, x) = x^2. \quad (2)$$

С учетом условия Разумихина

$$|x_\alpha| \leq |x|, \quad x_\alpha = x(\alpha t) \quad (3)$$

запишем оценку производной функции (2) в силу уравнения (1):

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = 2x(ax^{2n-1} + bx_\alpha^{2n-1}) \leq 2x^{2n}(a + |b|). \quad (4)$$

Таким образом, получаем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения.

Теорема 1. *Если в уравнении (1) коэффициенты a и b удовлетворяют условию*

$$a + |b| < 0, \quad (5)$$

то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

4. Построение оценок решений. Пусть параметры a, b уравнения (1) удовлетворяют достаточным условиям асимптотической устойчивости нулевого решения (5).

Выразим из (2) переменную x и подставим в (4):

$$\frac{dV}{dt} \leq 2(a + |b|)V^n. \quad (6)$$

Интегрируя (6), получим

$$V^{n-1} \leq \frac{1}{C - 2(n-1)(a+|b|)t}, \quad n > 1.$$

Пусть $x_0 = \varphi(t_0) \neq 0$, тогда

$$C \leq \frac{1}{x_0^{2(n-1)}} + 2(n-1)(a + |b|)t_0.$$

Сделаем обратную подстановку и сформулируем результат в виде леммы.

Лемма 1. *Решения уравнения (1) при параметрах a, b , удовлетворяющим условию (5), и ненулевом значении x_0 допускают следующую оценку:*

$$|x| \leq \frac{|x_0|}{\sqrt[2(n-1)]{1 - 2(n-1)(a + |b|)(t - t_0)x_0^{2(n-1)}}}, \quad t > t_0. \quad (7)$$

5. Устойчивость нулевого решения при наличии внешних возмущений. Наряду с (1) рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax^{2n-1}(t) + bx^{2n-1}(\alpha t) + f(t, x), \quad (8)$$

где функция $f(t, x)$ задана и непрерывна при $t \geq \alpha t_0$, $|x| < H$, H — некоторая положительная константа.

Используя методы, изложенные в работах [6–8], можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (8).

Теорема 2. *Пусть для уравнения без возмущений (1) выполнены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения (5), а функция $f(t, x)$ такая, что*

$$f(t, x) \leq \gamma|x|^\lambda, \quad \lambda \geq 2n - 1, \quad (9)$$

при $|x| \leq h$, где h — достаточно малая положительная величина, γ — положительная величина, достаточно малая при $\lambda = 2n - 1$. Тогда нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Запишем производную функции Ляпунова (2) в силу уравнения с возмущением (8):

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8)} = 2(ax^{2n} + bxx_\alpha^{2n-1} + xf(t, x)).$$

Из условия Разумихина (3) и ограничений (9) на функцию $f(t, x)$ получаем оценку сверху:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8)} \leq 2(a + |b|)x^{2n} + 2\gamma|x|^{\lambda+1}, \quad |x| \leq h.$$

Так как выполнены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения невозмущенного уравнения (1), $\lambda \geq 2n - 1$ и константа γ достаточно мала при $\lambda = 2n - 1$, то при $|x| \leq h$ производная функции (2) в силу уравнения (8) будет отрицательна [7, 8]. Следовательно, можно сделать вывод, что нулевое решение возмущенного уравнения (8) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 2 выполняется следующая оценка:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(8)} \leq 2(a + |b|)x^{2n} + 2\gamma|x|^{\lambda+1} \leq 2(a + |b| + \gamma)x^{2n},$$

откуда может быть получена оценка решений уравнения (8).

Лемма 2. Пусть уравнение с возмущением (8) удовлетворяет условиям теоремы 2 и $x_0 = \varphi(t_0) \neq 0$. Тогда решения уравнения (8) допускают следующую оценку:

$$|x| \leq \frac{|x_0|}{\sqrt[2(n-1)]{1 - 2(n-1)(a + |b| + \gamma)(t - t_0)x_0^{2(n-1)}}}, \quad t > t_0. \quad (10)$$

6. Заключение. На основе метода Разумихина получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения однородного уравнения с линейным запаздыванием с показателем однородности выше единицы. На основе результатов, полученных в работах [7, 8], сформулированы условия асимптотической устойчивости нулевого решения возмущенного уравнения. Для рассмотренных видов уравнений: с наличием возмущения и без — приведены оценки гиперболического типа, которым удовлетворяют решения при условии выполнения достаточных условий асимптотической устойчивости нулевых решений данных уравнений.

Литература

1. Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. № 1. С. 110–117.
2. Жабко А. П., Медведева И. В. Алгебраический подход к анализу устойчивости дифференциально-разностных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 9–20.
3. Валеев К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейно зависящим от аргумента // Сибирский математический журнал. 1964. Т. 5. № 2. С. 75–83.
4. Гребенщиков Б. Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск. 1983. С. 25–34.
5. Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 3. С. 105–115.
6. Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. Вып. 6. С. 740–748.
7. Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.
8. Александров А. Ю. Устойчивость движений неавтономных динамических систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 186 с.

УДК 512.622

Пежиров И. А.

Решение Второй задачи Золотарёва при $n = 4$

Рекомендовано к публикации доцентом Тамасяном Г. Ш.

Введение. В статье продолжается исследование расположения точек альтернанса у решения Второй задачи Золотарёва (см. [1]) в зависимости от параметра, начатое в работах [2, 3], в которых были рассмотрены случаи при $n = 2, 3$ соответственно. В данной работе рассмотрен случай $n = 4$. Было замечено, что в процессе работы необходимо получать решения уравнений не выше четвёртой степени. Однако, в отличие от работ [2, 3], некоторые корни уравнений принимают довольно громоздкий вид, поэтому далее опускается их явное представление. Альтернансные условия определяются из геометрических соображений, которые при $n = 2, 3$ представлены в этуодах (см. [2, 3]).

1. Постановка задачи. Введём в рассмотрение полином

$$P_n(x, t) = t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n.$$

Необходимо минимизировать величину [1]

$$\varphi_n(x) = \max_{t \in [-1, 1]} |P_n(x, t)| \quad (1)$$

при ограничении

$$P_n(x, a) = A, \quad (2)$$

где $a > 1$ и A — произвольное вещественное число.

Теорема [2, 3]. *Решение данной задачи существует и единственно, при этом для того, чтобы план x^* был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий полином $P_n(x^*, t)$ обладал полным альтернансом, т. е. чтобы нашлись точки $t_1 < \dots < t_n$ из $[-1, 1]$, в которых*

$$\begin{aligned} |P_n(x^*, t_i)| &= \varphi_n(x^*), \quad i = 1, \dots, n; \\ P_n(x^*, t_i) &= -P_n(x^*, t_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Пежиров Иван Алексеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: pezhirov.ivan@mail.ru, тел.: +7(981)954-03-44

2. Решение задачи. Искомый полином четвёртой степени запишем в виде

$$P_4(t) = t^4 - \frac{4}{3}(c + d + e)t^3 + 2(cd + ce + de)t^2 - 4cde t + h.$$

Данный полином получен из представления его производной $P_4'(t) = 4(t - c)(t - d)(t - e)$. Параметры c , d и e выбираются так, чтобы $c < d < e$. Тогда

$$\begin{aligned} P_4''(c) &= 4(c - d)(c - e) > 0, \\ P_4''(d) &= 4(d - e)(d - c) < 0, \\ P_4''(e) &= 4(e - d)(e - c) > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Неравенства (4) означают, что в точках c , d и e выполнено достаточное условие экстремума.

Задача решается в два этапа. На первом положим параметр c свободным. Параметры d , e и h будем искать как функции от c так, чтобы соответствующий полином $P_4^*(t)$ обладал полным альтернансом (3). На втором этапе определим значение параметра c из условия (2), т. е. из $P_4^*(x(c), a) = A$.

2.1. Первый этап. Рассмотрим все промежутки, на которых определяется параметр c . Возможны следующие случаи:

- Случай 1. Пусть $c \leq -1$. Условия альтернанса примут вид

$$P_4^*(-1) = -P_4^*(1), \quad P_4^*(-1) = P_4^*(e), \quad P_4^*(d) = P_4^*(1). \quad (5)$$

Распишем условия (5) подробно

$$\begin{cases} 2 + 4(cd + de + ce) + 2h = 0, & (6) \\ \frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{3}(c + d)e^3 + 2cde^2 + (\frac{4}{3} + 2c + 2d + 4cd)e + & (7) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{4}{3}(c + d) + 2cd + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}d^4 + \frac{2}{3}(c + e)d^3 - 2ced^2 + (\frac{4}{3} - 2c - 2e + 4ce)d + & (8) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{4}{3}(c + e) - 2ce - 1 = 0. \end{cases}$$

Из (6) находим $h = -1 - 2(cd + de + ce)$. Из уравнений (7) и (8) получаем, что

$$d = \frac{-2ce + e^2 + 4c - 2e + 3}{-6c + 2e - 4},$$

где e является корнем уравнения четвёртой степени

$$e^4 - 12ce^3 + (48c^2 + 20c - 14)e^2 - (64c^3 + 80c^2 - 12c - 24)e + 32c^3 + 16c^2 - 20c - 11 = 0.$$

- Случай 2. Пусть $-1 \leq c < d < e < 1$. Получаем следующие условия альтернанса:

$$P_4^*(c) = -P_4^*(1), \quad P_4^*(d) = P_4^*(1), \quad P_4^*(e) = P_4^*(e),$$

$$P_4^*(-1) \leq P_4^*(1).$$

Из первого условия выражаем

$$h = \frac{1}{6}c^4 - \frac{1}{3}(d+e)c^3 + dec^2 + (2de - d - e + \frac{2}{3})c - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(d+e) - de.$$

Из системы

$$\begin{cases} P_4^*(d) = P_4^*(1), \\ P_4^*(c) = P_4^*(e), \\ c \geq -1, \quad e < 1, \quad d > c, \quad d < e \end{cases}$$

получаем выражения:

$$d = (2 - \sqrt{2})c + \sqrt{2} - 1, \quad e = (3 - 2\sqrt{2})c + 2\sqrt{2} - 2.$$

Для нахождения правой границы промежутка изменения параметра c решаем уравнение $P_4^*(-1) = P_4^*(1)$:

$$(80 - 56\sqrt{2})c^3 + (88\sqrt{2} - 120)c^2 + (64 - 40\sqrt{2})c - 8 + 8\sqrt{2} = 0,$$

откуда $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $c \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Заметим, что при $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ полином $P_4^*(t)$ имеет дополнительную точку альтернанса $t = -1$. Более того, в этом случае $P_4^*(t)$ совпадает с полиномом Чебышёва вида $T_4(t) = t^4 - t^2 + \frac{1}{8}$.

- Случай 3. Пусть $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq c < d < e$. Имеем следующие условия альтернанса:

$$P_4^*(c) = -P_4^*(-1), \quad P_4^*(d) = P_4^*(-1), \quad P_4^*(e) = P_4^*(e), \\ P_4^*(1) \leq P_4^*(e).$$

Аналогично случаю 2, получаем

$$h = \frac{1}{6}c^4 - \frac{1}{3}(d+e)c^3 + dec^2 - (2de+d+e+\frac{2}{3})c - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(d+e) - de, \quad (9)$$

$$d = (2 + \sqrt{2})c + \sqrt{2} + 1, \quad e = (3 + 2\sqrt{2})c + 2\sqrt{2} + 2.$$

Определим правую границу промежутка изменения параметра c . Для этого решаем уравнение $P_4^*(1) = P_4^*(e)$, которое сводится к $e(c) = 1$. Получаем, что $c = -\frac{2\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}$. Значит, $c \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}\right]$.

- Случай 4. Пусть $-\frac{2\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}} \leq c < d < 1$, при этом $e \geq 1$. Условия альтернанса примут вид

$$P_4^*(c) = -P_4^*(-1), \quad P_4^*(d) = P_4^*(-1), \quad P_4^*(e) = P_4^*(1).$$

В этом случае h совпадает с (9). Из системы

$$\begin{cases} P_4^*(d) = P_4^*(-1), \\ P_4^*(c) = P_4^*(1), \\ c \geq -\frac{2\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}, \quad -\frac{2\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}} < d < 1, \quad e \geq 1, \end{cases}$$

получаем

$$d = \frac{3c(\sqrt[3]{u} - 4) + 4\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{u^2} - 8}{3\sqrt[3]{u}}, \\ e = \frac{(3\sqrt[3]{u} - 24)c^2 + (2\sqrt[3]{u^2} + 14\sqrt[3]{u} - 64)c + 4\sqrt[3]{u^2} + 7\sqrt[3]{u} - 32}{6(2\sqrt[3]{u} - 12)c + 6\sqrt[3]{u^2} + 12\sqrt[3]{u} - 48},$$

где $u = -54c^2 + (6\sqrt{81c^2 + 102c + 33} - 72)(c + 1) + 46$.

Найдём промежуток изменения параметра c . Так как $e \rightarrow +\infty$, то рассмотрим $\lim_{c \rightarrow z} e(c) = +\infty$ относительно z , где z — предельное значение изменения параметра c , получим единственное решение $z = -\frac{1}{2}$. Тогда $c \in \left[-\frac{2\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$.

2.2. Второй этап. Положим $A(c) = P_4^*(a)$. Так как параметры d, e и h удалось выразить через параметр $c \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ (см. пункт 2.1), то, разрешив уравнение $A(c) = A$ относительно c , можно восстановить вид полинома $P_4^*(t)$, проходящего через точку (a, A) . Таким образом, решение задачи (1), (2) в зависимости от параметра A построено.

3. Заключение. Как видно из полученных результатов, уже при построении полинома четвёртой степени возникают значительные трудности в получении явных формул. Поэтому целесообразность дальнейшего рассмотрения аналитического решения данной задачи при $n \geq 5$ остаётся под вопросом.

Литература

1. Золотарёв Е. И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля // В кн.: Полное собрание сочинений. Вып. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 27-29.
2. Малозёмов В. Н., Сукач М. П., Тамасян Г. Ш. Этюд на тему Второй задачи Золотарёва // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 3 апреля 2014 г. URL:http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Zolotarev_n2.pdf (дата обращения: 15.09.16).
3. Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. Альтернансные свойства решения второй задачи Золотарёва // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 24 апреля 2014 г. URL:http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/Zolotarev_n3.pdf (дата обращения: 15.09.16).

**Об одной модификации метода
гиподифференциального спуска в задаче
проецирования начала координат на эллипсоид**

1. Постановка задачи. Данная статья продолжает исследования авторов в области вычислительной геометрии (см. [1–5]). Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n задан эллипсоид не содержащий начало координат:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - c, B(x - c) \rangle - 1 \leq 0\},$$

где B — постоянная $(n \times n)$ -матрица, симметричная и положительно-определенная, $c \in \mathbb{R}^n$ — центр эллипсоида.

Требуется найти ближайшую к началу координат точку множества E . Обозначим ее через x^* . Нетрудно показать, что точка $x^* \in E$ существует и единственная.

Поставленную проблему условной оптимизации сведем к безусловной с помощью техники точных штрафных функций. Для ее минимизации предлагаются метод гиподифференциального спуска и его модификация.

2. Метод гиподифференциального спуска (МГС). Пусть $\lambda \geq 0$ фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(x) = f(x) + \lambda|h(x)|, \quad (1)$$

где $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $h(x) = (x - c)'B(x - c) - 1$. В работах [1, 2] показано, что $\Phi_\lambda(x)$ — точная штрафная функция, а также подробно описан метод гиподифференциального спуска ее минимизации.

Положим $h_k := h(x_k)$, $h'_k := h'(x_k) = 2B(x_k - c)$, $f'_k := f'(x_k) = x_k$. Приведем общую схему метода гиподифференциального спуска.

Тамасян Григорий Шаликович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.tamasyan@spbu.ru, тел.: +7(911)267-10-94

Чумаков Андрей Александрович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: andrew1991.spb@gmail.com, тел.: +7(921)876-42-90

В качестве начального приближения возьмем точку пересечения отрезка $\text{conv}\{c, \mathbf{0}_n\}$ с эллипсоидом E , т. е. $x_0 = c - \frac{c}{\sqrt{\langle c, Bc \rangle}}$.

Пусть имеется приближение $x_k, k \geq 0$. Переход от k -го приближения к $(k+1)$ -му осуществляется следующим образом. Вычисляем в цикле (до тех пор пока не выполнится условие выхода из алгоритма):

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\lambda |h_k| h_k - \langle h'_k, f'_k \rangle}{h_k^2 + \langle h'_k, h'_k \rangle}, \quad \mu_k = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \tilde{\mu}_k > \lambda, \\ \tilde{\mu}_k, & \text{если } |\tilde{\mu}_k| \leq \lambda, \\ -\lambda, & \text{если } \tilde{\mu}_k < -\lambda, \end{cases} \quad (2)$$

$$G_k = \mu_k h'_k + f'_k. \quad (3)$$

Вычисляем направление спуска

$$g_k = -\frac{G_k}{\|G_k\|} \quad (4)$$

и величину шага спуска t_k . Тогда $(k+1)$ -е приближение имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + t_k g_k.$$

Имеются два правила останова.

Правило 1. Сонаправленность векторов h'_k и $-f'_k$. Вычисляем

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle -f'_k, h'_k \rangle}{\|f'_k\| \|h'_k\|} \right).$$

Если $\theta = 0$, то процесс работы алгоритма останавливается.

Правило 2. Если $\|G_k\| = 0$ (см. (3)), т. е. x_k — стационарная точка, то алгоритм заканчивается.

3. Модификация МГС. В предлагаемой модификации после каждой итерации цикла на выходе строится приближение принадлежащее эллипсоиду E . В качестве $(k+1)$ -го приближения предлагается брать точку пересечения отрезка $\text{conv}\{c, x_k + t_k g_k\}$ с эллипсоидом E , т. е.

$$x_{k+1} = c + \frac{1}{\sqrt{(x_k + t_k g_k - c)^T B (x_k + t_k g_k - c)}} (x_k + t_k g_k - c).$$

В результате этой модификации $h_k = h(x_k) = 0$ для всех $k \geq 0$ и,

следовательно, упрощается вычисление константы $\tilde{\mu}_k$ в (2). Действительно, в силу того, что $h_k = 0$, имеем

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\lambda |h_k| h_k - \langle h'_k, f'_k \rangle}{h_k^2 + \langle h'_k, h'_k \rangle} = - \frac{\langle h'_k, f'_k \rangle}{\langle h'_k, h'_k \rangle}. \quad (5)$$

Также упрощается вычисление величины шага спуска t_k , которая является решением задачи одномерной минимизации:

$$\Psi(t) = \Phi_\lambda(x_k + tg_k) \longrightarrow \min_{t \geq 0}. \quad (6)$$

Рассмотрим подробнее функцию $\Psi(t)$. Из (1), (4) и $h_k = 0$ получим

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= f(x_k + tg_k) + \lambda \varphi(x_k + tg_k) = \\ &= \frac{1}{2} \langle x_k + tg_k, x_k + tg_k \rangle + \lambda | \langle (x_k + tg_k - c), B(x_k + tg_k - c) \rangle - 1 | = \\ &= \frac{1}{2} \|x_k\|^2 + t \langle x_k, g_k \rangle + \frac{1}{2} t^2 \langle g_k, g_k \rangle + \\ &\quad + \lambda | h(x_k) + t \langle g_k, 2B(x_k - c) \rangle + t^2 \langle g_k, Bg_k \rangle | = \\ &= f_k + t \langle x_k, g_k \rangle + \frac{1}{2} t^2 + \lambda | t \langle g_k, h'_k \rangle + t^2 \langle g_k, Bg_k \rangle |. \end{aligned}$$

Покажем, что $\langle g_k, h'_k \rangle = 0$. В силу (3), (4) и (5), имеем

$$\begin{aligned} \langle g_k, h'_k \rangle &= - \frac{1}{\|G_k\|} \langle G_k, h'_k \rangle = - \frac{1}{\|G_k\|} \langle \mu_k h'_k + f'_k, h'_k \rangle = \\ &= - \frac{1}{\|G_k\|} (\mu_k \langle h'_k, h'_k \rangle + \langle h'_k, f'_k \rangle) = 0. \end{aligned}$$

В итоге функция $\Psi(t)$ принимает вид

$$\Psi(t) = (\lambda \langle g_k, Bg_k \rangle + \frac{1}{2}) t^2 + t \langle x_k, g_k \rangle + f_k,$$

и для нее величина

$$t_k = \frac{\langle x_k, -g_k \rangle}{1 + 2\lambda \langle g_k, Bg_k \rangle} \quad (7)$$

доставляет наименьшее значение, а значит, является решением задачи (6).

3.1. Эквивалентность «правил останова». Покажем эквивалентность обоих правил останова (см. п. 2) условию $t_k = 0$. Рас-

смотрим числитель формулы (7) умноженный на $\|G_k\|$. Получаем

$$\begin{aligned}
 \langle x_k, -g_k \rangle \|G_k\| &= \langle x_k, G_k \rangle = \langle f'_k, G_k \rangle = \langle f'_k, \mu_k h'_k + f'_k \rangle = \\
 &= \mu_k \langle f'_k, h'_k \rangle + \langle f'_k, f'_k \rangle = -\frac{\langle h'_k, f'_k \rangle}{\langle h'_k, h'_k \rangle} \langle f'_k, h'_k \rangle + \langle f'_k, f'_k \rangle = \\
 &= \frac{\langle h'_k, h'_k \rangle \langle f'_k, f'_k \rangle - (\langle h'_k, f'_k \rangle)^2}{\langle h'_k, h'_k \rangle}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского отсюда следует, что $t_k = 0$ тогда и только тогда, когда векторы h'_k и $-f'_k$ коллинеарны.

Теперь покажем эквивалентность *правила останова 2* условию $t_k = 0$. В силу (3) и (5) выражение для $\|G_k\|^2$ примет вид

$$\begin{aligned}
 \langle G_k, G_k \rangle &= \langle \mu_k h'_k + f'_k, \mu_k h'_k + f'_k \rangle = \\
 &= \mu_k^2 \langle h'_k, h'_k \rangle + 2\mu_k \langle h'_k, f'_k \rangle + \langle f'_k, f'_k \rangle = \\
 &= \mu_k [\mu_k \langle h'_k, h'_k \rangle + \langle h'_k, f'_k \rangle] + [\mu_k \langle h'_k, f'_k \rangle + \langle f'_k, f'_k \rangle] = \\
 &= \mu_k \langle h'_k, f'_k \rangle + \langle f'_k, f'_k \rangle = \langle f'_k, G_k \rangle = \langle x_k, G_k \rangle.
 \end{aligned}$$

Согласно (8), $\|G_k\|^2 = 0$ тогда и только тогда, когда векторы h'_k и $-f'_k$ коллинеарны, и, следовательно, когда $t_k = 0$.

4. Численные эксперименты. Ниже представлены экспериментальные результаты поведения описанных выше алгоритмов реализованных в MATLAB. Для каждой реализации алгоритма проводилось по 100 запусков для эллипсоидов размерностей 2, 3, 10, 100 и 500 и вычислялось среднее число итераций.

Во всех случаях генерация случайных эллипсоидов производилась по следующей схеме. Матрица эллипсоида B бралась диагональной с элементами вида $10^{\frac{k-1}{n-1}r}$, расположенными в случайном порядке, где $k = 1, \dots, n$, $r \in \{1, 2\}$, n — размерность эллипсоида. Центр эллипсоида сгенерирован как вектор со случайными целыми компонентами из отрезка [5, 10] так, чтобы начало координат не принадлежало эллипсоиду E . Константа точного штрафа вычисляется по формуле $\lambda^* = \left(\|c\| + \sqrt{\frac{1+\delta}{\lambda_{min}}} \right) / \sqrt{\lambda_{min}(1-\delta)}$, где λ_{min} — минимальное собственное число матрицы B , $\delta \in (0, 1)$.

Положим $\lambda_{min} = 1$, $\delta = 0,5$. В таблицах 1, 2 представлены результаты вычислений при $r = 1$ и $r = 2$ соответственно.

Таблица 1. Количество итераций при $r = 1$

Метод	$n = 2$	$n = 3$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 500$
МГС	1196	1930	3181	5763	7467
ММГС	61	60	58	57	57

Таблица 2. Количество итераций при $r = 2$

Метод	$n = 2$	$n = 3$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 500$
МГС	1908	4751	7059	12801	23177
ММГС	66	102	221	232	233

5. Заключение. Предложена модификация метода гиподифференциального спуска. Разработано программное обеспечение в системе MATLAB, реализующее данный алгоритм. Из проведенных численных экспериментов следует, что модифицированный метод гиподифференциального спуска работает быстрее, чем исходный метод.

Литература

1. Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А. Нахождение расстояния между эллипсоидами // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. № 3. С. 87–102.
2. Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. Методы нахождения ближайшей к началу координат точки эллипсоида // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2012. С. 73–78.
3. Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. Методы нахождения наименьшего расстояния между эллипсоидами // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 94–99.
4. Чумаков А. А., Тамасян Г. Ш. Поиск наименьшего расстояния между эллипсоидами методом сопряженных гипогradientов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 62–64.
5. Тамасян Г. Ш., Просолупов Е. В., Ангелов Т. А. Сравнительный анализ двух быстрых алгоритмов проецирования точки на стандартный симплекс // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23. № 2. С. 100–123.

УДК 514.177.2

Федорова Д. С.

Задача Лагранжа об объеме симплекса

Рекомендовано к публикации профессором Утешевым А. Ю.

В статье рассматривается задача Лагранжа максимизации объема тетраэдра при заданных значениях площадей граней. Результаты, получаемые при применении оригинального подхода Лагранжа [1], сравниваются с результатами, получаемыми при применении подхода, развитого Борхардтом [2] для решения многомерного аналога задачи. Целью ставится выведение алгебраического уравнения относительно искомого объема.

1. Постановка задачи. Пусть заданы константы s_1, \dots, s_n такие, что $s_n = \max(s_1, \dots, s_n)$ и $s_n < s_1 + \dots + s_{n-1}$. Требуется найти максимум величины

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n-1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix}$$

при условии

$$s_i = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i^{(j)}} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

т. е. в пространстве \mathbb{R}^{n-1} найти тетраэдр максимального объема с заданными значениями площадей граней.

2. Подход Лагранжа. Решением этой задачи в пространстве \mathbb{R}^3 занимался Лагранж. Из полученного им уравнения выводится

Федорова Дарья Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: fds-fds-fds@yandex.ru, тел.: +7(911)084-37-33

уравнение относительно четвертой степени искомого объема:

$$\begin{aligned}
& \sigma_1^8 \sigma_4 - 16\sigma_1^6 \sigma_2 \sigma_4 + 96\sigma_1^4 \sigma_2^2 \sigma_4 - 256\sigma_1^2 \sigma_4 \sigma_2^3 + 256\sigma_2^4 \sigma_4 - 128\sigma_1^4 \sigma_4^2 + \\
& + 1024\sigma_1^2 \sigma_4^2 \sigma_2 - 2048\sigma_2^2 \sigma_4^2 + 4096\sigma_4^3 + (81\sigma_1^6 \sigma_3 - 972\sigma_1^4 \sigma_2 \sigma_3 + \\
& + 3888\sigma_3 \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 5184\sigma_3 \sigma_2^3 - 3240\sigma_1^5 \sigma_4 + 25920\sigma_1^3 \sigma_2 \sigma_4 - \\
& - 51840\sigma_1 \sigma_4 \sigma_2^2 - 46656\sigma_1^2 \sigma_3 \sigma_4 + 186624\sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 - \\
& - 124416\sigma_1 \sigma_4^2) V_1 + (6561\sigma_1^4 \sigma_2 - 52488\sigma_2^2 \sigma_1^2 + 104976\sigma_2^3 - \\
& - 236196\sigma_1^3 \sigma_3 + 944784\sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 - 2834352\sigma_3^2 + 2204496\sigma_1^2 \sigma_4 - \\
& - 3779136\sigma_2 \sigma_4) V_1^2 + (531441\sigma_1^3 - 19131876\sigma_1 \sigma_2 + \\
& + 114791256\sigma_3) V_1^3 - 1162261467 V_1^4 = 0, \quad (1)
\end{aligned}$$

где $V_1 = V^4$, $\sigma_4 = s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2$, $\sigma_3 = s_1^2 s_2^2 s_3^2 + s_1^2 s_2^2 s_4^2 + s_1^2 s_4^2 s_3^2 + s_4^2 s_2^2 s_3^2$,
 $\sigma_2 = s_1^2 s_2^2 + s_1^2 s_3^2 + s_1^2 s_4^2 + s_2^2 s_3^2 + s_2^2 s_4^2 + s_3^2 s_4^2$, $\sigma_1 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2$.

3. Подход Борхардта. Трехмерное пространство. Борхардту удалось получить выражения для искомого объема. В настоящем разделе рассматриваются эти выражения для случая \mathbb{R}^3 . Обозначим $c_i = 16s_i^2$, $i = \overline{1, 4}$, $V_1 = V^4$.

3.1. Первый случай. Если для заданных s_1, s_2, s_3, s_4 выполняется условие $s_4^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, то искомым объем удовлетворяет равенству

$$V_1 = \frac{1}{82944} c_1 c_2 c_3. \quad (2)$$

Подставив в уравнение (1) $s_i^2 = \frac{1}{16} c_i$, $i = \overline{1, 4}$, а затем $c_4 = c_1 + c_2 + c_3$, получим

$$(-82944V_1 + c_1 c_2 c_3) (G_1 V_1^3 - G_2 c_1^4 c_2^4 c_3 - \dots) = 0,$$

где G_1, G_2, \dots — числовые коэффициенты. Очевидно, что (2) является корнем этого уравнения.

3.2. Второй случай. Если для заданных s_1, s_2, s_3, s_4 выполняется условие $s_4^2 > s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, то искомым объем удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned}
V_1 = \frac{1}{20736} \zeta_0 (\sqrt{\zeta_0 + c_1} - \sqrt{\zeta_0}) (\sqrt{\zeta_0 + c_2} - \sqrt{\zeta_0}) \times \\
\times (\sqrt{\zeta_0 + c_3} - \sqrt{\zeta_0}) (\sqrt{\zeta_0 + c_4} + \sqrt{\zeta_0}), \quad (3)
\end{aligned}$$

где ζ_0 — единственный положительный корень уравнения

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4} = 0.$$

Чтобы вывести алгебраическое уравнение, делаем замену переменных

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{\zeta}, \\ z_1 = \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta}, \\ z_2 = \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta}, \\ z_3 = \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta}, \\ z_4 = \sqrt{\zeta + c_4} + \sqrt{\zeta}. \end{cases} \quad (4)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} z_0^2 z_1 z_2 z_3 z_4 - 20736V_1 = 0, \\ z_1^2 + 2z_0 z_1 - c_1 = 0, \\ \dots \\ z_1 + z_2 + z_3 - z_4 + 2z_0 = 0. \end{cases}$$

Из уравнений попарно исключаем переменные z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 . Поскольку технические возможности не позволяют сделать это, когда $c_i, i = \overline{1, 4}$, — независимые переменные, делаем их зависящими от одного параметра $c > 0$: $c_1 = c, c_2 = 3c, c_3 = 5c, c_4 = 11c$. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} C_1 e^{54} V_1^{64} (-4235319705600 e^6 V_1^2 + 19965 c^{12} - \\ - 4991874990165983232 V_1^4 + 1013658624 V_1 c^9 - \\ - 12232889815007232 V_1^3 c^3)^2 (A_1 e^{36} + \dots + A_{13} V_1^{12})^2 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где C_1, A_1, \dots, A_{13} — числовые коэффициенты. При подстановке $s_i^2 = \frac{1}{16} c_i, i = \overline{1, 4}$, а затем $c_1 = c, c_2 = 3c, c_3 = 5c, c_4 = 11c$ равенство (1) примет вид

$$\begin{aligned} - 4235319705600 V_1^2 c^6 + 19965 c^{12} - 4991874990165983232 V_1^4 + \\ + 1013658624 V_1 c^9 - 12232889815007232 V_1^3 c^3 = 0, \end{aligned}$$

где левая часть совпадает с множителем левой части уравнения (5).

3.3. Третий случай. Рассмотрим случай $c_4 < c_1 + c_2 + c_3$. Введем функцию

$$\psi(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - c_1} - \sqrt{x - c_2} - \sqrt{x - c_3}.$$

Пусть $k = 1$, если $\psi(c_4) > 0$, и $k = -1$, если $\psi(c_4) < 0$. Если для заданных s_1, s_2, s_3, s_4 выполняется условие $s_4^2 < s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, то искомым объемом удовлетворяет равенству

$$V_1 = \frac{1}{20736} \xi_0 (\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_1}) (\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_2}) \times \\ \times (\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_3}) (\sqrt{\xi_0} - k\sqrt{\xi_0 - c_4}),$$

где ξ_0 — единственный положительный корень уравнения

$$2\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi - c_1} - \sqrt{\xi - c_2} - \sqrt{\xi - c_3} - k\sqrt{\xi - c_4} = 0.$$

После подстановки $c_1 = 64, c_2 = 81, c_3 = 49, c_4 = 100$ и действий, аналогичных действиям для второго случая, получаем уравнение

$$C_2 v^{66} (1289945088V_1^3 - 1486895616V_1^2 - 3661178397V_1 - 793016000)^2 \times \\ \times (B_1 V_1^{12} + B_2 V_1^{11} + \dots + B_{13})^2 = 0, \quad (6)$$

где C_2, B_1, \dots, B_{13} — числовые коэффициенты. При подстановке $s_i^2 = \frac{1}{16}c_i, i = \overline{1, 4}$, а затем $c_1 = 64, c_2 = 81, c_3 = 49, c_4 = 100$ равенство (1) примет вид

$$- \frac{59049}{65536} V_1 (1289945088V_1^3 - 1486895616V_1^2 - 3661178397V_1 - \\ - 793016000) = 0,$$

где левая часть совпадает с множителем левой части уравнения (6).

3.4. Общий случай. Видим, что все три случая сводятся к одному алгебраическому уравнению. Проверим, приведет ли уравнение (3) к искомому объему, если подставить в него $c_1 = c, c_2 = 2c, c_3 = 3c, c_4 = 6c = c_1 + c_2 + c_3$. После замены переменных и исключения z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 получаем

$$C_3 c^{54} V_1^{64} (-13824V_1 + c^3)^2 \times \\ \times (D_1 V_1^{15} + \dots + D_{14} V_1^2 c^{39} + D_{15} V_1 c^{42})^2 = 0, \quad (7)$$

где C_3, D_1, \dots, D_{15} — числовые коэффициенты. По формуле (2) четвертая степень искомого объема при $c_1 = c, c_2 = 2c, c_3 = 3c$ равна $\frac{1}{13824}c^3$, что, очевидно, является корнем уравнения (7).

4. Подход Борхардта. Четырехмерное пространство. Борхардт решал поставленную задачу в пространстве произвольной размерности. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^4 . Обозначим $V_2 = V^6$. В уравнении, полученном Борхардтом, делаем замену переменных, аналогичную (4). Получим систему

$$\begin{cases} z_0^3 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - 23887872V_2 = 0, \\ z_1^2 + 2z_0 z_1 - c_1 = 0, \\ \dots \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - z_5 + 2z_0 = 0. \end{cases}$$

Подставляем $c_1 = 4, c_2 = 9, c_3 = 16, c_4 = 36, c_5 = 81$ и исключаем из уравнений попарно переменные $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$. Получим уравнение вида

$$V_2^{388} P_{10}^2 P_{27}^2 P_{28}^2 P_{33}^2 = 0,$$

где P_m — полином степени m относительно V_2 . Видимо, искомая величина присутствует среди корней P_{10} .

5. Заключение. Рассмотрена задача Лагранжа максимизации объема тетраэдра при заданных значениях площадей граней. Проведено сравнение результатов применения подходов Лагранжа и Борхардта. Проанализировано решение многомерного аналога задачи, предложенное Борхардтом.

Литература

1. Моденов П. С. Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979. 368 с.
2. Borchardt C. W. Über die Aufgabe des Maximum, welche der Bestimmung des Tetraeders von grossten Volumen bei gegebenen Flächeninhalt der Seitenflächen für mehr als drei Dimensionen entspricht. Berlin: Math. Abh. Akad. Wis., 1867. 155 p.

УДК 517.929.2

Цимфер С. А.

Метод Нелдера – Мида в задаче оценки параметров переходного процесса линейной дифференциально-разностной системы

Рекомендовано к публикации профессором Жабко А. П.

1. Введение. Системы дифференциально-разностных уравнений используются при моделировании динамики широкого класса реальных явлений и процессов. Свойства их решений определяются, в том числе, такими математическими величинами как перерегулирование и степень затухания. Подобные количественные характеристики дают возможность сравнивать решения, составляя тем самым основу оптимизационных задач, рассматриваемых, например, в [1]. Ранее были рассмотрены системы уравнений, не включавших запаздывание [2]. Главной целью данной работы является оценка указанных параметров с помощью метода Нелдера – Мида.

2. Основные обозначения и постановка задачи. Рассмотрим систему линейных стационарных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \quad (1)$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – вектор, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – квадратные матрицы, $h > 0$ – некоторое положительное запаздывание. Зададимся, кроме того, кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Функция $x(t, \varphi)$, удовлетворяющая условию $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$ для всех $\theta \in [-h, 0]$ и системе (1), называется решением этой системы с заданными начальными условиями.

Евклидова и индуцированная ею нормы используются для векторов и матриц. Пространство кусочно-непрерывных функций дополнено следующей нормой

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Цимфер Сергей Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zimfer@mail.ru, тел.: +7(911)910-44-67

Определение 1. Система уравнений (1) называется *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие постоянные $\sigma > 0$ и $\gamma \geq 1$, что для любой начальной функции $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ при всех $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h. \quad (2)$$

Определение 2. Постоянную γ называют *величиной перерегулирования*, а σ — *степенью затухания*.

Целью данной работы является оценка параметров γ и σ , основываясь на подходе Ляпунова – Красовского.

3. Вспомогательные утверждения. Сформулируем критерий экспоненциальной устойчивости — теорему Красовского для систем линейных стационарных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Теорема 1 [3]. Система (1) является экспоненциально устойчивой, если существует функционал $v: PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что выполняются следующие условия:

1. Для некоторых положительных постоянных α_1, α_2 выполняется

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2.$$

2. Для некоторого положительного β выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} v(x_t) \leq -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0,$$

вдоль решений системы.

Для трех симметричных матриц $W_j, j = 0, 1, 2$, определим функционал вида

$$w(\varphi) = \varphi^T(0)W_0\varphi(0) + \varphi^T(-h)W_1\varphi(-h) + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta)W_2\varphi(\theta)d\theta.$$

Определим функционал $v(\varphi)$, удовлетворяющий вдоль решений системы (1) условию

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = -w(x_t), \quad t \geq 0.$$

Как показано в [4],

$$\begin{aligned}
v(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-h-\theta)B\varphi(\theta)d\theta + \\
&+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1)B^T \left[\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)B\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1 + \\
&+ \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) [W_1 + (h+\theta)W_2] \varphi(\theta)d\theta.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t+\tau)dt$$

— матрица Ляпунова, ассоциированная с $W = W_0 + W_1 + hW_2$.
 $K(t)$ — фундаментальная матрица системы (1), введенная в [4].

Назовем функционал (3) функционалом полного типа, если матрицы W_j , $j = 0, 1, 2$, являются положительно-определенными. Кроме того, справедливы следующие результаты [4].

Лемма 1. Пусть система (1) экспоненциально устойчива. Для трех положительно-определенных матриц W_j , $j = 0, 1, 2$, существуют положительные постоянные β_1, β_2 такие, что функционал полного типа, определяемый формулой (3), допускает оценку снизу

$$\beta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \beta_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi), \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Постоянные β_1, β_2 выбираются таким образом, чтобы матрица

$$Q(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} W_0 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} A + A^T & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

оставалась положительно-определенной.

Определение 3. Система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если спектр системы

$$\Lambda = \{\lambda \mid \det(\lambda E - A - Be^{-\lambda h}) = 0\}$$

не содержит такой точки λ_0 , что точка $-\lambda_0$ также принадлежит спектру.

Лемма 2. Пусть система (1) экспоненциально устойчива и, кроме того, удовлетворяет условию Ляпунова. Для трех положительно-определенных матриц W_j , $j = 0, 1, 2$, существуют положительные постоянные δ_1 , δ_2 такие, что функционал полного типа, определяемый формулой (3), допускает оценку сверху

$$v(\varphi) \leq \delta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta, \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Здесь $\delta_1 = \|U\|_h(1 + h\|B\|)$, $\delta_2 = \delta_1\|B\| + (\|W_1\| + h\|W_2\|)$.

Пользуясь оценками (4) и (5), получим условие, которому удовлетворяет функционал полного типа:

$$\beta_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq (\delta_1 + h\delta_2) \|\varphi\|_h. \quad (6)$$

Таким образом, функционал полного типа (3) по построению удовлетворяет второму условию теоремы Красовского, а неравенство (6) доказывает выполнение и первого условия. В этом случае, как показано в [4], постоянные σ и γ , участвующие в определении экспоненциальной устойчивости (2), должны быть выбраны следующим образом:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{\delta_1 + h\delta_2}{\beta_1}}, \quad (7)$$

$$\sigma \leq \frac{\lambda_{\min}(W_0)}{2\delta_1}, \quad \sigma \leq \frac{\lambda_{\min}(W_2)}{2\delta_2}. \quad (8)$$

4. Основные результаты. Рассмотрим экспоненциально устойчивую систему (1). Неравенства (7) и (8) позволяют оценить величины γ и σ , однако их точность зависит от выбора матриц W_j , $j = 0, 1, 2$. Составим соответствующие задачи оптимизации.

$$\begin{cases} \gamma(W_0, W_1, W_2) = \sqrt{\frac{\delta_1 + h\delta_2}{\beta_1}} \longrightarrow \min_{W_0, W_1, W_2}, \\ W_j \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma(W_0, W_1, W_2) = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(W_0)}{2\delta_1}, \frac{\lambda_{\min}(W_2)}{2\delta_2} \right\} \longrightarrow \max_{W_0, W_1, W_2}, \\ W_j \geq 0, \quad j = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (10)$$

Условие $W_j \geq 0$ означает принадлежность матрицы W_j к классу положительно-полуопределенных матриц.

Теорема 2. *Задачи условной оптимизации (9) и (10) имеют решение.*

Утверждение теоремы сразу следует из теоремы Вейерштрасса о достижении функции на компакте своего максимального и минимального значений.

Замечание. В теореме 2 утверждается только существование решений, но не их единственность. Действительно, для $\alpha > 0$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha W_0, \alpha W_1, \alpha W_2) &= \gamma(W_0, W_1, W_2), \\ \sigma(\alpha W_0, \alpha W_1, \alpha W_2) &= \sigma(W_0, W_1, W_2),\end{aligned}$$

обеспечивая неединственность решений задач оптимизации.

5. Программная реализация. Теорема 2, гарантирующая существование решений соответствующих задач оптимизации, позволяет использовать численные методы для их решения.

Для вычисления целевых функций в (9) и (10) используется метод нахождения матрицы $U(\tau)$, описанный в [4] и заключающийся в построении относительно нее стационарного линейного дифференциального уравнения со специальными краевыми условиями. После нахождения матрицы Ляпунова, ассоциированной с $W = W_0 + W_1 + hW_2$, вычисление γ и σ как функций своих аргументов не представляет сложности.

Описанный выше алгоритм реализован в среде MATLAB. Задача условной оптимизации с помощью метода внутренних штрафов сведена к задаче безусловной оптимизации. В частности, использовались логарифмические штрафные функции.

С учетом специфики целевых функций для решения задачи безусловной оптимизации был выбран алгоритм Нелдера – Мида, основным преимуществом которого является отсутствие необходимости вычисления производных минимизируемой функции. Суть метода состоит в построении и последовательной деформации симплекса для достижения точки экстремума.

Для системы (1), в которой:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 4 & 0,1 \end{pmatrix},$$

в результате работы программы при $h = 0,5$ были получены значения $\gamma = 5,04$ и $\sigma = 1,149$. В работе [5] для этой же системы эти величины равны соответственно $\gamma = 4,9997$ и $\sigma = 1,1534$.

6. Заключение. Для линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений на основе прямого метода Ляпунова предложен оптимизационный алгоритм оценки параметров переходных процессов устойчивых систем и его программная реализация. В дальнейшем результаты могут быть обобщены на системы уравнений с несколькими запаздываниями разной величины.

Литература

1. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2013. 448 с.
2. Цимфер С. А. Оценка параметров переходного процесса линейной системы на основе прямого метода Ляпунова // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 138–143.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 211 с.
4. Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.
5. Mondie S., Kharitonov V. L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. Vol. 50, No 2. P. 268–273.
6. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

УДК 514.177.2

Шульга Г. С., Тамасян Г. Ш.

О предельной точке Люилье тетраэдра

Введение. В работах [1, 2] рассматривалась следующая экстремальная задача: найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до плоскостей граней симплекса в \mathbb{R}^n минимальна. Известно, что единственным решением данной задачи при $n = 2$ называют точкой Лемуана–Гребе [1, 2], а при $n = 3$ — точка Люилье тетраэдра [3] или первой точкой Лемуана [4].

В настоящей статье решена задача о предельной точке Люилье тетраэдра, аналогично тому, как была получена в работе [2] предельная точка Лемуана–Гребе.

1. Предварительные сведения. Постановка задачи. Пусть в \mathbb{R}^3 задан тетраэдр Ω_1 с вершинами $Z_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, 4$. Будем считать, что центр тяжести тетраэдра Ω_1 совпадает с началом координат, т. е.

$$\sum_{i=1}^4 Z_i^{(1)} = \mathbf{0}_3.$$

Пусть $g_i^{(1)}$ — нормаль к i -й грани тетраэдра Ω_1 . Точка Люилье тетраэдра Ω_1 вычисляется по формуле [1]:

$$\Lambda^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^4 (V_i^{(1)})^2 Z_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^4 (V_i^{(1)})^2}, \quad (1)$$

где $V_i^{(1)} = \|g_i^{(1)}\|$, $i = 1, \dots, 4$.

Определение [3, 4]. Тетраэдр Ω_2 , вершины которого являются ортогональными проекциями $Z_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, 4$, точки $\Lambda^{(1)}$ на плоскости граней тетраэдра Ω_1 называется *тетраэдром проекций* (подерным тетраэдром) точки $\Lambda^{(1)}$ относительно тетраэдра Ω_1 .

Шульга Георгий Сергеевич — учащийся, ГБОУ Лицей № 419, г. Санкт-Петербург; e-mail: gdextrous@gmail.com, тел.: +7(911)777-00-38

Тамасян Григорий Шаликович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.tamasyan@spbu.ru, тел.: +7(911)267-10-94

Найдем вершины тетраэдра Ω_2 . Введем квадратную (4×4) -матрицу $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ Z_1^{(1)} & Z_2^{(1)} & Z_3^{(1)} & Z_4^{(1)} \end{pmatrix}$. В силу невырожденности матрицы M_1 существует обратная матрица $M_1^{-1} = \frac{1}{|M_1|} \left(\tilde{A}^{(1)} \right)^T$. Здесь присоединенная матрица для матрицы M_1 принимает вид

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}|M_1| & \frac{1}{4}|M_1| & \frac{1}{4}|M_1| & \frac{1}{4}|M_1| \\ g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & g_3^{(1)} & g_4^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Тогда вершины тетраэдра Ω_2 вычисляются по формуле [1]:

$$Z_i^{(2)} = \Lambda^{(1)} - K_1 g_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{|M_1|}{\sum_{i=1}^4 (V_i^{(1)})^2}.$$

Задача. Пусть известен Ω_{j+1} тетраэдр проекции точки Люилье $\Lambda^{(j)}$ относительно тетраэдра Ω_j при $j = 1, 2, \dots$. Найти предельную точку Люилье Λ^* , где $\Lambda^* := \lim_{j \rightarrow \infty} \Lambda^{(j)}$.

Замечание. В двумерном случае точку, вычисляемую по формуле (1), называют точкой Лемуана–Гребе [1–3]. В работе [2] приводится решение поставленной задачи для треугольника.

2. Основные результаты. Пусть известны вершины тетраэдра Ω_j . Определим матрицу M_j аналогично матрице M_1 . Положим $K_j = \frac{|M_j|}{\sum_{i=1}^4 (V_i^{(j)})^2}$, где $V_i^{(j)} = \|g_i^{(j)}\|$, $g_i^{(j)}$ — нормаль к i -й грани тетраэдра Ω_j , $i = 1, \dots, 4$. Введем константу $K = \frac{K_2|M_2|}{K_1|M_1|}$.

Величины M_j , K_j , $V_i^{(j)}$, $Z_i^{(j)}$ и $\Lambda^{(j)}$ (при $j \in \mathbb{N}$) удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\sum_{i=1}^4 g_i^{(j)} = \mathbf{0}_3$;
2. $|M_{j+1}| = 4(-K_j)^3 |M_j|^2$, $|M_{j+2}| = K^3 |M_j|$;
3. $K_{2j} = \frac{K_2}{K^{j-1}}$, $K_{2j+1} = \frac{K_1}{K^j}$;
4. $g_i^{(j+2)} = K^2 g_i^{(j)}$, $g_i^{(2)} = -\frac{K}{K_2} Z_i^{(1)}$;

5. $Z_i^{(j+2)} = \Lambda^{(2)} + K Z_i^{(j)}$;
6. $\Lambda^{(2j)} = \Lambda^{(2)} \frac{1 - K^j}{1 - K}$, $\Lambda^{(2j+1)} = \Lambda^{(1)} K^j + \Lambda^{(2)} \frac{1 - K^j}{1 - K}$.

Опираясь на указанные свойства, можно показать справедливость следующих утверждений (для всех $j \in \mathbb{N}$):

- (I) Векторы $g_i^{(j)}$ и $g_i^{(j+2)}$ коллинеарны, $i = 1, \dots, 4$;
- (II) Тетраэдр Ω_j подобен тетраэдру Ω_{j+2} ;
- (III) Соответствующие вершины подобных тетраэдров лежат на одной прямой. Более того, эти прямые пересекаются в одной точке, а именно, в предельной точке Люилье Λ^* ;
- (IV) Две последовательности точек Люилье $\{\Lambda_{2j-1}\}$ и $\{\Lambda_{2j}\}$ лежат на двух прямых, которые пересекаются в предельной точке Люилье Λ^* ;
- (V) Предельная точка Люилье Λ^* вычисляется по формуле

$$\Lambda^* = \frac{1}{1 - K} \Lambda^{(2)}.$$

Докажем некоторые из вышеперечисленных свойств и утверждений. В силу определения обратной матрицы для M_1 выполняется равенство $\tilde{A}^{(1)} M_1^T = |M_1| E_4$, где E_4 — единичная матрица четвертого порядка. Согласно (2) имеем

$$\tilde{A}^{(1)} M_1^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \tilde{A}_{1,i}^{(1)} & \sum_{i=1}^4 \tilde{A}_{1,i}^{(1)} (Z_i^{(1)})^T \\ \sum_{i=1}^4 g_i^{(1)} & \sum_{i=1}^4 g_i^{(1)} (Z_i^{(1)})^T \end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{A}_{1,i}^{(1)} = \frac{1}{4} |M_1|$ означает i -й элемент первой строки матрицы $\tilde{A}^{(1)}$. Отсюда, в частности, следует справедливость свойства 1 при $j = 1$, а также равенство

$$\sum_{i=1}^4 g_i^{(1)} (Z_i^{(1)})^T = |M_1| E_3. \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу M_2 . Для того, чтобы найти к ней обратную матрицу представим матрицу M_2 в виде

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Lambda^{(1)} - K_1 g_1^{(1)} & \dots & \Lambda^{(1)} - K_1 g_4^{(1)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda^{(1)} \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ 1) + \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -K_1 g_1^{(1)} & \dots & -K_1 g_4^{(1)} \end{pmatrix} =: U_1 V^T + Q_1. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Шермана – Моррисона [5], получим

$$M_2^{-1} = Q_1^{-1} - Q_1^{-1} U_1 V^T Q_1^{-1} \frac{1}{1 + V^T Q_1^{-1} U_1}.$$

На основании (4) и $\sum_{i=1}^4 g_i^{(1)} = \sum_{i=1}^4 Z_i^{(1)} = \mathbf{0}_3$ несложно проверить, что

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{-K_1 |M_1|} \begin{pmatrix} \frac{-K_1 |M_1|}{4} & (Z_1^{(1)})^T \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-K_1 |M_1|}{4} & (Z_4^{(1)})^T \end{pmatrix}.$$

Тогда $V^T Q_1^{-1} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ и $V^T Q_1^{-1} U_1 = 0$. Таким образом,

$$M_2^{-1} = \frac{1}{-K_1 |M_1|} \begin{pmatrix} \frac{-K_1 |M_1|}{4} - \langle Z_1^{(1)}, \Lambda^{(1)} \rangle & (Z_1^{(1)})^T \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-K_1 |M_1|}{4} - \langle Z_4^{(1)}, \Lambda^{(1)} \rangle & (Z_4^{(1)})^T \end{pmatrix}.$$

Вместе с тем, $M_2^{-1} = \frac{1}{|M_2|} (\tilde{A}^{(2)})^T$, где

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,1}^{(2)} & \dots & \tilde{A}_{1,4}^{(2)} \\ g_1^{(2)} & \dots & g_4^{(2)} \end{pmatrix} = |M_2| (M_2^{-1})^T,$$

$g_i^{(2)}$ — нормаль к i -й грани тетраэдра Ω_2 , $i = 1, \dots, 4$. Отсюда следует, справедливость свойства 4, а именно, что

$$g_i^{(2)} = \frac{|M_2|}{-K_1 |M_1|} Z_i^{(1)} = -\frac{K}{K_2} Z_i^{(1)}. \quad (5)$$

Аналогично формуле (3) запишем вершины тетраэдра Ω_3 . Согласно (5) получим

$$Z_i^{(3)} = \Lambda^{(2)} - K_2 g_i^{(2)} = \Lambda^{(2)} + K Z_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Таким образом, показана справедливость свойства 5 при $j = 1$.

Наконец, покажем справедливость утверждения (V). В силу утверждения (III), переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ в свойстве 5, получим

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} Z_i^{(j+2)} &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\Lambda^{(2)} + K Z_i^{(j)}) \implies \Lambda^* = \Lambda^{(2)} + K \Lambda^* \implies \\ &\implies \Lambda^* = \frac{1}{1-K} \Lambda^{(2)}. \end{aligned}$$

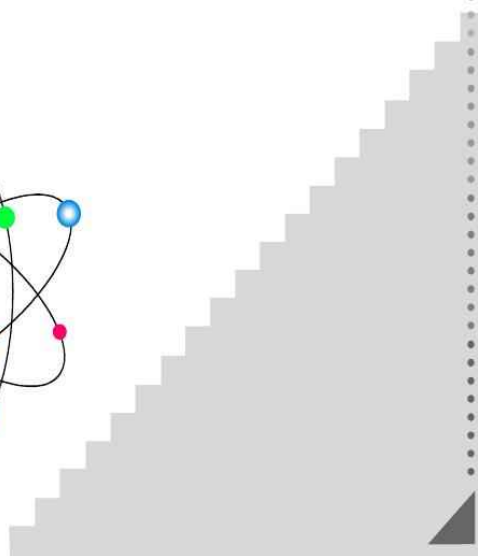
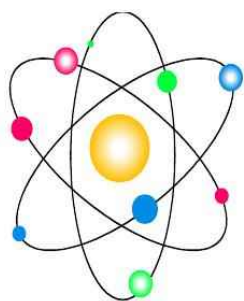
3. Заключение. Исследована задача о предельной точке Люилье тетраэдра. Изучены свойства новой «замечательной» точки тетраэдра, а также найдена аналитическая формула для её вычисления.

Литература

1. Тамасян Г. Ш., Удот М. В. Обобщенная точка Люилье // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 44–49.
2. Тамасян Г. Ш., Шульга Г. С. О предельной точке Лемуана – Гребне // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 128–132.
3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. 2-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2008. 256 с.
4. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии: Учебное пособие. М.: МЦНМО, 2010. 352 с.
5. Малоземов В. Н., Монако М. Ф., Петров А. В. Формулы Фробениуса, Шермана – Моррисона и близкие вопросы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 10. С. 1459–1465.



*2. Математические
методы в механике и
физике*



УДК 51-72

Бузин А. Э.

Заряды лигандов и электрические моменты металлоценов: расчеты с модельными потенциалами остова

Рекомендовано к публикации доцентом Бедринной М. Е.

1. Введение. Цель работы — расчет структуры металлоценов $(C_5H_5)_2Yb$, $(C_5H_5)_3Yb$, $(C_5H_5)_2Fe$, $(C_5H_5)_2Ru$, $(C_5H_5)Yb(C_8H_8)$, $(C_8H_8)_2Th$ и $(C_8H_8)_2Ce$ с использованием метода псевдопотенциала остова, и последующая квантовохимическая оценка переноса заряда на их органические лиганды.

2. Математическая модель. В основе расчетов лежит метод функционала электронной плотности (DFT) [1, 2].

2.1. Метод функционала электронной плотности. Целью квантовохимических расчетов, как правило, является приближенное решение стационарного нерелятивистского уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (1)$$

где Ψ — волновая функция, E — численное выражение энергии в состоянии, описываемом волновой функцией, \hat{H} — гамильтониан системы в приближении Борна — Оппенгеймера:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta_i - \sum_{i=1}^N \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{1}{r_{ij}} = \hat{T} + \hat{V}_{ext} + \hat{V}_{ee}. \quad (2)$$

Здесь M — количество ядер, N — количество электронов в системе. Первое слагаемое описывает кинетическую энергию электронов (Δ_i — оператор Лапласа). Второе — электростатическое взаимодействие электронов с ядрами («внешний потенциал»), а третье — взаимодействие между электронами.

В (2) от конфигурации молекулы зависят N и \hat{V}_{ext} . Внешний потенциал \hat{V}_{ext} целиком определяется расположением и зарядами всех

Бузин Андрей Эдуардович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: andrew.buzin.gm@gmail.com, тел.: +7(999)526-20-87

ядер. Для решения (1) следует найти собственные функции гамильтониана Ψ_i и собственные значения E_i . Тогда все свойства системы могут быть найдены путем применения к Ψ соответствующих операторов. К сожалению, отыскать аналитическое решение уравнения Шредингера не представляется возможным.

К решению уравнения (1) применен подход, базирующийся на анализе электронной плотности молекулы ρ . В основе подхода лежат две теоремы Хоэнберга–Кона [3]. Согласно первой, *внешний потенциал $V_{ext}(\vec{r})$ является, с точностью до константы, функционалом только $\rho(\vec{r})$* . Электронная плотность основного состояния ρ_0 полностью определяет $V_{ext}(\vec{r})$. От $V_{ext}(\vec{r})$, в свою очередь, зависит (2), а значит, основное состояние системы также является функционалом $\rho(\vec{r})$.

Так как полная энергия основного состояния зависит от ρ , ее составляющие тоже зависят от ρ :

$$E_0(\rho_0) = T(\rho_0) + E_{ee}(\rho_0) + E_{ext}(\rho_0).$$

Первые два слагаемых не зависят от вида системы. Собрав их в новый функционал F_{HK} — функционал Хоэнберга–Кона и расписав энергию внешнего поля как $E_{ext}(\rho_0) = \int \rho_0(\vec{r})V_{ext}d\vec{r}$, получим

$$E_0(\rho) = \int \rho_0(\vec{r})V_{ext}d\vec{r} + F_{HK}(\rho_0), \quad (3)$$

$$F_{HK}(\rho) = T(\rho) + E_{ee}(\rho). \quad (4)$$

Из второй теоремы следует, что (4) достигает минимума тогда и только тогда, когда входная электронная плотность является истинной электронной плотностью основного состояния ρ_0 .

Ни для одного из двух слагаемых в (4) нет явного выражения. В 1965 году Уолтер Кон и Лю Джен Шем предложили выделить из T часть T_S , соответствующую кинетической энергии электронов без учета их взаимодействия [4]. Кроме того, из E_{ee} можно выделить энергию кулоновских взаимодействий $J(\rho)$. В итоге получим

$$F_{HK}(\rho) = T_S(\rho) + J(\rho) + (T_C(\rho) + E_{nel}(\rho)) = T_S(\rho) + J(\rho) + E_{XC}, \quad (5)$$

где $T_C(\rho) = T(\rho) - T_S(\rho)$, E_{nel} — энергия некулоновских взаимодействий. В результате, слагаемое E_{XC} — энергия обменно-корреляционных взаимодействий — остается единственной величиной, для которой нет явного выражения.

2.2. Гибридный потенциал. Для вычисления E_{XC} был применен гибридный функционал PBE0 [5]:

$$E_{XC}^{PBE0} = \frac{1}{4}E_X^{HF} + \frac{3}{4}E_X^{GGA} + E_C^{GGA}.$$

Здесь E_C^{GGA} и E_X^{GGA} — энергии обменных взаимодействий и корреляции, вычисленные по методу обобщенного градиентного приближения; E_X^{HF} — энергия обменных взаимодействий Хартри–Фока.

2.3. Базис. Молекулярные орбитали в квантовохимических расчетах задаются как линейные комбинации функций из конечного ортогонального базисного набора φ_i [6]. В качестве φ_i были использованы контрактированные орбитали гауссова типа

$$\varphi_a(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^C X_i r^l e^{-\alpha r^2}, \quad (6)$$

где X_i — коэффициенты контрактирования, l — угловой момент.

Для тяжелых атомов применялся метод релятивистского псевдопотенциала остова [7]. В рамках этого метода часть остовных электронов, не участвующих в химической связи, заменяется на эффективный потенциал. Таким образом удается компенсировать релятивистские эффекты в остове и сократить количество расчетов.

3. Результаты. С использованием базисного набора SDD [8] вычислены структурные характеристики, дипольные и квадрупольные моменты молекул $(C_5H_5)_2 Yb$, $(C_5H_5)_3 Yb$, $(C_5H_5)_2 Fe$, $(C_5H_5)_2 Ru$, $(C_5H_5) Yb (C_8H_8)$, $(C_8H_8)_2 Th$, $(C_8H_8)_2 Ce$. Произведена оценка зарядов по Малликену [9] и методами АРТ [10] и NPA [11].

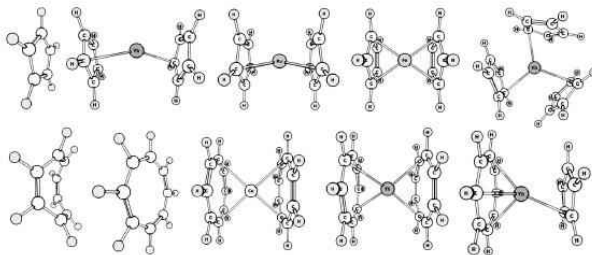


Рис. 1. Равновесная геометрия

3.1. Структура лигандов. Сначала рассчитана равновесная геометрия циклов C_5H_5 и C_8H_8 в свободном состоянии. Будучи незаряженными, они имеют неплоскую несимметричную структуру или разные длины связей. Однако, рассчитав геометрию с зарядом -1 для C_5H_5 и -2 для C_8H_8 , нетрудно заметить, что молекулы приобретают плоскую симметричную структуру с одинаковыми длинами связей. При взаимодействии с металлом наблюдается аналогичный эффект, что позволяет говорить о переносе электронной плотности в системе.

3.2. Дипольный и квадрупольный моменты. Для изучения характера перераспределения электронной плотности между атомом металла и лигандами рассмотрены дипольный и квадрупольный электрические моменты (таблица 1).

В молекуле $(C_5H_5)Yb(C_8H_8)$ дипольный момент направлен от большего отрицательного заряда к положительному и меньшему отрицательному. В $(C_5H_5)_2Yb$ — от отрицательного к положительному из-за смещения лигандов. Отрицательные квадрупольные моменты в молекулах указывают на перенос заряда от центра молекулы, что согласуется с выводами пункта 3.2.

3.3. Заряды. Вычисление самих зарядов дало неоднозначные результаты (таблица 2). Для молекул рутеноцена и ферроцена получен отрицательный заряд на ядре металла. Результаты для остальных молекул качественно соответствуют ожидаемым.

Таблица 1. Дипольный и квадрупольный моменты

Молекула	Дипольный	Квадрупольный
$(C_5H_5)_2Yb$	1,54	—
$(C_5H_5)_3Yb$	0	-12,64
$(C_5H_5)_2Fe$	0	-10,33
$(C_5H_5)_2Ru$	0	-8,74
$(C_5H_5)Yb(C_8H_8)$	1,44	—
$(C_8H_8)_2Ce$	0	-24,34
$(C_8H_8)_2Th$	0	-24,76

Таблица 2. Заряды на атомах металлов

Молекула	Mulliken	APT	NPA
$(C_5H_5)_2Yb$	0,86	1,09	1,35
$(C_5H_5)_3Yb$	0,66	1,05	0,99
$(C_5H_5)_2Fe$	-0,47	-0,70	-0,36
$(C_5H_5)_2Ru$	0,10	-0,80	-0,35
$(C_5H_5)Yb(C_8H_8)$	0,66	0,78	1,13
$(C_8H_8)_2Ce$	0,56	0,87	0,69
$(C_8H_8)_2Th$	0,49	1,33	1,03

Литература

1. Koch W., Holthausen M. C. A Chemist's Guide to Density Functional Theory. Second Edition. Wiley-VCH, 2001. 306 p.
2. Андреева Т. А. Колебательные спектры цианобифенилов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 99–104.
3. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogeneous electron gas // Physical Review. 1964. No 136. P. B864.
4. Kohn W., Sham L. J. Self-consistent equations including exchange and correlation effects // Physical Review. 1965. No 140. P. A1133.
5. Perdew J. P., Ernzerhof M., Burke K. Rationale for mixing exact exchange with density functional approximations // Journal of Chemical Physics. 1996. No 105 (22). P. 9982–9985.
6. Gill P. M. W. Molecular integrals over gaussian basis functions // Advances in Quantum Chemistry. 1994. No 25. P. 141–205.
7. Титов А. В., Мосягин Н. С. Релятивистские эффективные гамильтонианы и псевдопотенциалы: Учебно-методическое пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2011. 84 с.
8. Dolg M., Wedig U., Stoll H., Preuss H. Energy-adjusted ab initio pseudopotentials for the first row transition elements // Journal of Chemical Physics. 1987. No 86. P. 866-72.
9. Mulliken R. S. Electronic population analysis on LCAO–MO molecular wave functions // Journal of Chemical Physics. 1955. No 23. P. 1833.
10. Cioslowski J. A new population analysis based on atomic polar tensors // Journal of the American Chemical Society. 1989. No 111. P. 8333–8336.
11. Reed A. E., Weinstock R. B., Weinhold F. Natural population analysis // The Journal of Chemical Physics. 1985. No 83. P. 735.

Расчет коэффициента гидравлического сопротивления и суммарного коэффициента теплообмена по экспериментальным данным

1. Введение. Соответствие математической модели реальному процессу определяется как самой моделью, так и точностью расчетов. Модель установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу содержит коэффициент гидравлического сопротивления λ и суммарный коэффициент теплообмена β газа с окружающей средой, значения которых трудно поддаются измерению. Методом определения этих параметров посвящены многочисленные исследования, например, [1–3, 6].

Настоящая работа продолжает исследования задачи идентификации параметров модели установившегося течения газа в цилиндрических трубопроводах [4]. Используется методика определения суммарного коэффициента теплообмена газа β и коэффициента гидравлического сопротивления λ по экспериментальным данным: измеренным температуре и давлению на конце газопровода. Этот метод рассматривается в работах [5, 6].

2. Постановка задачи. Модель установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу запишем в виде [7]

$$\rho u = Q/(\pi R^2), \quad (1)$$

$$\rho u \frac{du}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \quad (2)$$

$$c_v \rho u \frac{dT}{dz} = -\left(\frac{\rho T h}{(1 - \delta \rho)} + \frac{c \rho^2}{2(1 + \delta \rho) T^{1/2}} \right) \frac{du}{dz} + \frac{2\beta(T^* - T)}{R} + \frac{\lambda \rho u^2 |u|}{4R}, \quad (3)$$

Быкова Дарья Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: bykova.ds@gmail.com, тел.: +7(911)974-69-15

Ермолаева Надежда Николаевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: n.ermolaeva@spbu.ru, тел.: +7(911)968-67-96

$$p = \frac{h\rho T}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\text{при } z = 0: \quad \rho = \rho_{z_0}, \quad T = T_{z_0}, \quad (5)$$

где (1) — уравнение неразрывности, (2) — уравнение движения, (3) — тепловое уравнение, (4) — уравнение состояния Редлиха–Квонга.

В системе (1)–(5) приняты следующие обозначения: ρ , p , T , u — плотность, давление, температура и скорость газовой смеси, соответственно, Q — массовый расход газа, c , δ , h — размерные параметры, входящие в уравнение состояния Редлиха–Квонга, λ — коэффициент гидравлического сопротивления, T^* — температура воды, β — суммарный коэффициент теплообмена.

Для протяженных трасс, когда внешние условия нельзя считать неизменными вдоль газопровода, трасса разбивается на несколько участков. Предполагается, что на каждом i -м участке, $i = 1, \dots, n$, газопровода искомые коэффициенты λ_i и β_i являются постоянными. Для каждого участка система (1)–(5), разрешенная относительно производных $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{dT}{dz}$ в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\frac{d\rho_i}{dz} = \frac{f_2 + f_1 f_3 f_T}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T} = F_1(\rho_i, T_i, \lambda_i, \beta_i), \quad (6)$$

$$\frac{dT_i}{dz} = f_3 + \frac{(f_4 + f_5)(f_2 + f_1 f_3 f_T)}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_4 f_T - f_1 f_5 f_T} = F_2(\rho_i, T_i, \lambda_i, \beta_i), \quad (7)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dz} = 0, \quad \frac{d\beta_i}{dz} = 0, \quad p_i = f_p, \quad u_i = 1/\rho_i, \quad (8)$$

$$z = z_{0_i}: \quad \rho_i(z_{0_i}) = \rho_i^0, \quad T_i(z_{0_i}) = T_i^0. \quad (9)$$

Индексом i обозначен i -й участок газопровода, z_{0_i} — координата начала i -го участка. Плотность ρ_i^L и температура T_i^L на конце каждого участка считаются известными из эксперимента. Это позволяет записать дополнительные условия на границе $(i-1)$ -го и i -го участков:

$$z = z_i^*: \quad \rho(z_i^*) = \rho_{i-1}^L = \rho_i^0, \quad T(z_i^*) = T_{i-1}^L = T_i^0. \quad (10)$$

Функции $f_\rho, f_T, f_p, f_1 \div f_5$ явно выражаются через искомые функции

ρ_i, T_i и искомые коэффициенты λ_i, β_i , через характерные величины и через известные параметры модели.

3. Алгоритм расчета коэффициентов λ и β на выделенном участке. Опустим у искомых величин индексы, соответствующие номеру участка. Обозначим плотность, температуру, коэффициент гидравлического сопротивления и коэффициент суммарного теплообмена на i -м участке $\rho = \rho_i, T = T_i, \lambda = \lambda_i$ и $\beta = \beta_i$ соответственно. На каждом участке газопровода решение системы (6)–(8) сводится к решению последовательности линейных задач. Линеаризованная система относительно функций ρ^{s+1}, T^{s+1} и коэффициентов $\lambda^{s+1}, \beta^{s+1}$ в $(s+1)$ -й итерации имеет вид

$$\frac{d\rho^{s+1}}{dz} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho^s) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s (T - T^s) + \quad (11)$$

$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s (\lambda - \lambda^s) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \right)_s (\beta - \beta^s),$$

$$\frac{dT^{s+1}}{dz} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho^s) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s (T - T^s) + \quad (12)$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s (\lambda - \lambda^s) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \beta} \right)_s (\beta - \beta^s), \quad \frac{d\lambda^{s+1}}{dz} = 0, \quad \frac{d\beta^{s+1}}{dz} = 0.$$

Функции ρ^s, T^s и коэффициенты λ^s, β^s известны из решения системы (11), (12) в s -й итерации.

Решение линеаризованной системы (11), (12) предлагается аппроксимировать [5] линейными относительно $\lambda^{s+1}, \beta^{s+1}$ функциями

$$\rho^{s+1}(z) = C_{11}^s(z)\lambda^{s+1} + C_{12}^s(z)\beta^{s+1} + C_1^s(z), \quad (13)$$

$$T^{s+1}(z) = C_{21}^s(z)\lambda^{s+1} + C_{22}^s(z)\beta^{s+1} + C_2^s(z). \quad (14)$$

Функции $C_{kj}^s(z), C_k^s(z), k, j = 1, 2$, подлежат определению.

Система (11), (12) с учетом представления (13), (14) может быть сведена к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $C_{kj}^s(z), C_k^s(z)$ для $z \in [z_i^*, z_{i+1}^*]$:

$$\frac{dC_{11}^s}{dz} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s, \quad (15)$$

$$\frac{dC_{21}^s}{dz} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s,$$

$$C_{11}^s(0) = 0, \quad C_{21}^s(0) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{dC_{12}^s}{dz} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s C_{12}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s C_{22}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s, \quad (17)$$

$$\frac{dC_{22}^s}{dz} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s C_{12}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s C_{22}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s,$$

$$C_{12}^s(0) = 0, \quad C_{22}^s(0) = 0. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_1^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + (F_1)_s - \\ &- \left(\frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right)_s \rho^s + \left(\frac{\partial F_1}{\partial T} \right)_s T^s + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \right)_s \lambda^s + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \right)_s \beta^s, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_2^s}{dz} &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s C_{11}^s(z) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s C_{21}^s(z) + (F_2)_s - \\ &- \left(\frac{\partial F_2}{\partial \rho} \right)_s \rho^s + \left(\frac{\partial F_2}{\partial T} \right)_s T^s + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right)_s \lambda^s + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \beta} \right)_s \beta^s, \\ C_1^s(0) &= \rho(0) = \rho_s, \quad C_2^s(0) = T(0) = T_s. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия (16), (18), (20) для искоемых функций C_{kj}^s , C_k^s следуют из линейного представления (13), (14) и граничных условий (9). Выражения для производных

$$\frac{\partial F_k}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial T}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \beta}, \quad k = 1, 2$$

имеют весьма громоздкий вид. Несмотря на это, решение системы (15)–(20) не вызывает принципиальных трудностей, оно может быть получено численно, например, методом Рунге – Кутты четвертого порядка. В результате решения системы (15)–(20) находятся искоемые функции $C_{kj}^s(z)$, $C_k^s(z)$ для $z \in [z_i^*, z_{i+1}^*]$.

Дополнительные условия (10) совместно с представлением (13), (14), приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно искоемых коэффициентов λ^{s+1} , β^{s+1} в $(s - 1)$ -й итерации:

$$\begin{aligned}\rho^L &= C_{11}^s(z_{i+1}^*)\lambda^{s+1} + C_{12}^s(z_{i+1}^*)\beta^s + C_1^s(z_{i+1}^*), \\ T^L &= C_{21}^s(z_{i+1}^*)\lambda^s + C_{22}^s(z_{i+1}^*)\beta^s + C_2^s(z_{i+1}^*).\end{aligned}$$

Здесь z_{i+1}^* — конец рассматриваемого i -го участка. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda^{s+1} &= \frac{C_{22}^s(L)(\rho^L - C_1^s(L)) - C_{12}^s(L)(T^L - C_2^s(L))}{C_{11}^s(L)C_{22}^s(L) - C_{12}^s(L)C_{21}^s(L)}, \\ \beta^{s+1} &= \frac{C_{11}^s(L)(T^L - C_2^s(L)) - C_{21}^s(L)(\rho^L - C_1^s(L))}{C_{11}^s(L)C_{22}^s(L) - C_{12}^s(L)C_{21}^s(L)}.\end{aligned}$$

Распределения плотности $\rho^{s+1}(z)$ и температуры $T^{s+1}(z)$ в $(s+1)$ -й итерации определяются по найденным параметрам λ^{s+1} , β^{s+1} из представления (13), (14).

Условием окончания итерационного процесса определения параметров λ , β по представленному алгоритму является выполнение неравенства:

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \varepsilon_*, \quad \varepsilon_1 = \left| \frac{\lambda^{s+1} - \lambda^s}{\lambda^s} \right|, \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{\beta^{s+1} - \beta^s}{\beta^s} \right|.$$

4. Пример расчета. Приведем расчет параметров λ и β для следующего варианта задачи. Пусть $L = 300$ км, $Q = 400$ кг/с, $\rho^0 = 149,6$ кг/м³, $T^0 = 313,15$ К, $T^* = 278,15$ К. В качестве нулевого приближения для плотности $\rho^0(z)$ и температуры $T^0(z)$ использовалось решение стационарной задачи (1)–(5) для данного варианта параметров при $\lambda^* = 0,00829$ и $\beta^* = 6,18$ (Вт/(м²·К)).

Трасса газопровода разбивалась на $n = 2$ участка, длиной 150 километров каждый, т. е. $z_1^* = 150$ км, $z_2^* = 300$ км. Значения температуры и плотности на концах участков, рассчитанные при $\lambda = \lambda^*$, $\beta = \beta^*$, принимались за точные: $T(z_1^*) = 283,19$ К, $T(z_2^*) = 278,12$ К, $\rho(z_1^*) = 177,21$ кг/м³, $\rho(z_2^*) = 170,38$ кг/м³. Для тестового варианта точность ε_* расчета относительного отклонения рассчитанных значений λ и β составила $\varepsilon_* = 10^{-5}$. В таблице приведены значения модуля относительных отклонений $\delta\lambda = \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda^*} \right)$ и $\delta\beta = \left(\frac{\beta - \beta^*}{\beta^*} \right)$, рассчитанные в I, ..., V итерациях.

Таблица. Относительные отклонения

участок	итерации	I	II	III	IV	V
1	$ \delta\lambda $	0,0174	0,0338	0,0279	0,0285	0,0285
2	$ \delta\lambda $	0,2451	0,0053	0,002	0,0017	0,0017
1	$ \delta\beta $	0,0242	0,0083	0,0044	0,0049	0,0049
2	$ \delta\beta $	0,0294	0,0277	0,0025	0,0001	0,0001

Выводы Представленный метод расчета коэффициентов λ и β в модели установившегося неизотермического течения газа по морским газопроводам позволяет по известным экспериментальным данным определять коэффициент гидравлического сопротивления и суммарный коэффициент теплообмена газа с окружающей средой.

Литература

1. Казак К. А., Чионов А. М. и др. Идентификация неизмеряемых параметров газопровода для моделирования параметров потока газа // Трубопроводный транспорт [теория и практика]. 2012. № 2. С. 36–41.
2. Лежнев А. В. Идентификация параметров модели газопровода при стационарном режиме течения // Математическое моделирование и краевые задачи. 2005. Часть 2. С. 165–167.
3. Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. и др. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. 160 с.
4. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Параметрическая идентификация модели установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу // Морские интеллектуальные технологии, 2017. № 1. С. 8–13.
5. Васильев О. Ф., Бондарев Э. А. и др. Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, 1978. 128 с.
6. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С. Численный метод идентификации гидравлических параметров // В сб.: Методы МСС. Якутск. 1977. С. 30–40.
7. Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. и др. Модели морских газопроводов. СПб: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2005. 156 с.

УДК 537, 51-73

Виноградова Е. М., Калатурская Э. В.

Расчет полевого диода цилиндрической формы

1. Введение. Явление полевой электронной эмиссии используется для создания различных наноэлектронных приборов и устройств, таких как рентгеновские трубки, сканирующие электронные микроскопы, микроволновые устройства и т. д. [1, 2].

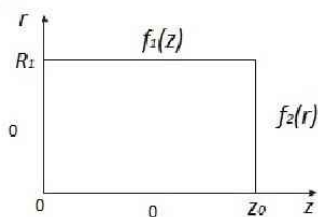


Рис. 1. Схематическое изображение диодной системы

Данная статья посвящена расчету электростатического потенциала в осесимметричной диодной системе цилиндрической формы с полевым катодом. Решение двумерной граничной задачи для уравнения Лапласа ищется в цилиндрической системе координат (r, z) . В качестве катода рассматривается бесконечно тонкий электрод, расположенный на оси системы. Левый торец цилиндра представляет собой подложку полевого катода. Анодом является боковая поверхность цилиндра.

Схематическое изображение осесимметричной диодной системы конечной длины приведено на рис. 1 в цилиндрических координатах (r, z) .

Виноградова Екатерина Михайловна – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

Калатурская Элла Владимировна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ella.kalaturskaja@yandex.ru, тел.: +7(911)830-16-28

2. Математическая модель. Распределение потенциала $U(r, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Delta U(r, z) &= 0, \\ U(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq R_1, \\ U(0, z) &= 0, \quad 0 \leq z \leq Z_0, \\ U(R_1, z) &= f_1(z), \quad 0 \leq z \leq Z_0, \\ U(r, z_0) &= f_2(r), \quad 0 \leq r \leq R_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметры системы: $z = z_0$ — граница области по переменной z ; $r = 0, 0 \leq z \leq z_0$ — поверхность полевого катода; $z = 0, 0 \leq r \leq R_1$ — поверхность подложки катода; $r = R_1, 0 \leq z \leq z_0$ — поверхность анода; $U(r, 0) = 0, 0 \leq r \leq R_1$ — граничное условие на подложке; $U(0, z) = 0, 0 \leq z \leq z_0$ — граничное условие на катоде; $U(R_1, z) = f_1(z), 0 \leq z \leq z_0$ — граничное условие на аноде; $U(r, z_0) = f_2(r), 0 \leq r \leq R_1$ — граничное условие на поверхности $z = z_0$.

3. Решение задачи. В соответствии с методом разделения переменных общее решение граничной задачи (1) можно представить в виде рядов Фурье – Бесселя [3–6]:

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\nu_n z) \frac{I_1(\nu_n r)}{I_1(\nu_n R_1)} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{\text{sh}(\mu_{1,m} z)}{\text{sh}(\mu_{1,m} z_0)} J_1(\mu_{1,m} r), \quad (2)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{z_0} \int_0^{z_0} f_1(z) \sin(\nu_n z) dz, \quad \nu_n = \frac{\pi n}{z_0}, \\ b_m &= \frac{2}{J_0^2(\mu_{1,m}) R_1^2} \int_0^{R_1} f_2(r) r J_1(\mu_{1,m} r) dr, \quad \mu_{1,m} = \frac{\gamma_{1,m}}{R_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

а $I_1(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка; $J_1(r)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка; $\gamma_{1,m}$ — нули функции Бесселя $J_1(\gamma_{1,m}) = 0$.

4. Результаты численного расчета. Для представления графика распределения электростатического потенциала $U(r, z)$ в соответствии с формулами (2), (3) рассматривалась область значений по переменным $z \in [0, z_0]$ и $r \in [0, R_1]$. Для расчета использовались безразмерные величины параметров исследуемой диодной системы.

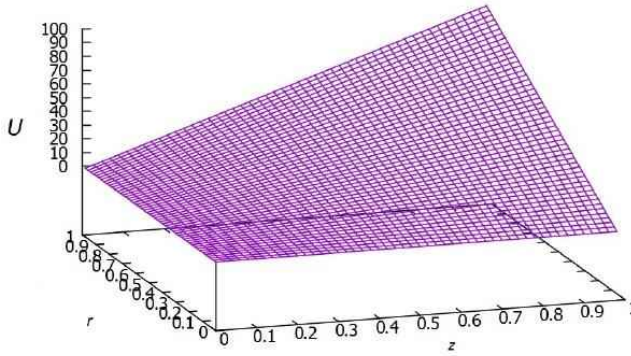


Рис. 2. Распределение электростатического потенциала $U(r, z)$

Выбраны следующие значения параметров задачи: $u_0 = 100$, $z_0 = 1$, $R_1 = 1$, $f_1(z) = u_0 \frac{z}{z_0}$, $f_2(r) = u_0 \frac{r}{R_1}$.

Входные параметры программы: $n = 100$ — количество разбиений отрезков $z \in [0, z_0]$, $r \in [0, R_1]$; N, M — количество членов ряда в суммах (2) по коэффициентам a_n и b_m соответственно.

На рис. 2 представлено распределение электростатического потенциала $U(r, z)$ во всей области рассматриваемой осесимметричной диодной системе цилиндрической формы с бесконечно тонким полевым катодом.

5. Заключение. Найдено распределение электрического потенциала в виде разложения по функциям Бесселя для модели диодной системы с бесконечно тонким полевым катодом (1). В соответствии

с решением (2), (3) граничной задачи (1) представлен график распределения электрического потенциала во всей области диодной системы. Данный график совпадает с качественно ожидаемым распределением потенциала, что доказывает адекватность представленной математической модели.

Литература

1. Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 1–5.
2. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Kalaturskaja E. V. The infinitely thin field emitter mathematical modeling // Proceedings of RuPAC2016. St. Petersburg, Russia. 2016. С. 342–344.
3. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Климаков А. А. Математическое моделирование диодной системы с полевым острием цилиндрической формы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 2. С. 20–23.
4. Виноградова Е. М., Листрукова А. В. Математическое моделирование квадрупольной электростатической линзы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 19–27.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Учебное пособие для университетов. 4-е изд. М.: Наука, 1972. 736 с.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть 1. М.: Изд-во ИЛ, 1949. 799 с.

Варианты достижения космическим аппаратом гелиополярной области

В [1] предложены варианты полетов вне плоскости эклиптики к полярным околосолнечным областям (см. рис. 1), перспективные с точки зрения космических и астрономических исследований в этой неизученной области пространства.



Рис. 1. Полеты: а) с возвращением на Землю, б) к полярным областям [1]

Пусть во время полета над плоскостью эклиптики на космический аппарат (КА), стартующий с орбиты Земли, действует только притяжение Солнца. Притяжение планет не будем учитывать.

Уравнения движения с учетом управляющих ускорений запишем в виде, удобном для решения задачи [2]:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{GMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{GM y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{GMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

Давыденко Александр Александрович – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.davydenko@spbu.ru, alexandrdavydenko@yandex.ru, тел.: +7(911)210-57-92

Кондратюк Алёна Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kondratyuk.alena.s@gmail.com, тел.: +7(981)836-55-57

Старков Владимир Николаевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vlad.stark@yandex.ru, тел.: +7(921)799-54-47

где $x(t), y(t), z(t)$ — пространственные декартовы координаты КА, t — время, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная [3], M — масса Солнца, гравитационный параметр Солнца $GM = 1,32718 \cdot 10^{11}$ км³/сек² = 0,00029591 (а. е.)³/дн². Центр координатной системы находится в Солнце.

Выясним, какими должны быть ускорения a_x, a_y, a_z , чтобы КА двигался по заданной траектории, т. е. будем решать обратную задачу движения. Для нахождения ускорений применим формулы [4], в которых заданы все функции $x(t), y(t), z(t)$.

1. Составная двухзвенная траектория. Рассмотрим первый вариант движения КА над плоскостью эклиптики, состоящий из двух звеньев.

1.1. Первый участок. Пусть КА из точки на орбите Земли поднимается в пространство над эклипстикой по сужающейся винтовой линии:

$$x(t) = r_3(1 - \alpha t) \cos(\omega_1 t), \quad y(t) = r_3(1 - \alpha t) \sin(\omega_1 t), \quad z(t) = k_1 t^2 + k_2 t.$$

Координаты и скорости в начальный момент при $t = 0$: $x(0) = r_3$ (радиус орбиты Земли), $y(0) = 0, z(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0, \dot{z}(0) = w_0 = v_0/n$ (скорость по оси z в n раз меньше скорости по оси y). Пусть КА движется по винтовой линии медленнее, чем Земля, период оборота будет в k раз больше, т. е. kT , а частота в k раз меньше: $\omega_1 = 2\pi/kT$, где $T = 2\pi r_3^{3/2} / \sqrt{GM}$ — период полного оборота для Земли. Скорость движения $v_0 = \omega_1 r_3 = 2\pi r_3 / kT$.

Из выражения $z(t) = k_1 t^2 + k_2 t$ найдем k_1 и k_2 из условия задания координат и скоростей в начальный момент пути $t = 0$: $z = 0, \dot{z} = 2k_1 t + k_2$ и в конечный при $t = t_1$. Тогда $k_2 = w_0$.

Найдем время полета t_1 из условия $t = t_1$: $z = h, \dot{z} = 0, 0 = 2k_1 t_1 + w_0, k_1 = -w_0/2t_1, h = -w_0 t_1^2 / 2t_1 + w_0 t_1$. Отсюда $t_1 = 2h/w_0$. Тогда $k_1 = -w_0^2/4h$ и окончательно

$$z(t) = -\frac{w_0^2}{4h} t^2 + w_0 t.$$

1.2. Второй участок. В момент времени t_1 КА на высоте $z = h$ переходит на движение по малой окружности с радиусом r :

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos(\omega(t - t_1) + \delta), \\y(t) &= r \sin(\omega(t - t_1) + \delta), \\z(t) &= h,\end{aligned}$$

где δ — угол выхода на малую окружность над гелиополярной областью (см. рис. 2).

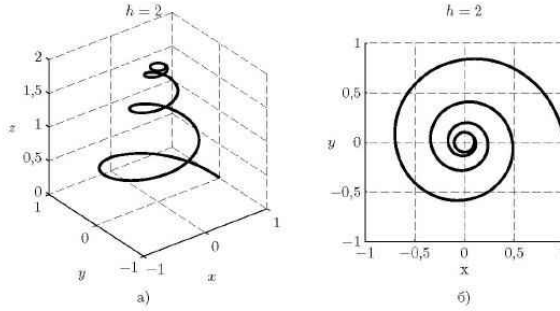


Рис. 2. а) вариант подъема КА в гелиополярную область, б) вид сверху

Приравняем координаты и скорости в точке соприкосновения спирали с малой окружностью над полюсом Солнца (нимбом):

$$r_3(1 - \alpha t_1) \cos(\omega_1 t_1) = r \cos \delta, \quad r_3(1 - \alpha t_1) \sin(\omega_1 t_1) = r \sin \delta.$$

Тогда $r_3^2(1 - \alpha t_1)^2 = r^2$, откуда $1 - \alpha t_1 = r/r_3$. Получим значение коэффициента

$$\alpha = \frac{w_0}{2h} \left(1 - \frac{r}{r_3}\right),$$

кроме того, $\delta = \arctg(\operatorname{tg}(\omega_1 t_1))$. Найдём скорости

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\alpha r_3(1 - \alpha t_1) \cos(\omega_1 t_1) - r_3(1 - \alpha t_1) \omega_1 \sin(\omega_1 t_1) = -r\omega \sin \delta, \\ \dot{y}(t) &= -\alpha r_3(1 - \alpha t_1) \sin(\omega_1 t_1) + r_3(1 - \alpha t_1) \omega_1 \cos(\omega_1 t_1) = r\omega \cos \delta, \\ \dot{z}(t) &= 0.\end{aligned}$$

Возведение в квадрат даёт $r_3^2(1 - \alpha t_1)^2(\alpha^2 + \omega_1^2) = r^2\omega^2$. Отсюда частота $\omega = \sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}$ и тогда период обращения по малой окружности $\tau = 2\pi/\omega$. Используя формулы для координат планет и их производных можно построить графики ускорений a_x, a_y, a_z как функций времени (см. рис. 3, 4). Заметим, что графики a_x и a_y очень похожи, поэтому график a_y не представлен.

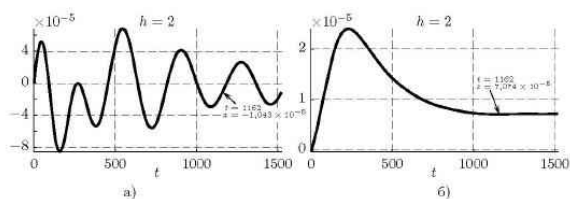


Рис. 3. Ускорения: а) a_x , б) a_z при $t \in [0, t_1] \cup [t_1, t_1 + \tau]$, для $h = 2$ а.е.

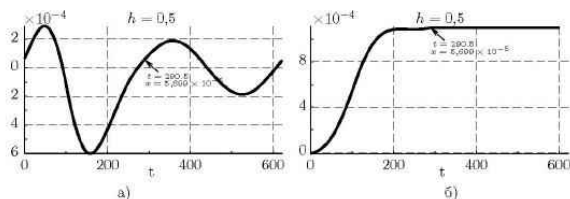


Рис. 4. Ускорения: а) a_x , б) a_z при $t \in [0, t_1] \cup [t_1, t_1 + \tau]$, для $h = 0,5$ а.е.

2. Составная трехзвенная траектория. Предлагается еще одна траектория выхода в гелиополярную область, трехзвенная траектория: винтовая линия, полуокружность, окружность над Солнцем (нимб).

2.1. Первый участок. Пусть КА поднимается в гелиополярную область до высоты $z = h$ по винтовой линии, заданной параметрически:

$$x(t) = r_3 \cos(\omega_1 t),$$

$$y(t) = r_3 \sin(\omega_1 t),$$

$$z(t) = k_1 t^2 + k_2 t.$$

Зная время выхода t_1 на высоту $z = h$, можно найти координаты $x_1 = x(t_1) = r_3 \cos(\omega_1 t_1)$, $y_1 = y(t_1) = r_3 \sin(\omega_1 t_1)$, $z(t_1) = h$ и скорости в точке выхода $\dot{x}(t_1) = -r_3 \omega_1 \sin(\omega_1 t_1)$, $\dot{y}(t_1) = r_3 \omega_1 \cos(\omega_1 t_1)$, $\dot{z}(t_1) = 0$. Точка (x_1, y_1) — точка касания большой (радиус r_3) и средней окружности, (x_2, y_2) — точка касания малой (радиус r) и средней окружности. Радиус средней окружности $\rho = (r + r_3)/2$.

2.2. Второй участок. В точке с координатами (x_1, y_1) необходимо перейти на полуокружность. К моменту времени t_1 КА «накрутит» по квазивинтовой линии несколько оборотов, что характеризуется величиной $\omega_1 t_1$, которая может быть значительно больше 2π . Если отбросим целое количество оборотов, то получим местоположение точки (x_1, y_1) в каком-либо квадранте. Это положение характеризуется углом $\gamma = \omega_1 t_1 - [\omega_1 t_1 / 2\pi] 2\pi$, где $[\cdot]$ — целая часть числа в обозначениях Айверсона. Обе точки касания находятся на одной прямой (линия центров) $y = x \operatorname{tg} \gamma = x y_1 / x_1$. Время t_2 — период оборота на средней окружности. Скорость движения на ней совпадает с линейной скоростью в точке касания с предыдущей окружностью $\omega_2 \rho = 2\pi \rho / t_2 = r_3 \omega_1$. Отсюда $t_2 = 2\pi \rho / r_3 \omega_1$, а частота $\omega_2 = 2\pi / t_2$.

2.3. Третий участок. Координаты точки выхода на малую окружность (x_2, y_2) можно найти. Параметрическое задание малой окружности общего вида для $t_1 + 0,5 t_2 \leq t \leq t_1 + 0,5 t_2 + t_3$ имеет вид

$$x(t) = r \cos(\omega_3(t - t_1 - 0,5 t_2) + \pi + \gamma),$$

$$y(t) = r \sin(\omega_3(t - t_1 - 0,5 t_2) + \pi + \gamma),$$

$$z(t) = h.$$

Скорость движения на ней совпадает с линейной скоростью в точке касания с предыдущей окружностью $\omega_3 r = \omega_2 \rho = 2\pi r / t_3 = r_3 \omega_1$. Отсюда $t_3 = 2\pi r / r_3 \omega_1$, а частота $\omega_3 = 2\pi / t_3$.

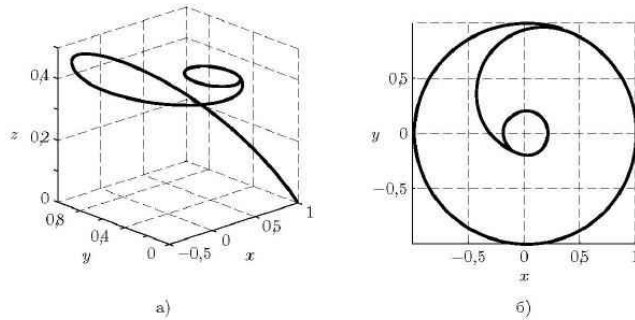


Рис. 5. Составная трехзвенная траектория: а) $h = 0,5$ а.е., б) вид сверху

Для решения обратной задачи необходимо вычислить производные. На рис. 5 представлены графики ускорений a_x, a_y, a_z для интервалов времени $[0, t_1] \cup [t_1, t_1 + 0,5 t_2] \cup [t_1 + 0,5 t_2, t_1 + 0,5 t_2 + t_3]$.

3. Заключение. Возможны и другие траектории полета КА над плоскостью эклиптики. После такого кинематического анализа необходимо перейти к проблеме выяснения энергетического обеспечения данных полетов. Требуемые ускорения можно создать с помощью солнечного паруса [1].

Литература

1. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 320 с.
2. Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1996. 687 с.
3. Милюков В. К., Сагитов М. У. Гравитационная постоянная в астрономии. М.: Знание, 1985. 64 с.
4. Бронникова А. И., Старков В. Н. Вывод зависимостей параметров паводка от формы рельефа // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 113–118.

Анализ напряженного состояния плоскости с межфазной трещиной для полуплоского материала

1. Введение. Решена плоская задача нелинейной теории упругости для неоднородной плоскости с межфазной трещиной. Механические свойства полуплоскостей описываются моделью полуплоского материала. Применение этой модели позволило воспользоваться методами теории комплексных функций и получить точное аналитическое решение рассматриваемой задачи. Найдены значения номинальных напряжений и перемещений. Для случая свободной трещины построены асимптотики напряжений у концов трещины, коэффициенты интенсивности напряжений и раскрытие трещины.

2. Общие соотношения. Уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций плоской задачи в комплексной форме имеют вид [1]

$$\begin{aligned} (s_{11} + is_{12})'_1 + i(s_{22} - is_{21})'_2 &= 0, \\ (g_{22} - ig_{12})'_1 + i(g_{11} + ig_{21})'_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где s_{ij} — компоненты тензора номинальных напряжений, g_{ij} — компоненты градиента деформации, $i, j = 1, 2$. Введем комплексные переменные отсчетной и текущей конфигураций $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ и комплексную функцию напряжений $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Уравнения (1) тождественно удовлетворяются, если подставить в них выражения

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, & s_{22} - is_{21} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}, \\ g_{11} + ig_{21} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, & g_{22} - ig_{12} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Доманская Татьяна Олеговна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: tanyath57@gmail.com, тел.: +7(981)852-21-50

Мальков Вениамин Михайлович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: v.malkov@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Малькова Юлия Вениаминовна — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: u.malkova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-00065

Комплексные функции $\zeta(z, \bar{z})$ и $\sigma(z, \bar{z})$ находятся из закона упругости и граничных условий задачи.

Для полуплинейного материала [2] закон упругости в комплексной форме имеет вид

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + ig_{21}) + \lambda(g_{22} - ig_{12}) + ke^{i\omega}, \\ s_{22} - is_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - ig_{12}) + \lambda(g_{11} + ig_{21}) + ke^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где λ , μ – параметры Ляме, $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$. Угол ω , характеризующий поворот элемента среды, вычисляется по формуле [3]

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{g_{21} - g_{12}}{g_{11} + g_{22}}.$$

Подставив в первое и второе соотношения (3) выражения (2), получим систему уравнений для функций $\sigma(z, \bar{z})$ и $\zeta(z, \bar{z})$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 2\mu c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - e^{i\omega} \right), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}. \quad (4)$$

Константа c различна для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Для этих задач получим соответственно [4]

$$c = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad c = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

где ν – коэффициент Пуассона. Решение уравнений (4) имеет вид

$$2\mu\zeta = \frac{1}{1+c} [\varphi(z) - \overline{\psi(z)} - f(z, \bar{z})], \quad \sigma = \frac{1}{1+c} [c\varphi(z) + \overline{\psi(z)} + f(z, \bar{z})],$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические функции комплексной переменной z ,

$$f(z, \bar{z}) = -2\mu c \int e^{i\omega} dz, \quad e^{i\omega} = \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} = \frac{|\varphi'(z)|}{\varphi'(z)} = \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}}.$$

Введем вспомогательную функцию $\Omega(z)$, это позволит упростить уравнения граничных задач и их решение,

$$\Omega(z) = \overline{\psi'(\bar{z})} + q(z),$$

$$q(z) = -2\mu c \left(\sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi}(z)}} - \frac{1}{2} \frac{\overline{\varphi''(z)}}{(\overline{\varphi'(z)})^{3/2}} \int \sqrt{\overline{\varphi'(z)}} dz \right).$$

Номинальные напряжения и деформации на линии раздела находятся по формулам

$$s_{11} + is_{12} = \frac{1}{1+c} \left[c\varphi'(z) - \Omega(\bar{z}) - 4\mu c \frac{\varphi'(z)}{|\varphi'(z)|} \right],$$

$$s_{22} - is_{21} = \frac{1}{1+c} [c\varphi'(z) + \Omega(\bar{z})],$$

$$2\mu(g_{22} - ig_{12}) = \varphi'(z) - (s_{11} + is_{12}),$$

$$2\mu(g_{11} + ig_{21}) = \varphi'(z) - (s_{22} - is_{21}).$$

3. Задача о межфазной трещине. Рассмотрим неоднородную плоскость с межфазной трещиной. Трещина расположена на промежутке $[-a, a]$ линии сопряжения полуплоскостей. На бесконечности (в пределе при $|z| \rightarrow \infty$) заданы напряжения $s_{ij} \rightarrow s_{ij}^\infty$ (свои для каждой полуплоскости). Берега трещины свободны:

$$(s_{22} - is_{21})^+ = 0, \quad (s_{22} - is_{21})^- = 0, \quad |x_1| < a. \quad (5)$$

Введем функции $h(z)$ и $r(z)$ для полуплоскости S_2 , которые являются аналитическими во всей плоскости, исключая линию раздела:

$$h(z) = \frac{c_2}{1+c_2} \varphi_2'(z) - \frac{1}{1+c_1} \Omega_1(z),$$

$$r(z) = \frac{1}{2\mu_2} \frac{1}{1+c_2} \varphi_2'(z) + \frac{1}{2\mu_1} \frac{1}{1+c_1} \Omega_1(z).$$

Функции нижней полуплоскости S_1 получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств.

Граничные условия (5) приводят к системе уравнений Римана–Гильберта для функций $h(z)$ и $r(z)$:

$$h^+(t) - h^-(t) = 0, \quad r^+(t) + \delta r^-(t) = 0, \quad t \in (-a, a),$$

где $\delta > 0$ — параметр. Решение уравнений таково:

$$h(z) = h(\infty), \quad (r - Dh)(z) = AX(z)(z - 2ia\beta),$$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln \delta}{2\pi}, \quad A = K^{-1}(s_{22}^\infty - is_{21}^\infty).$$

Вычислим коэффициенты интенсивности номинальных напряжений в окрестностях концов трещины

$$\begin{aligned} K^\pm &= \sqrt{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \pm 1 \pm 0} [(\pm\tau - 1)^{0,5 \pm i\beta} (s_{22} - is_{21})(\tau)] = \\ &= \pm \sqrt{\pi} (1 \mp 2i\beta) 2^{i\beta} (s_{22}^\infty - is_{21}^\infty), \end{aligned}$$

где $\tau = x_1/a$ — безразмерная переменная на линии раздела. Такие же коэффициенты интенсивности напряжений были получены в линейной задаче о межфазной трещине [5].

Раскрытие берегов трещины находится по формуле

$$\Delta(u_1 + iu_2)(z) = \frac{1}{2\mu_2} [\varphi_2(z)]^+ - \frac{1}{2\mu_1} [\varphi_1(z)]^-,$$

$$\Delta u_2(t) = [u_2]^+ - [u_2]^- = A_0 \sqrt{a^2 - t^2} \cos \left[\beta \ln \left(\frac{a+t}{a-t} \right) \right] (s_{22} - is_{21})^\infty.$$

Постоянная A_0 зависит от рассматриваемой задачи.

Построим асимптотические разложения напряжений в окрестности правого конца трещины. Положим $z = a + re^{i\theta}$. Разложение номинальных напряжений для верхней полуплоскости S_2 при $r \rightarrow 0$

$$s_{11} + is_{12} = A_2 + B_2 G(re^{i\theta})^{-i\beta-0,5} - C_2 G(re^{-i\theta})^{-i\beta-0,5} + O(\sqrt{r}),$$

$$s_{22} - is_{21} = D_2 + B_2 G(re^{i\theta})^{-i\beta-0,5} + C_2 G(re^{-i\theta})^{-i\beta-0,5} + O(\sqrt{r}),$$

где $A_k, B_k, C_k, D_k, k = 1, 2$ — некоторые постоянные. Напряжения для нижней полуплоскости S_1 получим циклической перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ в правых частях этих равенств. Видим, что напряжения имеют корневую особенность у конца трещины.

Истинные напряжения Коши t_{ij} вычисляются по формулам

$$\varkappa_1(t_{11} + it_{12}) = s_{11} + is_{12}, \quad \varkappa_2(t_{22} - it_{21}) = s_{22} - is_{21},$$

где \varkappa_1, \varkappa_2 — кратности изменения площади.

4. Выводы. Для модели полуплоскостного материала получено точное аналитическое решение нелинейной задачи для неоднородной плоскости с межфазной трещиной. Построены асимптотические разложения номинальных напряжений и истинных напряжений Коши в окрестности конца трещины. Показано, что номинальные напряжения имеют корневую особенность. Истинные напряжения Коши не имеют особенностей у концов трещины. Найден скачок перемещений берегов трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений нелинейной и линейной задач совпадают, а формулы для раскрытия трещины отличаются постоянным множителем. Подобные результаты были получены в аналогичной задаче для материала Джона [6].

Литература

1. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2008. № 1. С. 114–126.
2. Мальков В. М., Малькова Ю. В. Плоские задачи о сосредоточенных силах для полуплоскостного материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 3. С. 83–96.
3. Мальков В. М. Введение в нелинейную упругость. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. 276 с.
4. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Доманская Т. О. Анализ напряжений двухкомпонентной плоскости и полуплоскости при действии сосредоточенной силы для двух моделей гармонического материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 38–52.
5. Малькова Ю. В. Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. 160 с.
6. Доманская Т. О., Мальков В. М., Малькова Ю. В. Анализ напряженного состояния пластины с межфазной трещиной для гармонического материала Джона // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 168–172.

УДК 532.591

Дремов Л. С., Перегудин С. И.

Математическое моделирование в задачах морской гидротехники

1. Короткие волны на поверхности жидкости при бесконечной глубине. В данном разделе рассматриваются зависимость форм и закономерности свободных волн установившегося вида в водоеме бесконечной глубины. Волны установившегося вида — волны, форма которых не меняется с течением времени. Волны движущиеся при постоянном давлении называются свободными. В данной случае будем считать жидкость идеальной и однородной.

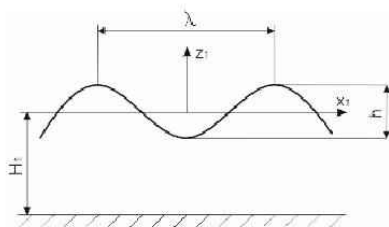


Рис. 1. Система координат

Введем систему координат (см. рис. 1). Пусть ось x_1 совпадает с направлением распространения волны, ось z_1 направлена вертикально вверх. Обозначим H_1 , φ , ζ — глубина водоема, потенциал скорости и ордината свободной поверхности соответственно, λ — длина волны, c — фазовая скорость.

Для удобства последующих вычислений введем безразмерные величины:

$$x = k(x_1 - ct_1), \quad z = kz_1, \quad H = kH_1, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

где $c = \sqrt{g/k \operatorname{th} H}$.

Согласно [1] ордината свободной поверхности представлена следующим выражением:

$$\zeta = (a + a^3 b_2) \cos x + a^2 b_1 \cos 2x + a^3 b_3 \cos 3x, \quad (1)$$

Дремов Леонид Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский горный университет; e-mail: leonid@mail.ru, тел.: +7(981)850-15-54

Перегудин Сергей Иванович — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: peregudinsi@yandex.ru, тел.: +7(812)428-42-91

где a — параметр, отвечающий за высоту волн, а коэффициенты

$$b_1 = \frac{k}{4} \operatorname{ch} H \frac{2 \operatorname{ch}^2 H + 1}{\operatorname{sh}^2 H}, \quad (2)$$

$$b_2 = \frac{k^2}{16 \operatorname{sh}^6 H} (2 \operatorname{ch}^6 H + 8 \operatorname{ch}^4 H - 19 \operatorname{ch}^2 H + 9), \quad (3)$$

$$b_3 = \frac{3k^2}{64 \operatorname{sh}^6 H} (1 + 8 \operatorname{sh}^6 H). \quad (4)$$

Формула (1) достаточно громоздкая и трудная для анализа, поэтому упростим ее. В случаях коротких волн $\operatorname{sh} H$ и $\operatorname{ch} H$ можно считать бесконечно большими величинами. Так например, при глубине водоема равной длине волны, $\operatorname{sh} H = \frac{e^{2\pi}}{2} \approx 250$. Для более глубоких водоемов данная величина будет экспоненциально возрастать, поэтому примем эти величины как бесконечно большие. В результате упрощения получаем

$$\zeta = a \left(\left(\frac{a^2 k^2}{8} + 1 \right) \cos x + \frac{ak}{4} \cos 2x + \frac{a^2 k^2}{8} \cos 3x \right). \quad (5)$$

Введем обозначение $\beta = ak$, тогда

$$\zeta = a \left(\left(\frac{\beta^2}{8} + 1 \right) \cos x + \frac{\beta}{4} \cos 2x + \frac{\beta^2}{8} \cos 3x \right). \quad (6)$$

Из (6) видно, что на форму волны влияет только отношение $\frac{a}{\lambda}$. Исследуем профиль волны при разных значениях β . Рассмотрим крупные морские волны $\lambda = 10$, $a = 1$.

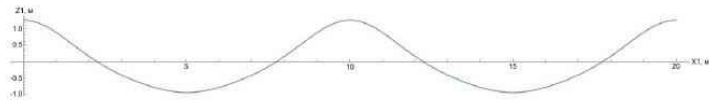


Рис. 2. Волны при $\lambda = 10$, $a = 1$

На рис. 2 видно, что вершина более узкая и острая, чем впадина. Для данных параметров 45% поверхности жидкости находится выше невозмущенного уровня жидкости и 55% — ниже. Рассмотрим кривые с похожими параметрами. Пусть $\frac{1}{15} < \beta < \frac{1}{11}$ при неизменном a . На рис. 3 видно, что чем меньше β , тем больше форма волны

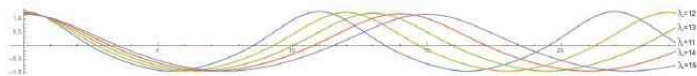


Рис. 3. Волны при $\frac{1}{15} < \beta < \frac{1}{11}$

стремится к синусоиде. Рассмотрим характерный случай небольших волн на поверхности при $\lambda = 20, a = 0,5$ (см. рис. 4). В данном



Рис. 4. Волны при $\lambda = 20, a = 0,5$

случае разница между впадиной и вершиной составляет всего 0,5%, т. е. эти и более вытянутые волны с высокой точностью описываются синусоидой. Рассмотрим предельный случай: волны, приближенные к штормовым, при $\lambda = 100, a = 2$ (см. рис. 5). Для данных волн



Рис. 5. Волны при $\lambda = 100, a = 2$

вершина и впадина занимают 47,5% и 52,5% соответственно.

2. Взаимодействие коротких волн с вертикальной преградой. Рассматривается взаимодействие коротких волн конечной амплитуды с вертикальной преградой бесконечной протяженности.

Зададим систему координат (рис. 6).

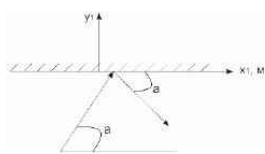


Рис. 6. Система координат

Пусть плоскость $x_1 y_1$ располагается горизонтально, на уровне невозмущенного уровня жидкости; ось $z_1 \perp x_1 y_1$ и направлена вверх. Свободная поверхность описывается функцией $z_1 = \zeta(x_1, y_1, t)$, преграда расположена вдоль оси x_1 , жидкость находится в отрицательной области y_1 . На вертикальную стенку находят волны под углом α с конечной

амплитудой. В результате образуется трехмерная волна с постоянными периодом, скоростью и амплитудой.

Введем безразмерные переменные:

$$z = kz_1, \quad x = k(x_1 - ct_1), \quad z = kz_1, \quad H = kH_1, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

где $c = \sqrt{g/(k \cos \alpha^2) \text{th} H}$.

Согласно [1] значение давления жидкости на стенку определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g} = & -\frac{z}{k} + \left\{ a + \frac{a^3 k^2}{32} \left[\frac{8w_2^2}{2-w_1} (-4w_1^2 + w_1 + 2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 8w_1^4 + 32w_1^2 - 12 \right] \right\} e^z \cos w_1 x + \\ & + \frac{a^2 k}{8} \left[\frac{8w_2^2}{w_2 - 2} e^{2w_1 z} \cos 2w_1 x + 2(w_2^2 \cos 2w_1 x - w_1^2 - 1) e^{2z} \right] + \\ & + \frac{a^3 k^2}{32} \left\{ \frac{8w_1^4}{1-p_{13}} e^{p_{13} z} \cos w_1 x + \frac{3}{9-p_{31}} \left[\frac{16w_2^2}{w_1 - 2} (8w_1^2 - 9w_1 - 2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 8w_1^4 + 64w_1^2 - 56 \right] e^{p_{31} z} \cos 3w_1 x + \right. \\ & \left. + \frac{16w_1 w_2^2}{2-w_1} [(w_1 + 1) \cos w_1 x + (w_1 - 1) \cos 3w_1 x] e^{(2w_1+1)z} \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $w_1 = \cos \alpha$, $w_2 = \sin \alpha$, $p_{mn}^2 = m^2 w_1^2 + n^2 w_2^2$, a , a_0 — амплитуда интерферирующей волны и амплитуда подходящей волны соответственно, $a = 2a_0$. Тогда ордината свободной поверхности

$$\begin{aligned} \zeta = & a \cos w_1 x + \frac{a^2 k}{2} \left[\left(\frac{4w_2^2}{2-w_1} + 2(2-w_1^2) \right) + 2w_2^2 \right] + \\ & + \frac{a^3 k^2}{32} ((A_{11} + A_{13}) \cos w_1 x + (A_{31} + A_{33}) \cos 3w_1 x), \quad (8) \end{aligned}$$

где коэффициенты

$$A_{11} = \frac{4w_2^2}{2-w_1} (4w_1^2 + 2w_1) - 8w_1^4 + 8w_1^2 + 3,$$

$$A_{13} = -12w_1^2 + 9 + \frac{8w_1^4}{1 - p_{13}},$$

$$A_{31} = \frac{3}{9 - p_{31}} \left(\frac{4w_2^2}{2 - w_1} (-8w_1^4 + 96w_1^2 - 36w_1 - 64) \right),$$

$$A_{33} = 0.$$

Исследуем влияние угла падения на профиль волны. Рассмотрим четыре варианта $\alpha = \pi/3$, $\alpha = \pi/4$, $\alpha = \pi/6$, $\alpha = \pi/12$. На рис. 7 можно заметить, что при понижении угла падения снижается максимальная высота волны. Поднятия становятся более острыми и узкими, опускания — более широкими и тупыми. Исчезает двойной максимум у вершины. Профиль начинает напоминать свободную короткую волну, существующую без препятствия.



Рис. 7. Зависимость волн от угла падения

Рассмотрим профили волн разной амплитуды. Выберем угол падения $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Возьмем $a = 1$, $\lambda = 10$ (см. рис. 8).



Рис. 8. Волны при $a = 1$, $\lambda = 10$

В своей максимальной точке данные волны достигают высоты в 1,25, т.е. высота превышает амплитуду подходящей волны в 2,5 раза. Поднятия и понижения практически симметричны. Рассмотрим профиль с $a = 0,5$, $\lambda = 20$ (см. рис. 9).



Рис. 9. Волны при $a = 0,5$, $\lambda = 20$

Форма волны принимает вытянутую вдоль оси x_1 синусоиду. Поднятия и понижения симметричны, соответственно и при взаимодействии с преградой волны малой высоты хорошо описываются первым приближением. Рассмотрим протяженные волны большой высоты. Как видно из рис. 10, волны большой высоты и протяженности так же хорошо описываются синусоидой.



Рис. 10. Волны при $a = 2$, $\lambda = 100$

Исследуем, как параметры волны сказываются на давлении на преграду. Пусть $a = 1$, $\lambda = 10$, $\alpha = \pi/4$. Рассматривается зависимость давления от глубины на разных участках волны (поднятиях и опусканиях).

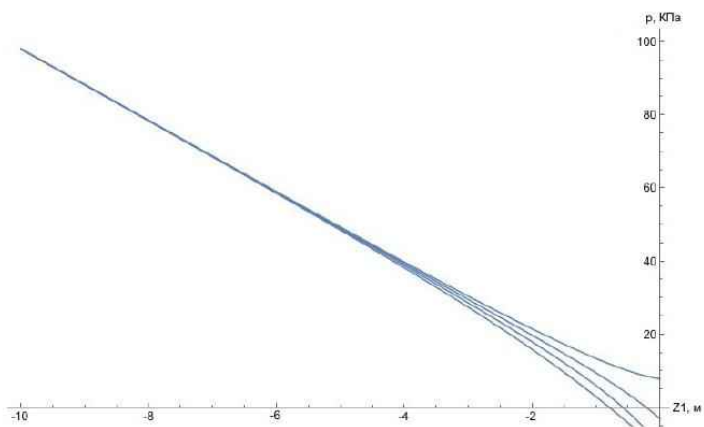


Рис. 11. Зависимость давления от глубины

Как видно из рис. 11, при глубине больше 4 м от среднего уровня давление на вертикальную преграду полностью определяется гидростатическим давлением жидкости.

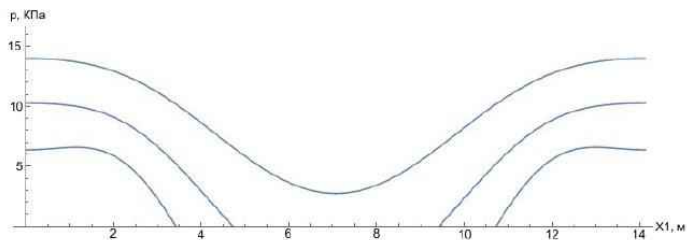


Рис. 12. Зависимость давления от положения вдоль преграды

Рассмотрим, как меняется давление вдоль преграды. Графики на рис. 12 отображают глубины 0 м, 0,5 м и 1 м при увеличении давления соответственно. Отрицательная область означает отсутствие волны в той части пространства. Уменьшение давления хорошо коррелирует с профилем волны, но в отличие от него не имеет двойных максимумов и имеет более синусоидальную форму.

3. Заключение. Проведен анализ форм коротких свободных волн; длинные волны хорошо описываются приближением первого порядка. Исследовано распределение давления волнового фронта на преграду. Все расчеты проведены в программе Wolfram Mathematica и не противоречат результатам классической теории.

Литература

1. Алешков Ю. З. Теория взаимодействия волн с преградами. СПб.: Изд-во ЛГУ, 1990. 372 с.

**Применение методов второго порядка
для численного решения задачи
оптимального управления ансамблем
динамических систем**

1. Постановка задачи. Рассмотрим ансамбль управляемых динамических систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

где x обозначает положение системы в фазовом пространстве Ω , $x \in \Omega$, $\dim \Omega = n$, $t \in [t_0, T]$, а u — управление, которое выбирается из некоторого класса функций, $u(t) \in U \subset R^r$. Считаем, что системы распределены в некоторой области D фазового пространства или на некоторой движущейся поверхности S в фазовом пространстве с плотностью, которую в обоих случаях будем описывать дифференциальной формой $\varrho(t, x)$, степень которой равна размерности фазового пространства n в первом случае и размерности поверхности S во втором. Пусть в момент t_0 задана начальная плотность распределения в области D или на некоторой поверхности S_0 , которую обозначим через $\varrho_0(x)$. $\varrho(t_0, x) = \varrho_0(x)$. В обоих случаях плотность в последующие моменты времени может быть получена в виде [1–3]

$$\varrho(t_0 + \delta t, F_{f, \delta t} x) = F_{f, \delta t} \varrho_0(x), \quad (1)$$

где $F_{f, \delta t}$ обозначает сдвиг Ли вдоль траекторий динамической системы на приращение параметра δt [4]. Если взаимодействие между динамическими системами отсутствует, то (1) есть уравнение Лиувилля. Если же системы взаимодействуют между собой, то (1) — это уравнение Власова.

Дривотин Олег Игоревич — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.drivotin@spbu.ru, тел.: +8(812)428-47-26

Стариков Дмитрий Александрович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: radiumds@gmail.com

Задача состоит в том, чтобы найти управление u , доставляющее минимальное значение функционалу

$$\Phi(u) = \int_K g(x_T) \varrho(T, x_T),$$

характеризующему качество процесса управления. Здесь K обозначает D или S в зависимости от размерности носителя распределения.

2. Численное решение. Для численного решения задачи Д. А. Овсянниковым разработаны методы первого порядка, основанные на вычислении первой вариации функционала качества [5]. В случае, когда управление параметризовано, эти методы позволяют найти первые производные минимизируемого функционала по параметрам. В настоящей работе рассматривается метод, основанный на вычислении второй вариации, позволяющий находить также вторые производные функционала. Как ожидалось и как подтверждается проведенными вычислениями, данный метод существенно повышает эффективность вычислений.

Для второй вариации положения динамической системы в фазовом пространстве при вариации управления нетрудно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta^2 x^i(t) = & \int_{t_0}^t D_{jk}^i(t, t') \delta_u f^j(t') \left(\int_{t_0}^{t'} G_m^k(t', t'') \delta_u f^m(t'') dt'' \right) dt' + \\ & + \int_{t_0}^t G_j^i(t, t') \left[\delta_u \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(t') \left(\int_{t_0}^{t'} G_m^k(t', t'') \delta_u f^m(t'') dt'' \right) + \delta_u^2 f^j(t') \right] dt'. \end{aligned}$$

Здесь $\|G_k^i(t, t)\|$ — матрица Грина линейной системы для первой вариации, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dG_j^i(t, t')}{dt} = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} G_j^k(t, t')$$

и условию $G(t, t) = E$, где E — единичная матрица, а $D_{jk}^i(t, t')$ — тензор, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial D_{jk}^i(t, t')}{\partial t'} = -2 \frac{\partial f^i}{\partial x^m} D_{jk}^m(t, t') + G_m^i(t, t') \frac{\partial f^m}{\partial x^j \partial x^k}$$

и условию

$$D(t, t)_{jk}^i = 0, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Во всех приведенных здесь формулах в соответствии с общепринятыми обозначениями ковариантные тензорные индексы пишутся снизу, а контравариантные — сверху. Кроме того, по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование в соответствии с правилом суммирования Эйнштейна.

Используя выражения для первой и второй вариаций функционала, нетрудно найти вторые производные функционала по параметрам. Если, например, при $i \neq j$ выполнено $\partial^2\Phi/(\partial x^i \partial x^j) = 0$, то

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i^2} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial u_i^2}(T) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial (x^j)^2} \left(\frac{\partial x^j}{\partial u_i}(T) \right)^2 \right] \varrho(T, x_T),$$

где $\partial^2 x^j / \partial u_i^2(T)$ находится из выражения для второй вариации, а $\partial x^j / \partial u_i(T)$ из аналогичного выражения для первой вариации [5].

3. Применение метода второго порядка для оптимизации ускорительной структуры с высокочастотной квадрупольной фокусировкой. Численная оптимизация ускорительных структур требует большого объема вычислений и представляет, таким образом, ту область вычислительного эксперимента, где применение методов второго порядка принесло бы существенное сокращение времени вычислений.

Для исследования возможности применения методов второго порядка и их эффективности решалась задача оптимизации ускорителя второго порядка, подробно рассмотренная в [5, 6]. Тестовые расчеты произведены для ускорительной структуры с частотой 433 МГц, ускоряющей протоны от энергии 60 кэВ до 1850 КэВ. При этом в качестве управления взята эффективность ускорения, которую можно рассматривать как кусочно-постоянную функцию, интервалы постоянства которой соответствуют ячейкам структуры. На рис. 1 представлено распределение частиц по фазе и энергии на выходе из канала ускорения.

На рис. 2, 3 представлена зависимость значений функционала от номера шага оптимизационного процесса для методов первого и второго порядка для иллюстрации их сравнительной эффективности.

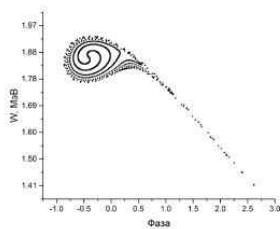


Рис. 1. Фазо-энергетический портрет пучка частиц на выходе из ускорителя

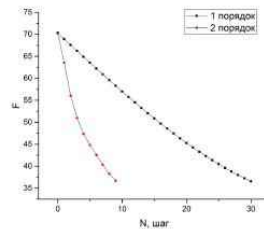


Рис. 2. Изменение функционала качества при оптимизации последней ячейки

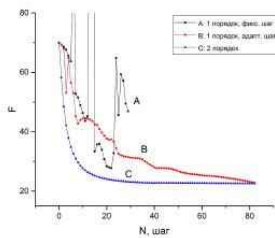


Рис. 3. Изменение функционала качества при оптимизации всей структуры

На рис. 2 показан процесс, когда проведена оптимизация только последней ячейки. На рис. 3 представлен процесс оптимизации всех ячеек ускорительного канала. Здесь линии А, В, С соответствуют процессам оптимизации по методу первого порядка с постоянным шагом, методу первого порядка с адаптивным шагом, когда шаг изменения параметров меняется по некоторому алгоритму, и методу второго порядка.

4. Заключение. Видно, что метод второго порядка работает и дает существенное ускорение относительно метода первого порядка.

Таким образом, применение метода второго порядка для численного решения задач оптимального управления ансамблем динамических систем возможно и эффективно.

Литература

1. Drivotin O. I. Covariant formulation of the Vlasov equation // Proc. of the 2nd Int. Particle Accelerators Conf. 2011. P. 2277–2279.
2. Drivotin O. I. Degenerate solutions of the Vlasov equation // Proc. of the 23rd Russian Particle Accelerator Conf. 2012. P. 376–378.
3. Дривотин О. И. Ковариантное описание распределений в фазовом пространстве // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 3. С. 39–52.
4. Дривотин О. И. Математические основы теории поля. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 168 с.
5. Овсянников Д. А., Дривотин О. И. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 175 с.
6. Drivotin O. I., Starikov D. A. Second order method for beam dynamics optimization // Proc. of the 24th Russian Particle Accelerator Conf. 2014. P. 69–71.

УДК 539.3

Еваева Е. С.

О влиянии двойника у свободной границы на распределение точечных дефектов

Рекомендовано к публикации профессором Прониной Ю. Г.

1. Введение. В любом реальном кристалле всегда имеются дефекты строения. Игнорирование напряжений, которые возникают благодаря дефектам кристаллической решетки, приводит к завышенной оценке прочности деформируемого материала. Заметим также, что рост напряжений в теле может приводить к ускорению химических процессов на его поверхности [10]. Разрушение твердого тела часто начинается с приповерхностной зоны, поэтому особый интерес представляет моделирование приповерхностных дефектов. В качестве двумерной модели для этой цели часто выбирается упругая полуплоскость с приповерхностными концентраторами напряжений [2, 6, 8, 9]. В рамках данной работы изучено влияние дилатационных напряжений, возникающих в окрестности приповерхностного двойника, на возможность перестройки атомной структуры, а именно, перераспределение точечных дефектов, таких как примесные атомы или вакансии. Решение строится в двумерной постановке на основе обобщенных потенциалов М. А. Грекова для сил и краевых дислокаций в бесконечной плоскости [1].

2. Постановка задачи. Рассматривается некогерентный двойник, перпендикулярный свободной границе упругого тела, и исследуется его воздействие на распределение точечных дефектов в его окрестности. В рамках плоской задачи теории упругости двумерный двойник моделируется одномерным дефектом, составленным из краевых двойникоующих дислокаций с вектором Бюргерса \mathbf{b} , распределенных по отрезку $[a - ih, a - i(h + l)]$, перпендикулярному границе упругой полуплоскости S^- ($y \leq 0$). Требуется провести анализ дилатационных напряжений в окрестности указанного дефекта.

Еваева Екатерина Сергеевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kittieva@mail.com, тел.: +7(967)432-79-29

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00890

3. Решение задачи. С помощью метода, предложенного Ю. М. Далем в [3], обобщенное решение М. А. Грекова [1] для одиночных сил и краевых дислокаций в бесконечной плоскости в [9] было распространено на случай воздействий в упругой полуплоскости. Потенциалы Колосова–Мусхелишвили для поставленной задачи могут быть получены путем интегрирования выражений из [9] для комплексных потенциалов для краевой дислокации, расположенной в точке ζ сплошной полуплоскости S^- , по отрезку $[a - ih, a - i(h + l)]$. Результатом применения алгоритма [4, 5] являются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= Hi \left(-\ln \frac{z + ih - a}{z + i(h + l) - a} + \lambda \ln \frac{z - ih - a}{z - i(h + l) - a} \right) + \\ &+ 2i\bar{H} \left(\frac{a - z}{z - ih - a} - \frac{a - z}{z - i(h + l) - a} - \ln \frac{z - ih - a}{z - i(h + l) - a} \right), \\ \Psi(z) &= \bar{H}i \left(\lambda \ln \frac{z + ih - a}{z + i(h + l) - a} + \ln \frac{z - ih - a}{z - i(h + l) - a} \right) + \\ &+ Hi \left(-\ln \frac{z + ih - a}{z + i(h + l) - a} - \lambda \ln \frac{z - ih - a}{z - i(h + l) - a} \right) + \\ &+ \bar{H}i \left(-\frac{2(a - z)}{z - ih - a} + \frac{2(a - z)}{z - i(h + l) - a} + 2z \frac{z - 2ih - a}{(z - ih - a)^2} - \right. \\ &- 2z \frac{z - 2i(h + l) - a}{(z - i(h + l) - a)^2} \left. \right) + Hi \left(\frac{2a - z}{z + ih - a} - \frac{2a - z}{z + i(h + l) - a} - \right. \\ &\left. - \frac{\lambda z}{z - ih - a} + \frac{\lambda z}{z - i(h + l) - a} \right). \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения [1]: при действии сосредоточенной силы $\lambda = \lambda_1 = \varkappa$, $H = \frac{\mathbf{P}}{2\pi(\varkappa + 1)}$, при наличии краевой дислокации $\lambda = \lambda_2 = -1$, $H = \frac{i\mu\mathbf{b}}{\pi(\varkappa + 1)}$. Черта сверху означает комплексное сопряжение; $\varkappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации и $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при обобщенном плоском напряженном состоянии, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига материала полуплоскости.

Расчет полей напряжений был произведен по известным формулам Колосова – Мусхелишвили. На рис. 1, 2 построены линии уровня дилатационных напряжений, отнесенных к μb_y . При этом использовались следующие значения параметров: $\kappa = 1,6$; $a = -0,5$; $h = 0$ для (рис. 1) и $h = 0,6$ для (рис. 2); $l = 0,5$.

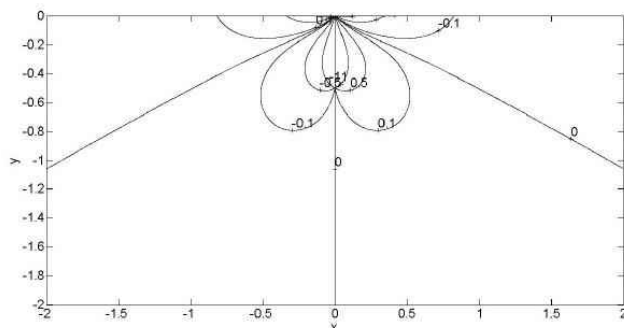


Рис. 1. Линии уровня дилатационных напряжений, отнесенных к μb_y , в окрестности приповерхностного двойника для $h = 0$

Естественно, что точечные дефекты типа внедренных атомов (вакансий) будут стремиться переместиться в области положительных (отрицательных) дилатационных напряжений [7]. Расчеты показали, что у двойника, находящегося на достаточном удалении от границы, зоны концентрации вакансий и внедренных атомов находятся с разных сторон от двойника. При приближении двойника к границе происходит перераспределение напряжений у поверхности тела в окрестности двойника, характер распределения напряжений меняется. При этом у двойника, растущего от самой границы, зоны высоких дилатационных напряжений меньше по площади, чем у двойника, расположенного на удалении от границы. Однако при определении концентрации дефектов вблизи приповерхностного двойника необходимо еще учитывать силу притяжения этих дефектов к свободной поверхности, что планируется учесть в дальнейшей работе.

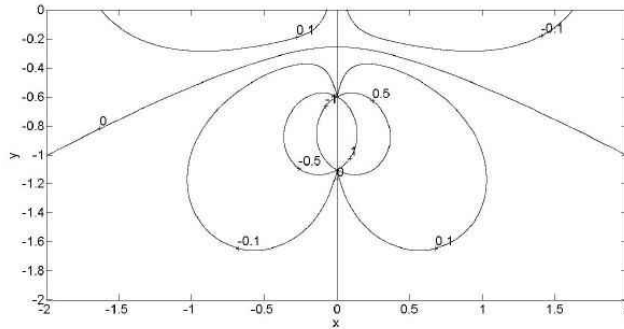


Рис. 2. Линии уровня дилатационных напряжений, отнесенных к μb_y , в окрестности приповерхностного двойника для $h = 0,6$

4. Заключение. Получены комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили для сил и дислокаций, распределенных по отрезку, перпендикулярному границе полуплоскости. Данные выражения полностью определяют напряженно-деформированное состояние упругой полуплоскости при действии указанных особенностей. Проведён анализ дилатационных напряжений в окрестности двойника.

Литература

1. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. 192 с.
2. Греков М. А., Сергеева Т. С. Периодическая система дислокаций и внутренних сил в полубесконечном упругом теле при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 137–142.
3. Даль Ю. М., Проина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты у границы упругой полуплоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 5. С. 78–87.

4. Еваева Е. С. Комплексные потенциалы для сил и дислокаций, распределенных по отрезку, параллельному границе полуплоскости // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1 С. 173–177.
5. Еваева Е. С., Пронина Ю. Г. Силы и краевые дислокации, распределенные по отрезкам, параллельным границе полуплоскости // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Воронеж: Научная книга. 2016. С. 128–130.
6. Костырко С. А., Шувалов Г. М. Влияние поверхностной диффузии на морфологическую устойчивость поверхности многослойного пленочного покрытия // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 190–195.
7. Краевский А. Ю., Овидько И. А. Влияние полей напряжений малолугловых межзеренных границ наклона на структурные неоднородности в высокотемпературных сверхпроводниках // Физика твердого тела. 2000. Т. 42. Вып. 7. С. 1183–1186.
8. Пронина Ю. Г. О сосредоточенных воздействиях у границы упругой пластины // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. 2010. № 53. С. 117–122.
9. Пронина Ю. Г. Краевая дислокация и сосредоточенная сила в упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми вырезами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 4. С. 120–124.
10. Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 33–44.

УДК 539.3

Елаева М. В.

Расчет оптимальной толщины трубы под давлением в условиях внутренней коррозии

Рекомендовано к публикации профессором Прониной Ю. Г.

1. Введение. Многие конструкции находятся под совместным действием механических напряжений и химически активных средств. Такие условия могут вызвать процесс так называемой механохимической коррозии, скорость которой растет с ростом напряжений [1]. Проектирование конструкций без учета механохимической коррозии может привести к их преждевременному разрушению, а задание большого запаса по толщине конструкции — к неэкономному расходу материала и утяжелению конструкции. Поэтому с точки зрения безопасности и экономики важно уметь точно рассчитывать начальные размеры конструкции, необходимые для обеспечения требуемого срока службы. В работе [2] рассчитывается оптимальная толщина сферического сосуда под давлением. Представленная статья посвящена расчету оптимальной толщины линейно упругой цилиндрической трубы под внешним и внутренним давлением. Расчет напряжений в цилиндрическом сосуде под давлением рассмотрен в [3], где задача решена в терминах главных напряжений [4]. В настоящей работе задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно искомого радиуса трубы. В случае наличия физической или геометрической нелинейности необходимо решать систему дифференциальных уравнений [5].

2. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрическая труба под действием внутреннего p_r и внешнего p_R давления. В условиях механохимической коррозии с внутренней стороны, ее внутренний радиус $r(t)$ возрастает с течением времени t вследствие коррозионного растворения; причем $r(t_0) = r_0$ в начальный момент времени $t_0 = 0$, внешний радиус считаем фиксированным: $R(t) = const$.

Елаева Марина Валерьевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mari_elaeva@mail.ru, тел.: +7 (921)378-59-73

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00890

Необходимо найти оптимальную начальную толщину сосуда $h_0 = R - r_0$, которая бы обеспечила:

- безопасную эксплуатацию сосуда в течение требуемого срока службы t^* ;
- минимальный расход материала.

Будем считать заданными максимальное допустимое напряжение σ^* и ёмкость трубы в начальный момент времени t_0 , которая определяет внутренний начальный радиус r_0 . Согласно [1, 4] скорость механохимической коррозии определяется уравнением

$$\frac{dr}{dt} = (a_r + m_r \sigma_1) \exp(-bt), \quad (1)$$

где σ_1 — максимальное по модулю нормальное напряжение на внутренней поверхности, a_r, m_r, b — постоянные, определяемые опытным путем.

3. Решение задачи. Требуемые условия оптимальности толщины будут выполнены, только если предел прочности σ^* будет достигнут в момент времени t^* .

Рассмотрим случай, когда максимальным по модулю главным напряжением является окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$, т.е. $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$. Оно достигает своего максимума на внутренней поверхности, где согласно формулам Ламе

$$\sigma_1 = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} R^2. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\exp(-bt)(r^2(m_r p_r - a_r) + R^2(a_r + m_r p_r - 2m_r p_R))}{(R^2 - r^2)}.$$

Интегрирование этого уравнения при условии $r(0) = r_0$ дает для $b \neq 0$:

$$t = -\frac{1}{b} \left[\ln \left(1 - b \left(\frac{R}{\sqrt{(m_r p_r + a_r)(a_r + m_r p_r - 2m_r p_R)}} + \right. \right. \right.$$

$$+ \frac{R(a_r + m_r p_r - 2m_r p_R)}{(m_r p_r + a_r)} \times \\ \times \arctan \left. \frac{r\sqrt{m_r p_r + a_r}}{R\sqrt{a_r + m_r p_r - 2m_r p_R}} \right|_{r_0}^r - \left. \frac{r}{m_r p_r + a_r} \right|_{r_0}^r \Bigg), \quad (3)$$

для $b = 0$:

$$t = \frac{R}{\sqrt{(m_r p_r + a_r)(a_r + m_r p_r - 2m_r p_R)}} + \frac{R(a_r + m_r p_r - 2m_r p_R)}{(m_r p_r + a_r)} \times \\ \times \arctan \left. \frac{r\sqrt{m_r p_r + a_r}}{R\sqrt{a_r + m_r p_r - 2m_r p_R}} \right|_{r_0}^r - \left. \frac{r}{m_r p_r + a_r} \right|_{r_0}^r. \quad (4)$$

Идентичность решений (3) и (4) при $b = 0$ может быть подтверждена с помощью разложения экспоненциальной функции в ряд Тейлора:

$$-\frac{1}{b}(\exp(-bt) - \exp(0)) \Big|_{b=0} = -t.$$

Срок службы сосуда определяется формулами (3) или (4) при $r = r^*$, где r^* — значение внутреннего радиуса, при котором достигается предельное допустимое напряжение $\sigma^* = \sigma_1$. Подставляя это равенство в (2), находим

$$r^* = R^* \sqrt{\frac{\sigma^* + 2p_R - p_r}{p_r + \sigma^*}}.$$

В итоге получается зависимость $t^* = t^*(\sigma^*, r_0, R)$. С ее помощью можно получить график зависимости требуемого срока службы от начальной толщины $h_0 = R - r_0$.

4. Результаты расчетов. В пакете MATLAB [6] построены зависимости срока службы трубы от начальной толщины для данных $a = 0,16 [l_c/t_c]$, $m = 0,0008 [l_c/(t_c p_c)]$, $p_r = 10 [p_c]$, $\sigma^* = 300 [p_c]$, $r_0 = 100 [l_c]$. Здесь l_c , t_c , p_c — условные единицы измерения расстояния, времени и напряжения соответственно. На рис. 1 сплошная линия соответствует $p_R = 0$, пунктирная — $p_R = 4 [p_c]$.

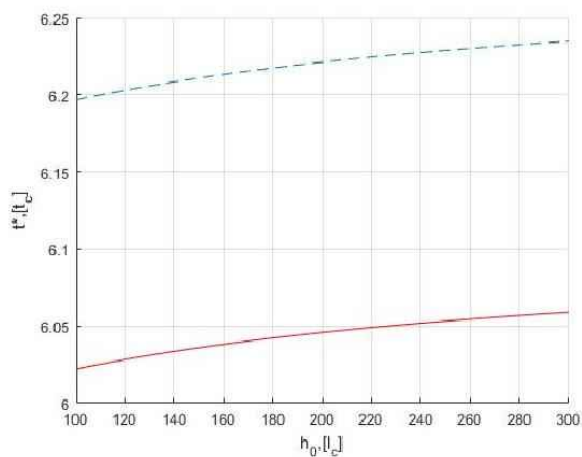


Рис. 1. Зависимость требуемого срока службы от начальной толщины

5. Заключение. На рис. 1 видно, что внешнее давление оказывает упрочняющий эффект, если оно не превышает внутреннее, т. е. для одной и той же толщины трубы ее долговечность больше при большем внешнем давлении. Кроме того, расчеты показали, что при увеличении емкости трубы для достижения одного и того же срока службы толщина трубы также должна увеличиться.

Литература

1. Pronina Y. Mechanochemical corrosion: modeling and analytical benchmarks for initial boundary value problems with unknown boundaries // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. «Modern Mathematical Methods and High Performance Computing in Science and Technology (МЗНРСТ)». 2016. P. 301–309.

2. Sedova O. S., Pronina Yu. G. Calculation of the optimal initial thickness of a spherical vessel operating in mechanochemical corrosion conditions // 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015. P. 436–439.
3. Пронина Ю. Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. С. 55–63.
4. Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 33–44.
5. Мальцева Л. С., Колпак Е. П., Ефремова Е. А. Круговая цилиндрическая оболочка под внутренним давлением // Молодой ученый. 2017. № 1 (135). С. 120–124.
6. Колпак Е. П. Вычисления в Matlab. Учебное пособие. Казань: ООО «Бук», 2016. 173 с.
7. Греков М. А. Математика и механика внутренних и поверхностных дефектов // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 19–45.

УДК 519.6

Ермолаева Н. Н., Шалыгина А. М.

Расчёт характеристик неустановившегося потока газовой смеси, транспортируемой по морским газопроводам, с учётом рельефа трассы

1. Введение. Маршрут прокладки газопровода определяется многими факторами, среди которых большое значение имеет рельеф дна. Перепад высот на трассе газопровода приводит к значительному влиянию силы тяжести на характеристики потока газовой смеси, транспортируемой по морскому газопроводу [1, 2]. В настоящей работе рассматривается влияние рельефа трассы на газодинамические характеристики потока для установившегося и неустановившегося течения, обусловленного изменением отбора газа на конце газопровода.

2. Математическая модель. Запишем, следуя работе [3], одномерную нестационарную неизотермическую модель транспортировки неидеальной смеси газов по морским газопроводам:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u^2 + p) = -\frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \right) = \frac{2q}{R} + \rho u g \cos \alpha(z), \quad (3)$$

$$e = \varepsilon + u^2/2, \quad (4)$$

$$p = \frac{h\rho T}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)\sqrt{T}}, \quad (5)$$

$$\varepsilon = \tilde{c}_v T - \frac{3}{2} \frac{c}{\delta\sqrt{T}} \ln(1 + \delta\rho). \quad (6)$$

Ермолаева Надежда Николаевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: n.erolaeva@srbu.ru, тел.: +7(911)968-67-96

Шалыгина Анастасия Михайловна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: n_shal2@mail.ru, тел.: +7(911)121-61-53

Здесь (1)–(3) — уравнения неразрывности, движения, полной энергии соответственно, (5) — уравнение состояния Редлиха–Квонга, (6) — калорическое уравнение.

В системе уравнений (1)–(6) приняты следующие обозначения: $u = u(z, t)$, $\rho = \rho(z, t)$, $p = p(z, t)$, $T = T(z, t)$ — скорость, плотность, давление и температура газовой смеси соответственно; координата z цилиндрической системы координат направлена вдоль оси газопровода; $\varepsilon = \varepsilon(z, t)$, $e = e(z, t)$ — массовые плотности внутренней и полной энергии смеси газа соответственно; λ — коэффициент гидравлического сопротивления; q — радиальная составляющая вектора потока тепла на внутренней поверхности газопровода в z -ом сечении; $\alpha(z)$ — угол между осью газопровода z и направлением силы тяжести; h , c , δ — размерные постоянные в уравнении Редлиха–Квонга, определяемые по заданному химическому составу газовой смеси; \tilde{c}_v в уравнении (6) — удельный коэффициент теплоёмкости при постоянном объёме газовой смеси заданного химического состава, но в состоянии идеального газа.

Величина теплового потока q , как показано, например, в [4], может быть определена из сопряжённой задачи теплообмена газа с окружающей водой. В этом случае нестационарная модель теплообмена газа через многослойную обшивку газопровода в z -ом сечении записывается следующим образом:

$$r \in (R, R_1), \quad t \in (0, t_k) : \quad \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad (7)$$

$$t = 0, \quad T_1(r) = T_1^0(r), \quad (8)$$

$$t \in (0, t_k), \quad r = R : \quad T_1 = T(z, t), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = q, \quad (9)$$

$$t \in (0, t_k), \quad r = R_1 : \quad T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad (10)$$

$$r \in (R_1, R_2), \quad t \in (0, t_k) : \quad \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad (11)$$

$$t = 0, \quad T_2(r) = T_2^0(r), \quad (12)$$

$$t \in (0, t_k), \quad r = R_2 : \quad T_2 = T_3, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r}, \quad (13)$$

$$r \in (R_2, R_2 + \delta_*), \quad t \in (0, t_k) : \quad \rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_3}{\partial r} \right), \quad (14)$$

$$t = 0, \quad T_3(r) = T_3^0(r), \quad (15)$$

$$t \in (0, t_k), \quad r = R_2 + \delta_* : \quad T_3 = T^*, \quad (16)$$

где r — радиальная координата в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; λ_k, ρ_k, c_k и $T_k = T_k(z, r, t)$ — коэффициенты теплопроводности, плотность, удельный коэффициент теплоёмкости и распределение температуры в k -ом слое, индексы $k = 1, 2$ соответствуют слою стали и бетона в обшивке газопровода, индекс $k = 3$ — области эффективного теплового погранслоя воды толщиной δ_* ; R — внутренний радиус газопровода, R_1, R_2 — внешние радиусы слоёв обшивок; T^* — температура морской воды на удалении от газопровода.

Система (7)–(16) содержит одномерные уравнения теплопроводности (7), (11), (14) в областях многослойной боковой стенки газопровода и в тепловом погранслое воды соответственно, условия равенства температур и тепловых потоков (10), (13) на стыках областей, а также начальные условия (8), (12), (15) для профилей температур $T_k, k = 1, 2, 3$.

Система (1)–(6) дополняется граничными условиями: на входе в газопровод задаются давление $p(0, t)$ и температура $T(0, t)$ газовой смеси, на выходе из газопровода — закон изменения расхода $y = \rho u$ газа $y(L, t) = y_*$.

В качестве начальных условий для ρ, T, u принят установившийся режим течения. Математическая модель установившегося течения имеет вид [1]

$$\rho u = Q/(\pi R^2), \quad (17)$$

$$\rho u \frac{du}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \frac{\lambda \rho u |u|}{4R} + \rho g \cos \alpha(z), \quad (18)$$

$$c_v \rho u \frac{dT}{dz} = -\left(\frac{\rho \Gamma h}{1 - \delta \rho} + \frac{c \rho^2}{2(1 + \delta \rho) T^{1/2}} \right) \frac{du}{dz} + \frac{2q}{R} + \frac{\lambda \rho u^2 |u|}{4R}, \quad (19)$$

$$p = \frac{h \rho \Gamma}{1 - \delta \rho} - \frac{c \rho^2}{(1 + \delta \rho) T^{1/2}}, \quad (20)$$

$$\text{при } z = 0 : \quad \rho = \rho_{zo}, \quad T = T_{zo}, \quad (21)$$

где Q — постоянный массовый расход в начальный момент времени.

3. Варианты рельефа трасс. Влияние рельефа трассы рассматривалось на начальном участке газопровода, на котором плотность газовой смеси велика (более 150 кг/м^3) и роль силы тяжести

максимальна. Задавались два модельных варианта рельефа трассы. Оба варианта начинаются со спуска протяжённостью 20,004 км, для которого косинус угла между направлением силы тяжести и осью газопровода равен 0,01999. Далее в обоих вариантах трассы идёт 20 км горизонтального участка. После этого в первом варианте реализуется короткий, сравнительно резкий подъём с углом α_{I*} ($\cos \alpha_{I*} = -0,02007$) протяжённостью 10,002 километра и пологий длинный спуск под углом α_{I**} ($\cos \alpha_{I**} = 0,00333$) протяжённостью 60 километров. Во втором варианте при сохранении общей длины трассы в начале идёт пологий длинный подъём под углом α_{II*} ($\cos \alpha_{II*} = -0,003316$), а затем сравнительно резкий короткий спуск под углом α_{II**} ($\cos \alpha_{II**} = 0,019996$) градусов. Схематически рельеф этих трасс представлен на рис. 1. Вариант трассы, приводя-

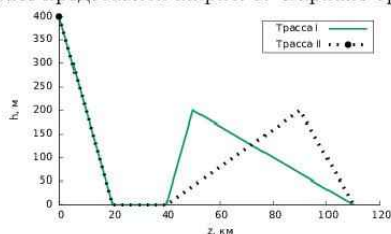


Рис. 1. Схема рельефа вариантов трасс

щий к меньшему падению давления, является гидравлически предпочтительным.

4. Результаты компьютерного моделирования. Все расчёты по приведённым моделям проводились при следующих параметрах задачи (значения параметров приведены в системе СИ):

$$Q = 570, \quad T^* = 278,15, \quad \lambda = 0,0083, \quad R = 0,5, \quad R_1 = 0,54,$$

$$R_2 = 0,66, \quad \delta_* = 0,020, \quad \lambda_1 = 24, \quad \lambda_2 = 1,7, \quad \lambda_3 = 0,56, \quad (22)$$

$$c_1 = 450, \quad c_2 = 924, \quad c_3 = 4200, \quad \rho_1 = 10000, \quad \rho_2 = 2300, \quad \rho_3 = 1025.$$

На входе в газопровод задавались постоянные давление $p_{z0} = 200$ атм. и температура $T_{z0} = 315,15$ К.

4.1. Влияние рельефа трассы на характеристики установившегося течения. Система уравнений модели установившегося

течения (17)–(21) решалась численно методом Рунге–Кутты четвёртого порядка точности при параметрах модели (22).

В таблице 1 представлены результаты расчёта падения давления и температуры для первого и второго вариантов трассы при $z_* = 110$ км. Здесь $\Delta p = p_{z_0} - p_{z_*}$, $\Delta T = T_{z_0} - T_{z_*}$ — падения давления и температуры соответственно.

Таблица 1. Падение давления и температуры для установившегося течения

вариант трассы	Δp (атм)	ΔT (К)
I	8,602	23,892
II	8,612	23,851

Расчёты показали, что первая трасса прокладки морского газопровода *гидравлически предпочтительнее* второй.

4.2. Влияние рельефа трассы на характеристики неустановившегося течения. Для численного решения системы уравнений нестационарной модели транспортировки смеси газа (1)–(6) использовалась двухстаговая явная схема Лакса–Вендроффа [5]. Численное решение системы уравнений модели теплообмена газа с окружающей средой (7)–(16) основывалось на явной монотонной схеме Самарского [6]. На рис. 2, 3 представлены изменения в течение первого часа температуры T и давления p газовой смеси при $z_* = 110$ км для обоих вариантов трассы при нестационарном режиме течения.

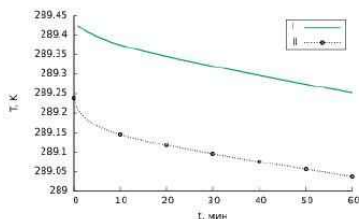


Рис. 2. Изменение температуры T газовой смеси при $z_* = 110$ км для рельефов первой и второй трассы

Проведённые расчёты показывают, что и для установившегося, и для неустановившегося режимов течения трасса прокладки морского газопровода, имеющая в начале резкий подъём (допустимый

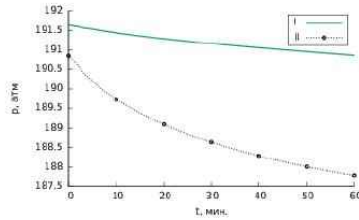


Рис. 3. Изменение давления p газовой смеси при $z_* = 110$ км для рельефов первой и второй трассы

по технологическим ограничениям) и затем длинный пологий спуск, *гидравлически предпочтительнее*, чем аналогичная по длине трасса, имеющая в начале длинный пологий подъём и затем резкий спуск.

Литература

1. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В. Модели морских газопроводов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2005. 156 с.
2. Зубов В. И., Котеров В. Н., Кривцов В. М., Шипилин А. В. Нестационарные газодинамические процессы в газопроводе на подводном переходе через Черное море // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 4. С. 58–70.
3. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Квазиодномерная нестационарная модель процессов в морских газопроводах // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. №. 3. С. 55–66.
4. Ермолаева Н. Н. Нестационарные модели теплообмена и транспортировки газа по морским газопроводам // Труды Карельского научного центра РАН. Серия: Математическое моделирование и информационные технологии. 2016. Вып. 8. С. 3–10.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1977. 606 с.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.

УДК 537,51-73

Ефимов М. Р., Виноградова Е. М.

Математическое моделирование системы полевых катодов

1. Введение. Разность потенциалов, создаваемая между полевым катодом и анодом, служит источником электростатического поля в системе, достаточно сильного для возникновения полевой электронной эмиссии, если придать катоду форму тонкого острия с радиусом кривизны на вершине в доли микрона [1]. Однако значения тока, получаемого с отдельного полевого острия, малы. Поэтому для того, чтобы получить большие значения тока, требуются катоды, представляющие собой многоострийные системы [2].

Целью данной работы является построение математической модели многоэмиттерного полевого катода в виде периодической системы острий и нахождение распределения электрического потенциала во всей области рассматриваемой системы. Для решения задачи используется метод разделения переменных в декартовой системе координат (x, y, z) , с помощью которого исходная граничная задача сводится к нахождению неизвестных коэффициентов в разложении потенциала по собственным функциям [3, 4].

2. Физическая постановка задачи. В силу периодичности системы по переменным x и y выделим одну ячейку ($x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$). На рис. 1 представлено схематическое изображение ячейки диодной системы с одиночным полевым острием.

Для решения задачи заменим влияние полевого острия на распределение электростатического потенциала влиянием системы N точечных зарядов q_m , расположенных на оси z с координатами z_m , $m = \overline{1, N}$, так, чтобы нулевая эквипотенциаль представляла собой поверхность острия [3].

Таким образом рассматривается многоэмиттерная система: периодическая система катодов, каждый из которых расположен в центре

Ефимов Максим Русланович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ef-maxim@yandex.ru, тел.: +7(962)722-07-88

Виноградова Екатерина Михайловна – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

прямоугольной ячейки на плоской подложке $z = 0$ и представляет собой острие, анод — плоскость, параллельную плоскости подложки $z = z_{N+1}$. Потенциал катода и подложки равен нулю, потенциал анода — U_0 .

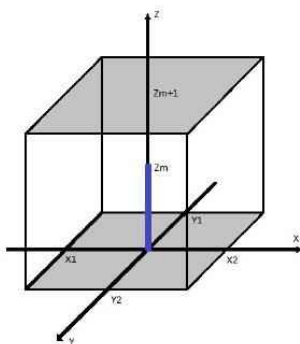


Рис. 1. Схематическое изображение ячейки диодной системы

3. Математическая постановка задачи. Для нахождения функции распределения потенциала $U(x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению Пуассона и граничным условиям, ставится следующая граничная задача [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}; \\ \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = 0; \\ \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=y_1} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = 0; \\ U(x, y, 0) = 0; \quad U(x, y, z_{N+1}) = U_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

4. Решение задачи. Пусть $x_1 = -T_1/2$, $x_2 = T_1/2$, $y_1 = -T_2/2$, $y_2 = T_2/2$.

Параметры задачи: T_1 — период по оси x ; T_2 — период по оси y ; $z = 0$ — поверхность подложки; число точечных зарядов — N ; поверхность анода — $z = z_{N+1}$; величина m -го точечного заряда — q_m ; координата m -го точечного заряда по оси z — z_m , $m = \overline{1, N}$.

Распределение потенциала как решение граничной задачи (1) можно представить в виде [2]

$$U(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^M v_{k,n,m}(z) \times \cos\left(\frac{\pi n(x-x_1)}{T_1}\right) \cos\left(\frac{\pi k(y-y_1)}{T_2}\right), \quad (2)$$

$$v_{k,n,m} = \begin{cases} \frac{\alpha q_m \cos(\pi n/2) \cos(\pi k/2)}{\varepsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \times \\ \times \frac{\sinh(\gamma_{k,n}(z_{m+1} - z_m)) \sinh(\gamma_{k,n}z)}{\sinh(\gamma_{k,n}z_{m+1})}, & z \leq z_m; \\ \frac{\alpha q_m \cos(\pi n/2) \cos(\pi k/2)}{\varepsilon_0 T_1 T_2 \gamma_{k,n}} \times \\ \times \frac{\sinh(\gamma_{k,n}(z_{m+1} - z)) \sinh(\gamma_{k,n}z_m)}{\sinh(\gamma_{k,n}z_{m+1})}, & z > z_m; \end{cases} \quad (3)$$

$$\gamma_{k,n}^2 = \left(\frac{\pi n}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{y_2 - y_1}\right)^2; \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & k = 0, n = 0; \\ 2, & k = 0, n > 0 \vee n = 0, k > 0; \\ 4, & k > 0, n > 0. \end{cases} \quad (5)$$

В силу того, что задача не является осесимметричной, значения радиуса кривизны $R(z)$ эквипотенциальных поверхностей на оси z зависит от плоскости сечения $x = \operatorname{tg} \alpha y$ или $y = \operatorname{ctg} \alpha x$, которая является плоскостью симметрии при любых значениях угла α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$). В соответствии с полученным аналитическим решением (2)–(5) при $z_N < z < z_{N+1}$, радиус кривизны при $x = 0$ определяется формулой

$$R(z) = \left| \frac{\partial U}{\partial z} / \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|.$$

5. Результаты численных расчетов. Для численного расчета распределения потенциала все величины параметров рассматриваемой системы приведены в безразмерных величинах.

Величины параметров задачи: $T_1 = 4$; $T_2 = 4$; $z_N = 0,5$; $z_{N+1} = 1$; $N = 10$; $z_m = z_{m-1} + z_N/N$; $q_m = -100$, $m = 1, \bar{N}$.

На рис. 2 представлено трехмерное изображение поверхности полевого острья, определяемой нулевой эквипотенциалей.

На рис. 3 представлена картина распределения эквипотенциалей в плоскости $x = y$.

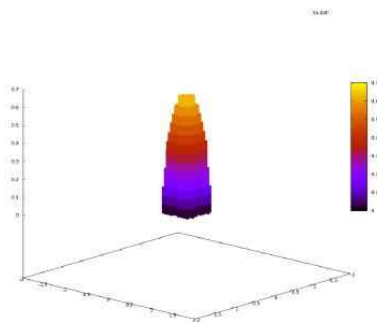


Рис. 2. Трехмерное изображение поверхности полевого острья

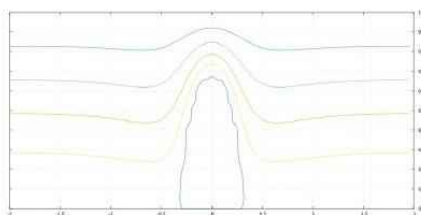


Рис. 3. Картина распределения эквипотенциалей в плоскости $x = y$

6. Заключение. Построена математическая модель многоэмиттерной периодической системы с полевыми острями. Распределение потенциала в одной ячейке периодической системы найдено в аналитическом виде (2)–(5) во всей области данной ячейки, а следовательно, во всей области многоострийной системы, в которой влияние каждого отдельного полевого острья на распределение электростатического потенциала заменяется влиянием системы точечных зарядов. Представлены графики распределения потенциала для конкретных значений параметров системы.

Литература

1. Chen J., Yang B., Liu X., et al. Field electron emission from pencil-drawn cold cathodes // *Applied physics letters*. 2016. Vol. 108(19). 193112. P. 1–5.
2. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyy D. S. Mathematical modeling of field emitter array // *Vacuum*. 2016. Vol. 127. P. 45–50.
3. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Климаков А. А. Математическое моделирование диодной системы с полевым острием цилиндрической формы // *Журнал технической физики*. 2015. Т. 85. Вып. 2. С. 20–23.
4. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Телевный Д. С. Расчет триодной полевой эмиссионной системы с модулятором // *Журнал технической физики*. 2014. Т. 84. Вып. 2. С. 139–144.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.

Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединёнными элементами

1. Введение. В настоящее время в промышленном производстве широко применяются технические устройства в виде роботов, предназначенных для выполнения самых разнообразных задач [1, 2]. Для объектов управления с упруго присоединёнными элементами указан способ синтеза управления, стабилизирующего программное движение объекта управления в ситуации, когда описывающие поведение упруго присоединённых элементов фазовые переменные не измеряются.

2. Постановка задачи. Для простоты будем считать, что поведение объекта управления с упруго присоединёнными элементами описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (1)$$

Здесь t — время, $q = (q_1, q_2)^T$ — вектор обобщённых координат, \dot{q} — вектор обобщённых скоростей, причём q_1 и q_2 описывают, соответственно, поведение объекта управления и упруго присоединённых элементов, T — кинетическая энергия системы, $T = T_0 + T_1 + T_2$, $T_0 = T_0(t, q)$ — скалярная функция, $T_1 = f^T \dot{q}$, $f = f(t, q)$ — векторная функция, $T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T \Theta \dot{q}$, $\Theta = \Theta(t, q)$ — матричная функция, $Q = (Q_1, Q_2)^T$ — вектор обобщённых сил, $Q_1 = u + w_1$, $Q_2 = v + w_2$, $v = -K_1 q_2 - K_2 \dot{q}_2$, K_i заданные постоянные диагональные матрицы с элементами k_{i1}, \dots, k_{in_2} , $k_{ij} > 0$, n_2 — размерность вектора

Ефимова Полина Александровна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: uefimovara@gmail.com, тел.: +7(999)632-61-34

Алферов Геннадий Викторович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alferovgy@gmail.com, тел.: +7(911)246-57-87

Иванов Геннадий Григорьевич — научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: guennadi.ivanov@gmail.com, тел.: +7(921)568-12-89

q_2 , $w_i = W_i(t, q, \dot{q})$ — заданные вектор-функции. Считаем, что T_0 , f , w_i и Θ удовлетворяют всем необходимым требованиям гладкости, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, n_2$, а u — подлежащий выбору вектор управляющих воздействий. При этом предполагается, что величины q_1 и \dot{q}_1 измеряются, а величины q_2 и \dot{q}_2 не измеряются.

Требуется построить такое управление u , чтобы решения замкнутой этим управлением системы (1), начинающиеся в достаточно малой окрестности плоскости $q = 0, \dot{q} = 0$, удовлетворяли соотношениям $q_1(t) \rightarrow 0, \dot{q}_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Стабилизация программного движения. Учитывая структуру системы (1), её линейное приближение можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{11}x + A_{12}y + B_{11}(u + w_1^0) + B_{12}w_2^0, \\ \frac{dy}{dt} &= A_{21}x + A_{22}y + B_{21}(u + w_1^0) + B_{22}w_2^0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \\ A_{ii} &= A_i + B_i L_{ii}, \quad A_{ij} = B_i L_{ij}, \quad i \neq j, \quad B_{ij} = B_i \hat{\Theta}_{ij}, \\ A_i &= \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n_i \times n_i} & E_{n_i} \\ \mathbb{O}_{n_i \times n_i} & \mathbb{O}_{n_i \times n_i} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n_i \times n_i} \\ E_{n_i} \end{pmatrix}, \\ \hat{\Theta} &= \Theta^{-1}(t, 0) = \begin{pmatrix} \hat{\Theta}_{11} & \hat{\Theta}_{12} \\ \hat{\Theta}_{21} & \hat{\Theta}_{22} \end{pmatrix}, \quad w_i^0 = w_i(t, 0, 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где $L_{ij} = L_{ij}(t)$ — матрица размерности $(n_i \times (n_i + n_j))$, $\hat{\Theta}_{ij} = \hat{\Theta}_{ij}(t)$ — матрица размерности $(n_i \times n_j)$, E_{n_i} и $\mathbb{O}_{n_i \times n_j}$ — единичная и нулевая матрицы размерности соответственно $(n_i \times n_i)$ и $(n_i \times n_j)$, $i, j = 1, 2$.

Будем считать, что система (2) равномерно полностью наблюдаема по вектору x . Это означает, что система

$$\frac{dz}{dt} = A_{22}^T z + A_{12}^T \hat{u},$$

где \hat{u} — управление, будет равномерно полностью управляемой. Тогда, используя методику, изложенную в [3, 4], построим такое управление $\hat{u} = H^T z$, для которого система $\frac{dz}{dt} = C_{22}^T z$, а тогда и система

$$\frac{d\zeta}{dt} = C_{22}\zeta, \quad C_{22} = A_{22} + HA_{12}, \quad (4)$$

будет экспоненциально устойчивой, т. е. её решения будут удовлетворять оценкам

$$a_1\|\zeta(t_0)\|e^{-b_1(t-t_0)} \leq \|\zeta(t)\| \leq a_2\|\zeta(t_0)\|e^{-b_2(t-t_0)},$$

где $a_i, b_i, i = 1, 2$ — некоторые положительные числа.

Итак, пусть система (4) экспоненциально устойчива. В системе (2) сделаем замену переменных, положив

$$x = \xi, \quad y = \psi - H\xi, \quad (5)$$

где H — матрица та же, что и в соотношении (4). Тогда система (2) перейдёт в систему

$$\frac{d\xi}{dt} = C_{11}\xi + C_{12}\psi + D_{11}(u + w_1^0) + D_{22}w_2^0, \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = C_{21}\xi + C_{22}\psi + D_{21}(u + w_1^0) + D_{22}w_2^0. \quad (7)$$

В (6) и (7) $C_{11} = A_{11} - A_{12}H, C_{12} = A_{12}, C_{22} = A_{22} + HA_{12}, C_{21} = A_{21} + HA_{11} - C_{22}H + \frac{dH}{dt}, D_{1j} = B_{1j}, D_{2j} = B_{2j} + HB_{1j}, j = 1, 2.$

Введём вспомогательную систему

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = C_{21}\xi + c_{22}\tilde{\psi} + D_{21}(u + w_1^0) + D_{22}w_2^0. \quad (8)$$

Положим

$$\zeta = \psi - \tilde{\psi}. \quad (9)$$

Тогда получаем, что ζ удовлетворяет соотношениям (4), т. е. система (8) является системой асимптотической оценки для вектора ψ .

Теорема. Пусть $(n_1 \times 2n_1)$ -матрица M и $(2n_2 \times 2n_1)$ -матрица H таковы, что системы

$$\frac{d\xi}{dt} = [A_{11} + B_{11}\widehat{\Theta}_{11}^{-1}(M + L_{11})]\xi = (A_1 + B_1M)\xi,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = C_{22}\zeta$$

экспоненциально устойчивы. Тогда управление

$$u = u_s + u_k, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} u_s &= \widehat{\Theta}_{11}^{-1}(M - L_{11})x - w_1^0, \\ u_k &= \widehat{\Theta}_{11}^{-1}(HL_{12}x - L_{12}\widetilde{\psi} - \widehat{\Theta}_{12}w^0 - 2), \end{aligned}$$

а $\widetilde{\psi}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\widetilde{\psi}}{dt} = C_{21}x + C_{22}\widetilde{\psi} + D_{21}(u + w_1^0) + D_{22}w_2^0, \quad (11)$$

стабилизирует программное движение $x = 0$ объекта управления.

Доказательство. Так как система (2) равномерно полностью наблюдаема по вектору x , то, как уже отмечалось, существует матрица H с нужными свойствами. Из структуры соотношений (2), (3), (5), (6) следует, что система

$$\frac{d\xi}{dt} = C_{11}\xi + D_{11}\widehat{u},$$

где \widehat{u} — управление, равномерно полностью управляема и, следовательно, матрица M с нужными свойствами также существует [1].

Итак, пусть условия теоремы выполнены. Замкнём систему (6)–(8) управлением (10). Тогда с учётом соотношений (5) соотношения (6)–(9) можно переписать так:

$$\frac{d\xi}{dt} = (A_1 + B_1M)\xi + C_{12}\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = C_{22}\zeta, \quad (12)$$

$$\frac{d\widetilde{\psi}}{dt} = C_{21}\xi + C_{22}\widetilde{\psi} + D_{21}(u_s + u_k + w_1^0) + D_{22}w_2^0, \quad (13)$$

$$\psi = \widetilde{\psi} + \zeta. \quad (14)$$

Из структуры системы (12) и условий теоремы следует, что система (12)–(14) экспоненциально устойчива. Следовательно, управление (10), построенное с помощью измеряемого вектора x и вспомогательно вектора $\widetilde{\psi}$, являющегося решением системы (11), стабилизирует программное движение $x = 0$ объекта управления.

Теорема доказана.

Замечание 1. Координаты системы (10) зависят от матричных параметров M и H , которые во многом являются свободными. Тогда за счёт выбора матриц m и H можно решать дополнительные задачи, например, по обеспечению нужного характера переходных процессов.

Замечание 2. Предположение, что система (2) равномерно полностью наблюдаема по вектору x , является излишним и сделано лишь для простоты изложения. Для решения поставленной задачи достаточно потребовать, чтобы систему (2) можно было разбить на равномерно полностью наблюдаемую и не наблюдаемую по x подсистему.

Замечание 3. Пусть движение объекта управления с упруго присоединёнными элементами описывается не уравнениями Лагранжа второго рода (1), а другими уравнениями. Тогда компоненты системы линейного приближения не будут определяться по соотношениям (3). Тем не менее, если компоненты C_{12} , D_{11} , D_{12} соотношения (6) удовлетворяют условиям $C_{12} = D_{11}P_{12}$, $D_{12} = D_{11}R_{12}$, где P_{12} и R_{12} — некоторые матрицы, то поставленная задача разрешима в тех же предположениях и схема её решения полностью сохраняется.

4. Заключение. Сформулированы необходимые и достаточные условия для синтеза управления, которое стабилизирует программное движение $x = 0$ объекта управления.

Литература

1. Алферов Г. В. Генерация стратегии робота в условиях неполной информации о среде // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. 2003. № 35. С. 4–23.
2. Ефимова П. А., Кулаков Ф. М., Алферов Г. В., Шиманчук Д. В., Шарлай А. С. Управление многосвязными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления Материалы III международной конференции. 2015. С. 121–122.
3. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 198 с.
4. Смирнов Е. Я. Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. 306 с.

УДК 532.529.2

Кобышева Н. В.

Свободноконвективное течение вязкой жидкости

Рекомендовано к публикации профессором Павловским В. А.

1. Введение. В неравномерно нагретой жидкости в поле сил тяжести при определенных условиях возможно механическое равновесие. Если неоднородность температуры достаточно велика, то равновесие становится неустойчивым и сменяется конвективным движением [1, 2]. Естественная (свободная) конвекция представляет собой свободное движение, происходящее вследствие разности плотностей нагретых и холодных частиц жидкости, находящихся в поле сил тяжести.

В настоящей работе выводится система уравнений для описания свободноконвективного течения вязкой жидкости, а также ее стационарного течения вблизи пограничного слоя.

2. Система уравнений для описания свободной конвекции жидкости. Система уравнений для описания движения жидкости в поле сил тяжести с учетом ее постоянного подогрева включает в себя уравнение непрерывности, уравнение Навье–Стокса и общее уравнение переноса тепла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho g_i, \quad (1) \\ \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u_j \frac{\partial S}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где ρ — плотность жидкости, t — время, u_i — компоненты вектора скорости потока, x_i — координата, p — давление, μ — динамическая вязкость, g_i — компоненты ускорения сил тяжести, T — температура, S — энтропия, λ — коэффициент теплопроводности. В уравнении

Кобышева Наталья Владимировна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st011346@student.spbu.ru, тел.: +7(906)348-14-72

переноса тепла не учитывается диссипация энергии, так как она не оказывает особого влияния на течение [1, 3]. Уравнение состояния среды в соответствии с приближением Буссинеска принимается в виде

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T'), \quad (2)$$

где β — коэффициент объемного теплового расширения, $T' = T - \bar{T}$, а \bar{T} — некоторое среднее значение температуры, определяющее ρ_0 .

Ввиду того, что отклонения плотности от среднего значения предполагаются незначительными, уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

В уравнении движения (1) представим давление $p = P + p'$, где P — гидростатическое давление, определяемое как

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho_0 g_i.$$

Тогда уравнение движения (1) принимает вид

$$\rho_0(1 - \beta T') \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) + \rho_0 \beta T' g_i. \quad (4)$$

В дальнейшем, ввиду того, что вертикальное ускорение $\frac{\partial u_i}{\partial t} < g$, последним слагаемым в левой части (4) можно пренебречь.

В уравнении переноса тепла энтропия представляется в виде разложения по степеням малых отклонений T' и p' :

$$S = S_0 + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p T' + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T p'.$$

Влияние давления в изменении энтропии предполагается незначи-

тельными [1]. С учетом термодинамического соотношения

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T},$$

где c_p — удельная изобарная теплоемкость, уравнение переноса тепла принимает вид

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} \right). \quad (5)$$

В итоге, система уравнений (1) для описания свободной конвекции вязкой жидкости, с учетом уравнения среды в виде приближения Буссинеска (2), а также поправки (3)–(5), имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho_0 c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right) &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right), \\ \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho_0 \beta T' g, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Течение предполагается плоским, а λ и μ — постоянными.

3. Система уравнений для описания конвекции в пограничном слое. Уравнения, описывающие стационарную естественную конвекцию, отличаются от уравнений естественной конвекции в пограничном слое. Приближения пограничного слоя получаются из системы уравнений (6) путем пренебрежения малыми, по отношению к остальным, членами. Для сравнения порядков величин следует привести систему (6) к безразмерному виду. За масштаб длины принимается высота L , за масштаб скорости — $U_c = \sqrt{Lg\beta(T_w - T_\infty)}$, где T_w и T_∞ — температура на стенке и в среде соответственно, за масштаб давления — $\rho_0 U_c^2$, за масштаб температуры — Θ .

После подстановки масштабов в систему (6) получаем систему уравнений с безразмерными величинами [4, 5]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \left(u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) &= \frac{1}{PrRe} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \Theta, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\quad (7)$$

где $Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{\sqrt{L^3 g \beta (T_w - T_\infty)}}{\nu}$, $Pr = \frac{\nu}{a}$, ν — кинематическая вязкость, a — коэффициент температуропроводности.

После оценки порядка малости величин некоторыми слагаемыми из уравнений системы (7) можно пренебречь [6]. В итоге, стационарная свободная конвекция в приближении пограничного слоя описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= \frac{1}{PrRe} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Theta.\end{aligned}\quad (8)$$

В размерном виде система (8) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta \Theta.\end{aligned}$$

Граничные условия для соответствующей краевой задачи выглядят следующим образом:

$$y = 0 : \quad u = 0, \quad \nu = 0, \quad \Theta = 0,$$

$$y = \infty : \quad u = 0, \quad \Theta = 0.$$

4. Заключение. На основе известных законов гидродинамики получена система уравнений, описывающая явление свободной конвекции вязкой жидкости для плоского случая, а также выведена система уравнений, описывающая стационарное конвективное движение пограничного слоя.

Литература

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Станкова Е. Н., Петров Д. А. Комплексная информационная система, предназначенная для формирования входных данных моделей конвективных облаков // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. №3. С. 83–95.
3. Теория пограничного слоя / Шлихтинг Г.,; под ред. Л. Г. Лойцянского. М.: Наука, 1974. 712 с.
4. Михеев С. А., Кривовичев Г. В. Модифицированные трехслойные разностные схемы для решения системы кинетических уравнений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 223–228.
5. Щеглова Н. В., Кривовичев Г. В. Анализ подходов к учету действия объемных сил в разностных схемах для решения систем кинетических уравнений // Процессы управления и устойчивость. Т. 3. № 1. 2016. С. 306–311.
6. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.; под ред. О. Г. Мартыненко. М.: Мир, 1991. 678 с.

УДК 519.622.2

Коврижных Н. А., Винничек Н. Н.

Исследование устойчивости структурных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рекомендовано к публикации доцентом Ереминым А. С.

1. Методы интегрирования систем со структурными особенностями. *Структурными методами* называют методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ), использующих их структурные особенности. Алгоритм работы и исследование структурных явных методов типа Рунге–Кутты (РК) приведены в [1]. Эффективность этих методов относительно их вычислительных затрат и точности неоднократно продемонстрирована на численных примерах [2, 3]. Например, методы класса $\mathfrak{A}(2)$ предназначены для интегрирования систем с перекрёстной системой связей

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1), \end{cases}$$

и, как правило, позволяют сократить количество вычислений правой части на шаге.

2. Области устойчивости методов класса $\mathfrak{A}(2)$. Исследование устойчивости методов интегрирования СОДУ производят на тестовой системе Далквиста $y' = \lambda y$, представляя приближённое решение в виде $\tilde{y} = R(h\lambda)y$, где h – шаг интегрирования, R – некоторая функция [4]. Требование, предъявляемое к методу, заключается в том, чтобы при $\operatorname{Re} z < 0$ (т. е. когда решение $y = 0$ является устойчивым и притягивающим) отображение R являлось сжимающим. Область на комплексной плоскости, в которой $|R(z)| \leq 1$, называется *областью устойчивости* этого метода.

Коврижных Николай Александрович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: sagoewatha@mail.ru, тел.: +7(950)014-92-94

Винничек Никита Николаевич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vinnichek.nikita@gmail.com, тел.: +7(981)862-40-18

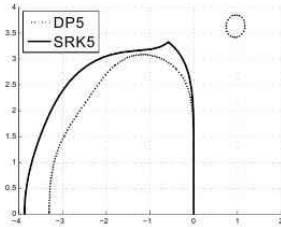


Рис. 1. Области устойчивости методов пятого порядка

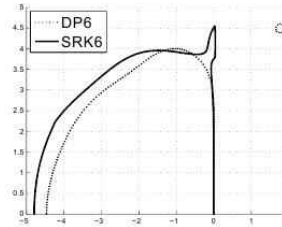


Рис. 2. Области устойчивости методов шестого порядка

В работе [5] предложен способ исследования методов класса $\mathfrak{A}(2)$ на перекрестных линейных однородных СОДУ вида

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_2, \\ y_2' = \lambda_2 y_1, \end{cases} \quad (1)$$

а также проведено сравнение областей устойчивости классических явных РК и методов класса $\mathfrak{A}(2)$ до четвёртого порядка.

Аналогичные результаты для методов пятого и шестого порядков (SRK5 [1], SRK6 [6]) показаны на рис. 1, 2. На них изображены границы областей устойчивости на комплексной плоскости z . Для сравнения представлены области устойчивости явных РК типа Дорманда – Принса тех же порядков (DP5, DP6 [7]). Можно видеть, что области устойчивости структурных методов как правило шире по сравнению с классическими, что подтверждает результаты из [5].

3. Области устойчивости для методов класса \mathfrak{C} . Исследование устойчивости структурных методов, не имеющих общей группы (методов \mathfrak{A} и \mathfrak{B}), носит лишь частный характер, поскольку в соответствующих задачах проблема устойчивости не стоит. Об этом говорит следующая

Лемма. *Общие решения линейных однородных СОДУ, интегрируемых методами \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , не бывают устойчивыми и притягивающими.*

Доказательство. Пусть A – матрица СОДУ. Поскольку для таких систем y_i' не зависит от y_i , диагональ матрицы A состоит из нулей. Отсюда следует $\text{tr}(A) = 0$ и, поскольку след любой матрицы равен сумме её собственных чисел, то $\sum \lambda_i = 0$. Поэтому либо

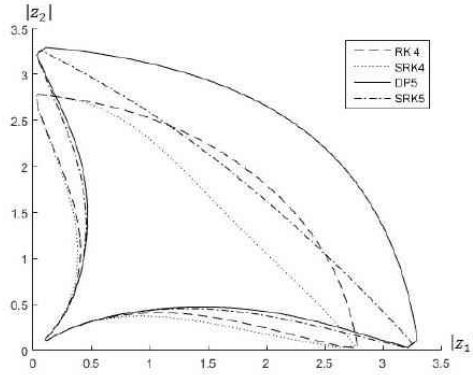


Рис. 3. Области устойчивости для $\arg z_1 = \arg z_2 = \pi$

существует собственное число λ_k такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, либо все собственные числа являются чисто мнимыми.

В силу сказанного интерес представляет рассмотрение устойчивости структурных методов, содержащих общую группу уравнений. Для получения простейшей системы такого вида в (1) следует добавить линейную зависимость y'_1 от y_1 . Подобные системы заменой переменных могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} y'_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)y_1 + \lambda_1 y_2, \\ y'_2 = -\lambda_2 y_1, \end{cases} \quad (2)$$

причём λ_1 и λ_2 в (2) будут являться собственными числами. В этом случае $\tilde{y} = R(h\lambda_1, h\lambda_2)y$, где $R - (2 \times 2)$ -матрица. Областью устойчивости назовём множество, в котором $R(h\lambda_1, h\lambda_2) = R(z_1, z_2)$ является сжимающим оператором.

Для сравнения выберем методы четвёртого и пятого порядков [2]. На рис. 3 показаны границы области устойчивости для действительных отрицательных z_1 и z_2 . На рис. 4 представлены области для z_1 и z_2 , лежащих в конусе $\frac{9}{10}\pi \leq \arg z_{1,2} \leq \frac{11}{10}\pi$. Как видно, с отклонением z_1 и z_2 от действительной оси области устойчивости структурных методов заметно уменьшаются.

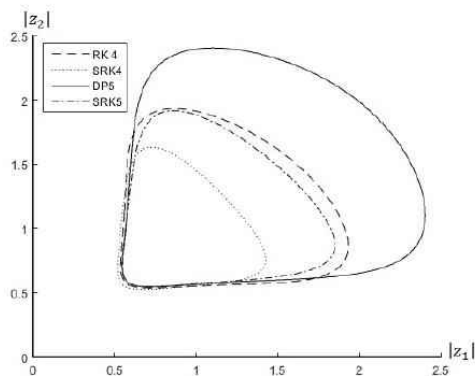


Рис. 4. Области устойчивости для $\frac{9}{10}\pi \leq \arg z_{1,2} \leq \frac{11}{10}\pi$

4. Заключение. Основываясь на приведённых результатах, рано говорить о худшей устойчивости структурных методов класса \mathcal{C} в сравнении с классическими. Полученные данные дают основания полагать, что могут существовать способы более досконально разобраться в природе этих методов и найти такие, которые будут не только более экономичными, чем классические явные методы РК, но и более устойчивыми.

Литература

1. Олемской И. В. Методы интегрирования систем структурно разделённых дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 180 с.
2. Олемской И. В. Вложенные методы пятого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. № 2. С. 82–93.

3. Коврижных Н. А. Вложенный шестиэтапный метод шестого порядка точности интегрирования систем структурно разделённых дифференциальных уравнений // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 183–187.
4. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Т. 2: Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи / пер. с англ. Е. Л. Старостина, И. А. Кульчицкой, А. В. Тыглияна и С. С. Филиппова под ред. С. С. Филиппова. М.: Мир, 1999. 685 с.
5. Целищев С. О., Еремин А. С. Об устойчивости структурного метода решения систем ОДУ // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 207–212.
6. Olemskoy I. V., Eremin A. S., Kovrizhnykh N. A. Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations // Appl. Math. Sci. 2017. Vol. 11, No 1. P. 31–38.
7. Calvo M., Montijano J. I., Randez L. A new embedded pair of Runge–Kutta formulas of orders 5 and 6 // Comp. Math. Applic. 1990. Vol. 20, No 1. P. 15–24.

УДК 517.977.1

Козлов А. А., Красун С. В.

Движение космического манипуляционного робота в среде с препятствиями

Рекомендовано к публикации доцентом Шиманчуком Д. В.

Введение. В данной работе рассмотрен подход к построению траекторий движения манипуляционного робота в среде с препятствиями на основе алгоритма RRT (Rapidly exploring random trees). При применении ряда эвристик к данному алгоритму появляется возможность значительно увеличить скорость работы программы и найти решение близкое к оптимальному в зависимости от начальных данных задачи. RRT алгоритм был впервые предложен Д. Каффнером и С. Лавеем в 1998 г. [1]. В настоящее время алгоритм активно используется в ряде программных решений для мобильных роботов благодаря тому, что применим в среде как со статическими, так и динамическими препятствиями, что является актуальным в современных задачах робототехники и мехатроники.

Механическая модель. Рассматриваемая модель является телом с присоединенным к нему манипулятором, который представляет систему шарнирно связанных между собой звеньев длиной r_1 (плечо) и r_2 (локоть) [2]. Предполагается, что массы звеньев пренебрежительно малы (см. рис. 1).

Рассмотрим следующие системы координат: OXY — абсолютная система координат, связанная с космической станцией, $oX'Y'$ — подвижная система координат с центром в центре масс несущего тела и осями, параллельными осям абсолютной системы координат, ox_0y_0 — система координат, жестко связанная с несущим телом. Изменяемыми координатами являются: положение полюса $o(X, Y)$, определяемое координатами точки (X_o, Y_o) , угловое отклонение θ в осях базовой системы координат, углы α_1, α_2 , которые определяют положение звеньев манипулятора.

Козлов Андрей Андреевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: aakozlovmsu@gmail.com, тел.: +7(967)973-03-77

Красун Сергей Владимирович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: taksebezoloto@gmail.com, тел.: +7(999)527-08-61

Управляющими моментами являются: момент M_θ , силы F_x, F_y , которые приложены к полюсу o вдоль осей связанной системы координат x_0, y_0 .

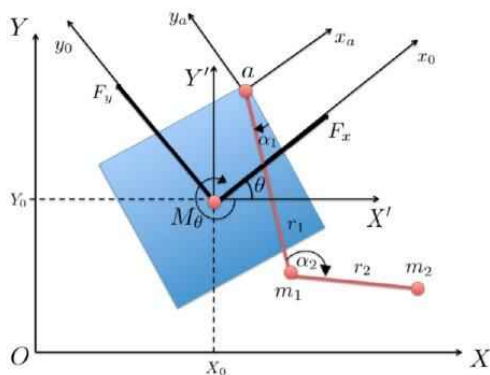


Рис. 1. Механическая модель.

Уравнения движения космического манипуляционного робота. Данная модель представляет собой свободную механическую систему, подчиняющуюся внутренним голономным неосвобождающим стационарным связям. Положим, что отсутствуют силы сопротивления среды, а невесомость позволяет не учитывать силы тяжести [3, 4]. У данной системы пять степеней свободы положения. Для получения уравнений движения используем уравнения Лагранжа второго рода в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = F_j(t), \quad j = \overline{1, n},$$

где q — пятимерный вектор обобщенных координат, T — кинетическая энергия абсолютного движения системы, $F_j(t)$ — управляющие обобщенные силы. Используя теорему Кёнига, получаем функцию

кинетической энергии абсолютного движения системы в виде

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} m_{\Sigma} (\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(x_i^0 - y_i^0 \dot{\theta})^2 + \\
 & + (\dot{y}_i^0 + x_i^0 \dot{\theta})^2] + (\dot{X}_0 \cos \theta + \dot{Y}_0 \sin \theta) \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{x}_i^0 - y_i^0 \dot{\theta}) + \\
 & + (\dot{Y}_0 \cos \theta + \dot{X}_0 \sin \theta) \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{y}_i^0 - x_i^0 \dot{\theta}).
 \end{aligned}$$

После подстановки функции кинетической энергии в уравнения Лагранжа получаем уравнения движения рассматриваемой механической системы:

$$\begin{aligned}
 M \ddot{X}_0 - \ddot{\theta} \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \sin \theta + y_i^0 \cos \theta) + \sum_{i=1}^2 m_i (\ddot{x}_i^0 \cos \theta + \ddot{y}_i^0 \sin \theta) = \\
 = F_x \cos \theta - F_y \sin \theta + Q_X^{cor} + Q_X^{cf},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M \ddot{Y}_0 - \ddot{\theta} \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \cos \theta + y_i^0 \sin \theta) + \sum_{i=1}^2 m_i (\ddot{x}_i^0 \sin \theta + \ddot{y}_i^0 \cos \theta) = \\
 = F_y \cos \theta - F_x \sin \theta + Q_Y^{cor} + Q_Y^{cf},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\ddot{X}_0 \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \sin \theta + y_i^0 \cos \theta) + \ddot{Y}_0 \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \cos \theta - y_i^0 \sin \theta) + \\
 + \ddot{\theta} \left[I_0 + \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0{}^2 + y_i^0{}^2) \right] + \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \ddot{y}_i^0 - y_i^0 \ddot{x}_i^0) = M_{\theta} + Q_{\theta}^{cor},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{X}_0 \sum_{i=1}^2 m_i \left(\frac{\partial x_i^0}{\partial q_j} \cos \theta - \frac{\partial y_i^0}{\partial q_j} \sin \theta \right) + \ddot{Y}_0 \sum_{i=1}^2 m_i \left(\frac{\partial x_i^0}{\partial q_j} \sin \theta + \frac{\partial y_i^0}{\partial q_j} \cos \theta \right) + \\
& + \ddot{\theta}_0 \sum_{i=1}^2 m_i \left(x_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial q_j} - y_i^0 \frac{\partial y_i^0}{\partial q_j} \right) + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\dot{x}_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial q_j} + \dot{y}_i^0 \frac{\partial y_i^0}{\partial q_j} \right) = \\
& = Q_j^+ F_j^r(t) + Q_{jr}^{Cor} + Q_{jr}^{cf}.
\end{aligned}$$

где обобщенные кориолисовы (cor) и центробежные (cf) силы даны формулами

$$Q_X^{cor} = 2\dot{\theta} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{x}_i^0 \sin \theta + \dot{y}_i^0 \cos \theta),$$

$$Q_X^{cf} = \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \cos \theta - y_i^0 \sin \theta),$$

$$Q_Y^{cor} = 2\dot{\theta} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{y}_i^0 \sin \theta - \dot{x}_i^0 \cos \theta),$$

$$Q_Y^{cf} = \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \sin \theta + y_i^0 \cos \theta),$$

$$Q_{\theta}^{cor} = -2\dot{\theta} \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \dot{x}_i^0 - y_i^0 \dot{y}_i^0),$$

$$Q_{jr}^{cf} = -\dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial q_j} + y_i^0 \frac{\partial y_i^0}{\partial q_j}),$$

$$Q_{jr}^{cor} = -2\dot{\theta} \sum_{i=1}^2 m_i (x_i^0 \frac{\partial y_i^0}{\partial q_j} - y_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial q_j}).$$

Связь декартовых координат с обобщенным дается соотношениями

$$\begin{aligned}
x_1^0 &= x_a - r_1 \sin \alpha_1, & y_1^0 &= y_a - r_1 \cos \alpha_1, \\
x_2^0 &= x_1^0 + r_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2), & y_2^0 &= y_1^0 + r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).
\end{aligned}$$

После получения уравнений движения перейдем к решению задачи планирования траектории, которая обеспечивает обход препятствий. Для этого будем использовать алгоритм быстро исследующего случайного дерева — RRT [1].

Применение RRT алгоритма в задаче поиска пути. Идея данного алгоритма заключается в применении генератора случайных чисел (ГСЧ) для получения траектории движения. Из начального положения строится быстро исследующее случайное дерево, которое представляет собой граф, вершины которого хранят абсциссу и ординату точки на плоскости. Ребра данного графа суть отрезки фиксированной длины ε , соединяющие вершину «родителя» с вершиной «потомком». Данный граф строится из начального положения путем добавления вершин в дерево по следующему алгоритму:

```
G.init(q_start)
{
while q_current.distance(q_finish)>=accuracy
    q_rand = RAND_CONF()
    q_near = NEAREST_VERTEX(q_rand, G)
    q_new = NEW_CONF(q_near, q_rand, eps)
    G.add_vertex(q_new)
    G.add_edge(q_near, q_new)
return G
}
```

где $q_current$ — текущая точка в графе, q_rand — точка выбранная ГСЧ, $NEAREST_VERTEX(q_rand, G)$ — функция поиска ближайшей в дереве точки к заданной ГСЧ, $NEW_CONF(q_near, q_rand, eps)$ — функция получения точки, выбранной от ближайшей в графе в направлении точки, заданной ГСЧ на заданном расстоянии ε , $G.add_vertex(q_new)$ и $G.add_edge(q_near, q_new)$ — функции добавления вершины и ребра в граф соответственно.

Препятствия задаются в виде замкнутой ломаной и реализованы в программе так же в виде графа. Обход препятствий реализуется с помощью добавления проверки на возможность пройти по данному маршруту в $NEW_CONF(q_near, q_rand, eps)$. Суть такой проверки заключается в следующем: попадает ли новая вершина или ребро от вершины «родителя» до новой в область препятствия.

Заклучение. Отметим, что при дискретизации пространства сходимость алгоритма гарантирована возможностью выполнить полный перебор, если решение существует, т. е. можно построить путь из начального фазового состояния космического манипуляционного робота в его конечное положение. В противном случае, выполнение полного перебора автоматически показывает отсутствие решения для заданной сетки. Результатом работы данного алгоритма является кусочно-линейная траектория, которая может быть впоследствии аппроксимирована гладкими функциями (полиномиальная интерполяция, сплайн-функции). Наличие управляемых уравнений движения для рассматриваемой модели и полученной траектории движения позволяет перейти к задаче определения необходимых управляющих воздействий и дальнейшей их отработки системой управления робота.

Литература

1. LaValle S. M., Kuffner J. J. Randomized kinodynamic planning // The International Journal of Robotics Research. 2001. P. 378–400.
2. Глумов В. М., Земляков С. Д., Рутковский В. Ю., Суханов В. М. Оперативный компьютерный вывод и декомпозиция уравнений движения космического модуля // Автоматика и телемеханика, 2006. Вып. 1. С. 89–116.
3. Efimova P. A., Shymanchuk D. V. Dynamic model of space robot manipulator // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9. № 94. P. 4653–4659.
4. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. A., Chernakova S. A., Shymanchuk D. V. Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects // Stability and Control Processes in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015 International Conference. 2015. P. 102–105.

УДК 531.01

Лебедев Н. А.

О расстоянии между кеплеровыми орбитами небесных тел

Рекомендовано к публикации профессором Шмыровым А. С.

1. Введение. В небесной механике существует большое количество задач, в которых требуется определить расстояние между орбитами. Для решения этой проблемы используются различные методы, каждый из которых подходит для решения определенного класса задач, и их результаты могут значительно различаться, причем различия в полученных результатах расчета расстояний не обязательно свидетельствуют об ошибочности примененных методов.

В данной статье приводится сравнительный анализ результатов нахождения расстояний между орбитами для двух следующих задач:

1. Подтвердить или опровергнуть общее происхождение небесных тел;
2. Исследовать возможность столкновения двух тел.

Выявление родственных связей между небесными телами является одной из актуальных современных задач в небесной механике. Для большого массива малых тел по наблюдениям достаточно точно определены орбиты и поэтому их динамические свойства становятся основным инструментом в проблеме определения общего происхождения каких-либо объектов. Таким образом, определение возможного родства объектов первоначально основано на сравнении их орбит. Получение орбитального расстояния, удовлетворяющего потребностям наблюдаемой астрономии, представляет широкую задачу.

2. Установление общего происхождения двух тел. Для сравнения орбит существуют несколько общепризнанных и широко используемых формул. Для вычислений используются кеплеровы элементы сравниваемых орбит: e — эксцентриситет, i — наклонение

Лебедев Николай Александрович — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nickleb@yandex.ru, тел.: +7(911)357-01-29

орбиты, q — перигелийное расстояние (или фокальный параметр p), Ω — долгота восходящего узла и ω — аргумент перигелия.

Наборы орбитальных элементов, характеризующих два тела в пространстве, будут иметь соответствующий нижний индекс $(e_1, e_2, q_1, q_2, i_1, i_2, \Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2)$ или $(e_1, e_2, p_1, p_2, i_1, i_2, \Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2)$.

Предложено несколько способов нахождения орбитального расстояния, удовлетворяющего задаче, устанавливающего общее происхождение небесных тел.

Различные функции расстояния для двух сравниваемых орбит, определяемых величинами, имеющими физический смысл: вектором момента импульса и вектором Лапласа, задаются следующими формулами [1]:

$$\rho_1^2 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} (\cos I + e_1 e_2 \cos P), \quad (1)$$

$$\rho_2^2 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} A_2, \quad (2)$$

$$\rho_3 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} [e_1 e_2 + \cos(i_1 - i_2)], \quad (3)$$

где $\cos I = c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta$, $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\Delta = \omega_1 - \omega_2$,

$$\begin{aligned} \cos P = & s_1 s_2 \sin \omega_1 \sin \omega_2 + (\cos \omega_1 \cos \omega_2 + c_1 c_2 \sin \omega_1 \sin \omega_2) \cos \Delta + \\ & + (c_2 \cos \omega_1 \sin \omega_2 + c_1 \sin \omega_1 \cos \omega_2) \sin \Delta, \end{aligned}$$

$$A_1 = c_1 c_2 + e_1 e_2 s_1 s_2 \sin \omega_1 \sin \omega_2 + \sqrt{s_1^2 s_2^2 + A_2},$$

$$\begin{aligned} A_2 = & e_1^2 e_2^2 (1 - s_1^2 \sin^2 \omega_1) (1 - s_2^2 \sin^2 \omega_2) + \\ & + 2e_1 e_2 s_1 s_2 (\cos \omega_1 \cos \omega_2 + c_1 c_2 \sin \omega_1 \sin \omega_2). \end{aligned}$$

Считается, что тела могут иметь общее происхождение, если значения ρ_1, ρ_2, ρ_3 не превосходят 0,20.

3. Нахождения расстояния между телами на орбитах методом перебора. Другая задача, в которой требуется вычислить расстояние между орбитами — это задача классификации небесного тела как потенциально опасного. В ней необходимо рассчитать минимальное расстояние между орбитами двух тел. В данной работе это расстояние обозначено как $\rho_{4 \min}$.

Для того, чтобы одно тело считалось потенциально опасным для

другого будем полагать, что должно выполняться условие $\rho_{4\min} < 0,01$ а.е. (приблизительно равно расстоянию от Земли до точки либрации L_1).

Положение тела на орбите задается с помощью истинной аномалии ν , зная которую можно вычислить гелиоцентрическое расстояние

$$r_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{1 + e_{1,2} \cos u_{1,2}}.$$

Декартовы координаты определяются следующим образом [2]:

$$\begin{cases} x_{1,2} = r_{1,2} (\cos u_{1,2} \cos \Omega_{1,2} - \sin u_{1,2} \sin \Omega_{1,2} \cos i_{1,2}), \\ y_{1,2} = r_{1,2} (\cos u_{1,2} \sin \Omega_{1,2} - \sin u_{1,2} \cos \Omega_{1,2} \cos i_{1,2}), \\ z_{1,2} = r_{1,2} \sin u_{1,2} \sin i_{1,2}, \end{cases}$$

где $u_{1,2} = \nu_{1,2} + \omega_{1,2}$ — аргументы широты для первого и второго тела, $\nu_{1,2}$ — истинные аномалии для первого и второго тела.

Соответственно, зная координаты двух тел, можно вычислить расстояние между ними

$$\rho_4 = \|\bar{r}_1(\nu_1) - \bar{r}_2(\nu_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (4)$$

Алгоритм, лежащий в основе простого метода перебора, состоит из двух этапов. Первый — расчет полного оборота тела 1 по орбите с шагом Δ_1 и последующим расчетом положения тела 2 для каждого положения тела 1. После полного оборота тела 1 получится набор расстояний ρ_{4i} между орбитами тел 1 и 2. Второй этап — процедура нахождения минимумов, исходя из полученных расстояний (4):

$$\rho_{4\min} = \min \rho_4(\nu_1, \nu_2). \quad (5)$$

4. Нахождение узлового расстояния между орбитами двух тел. Модифицируем метод перебора так, чтобы было удобно рассчитывать оптимальное воздействие на опасное тело. Расстояние между орбитами с достаточно большим взаимным наклоном можно вычислить как минимум расстояний между узлами орбит (рис. 1). Используя кеплеровые элементы орбиты, имеем

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (6)$$

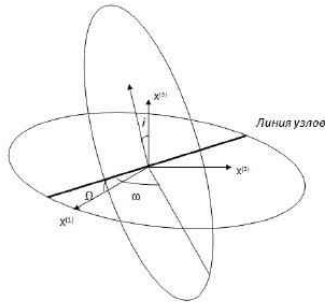


Рис. 1. Кеплеровы элементы орбиты и линия узлов для двух орбит

Аргумент широты $u = \nu + \omega$. На линии узлов $u_1 = 0$, $u_2 = \pi$.

В случае $u_1 = 0$ имеем, что $\nu_1 = -\omega$, т. е. (6) преобразуется к виду

$$\rho_5 = \frac{p}{1 + e \cos \omega},$$

где p — параметр орбиты.

В случае $u_2 = \pi$ имеем, что $\nu_1 = -\omega + \pi$, т. е. (6) преобразуется к виду

$$\rho_6 = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

Условие, удовлетворяющее расположению расстояний на линии узлов: $\Omega_1 = \Omega_2$. Таким образом, получены следующие формулы для вычисления расстояний между узлами:

$$\rho_7 = \|\rho_5^{(1)} - \rho_5^{(2)}\|, \quad \rho_8 = \|\rho_6^{(1)} - \rho_6^{(2)}\|.$$

Следовательно, чтобы найти минимальное расстояние между орбитами, требуется определить [3]

$$\rho_9 = \min(\rho_7, \rho_8). \quad (7)$$

Актуальность поиска потенциально опасных для Земли астероидов очевидна. Совершенствование методов и увеличение точности оценки позволит заблаговременно обнаружить опасный объект для возможного последующего отклонения его орбиты от пересечения с

орбитой Земли.

Ниже приведена таблица результатов для подсчета расстояний $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_{4 \min}, \rho_9$ для двух тел по известным элементам их орбит.

Пусть для рассматриваемых тел заданы следующие кеплеровы элементы: $e_1 = 0,875$ а.е., $e_2 = 0,885$ а.е., $q_1 = 0,27$ (град.), $q_2 = 0,26$ (град.), $i_1 = 3,16$ (град.), $i_2 = 3,26$ (град.), $\Omega_1 = 210,47$ (град.), $\Omega_2 = 208,12$ (град.), $\omega_1 = 276,59$ (град.), $\omega_2 = 279,46$ (град.).

Тогда, воспользовавшись формулами (1)–(3), (5), (7), получим следующие расстояния, представленные в таблице.

Таблица. Расстояния между орбитами

ρ_1	ρ_2	ρ_3	$\rho_{4 \min}$	ρ_7
0,018	0,02	0,019	0,027	0,025

Из приведенных результатов видно, что значения ρ_1, ρ_2, ρ_3 практически совпадают и не превосходят 0,02, что говорит о родственности рассматриваемых объектов, а вот физическое минимальное расстояние между орбитами $\rho_{4 \min}, \rho_9$ отличается от ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

5. Заключение. Метод для нахождения минимального расстояния между орбитами, описанный в статье, может быть применен к задаче классификации астероида как потенциально опасного. Данный метод расчета минимального расстояния, в отличие от многих аналитических, не требует предоставления информации об особых точках функции, описывающей расстояние между орбитами двух тел.

Литература

1. Холшевников К. В. Об измерении близости орбит небесных тел, имеющих общее происхождение // Доклад академии наук республики Таджикистан. Т. 58. № 12. 2015. С. 197–205.
2. Дубошин Г. Н. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
3. Sanchez J. P., Colombo C. Impact hazard protection efficiency by a small kinetic impactor // Journal of Spacecraft and Rockets. Vol. 50, No 2. 2013. P. 380–393.

УДК 519.63

Марнопольская Е. С., Кривовичев Г. В.

Исследование и оптимизация свойств разностных схем высокого порядка для уравнения переноса

1. Введение. В настоящее время необходимость в численном решении задач для кинетических уравнений возникает в самых разных областях науки. Уравнения типа Больцмана позволяют описывать течения газа как в микроскопических областях (при малых числах Кнудсена), так и случаях, когда справедлива гипотеза сплошной среды. Одним из наиболее часто применяемых в этой области исследований численным методом является метод расщепления по физическим процессам [1]. В рамках этого метода на каждом шаге по времени расчет производится в два этапа: на первом учитывается взаимодействие частиц, на втором — их бесстолкновительный разлет в результате этого взаимодействия. Последний описывается уравнением или системой линейных уравнений переноса.

Настоящая работа посвящена продолжению исследований, начатых в [1, 2], в которых предложен подход к оптимизации свойств разностных схем для уравнения переноса. В работе исследуется устойчивость параметрических схем с высокими порядками аппроксимации по пространственной переменной и приводятся решения задач о нахождении оптимальных значений параметра.

2. Разностные схемы для одномерного уравнения переноса. Рассматриваются разностные схемы для линейного уравнения переноса, которое в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где t — время, x — пространственная переменная, $u = u(t, x)$ — искомая функция, $c > 0$ — постоянная скорость переноса. Будем

Марнопольская Елена Сергеевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: marnlena@yandex.ru, тел.: +7(981)805-91-25

Кривовичев Герасим Владимирович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.krivovichev@spbu.ru, тел.: +7(905)230-88-53

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-00021

аппроксимировать производную по времени в узле сетки (t_j, x_n) несимметричной конечной разностью первого порядка, представляющую собой модификацию центральной разностной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_n) \approx \frac{u_n^{j+1} - \frac{1}{2}(u_n^j + u_n^{j-2})}{2\tau},$$

где $u_n^j \approx u(t_j, x_n)$, t_j — узел временной сетки, построенной с шагом τ , x_n — узел пространственной сетки, построенной с шагом h .

Для аппроксимации производной по переменной x будем использовать конечные разности с 1 по 4 порядок точности. В [1, 2] было показано, что схемы первого порядка обладают численной дисперсией и диссипацией, которые проявляются в наличии фиктивных высокочастотных осцилляций и затухании. Эти явления наблюдаются и для схем высокого порядка. В качестве примера рассмотрим схемы третьего и четвертого порядков. При сравнении с аналитическим решением из рис. 1 можно видеть, что у решения, полученного с помощью схемы с центральной разностью четвертого порядка, наблюдаются высокочастотные осцилляции, а решение, полученное с помощью схемы третьего порядка, затухает.

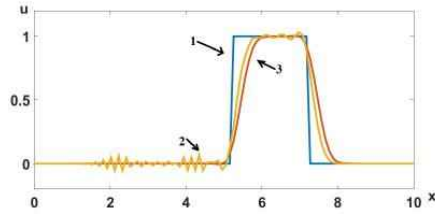


Рис. 1. Пример сравнения аналитического и численных решений: 1 — аналитическое решение, 2 — решение, полученное с помощью схемы с центральной разностью четвертого порядка, 3 — решение, полученное с помощью схемы с конечной разностью третьего порядка

3. Схема с параметром. Для того, чтобы снизить влияние фиктивных эффектов, предлагается для аппроксимации производной по

пространству использовать конечную разность с параметром:

$$c \frac{\partial u}{\partial x}(t_j, x_n) \approx \varepsilon F_2 + (1 - \varepsilon) F_1,$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$, в качестве F_1, F_2 берутся различные конечные разности. Таким образом, схема с параметром имеет следующий вид:

$$u_n^{j+1} = \frac{1}{2} (u_n^j + u_n^{j-2}) - 2\varepsilon F_1 - 2(1 - \varepsilon) F_2.$$

Были рассмотрены три разностные схемы:

1. Схема с разностями второго порядка (схема 1):

$$F_1 = \frac{c}{2h} (3u_{n+1}^j - 4u_{n-1}^j + u_{n-2}^j), \quad (2)$$

$$F_2 = \frac{c}{2h} (u_{n+1}^j - u_{n-1}^j).$$

2. Схема с разностями четвертого порядка (схема 2):

$$F_1 = \frac{c}{12h} (u_{n-2}^j - 8u_{n-1}^j + 8u_{n+1}^j - u_{n+2}^j), \quad (3)$$

$$F_2 = \frac{c}{12h} (3u_{n+1}^j + 10u_n^j - 18u_{n-1}^j + 6u_{n-2}^j - u_{n-3}^j).$$

3. Схема с разностями третьего и четвертого порядков (схема 3):

$$F_1 = \frac{c}{6h} (u_{n-2}^j - 6u_{n-1}^j + 3u_n^j + 2u_{n+1}^j), \quad (4)$$

$$F_2 = \frac{c}{12h} (-u_{n+2}^j + 8u_{n+1}^j - 8u_{n-1}^j + u_{n-2}^j).$$

Исследование устойчивости каждой схемы проводилось с помощью метода фон Неймана. Для каждого значения параметра ε находится свое ограничение на значение числа Куранта γ , $\gamma = c\tau/h$. В результате были построены области устойчивости, и после аппроксимации их границ полиномами получены критерии устойчивости в виде неравенства $\gamma \leq \gamma(\varepsilon)$. Для схем 1-3 выражения для $\gamma(\varepsilon)$ соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\gamma(\varepsilon) &= -0,47\varepsilon^3 + 1,15\varepsilon^2 - 1,05\varepsilon + 0,49, \\ \gamma(\varepsilon) &= 0,12\varepsilon^2 + 0,07\varepsilon + 0,15, \\ \gamma(\varepsilon) &= -0,10\varepsilon + 0,36.\end{aligned}$$

4. Оптимизация свойств разностных схем. Представляя решение разностной схемы в виде бегущей волны, получим кубическое уравнение относительно его временной части $q = e^{i\omega\tau}$:

$$q^3 + bq^2 - \frac{1}{2} = 0,$$

где ω — круговая частота, k — волновое число, b — коэффициент, имеющий определенное представление для каждой схемы. Для уменьшения эффекта численной диссипации рассматривается отклонение величин $\eta_i(\gamma, \zeta, \varepsilon) = |q_i|$, $\zeta = kh$, от их постоянных значений C_i , которые соответствуют случаю малой диссипации. Таким образом, для уменьшения эффекта численной диссипации рассматривается задача минимизации функции вида

$$F(\varepsilon) = \sup_{s=1,3} \left(\sup_{(\gamma, \zeta)} |\eta_s(\gamma, \zeta, \varepsilon) - C_s| \right).$$

Для уменьшения численной дисперсии рассмотрим функцию, характеризующую отклонения величин:

$$\Psi_i(\gamma, \zeta, \varepsilon) = \operatorname{Re}(\omega_i) = \frac{\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(q_i)}{\operatorname{Re}(q_i)}\right)}{\tau}$$

от величины $\omega = \gamma\zeta/\tau$, характерной для исходного уравнения (1):

$$I(\varepsilon) = \sup_{s=1,2,3} \left(\sup_{(\gamma, \xi)} |\Psi_s(\gamma, \xi, \varepsilon) - \omega(\gamma, \xi)| \right).$$

Таким образом, для построения схем с малыми численными дисперсией и диссипацией, имеем многокритериальную задачу минимизации функций $F(\varepsilon)$ и $I(\varepsilon)$. Задача решалась с использованием их «связки» с весами:

$$S(\sigma, \varepsilon) = \sigma F(\varepsilon) + (1 - \sigma)I(\varepsilon). \quad (5)$$

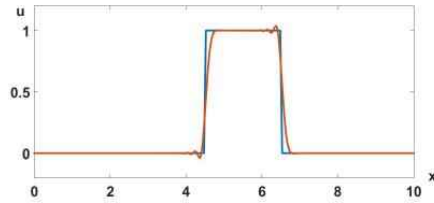


Рис. 2. Сравнение аналитического решения и решения, полученного с помощью схемы 1 с оптимальным значением параметра $\varepsilon = 0,37$

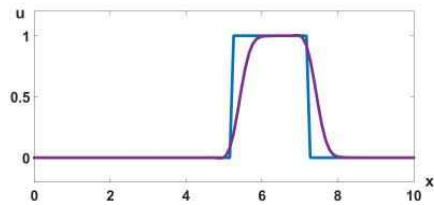


Рис. 3. Сравнение аналитического решения и решения, полученного с помощью схемы 2 с оптимальным значением параметра $\varepsilon = 0,27$

где $\sigma \in [0, 1]$. При $\sigma = 0$ имеем дисперсионную характеристику, при $\sigma = 1$ получаем диссипативную характеристику.

Необходимо, чтобы дисперсионные и диссипативные свойства проявлялись как можно слабее, поэтому ищется точка, в которой характеристика (5) принимает свое наименьшее значение. Для каждой схемы $S(\sigma, \varepsilon)$ принимает свое наименьшее значение при $\sigma = 1$, т. е. оптимальным значением параметра ε является значение, соответствующее минимуму диссипативной характеристики. Из этого можно сделать вывод, что диссипативные свойства оказывают большее влияние на решение, компенсируя эффекты численной дисперсии. Таким образом, для каждой схемы получено свое оптимальное

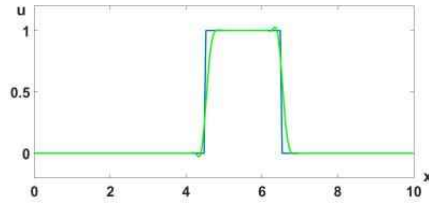


Рис. 4. Сравнение аналитического решения и решения, полученного с помощью схемы 3 с оптимальным значением параметра $\varepsilon = 0,93$

значение параметра: $\varepsilon_1 = 0,37$, $\varepsilon_2 = 0,27$, $\varepsilon_3 = 0,93$.

На рис. 2–4 представлено сравнение аналитического решения тестовой задачи и решения, полученного с помощью схемы с оптимальным значением параметра. Как можно видеть, у численных решений эффекты численной дисперсии и диссипации после оптимизации проявляются слабее: не наблюдается высокочастотных осцилляций, и решение существенно не затухает.

Заключение. Проведено исследование разностных схем для уравнения переноса высоких порядков аппроксимации. Представлены необходимые условия устойчивости схем в виде неравенств на параметр Куранта. При решении тестовой задачи показано, что схемы обладают численной дисперсией и диссипацией. Решены задачи о нахождении оптимальных значений параметра схем.

Литература

1. Кривовичев Г. В., Марнопольская Е. С. Исследование свойств разностной схемы для реализации этапа адвекции метода решеточных уравнений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2016. Т. 17. № 3. С. 212–223.
2. Марнопольская Е. С., Кривовичев Г. В. Исследование свойств разностных схем для системы уравнений переноса // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 188–193.

УДК 537, 51-73

Маслова Т. А., Виноградова Е. М.

Моделирование эмиссионной системы с диэлектрическими прослойками

1. Введение. В настоящее время уделяется достаточно много внимания вакуумным и полупроводниковым диодам, используемым при конструировании электронных приборов различного назначения.

В данной работе представлены результаты математического моделирования эмиссионной диодной системы с электродами эллипсоидальной формы, внутренняя область которой заполнена произвольным числом диэлектрических слоев [1, 2]. Для решения поставленной граничной задачи используется метод разделения переменных [3–5]. Распределение электростатического потенциала ищется в виде разложений по функциям Лежандра.

2. Физическая постановка задачи. Рассматривается осесимметричная диодная система: острый металлический катод и металлический анод на плоской подложке. Катод и анод представляют собой полуэллипсоиды вращения. Пространство системы между катодом и анодом заполнено прослойками из $k - 1$ диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость i -й прослойки равна ε_i . Напряжение на катоде и подложке $U = 0$, на анод подаётся постоянное напряжение $U = u_0$. На рис. 1 представлено схематическое изображение исследуемой диодной системы в прямоугольной системе координат. Связь между декартовыми координатами и координатами вытянутого эллипсоида вращения (α, β, φ) определяется формулами [6]

$$\begin{cases} x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \\ y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{cases}$$

Маслова Татьяна Андреевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st011020@student.spbu.ru, тел.: +7(981)796-05-13

Виноградова Екатерина Михайловна — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, c — фокальный радиус.

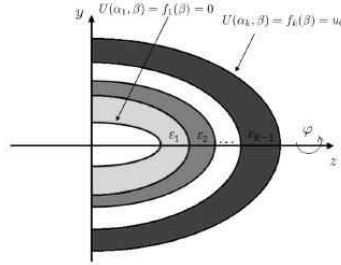


Рис. 1. Схематическое изображение эллиптической диодной системы

3. Математическая постановка задачи. В качестве математической модели, описывающей данную систему, рассматривается уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения [6]:

$$\frac{1}{c^2(\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha)} \left[c \operatorname{th} \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + c \operatorname{tg} \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right] = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} U(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta) = 0, \\ U(\alpha_k, \beta) = f_k(\beta) = u_0, \\ U_i(\alpha_{i+1}, \beta) = U_{i+1}(\alpha_{i+1}, \beta), \quad i = \overline{1, k-2}, \\ D_{n(i)}|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = D_{n(i+1)}|_{\alpha=\alpha_{i+1}}, \quad i = \overline{1, k-2}, \\ U(\alpha_i, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad i = \overline{1, k-1}, \end{cases} \quad (2)$$

где $D_{n(i)}$ — нормальная составляющая вектора электрического смещения для i -й прослойки.

4. Решение граничной задачи (1), (2). Общее решение уравнения (1) можно представить в виде разложения по полиномам Ле-

жандра с неизвестными коэффициентами [1]

$$U_i(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \times \\ \times \left[a_{2n+1}^i \frac{W_{2n+1}(\alpha, \alpha_{i+1})}{W_{2n+1}(\alpha_i, \alpha_{i+1})} + b_{2n+1}^i \frac{W_{2n+1}(\alpha_i, \alpha)}{W_{2n+1}(\alpha_i, \alpha_{i+1})} \right],$$

где $W_{2n+1}(a, b) = P_{2n+1}(\operatorname{ch} a)Q_{2n+1}(\operatorname{ch} b) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} b)Q_{2n+1}(\operatorname{ch} a)$, a_{2n+1}^i и b_{2n+1}^i — неизвестные коэффициенты для i -й прослойки находятся из граничных условий (2).

Граничное условие равенства нормальных составляющих векторов электрического смещения в каждой из двух соседних областей можно представить в виде

$$\varepsilon_i \operatorname{grad}_{\alpha} U_i|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = \varepsilon_{i+1} \operatorname{grad}_{\alpha} U_{i+1}|_{\alpha=\alpha_{i+1}}. \quad (3)$$

После некоторых преобразований выражение (3) принимает вид

$$\varepsilon_i [a_{2n+1}^i x_1^i + b_{2n+1}^i x_2^i] = \varepsilon_{i+1} [a_{2n+1}^{i+1} x_1^{i+1} + b_{2n+1}^{i+1} x_2^{i+1}], \\ x_1^i = (Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1})[P_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)] - \\ - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1})[Q_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)]) / \\ / W_{2n+1}(\alpha_i, \alpha_{i+1}), \quad (4) \\ x_2^i = (P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)[Q_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)] - \\ - Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)[P_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)]) / \\ / W_{2n+1}(\alpha_i, \alpha_{i+1}).$$

Таким образом, для нахождения неизвестных коэффициентов требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (4).

Согласно граничным условиям (3) на катоде и аноде, известные коэффициенты принимают явный вид

$$a_{2n+1}^1 = 0, \\ b_{2n+1}^{k-1} = \frac{u(-1)^n (4n+3)(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!}, \quad n \in [0, \infty].$$

Из условия равенства значений электростатического потенциала на границе раздела двух сред следует

$$b_{2n+1}^i = a_{2n+1}^{i+1}, \quad i = \overline{1, k-2}.$$

Остальные коэффициенты a_{2n+1}^i и b_{2n+1}^i , $i = \overline{2, k-2}$, находятся из условий (3) и являются решением системы (4).

5. Заключение. Представлена физическая и математическая модели диодной системы, состоящей из полевого катода и анода в форме софокусных полуэллипсоидов вращения на плоской проводящей подложке, внутренняя область которой состоит из прослоек с разными диэлектрическим проницаемостями. Распределение электростатического потенциала найдено в виде разложения по полиномам Лежандра. Нахождение неизвестных коэффициентов рядов в разложении потенциала сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Литература

1. Маслова Т. А., Виноградова Е. М. Моделирование эллиптического диода // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 194–198.
2. Маслова Т. А. Моделирование эмиссионной системы с модулятором на основе острейного полевого катода // Актуальные проблемы микро- и нанoeлектроники. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 19–20.
3. Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 1–5.
4. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Крымская К. А. Расчёт электростатического поля системы сферических сегментов // Журнал технической физики. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 128–131.
5. Виноградова Е. М., Листрукова А. В. Математическое моделирование квадрупольной электростатической линзы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 19–27.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

УДК 519.635.8

Михеев С. А., Кривовичев Г. В.

Анализ подходов к учету действия объемных сил в методе решеточных уравнений Больцмана

1. Введение. В настоящее время для моделирования сложных процессов газо- и гидродинамики широко используется метод решеточных уравнений Больцмана, который основан на решении систем дискретных по скоростям кинетических уравнений. Преимуществами метода являются простота алгоритма и возможность параллельных вычислений. При этом правильный учет действия объемных сил важен для моделирования течений при влиянии различных физических полей.

Несмотря на подробную разработку методов учета объемных сил, по всей видимости, до сих пор не проведено теоретическое сравнение предложенных подходов, позволяющее судить о преимуществе того или иного метода. Актуальность данной работы состоит в исследовании устойчивости метода решеточных уравнений Больцмана при различных подходах к учету действия объемных сил.

2. Решеточное уравнение Больцмана. Система кинетических уравнений, полученная после дискретизации уравнения Больцмана в пространстве скоростей с релаксационным членом имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \nabla f_i + (\mathbf{a} \nabla_{\mathbf{V}} f)_i = -\frac{f_i - f_i^{(eq)}}{\lambda}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $f_i = f_i(t, \mathbf{r})$, $i = \overline{1, n}$ — функции распределения, соответствующие частицам массой m_0 со скоростями $\mathbf{V}_i = v\mathbf{e}_i$, $v = l/\delta t$, l — длина свободного пробега, $\lambda > 0$ — характерное время релаксации, $f_i^{(eq)}(\mathbf{f}(t, \mathbf{r}))$ — функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, δt — среднее

Михеев Сергей Андреевич — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: helps2@gambler.ru, тел.: +7(921)337-88-37

Кривовичев Герасим Владимирович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gera1983k@bk.ru, тел.: +7(905)230-88-53

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-00021

время свободного пробега частицы, t — время, $\mathbf{r} = (x, y)$ — вектор пространственных переменных, $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_0$, \mathbf{F} — действующая на частицы внешняя сила. Рассматривается случай плоского течения с набором из девяти скоростей (модель $D2Q9$) [1].

Для таких макроскопических переменных, как плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и скорость $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, используются выражения [1]

$$\rho(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t, \mathbf{r}). \quad (2)$$

После дискретизации по всем переменным (1) примет вид:

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) = f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - \frac{\delta t}{\lambda} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}) \right) + \Delta f_i, \quad (3)$$

где Δf_i — добавочный член, учитывающий изменение функции распределения под действием силы.

Без учета объемных сил из уравнения (3) получим

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) = f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - \frac{\delta t}{\lambda} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{f}) \right). \quad (4)$$

3. Методы учета объемных сил. За шаг по времени сила изменяет импульс жидкости в узле на величину $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r})\delta t$. Соответствующее изменение скорости $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}\delta t/\rho$. В литературе предложены различные методы учета действия объемных сил.

3.1. Модель Shan [2]. В основе этого подхода лежит предположение о том, что под действием силы система переходит в положение равновесия. Величина скорости на одном шаге по времени имеет вид [2]

$$\mathbf{u}^{(eq)} = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}\lambda}{\rho}, \quad (5)$$

где \mathbf{u} вычисляется по (2).

Далее предполагается, что к следующему моменту времени система будет эволюционировать именно из этого равновесного состояния. Поэтому для учета действия силы не вводится дополнительных членов, а в (4) равновесные функции распределения вычисляются при скорости (5). Но в реальных условиях «идеальное» равновесное

состояние не достигается. В связи с этим, для реальной среды для получения поля скоростей используется формула

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{F}\delta t}{2\rho}.$$

В рамках подходов, которые рассматриваются ниже, предлагаются различные представления для Δf_i в (3), учитывающего действие силы.

3.2. Модель Luo [3]. В случае слабо неравновесных процессов главной частью функции распределения является ее равновесная часть, в связи с чем справедливо

$$\nabla_{\mathbf{v}} f \approx \nabla_{\mathbf{v}} f^{(eq)}.$$

На основе этого предложено выражение

$$\Delta f_i = \rho W_i \left(\frac{(\mathbf{V}_i - \mathbf{u})}{\theta} + \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{\theta^2} \mathbf{V}_i \right) \Delta \mathbf{u}, \quad i = \overline{1, 9}, \quad (6)$$

при этом $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$, $\theta = kT/m_0$, k – постоянная Больцмана, T – температура среды.

3.3. Модель Guo [4]. На основе метода неопределенных коэффициентов получено

$$\Delta f_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \rho W_i \left(\frac{(\mathbf{V}_i - \mathbf{u}^*)}{\theta} + \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u}^*)}{\theta^2} \mathbf{V}_i \right) \Delta \mathbf{u}, \quad (7)$$

где $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \mathbf{F}\delta t/2\rho$, $i = \overline{1, 9}$.

3.4. Метод точной разности [5]. Показано, что справедливо

$$\nabla_{\mathbf{v}} f^{(eq)} = -\nabla_{\mathbf{u}} f^{(eq)}.$$

Поскольку $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{a}\delta t$ – изменение скорости за время δt , по формуле конечных приращений получим

$$\mathbf{a}\nabla_{\mathbf{v}} f \delta t \approx -(f_i^{(eq)}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - f_i^{(eq)}(\rho, \mathbf{u})).$$

Таким образом, справедливо выражение

$$\begin{aligned} \Delta f_i = & \rho W_i \left(\frac{(\mathbf{V}_i - \mathbf{u})}{\theta} + \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{\theta^2} \mathbf{V}_i \right) \Delta \mathbf{u} + \\ & + \rho W_i \left(\frac{(\mathbf{V}_i \cdot \Delta \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{2\theta} \right), \quad i = \overline{1, 9}, \end{aligned} \quad (8)$$

при этом $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \mathbf{F} \delta t / 2\rho$.

4. Постановка задачи об исследовании устойчивости. По аналогии с [6, 7], исследуем устойчивость только по начальным условиям. Для этого равенства (3), (4) записываются в безразмерном виде, при этом $\tau = \lambda / \delta t$ — безразмерное время релаксации. Рассматривается режим течения, при котором $u_x = U = \text{const}$, $u_y = 0$ при предположении, что $\rho = 1$ и $U \in [0, 1]$. Будем исследовать устойчивость в пространстве параметров $(\mathbf{u}, \mathbf{F}, \varphi)$, где $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$, $F_x = F \cos \varphi$, $F_y = F \sin \varphi$, φ — угол отклонения вектора силы от вектора \mathbf{u} , $F \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Будем искать решение в виде

$$f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \bar{f}_i + \delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}),$$

где $\delta f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})$ суть отклонения относительно невозмущенного решения $\bar{f}_i = f_i^{(eq)}(\rho, U) = \text{const}$. Исследуем устойчивость по линейному приближению с помощью метода фон Неймана. При его применении задача об исследовании устойчивости невозмущенных решений сведется к задаче исследования устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений вида

$$P_i(t_j + 1) = \sum_{s=1}^9 G_{is} P_s(t_j), \quad i = \overline{1, 9}, \quad (9)$$

где сеточные функции P_i используются в соотношениях: $\delta f_s(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = P_i(t_j) \exp(\mathbf{i} \Theta \mathbf{r}_{kl}^T)$, где $\mathbf{i}^2 = -1$, $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_x \in [-\pi, \pi]$, $\theta_y \in [-\pi, \pi]$.

Выражения для коэффициентов G_{is} в (9) для схемы (4) имеют вид

$$G_{is} = \begin{cases} \left(\left(1 - \frac{1}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right) \exp(-\mathbf{i} \Theta \mathbf{e}_i), & i = s, \\ \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right) \exp(-\mathbf{i} \Theta \mathbf{e}_i), & i \neq s, \end{cases}$$

а для схем вида (3)

$$G_{is} = \begin{cases} \left(\left(1 - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) + \frac{\partial(\Delta f_i)}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right) \exp(-\mathbf{i}\Theta \mathbf{e}_i), & i = s, \\ \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) + \frac{\partial(\Delta f_i)}{\partial f_s}(\bar{\mathbf{f}}) \right) \exp(-\mathbf{i}\Theta \mathbf{e}_i), & i \neq s. \end{cases}$$

Нулевое решение (9) будет устойчиво, если выполняется следующее неравенство на собственные значения матрицы G_{is} :

$$|\lambda(\tau, \mathbf{u}, F, \varphi, \theta_x, \theta_y)| \leq 1. \quad (10)$$

Для сравнения всех моделей полагается $\tau = 1$, поскольку при таком его значении рассматривается модель Shan [2]. Построим равномерную сетку, состоящую из $M \times N$ узлов: $\Omega = \{(F_p, \varphi_r) | F_p = ph_F, \varphi_r = rh_\varphi, h_F = \frac{F_M - F_1}{M-1}, h_\varphi = \frac{\varphi_N - \varphi_1}{N-1}, p = \overline{1, M}, r = \overline{1, N}\}$. Для каждого узла сетки Ω находились максимальные по модулю собственные значения матрицы G_{is} и для них проверялось условие (10).

5. Сравнение результатов. После проведения расчетов для каждой представленной модели получены значения площади области устойчивости в узлах сетки Ω . Таким образом, получена совокупность значений площади как функции $S(F, \varphi)$. Для случая равномерной сетки из 100×100 узлов методом перебора получены максимальные значения функции S и узлы (F_{max}, φ_{max}) , в которых эти значения достигаются. Результаты представлены в таблице. Можно отметить, что максимальные значения характерны для модели Shan и метода точной разности. При этом для этих моделей наибольшее значение S достигается при $\varphi \approx \pi$, что соответствует случаю, когда векторы \mathbf{F} и \mathbf{u} направлены противоположно. Для моделей Luo и Guo имеем похожую ситуацию, при этом значение F_{max} для модели Guo оказалось больше, чем для модели Luo.

Таблица. Сравнение подходов

Подход	$\max(S)$	F_{max}	φ_{max}
Shan	0,8480	1	3,1733
Luo	0,6670	0,3434	3,4272
Guo	0,6670	0,6869	3,2368
Куперштох	0,8480	1	3,1733

6. Заключение. Исследована устойчивость разностных схем, предложенных в методе решеточных уравнений Больцмана с учетом действия объемных сил. Проведено сравнение четырех моделей и показано, что максимальные значения площади области устойчивости характерны для моделей, предложенных в [2, 5]. Полученные результаты можно использовать для решения практических задач моделирования течений жидкости.

Литература

1. Huang H., Krafczyk M., Lu X. Forcing term in single-phase and Shan-Chen-type multiphase lattice Boltzmann models // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84. 046710.
2. Shan X., Chen H. Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 2941–2948.
3. Luo L.S. Unified theory of lattice Boltzmann models for nonideal gases // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 1618–1621.
4. Guo Z., Zheng C., Shi B. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 046308.
5. Куперштох А. Л. Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2004. Т. 4. № 2. С. 75–96.
6. Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 332–340.
7. Михеев С. А., Кривовичев Г. В. Модифицированные трехслойные разностные схемы для решения системы кинетических уравнений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 223–228.

УДК 519.62

Моисеев В. И.

Методы Рунге – Кутты для уравнений с запаздыванием нейтрального типа в MATLAB

Рекомендовано к публикации доцентом Ереминым А. С.

1. Введение. Настоящая работа посвящена численному решению дифференциальных уравнений с запаздываниями. Введём необходимые определения.

Определение 1. Дифференциальным уравнением с запаздывающими аргументами (ДУЗА) называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), \quad \tau_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 2. Дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом нейтрального типа (ДУЗАНТ) называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n), y'(t - \sigma_1), \dots, y'(t - \sigma_m)), \\ \tau_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sigma_j > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Определение 3. Методом Рунге – Кутты решения начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, называется следующий способ нахождения приближение к решению в точке $t_0 + h$:

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &\approx y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s), \\ k_1 &= f(x_0, y_0), \\ k_2 &= f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{2,1} k_1), \\ k_3 &= f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{3,1} k_1 + a_{3,2} k_2)), \\ &\dots \\ k_s &= f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s,1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})), \end{aligned} \tag{1}$$

Моисеев Владислав Игоревич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: duoxik@gmail.com, тел.: +7(999)044-90-77

причём s называется числом этапов, а $a_{2,1}, a_{3,1}, a_{3,2}, \dots, a_{s,1}, a_{s,2}, a_{s,s-1}, \dots, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ — коэффициентами метода (см. например [1]).

Отметим, что запаздывания $\tau_i > 0$ и σ_j в общем случае могут быть неотрицательными функциями времени t и самого решения $y(t)$, однако в данной статье рассматривается случай, когда запаздывания ограничены снизу и длина шага h численного метода никогда не превышает ни одного из них.

2. Реализация метода Рунге–Кутты для ДУЗАНТ в MATLAB. Функция `ddensd` решения ДУЗАНТ в качестве вычислительного ядра использует другую процедуру MATLAB — `ddesd`, которая используется для решения ДУЗА [2].

2.1. Реализация функции `ddesd`. Функция `ddesd` позволяет получить решение для ДУЗА путём использования «классического» метода Рунге–Кутты четвёртого порядка для ОДУ и функции `lagvals`, которая, в свою очередь, возвращает значение запаздывания в конкретной точке. Запаздывание находится исходя из истории, в которую записываются элементы сетки t с соответствующим в них значением y и y' . Если же запаздывание $t - \tau$ не попадает в точку сетки, а попадает в некоторый интервал, тогда строится интерполяционный полином Эрмита третьего порядка по значениям y и f в точках сетки, и по нему находится значение задержанного решения.

2.2. Реализация функции `ddensd`. Данная функция позволяет получить решение для ДУЗАНТ. Устроена она так, чтобы решение находилось процедурой `ddesd` для измененной функции f , в которой значения $y'(t - \sigma_1), \dots, y'(t - \sigma_m)$ являются параметрами, вычисляемыми с помощью функции приближенного дифференцирования:

$$y'(t - \sigma) = \frac{y(t - \sigma + \Delta t) - y(t - \sigma)}{\Delta t}.$$

Как видно, берётся малый отступ по времени Δt , находятся значения запаздываний $y(t - \sigma)$ и $y(t - \sigma + \Delta t)$, и приближается сама производная.

2.3. Проблема `ddensd`. Существенной проблемой `ddensd` является то, что малый отступ по времени Δt при нахождении производной запаздывания не зависит от шага и ограничен некоторой величиной `MINCHANGE`. Таким образом, при длине шага, сравнимой с `MINCHANGE`, точность приближения производной решения

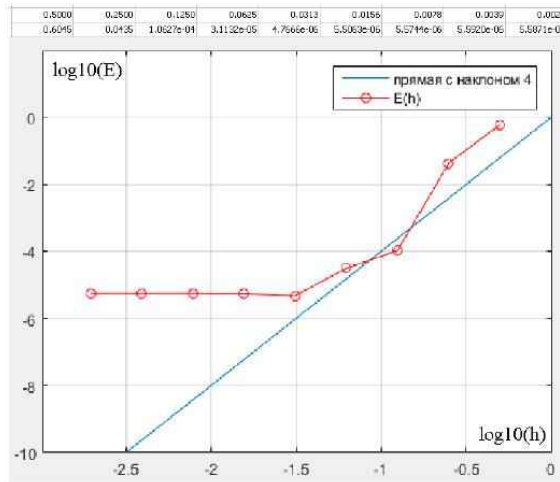


Рис. 1. Сходимость ddensd с постоянным шагом для задачи (2)

будет значительно меньше, чем необходимо для обеспечения требуемой методической погрешности (см. теоремы о сходимости из [3]). Покажем, что это приводит к потере сходимости приближенного решения к точному при стремлении длины шага к нулю.

Это проявляется, например, при решении задачи

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= 1 + y - 2y \left(\frac{t}{2}\right)^2 - y'(t - \pi), & t \geq 0, \\
 Y(t) &= \cos t, & t \leq 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

с точным решением $y(t) = \cos t$ на отрезке $[0; 6]$ с постоянным шагом [4]. На рис. 1 в двойной логарифмической шкале представлен график зависимости глобальной погрешности E_{gl} от длины шага h . Для метода четвертого порядка средний наклон ломаной должен составлять 4. Как видно, метод не сходится, т. е. при уменьшении длины шага, начиная с некоторой величины, глобальная погрешность перестает уменьшаться.

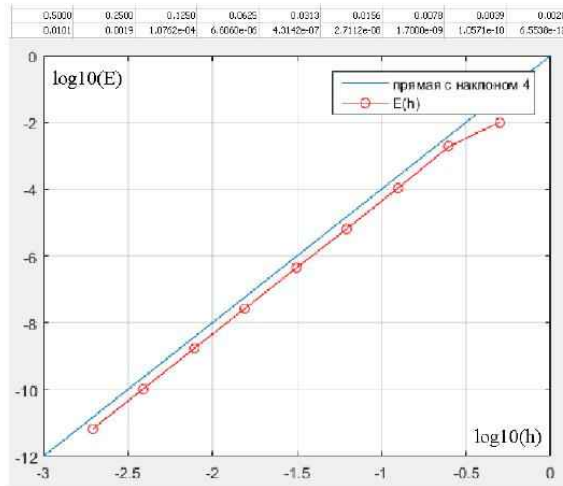


Рис. 2. Сходимость непрерывного метода Оурена и Ценнаро с постоянным шагом для задачи (2)

3. Непрерывный метод Рунге–Кутты. В качестве альтернативного способа приближения решения и его производной между точками сетки был выбран *непрерывный* метод Рунге–Кутты четвёртого порядка, предложенный Оуреном и Ценнаро [5]. Этот метод требует пяти, а не четырех этапов, как используемый в `ddesd`. Но он показывает ожидаемую сходимость, как будет продемонстрировано далее. Его отличие от метода (1) для ОДУ в том, что можно приблизить любое промежуточное значение в $[t, t + h]$ как

$$y(t + h\theta) \approx y(t) + h(b_1(\theta)k_1 + \dots + b_s(\theta)k_s). \quad (3)$$

Коэффициенты $b_i(\theta)$ являются полиномами, подобранными так, чтобы дать четвёртый порядок аппроксимации для любого $\theta \in [0, 1]$.

Предлагается приближать производную решения через производ-

ную (3) по θ :

$$y'(t + h\theta) = \sum_{i=1}^s b'_i(\theta)k_i = \sum_{i=1}^s \frac{db_i(\theta)}{d\theta}k_i.$$

Приближение $y'(t + h\theta)$ будет иметь третий порядок точности, что достаточно, чтобы метод Рунге–Кутты имел четвёртый порядок сходимости [3].

На рис. 2 представлен результат работы вышеописанного метода, реализованного в MATLAB на том же алгоритмическом ядре, что и `ddesd`, для задачи (2). Видим четвёртый порядок, т. е. при уменьшении h глобальная погрешность уменьшается пропорционально h^4 , причём точность в этом случае ограничивается вычислительной погрешностью.

4. Заключение. Результаты работы численных методов в значительной степени зависят от их реализации. Так недостаточно точное приближение производных в процедуре `ddensd` решения ДУЗАНТ в MATLAB приводит к отсутствию сходимости численного решения к точному при стремлении длины шага к нулю. Непрерывные методы Рунге–Кутты могут послужить основой для более точных и надёжных процедур решения ДУЗАНТ.

Литература

1. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Том 1. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
2. Shampine L. F., Thompson S. Solving DDEs in MATLAB // Appl. Numer. Math. 2001. Vol. 37. P. 441–458.
3. Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. New-York: Oxford University Press, 2003. 395 p.
4. Paul C.A.H. A test set of functional differential equations // NA Report No 243, Dept. of Mathematics, Univ. of Manchester, 1994.
5. Owren B., Zennaro M. Derivation of efficient continuous explicit Runge–Kutta methods // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. 1992. Vol. 13, No 6. P. 1488–1501.

УДК 004.3'122

Моисеев О. С., Горбунов В. И.

Система копирующего управления роботом-манипулятором

Рекомендовано к публикации доцентом Шиманчуком Д. В.

1. Введение. При создании любого аппаратного комплекса на основе аналоговых датчиков появляются проблемы, связанные с неточностью получаемых данных. Так, при использовании акселерометра, гироскопа и магнитометра наблюдается их дрейф, являющийся результатом накопления ошибки вследствие действия помех и температурных колебаний.

2. Постановка задачи. Необходимо создать программно-аппаратный комплекс для записи траектории движения датчика, установленного на копирующей перчатке, для задания управления роботом-манипулятором. Его можно применить для моделирования поведения объектов в системах, описанных в [1, 2]. Данное обеспечение решит проблему появления ошибок, являющихся результатом помех и повысит точность при работе с бесплатформенными инерциальными навигационными системами (БИНС) без проведения избыточного количества измерений. Систему, описанную в [3], можно использовать для определения позиции БИНС и начальной точки движения.

3. Техническое обеспечение. Для измерения ускорения, угловых скоростей и магнитного поля используется БИНС с модулями LSM6DS33 и LIS3MDL. В качестве входных данных используются векторы гироскопа \vec{g} , акселерометра \vec{a} , магнитометра \vec{m} в подвижной системе координат. Выходными данными являются изменения шести координат в неподвижной системе координат (рис. 1).

Моисеев Олег Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: oleg-98@list.ru, тел.: +7(931)303-58-73

Горбунов Владислав Игоревич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gorbunov.v93@gmail.com, тел.: +7(911)900-41-62

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 16-19-001-99



Рис. 1. Общее описание системы

из-за дрейфа БИНС, \vec{a} — вектор виртуального ускорения без накопленной ошибки, \vec{v} — ось поворота, S — матрица поворота вокруг произвольной оси на начальный угол поворота платформы, DCM — матрица направляющих косинусов, M — матрица поворота вокруг произвольной оси на угол накопленной ошибки. Центр систем координат: середина платформы, точка $(0, 0, 0)$.

4. Предварительные сведения.

Введем обозначения. Пусть \vec{g} — вектор ускорения, полученный с помощью акселерометра в системе координат платформы, повернутой на угол поворота платформы, со временем накапливает ошибку

5. Алгоритм стартовой калибровки. Укажем основные этапы алгоритма:

1. Проводим начальную калибровку для устранения погрешностей заводской калибровки гироскопа и акселерометра в течение первых 50 итераций цикла программы и вычитаем полученные погрешности из входных данных.
2. На вход с БИНС получаем три угла Эйлера — крен (roll), тангаж (pitch), рыскание (yaw).
3. Углы Эйлера преобразуем в координаты двух векторов, задающих положение плоскости — компьютерной модели датчика:
 - вектор, лежащий в плоскости на оси X подвижной системы координат:
 $\vec{s} \{ \cos(\text{pitch}) \cdot \cos(\text{yaw}); -\cos(\text{pitch}) \cdot \sin(\text{yaw}); \sin(\text{pitch}) \};$
 - вектор нормали к плоскости:
 $\vec{u} \{ \sin(\text{roll}) \cdot \sin(\text{yaw}) + \cos(\text{roll}) \cdot \sin(\text{pitch}) \cdot \cos(\text{yaw});$
 $\sin(\text{roll}) \cdot \cos(\text{yaw}) - \cos(\text{roll}) \cdot \sin(\text{pitch}) \cdot \sin(\text{yaw});$
 $-\cos(\text{roll}) \cdot \cos(\text{pitch}) \}.$
4. Находим приращение каждой координаты и округляем с точностью до 0,001 для устранения погрешности. Прибавляем округленное изменение координат к их исходным значениям.

6. Алгоритм установки начального положения платформы. В начале работы программы задаем начальное положение платформы в абсолютной, неподвижной системе координат (рис. 2). На

основе данных с магнитометра платформа выставляется в корректном положении по оси Z . Считываем координаты вектора \vec{g} с акселерометра, масштабируем его для более удобной работы в дальнейшем.

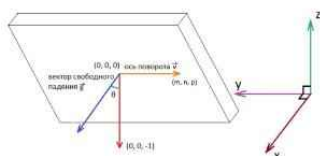


Рис. 2. Начальный поворот
находим угол вращения

Создаем ось, вокруг которой будет совершаться поворот. Вектор с координатами $\{0, 0, -1\}$ в неподвижной системе координат векторно умножаем на вектор \vec{g} и получаем координаты вектора оси вращения $\vec{v}\{m, n, p\}$, нормализуем его.

$$\theta = \arccos \frac{(\vec{g}, \{0, 0, -1\})}{|\vec{g}|}. \quad (1)$$

Создаем матрицу поворота S на угол θ вокруг полученной оси вращения, заданной вектором $\vec{v}\{m, n, p\}$:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta) m^2 & (1 - \cos \theta) mn - (\sin \theta) p & (1 - \cos \theta) mp + (\sin \theta) n \\ (1 - \cos \theta) nm + (\sin \theta) p & \cos \theta + (1 - \cos \theta) n^2 & (1 - \cos \theta) np - (\sin \theta) m \\ (1 - \cos \theta) pm - (\sin \theta) n & (1 - \cos \theta) pn + (\sin \theta) m & \cos \theta + (1 - \cos \theta) p^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Вектор ускорения свободного падения \vec{g} и векторы \vec{u} , \vec{s} , задающие углы поворота платформы, поворачиваем с помощью умножения матрицы поворота S на вектор-столбцы.

7. Алгоритм корректировки положения платформы.

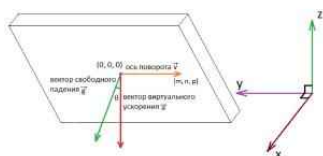


Рис. 3. Угол накопленной ошибки

Алгоритм включает следующие шаги:

1. Координаты вектора \vec{g} задаем с помощью данных, полученных из акселерометра, после чего поворачиваем его с помощью произведения матриц:

DCM и S и масштабируем. Преобразованный вектор \vec{g} , с учетом накопленной ошибки из-за дрейфа гироскопа, будет находиться в неподвижной системе координат.

2. Вектор виртуального ускорения \vec{a} вращаем с помощью произведения матриц DCM и S и матрицы накопленной ошибки поворота M.

В результате получаем \vec{g} и \vec{a} без накопленной ошибки. Вектор \vec{a} совпадает с вектором свободного падения в случае отсутствия линейного ускорения (рис. 3). Вычитаем вектор $\{0, 0, -1\}$ из данного и получаем вектор линейного ускорения платформы. Поворачиваем платформу с помощью произведения матриц DCM и S и матрицы накопленной ошибки поворота M.

3. Проводим проверку трёх условий для устранения дрейфа гироскопа за счет калибровки:
 - угловые скорости платформы находятся в ε -окрестности нуля;
 - ускорение платформы находится в ε -окрестности вектора свободного падения (длина вектора, полученного на основе данных с акселерометра примерно равна длине вектора свободного падения в пределах ε -окрестности);
 - угловая скорость вектора \vec{a} находится в ε -окрестности нуля (для исключения калибровки при линейных ускорениях).

8. Устранение дрейфа гироскопа. Алгоритм основывается на следующем:

1. Строим вектор $\vec{t} \{q, w, e\}$, вокруг которого будет осуществляться поворот, с помощью векторного произведения $\vec{g} \{a, b, c\} \times \vec{a} \{0, 0, -1\}$. Находим угол накопленной ошибки между векторами свободного падения \vec{g} и виртуального ускорения \vec{a} :

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{g}, \vec{a})}{|\vec{g}| |\vec{a}|}. \quad (3)$$

2. Строим матрицу поворота M на угол φ вокруг полученной оси вращения, заданной вектором $\vec{t} \{q, w, e\}$:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) q^2 & (1 - \cos \varphi) qw - (\sin \varphi) p & (1 - \cos \varphi) qe + (\sin \varphi) w \\ (1 - \cos \varphi) wq + (\sin \varphi) e & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) w^2 & (1 - \cos \varphi) we - (\sin \varphi) q \\ (1 - \cos \varphi) eq - (\sin \varphi) w & (1 - \cos \varphi) ew + (\sin \varphi) q & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) e^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

3. Поворачиваем платформу и вектор виртуального ускорения \vec{a} с помощью построенной матрицы M на угол ошибки.
4. Устраняем дрейф по оси Z с помощью магнитометра: повторяем пункты 7.1–8.3 для данных, полученных с магнитометра.

Возможно использование данного алгоритма в задачах, описанных в [4, 5] в качестве подсистемы, задающей основные параметры для моделирования движения в виртуальной среде.

9. Алгоритм нахождения координат платформы.

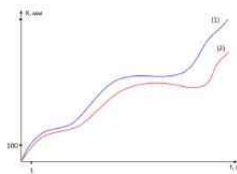


Рис. 4. Траектория до и после калибровки

Находим значение ускорения платформы: из вектора виртуального ускорения вычитаем вектор с координатами $\{0, 0, -1\}$ и результирующий вектор интегрируем по времени цикла для получения вектора скорости. Интегрируя его по времени, получаем траекторию перемещения платформы.

Во время калибровки пересчитываем все позиции, полученные с момента предыдущей калибровки, с учётом распределения накопленной ошибки на пройденный путь за период.

На рис. 4 показаны координаты каждой точки траектории (1) и их изменение с учетом ошибки — траектория (2).

10. Выводы. На основе представленного подхода реализован прототип, который возможно использовать в системах, описанных в [6–10], для повышения их точности. Решена задача создания алгоритма калибровки положения БИНС в виртуальном пространстве во время работы. Алгоритм реализован и получены практические результаты.

Литература

1. Kulakov F. M., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G. V. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. No 33 – 36. P. 1783–1796.

2. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. A., Chernakova S. A., Shymanchuk D. V. Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects // "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015 International Conference. 2015. P. 102–105.
3. Gorbunov V. I., Kulakov F. M. Project of vision system for remote controlled space robots // Extreme robotics. Proceedings of the International Scientific and Technological Conference. Saint-Petersburg: «AP4Print». 2016. 480 p.
4. Кулаков Ф. М. Телеуправление космическими роботами // Изв. РАН. ТИСУ. 2016. № 4. С. 141–192.
5. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading. 2015. P. 710–742.
6. Кулаков Ф. М. Копирующее и супервизорное управление роботами при большом запаздывании сигналов управления и обратной связи. Часть I // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1 (10). С. 55–61.
7. Kulakov F. M. et al. Information technology for interactive robot task training through demonstration of movement // Yu. P. Ko., Ri. J. Advances in intelligent robotics and collaborative automation. (River publishers series in automation, control and robotics). Denmark. River Publishers. 2015. 364 p.
8. Кулаков Ф. М. Тренажёр-интерфейс для управления космическим роботом // Материалы восьмой Всероссийской мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2015). Геленджик. 2015. 251 с.
9. Кулаков Ф. М. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2009. 168 с.
10. Ефимова П. А., Шиманчук Д. В. Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.

УДК 521.1

Найденова М. А.

Исследование периодического движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1

Рекомендовано к публикации доцентом Шиманчуком Д. В.

1. Введение. Со времени зарождения космонавтики модель круговой ограниченной задачи трех тел [1] имеет особое практическое значение в связи с простотой своей формулировки и большому числу её приложений. В данной статье эта модель используется для описания движения космического аппарата (КА) под действием сил притяжения Солнца и Земли, которые представляют собой два притягивающих центра конечных масс. Предполагается, что масса КА пренебрежительно мала по сравнению с массами притягивающих центров и не сказывается на их движении. Орбита Земли считается круговой.

Как было показано еще в XVIII веке Леонардом Эйлером и Жозефом Луи Лагранжем [2], существуют пять частных решений круговой ограниченной задачи трех тел, для которых притягивающие тела образуют во время движения неизменную конфигурацию. Данные решения представляют собой точки космического пространства, в окрестности которых КА может пребывать в состоянии равновесия и не изменять своего положения относительно притягивающих центров. Такие точки принято называть точками либрации и обозначать L_i , $i = \overline{1, 5}$. В рассматриваемой системе Солнце — Земля они расположены в плоскости орбиты Земли. Точки либрации L_i , $i = \overline{1, 3}$, находящиеся на прямой, которая соединяет центры масс Солнца и Земли, называются коллинеарными. Цель настоящей работы состоит в построении периодических траекторий в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 .

В связи с теоретическими свойствами коллинеарных точек либрации, их окрестности являются приоритетным местом для расположения многих исследовательских КА. Точка L_1 находится между

Найденова Маргарита Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nieva3@yandex.ru.ru, тел.: +7(961)810-86-26

Солнцем и Землей, ближе к последней. В ней особо удобно проводить исследования Солнца, так как Земля и Луна здесь не оказывают влияния на доступность объекта наблюдений. В настоящее время в L_1 уже девятнадцать лет успешно функционирует КА SOHO, изучающий солнечную атмосферу. В ближайшее время планируется значительное число космических миссий, направленных на размещение в коллинеарных точках либрации телескопов и обсерваторий, поэтому изучение движения в их окрестности имеет особую актуальность.

2. Уравнения движения. Движение в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 во вращающейся системе координат $Ox_1x_2x_3$ определяется гамильтоновой системой хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел [3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор координат тела малой массы (КА), $y = (y_1, y_2, y_3)$ — вектор сопряженных импульсов. Центр массы Земли совпадает с началом координат. Ось Ox_1 соединяет центры масс Солнца и Земли. Единица времени — 58,0916 суток, единица расстояния — 10^{-2} а. е. Точка либрации L_1 в системе отсчета $Ox_1x_2x_3$ имеет координаты $x' = (1, 0, 0)$, $y' = (0, 1, 0)$.

Функция Гамильтона системы (1) имеет вид

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2.$$

Для анализа поведения траекторий КА линеаризуем систему (1) в окрестности точки либрации L_1 , предварительно сделав замену

переменных $\xi_1 = x_1 - 1, \xi_2 = x_2, \xi_3 = x_3, \eta_1 = y_1, \eta_2 = y_2 - 1, \eta_3 = y_3$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \eta_1, \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\xi}_3 = \eta_3, \\ \dot{\eta}_1 = 8\xi_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -4\xi_2 - \eta_1, \\ \dot{\eta}_3 = -4\xi_3. \end{cases} \quad (2)$$

Собственные числа линеаризованной системы (2) имеют значения [3] $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1+2\sqrt{7}}, \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2\sqrt{7}-1} = \pm i\omega_e, \lambda_{5,6} = \pm 2i$. Из того, что собственное значение $\lambda_1 > 0$, решение системы (1), соответствующее точке либрации L_1 является неустойчивым по Ляпунову.

Общее решение системы (2) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) + \nu_1 A_e \sin(\phi_e + \omega_e t) \\ b_1^2(c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t}) - \nu_2 A_e \cos(\phi_e + \omega_e t) \\ -\frac{1}{2} A_n \cos(\phi_n + 2t) \\ b_1^3(c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t}) - \nu_3 A_e \cos(\phi_e + \omega_e t) \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + A_e \sin(\phi_e + \omega_e t) \\ A_n \sin(\phi_n + 2t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$b_1^1 = -\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-1}, \quad b_1^2 = \frac{\sqrt{1+2\sqrt{7}}}{\sqrt{7}-1}, \quad b_1^3 = -\frac{17+7\sqrt{7}}{(\sqrt{7}-1)\sqrt{2\sqrt{7}+1}},$$

$$\nu_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}, \quad \nu_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}{1+\sqrt{7}}, \quad \nu_3 = \frac{17-7\sqrt{7}}{(1+\sqrt{7})\sqrt{2\sqrt{7}-1}},$$

а $c_1, c_2, A_n, A_e, \phi_e, \phi_n$ — произвольные постоянные, зависящие от начальных данных. Из вида общего решения (3) следует, что в линейном приближении, если $c_1 \neq 0$, КА неограниченно удаляется из окрестности точки либрации. В случае, если $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ КА приближается к некоторой периодической или условно-периодической траектории, тогда как при $c_1 = 0, c_2 = 0$ движение КА происходит по периодическим или условно-периодическим траекториям.

3. Построение возможных траекторий. Приближенное аналитическое представление решения системы находим в виде разложения в ряд по малому параметру $\varepsilon \neq 0$ [4] с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_{10} + \xi_{11}\varepsilon + \xi_{12}\varepsilon^2, \\ \xi_2 &= \xi_{20} + \xi_{21}\varepsilon + \xi_{22}\varepsilon^2, \\ \xi_3 &= \xi_{30} + \xi_{31}\varepsilon + \xi_{32}\varepsilon^2, \\ \eta_1 &= \eta_{10} + \eta_{11}\varepsilon + \eta_{12}\varepsilon^2, \\ \eta_2 &= \eta_{20} + \eta_{21}\varepsilon + \eta_{22}\varepsilon^2, \\ \eta_3 &= \eta_{30} + \eta_{31}\varepsilon + \eta_{32}\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{4}$$

Заметим, что в силу совершенной в системе (1) замены переменных, $\xi_{10} = \xi_{20} = \xi_{30} = \eta_{10} = \eta_{20} = \eta_{30} = 0$, а исходя из найденного общего решения линеаризованной системы (3) положим, что

$$\begin{aligned}\xi_{11} &= A_e \nu_1 \sin(\phi_e + \omega_e t), & \xi_{21} &= -A_e \nu_2 \cos(\phi_e + \omega_e t), \\ \xi_{31} &= -\frac{1}{2} A_n \cos(\phi_n + 2t), & \eta_{11} &= -A_e \nu_3 \cos(\phi_e + \omega_e t), \\ \eta_{21} &= A_e \sin(\phi_e + \omega_e t), & \eta_{31} &= A_n \sin(\phi_n + 2t).\end{aligned}$$

Для определения второго приближения из (1) можно получить систему

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{12} = \xi_{22} + \eta_{12}, \\ \dot{\xi}_{22} = -\xi_{12} + \eta_{22}, \\ \dot{\xi}_{32} = \eta_{32}, \\ \dot{\eta}_{12} = -9\xi_{11}^2 + \frac{9}{2}\xi_{21}^2 + \frac{9}{2}\xi_{31}^2 + 8\xi_{12} + \eta_{22}, \\ \dot{\eta}_{22} = 9\xi_{11}\xi_{21} - 4\xi_{22} - \eta_{12}, \\ \dot{\eta}_{32} = 9\xi_{11}\xi_{31} - 4\xi_{32}, \end{cases}$$

из которой находим, что

$$\begin{aligned}\xi_{12} &= \frac{1}{2} A_e^2 \nu_1^2 - \frac{1}{4} A_e^2 \nu_2^2 - \frac{1}{16} A_n^2 - \frac{13}{464} A_n^2 \cos 2(\phi_n + 2t) + k_1 \cos 2(\phi_e + \omega_e t), \\ \xi_{22} &= \frac{1}{58} A_n^2 \sin 2(\phi_n + 2t) + k_2 \sin 2(\phi_e + \omega_e t), \\ \xi_{32} &= \frac{k_3}{\omega_e + 4} \sin(\phi_e + \phi_n + (\omega_e + 2)t) - \frac{k_3}{4 - \omega_e} \sin(\phi_e - \phi_n + (\omega_e - 2)t), \\ \eta_{12} &= \frac{11}{116} A_n^2 \sin 2(\phi_n + 2t) + k_4 \sin 2(\phi_e + \omega_e t), \\ \eta_{22} &= \frac{1}{2} A_e^2 \nu_1^2 - \frac{1}{4} A_e^2 \nu_2^2 - \frac{1}{16} A_n^2 + \frac{19}{464} A_n^2 \cos 2(\phi_n + 2t) + k_5 \cos 2(\phi_e + \omega_e t),\end{aligned}$$

$$\eta_{32} = k_3^1 \cos(\phi_e + \phi_n + (\omega_e + 2)t) - k_3^2 \cos(\phi_e - \phi_n + (\omega_e - 2)t),$$

$$k_1 = \frac{(3 - 4\omega_e^2) \left(\frac{9}{2} A_e^2 \nu_1^2 + \frac{9}{4} A_e^2 \nu_2^2 \right) - 18 A_e^2 \nu_1 \nu_2 \omega_e}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27},$$

$$k_2 = \frac{9\omega_e(2A_e^2 \nu_1^2 + A_e^2 \nu_2^2) - \frac{9}{2} A_e^2 \nu_1 \nu_2 (4\omega_e^2 + 9)}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27},$$

$$k_3 = \frac{9A_e A_n \nu_1}{4\omega_e}, \quad k_3^1 = \frac{k_3(\omega_e + 2)}{\omega_e + 4}, \quad k_3^2 = \frac{k_3(\omega_e - 2)}{4 - \omega_e},$$

$$k_4 = \frac{(4\omega_e^2 - 5)\omega_e(9A_e^2 \nu_1^2 + \frac{9}{2} A_e^2 \nu_2^2) - (9 - 4\omega_e^2) \frac{9}{2} A_e^2 \nu_1 \nu_2}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27},$$

$$k_5 = \frac{(4\omega_e^2 + 3) \left(\frac{9}{2} A_e^2 \nu_1^2 + \frac{9}{4} A_e^2 \nu_2^2 \right) + (8\omega_e^3 + 14\omega_e) \frac{9}{2} A_e^2 \nu_1 \nu_2}{16\omega_e^4 + 8\omega_e^2 - 27}.$$

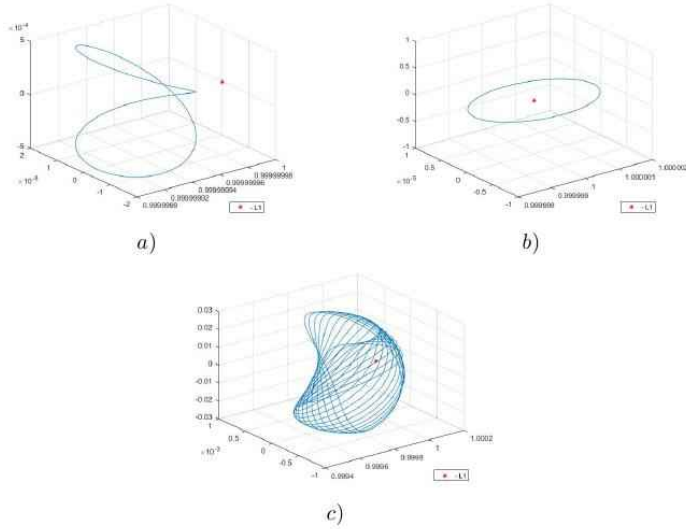


Рис. 1. Возможные траектории КА в окрестности точки L_1 : а) вертикальная, б) плоская, в) условно-периодическая

Отметим, что если в (4) положить $\varepsilon = 1$, то окончательное представление можно рассматривать как разложение по амплитудам соответствующих орбит.

На рис. 1 изображены возможные периодические траектории КА в окрестности точки L_1 , которые допускают разложение (4), причем справедливость представления (4) подтверждает численное моделирование движения КА в окрестности L_1 , проведенное для нелинейной системы (1) с соответствующими начальными данными (см. рис. 2).

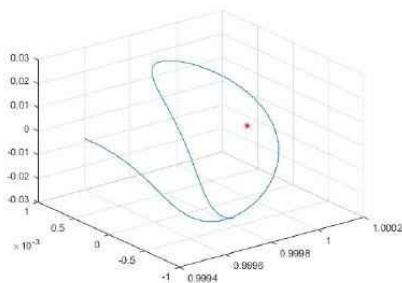


Рис. 2. Результат численного моделирования

4. Заключение. Получены приближенные аналитические выражения для возможных периодических траекторий движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 . Для оценки справедливости полученных результатов проведено численное моделирование движения космического аппарата с начальными данными, соответствующим аналитическому представлению возможных периодических траекторий [5]. Результаты исследования могут быть полезны для разработки проектов мониторинга околоземного космического пространства, предполагающих перелеты в окрестность коллинеарных точек либрации L_1 .

Литература

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. 2-е изд. М.: Наука, 1968. 800 с.
2. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. № 2. С. 193–199.
4. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 464 с.
5. Шиманчук Д. В., Шмыров А. С. Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 2. С. 76–85.

УДК 532.591

Перегудин С. И., Перегудина Э. С., Холодова С. Е.

Динамика электропроводной жидкости с учетом эффектов геострофичности

Целью исследования является анализ динамики волновых трехмерных крупномасштабных движений невязкой, несжимаемой неоднородной идеально проводящей вращающейся жидкости, сосредоточенной в сферической области.

Результаты исследования не ограничиваются только приложением к геофизике, они могут быть также полезны при рассмотрении процесса самовозбуждения магнитогидродинамического динамо в относительно больших массах жидкого металла и в технических устройствах, например, в технологических процессах, использующих напорные камеры реактора на быстрых нейтронах, доменные печи, реакторы для производства титана и другие.

В задачах о генерации магнитных полей часто возникают вопросы о том, какого вида должно быть движение, и при каких условиях магнитные поля могут существовать на достаточно больших интервалах времени.

Для космических объектов время затухания магнитного поля очень велико. Если принять, что жидкое ядро Земли состоит из расплавленного железа, то время затухания магнитного поля по одним оценкам составляет 15 000 лет, а по другим — 10^5 лет. Время затухания магнитного поля в солнечных пятнах — не менее 300 лет, а магнитного поля Солнца — 10^{10} лет [1].

В рассматриваемых исследованиях под большим значением времени подразумевается время, значительно меньшее времени затухания магнитного поля, но вместе с тем достаточно большое для того, чтобы несколько поколений могли заметить это затухание.

Перегудин Сергей Иванович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: s.peregudin@spbu.ru, тел.: +7(905)258-55-57

Перегудина Элина Сергеевна – студент, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет»; e-mail: ehllina-peregudina@yandex.ru, тел.: +7(905)278-64-19

Холодова Светлана Евгеньевна – доцент, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики; e-mail: kholodovase@yandex.ru, тел.: +7(965)021-00-41

Приведенные выше оценки, конечно, очень условны. Возможно на самом деле они имеют еще более высокие порядки, поскольку, пока на протяжении существования человека затухание магнитного поля явно не проявлялось, хотя наблюдалось уменьшение его интенсивности до некоторого значения, но затем непременно следовало его увеличение. Поэтому, если утверждение о затухании магнитного поля применительно к земным условиям и является возможным, то, скорее всего, порядок рассматриваемого времени намного больше приведенных выше из известных источников, либо все-таки интересующие нас процессы представляют установившиеся колебания.

Движение невязкой идеально проводящей несжимаемой неоднородной жидкости в системе, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, в магнитной гидродинамике в переменных Эйлера описывается системой уравнений [2]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}), & \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - g\mathbf{z} + \frac{1}{\mu\rho} \operatorname{rot} \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

где \mathbf{b} — вектор магнитной индукции, \mathbf{v} — скорость жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, p — давление, ρ — плотность, g — величина ускорения силы тяжести. Предполагается, что магнитная проницаемость μ постоянна.

Важное свойство уравнения магнитной индукции заключается в том, что в случае бесконечно проводящей жидкости поток поля \mathbf{b} через любую материальную поверхность в жидкости сохраняется. Это означает, что поле \mathbf{b} изменяется так, как в случае, если бы магнитные силовые линии этого поля были «вморожены» в движущееся вещество. В телах космических размеров течение силовых линий оказывается очень медленным и можно считать, что силовые линии практически «вморожены» в вещество [1].

Будем полагать, что жидкость обладает очень хорошей электропроводностью. Это значит, что магнитное число Рейнольдса велико $R_m = LU(\tilde{\lambda})^{-1} \gg 1$, где L, U — характерные размер и скорость, $\tilde{\lambda}$ — коэффициент магнитной диффузии. Случай $R_m \gg 1$ реализуется в жидком ядре Земли, часто встречается в астрофизике.

Если считать плотность переменной, тогда кроме уравнения движения, уравнения неразрывности и уравнений Максвелла необходи-

мо привлекать уравнение баланса внутренней энергии [2–5]

$$\rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -p\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + k\Delta T + \chi + \rho Q + \tilde{\lambda}(\text{rot } \mathbf{b})^2.$$

Здесь \mathcal{E} — внутренняя энергия единицы массы, T — температура, k — коэффициент теплопроводности, Q — скорость притока тепла от внешних источников на единицу массы, χ — приток тепла, обусловленный вязкой диссипацией. В дальнейшем будем считать, что $\chi = 0$. В силу того, что рассматриваемая жидкость идеально проводящая, последнее слагаемое в правой части уравнения будет отсутствовать.

Если эффекты сжимаемости незначительны, то применимо уравнение состояния

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

где ρ_0 и T_0 — средняя плотность жидкости и средняя температура,

$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \Big|_p$ — коэффициент термического расширения. Для несжимаемой жидкости вместо уравнения будем использовать уравнение переноса тепла в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho c_P} \Delta T + \frac{Q}{c_P}.$$

Здесь c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Тогда температуру в уравнении можно выразить через плотность:

$$\frac{d\rho}{dt} = \varkappa \Delta \rho - \frac{\alpha \rho_0}{c_P} Q,$$

где $\varkappa = \frac{k}{\rho c_P}$ — коэффициент температуропроводности.

Отметим важное свойство динамики крупномасштабных геострофических движений электропроводной жидкости. Оно заключается в том, что, как и в случае обычной гидродинамики, геострофическое приближение не приводит к вырожденному характеру системы уравнений для главных членов соответствующих разложений, в отличие от геострофических движений с меньшим горизонтальным масштабом L , таким, что $\frac{L}{r_0} \ll 1$. Следует отметить, что при большой величине горизонтального масштаба движения уравнения Максвелла

соленоидальности и индукции магнитного поля для главных членов соответствующих разложений сохраняют свой вид в смысле вида исходных названных уравнений в размерном виде. Заметим, что справедливость геострофического приближения нарушается в экваториальных областях, где действие силы Кориолиса на горизонтальные течения очень слабо. Таким образом, геострофическое приближение по самой своей природе не может быть глобальной теорией, поэтому мы полагаем, что рассматриваемое движение происходит в районе, расположенном в средних широтах в окрестности широты θ_0 и удаленном от экватора.

Задача состоит в определении распределения плотности и всех магнитогидродинамических величин, возникающих в результате термодинамических изменений у границы области, в предположении, что такая модель описывается уравнениями крупномасштабной динамики, полученными выше.

Литература

1. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика / пер. с англ. В. Г. Петрова. М.: Атомиздат, 1978. 144 с.
2. Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 455 с.
3. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2-х т. М.: Мир, 1984. 811 с.
4. Перегудин С. И., Холодова С. Е. Динамика вращающегося слоя идеальной электропроводной несжимаемой неоднородной жидкости в экваториальной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 11. С. 1–15.
5. Перегудин С. И., Холодова С. Е. Об особенностях распространения нестационарных волн во вращающемся сферическом слое идеальной несжимаемой стратифицированной электропроводной жидкости в экваториальном широтном поясе // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 2(306). С. 44–51.

Расчет напряженного состояния композитной пластины с эллиптическим отверстием методом конечных элементов

1. Введение. В настоящее время развитие техники предъявляет особые требования к прочности и надежности различных материалов, конструкций и сооружений. Важно уметь грамотно рассчитывать возникающие в этих конструкциях напряжения, чтобы вовремя предотвратить возможное разрушение.

В данной работе рассматривается задача определения напряжений неоднородной пластины с эллиптическим отверстием методом конечных элементов. Пластина образована соединением двух частей из разных материалов. На краях пластины заданы постоянные напряжения. Представлены результаты расчетов напряжений для полуплоскости с эллиптическим отверстием.

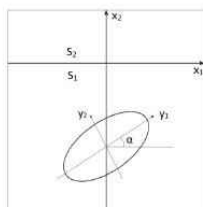


Рис. 1. Неоднородная плоскость с эллиптическим отверстием

2. Постановка задачи. Рассматривается квадратная пластина, состоящая из двух пластин S_1 и S_2 , выполненных из разных материалов. Отверстие расположено целиком в области S_1 . Центр эллипса находится на расстоянии H от линии соединения.

На границах $x_2 = \text{const}$ заданы напряжения $\sigma_{22} = p$, $\sigma_{12} = 0$, на линии соединения полупластин имеют место условия непрерывности напряжений и перемещений. Контур эллиптического отверстия L и границы $x_1 = \text{const}$ свободны от напряжений (рис. 1).

Петрухин Руслан Романович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: prr1612@gmail.com, тел.: +7(911)271-75-88

Малькова Юлия Вениаминовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: y.malkova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-00065

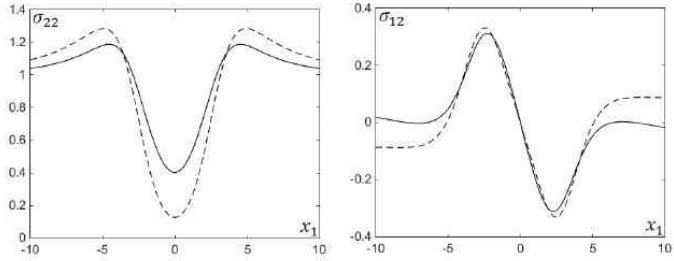


Рис. 2. Напряжения при $H = 3$

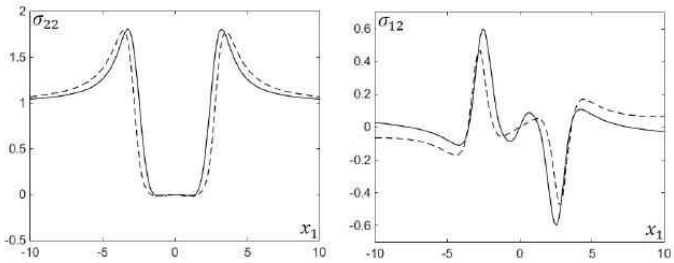


Рис. 3. Напряжения при $H = 1,01$

3. Напряжения на межфазной линии. В статьях [1, 2] аналитическими методами построено решение задачи для неоднородной плоскости с эллиптическим отверстием, расположенным вблизи линии раздела материалов. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма, которое решалось с использованием метода коллокаций. В силу плохой обусловленности матрицы системы алгебраических уравнений не удалось рассмотреть случай близкого расположения отверстия к границе соединения материалов. В данной работе аналогичная задача решена численно в пакете конечных элементов FreeFem++ [3]. Благодаря численному методу рассмотрены случаи, когда эллиптическое отверстие расположено близко к линии раздела

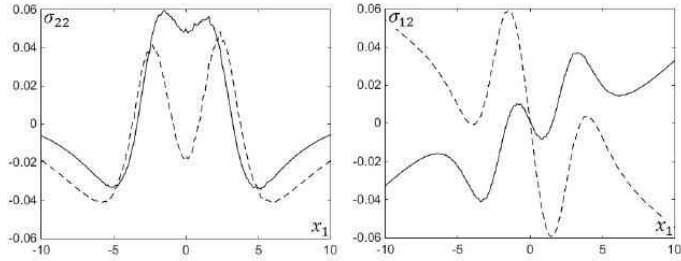


Рис. 4. Разность напряжений при $H = 3$

двух полуплоскостей.

Для расчетов заданы следующие безразмерные параметры: размер пластины 20×20 , границы пластины $x_1 = \pm 10$, $x_2 = \pm 10$, полуоси эллипса $a = 3$, $b = 1$, параметры материалов $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,8$, угол поворота осей эллиптического отверстия относительно линии раздела $\alpha = 0$. На рис. 2–4 пунктирной линией отмечены графики напряжений на линии соединения материалов при отношении модулей сдвига $\mu_2/\mu_1 = 3$, сплошной линией — $\mu_2/\mu_1 = 1/3$.

На рис. 4 представлены графики разности напряжений, вычисленных в пакете FreeFem++ и полученных в работе [1] аналитическими методами.

Отметим, что при увеличении размеров пластины не происходит изменения полученных результатов.

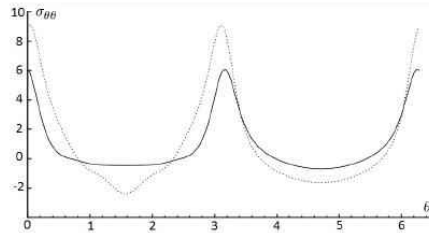


Рис. 5. Окружные напряжения при $H = 1,5$; $\alpha = 0$

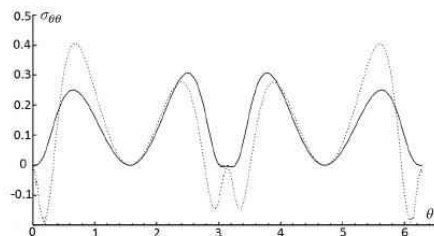


Рис. 6. Окружные напряжения при $H = 3,5$; $\alpha = \pi/2$

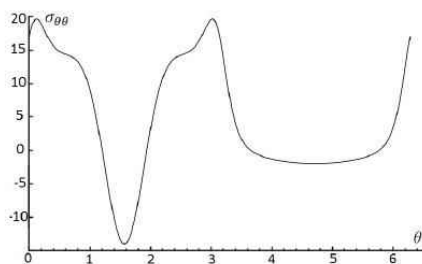


Рис. 7. Окружные напряжения при $H = 1,5$; $\alpha = 0$

4. Напряжения на контуре эллиптического отверстия. В пакете FreeFem++ построены графики окружных напряжений на контуре эллиптического отверстия (рис. 5, 6). Параметры материалов остались прежними.

В качестве частного случая рассмотрена полуплоскость с эллиптическим отверстием. На рис. 7 представлены окружные напряжения при $\sigma_{22} = p$, $\sigma_{12} = 0$ на верхней границе, на рис. 8 — для жестко фиксированной границы.

Из рис. 5–8 видно, что при приближении отверстия к границе значения напряжений увеличиваются.

5. Заключение. Рассмотрена задача определения напряжений неоднородной пластины с эллиптическим отверстием методом конечных элементов с использованием пакета Freefem++. Выполнены расчеты напряжений на линии раздела для различных параметров

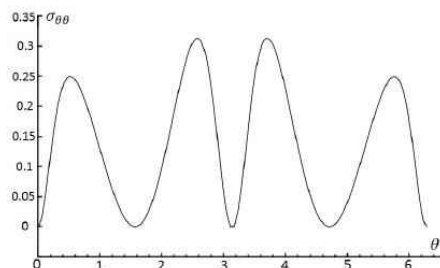


Рис. 8. Окружные напряжения при $H = 3,5$; $\alpha = \pi/2$

упругости полуплоскостей, разного расстояния от центра эллипса до линии раздела, а также ориентации эллипса в плоскости. Проведено сравнение полученных результатов с решением, полученным аналитическим методом. С использованием FreeFem++ выполнен расчет напряжений на контуре эллиптического отверстия для полуплоскости.

Литература

1. Петрухин Р. Р., Малькова Ю. В. Анализ напряжений неоднородной пластины с эллиптическим отверстием вблизи линии раздела двух материалов // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 219–224.
2. Мальков В. М., Малькова Ю. В., Петрухин Р. Р. Взаимодействие эллиптического отверстия с межфазной границей двух полуплоскостей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 3. С. 73–87.
3. FreeFem++ [Электронный ресурс]: URL:<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> (дата обращения 08.12.16).

УДК 004.94

Поваляев Н. Д., Моисеев О. С., Горбунов В. И.

Компьютерная и математическая модели мобильного трехколесного робота

Рекомендовано к публикации доцентом Алферовым Г. В.

1. Введение. С развитием технологий появилась необходимость дистанционного управления роботами [1–4] в случаях, когда невозможен визуальный контакт с самим роботом и средой, в которой он находится, в том числе и с задержкой по времени [5, 6]. Для подобного управления необходима система технического зрения, например как в [7], для детектирования окружающих объектов, программное обеспечение для добавления их на виртуальную сцену, отслеживания перемещения и управления.

2. Постановка задачи. Задача состоит в том, чтобы подготовить программно-аппаратный комплекс для проведения экспериментов с мобильным роботом с большой задержкой по времени. Необходимо создать систему, основанную на кинематической модели движения, способную осуществлять управление мобильным роботом [8, 9] и отслеживать его положение в пространстве.

3. Описание математической модели. Возьмем кинематическую модель движения, так как в динамической существует множество параметров, таких как трение между колесами и поверхностью, которые трудно установить и которые могут варьироваться в зависимости от окружающей среды. Введем обозначения: \vec{V}_A – скорость точки A , аналогично для точек B, C, D , \vec{V}_{DA} – скорость D относительно A (рис. 1). Пусть α_i – угол между соответствующим вектором скорости \vec{V}_i и осью Ox , точка A – полюс.

Поваляев Никита Денисович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nikita03565@gmail.com, тел.: +7(953)148-33-88

Моисеев Олег Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: oleg-98@list.ru, тел.: +7(931)303-58-73

Горбунов Владислав Игоревич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gorbinov.v93@gmail.com, тел.: +7(911)900-41-62

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-19-001-99

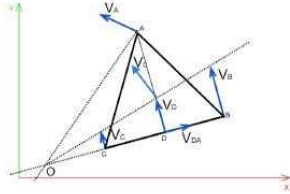


Рис. 1. Схема работа с указанными векторами скоростей

Вектор скорости

$$\vec{V}_0 = \frac{\vec{V}_A + \vec{V}_B + \vec{V}_C}{3}. \quad (1)$$

Для расчёта угловой скорости, если векторы скоростей не сонаправлены, строим мгновенный центр скоростей (точка O), находя точку пересечения перпендикуляров к скоростям \vec{V}_A и \vec{V}_C . Далее составим векторное соотношение:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}, \quad (2)$$

$$\vec{V}_D = \frac{\vec{V}_C + \vec{V}_B}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{\vec{V}_C + \vec{V}_B}{2} = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}, \quad (4)$$

Рассмотрим проекции на оси

$$Ox : \frac{1}{2}(V_C \cos \alpha_C + V_B \cos \alpha_B) = V_A \cos \alpha_A + V_{DA} \cos \alpha_{DA}, \quad (5)$$

$$Oy : \frac{1}{2}(V_C \sin \alpha_C + V_B \sin \alpha_B) = V_A \sin \alpha_A + V_{DA} \sin \alpha_{DA}, \quad (6)$$

$$V_{DA} = \omega AD. \quad (7)$$

Из соотношений (5)–(7) выражается искомая угловая скорость.

4. Техническое обеспечение. В системе используются:

1. Щелевые оптопары (рис. 2), установленные на креплениях колес и оптические диски, установленные непосредственно на каждое колесо, позволяют с высокой точностью определить скорость вращения каждого колеса.

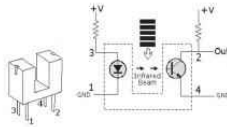


Рис. 2. Принципиальная схема щелевой оптопары

2. В месте крепления колеса к корпусу установлен потенциометр, который посредством шестерней связан с поворотным креплением колеса. При повороте колеса изменяется положение потенциометра и, таким образом, его сопротивление. С помощью платформы Arduino на основе данного изменения вычисляем угол поворота колеса.

3. По периметру платформы установлены девять тензодатчиков: два на каждой стороне и один на каждом углу платформы. С помощью них получаем данные об усилнии, которое прикладывает тележка к любому предмету извне, на основе чего получаем информацию о появлении контакта с чем-либо и возможность взаимодействовать с предметами, основываясь на прикладываемых силах.

4. Поворот и вращение колес осуществляется с помощью коллекторных электродвигателей ДПР-62-Н1-07А. Поворот осуществляется с помощью червячного редуктора.

5. Описание ПО для моделирования окружающей среды.

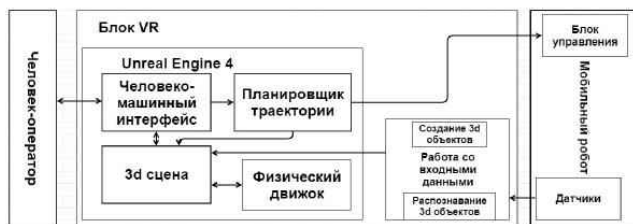


Рис. 3. Блок-схема архитектуры



Рис. 4. Мобильный трехколесный робот и его компьютерная модель

Симуляция создана на основе Unreal Engine 4 (рис. 3, 4) и может быть применена для создания системы виртуальной реальности [10]. Траектория движения задается оператором посредством изменения координат центра робота в каждый момент времени. Сцена и объекты на ней строятся при помощи системы технического зрения.

6. Вывод. Построенная система позволяет проводить эксперименты по дистанционному управлению с задержками по времени. Также вместо кинематической модели можно применить динамическую или модель с использованием нейросети.

Литература

1. Кулаков Ф. М. Телеуправление космическими роботами // Изв. РАН. ТИСУ. 2016. № 4. С. 141–192.
2. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. A., Chernakova S. A., Shymanchuk D. V. Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects // “Stability and Control Processes”; in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015 International Conference. 2015. P. 102–105.
3. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov’s Reading. 2015. P. 710–742.
4. Ефимова П. А., Шиманчук Д. В. Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.
5. Кулаков Ф. М., Копирующее и супервизорное управление роботами при большом запаздывании сигналов управления и обратной связи. Часть I // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1 (10). С. 55–61.
6. Kulakov F. M., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G. V. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 33–36. P. 1783–1796.
7. Gorbunov V. I., Kulakov F. M. Project of vision system for remote controlled space robots // Extreme robotics. Proceedings of the International Scientific and Technological Conference. Saint-Petersburg: «AP4Print». 2016. 480 p.

8. Kulakov F. M. et al. Information technology for interactive robot task training through demonstration of movement // Yu. P. Ko., Ri. J. Advances in intelligent robotics and collaborative automation. (River publishers series in automation, control and robotics). Danmark. River Publishers. 2015. 364 p.
9. Кулаков Ф. М. Тренажёр-интерфейс для управления космическим роботом // Материалы восьмой Всероссийской мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2015). Геленджик. 2015. 251 с.
10. Кулаков Ф. М. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2009. 168 с.

Численное решение плоских задач гидродинамики с использованием неявных схем для системы кинетических уравнений

1. Введение. Метод решеточных уравнений Больцмана в настоящее время применяется при решении самых разных задач механики жидкости и газа [1, 2]. Важным преимуществом метода по сравнению с традиционными методами вычислительной гидродинамики является высокий уровень параллелизма его алгоритмов и удобство для реализации расчетов на современных многопроцессорных системах. Метод основан на использовании явных схем, что приводит к его условной устойчивости. В работах [3–5] построены параметрические семейства неявных разностных схем для системы кинетических уравнений и получены необходимые условия устойчивости в виде неравенств на параметры. Цель настоящей работы состоит в практической проверке полученных условий и исследовании точности схем при решении двух тестовых задач вычислительной гидродинамики: задачи о каверне и второй задачи Стокса.

2. Параметрические семейства неявных разностных схем. В случае плоского течения рассмотрим систему кинетических уравнений, описывающую динамику ансамбля крупных частиц с временем свободного пробега δt , длиной свободного пробега l и скоростями $\mathbf{V}_i = V \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, $V = l/\delta t$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + V_{ix} \frac{\partial f_i}{\partial x} + V_{iy} \frac{\partial f_i}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(eq)}), \quad (1)$$

где f_i есть функции распределения частиц со скоростями \mathbf{V}_i , λ — время релаксации, $f_i^{(eq)}$ — функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла.

Прохорова Елизавета Александровна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: proxliza@mail.ru, тел.: +7(911)719-90-73

Кривовичев Герасим Владимирович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: g.krivovichev@spbu.ru, тел.: +7(905)230-88-53

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-00021 мол_a

В [3] построено шесть семейств разностных схем, которые можно задать следующей формулой:

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = A(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) + \\ + B(f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i^{(eq)}(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t)), \quad (2)$$

где t_j есть узел сетки по времени, построенной с шагом δt , \mathbf{r}_{kl} — узел пространственной сетки, построенной с шагом l . Входящие в (2) величины A и B зависят от безразмерных параметров $\sigma \in [0, 1]$, $\tau = \lambda/\delta t$.

3. Аппроксимационная вязкость. Аппроксимационная вязкость является важной характеристикой разностных схем. Коэффициент аппроксимационной вязкости представляет собой параметр, имеющий размерность коэффициента кинематической вязкости и стоящий на его месте в системе уравнений Навье–Стокса, получаемой для дифференциального приближения схемы. Если коэффициент аппроксимационной вязкости отличается от физического коэффициента вязкости, то решение, получаемое по схеме, может содержать нефизические эффекты.

С помощью метода Чепмена–Энскога в [5] получено выражение для аппроксимационной вязкости схем вида (2):

$$\nu = \left(1 + \frac{A - B}{2}\right) \frac{\tau l^2}{3\delta t}.$$

Так как решение уравнений Навье–Стокса имеет смысл только при неотрицательной кинематической вязкости, то необходимые условия устойчивости схем вида (2) могут быть получены из условия $\nu \geq 0$. В результате для каждого семейства найдены свои неравенства для τ и σ , некоторые из которых гарантируют безусловную устойчивость схем вида (2) при физически допустимых значениях параметров.

Для практической проверки полученных условий устойчивости рассмотрим схемы из семейства, определяемого значениями

$$A = -\frac{1 - \sigma}{\tau}, \quad B = -\frac{\sigma}{\tau}.$$

Относящиеся к этому семейству схемы применим к решению известных тестовых задач вычислительной гидродинамики.

4. Задача о каверне. В рамках данной задачи расчетная область представляет собой квадрат со стороной длины L , на трех границах которого компоненты скорости равны нулю. На верхней границе ненулевой считается горизонтальная компонента вектора скорости [6].

Предполагается, что в начальный момент времени скорость жидкости во всех внутренних точках области равна нулю, а плотность равна единице. Задача рассматривалась при $L = 1$ м, $T = 500$ с и $u_0 = 0,1$ м/с, где T определяет длину временного промежутка.

Численные расчеты проводились на сетках из 50×50 , 100×100 , 200×200 узлов. Рассматривались случаи схем первого и второго порядков аппроксимации, определяемых значениями $\sigma = 1$ и $\sigma = 1/2$ соответственно. Поскольку разностные схемы при полученных условиях устойчивости оказываются неявными, при их практической реализации следует в каждом узле сетки решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения применялся метод Ньютона. В качестве начального приближения использовалось решение, полученное на предыдущем шаге по времени. Рассматривались случаи чисел Рейнольдса $Re = 100, 400, 1000$. Полученные данные сравнивались с известным решением этой задачи [6]. В таблице представлены значения нормы вектора среднеквадратичных отклонений компонент вектора скорости, полученных при расчетах, от их значений, представленных в [6]. Как можно видеть, значения, полученные по схеме второго порядка, на порядок меньше, чем для случая схемы первого порядка.

Таблица. Значение I для рассматриваемой схемы при $\sigma = 1$ и $\sigma = 1/2$

σ	$Re = 100$	$Re = 400$	$Re = 1000$
1	$1,1237 \times 10^{-4}$	$5,1427 \times 10^{-4}$	$2,3744 \times 10^{-3}$
1/2	$3,0376 \times 10^{-5}$	$3,4718 \times 10^{-5}$	$2,2343 \times 10^{-4}$

Для проверки условия устойчивости проводились расчеты при значениях параметров $\tau < 1/2$, при которых явная схема, так называемое решеточное уравнение Больцмана, не является устойчивой. Рассматривались случаи: $\sigma = 1$, $\tau = 1/8$ на сетке из 100×100 узлов при $Re = 147$ и $\sigma = 1/2$, $\tau = 1/3$ на сетке из 100×100 узлов при $Re = 401$. При этих значениях параметров схемы оказались устойчивыми. На рис. 1 приведены графики компонент вектора скорости для случая $Re = 147$.

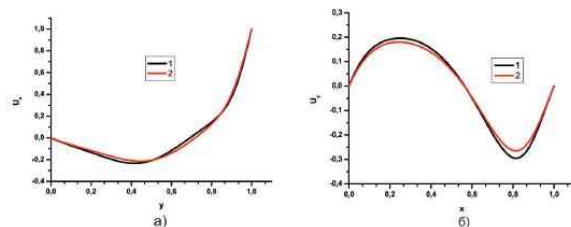


Рис. 1. Графики компонент вектора скорости: а) U_x при $y = 0,5L$, б) U_y при $x = 0,5L$; 1 — решение системы уравнений гидродинамики в переменных «завихренность – функция тока», 2 — результаты при $\sigma = 1$

5. Задача Стокса. В рамках второй задачи Стокса рассматривается движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее твердых тел. Несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей простое гармоническое колебательное движение с частотой ω [7].

Пусть движение жидкости происходит в области, определяемой полуплоскостью $x > 0$. Плоскость Oy совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону $v = V_0 \cos(\omega t)$. Аналитическое решение поставленной задачи [7]:

$$v = V_0 \exp(-x/\delta) \cos(x/\delta - \omega t),$$

где δ — глубина проникновения — расстояние, на котором амплитуда волны убывает в e раз, $\omega = 2\nu/\delta^2$ — частота.

При проведении численных расчетов вместо полуплоскости рассматривалась прямоугольная область с условиями периодичности на верхней и нижней границах и условием затухания на правой границе. Расчеты производились по схемам первого и второго порядков при различных числах Рейнольдса. На рис. 2 для сравнения приведены графики относительных погрешностей, полученных по неявным схемам первого и второго порядков, а также по явной схеме первого

порядка для случаев $Re = 50$ и $Re = 100$ соответственно.

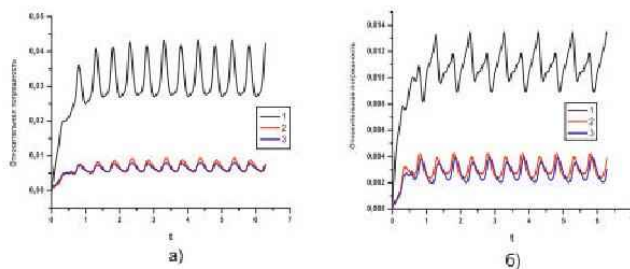


Рис. 2. График относительных погрешностей для случаев: а) $Re = 50$, б) $Re = 100$; 1 — явная схема первого порядка, 2 — неявная схема первого порядка, 3 — неявная схема второго порядка

Заметим, значения относительных погрешностей как функций времени для случая схемы второго порядка ниже, чем для схемы первого порядка. Для проверки корректности полученных условий устойчивости, как и при решении предыдущей задачи, рассматривались случаи, когда $\tau < 1/2$ и явная схема не является устойчивой. В качестве примеров таких расчетов рассмотрим $\tau = 1/3$, $\sigma = 1$ при $Re = 22,39$ и $\tau = 2/5$, $\sigma = 1/2$ при $Re = 46,66$, а также $\tau = 0,37$, $\sigma = 1/2$ при $Re = 50,45$.

6. Заключение. Работа посвящена применению неявных разностных схем для системы кинетических уравнений к решению двух плоских тестовых задач вычислительной гидродинамики. По результатам расчетов видно, что по сравнению со схемами первого порядка схемы второго порядка позволяют получать более точные результаты. При этом показана корректность полученных ранее необходимых условий устойчивости, в частности, по построенным схемам можно проводить расчеты в случаях, когда неприменима явная схема.

Литература

1. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models – an introduction. Berlin: Springer, 2005. 311 p.
2. Михеев С. А., Кривовичев Г. В. Модифицированные трехслойные разностные схемы для решения системы кинетических уравнений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 223–228.
3. Кривовичев Г. В. О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 19–27.
4. Прохорова Е. А., Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости параметрических семейств разностных схем для системы кинетических уравнений // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 235–240.
5. Кривовичев Г. В., Прохорова Е. А. Об аппроксимационной вязкости однопараметрических семейств решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2017. Т. 18. С. 41–52.
6. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics. 1982. No 3. P. 384–411.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1980. 736 с.

УДК 51-73, 537

Саакян А. Т., Виноградова Е. М.

Моделирование диодной системы с лезвийным катодом

1. Введение. Системы лезвийных катодов используются в вакуумной нано- и микроэлектронной оптике [1, 2]. В данной работе вычисляется распределение электростатического потенциала во всей области диодной системы на основе полевого катода. Катод лезвийной формы, поверхностью которого является часть плоскости, расположен на плоской подложке, анод — плоскость, параллельная подложке. Схематическое изображение диодной системы с лезвийным катодом в декартовой системе координат представлено на рис. 1. Потенциал катода и подложки равен нулю. На аноде задается граничное условие первого рода.

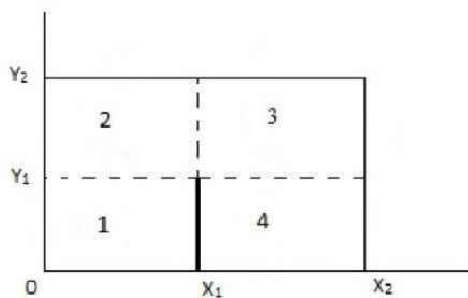


Рис. 1. Схематическое изображение диодной системы с лезвийным катодом

2. Математическая постановка задачи. Требуется найти распределение электростатического потенциала $U(x, y)$ во всей области рассматриваемой диодной системы.

Саакян Аветик Темиевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: avetik.saakyan@yandex.ru, тел.: +7(921)553-19-23

Виноградова Екатерина Михайловна — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(812)428-42-35

Параметры задачи: $x = 0$, $x = x_2$ — границы области диодной системы по переменной x ; $y = 0$, $y = y_2$ — границы области диодной системы по переменной y ; $y = 0$ — подложка катода; y_1 — высота катода; $x = x_1$, $0 \leq y \leq y_1$ — поверхность катода;

$U(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq x_2$ — потенциал подложки;

$U(x_1, y) = 0$, $0 \leq y \leq y_1$ — потенциал катода;

$U(0, y) = 0$, $0 \leq y \leq y_2$ — потенциал на границе области $x = 0$;

$U(x_2, y) = 0$, $0 \leq y \leq y_2$ — потенциал на границе области $x = x_2$;

$U(x, y_2) = F(x)$, $0 \leq x \leq x_2$ — потенциал подложки.

Распределение потенциала $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 0, \\ U(x_1, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq y_1, \\ U(0, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq y_2, \\ U(x_2, y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq y_2, \\ U(x, y_2) &= F(x), \quad 0 \leq x \leq x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Решение граничной задачи. При расчета распределения потенциала $U(x, y)$ вся внутренняя область диодной системы разбивается на 4 подобласти (см. рис. 1): 1 — $(0 \leq x \leq x_1, 0 \leq y \leq y_1)$; 2 — $(0 \leq x \leq x_1, y_1 \leq y \leq y_2)$; 3 — $(x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2)$; 4 — $(x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq y \leq y_1)$.

В каждой подобласти распределение потенциала $U_i(x, y)$, $i = \overline{1, 4}$, в соответствии с номером области можно записать в виде рядов Фурье [3, 5]:

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sinh[\alpha_k y]}{\sinh[\alpha_k y_1]} \sin \alpha_k x, \tag{2}$$

$$U_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\sinh[\lambda_m x]}{\sinh[\lambda_m x_1]} \sin \lambda_m (y - y_1) + \tag{3}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\sinh[\alpha_k(y_2 - y)]}{\sinh[\alpha_k(y_2 - y_1)]} + d_k \frac{\sinh[\alpha_k(y - y_1)]}{\sinh[\alpha_k(y_2 - y_1)]} \right) \sin \alpha_k x,$$

$$U_3(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\sinh[\lambda_m(x_2 - x)]}{\sinh[\lambda_m(x_2 - x_1)]} \sin \lambda_m(y - y_1) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \frac{\sinh[\beta_n(y_2 - y)]}{\sinh[\beta_n(y_2 - y_1)]} + f_n \frac{\sinh[\beta_n(y - y_1)]}{\sinh[\beta_n(y_2 - y_1)]} \right) \sin \beta_n(x - x_1), \quad (4)$$

$$U_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sinh[\beta_n y]}{\sinh[\beta_n y_1]} \sin \beta_n(x - x_1), \quad (5)$$

где $\alpha_k = \frac{\pi k}{x_1}$, $\lambda_m = \frac{\pi m}{y_2 - y_1}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{x_2 - x_1}$.

Распределение электростатического потенциала в виде разложений (2)–(5) удовлетворяет условиям непрерывности на границах раздела подобластей:

$$\bar{U}_1(x, y_1) = \bar{U}_2(x, y_1), \quad \bar{U}_2(x_1, y) = U_3(x_1, y), \quad U_3(x, y_1) = U_4(x, y_1).$$

Коэффициенты d_k , f_n в (3), (4) определяются из граничных условий (1) в явном виде:

$$d_k = \int_0^{x_1} F(x) \sin \alpha_k x \, dx, \quad f_n = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \sin \beta_n(x - x_1) \, dx,$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_k , b_m , c_n используются условия непрерывности поля по нормали к границам раздела областей:

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{\partial U_3}{\partial x} \right|_{x=x_1}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=y_1} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial y} \right|_{y=y_1}, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial U_3}{\partial y} \right|_{y=y_1} = \left. \frac{\partial U_4}{\partial y} \right|_{y=y_1}. \quad (8)$$

Выполнение условий (6)–(8) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k, b_m, c_n .

4. Заключение. В работе моделируется плоская диодная эмиссионная система на основе полевого острья лезвийной формы. Острие расположено на плоской подложке, анод — плоскость. Для решения задачи используется метод разделения переменных в декартовой системе координат. Геометрические размеры системы и значение потенциала на электродах представляют собой параметры задачи. Показано, что распределение электростатического потенциала системы являются решением граничной задачи (1) и представляется в виде рядов Фурье (2)–(5), коэффициенты которых определяются из системы линейных алгебраических уравнений.

Литература

1. Tang W., Shiffler D., Cartwright K.L. Analysis of electric field screening by the proximity of two knife-edge field emitters // Journal of Applied Physics. 2011. Vol. 110. 034905. P. 1–5.
2. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Мутул М. Г., Чэ-Чоу Шень. Расчёт электростатического потенциала диодной системы на основе полевого катода с острой кромкой // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 5. С. 1–4.
3. Vinogradova E. M., Egorov N. V., Televnyy D. S. Mathematical modeling of field emitter array // Vacuum. 2016. Vol. 127. P. 45–50.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.
5. Маслова Т. А., Виноградова Е. М. Моделирование эллиптического диода // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. №1. С. 194–198.

Моделирование задымления городов от лесных пожаров

Проблема пожаров и задымления территорий и, в частности, городов имеет длительную историю [1]. В конце июля, августе и начале сентября 2010 года в России на всей территории сначала Центрального федерального округа, а затем и в других регионах России возникла сложная пожарная обстановка из-за аномальной жары и отсутствия осадков. По состоянию на начало августа 2010 года в России пожарами было охвачено около 200 тыс. га в 20 регионах. Торфяные пожары повторяются каждый год.

Рост числа заболеваний и смертности в Москве представлен в [2, 3]. По данным Департамента здравоохранения Москвы на 9 августа 2010 года, смертность в Москве достигла уровня примерно 700 человек в день, тогда как в обычные дни она составляет 360–380 человек в день. Вызовы «скорой помощи» увеличились до 10 тысяч в день (в обычные дни — 7,5–8 тысяч). Общее число госпитализаций увеличилось на 10%, госпитализаций детей — на 17%. Основные поводы обращений — сердечно-сосудистые патологии, бронхиальная астма, гипертоническая болезнь, проблемы с легкими.

Целью работы является построение математической модели, описывающей задымления атмосферы города от нескольких источников возгорания, находящихся вне города. При описании динамического поведения частиц примеси в атмосфере будем использовать уравнение диффузии [4, 5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим распространение в толще атмосферы мелких частиц дыма. Пусть $C(x, y, z, t)$ — концентрация частиц примеси в слое атмосферы, заполняющей область

$$G : \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \leq z \leq h\},$$

Селихова Анастасия Владимировна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: stasyasel@yandex.ru, тел.: +7(953)374-48-38

Старков Владимир Николаевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vlad.stark@yandex.ru, тел.: +7(921)799-54-47

Степенко Николай Анатольевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nick_st@mail.ru, тел.: +7(921)945-29-32

где (x, y, z) — декартовы координаты, плоскость (x, y) параллельна поверхности земли, а ось z направлена по вертикали от неё ($z = 0$).

Нестационарное уравнение с учётом диффузии в пространстве, описывающее изменение концентрации частиц примеси, имеет вид [6]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

где D — коэффициент диффузии частиц примеси в воздухе.

Можно исключить диффузию по вертикали, учитывая незначительность потоков частиц на границах слоя $z = 0$ и $z = h$. Проинтегрировав уравнение по переменной z , тем самым введя среднюю по высоте концентрацию примеси, сведём задачу к двумерной

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

2. Источники загрязнения. Реальное дымовое загрязнение выглядит причудливо [7]. Рассмотрим три источника загрязнения, расположенных вне города и представляющих собой прямоугольники, параллельные осям, с площадями $S_1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, $S_2 = (x_4 - x_3)(y_4 - y_3)$ и $S_3 = (x_6 - x_5)(y_6 - y_5)$, где $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ — границы прямоугольников по осям.

Обозначим через C_1, C_2, C_3 мощности источников, пропорциональные площадям возгорания. Для трёх источников распределение примеси загрязнения имеет вид, записанный с помощью $\eta(\cdot)$ — функции Хевисайда:

$$\begin{aligned} C(x, y, 0) = & C_1(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2))(\eta(y - y_1) - \eta(y - y_2)) + \\ & + C_2(\eta(x - x_3) - \eta(x - x_4))(\eta(y - y_3) - \eta(y - y_4)) + \\ & + C_3(\eta(x - x_5) - \eta(x - x_6))(\eta(y - y_5) - \eta(y - y_6)). \end{aligned}$$

Решение уравнения диффузии имеет вид [8]

$$\begin{aligned} C(x, y, t) = & \frac{C_1}{2} \left(\Phi \left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{Dt}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \left(\Phi \left(\frac{y - y_1}{2\sqrt{Dt}} \right) - \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{y - y_2}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) + \frac{C_2}{2} \left(\Phi \left(\frac{x - x_3}{2\sqrt{Dt}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_4}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\Phi \left(\frac{y - y_3}{2\sqrt{Dt}} \right) - \Phi \left(\frac{y - y_4}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) + \frac{C_3}{2} \left(\Phi \left(\frac{x - x_5}{2\sqrt{Dt}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_6}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \left(\Phi \left(\frac{y - y_5}{2\sqrt{Dt}} \right) - \Phi \left(\frac{y - y_6}{2\sqrt{Dt}} \right) \right).$$

Здесь $\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\mu^2} d\mu$ — интеграл вероятностей.

Функция $C(x, y, t)$ даёт значения концентрации примеси по поверхности земли в различные моменты времени. На рис. 1 представлены графики уровней постоянной концентрации на поверхности $C(x, y, t) = \text{const}$ в различные моменты времени t .

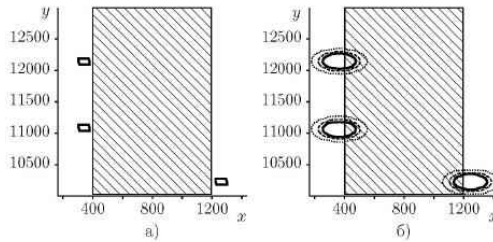


Рис. 1. а) начальное распределение загрязнения, б) через $t = 30$ дней

3. Исследование задымления городов при учёте розы ветров. Изменение концентрации примеси осуществляется также за счет переноса ветром. Дымовые шлейфы на севере Западно-Сибирской низменности, возникшие в результате массовой вспышки лесных и болотных пожаров во время грозы, хорошо видны из космоса [8]. Аналогичная картина наблюдается при извержении вулканов. Вулкан Эйяфьятлайокудль в Исландии в 2010 году вызвал авиакатастрофу в Европе.

Рассматривается только поперечная диффузия, так как продольная диффузия значительно меньше переноса примеси ветром.

Уравнение, описывающее изменение концентрации $C(x, y)$ в плоскости (x, y) при скорости ветра v имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{D}{v} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Можно записать распределение примеси на краю города $y = 0$ в виде функции Хевисайда (начальные условия). График одного из вариантов такой функции

$$C(x, 0) = C_0(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + C_1(\eta(x - x_3) - \eta(x - x_4))$$

изображен на рис. 2.

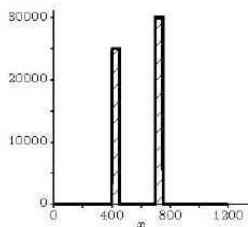


Рис. 2. Распределение дыма на границе города при $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4], y = 0$

Решением уравнения (1) будет [8]

$$C(x, y) = \frac{C_0}{2} \left(\Phi \left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{\frac{D}{v}y}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{\frac{D}{v}y}} \right) \right) + \frac{C_1}{2} \left(\Phi \left(\frac{x - x_3}{2\sqrt{\frac{D}{v}y}} \right) - \Phi \left(\frac{x - x_4}{2\sqrt{\frac{D}{v}y}} \right) \right),$$

где C_0, C_1 — концентрации примеси на границе города $y = 0$ при $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$.

График $C(x, y)$ для разных коэффициентов диффузии приведен на рис. 3, 4. Распределение дыма по всей площади города

при $D/(vL) > 1$, L — характерный размер города, представлено на рис. 3, а в случае $D/(vL) < 1$ — на рис. 4. Указаны границы одинаковых концентраций: $C = 4200$, $C = 5500$, $C = 6500$.

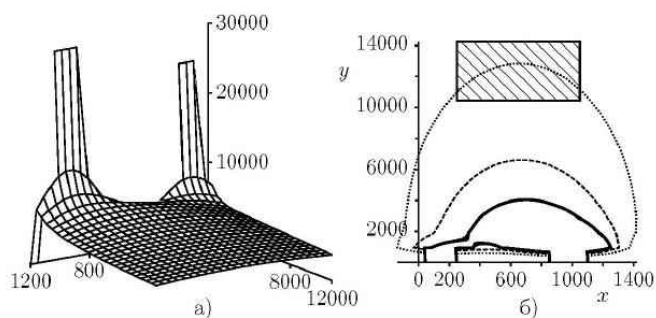


Рис. 3. а) график $C(x, y)$, б) линии одинаковых концентраций

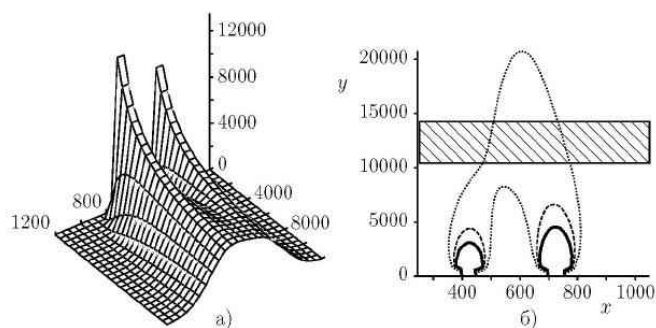


Рис. 4. а) график $C(x, y)$, б) линии одинаковых концентраций

Видим, что диффузионные и переносные процессы конкурируют друг с другом.

4. Заключение. Предлагаемая модель позволяет рассчитать распространение задымления в атмосфере вокруг города.

Литература

1. Раковская Э. М., Давыдова М. И. Физическая география России. Ч. 2. М.: Владос, 2001. 302 с.
2. Владимиров А. М., Ляхин Ю. И., Матвеев Л. Т., Орлов В. Г. Охрана окружающей среды. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 424 с.
3. Протасов В. Ф., Молчанов А. В. Экология, здоровье и природопользование в России. М.: Финансы и статистика, 1995. 528 с.
4. Абдулина К. А., Старков В. Н. Математическое исследование урона лесозаготовкам от насекомых-вредителей // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 96–100.
5. Бронникова А. И., Старков В. Н. Вывод зависимостей параметров паводка от формы рельефа // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 113–118.
6. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.
7. Фуряев В. В. Использование аэрокосмических снимков для изучения и оценки последствий лесных пожаров // Исследования лесов аэрокосмическими методами. Новосибирск: Наука, 1987. С. 85–98.
8. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.

Динамика металлической пластины, лежащей на резиновом слое

1. Введение. В работе рассматривается задача определения прогиба металлической пластины, лежащей на резиновом слое и подверженной динамической нагрузке. Задачи такого типа представляют практический интерес в технике и строительстве. Различные слоистые резинометаллические шарниры и амортизаторы используются в виброизолирующих системах различного технологического назначения. В частности, они применяются для защиты зданий и других объектов от техногенных вибраций. Для снижения воздействия сейсмической нагрузки применяются системы сейсмоизолирующих слоистых резинометаллических опор.

Исследованию резинометаллических конструкций различного вида посвящено много работ, например, [1–3]. В задачах о пластинах, лежащих на упругом основании, обычно предполагалось, что реакция упругого основания пропорциональна прогибу пластины. Коэффициент пропорциональности (коэффициент постели или коэффициент жесткости упругого основания) выбирался из некоторых соображений. В данной задаче реакция резинового основания определяется исходя из уравнений теории эластомерного слоя, разработанной в [3].

Предполагается, что деформация является плоской, а динамическая нагрузка гармонической, в этом случае задача сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и второго порядка. В работе найдено аналитическое решение задачи.

2. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная металлическая пластина толщиной h_0 , лежащая на упругом эластомерном слое толщиной h и длиной $2R$ (рис. 1). На металлическую пластину действует распределенная по всей площади динамическая нагрузка

Семенов Артем Евгеньевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: artyom.semenyuk@gmail.com, тел.: +7(911)200-27-93

Малькова Юлия Вениаминовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: y.malkova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-42-35

вида $\sigma_{33,plate} = q(t) = A \sin pt$ при $z = h + h_0$, где p — частота вынужденных или свободных колебаний.

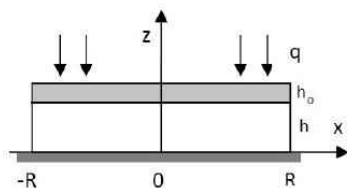


Рис. 1. Пластина на резиновом слое

металлической пластины и изгибающий момент вдоль края равны нулю:

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad x = \pm R.$$

Края резинового слоя свободны от напряжений. Нормальные напряжения слоя определяются формулой $\sigma_{33} = Ke$, где $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ — модуль объёмного сжатия, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона резины, e — относительное приращение объёма [3]. Тогда условие на краях $x = \pm R$ имеет вид $e = 0$.

Рассматривается плоская деформация, поэтому искомые функции зависят от двух переменных x, t : $w = w(x, t)$, $e = e(x, t)$.

Нагрузка на металлическую пластину состоит из заданной функции $q = A \sin(pt)$ и реакции резинового слоя, равной Ke . Динамическое уравнение для прогиба пластины имеет вид [3, 4]

$$D\Delta\Delta w + \rho h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - Ke, \quad (1)$$

где $D = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}$ — цилиндрическая жесткость, E_0 и ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона металлической пластины, ρ — плотность.

Отличие данного уравнения от классического уравнения для прогиба теории пластин состоит в наличии напряжений $\sigma_{zz} = Ke$, возникающих в резиновом слое в результате изгиба пластинки.

Основание резинового слоя неподвижно $w_{layer} = 0$, $z = 0$.

На поверхности контакта пластины и резинового слоя имеют место условия непрерывности напряжений и перемещений $\sigma_{33,layer} = \sigma_{33,plate}$, $w = w_{layer}$, $z = h$.

Пластина шарнирно опёрта по контуру $x = \pm R$, т. е. прогиб

Задача динамического сжатия резинового слоя сводится к решению уравнения Гельмгольца для функции относительного приращения объёма [3]

$$R^2 \Delta e - 12\bar{c}e = -\frac{12\bar{c}}{h}w, \quad (2)$$

где

$$\bar{c} = \frac{ck^2}{12\left(\frac{2}{k} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right)}, \quad c = (1 - 2\nu)\frac{R^2}{h^2}, \quad k = \frac{ph}{b},$$

b — скорость волны сдвига (скорость поперечных волн).

Уравнения (1), (2) нужно решать совместно.

3. Решение задачи. Решим систему уравнений (1), (2) с заданными граничными условиями методом разделения переменных. Пусть

$$e(x, t) = e^*(x) \sin pt, \quad (3)$$

$$w(x, t) = w^*(x) \sin pt. \quad (4)$$

Подставим соотношения (3) и (4) в уравнения (1), (2). В итоге получим два обыкновенных дифференциальных уравнения одной переменной x :

$$D \frac{d^4 w^*}{dx^4} - p^2 \rho h_0 w^*(x) = A - K e^*(x), \quad (5)$$

$$R^2 \frac{d^2 e^*}{dx^2} - 12\bar{c}e^*(x) + 12\bar{c}\frac{1}{h}w^*(x) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) выразим функцию $w^*(x)$ и подставим в (5). Получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^6 e^*}{d\xi^6} - 12\bar{c}\frac{d^4 e^*}{d\xi^4} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} R^4 \frac{d^2 e^*}{d\xi^2} + \frac{12\bar{c}}{D} R^4 \left(\rho h_0 p^2 - \frac{K}{h} \right) e^* + \frac{12\bar{c}}{Dh} R^4 A = 0. \quad (7)$$

Здесь введена безразмерная переменная $\xi = x/R$.

Решение будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения $e^*(x) = e_0^*(x) + e_1^*(x)$. Частное решение уравнения (7) имеет вид $e_1^*(x) = \frac{A}{K - \rho h h_0 p^2}$.

Найдём общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^6 e_0^*}{d\xi^6} - 12\bar{c} \frac{d^4 e_0^*}{d\xi^4} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} R^4 \frac{d^2 e_0^*}{d\xi^2} + \frac{12\bar{c}}{D} R^4 \left(\rho h_0 p^2 - \frac{K}{h} \right) e_0^* = 0. \quad (8)$$

Это решение ищем в виде $e_0^* = e^{\lambda\xi}$, где λ — корень характеристического уравнения

$$\lambda^6 - 12\bar{c}\lambda^4 - \frac{\rho h_0 p^2}{D} R^4 \lambda^2 + \frac{12\bar{c}}{D} R^4 \left(\rho h_0 p^2 - \frac{K}{h} \right) = 0. \quad (9)$$

При решении уравнения (9) получаются четыре различных вещественных корня и два комплексно сопряженных. С учетом четности функции $e_0^*(\xi)$ решение уравнения (8) примет вид [5]

$$e_0^*(\xi) = c_1 \operatorname{ch} \lambda \xi + c_2 \operatorname{ch} \alpha \xi \cos \beta \xi + c_3 \operatorname{sh} \alpha \xi \sin \beta \xi,$$

где c_i — неизвестные постоянные, подлежащие определению, α, β — действительная и мнимая части комплексного корня, λ — вещественный корень характеристического уравнения (9).

Для определения неизвестных постоянных используются граничные условия

$$e^* = 0, \quad \frac{d^2 e^*}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^4 e^*}{d\xi^4} = 0, \quad \xi = \pm 1.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (7) будет иметь вид

$$e^*(\xi) = c_1 \operatorname{ch} \lambda \xi + c_2 \operatorname{ch} \alpha \xi \cos \beta \xi + c_3 \operatorname{sh} \alpha \xi \sin \beta \xi + \frac{A}{K - \rho h h_0 p^2}.$$

Теперь можно определить функцию прогиба металлической пластины (4)

$$\begin{aligned} w(\xi, t) = & \left(c_1 h \operatorname{ch} \lambda \xi \left(1 - \frac{\lambda^2}{12c} \right) + \right. \\ & \left. + h \cos \beta \xi \operatorname{ch} \alpha \xi \left[c_2 - \frac{1}{12c} (2\alpha \beta c_3 + c_2 (\alpha^2 - \beta^2)) \right] + \right. \\ & \left. + h \sin \beta \xi \operatorname{sh} \alpha \xi \left[c_3 - \frac{1}{12c} (c_3 (\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha \beta c_2) \right] \right) \sin pt + \frac{Ah}{K - \rho h h_0 p^2} \sin pt. \end{aligned}$$

4. Заключение. Рассмотрена задача изгиба металлической пластины, лежащей на резиновом слое. Поставлена и аналитически решена динамическая задача, когда прогиб пластины и реакция резинового слоя находятся из системы связанных дифференциальных уравнений шестого порядка. На основе уравнений теории эластомерного слоя определена реакция упругого основания. Найдена функция прогиба металлической пластины.

Литература

1. Мкртычев О. В. Безопасность зданий и сооружений при сейсмических и аварийных воздействиях. М.: МГСУ, 2010. 152 с.
2. Семенов А. Е., Малькова Ю. В. Изгиб пластины, лежащей на упругом эластомерном слое // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 275–279.
3. Мальков В. М. Механика многослойных эластомерных конструкций. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 320 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник / под редакцией И. А. Бригера и Я. Г. Пановко. Т. 3. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
5. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Высшая школа, 1974. 768 с.

Моделирование мультипольной системы с электродами произвольной формы

1. Введение. Мультипольные системы широко используются в приборах электронной техники [1, 2]. Данная работа посвящена математическому моделированию периодической мультипольной системы с электродами произвольной формы. Мультипольная система представляет собой четное число электродов бесконечной длины одной и той же формы, однако сама форма электрода может быть произвольной. При решении граничной задачи используется метод разделения переменных в полярных координатах (r, α) . На каждом из электродов задан потенциал, имеющий противоположный знак с соседним электродом [3, 4].

2. Математическая постановка задачи. Для решения задачи заменим влияние каждого из $2M$ электродов системой N бесконечно тонких заряженных нитей с линейной плотностью зарядов τ_i и координатами (R_0, α_i) , $i = \overline{1, N}$. Значения параметров каждой из заряженных нитей можно подобрать таким образом, чтобы поверхность данного электрода совпала с поверхностью соответствующей эквипотенциали. В силу периодичности системы электродов можно выделить один сектор $0 \leq \alpha \leq \alpha_{N+1}$, где $\alpha_{N+1} = \pi/M$ — угол рассматриваемого сектора. Не нарушая общности задачи, зададим внешнюю границу системы $r = R_1$ по переменной r . Плоскости $\alpha = m\pi/M$, $m = \overline{0, M-1}$, — плоскости антисимметрии. Схематическое представление одного сектора мультипольной системы заряженных нитей приведено на рис. 1 в полярных координатах (r, α) .

Старикова Анна Валерьевна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: listrukova@ Rambler.ru, тел.: +7(911)719-53-92

Виноградова Екатерина Михайловна — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vincat2008@yandex.ru, тел.: +7(911)170-79-61

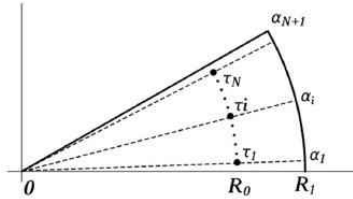


Рис. 1. Схематическое изображение системы заряженных нитей

Таким образом для нахождения распределения электростатического потенциала требуется решить граничную задачу для уравнения Пуассона [5]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho(r, \alpha)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

$$U(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_1,$$

$$U(r, \alpha_{N+1}) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_1, \quad (2)$$

$$U(R_1, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{N+1},$$

где

$$\rho(r, \alpha) = \begin{cases} \rho_i = \text{const}, & \text{при } |r - R_0| < \delta \text{ и } |\alpha - \alpha_i| < \varepsilon, \\ 0, & \text{при } |r - R_0| > \delta \text{ или } |\alpha - \alpha_i| > \varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

$$\tau_i = \lim_{\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} 4\rho_i R_0 \delta \varepsilon. \quad (4)$$

3. Решение граничной задачи. Решение граничной задачи (1)–(4) можно представить в виде разложения:

при $r < R_0$

$$U(r, \alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{\varepsilon_0 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha_{N+1}}} - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha_{N+1}}} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{r}{R_1} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha_{N+1}}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\alpha_i}{\alpha_{N+1}}\right)}{n} \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{\alpha_{N+1}}\right),$$
(5)

при $r > R_0$

$$U(r, \alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{\tau_i}{\varepsilon_0 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{R_1}{r} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha_{N+1}}} - \left(\frac{r}{R_1} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha_{N+1}}} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha_{N+1}}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\alpha_i}{\alpha_{N+1}}\right)}{n} \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{\alpha_{N+1}}\right).$$
(6)

Итак, распределение электростатического потенциала (5), (6) найдено в явном виде.

4. Заключение. Представлено математическое моделирование двумерной мультипольной системы с четным числом электродов произвольной формы. Для решения граничной задачи влияние каждого из электродов заменено влиянием системы бесконечно тонких заряженных нитей с линейной плотностью зарядов. Распределение потенциала во всей области исследуемой системы найдено в аналитическом виде.

Литература

1. Hawkes P. W. The correction of electron lens aberrations // Ultramicroscopy. 2015. Vol. 156. P. A1–A64.

2. Виноградова Е. М., Листрукова А. В. Математическое моделирование квадрупольной электростатической линзы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 19–27.
3. Виноградова Е. М., Старикова А. В. Математическое моделирование октупольной системы // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 290–294.
4. Vinogradova E. M., Starikova A. V. The multipole lens mathematical modeling // Proceedings of RuPAC2016. St. Petersburg, Russia. 2016. P. 535–537.
5. Мирюлюбов Н. Н., Костенко М. В. и др. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа. 1963. 416 с.
6. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Климаков А. А. Математическое моделирование диодной системы с полевым острием цилиндрической формы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 2. С. 20–23.
7. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Телевный Д. С. Расчет триодной полевой эмиссионной системы с модулятором // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. Вып. 2. С. 139–144.

Метод начальных функций в расчете защемленной пластинки

Постановка задачи. Рассматривается изгиб жестко заделанной по контуру тонкой (толщины δ) прямоугольной в плане пластинки со сторонами a и b под воздействием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q . Введем декартовую прямоугольную систему координат Oxy . Ее оси направим параллельно сторонам пластинки, а начало координат совместим с центральной точкой пластины так, что $x \in (-a/2, a/2)$, $y \in (-b/2, b/2)$. Прогиб $w(x, y)$ тонкой пластины удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (1)$$

Здесь $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона материала пластины. Остальные компоненты, описывающие напряженно-деформированное состояние пластины, вычисляются по известным формулам через прогиб $w(x, y)$:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad V_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где θ_x и θ_y — углы поворота, M_x и M_y — изгибающие моменты, V_x и V_y — обобщенные перерезывающие силы в сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ соответственно [1].

Суратов Владислав Алексеевич — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: suratovvlad@gmail.com, тел.: +7(981)875-65-86

Матросов Александр Васильевич — профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: avmatrosov@mail.ru, тел.: +7(921)443-25-15

Изгиб пластины описывается краевой задачей для уравнения в частных производных (1) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} x = \pm a/2: \quad w(\pm a/2, y) = 0, \quad \theta_x(\pm a/2, y) = 0, \\ y = \pm b/2: \quad w(x, \pm b/2) = 0, \quad \theta_y(x, \pm b/2) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Метод начальных функций. Краевую задачу (1)–(3) решаем методом начальных функций, используя подход В. А. Агарёва [2]. Для этого выразим неизвестную функцию прогиба пластины через компоненты напряженно-деформированного состояния $w^0 = w(0, y)$, $\theta_x^0 = \theta_x(0, y)$, $M_x^0 = M_x(0, y)$ и $V_x^0 = V_x(0, y)$, определенные на начальной линии $x = 0$ и называемые начальными функциями, в операторном виде:

$$w(x, y) = L_{ww}w^0 + L_{w\theta}\theta_x^0 + L_{wM}M_x^0 + L_{wV}V_x^0 + w_{part}. \quad (4)$$

Здесь L_{ww} , $L_{w\theta}$, L_{wM} , L_{wV} — неизвестные операторы-функции, зависящие от оператора дифференцирования $\beta = \partial/\partial y$ и переменной x , w_{part} — частное решение неоднородного уравнения (1).

Неизвестные операторы-функции находим из решения однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению, рассматривая его как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной x с параметром β — символом дифференцирования по переменной y . Подставляя в него решение

$$w = L_{ww}w^0 + L_{w\theta}\theta^0 + L_{wM}M_x^0 + L_{wV}V_x^0, \quad (5)$$

группируя члены при начальных функциях и учитывая их независимость, получаем для нахождения четырех неизвестных операторов-функций L_{wi} , где $i = w, \theta, M, V$, одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4}{dx^4}L_{wi} + 2\beta^2 \frac{d^2}{dx^2}L_{wi} + \beta^4 L_{wi} = 0 \quad (6)$$

со следующими начальными значениями для каждого оператора:

$$\begin{aligned} L_{ww}(0) = 1, \quad \frac{d}{dx}L_{ww}(0) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}L_{ww}(0) = -\beta^2\nu, \quad \frac{d^3}{dx^3}L_{ww}(0) = 0, \\ L_{w\theta}(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}L_{w\theta}(0) = 1, \quad \frac{d^2}{dx^2}L_{w\theta}(0) = 0, \quad \frac{d^3}{dx^3}L_{w\theta}(0) = -\beta^2(2 - \nu), \end{aligned}$$

$$L_{wM}(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}L_{wM}(0) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}L_{wM}(0) = -\frac{1}{D}, \quad \frac{d^3}{dx^3}L_{wM}(0) = 0,$$

$$L_{wV}(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}L_{wV}(0) = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}L_{wV}(0) = 0, \quad \frac{d^3}{dx^3}L_{wV}(0) = -\frac{1}{D}.$$

Эти начальные значения для производных операторов-функций легко получаются из соотношений (2) после подстановки в них решения (5), выполнения операций дифференцирования по переменной x и дальнейшего их вычисления при $x = 0$.

В результате решения дифференциального уравнения (6) с указанными начальными значениями операторы-функции получены в следующем виде:

$$L_{ww}(x) = \cos(x\beta) + \frac{1-\nu}{2}x\beta \sin(x\beta),$$

$$L_{w\theta}(x) = \frac{\nu+1}{2\beta} \sin(x\beta) + \frac{1-\nu}{2}x \cos(x\beta),$$

$$L_{wM}(x) = -\frac{x \sin(x\beta)}{2D\beta},$$

$$L_{wV}(x) = -\frac{\sin(x\beta)}{2D\beta^3} + \frac{x \cos(x\beta)}{2D\beta^2}.$$

Таким образом, построено общее решение однородного дифференциального уравнения. Добавив к нему частное решение неоднородного уравнения (1), которое может быть взято в виде

$$w_{part} = \frac{q}{24D}x^4,$$

получим общее решение неоднородного дифференциального уравнения.

Теперь можно получить представления для всех компонентов напряженно-деформированного состояния пластины, используя формулы (2), в виде, аналогичном представлению прогиба (4):

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= L_{ww}w^0 + L_{w\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{wM}M_x^0 + L_{wV}V_x^0 + \frac{q}{24D}x^4, \\
\theta_x(x, y) &= L_{\theta_xw}w^0 + L_{\theta_x\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{\theta_xM}M_x^0 + L_{\theta_xV}V_x^0 + \frac{qx^3}{6D}, \\
\theta_y(x, y) &= L_{\theta_yw}w^0 + L_{\theta_y\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{\theta_yM}M_x^0 + L_{\theta_yV}V_x^0, \\
M_x(x, y) &= D \{ L_{M_xw}w^0 + L_{M_x\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{M_xM}M_x^0 + L_{M_xV}V_x^0 \} - \frac{qx^2}{2}, \\
M_y(x, y) &= D \{ L_{M_yw}w^0 + L_{M_y\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{M_yM}M_x^0 + L_{M_yV}V_x^0 \} - \frac{\nu qx^2}{2}, \\
V_x(x, y) &= D \{ L_{V_xw}w^0 + L_{V_x\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{V_xM}M_x^0 + L_{V_xV}V_x^0 \} - qx, \\
V_y(x, y) &= D \{ L_{V_yw}w^0 + L_{V_y\theta}\theta_x^0 + \\
&\quad + L_{V_yM}M_x^0 + L_{V_yV}V_x^0 \}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Жестко заземленная прямоугольная пластинка. Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой пластинки симметрично относительно координатных осей, а поэтому достаточно рассмотреть четверть пластинки ($x \in [0, a/2]$, $y \in [0, b/2]$). При этом начальные функции $\theta_x^0(y) \equiv 0$ и $V_x^0(y) \equiv 0$. Неизвестные начальные функции $w^0(y)$ и $M_x^0(y)$ определим из системы дифференциальных уравнений, получающихся при удовлетворении граничным условиям на стороне $x = a/2$:

$$\begin{aligned}
L_{ww}|_{x=\frac{a}{2}} w^0 + L_{wM}|_{x=\frac{a}{2}} M_x^0 + \frac{q}{384D} a^4 &= 0, \\
L_{\theta_xw}|_{x=\frac{a}{2}} w^0 + L_{\theta_xM}|_{x=\frac{a}{2}} M_x^0 + \frac{qa^3}{48D} &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Решение системы (8) есть сумма решения однородной системы и частного решения неоднородной системы, которое может быть взято в виде

$$w_{part}^0(y) = \frac{q}{384D} a^3, \quad M_{x,part}^0(y) = \frac{qa^3}{24D}. \tag{9}$$

Решение однородной системы может быть получено через одну

функцию $\phi(y)$ в виде

$$\begin{aligned} w_{hom}^0(y) &= \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta} \right] \phi(y), \\ M_{x,hom}^0(y) &= [4 \cos(\beta/2) + (1 - \nu)\beta \sin(\beta/2)] \phi(y), \end{aligned} \quad (10)$$

удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\left(1 + \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \phi(y) = 0. \quad (11)$$

Общий интеграл уравнения (11) имеет вид

$$\phi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \exp^{k_i y}. \quad (12)$$

Здесь C_i — произвольные постоянные, а k_i — корни характеристического трансцендентного уравнения

$$1 + \frac{\sin(k)}{k} = 0,$$

являющиеся комплексными величинами.

Подставив (12) в (10), выполнив операции дифференцирования по переменной y , и сложив с частными решениями (9), получим представление начальных функций $w^0(y)$ и $M_x^0(y)$, содержащее произвольные константы C_i , которые позволят удовлетворить граничным условиям на сторонах $y = \pm b/2$ пластины.

Для этого вычислим перемещения w и углы поворота θ_y на указанных сторонах по формулам (7) с учетом полученных выражений для всех начальных функций. Возьмем от полученных выражений действительную часть (выражения будут комплексными), разложим их в окрестности нуля в ряд Тейлора и приравняем необходимое число членов этих рядов нулю, чтобы полученная система линейных алгебраических уравнений относительно конечного числа сохраняемых в решении (12) произвольных констант C_i оказалась замкнутой. Решив ее, получим приближенные аналитические представления (7) для всех компонентов напряженно-деформированного состояния жестко заземленной пластины.

На рис. 1 представлены прогиб w в сечении $y = 0$ и изгибающий момент M_y на краю пластины $y = -b/2$. Из рис. 1 б) видно, что при удалении от точки разложения $x = 0$ на краю $y = -b/2$ у изгибающего момента наблюдаются некоторые колебания. Это говорит о том, что следует использовать большее количество членов в представлении (12) функции $\phi(y)$.

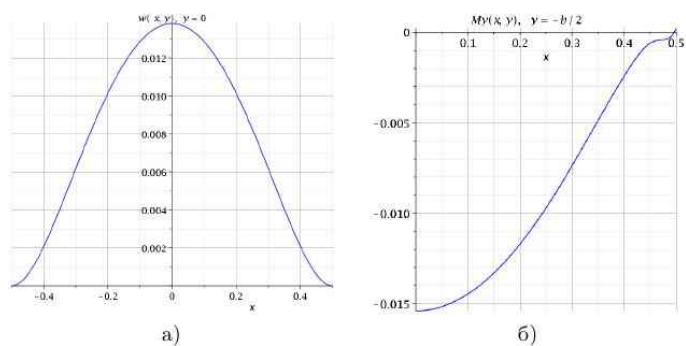


Рис. 1. а) прогиб, б) изгибающий момент

Заключение. Показана эффективность применения метода начальных функций для расчета защемленной по всему контуру тонкой пластины. Граничные условия на двух противоположных сторонах удовлетворяются точно, тогда как на другой паре сторон они удовлетворяются приближенно. В работе для этого использовались разложения в ряды Тейлора перемещений и углов поворота на этой паре сторон пластины. Также представляет интерес использовать для приближения метод коллокаций, метод наименьших квадратов и другие подходы.

Отметим, что метод начальных функций как универсальный подход к решению краевых задач теории упругости и строительной механики используется для решения как плоских задач теории упругости [3, 4], так и пространственных задач [5–7].

В заключение стоит сказать, что задача изгиба тонких пластин при различных условиях опирания несмотря на ее долгую историю продолжает интересовать исследователей [8, 9].

Литература

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1966. 636 с.
2. Агарёв В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд. АН УССР, 1963. 204 с.
3. Матросов А. В. Сходимость степенных рядов в методе начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 1. С. 41–51.
4. Матросов А. В. Численно-аналитический расчет балок-стенок на линейно-упругом основании // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2011. № 2. С. 14а–21.
5. Галилеев С. М., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете слоистых плит // Прикладная механика. 1995. Т. 31. № 6. С. 64–71.
6. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 256–262.
7. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). 2014. P. 96.
8. Роговский С. Т. Задача о напряженном состоянии шарнирно опертой полосовидной пластинки, нагруженной сосредоточенной силой // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 240–244.
9. Семенюк А. Е., Малькова Ю. В. Изгиб пластины, лежащей на упругом эластомерном слое // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 275–279.

Применение модифицированного алгоритма А* для построения траектории обхода препятствий колесным роботом

1. Введение. В данный момент тема робототехники и, в частности, движения в среде с препятствиями является одной из самых востребованных, так как автоматизация процессов — одно из основных направлений развития нашего общества.

2. Постановка задачи. Для нахождения траектории, при движении по которой мобильный робот избегает столкновения с препятствиями, необходимо модифицировать алгоритм А*. Аналогичная проблема рассмотрена в [1–3].

Целью данной работы является описание движения мобильного колесного робота, построение карты окружающей среды, изменение алгоритма А* для применения к рассматриваемой задаче, разработка программного обеспечения, реализующего полученный алгоритм.

3. Описание движения колесного мобильного робота. Различные модели, описывающие движение роботов подробно рассмотрены в [4–6]. Движение робота будем исследовать в декартовой системе координат с центром в точке (0,0) на карте окружающей среды. Робот представляем в форме прямоугольника с соотношением сторон 1:2. Так как колесный робот не может двигаться во все стороны, выделяем шесть основных направлений движения (рис. 1). Для определения местоположения робота в текущий момент времени необходимо знать только координату, соответствующую левому верхнему краю робота.

Федоров Виктор Михайлович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: victor-fyodorov@ya.ru, тел.: +7(981)859-20-25

Шарлай Артем Сергеевич – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: sharlayar@mail.ru, тел.: +7(911)961-71-40

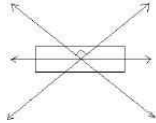


Рис. 1. Основные направления движения колесного робота

В данной задаче рассматривается движение, при котором сохраняется угол поворота относительно рассматриваемой системы координат после перемещения в любом из возможных направлений.

4. Построение карты окружающей среды. Карта окружающей среды представлена в форме карты-сетки. Размер ячеек выбирается в зависимости от необходимой точности. При этом, чем меньше размер ячеек, тем дольше будет работать алгоритм обхода препятствий. При ширине робота в 10 пикселей и длине в 20 пикселей в результате сравнения полученных результатов для разных ячеек был определен размер ячейки 5:5 пикселей. Кроме того, ячейки выбираются таким образом, что робот занимает ровно восемь ячеек.

Полученные ячейки разделяем на два типа (рис. 2):

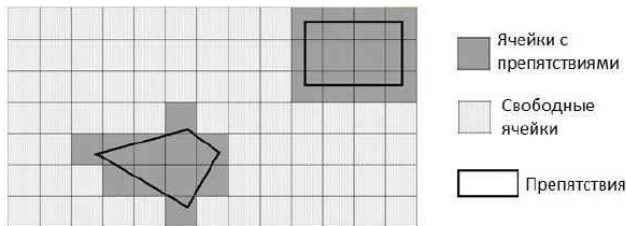


Рис. 2. Пример карты окружающей среды

1. Свободные — это те ячейки, через которые робот может совершать беспрепятственное движение;
2. Ячейки, содержащие в себе препятствия.

5. Применение алгоритма A* (A-star). Данный алгоритм подробно рассмотрен в [7]. Его особенностью является использование

эвристики. На практике существует множество различных эвристических функций H , которые можно применить в этом алгоритме. В работе для реализации алгоритма используется эвристическая функция $H = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$, определяющая расстояние от точки до точки.

Так как стандартный алгоритм A^* исследует восемь направлений возможного движения, а мы рассматриваем только шесть, то необходимо его модифицировать.

Принцип работы модифицированного алгоритма A^* :

1. Строим карту местности, отмечая на ней начальное положение робота и целевую точку (рис. 3). В данной модификации начальному положению робота будет соответствовать левая верхняя ячейка, принадлежащая роботу.

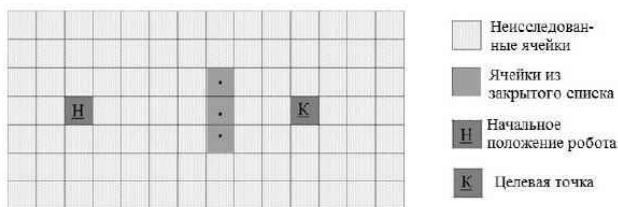


Рис. 3. Пример карты

2. Создаем два списка ячеек — открытый и закрытый. В открытом списке изначально находится только ячейка, соответствующая начальному положению робота, в закрытом — ячейки, содержащие препятствия. Первоначальное графическое отображение открытого и закрытого списка представлено на рис. 4.
3. Введем функцию $L = H + l$, где H — эвристическая функция, l — расстояние от начального положения робота до текущего.
4. Сортируем открытый список по возрастанию функции L , соотв.

ячейке. Берем за рассматриваемую ячейку первую из получившегося списка.

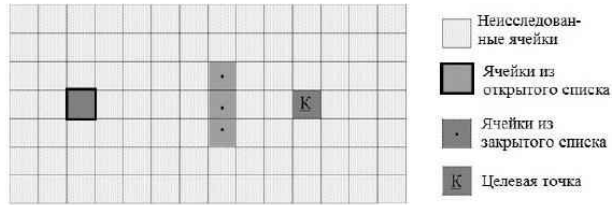


Рис. 4. Пример первоначального графического отображения открытого и закрытого списка

5. Рассматриваем шесть соседних ячеек, в которые можно попасть за одну итерацию. Если данные ячейки, а также ячейки, необходимые для совершения движения из предыдущей ячейки в текущую не принадлежат закрытому списку, то добавляем их в открытый, иначе — в закрытый (см. рис. 5).

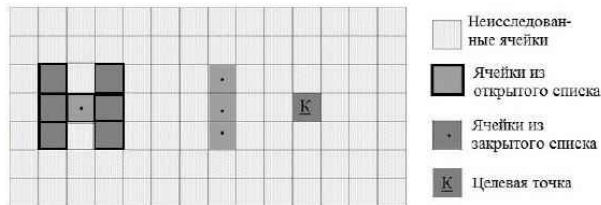


Рис. 5. Пример графического отображения открытого и закрытого списка

6. Если в открытом списке есть ячейка, соответствующая целевой точке, то переходим к следующему пункту, иначе — возвращаемся к пункту 2.
7. По полученным данным строим искомую траекторию.

6. Результаты. Создана модификация алгоритма A^* построения траектории обхода препятствий колесным роботом. В качестве начальной ячейки робота выбрана ячейка с координатами (100,100), в качестве целевой — ячейка с координатами (350,150). Получены следующие результаты работы данного алгоритма:

1. Построена карта-сетка окружающей среды.
2. С помощью созданного программного обеспечения, реализующего данную модификацию алгоритма A^* , получена траектория обхода различных препятствий (см. рис. 6, 7).

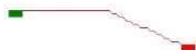


Рис. 6. Движение без препятствий

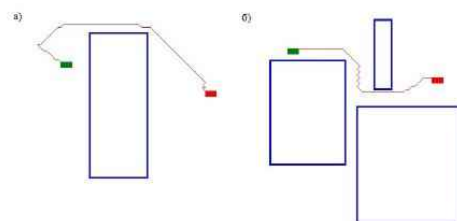


Рис. 7. а) движение с одним препятствием; б) движение с группой препятствий

Литература

1. Ефимова П. А., Кулаков Ф. М., Алферов Г. В., Шиманчук Д. В., Шарлай А. С. Управление многосвязными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления. Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 121–122.
2. Кулаков Ф. М., Алферов Г. В., Шарлай А. С. Кинематические модели манипуляционных роботов // Потенциал современной науки. № 2. 2014. С. 38–41.
3. Кулаков Ф. М., Алферов Г. В., Нечаев А. И. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 168 с.
4. Малафеев О. А., Андреева М. А., Алферов Г. В. Теоретико-игровая модель поиска и перехвата в n-секторном регионе плоскости // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 652–658.
5. Малафеев О. А., Салимов В. А., Шарлай А. С. Алгоритм оценки банка кредитоспособности клиентов при наличии коррупционной составляющей // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. № 1 (28). 2015. С. 35–38.
6. Pichugin Y. A., Alferov G. V., Malafeyev O. A. Parameters estimation in mechanism design // Contemporary Engineering Sciences. 2016. Vol. 9, No 4. P. 175–185.
7. Герасимов В. Н., Михайлов Б. Б. Решение задачи управления движением мобильного робота при наличии динамических препятствий // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приборостроение. 2012. № 6. С. 83–92.

УДК 539.3

Чжао Ш.

Алгоритм расчета напряженного состояния пластинки с эллиптическим отверстием в MATLAB

Рекомендовано к публикации профессором Пронина Ю. Г.

1. Введение. Решение задач о плоском напряженном состоянии упругих тел может быть осуществлено с помощью графического интерфейса PDE Toolbox пакета MATLAB [1, 2]. Однако для учета возможного изменения конфигурации границ, например, вследствие механохимической коррозии [3], необходимо разработать собственную программу расчета напряжений в теле, которая послужит составной частью общей программы для расчета тел с переменной границей. Данная работа посвящена исследованию поведения пластины в окрестности эллиптического отверстия, малого по сравнению с размерами всей пластины. Аналитически такие задачи сводятся к исследованию бесконечной плоскости с отверстием. В программном комплексе можно исследовать только тела конечных размеров, поэтому возникает вопрос о выборе размеров пластины, позволяющих избежать влияния краевого эффекта [4] на распределение напряжений вблизи контура отверстия, а также об аппроксимации этого контура.

2. Постановка задачи и некоторые теоретические факты. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости о бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием при одноосном растяжении интенсивности p , решение которой уже найдено. Аналитическое решение показывает, что максимальное напряжение появляется в вершинах эллипса на оси, перпендикулярной к направлению растяжения, и определяется формулой ([5], с. 111) $\sigma = p(1 + 2b/a)$, где $2b$ — ось эллипса, перпендикулярная к направлению растяжения, а $2a$ — другая ось.

Нас интересует относительная погрешность конечно-элементного решения данной задачи в пакете MATLAB по сравнению с аналити-

Чжао Шисян — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zhaoshixiang@yandex.ru, тел.: +7(964)322-38-24

ческим решением. С этой целью необходимо разработать и проанализировать алгоритм решения данной задачи без использования графического интерфейса пакета PDE Toolbox. При численном решении задачи следует учитывать следующие факторы: 1) размер пластины в MATLAB не может быть задан бесконечным; 2) время вычислений существенно возрастает при увеличении размеров пластины и увеличении числа отрезков ломаной (гладкий контур эллипса при решении аппроксимируется ломаной).

В качестве расчетной модели можно было бы использовать квадратную пластину (с длиной стороны D) с отверстием в виде N -угольника, вершины которого лежат на рассматриваемом эллипсе. Однако с целью экономии ресурсов целесообразно проводить расчеты только для четверти пластины (ввиду наличие двух осей симметрии в данной задаче).

Классическая задача теории упругости описывается системой тензорных уравнений Коши, равновесия и обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(u\nabla + \nabla u), \quad \nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad \sigma = C : \varepsilon. \quad (1)$$

PDE Toolbox способен решать уравнения следующего вида:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \otimes \nabla u) + au = f. \quad (2)$$

Для решения плоских задач теории упругости, необходимо положить, что m, d, a — нулевые тензоры второго ранга, а коэффициент c — тензор четвертого ранга в виде (4×4) -матрицы. Чтобы свести систему (1) к виду (2), запишем первое и третье уравнения системы (1) в виде $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_l u_k + \partial_k u_l)$, $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$. Далее перейдем от тензорной записи к матричной:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ 0,5(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) \\ 0,5(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) \\ \partial_2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ \partial_2 u_1 \\ \partial_1 u_2 \\ \partial_2 u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + 2G & 0 & 0 & \mu \\ 0 & G & G & 0 \\ 0 & G & G & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \mu + 2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \end{pmatrix},$$

где $G = E/(2(1+\nu))$, $\mu = 2G\nu/(1-\nu)$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Отсюда находятся компоненты тензора c для уравнения (2):

$$c = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11[2 \times 2]} & \bar{C}_{12[2 \times 2]} \\ \bar{C}_{21[2 \times 2]} & \bar{C}_{22[2 \times 2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + 2G & 0 & 0 & \mu \\ 0 & G & G & 0 \\ 0 & G & G & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \mu + 2G \end{pmatrix}. \quad (3)$$

3. Алгоритм решения. Рассмотрим алгоритм в MATLAB.

3.1. Задание объекта модели. На первом шаге с помощью функции `model = createpde(n)` создаем объект модели нашей задачи. Число n отвечает за количество уравнений в системе (2), которое совпадает с количеством уравнений равновесия, т. е. $n = 2$.

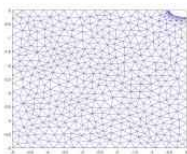


Рис. 1. Четверть пластинки

3.2. Задание геометрии области. Для задания геометрии области нужно вызвать функцию `dl = decsg(gd,sf,ns)`, где gd — матрица геометрии области (см. [1], с. 670–672), sf — формула связи геометрических примитивов в строке, ns — названия областей в массиве. Выходным аргументом `dl` является матрица декомпозиционной геометрии.

В нашем случае имеем:

```
R1 = [3;4;-D/2;0;0;-D/2;0;0;-D/2;-D/2]; P1 = [2;N;x;y];
R1 = [R1;zeros((length(P1)-length(R1)), 1)]; gd = [R1,P1];
ns = char('R1','P1'); ns = ns'; sf = 'R1 - P1';
```

где x , y — абсциссы и ординаты узлов на границе эллипса в виде столбца. Они задаются в виде `phi = 0:2*pi/N:(1-1/N)*2*pi`; `x = a*cos(phi)`; `y = b*sin(phi)`. Далее применяем функцию `geometryFromEdges(model,dl)`, чтобы включить декомпозиционную геометрию в объект модели.

3.3. Задание граничных условий. В исходной задаче на левой и правой кромках пластины действуют нормальные растягивающие напряжения интенсивности p ; остальные кромки пластины считаются свободными. В этом случае для четверти пластинки граничные условия задаются таким образом: на левой, нижней кромках и на контуре отверстия значения напряжений соответственно равны

$-p$, 0 и 0 (условия типа Неймана); на правой кромке перемещение в горизонтальном направлении равно нулю (условие типа Дирихле), а на верхней кромке перемещение в вертикальном направлении равно нулю. В MATLAB граничные условия задаются функцией `applyBoundaryCondition()`. Для примера покажем задание граничных условий на левом и правом краях четверти пластинки:

```
applyBoundaryCondition(model,'neumann','Edge',2,'g',[-p;0],'q',[0 0;0,0]);
applyBoundaryCondition(model,'dirichlet','Edge',N/4+4,'h',[1 0;0
0],'r',[0;0]);
```

где параметры g и q представляют собой коэффициенты уравнения: $n(c \times \nabla u) + qu = g$, а параметры h и r есть коэффициенты уравнения $hu = r$. Чтобы узнать номера этих двух краев в уже построенной декомпозиционной геометрии, можно вызвать функцию `pdegplot(model,'EdgeLabels','on')`, которая построит график геометрии области, и посмотреть номера нужных краев.

3.4. Задание коэффициентов уравнения. Задать коэффициенты системы (2) можно применив функцию `specifyCoefficients(model,'m',0,'d',0,'c',c,'a',0,'f',f)`. В MATLAB требуется задать коэффициенты в определенном порядке в виде столбца. В нашей задаче матрица коэффициента c в (3) является симметричной, так что достаточно задать её в виде

$$c = \begin{pmatrix} c(1) & c(2) & c(4) & c(6) \\ & c(3) & c(5) & c(7) \\ & & c(8) & c(9) \\ & & & c(10) \end{pmatrix}.$$

Согласно (8), имеем $G = E/(2 * (1 + nu)); mu = 2 * G * nu/(1 - nu); c = [mu + 2 * G; 0; G; 0; G; mu; 0; G; 0; mu + 2 * G]$. Значения модуля Юнга E и коэффициента Пуассона nu задаются численно. Объёмные силы f полагаем нулевыми.

3.5. Триангуляция. Функция `generateMesh(model,'Hmax',0.3,'Hgrad',1.8,'GeometricOrder','quadratic')` триангулирует нашу пластинку, т. е. разбивает её на трёхугольные конечные элементы. Параметр `Hmax` устанавливает максимальную длину стороны трёхугольных элементов. Параметр `Hgrad` задает скорость роста размеров элементов в отдалении от мелких объек-

тов; он принимает значения только от 1 до 2. Оптимальный выбор параметров $Hmax$ и $Hgrad$ может привести как к уменьшению времени вычислений, так и к увеличению точности расчётов. Поскольку нас интересует распределение напряжений в окрестности отверстия, то вблизи него сетку делаем меньше, чем на удалении от него. Численные эксперименты при различных значениях пар $Hmax$ и $Hgrad$ показали, что значения (0,3; 1,8) являются наиболее подходящими для данной задачи по скорости и по точности.

3.6. Численное решение. Команда `result = solvepde(model)` создает объект решения типа `StationaryResults`. В объекте содержится информация о перемещениях, градиентах перемещений по оси x и y . Зная перемещения и их производные, с помощью закона Гука и уравнения Коши определяются все компоненты напряжений, а затем и главные напряжения.

4. Заключение. Таким образом, разработан алгоритм расчета напряженного состояния пластинки с эллиптическим отверстием в MATLAB, с помощью которого произведен выбор оптимальных вычислительных параметров для минимизации погрешности решения.

Литература

1. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 1082 с.
2. Колпак Е. П. Вычисления в Matlab. Казань: Бук, 2016. 184 с.
3. Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 33–44.
4. Пронина Ю. Г. Краевая дислокация и сосредоточенная сила в упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми вырезами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 4. С. 120–124.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 572 с.

УДК 517.958, 539.3

Шувалов Г. М., Костырко С. А.

Второе приближение метода возмущений в задаче о твердом теле со слабоискривленной границей

1. Введение. Механические повреждения изделий электронной и оптоэлектронной промышленности часто являются результатом хрупкого разрушения или пластической деформации, вызванных поверхностными дефектами и неоднородностями, которые образуются в процессе производства и эксплуатации устройств [1, 2]. В работе [3] проведен анализ напряженного состояния и морфологической устойчивости поверхности твердого тела с использованием первого приближения метода возмущения. Однако, для описания эволюции поверхности напряженного твердого тела необходимо учитывать нелинейные слагаемые в эволюционном уравнении.

В данной статье рассматривается эффект концентрации напряжений, вызванный слабоискривленной поверхностью твердого тела. Используя второе приближение в методе разложения по малому параметру.

2. Постановка задачи. В качестве модели твердого тела, находящегося в условиях плоской деформации, рассмотрим неоднородную упругую полуплоскость комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$

$$\Omega = \{z : x_2 < \varepsilon f(x_1), x_1 \in R^1\}, \quad f(x_1) = f(-x_1) = f(x_1 + \lambda). \quad (1)$$

На бесконечности в Ω действует постоянное продольное напряжение T , при этом все остальные напряжения, а также угол поворота ω материальной частицы равны нулю:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^\infty &= T, \quad \sigma_{22}^\infty - i\sigma_{12}^\infty = 0, \quad \omega^\infty = 0, \\ \sigma_{ij}^\infty &= \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{ij}, \quad \omega^\infty = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Шувалов Глеб Михайлович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: shuvalov.gleb@gmail.com, тел.: +7(921)387-58-63

Костырко Сергей Алексеевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: s.kostyrko@spbu.ru, тел.: +7(921)406-47-62

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00260

Считаем, что поверхность твердого тела свободна от внешней нагрузки:

$$\sigma_n(\zeta) = 0, \quad \zeta = x_1 + i\varepsilon f(x_1). \quad (3)$$

Требуется определить напряженное состояние твердого тела с учетом второго приближения в методе разложения по малому параметру.

3. Напряженное состояние твердого тела. Согласно [4, 5], при плоской деформации вектор напряжений $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ можно выразить через комплексные потенциалы Гурса–Колосова [6]:

$$\sigma_n = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - \left(\Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(\bar{z})} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega. \quad (4)$$

Полагая в (4) $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ при $x_2 \rightarrow -\infty$ и учитывая (2), получим

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \Phi(z) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \Upsilon(z) = \frac{T}{4}. \quad (5)$$

Переходя к пределу в (4) при $z \rightarrow \zeta$ и принимая во внимание (3), получим граничное условие для комплексных потенциалов Φ и Υ :

$$\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})} - \left(\Upsilon(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi'(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha} = 0. \quad (6)$$

В соответствии со вторым приближением метода возмущений [7, 8] представим функции Φ и Υ , а также функцию $e^{-2i\alpha}$ при фиксированном значении $\alpha = \alpha_1$ в виде ряда по степеням ε :

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^2 \frac{\varepsilon^k}{k!} \Phi_k(\zeta), \quad \Upsilon(\zeta) = \sum_{k=0}^2 \frac{\varepsilon^k}{k!} \Upsilon_k(\zeta),$$

$$e^{-2i\alpha_1} = 1 + 2 \sum_{k=0}^2 (-i\varepsilon f'(x_1))^{k+1}.$$

В свою очередь, граничные значения функций Φ_k и Υ_k разложим в соответствующие ряды Тейлора в окрестности прямой $\text{Im } \zeta = 0$,

рассматривая переменную x_1 как параметр:

$$\Phi_k^-(\zeta) = \sum_{m=0}^2 \frac{[i\varepsilon f(x_1)]^m}{m!} \Phi_k^{(m)-}(x_1),$$

$$\Upsilon_k^+(\bar{\zeta}) = \sum_{m=0}^2 \frac{[-i\varepsilon f(x_1)]^m}{m!} \Upsilon_k^{(m)+}(x_1),$$

где $\Phi_k^-(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta - 0} \Phi_k^+(z)$, $\Upsilon_k^+(\bar{\zeta}) = \lim_{z \rightarrow \zeta - 0} \Upsilon_k(z)$.

После чего, принимая во внимание граничное условие (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε^k , приходим к последовательности краевых задач

$$\Upsilon_k^+(x_1) - \Phi_k^-(x_1) = F_k(x_1).$$

Таким образом, в каждом приближении функции $\Phi_k(\zeta)$ и $\Upsilon_k(\bar{\zeta})$ находятся из решения задачи Римана – Гильберта:

$$\Theta_k(\zeta) = \begin{cases} \Upsilon_k(\zeta), & \text{Im } w > 0, \\ \Phi_k(\zeta), & \text{Im } w < 0, \end{cases} \quad \Theta_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_k(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau. \quad (7)$$

Функции $F_k(x_1)$ при $k = \overline{0, 2}$ с учетом (5) определяются по формулам [4]

$$F_0(\zeta) = 0, \quad F_1(\zeta) = if'(x_1)T,$$

$$F_2(\zeta) = 2(f'(x_1))^2 T + 2if(x_1) \left(\Phi_1'(\zeta) + 2\overline{\Phi_1'(\zeta)} + \Upsilon_1'(\zeta) \right) + \quad (8)$$

$$+ 4if'(x_1) (\Phi_1(\zeta) + \Upsilon_1(\zeta)).$$

Подставляя в (4) угол между направлением площадки (вектором t) и вещественной осью x_1 , равный сначала α , а затем $\theta = \alpha + \pi/2$, и складывая результаты, получим выражения для нормальных и касательных напряжений в локальной системе координат n, t в каждом приближении:

$$\sigma_{ttk} + \sigma_{nnk} = \text{Re } \Phi_k(z), \quad \sigma_{nnk} + i\sigma_{ntk} = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - \quad (9)$$

$$- \left(\Upsilon_k(\bar{z}) + \overline{\Phi_k(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega.$$

4. Результаты вычислений. С учетом второго приближения в методе разложения по малому параметру найдем распределение напряжений на слабоискривленной поверхности твердого тела под действием продольных усилий на бесконечности $\sigma_{11}^{\infty} = T$. Морфологию поверхности опишем посредством функции [3]

$$f(x_1) = -\lambda \cos(2\pi x_1/\lambda). \quad (10)$$

Используя выражения (7)–(9), получим

$$\sigma_{tt}(\zeta) = T [1 + 4\pi \cos(2\pi x_1/\lambda)\varepsilon + 16\pi \cos(2\pi x_1/\lambda)\varepsilon^2]. \quad (11)$$

Заметим, что линейная по ε часть в (11) совпадает с решением, полученным в [3].

Решение задачи (1), (2), (10) было также получено с использованием метода конечных элементов (МКЭ) для различных значений параметра ε . При этом рассматривалась конечно-элементная модель, состоящая из плоских элементов с линейными функциями формы. При всех значениях ε проведен анализ на внутреннюю сходимость метода. Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица. Коэффициент концентрации напряжений $K = \max \sigma_{tt}/T$

ε	1-е приближение	2-е приближение	МКЭ
0,01	1,13	1,14	1,18
0,03	1,38	1,52	1,59
0,1	2,26	3,84	3,58

Как видно из таблицы, при параметре $\varepsilon = 0,01$, что соответствует очень слабой искривленности поверхности тела, вклад второго приближения достаточно мал (относительная разность решения с учетом первого приближения и второго приближения составила 2%).

Однако при более сильном возмущении поверхности тела с параметром $\varepsilon = 0,1$ вклад второго приближения составил 70% и отличается от решения, полученного с использованием конечно-элементного анализа на 7%.

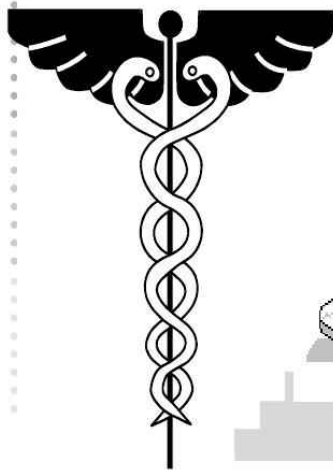
5. Заключение. Получено решение задачи о нахождении напряжений в твердом теле со слабоискривленной границей с учетом второго приближения в методе разложения по малому параметру. Рассмотрен пример решения данной задачи для тела, свободная поверхность которого описывалась синусоидальной функцией. Представлено сравнение результатов, полученных с использованием данного метода и метода конечных элементов. В дальнейшем предполагается

использовать полученное решение для нелинейного анализа морфологической устойчивости поверхности твердого тела под действием диффузионных процессов.

Литература

1. Греков М. А. Математика и механика внутренних и поверхностных дефектов // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 19–144.
2. Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 33–44.
3. Gao H. Stress concentration at slightly undulating surfaces // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1991. Vol. 39. P. 443–458.
4. Grekov M. A., Kostyrko S. A. Surface effects in an elastic solid with nanosized surface asperities // International Journal of Solids and Structures. 2016. Vol. 96. P. 153–161.
5. Grekov M. A., Kostyrko S. A. A multilayer film coating with slightly curved boundary // International Journal of Engineering Science. 2015. Vol. 89. P. 61–74.
6. Костырко С. А., Шувалов Г. М. Влияние поверхностной диффузии на морфологическую устойчивость поверхности многослойного пленочного покрытия // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 190–195.
7. Kostyrko S. A., Shuvalov G. M. Morphological stability of multilayer film surface during diffusion processes // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015. P. 392–395.
8. Костырко С. А., Шувалов Г. М. Влияние поверхностного напряжения на морфологическую устойчивость многослойного пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Молодой ученый. 2015. № 9 (89). С. 14–17.

3. *Математические
модели медико-
биологических систем*



УДК 51-76; 519.254

Каюмова Д. Ш., Ширококов М. В.

Поиск оптимального набора признаков в задаче распознавания кодирующих и некодирующих областей ДНК

Рекомендовано к публикации доцентом Балыкиной Ю. Е.

1. Введение. В работе рассматривается вопрос о распознавании кодирующих и некодирующих участков молекулы ДНК. В ходе транскрипции, т. е. переноса генетической информации с молекулы ДНК на молекулу РНК, образуется так называемая пре-мРНК (precursor mRNA или pre-mRNA), представляющая собой незрелую одиночную цепь, которая, в свою очередь, сначала разбивается на более мелкие сегменты, называемые интронами и экзонами. Интроны представляют собой некодирующую последовательность нуклеотидов в гене, которая удаляется в процессе сплайсинга для созревания конечной молекулы РНК. Экзоны, в свою очередь, относятся к кодирующей части гена. Во время трансляции (синтез белка из аминокислот на матрице мРНК) интроны «выбрасываются», а экзоны «склеиваются» последовательно для получения конечной цепи мРНК. Такой процесс вырезания и вставки называется сплайсингом. Верное распознавание интронов и экзонов может существенно помочь в решении ряда других задач, связанных с молекулярной биологией, например, задачи поиска мотивов в ДНК [1]. Для решения задачи поиска мотивов, разделенных между экзонами (т. е. не непрерывных участков ДНК) обычно прибегают к алгоритмам поиска общих подпоследовательностей, что влечет за собой высокую вычислительную сложность. Но, имея знания о границах экзонов и интронов в генах, эту задачу можно значительно упростить.

2. Постановка задачи. Для задачи распознавания кодирующих областей практически в любой ее постановке необходимо определить

Каюмова Диана Шамилевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: koshreality@gmail.com, тел.: +7(931)967-95-09

Ширококов Михаил Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mvshirobokov@ya.ru, тел.: +7(953)350-66-70

формальные признаки, отличающие кодирующие области от некодирующих. Часто в этой роли выступают отдельные нуклеотиды (аденин, цитозин, тимин и гуанин, в дальнейшем обозначаемые A , C , T и G соответственно), которые используются в сочетании с некоторыми другими признаками. Например, при использовании марковских моделей ими являются наборы скрытых или явных состояний. Однако сами по себе они малоинформативны. Например, в молекуле ДНК BRCA2-201 (ДНК раковых клеток молочной железы) [2] их распределение по интронам и экзонам представлено в таблице 1.

Таблица 1. Распределение нуклеотидов в молекуле BRCA2-201

	A	C	G	T
интрон	36,2	16,8	18,4	28,6
экзон	33,1	17,7	19,6	29,26

Из таблицы 1 видно, что наибольшая разница наблюдается в распределении аденина, но и там различие составляет порядка 10%. Назовем число $\frac{36,2}{33,1} \approx 1,09$ *мощностью* признака A . Целью данной работы является поиск наиболее мощных признаков с учетом неточностей оценок параметров их распределений.

3. Поиск признаков. Будем искать признаки в виде непрерывных последовательностей из k нуклеотидов. Из указанного выше определения мощности следует, что для каждого признака необходимо оценить вероятность его появления в интроне и экзоне. Рассмотрим произвольную последовательность нуклеотидов длиной n как набор из $n - k + 1 = \tilde{n}$ подстрок длины k . Тогда каждую такую подстроку можно истолковать как реализацию дискретной случайной величины, имеющей множеством значений все возможные варианты написания строки длиной k в алфавите из 4 символов. Обозначим ξ_k случайную величину, описывающую появление строк длины k в экзоне, и η_k — случайную величину, описывающую появление таких строк в интронах.

Таблица 2. Случайные величины, отвечающие за появление признаков в экзонах и интронах

	S_1^k	...	S_j^k	...	$S_{\tilde{n}}^k$
ξ_k	\tilde{P}_1^k	...	\tilde{P}_j^k	...	$\tilde{P}_{\tilde{n}}^k$
η_k	\tilde{q}_1^k	...	\tilde{q}_j^k	...	$\tilde{q}_{\tilde{n}}^k$

Основываясь на полученной выборке, можно оценить вероятность появления строки S_j^k как

$$\hat{p}_j^k = \frac{N(X_i^k = S_j^k)}{\tilde{n}},$$

где в числителе стоит число элементов выборки, совпадающих с S_j^k . Можно показать, что эта оценка, аналогично оценке параметра распределения бернуллиевской случайной величины, является несмещенной, состоятельной, эффективной и асимптотически нормальной [3]. Свойство асимптотической нормальности будет использовано в дальнейших рассуждениях.

В силу того, что условная вероятность появления подстроки S_j^k пропорциональна априорной вероятности его появления, оценка мощности признака в виде $\frac{\hat{p}_j^k}{\hat{q}_j^k}$ может быть неадекватна в случае небольшого объема выборки и больших k . Например, для строк *ACGT* и *TGCA* признак *ACGT* имеет бесконечную мощность по этой формуле, но, тем не менее, очевидно неинформативен, поскольку его отсутствие во второй строке говорит скорее не о малой условной, а о малой априорной вероятности появления. Поэтому наличия точечной оценки недостаточно для оценки мощности признака. Необходимо построить доверительный интервал. Асимптотический доверительный интервал с уровнем значимости α строится аналогично интервалу для параметра распределения бернуллиевской случайной величины [3] и выписывается как

$$\left(\hat{p}_j^k - t_{\tilde{n}-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}_j^k(1-\hat{p}_j^k)}}{\sqrt{\tilde{n}-1}}, \hat{p}_j^k + t_{\tilde{n}-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}_j^k(1-\hat{p}_j^k)}}{\sqrt{\tilde{n}-1}} \right),$$

где $t_{\tilde{n}-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента. Теперь для оценки мощности признака можно использовать отношение нижней границы интервала для p_j^k к верхней границе для q_j^k или наоборот, в зависимости от того, какая точечная оценка больше. Такая оценка обладает одним важным свойством. Пусть мы хотим получить все признаки, обладающие мощностью не менее F с вероятностью α (назовем такие признаки «сильными»). Для этого будем последовательно перебирать все признаки длины 1, 2, 3 и т. д.

Рассмотрим поведение относительной погрешности оценки вероятности появления этого признака, т. е. отношения размаха доверительного интервала к точечной оценке при увеличении k . Учтем при оценке этой погрешности, что условная вероятность \hat{p}_j^k пропорциональна априорной вероятности появления признака длины k , которая, очевидно, равна $\frac{1}{4^k}$:

$$t_{\bar{n}-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}_j^k (1 - \hat{p}_j^k)}}{\hat{p}_j^k \sqrt{\bar{n}} - 1} \approx t_{\bar{n}-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{\hat{p}_j^k \sqrt{\bar{n}}}} \sim t_{\bar{n}-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{2^k}{\sqrt{\bar{n}}} \sim 2^k.$$

Здесь в первом приближенном равенстве учтено, что при хоть сколько-нибудь большом k величина $\frac{1}{4^k}$ значительно меньше единицы и что \bar{n} имеет значение, превосходящее k на несколько порядков. Таким образом, видно, что относительная погрешность с ростом k возрастает экспоненциально, и поэтому для любого разумного порога минимальной мощности F должно найтись такое k_0 , что при $k > k_0$ дополнительных признаков, обладающих нужной мощностью с нужной вероятностью, появляться уже не будет. Данные рассуждения подтверждаются экспериментально: для цепочки ДНК BRCA2-201, имеющей длину $n = 10984$ [2], при минимальной мощности F от 1,5 до 2,5 и уровне значимости α от 85% до 99,99% k_0 не превосходит 7.

Рассмотрим вопрос о выборе α и F . Введем дополнительное ограничение. Пусть в произвольной последовательности длины m вероятность P обнаружить «сильный» признак будет не менее $1 - \varepsilon$, т. е. вероятность не обнаружить ни одного сильного признака будет не более ε . Тогда

$$(1 - P)^{m-k} \leq \varepsilon, \quad P \geq 1 - \varepsilon^{\frac{1}{m-k}}.$$

Из предположения о независимости отдельных признаков следует, что P можно вычислить как сумму вероятностей появления всех «сильных» признаков. Это предположение в точности не выполняется, но для приближения к нему из «сильных» признаков удаляются те, которые содержат другие в качестве подстрок. Тогда при заданном уровне ε из всех α и F нужно оставить только те, при которых совокупность вероятностей появления «сильных» признаков дает суммарную вероятность не меньше $1 - \varepsilon^{\frac{1}{m-k}}$. При этом внутри

оптимального множества α и F будут иметь выраженную отрицательную корреляцию: при увеличении одного из них будет падать другой, и наоборот. Зависимость при $\varepsilon = 0,01$, $m = 100$ и $k = 7$ показана в таблице 3.

Таблица 3. Зависимость уровня значимости α , мощности F и вероятностей обнаружения сильных признаков в экзонах и интронах

α	F	P_{exon}	P_{intron}
86	2,5	0,0567	0,0465
90	2,2	0,0491	0,0474
95	1,8	0,0451	0,0553
99	1,5	0,0561	0,0693

4. Заключение. Предложен метод поиска признаков в виде непрерывных подпоследовательностей нуклеотидов, позволяющих отличать интроны от экзонов внутри цепочки ДНК. К недостаткам метода следует отнести некоторую локальность: полученные для определенного типа ДНК признаки относятся именно к ДНК данного типа и не обязаны быть признаками интронов и экзонов для других типов ДНК. Тем не менее, кросс-валидация на цепочке BRCA2-201 показала, что даже простая проверка наличия данных признаков в ее части практически в 70% случаев верно указывает на принадлежность к интронам или экзонам. По сравнению с существующими алгоритмами такая точность, конечно, невелика, поэтому одним из направлений для дальнейшего исследования может стать разработка алгоритмов, эффективно использующих полученную информацию.

Литература

1. Dublin R., Eddy S., Krogh A., Mitchison G. Biological Sequence Analysis. Probabilistic Models of Proteins and Nucleic Acids. UK: Cambridge, 1998. 356 с.
2. Transcript: BRCA2-201 [Электронный ресурс]: URL:http://www.ensembl.org/Homo_sapiens/Transcript/Exons?db=core;g=ENSG00000139618;r=13:32889611-32973805;t=ENST00000544455 (дата обращения: 18.03.17).
3. Буре В. М., Париллина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.

УДК 57.087+616.5-006.81

Кириллова А. А.

Построение модели иммунного ответа при меланоме кожи

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Ореховым А. В.*

1. Введение. Каждый организм на протяжении своего жизненного цикла постоянно подвергается негативному воздействию болезнетворных вирусов, паразитов, аллергенов и прочих патогенных факторов. Способность защищать организм от вредоносных микробов и любых чужеродных веществ с целью поддержания гомеостаза организма и сохранять генетическую целостность организма называется иммунитетом, который осуществляет *иммунная система*.

Основной задачей иммунной системы является обнаружение потенциальных угроз для организма — *антигенов* (генетически чужеродных веществ) — и их уничтожение или подавление их патогенного действия. При меланоме кожи антигенами становятся собственные опухолевые клетки организма. Реакция организма на вредоносные объекты определяется как *иммунный ответ*, который разделяется на врожденный (естественный) и приобретенный (адаптивный).

На начальном этапе активируется врожденный иммунный ответ, осуществляющий первичное разрушение мутировавших патогенных клеток организма. Если у естественного иммунитета не получилось подавить угрозу, то запускается адаптивный иммунитет и начинают формироваться механизмы адаптивного иммунного ответа [1].

Меланома кожи является распространенным злокачественным заболеванием. В последнее время достигнут значительный прогресс в лечении меланомы кожи благодаря внедрению в практику новых иммунологических препаратов [2]. Основой их действия является активация иммунной системы человека.

Кириллова Анастасия Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: anastasiya.kirillova.2012@mail.ru, тел.: +7(911)027-16-23

В данной работе строится математическая модель иммунного ответа при лечении меланомы кожи методом иммунотерапии. Действие препарата нацеливает иммунную систему на опухолевую ткань и усиливает иммунный ответ организма. Влияние этого препарата будет учитываться при дальнейшем построении схемы иммунного ответа и его модели.

Динамика изменения количества лимфоцитов в различных популяциях является одним из основных показателей при иммунном ответе организма на патогенное воздействие. При математическом моделировании такой динамики необходимо учитывать пролиферацию различных типов лимфоцитов [3] и формирование их памяти [4].

2. Схема иммунного ответа. Покажем общую структуру иммунного ответа, включающего влияние рассматриваемого лекарственного препарата. Первыми с чужеродным антигеном взаимодействуют *антигенпрезентирующие клетки* (АПК), которые захватывают антиген, перерабатывают его и подают (презентируют) *хелперным Th-лимфоцитам* (Т-хелперам), распознающим антиген только в комплексе с АПК и стимулирующим иммунный ответ. Под АПК будем понимать *дендритные клетки* (ДК).

Все иммунные реакции формируются двумя эффекторными механизмами адаптивного иммунного ответа: клеточным иммунитетом и гуморальным. Так как рассматриваемый препарат в большей степени влияет на выработку Т-лимфоцитов, то будем рассматривать только клеточный иммунный ответ.

Т-хелперы усиливают работу *цитотоксических Тс-лимфоцитов* (Т-киллеры), являющихся основой иммунного ответа и отвечающих за клеточный иммунитет. Т-киллеры находят и разрушают неполноценные клетки организма путем прямого контакта с ними. В качестве популяции Th-, Тс-лимфоцитов будет выступать концентрация специфичной к определенному антигену части этой популяции.

В рамках модели лекарственный препарат вмешивается в процесс активации лимфоцитов АПК и запускает усиленный ответ Тс-лимфоцитов против опухолевых клеток.

Теперь представим структуру описанных процессов наглядно, разбив их на периоды. На начальном этапе происходит фагоцитоз (захват) незрелыми дендритными клетками антигена и дальнейший переход уже зрелых ДК в состояние АПК. На второй стадии — презентация антигена зрелыми ДК наивным Th-лимфоцитам

(не встречавшим ранее антиген) в лимфоузле и последующая активация Т-хелперов. На третьем этапе активируются цитоксические Тс-лимфоциты через взаимодействие с АПК в присутствии активированных хелперных Т-клеток, а также под влиянием лекарственного препарата. На четвертой стадии происходит пролиферация (деление) и дифференцировка Th-, Тс-лимфоцитов, и на завершающей — уход дифференцировавшихся Тс-лимфоцитов из лимфоузла и осуществление иммунного ответа путем разрушения патогенных клеток [1, 5].

3. Математическая модель. Согласно стандартным подходам к моделированию живых систем построена система обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваемой модели. Концентрацию антигена в организме, соответствующую размеру опухоли, примем за постоянную величину S . Ее изменение можно не учитывать, так как цель данной работы — исследование влияния лекарственного препарата на процесс активации эффекторных клеток (Тс-лимфоцитов). Модель содержит семь обыкновенных дифференциальных уравнений и одно уравнение в частных производных и строится на основе подхода и принципов, предложенных в работах [6, 7]:

$$\frac{dP_0}{dt} = \sigma_p - \varphi_p P_0 S - \omega_p P_0, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \varphi_p P_0 S - \omega_p P, \quad (2)$$

$$\frac{dH_0}{dt} = \sigma_h - \alpha_b \frac{P}{P + P^* H_0} H_0 - \omega_h H_0, \quad (3)$$

$$\frac{dH_1}{dt} = 2^n \alpha_b \frac{P}{P + P^* H_0} H_0 - \tilde{\omega}_h H_1, \quad (4)$$

$$\frac{dC_0}{dt} = \sigma_c - \alpha_p \frac{H_1}{H_1 + H^* C_0} \frac{PM}{PM + P^* C_0} C_0 - \omega_c C_0, \quad (5)$$

$$\frac{dM}{dt} = \hat{\lambda}_m(t) - \omega_m M, \quad (6)$$

$$\frac{dC_k}{dt} = 2^v \hat{p}_c(\nu) C(\nu, t) - \hat{\omega}_c(\nu) C_k. \quad (7)$$

Уравнение (1) описывает изменение концентрации незрелых ДК на периферии: первое и последнее слагаемые — гомеостаз клеток, второе слагаемое — перемещение в лимфоузел ДК, захвативших антиген, для его презентации Т-лимфоцитам.

Уравнение (2) описывает динамику концентрации ДК в лимфоузле: первое слагаемое — приток захвативших антиген ДК в лимфоузел и одновременный переход зрелых ДК в состояние АПК, второе — естественную убыль (апоптоз).

Уравнение (3) описывает динамику концентрации наивных Th-лимфоцитов: первое и последнее слагаемые — гомеостаз клеток, второе — их активация АПК, P^* — константа.

Уравнение (4) описывает динамику концентрации активированных Th-лимфоцитов: первое слагаемое — приток поделившихся n раз Th-лимфоцитов, константа n — число делений клеток, второе — естественную убыль.

Уравнение (5) описывает динамику концентрации наивных Tc-лимфоцитов: первое и последнее слагаемые — гомеостаз клеток; второе — активация Tc-лимфоцитов в результате встречи с АПК и воздействия лекарственного препарата, H^* — константа.

Уравнение (6) описывает динамику концентрации лекарства: первое слагаемое — поступление препарата извне; второе — естественную убыль.

Уравнение (7) описывает динамику концентрации эффекторных Tc-лимфоцитов: первое слагаемое — приток поделившихся цитотоксических Tc-лимфоцитов; второе — естественную убыль клеток, ν — константа, характеризующая максимальное число делений клеток.

Функция

$$\hat{\lambda}_m(t) = \begin{cases} \beta k, & t \in D, \\ 0, & t \in D, \end{cases}$$

где β — доза препарата, k — константа, D — день ввода препарата.

Будем рассматривать пролиферацию как процесс движения клетки по прямой пролиферации [6]. Опишем пролиферацию Tc-лимфоцитов дифференциальными уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\hat{p}_c(z) \frac{\partial C}{\partial z} - \hat{\omega}_c(z) C, \quad (8)$$

с начальным условием

$$C(0, z) = 0 \quad (9)$$

и граничным условием

$$C(t, z)|_{z=0} = \frac{\alpha_p H_1 P M C_0}{\widehat{p}_c(0)(H_1 + H^* C_0)(P M + P^* C_0)}, \quad (10)$$

где $\widehat{p}_c(z)$ и $\widehat{\omega}_c(z)$ — кусочно-гладкие функции скорости пролиферации и убыли Т-лимфоцитов соответственно, z — координата на прямой пролиферации.

Начальные условия модели имеют следующий вид:

$$P_0 = P_0^*, H_0 = H_0^*, C_0 = C_0^*, P \equiv 0, H_1 \equiv 0, M \equiv 0, C_k \equiv 0. \quad (11)$$

4. Заключение. Полученные уравнения (1)–(8) и условия (9)–(11) представляют собой модель иммунного ответа системы клеточного иммунитета при лечении меланомы кожи иммунологическим препаратом. Построенная модель позволяет выявить, как влияет лечебный препарат на конечное число эффекторных клеток (Тс-лимфоцитов), которые и будут бороться с опухолью. Это важно для эффективного воздействия на иммунную систему. Особенностью модели является использование дифференциального уравнения в частных производных, которое позволяет учитывать генетические особенности пролиферации лимфоцитов, напрямую зависящей от числа делений, пройденных клеткой.

Литература

1. Хаитов Р. М., Игнатъева Г. А., Сидорович И. Г. Иммунология: Учебник. М.: Медицина. 2000. 432 с.
2. Новик А. В., Балдуева И. А., Проценко С. А. и др. Современные методы иммунотерапии метастатической меланомы // Вопросы онкологии. 2016. Т. 62. № 5. С. 580–587.
3. Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шипкин В. И. Модель пролиферации и дифференцировки неоднородной клеточной популяции // В кн.: Математическое и компьютерное моделирование в биологии и химии. III Международная научная Интернет-конференция: Материалы конференции. 2014. С. 95–103.

4. Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шипкин В. И. Процесс формирования иммунной памяти Т-лимфоцитов и его зависимость от числа пройденных клетками делений // В сборнике: Устойчивость и процессы управления. Материалы III международной конференции. 2015. С. 487–488.
5. Хаитов Р. М., Ярилин А. А., Пинегин Б. В. Иммунология: атлас. М.: Гэотар-Медиа, 2011. 624 с.
6. Кузнецов С. Р. Математическая модель иммунного ответа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 72–87.
7. Kuznetsov S.R. Mathematical model of the humoral immune response: focusing on Th17 autoimmunity // Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10. № 2. С. 455–472.

УДК 616.12-073.97-71

Маслов А. А., Лепихин Т. А.

Адаптивная фильтрация сетевой помехи электрокардиосигнала

1. Введение. Для определения различных патологий состояния человека современная функциональная диагностика имеет обширный инструментарий методов исследования. Наиболее доступным и распространенным из них является электрокардиография, применяемая в основном в кардиологии, но также используемая и в других областях [1]. Данный инструмент основан на проведении исследований изменяющихся во времени биоэлектрических сигналов сердца.

Для регистрации ЭКГ используются электрокардиографы. Как и любые другие устройства записи, кардиографы восприимчивы к различного рода шумам, в частности, при съеме ЭКГ возможны помехи, возникающие при плохом контакте электродов с кожей, мышечного тремора, а также так называемая сетевая наводка — электрические колебания, исходящие из других источников. В настоящей работе описан один из возможных методов адаптивной фильтрации сетевой наводки (ранее реализованный авторами с помощью программного пакета LabVIEW [2]), а также проведено сравнение описанного метода со стандартным, наиболее часто используемым для достижения данных целей.

2. Общие сведения. Одной из возможных проблем при съёмке или расшифровке ЭКГ может стать определенный вид шума, так называемая сетевая наводка (сетевая помеха), представляющая собой правильные пилообразные колебания с частотой 50 (60) Hz. Стандартными способами устранения помехи является проверка всех контактов на электродах, выключение электроприборов поблизости. Если же помеха все равно остается, то впоследствии необходимо провести предварительную обработку полученного электрокардиосигнала, в целях получения полезной незашумленной составляющей для

Маслов Алексей Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexej.maslov@gmail.com тел.: +7(999)217-29-81

Лепихин Тимур Андреевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: LepikhinTA@gmail.com, тел.: +7(904)648-82-14

проведения дальнейшего анализа. ЭКГ с сетевой наводкой представлена на рис. 1.

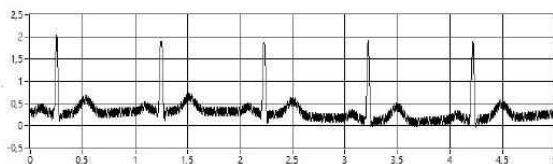


Рис. 1. ЭКГ с сетевой наводкой

3. Принцип фильтрации. Для подавления сетевой наводки используют фильтры трех видов:

- неадаптивные режекторные фильтры;
- ФНЧ или полосовые фильтры;
- адаптивные фильтры.

Фильтры первого типа применяются достаточно редко, так как сложны для реализации. ФНЧ или полосовые фильтры используются очень часто, но в некоторых случаях могут приводить к подавлению высокочастотных составляющих полезного сигнала, а также в случае сигнала с низкой частотой дискретизации не всегда могут быть применены. В свою очередь адаптивные системы фильтрации более привлекательны для решения данных задач в связи с тем, что способны подстраиваться в процессе работы под амплитуду и фазу наводки, более просты в реализации, чем неадаптивные режекторные и не приводят к подавлению полезных составляющих сигнала [3]. В качестве адаптивных фильтров самыми удобными являются винеровские фильтры.

Входной сигнал — $x[k]$. Сигнал ошибки формируется в виде $\varepsilon[k] = d[k] - y[k]$. Шум $\nu[k]$ — стационарный случайный процесс, некоррелированный с сигналом $x[k]$.

Смысл адаптивной фильтрации заключается в том, что формируется сигнал $y[k]$, максимально близкий к $\nu[k]$, а коэффициенты адаптивного фильтра подстраиваются таким образом, что минимизируется дисперсия сигнала ошибки [4, 5]:

$$E_{min}[\varepsilon^2] = E[\varepsilon^2] + E[(\nu - y)^2] + 2E[s(\nu - y)].$$

Наиболее часто используются две разновидности алгоритма: LMS и RMS. Рассмотрим LMS-алгоритм, ранее описанный авторами в работах [2, 6].

4. Практическая реализация. Решение задачи реализовано с помощью программного пакета LabVIEW и дополнительного модуля LabVIEW Biomedical Toolkit, позволяющего генерировать и производить обработку биомедицинских сигналов.

В качестве примеров рассматриваются две ЭКГ записи: сгенерированная с помощью LabVIEW Biomedical Toolkit и ЭКГ реального человека, взятая из открытого банка данных физиологических сигналов physionet.org. На обе записи наложен шум в виде сетевой наводки с амплитудой 0,1 мВ и частотой 60 Hz (далее шум).

4.1. Сгенерированная ЭКГ. С помощью Biomedical Toolkit сгенерирован ЭКГ сигнал продолжительностью 10 секунд с частотой дискретизации 512 Hz, и наложен шум. Зашумленный сгенерированный ЭКГ сигнал показан на рис. 2

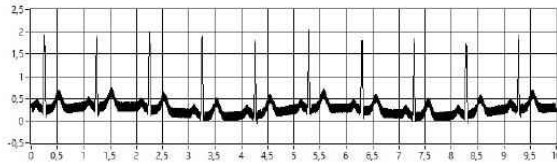


Рис. 2. Сгенерированная ЭКГ с шумом

Для сравнения двух методов фильтрации рассмотрим LMS-алгоритм и полосовой фильтр Баттерворта четвертого порядка. Результат фильтрации с помощью фильтра Баттерворта показан на рис. 3, а с помощью адаптивного LMS-алгоритма — на рис. 4.

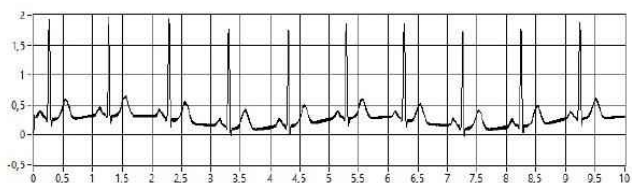


Рис. 3. ЭКГ после применения фильтра Баттлворта

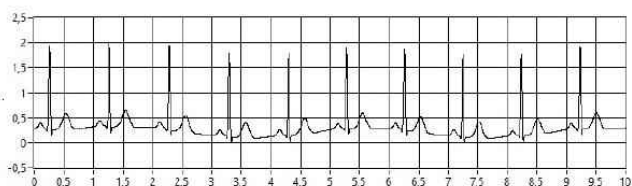


Рис. 4. ЭКГ после применения LMS-алгоритма

Как видно из рис. 3 и 4, LMS-алгоритм дает лучшее качество фильтрации. Повышение качества фильтрации фильтром Баттлворта возможно путем дополнительных подстроек параметров полосы пропускания и порядка, но в случае, когда сигнал имеет низкую частоту дискретизации, будет возникать ошибка, приводящая к неработоспособности программы, как будет показано в следующем разделе.

4.2. ЭКГ из открытого банка данных физиологических сигналов physionet.org. Из открытого банка данных физиологических сигналов physionet.org был скачан ЭКГ-сигнал. Использовалась база Apnea-ECG Database (apnea-ecg), запись a01, продолжительность 10 секунд. Частота дискретизации данной ЭКГ составила 100 Hz. Чистая ЭКГ и ЭКГ с шумом представлены на рис. 5.

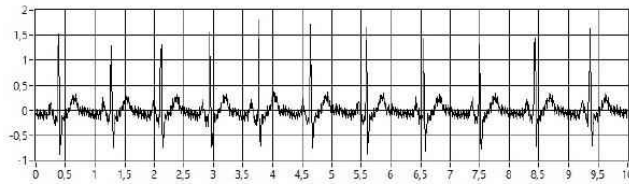


Рис. 5. ЭКГ из открытого банка данных физиологических сигналов с шумом

Результаты фильтрации с помощью фильтра Баттерворта с параметрами, аналогичными параметрам фильтра из п. 3.1, и с помощью LMS-алгоритма фильтрации представлены соответственно на рис. 6 и 7 соответственно. Видно, что фильтрация с помощью фильтра

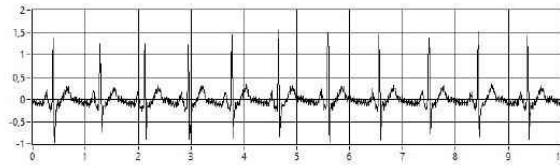


Рис. 6. ЭКГ из ОБДФС после применения фильтра Баттерворта

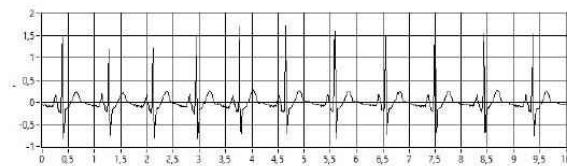


Рис. 7. ЭКГ из ОБДФС после применения LMS-алгоритма

Баттерворта показала худшие результаты, чем для сигнала в п. 3.1, при этом изменение значения для полосы пропускания может привести к критической ошибке в программе из-за низкой частоты дискретизации сигнала с одной стороны, либо к критическим искажениям полезного сигнала с другой.

5. Заключение. Проведено сравнение фильтра Баттерворта и LMS-алгоритма для решения задачи адаптивной фильтрации сетевой помехи кардиосигнала. Решено, что LMS-алгоритм более универсален и дает лучший результат.

Литература

1. Ачкасова И. Л. Исследование variability ритма сердца, основанное на анализе RR интервалов, и прогноз выживаемости // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. №1. С. 270–275.
2. Маслов А. А., Лепихин Т. А. Проектирование LMS-алгоритма адаптивной фильтрации с использованием программного пакета LabVIEW // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1 С. 447–451.
3. Гонтаренко А. А., Корнев В. П. Адаптивная фильтрация сетевой помехи в 50 Гц в системах регистрации электрокардиограмм // Электроника и связь. 2013. № 4. С. 45–52
4. Ивель В. П., Савостин А. А. Адаптивная фильтрация электрокардиосигнала в системе MatLab // Материалы IV международной научно-практической конференции «Передовые научные идеи – 2008». Прага. 2008. Т. 2. С. 70–74.
5. Грант П. М. Адаптивные фильтры. М.: Мир, 1988. 932 с.
6. Maslov A., Lepikhin T. Development of adaptive filtering algorithm for multi-frequency audiofile // "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015 International Conference. IEEE, 2015. 573–575.

УДК 519.235

Мащенко Ю. Н.

Анализ медицинских данных с использованием таблиц сопряженности

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. Статистические методы широко используются в медицине, причем в разных ее аспектах [1, 2]. В частности, они позволяют проанализировать влияние различных факторов на состояние здоровья пациента.

Наиболее распространенным способом изучения взаимосвязи данных, представленных категориальными переменными, является построение и анализ таблиц сопряженности. К основным методам работы с ними можно отнести точный критерий Фишера, критерий Пирсона Хи-квадрат и логарифмически-линейный анализ.

2. Постановка задачи. Типовой задачей современной медицины, возникающей в любом медицинском учреждении, является определение влияния различных признаков на развитие рецидива или ремиссии у пациента. Для анализа были смоделированы данные, основанные на общих представлениях о различных онкологических заболеваниях, которым подвержен человек. При лечении такого рода заболеваний активно применяются все достижения ядерной медицины. Некоторые методы могут быть использованы в роли дополнительных к основному способу лечения или же в качестве основного средства при терапии рецидивов заболевания (повторное заболевание).

На практике пациентов часто делят на две группы: основная и контрольная, в зависимости от способа подготовки к лечению. Людям из основной группы проводится предварительная терапия другими препаратами, а людям из контрольной группы назначают раз-

Мащенко Юлия Николаевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yulya.maschenkova@yandex.ru, тел.: +7(911)224-19-51

ные подготовительные операции. Также у каждого пациента собирается информация по большому количеству ключевых показателей, которые подробно описывают его состояние на всех этапах лечения.

Таким образом, были отобраны 16 наиболее существенных параметров, таких как семейный анамнез, вид предварительной операции, количество операций, осложнения, количество очагов, временная дистанция между хирургическими вмешательствами, несколько показателей гормонов, процентное содержание активных веществ в препаратах и другие. И ставилась задача выявить влияние отдельных признаков на итоговое состояние пациента, в частности, развитие ремиссии или рецидива.

3. Методы исследования. Анализ проводился с использованием таблиц сопряженности, строившихся для каждой пары исследуемых признаков [3]. Таблица 1 построена для признака № 5 (содержание активных веществ в препарате).

Таблица 1. Таблица сопряженности для признака № 5

Признак № 5	Есть ремиссия	Нет ремиссии	Всего
0	5	24	29
1	3	17	20
2	2	0	2
Всего	10	41	51

Далее выдвигалась гипотеза H_0 о независимости признаков и альтернативная ей H_1 .

3.1. Критерий Хи-квадрат. Метод проверки гипотезы H_0 основан на статистике [4]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - n_i m_j / n)^2}{n_i m_j / n},$$

$$n_i = \sum_{j=1}^s n_{ij}, \quad m_j = \sum_{i=1}^r n_{ij}, \quad n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij},$$

где r и s — количества градаций исследуемых признаков, n_{ij} — значение в соответствующей ячейке таблицы и n — общее число наблюдений.

В случае независимости признаков статистика χ^2 имеет распределение Хи-квадрат с $(r-1)(s-1)$ степенями свободы. Для проверки

гипотезы H_0 на уровне значимости α необходимо вычислить статистику χ^2 , по ней найти p -значение и сделать соответствующий вывод о взаимосвязи признаков.

3.2. Точный критерий Фишера. Критерий независимости Хи-квадрат наиболее применим к таблицам с большими значениями ожидаемых частот, хотя им можно пользоваться и при относительно малых ожидаемых частотах. Однако, в случае $n_{ij} \leq 5$, имеет смысл воспользоваться довольно простым альтернативным методом [5].

Критерий Фишера основан на рассмотрении всех возможных предельных случаев расположения данных и вычислении вероятности для каждого из них. Точная вероятность для наблюдаемого расположения данных или еще менее вероятного задается суммой всех таких вероятностей. Если конечное значение вероятности оказывалось меньше 0,05, то делался вывод, что вряд ли столь малые шансы стоит принимать во внимание, и гипотеза H_0 о независимости отвергалась.

3.3. Логарифмически-линейный анализ. Применение логлинейного анализа актуально в задачах анализа медицинских данных [6]. При построении логарифмически-линейных моделей можно воспользоваться одновременно любым числом переменных, хотя при этом могут возникнуть трудности с интерпретацией результатов. Для примера ограничимся двумя переменными, которые обозначим A и B . Имея таблицу сопряженности $r \times s$, представим теоретические частоты в виде [7]:

$$e_{ij} = e^{u_0 + u_i^a + u_j^b + u_{ij}^{ab}},$$

или, в другой форме,

$$\ln e_{ij} = u_0 + u_i^a + u_j^b + u_{ij}^{ab},$$

где e_{ij} — теоретические частоты, u_i^a — эффект i -категории признака A , u_j^b — эффект j -категории признака B , u_{ij}^{ab} — эффект взаимодействия двух признаков, u_0 — общий эффект, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$. Также есть ограничение для параметров:

$$\sum_{i=1}^r u_{ij}^{ab} = \sum_{j=1}^s u_{ij}^{ab} = \sum_{i=1}^r u_i^a = \sum_{j=1}^s u_j^b.$$

Построенные логлинейные модели подтвердили значимость определенных медицинских показателей пациентов.

4. Заключение. Проведенный анализ медицинских данных позволил выявить ряд факторов, связанных с показателем ремиссии или рецидива у пациентов. Так например, для основной группы в случае ремиссии влияние оказали такие показатели, как признак № 3 (количество очагов заболевания, $p = 0,0295$), признак № 7 (процент активного вещества в препарате, $p = 0,0008$), признак № 9 (гормональный показатель, $p = 0,0269$) и признак № 15 (стадия заболевания, $p = 0,0023$).

Также важно отметить, что маленькие p -значения свидетельствуют в пользу того, что гипотезу о независимости надо отклонить. Следовательно, мы принимаем гипотезу о том, что связь есть. На практике принято использовать в качестве ориентира значение $p = 0,05$. Но когда p -значение оказывается близко к $0,05$, то возникает пограничная ситуация. Считать, что при $p = 0,049$ связь имеется, а при $p = 0,051$ отсутствует, не совсем корректно. И в том, и в другом случае можно сказать что p -значение маленькое. Вполне возможно, что связь действительно есть. И такие случаи требуют дальнейшего изучения.

Таким образом, представленные методы помогают эффективно проследить взаимосвязь определенных медицинских параметров и показателей ремиссии или рецидива у пациентов.

Литература

1. Буре В. М., Парилина Е. М., Свиркина Л. А. Анализ выживаемости по медицинской базе данных больных раком предстательной железы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 28–34.
2. Буре В. М., Щербакова А. А. Применение дискриминатного анализа и метода деревьев принятия решений для диагностики офтальмологических заболеваний // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 1. С. 70–76.

3. Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности / пер. с англ.; под ред. Ю. П. Адлера. М.: Финансы и статистика, 1982. 144 с.
4. Буре В. М. Методология статистического анализа опытных данных. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 140 с.
5. Гланц С. Медико-биологическая статистика / пер. с англ.; под ред. Н. Е. Бузикашвили и Д. В. Самойлова. М.: Практика, 1999. 459 с.
6. Буре В. М., Гливинская О. А., Сотников А. В. Логлинейный анализ базы данных по инфаркту миокарда у больных молодого и среднего возраста // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 1. С. 35–41.
7. Agresti A. An Introduction to Categorical Data Analysis. New York: Wiley, 1996. 394 p.

УДК 004.94

Мишнев М. С.

Моделирование распространения вируса гриппа с учетом скрытых носителей

Рекомендовано к публикации профессором Колесиным И. Д.

1. Введение. В настоящий момент актуальна проблема прогнозирования динамики распространения вирусных инфекций среди населения и разработки эффективных методов предотвращения развития эпидемий. Как известно, массовое распространение вируса изначально носит локальный характер. В социальных структурах, где происходит тесное взаимодействие между ее участниками, инфекция вызывает вспышки заболеваемости, способствующие широкому распространению инфекции. К таким структурам можно отнести детские и дошкольные образовательные учреждения, дома престарелых, и т. п. Однако имея возможность спрогнозировать возникновение вспышки, можно своевременно принять меры по локализации очага распространения, тем самым снижая риск возникновения эпидемии.

Одним из ярких примеров инфекции, имеющей высокую скорость распространения является вирус гриппа. Вирион гриппа, сохраняющий свойства вне живого организма длительное время, передается от носителя воздушно-капельным путем. При проникновении вредоносного агента в клетки, организм проявляет неспецифические факторы иммунной системы, синтезируя интерферон и неспецифические ингибиторы — белки, выступающие в роли преграды для распространения всех видов антигенов. При достаточно высоком уровне иммунной системы, проникающая в организм инфекция не способна распространяться с достаточно высокой скоростью, для нанесения существенного вреда организму, однако в этом случае период приобретения устойчивого иммунитета — способность вырабатывать специфические антитела, длится существенно дольше, вплоть до 40 дней [1, 2]. В этом случае форма протекания заболевания является скрытой. Такая форма не выражена клиническими симптомами.

Мишнев Марк Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mishnevmark@gmail.com, тел.: +7(911)086-47-35

Носитель ведет свой обыденный образ жизни, тогда как при манифестной форме, перенося болезнь, инфицированный вынужден пройти курс лечения, в ходе которого он отстраняется от контакта со здоровыми членами популяции.

2. Постановка задачи. Основной задачей является прогнозирование распространения возбудителя в условно-замкнутой системе с помощью построения математической модели, описывающей динамику изменения численности инфицированных.

Входными данными является число индивидов в системе, а также число заболевающих гриппом в каждый из предыдущих 7 дней. Количество дней обуславливается средней продолжительностью протекания манифестной формы заболевания, в ходе которой носитель приобретает иммунитет к циркулирующему штамму вируса. В случае скрытой формы в среднем носитель приобретает иммунитет в течение 20 дней. Соотношение стертых и манифестных форм заболевания варьируется в зависимости от циркулирующего на данный момент штамма вируса. Также отметим, что носитель с манифестной формой заболевания не сразу приобретает клинические симптомы, продолжая активно распространять инфекцию. В сочетании с инкубационным периодом, будем считать, что такой носитель отстраняется от взаимодействий через 3 дня после инфицирования, после чего приобретает иммунитет.

Для моделирования распространения вируса гриппа среди взаимодействующих членов системы можно использовать *SIR*-модель («Susceptible-Infected-Removed model») [3]. Применяя системный подход к построению простейшей модели, ограничимся четырьмя группами индивидов: восприимчивые, инфицированные с манифестной формой протекания болезни, инфицированные со скрытой формой протекания болезни, достаточно иммунизированные. Пусть группой восприимчивых S являются индивиды, не имеющие иммунитета к распространяющемуся типу вируса. Инфицированными I_m будут являться имевшие контакт с носителем вируса и участвующие в дальнейшем в распространении вируса с манифестной формой заболевания, инфицированными I_c — распространяющие вирус со скрытой формой заболевания. Группой R назовем выработавших устойчивый иммунитет. Учитывая вышеперечисленные аспекты, составим систе-

му дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aS(I_m + I_c), \\ \frac{dI_m}{dt} = ak_1S(I_m + I_c) - mI_m, \\ \frac{dI_c}{dt} = ak_2S(I_m + I_c) - cI_c, \\ \frac{dR}{dt} = mI_m + cI_c, \end{cases} \quad (1)$$

где t — независимая переменная, a — коэффициент, определяемый активностью возбудителя, c — коэффициент, определяющий долю выработавших иммунитет для скрытого носителя за время Δt , m — долю выбывших из системы взаимодействий за время Δt , коэффициенты k_1, k_2 определяют доли соотношения типов форм заболевания.

3. Определение коэффициентов. Используя начальные данные $S_0, I_0 = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7)$ и первое уравнение системы (1), найдем

$$a = \frac{\Delta S}{I_0(1)S_0\Delta t}, \quad (2)$$

где $\Delta S = S_0 - \frac{1}{k_1}(I_0(7) - I_0(1))$, $S_0 = S - \frac{1}{k_1}I_0(1)$, $\Delta t = 7$. Соотношение форм заболевания будем считать равным, откуда $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$. Коэффициент $c = \frac{1}{20}$ обратно пропорционален длительности приобретения иммунитета инфицированным со скрытой формой. Коэффициент $m = \frac{1}{3}$ обратно пропорционален длительности участия во взаимодействии. Для проведения численного эксперимента реализован алгоритм в прикладном пакете MATLAB. Интегрирование системы дифференциальных уравнений производится с использованием встроенной процедуры ode23. Алгоритм реализации включает следующие шаги:

1. Вычисление коэффициента a по формуле (2);
2. Численное интегрирование системы (1).

4. Численный эксперимент. Значение числа участников в системе примем $S = 1200$, продолжительность эксперимента выберем $t = 45$ дней.

Пример 1. Вектор значений числа заболевших в прошедшие 7 дней $I_0 = (8, 9, 10, 9, 12, 11, 14)$.

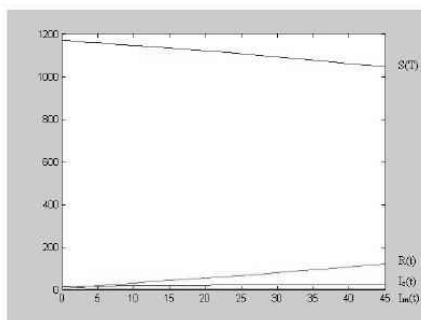


Рис. 1. Подъем заболеваемости незначительный

Пример 2. Вектор значений числа заболевших в прошедшие 7 дней $I_0 = (8, 9, 10, 9, 12, 18, 28)$.

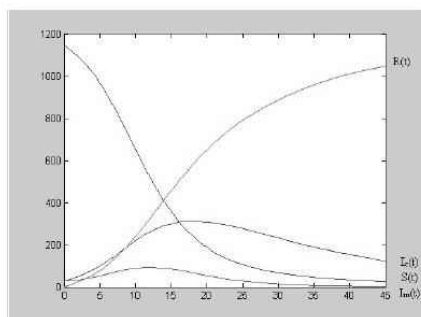


Рис. 2. Всплеск активности возбудителя

На рис. 1, рис. 2 изображен график отображающий изменение численности групп относительно времени, каждая кривая которого названа в соответствии с величиной, изменение которой она отображает.

5. Заключение. По начальным данным о численности заболевающих построен прогноз развития эпидемического процесса в замкнутой системе. Пример 1 показывает, что в дальнейшем распространение вируса развивается медленно. Однако, на примере 2 можно заметить всплеск заболеваемости, пик которого приходится на 12-й день с начала исследования. Это обусловлено резким подъемом количества заболевающих за последние 3 дня наблюдений.

Литература

1. Смородинцев А. А. Грипп и его профилактика. Л.: Медицина, 1984. 384 с.
2. Кузнецов С. Р. Математическая модель иммунного ответа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 72–87.
3. Колесин И. Д., Губар Е. А., Житкова Е. М. Стратегии управления в медико-социальных системах: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. 128 с.

УДК 57.087+616.5-006.81

Савва Е. К.

Анализ статистической зависимости супрессирующих факторов при меланоме кожи

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Ореховым А. В.*

1. Введение. Меланома кожи является злокачественным хроническим заболеванием, характеризующимся медленным индолентным течением на ранних стадиях и крайне агрессивным течением при распространении процесса. В последнее время достигнут значительный прогресс в терапии диссеминированной меланомы благодаря внедрению в практику новых иммунологических препаратов [1]. Основой их действия является активация иммунной системы человека, которая и приводит к уничтожению опухоли. Это делает крайне важным оценку состояния иммунной системы в процессе лечения. Нельзя не отметить большую, а иногда и решающую роль динамики изменения количества лимфоцитов различных популяций и субпопуляций при иммунном ответе организма на патогенное воздействие.

Математическое моделирование такой динамики является отдельной темой, в которой основное значение имеет пролиферация и память лимфоцитов [2, 3].

При моделировании иммунных процессов, точнее при записи правых частей соответствующих дифференциальных уравнений, необходимо учитывать статистическую зависимость между различными иммунными факторами [4, 5].

Известно, что лимфоциты с поверхностными маркерами типа CD8+ являются основными клетками, которые борются с опухолью [6, 7], и статистическую зависимость возможных регулирующих факторов нужно искать относительно маркеров CD8+.

2. Статистический анализ. Исследование возможной статистической зависимости между лимфоцитами, имеющими поверхностные маркеры: CD25+ (маркер активации лимфоцитов), CD3+ (Т-клеточный рецептор), CD4+ (маркер регуляторных лимфоцитов)

Савва Елена Константиновна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alyona-savva@yandex.ru, тел.: +7(911)282-46-54

и CD8+ (маркер эффекторных лимфоцитов), проводились на клинических данных, предоставленных научным отделом онкоиммунологии НИИ онкологии им. Н. Н. Петрова. Обработывались временные ряды иммунных статусов одной из пациенток с меланомой кожи.

Определение статистической зависимости между показателями выборки производилось при помощи вычисления коэффициентов корреляции Пирсона.

Коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}},$$

где выборочные средние

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Однако, даже если анализ коэффициента корреляции Пирсона показал тесную статистическую зависимость между двумя параметрами, остается возможность того, что эта зависимость обусловлена внешним влиянием со стороны третьего параметра, а не за счет причинной взаимозависимости, как это предполагает коэффициент корреляции Пирсона. Для того чтобы убедиться в отсутствии влияния внешнего фактора на взаимозависимость исследуемых параметров, необходимо вычислить коэффициент частной корреляции. Он показывает степень статистической зависимости между двумя случайными величинами без учета влияния третьей случайной величины.

Формула для вычисления частного коэффициента корреляции между случайными величинами X и Y , без учета влияния Z :

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}},$$

где r_{xy} , r_{xz} , r_{yz} — коэффициенты корреляции Пирсона между исследуемыми случайными величинами.

3. Анализ показателей. Анализ приведенных в таблице 1 показателей: CD25 (регуляторные Т-лимфоциты), CD3 (общее число Т-лимфоцитов), CD4 (Т-хелперы) и CD8+ (цитотоксические

Т-лимфоциты) основан на результатах, представленных в таблицах 2–4.

При этом всегда имеется в виду, что статистическая зависимость и клиническая связь — различные понятия [8].

Таблица 1. Таблица показателей: CD25, CD3, CD4, CD8

Дата/Показатель	CD25	CD3	CD4	CD8
21.10.2010	0,16	2,66	1,80	0,86
01.11.2010	0,16	1,23	1,50	0,47
17.11.2010	0,25	1,53	1,18	0,33
16.12.2010	0,26	2,14	1,62	0,50
27.12.2010	0,23	1,57	1,12	0,43
20.01.2011	0,63	1,91	1,23	0,69
01.02.2011	0,05	1,13	0,82	0,35
21.02.2011	0,25	1,53	1,06	0,45
09.03.2011	0,22	1,32	1,01	0,33
21.03.2011	0,05	1,43	0,84	0,57
14.04.2011	0,41	0,66	0,46	0,21
25.04.2011	0,23	1,61	1,03	0,57
23.05.2011	0,17	0,96	0,70	0,26
04.07.2011	0,12	0,63	0,36	0,25

Таблица 2. Коэффициенты корреляции для CD25, CD3, CD4

Показатели	Значение
CD25 и CD3	0,1692
CD3 и CD4	0,8843
CD4 и CD25	0,0991

Таблица 3. Коэффициенты частной корреляции для CD25, CD3, CD4

Показатели	Значение
CD25 и CD3 (CD4)	0,1754
CD3 и CD4 (CD25)	0,8845
CD4 и CD25 (CD3)	-0,1098

Таблица 4. Коэффициенты корреляции между CD25, CD3, CD4 и CD8

Показатели	Значение
CD25 и CD8	0,1507
CD3 и CD8	0,8757
CD4 и CD8	0,7392

4. Заключение. По результатам корреляционного анализа не было выявлено отрицательных корреляций между изучаемыми маркерами. Причиной может быть низкая доля регуляторных популяций, оценить которую не позволяет отсутствие информации по экспрессии молекул, что привело к клинически значимому ответу на терапию у данной больной. Можно предположить, что в выбранном примере регуляторные популяции не оказывали значимого тормозного влияния и состояние иммунной системы было сбалансированным. Это подтверждается высокими корреляционными коэффициентами в парах CD3-CD8 и CD4-CD8. Проведенный анализ имеет ограничения, поскольку проводился у больной с достаточным эффектом на терапии. Выявленные закономерности могут не соблюдаться при другом течении заболевания или неэффективности терапии. Вместе с тем, полученная взаимосвязь позволяет предположить благоприятную комбинацию иммунологических маркеров и взаимодействие этих факторов. При подтверждении в дальнейших исследованиях это может позволить отбирать больных, наиболее чувствительных к иммунологическим воздействиям.

Литература

1. Новик А. В., Балдуева И. А., Проценко С. А. и др. Современные методы иммунотерапии метастатической меланомы // Вопросы онкологии. 2016. Т. 62. № 5. С. 580–587.
2. Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шишкин В. И. Процесс формирования иммунной памяти Т-лимфоцитов и его зависимость от числа пройденных клетками делений // В сборнике: Устойчивость и процессы управления. Материалы III международной конференции. 2015. С. 487–488.
3. Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шишкин В. И. Модель пролиферации и дифференцировки неоднородной клеточной популяции // В книге: Математическое и компьютерное моделирование в биологии и химии. III Международная научная Интернет-конференция: Материалы конференции. 2014. С. 95–103.

4. Кузнецов С. Р. Математическая модель иммунного ответа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 72–87.
5. Kuznetsov S. R. Mathematical model of the humoral immune response: focusing on Th17 autoimmunity // Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10. № 2. С. 455–472.
6. Хаитов Р. М., Ильина Н. И. Аллергология и иммунология. Национальное руководство. М.: «Гэотар-Медиа», 2009. 649 с.
7. Хаитов Р. М., Ярилин А. А., Пинегин Б. В. Иммунология: атлас. М.: «Гэотар-Медиа», 2011. 624 с.
8. Ланг Т. А., Сесик М. Как описывать статистику в медицине. Аннотированное руководство для авторов, редакторов и рецензентов / под ред. В. П. Леонова. М.: Практическая медицина, 2011. 480 с.

УДК 57.087+616.5-006.81

Стегару Д. А.

Динамическая модель популяции В-лимфоцитов при меланоме кожи

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Ореховым А. В.*

1. Введение. Меланома — злокачественная опухоль, развивающаяся из меланоцитов — пигментных клеток, продуцирующих меланины. Первые упоминания датировано между 1651–1760 гг. Термин «меланома» был предложен в 1888 г. Изучение проблем злокачественных опухолей ведётся уже большое количество времени различными учёными. Характерными признаками данного заболевания являются высокая степень злокачественности пигментных новообразований, способность к метастазированию, сложность диагностики. Основная проблема лечения меланомы заключается в том, что организм очень слабо реагирует на заболевание и не может справиться с ним, используя только лишь свои ресурсы. Главный подход к лечению заключается в хирургическом удалении меланомы из тела пациента и проведении таких процедур, как химиотерапия, лучевая терапия, позволяющих исключить пагубное влияние заболевания на организм. Иммунологами был предложен альтернативный вариант — иммунотерапия, суть которой заключается в повышении иммунитета организма путём введения различных препаратов.

Методом такого лечения может быть иммунизация организма зрелыми дендритными клетками. Повышение количества зрелых дендритных клеток позволяет организму сформировать более сильный иммунологический ответ на антигены.

В данной работе рассмотрена математическая модель динамики изменения «объёма» различных популяции В-лимфоцитов при меланоме кожи в условиях иммунизации организма зрелыми дендритными клетками.

Стегару Данила Александрович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: stegaru.d.a@gmail.com, тел.: +7(931)315-46-58

2. Описание процесса. Опишем наиболее общую схему иммунного ответа. После выявления наличия антигена в организме антигенпрезентирующие клетки (АПК) захватывают и перерабатывают его, чтобы в дальнейшем представить (презентовать) его хелперным Th-лимфоцитам. Th-лимфоциты «решают», какой тип иммунного ответа потребуется для нейтрализации антигена. Данное «решение» принимается ими на основе типа антигена и факторов окружающей среды. Th-лимфоциты вовлекают в иммунный ответ различные механизмы адаптивного иммунитета, наибольшее значение из которых имеют клеточный и гуморальный. Клеточный иммунный ответ обеспечивают в основном цитотоксические Тс-лимфоциты (Т-киллеры), которые находят антигенно-содержащие клетки и уничтожают их. Гуморальный иммунный ответ обеспечивают В-лимфоциты, которые синтезируют антитела, нейтрализующие антиген и облегчающие его уничтожение.

Различные клетки могут выступать в качестве АПК. В данной работе в качестве АПК будут рассмотрены дендритные клетки и В-лимфоциты.

Описанные процессы представим более подробно, разделив на следующие стадии:

1. Фагоцитоз антигена дендритными клетками и переход этих клеток в состояние АПК;
2. Презентация антигена наивным Th-лимфоцитам и активация последних;
3. Активация Тс- и В-лимфоцитов с помощью АПК и активированных Th-лимфоцитов;
4. Пролиферация и дифференцировка Th-, Тс- и В-лимфоцитов;
5. Выход Тс- и В-лимфоцитов из лимфоузла и уничтожение заражённых клеток и синтез антител.

3. Математическая модель. В данной работе рассмотрена динамика изменения только В-лимфоцитов и их роль в иммунном ответе. Динамическая модель популяции В-лимфоцитов при меланоме кожи строится как частный случай построенной ранее модели иммунного ответа в более общем случае [1, 2].

$$\frac{dP_0}{dt} = \sigma_p - \phi_p P_0 S - \omega_p P_0, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \phi_p P_0 S + \lambda_p(t) - \omega_p P, \quad (2)$$

$$\frac{dH_0}{dt} = \sigma_h - \lambda_b \frac{P}{P + P^* H_0} H_0 - \omega_0 H_0, \quad (3)$$

$$\frac{dH_1}{dt} = 2^l \lambda_b \frac{P}{P + P^* H_0} H_0 - \omega_0 H_1, \quad (4)$$

$$\frac{dB_0}{dt} = \sigma_b - \lambda_h \frac{H_1}{H_1 + H^* B_0} B_0 - \omega_b B_0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\widehat{p}_b(z) \frac{\partial B}{\partial z} - \widehat{\omega}_b(z) B, \quad (6)$$

$$\frac{dB_m}{dt} = 2^\nu \widehat{p}_b(\nu) B(\nu, t) \left(1 - \frac{H_1}{H_g^* + H_1} \right) - \omega_m B_m, \quad (7)$$

$$\frac{dB_g}{dt} = 2^\nu \widehat{p}_b(\nu) B(\nu, t) \frac{H_1}{H_g^* + H_1} - \omega_g B_g, \quad (8)$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \rho_m B_m - \omega_k A_m, \quad (9)$$

$$\frac{dA_g}{dt} = \rho_g B_g - \omega_l A_g. \quad (10)$$

Уравнение (1) описывает динамику концентрации незрелых дендритных клеток. Первое и последнее слагаемое — гомеостаз клеток, второе слагаемое — переход захвативших антиген дендритных клеток в лимфоузел для презентации антигена Т-лимфоцитам.

Уравнение (2) описывает динамику дендритных клеток в лимфоузле. Первое слагаемое — приток дендритных клеток в лимфоузел, второе — введение дендритных клеток во время лечения, третье — естественная убыль.

Уравнение (3) описывает динамику наивных Т-хелперных клеток. Первое и последнее слагаемое — гомеостаз клеток, второе — переход в активированное состояние в результате встречи с АПК.

Уравнение (4) описывает изменение популяции активированных Th-лимфоцитов. Первое слагаемое — прирост клеток, второе — их убывание.

Уравнение (5) описывает динамику наивных В-лимфоцитов. Первое и последнее слагаемое — гомеостаз клеток, второе — переход в активированное состояние в результате встречи с антигеном.

Уравнение (6) описывает динамику пролиферации В-лимфоцитов. Подробный вывод этого уравнения приведен в работе [1].

Уравнение (7) описывает динамику созревшей субпопуляции В-лимфоцитов, синтезирующей антитела класса IgM. Первое слагаемое: Фракция В-лимфоцитов данной субпопуляции, второе слагаемое — естественная убыль клеток.

Уравнение (8) описывает динамику созревшей субпопуляции В-лимфоцитов, синтезирующей антитела класса IgG. Первое слагаемое: Фракция В-лимфоцитов данной субпопуляции, второе слагаемое — естественная убыль клеток.

Уравнение (9) описывает динамику синтеза и естественный распад антител IgM.

Уравнение (10) описывает динамику синтеза и естественный распад антител IgG.

Опишем граничные условия для уравнения (6):

$$B(t, z)|_{z=0} = \frac{\lambda_h}{\hat{\rho}_b(0)} \frac{H_1}{H_1 + H^* B_0} B_0 \quad (11)$$

и начальные условия: $P_0 = P_0^*$, $P = 0$, $H_0 = H_0^*$, $H_1 = 0$, $B_0 = B_0^*$, $B = 0$, $B_m = 0$, $B_g = 0$, $A_m = 0$, $A_g = 0$.

Коэффициенты S , H_g^* , H^* , P^* , σ_p , ϕ_p , ω_p , σ_h , ω_0 , σ_b , ω_b , ρ_m , ρ_g , ω_l , ω_k , ω_g , ω_m — должны быть определены эмпирически. Две неизвестные функции $\hat{\rho}_b$, $\hat{\omega}_b$, также определяются эмпирически.

4. Заключение. Последние годы отмечается рост интереса к иммунотерапии злокачественных опухолей благодаря новым достижениям в этой области медицины. Основной принцип иммунотерапии онкологических заболеваний состоит в том, что как и при любых других заболеваниях, активизировать собственные защитные ресурсы организма и направить их на борьбу с опухолью. Широкое применение иммунотерапия получила при лечении меланомы кожи [3].

При иммунном ответе организма на патогенное воздействие большое значение имеет динамика изменения количества лимфоцитов различных популяций и субпопуляций, их пролиферация и процессы памяти лимфоцитов [4, 5]. Представленная модель описывает реакцию иммунитета на меланому кожи. Данная математическая модель

будет использоваться в дальнейшем для работы с клиническими данными.

Литература

1. Кузнецов С. Р. Математическая модель иммунного ответа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 72–87.
2. Kuznetsov S. R. Mathematical model of the humoral immune response: focusing on Th17 autoimmunity // Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10. № 2. С. 455–472.
3. Новик А. В., Балдуева И. А., Проценко С. А. и др. Современные методы иммунотерапии метастатической меланомы // Вопросы онкологии. 2016. Т. 62. № 5. С. 580–587.
4. Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М., Орехов А. В., Шишкин В. И. Процесс формирования иммунной памяти Т-лимфоцитов и его зависимость от числа пройденных клетками делений // В сборнике: Устойчивость и процессы управления. Материалы III международной конференции. 2015. С. 487–488.
5. Кузнецов С. Р., Лыкосов В. М. и др. Модель пролиферации и дифференцировки неоднородной клеточной популяции // В книге: Математическое и компьютерное моделирование в биологии и химии. III Международная научная Интернет-конференция: Материалы конференции. 2014. С. 95–103.

УДК 519.654

Стрельцова А. А.

Алгоритм идентификации параметров камерной модели в исследованиях позитронной эмиссионной томографии сердца

Рекомендовано к публикации профессором Котиной Е. Д.

Введение. В современной медицине активно развивается область радионуклидной диагностики, представленная такими методами, как однофотонная эмиссионная компьютерная томография (ОФЭКТ) и позитронная эмиссионная томография (ПЭТ). Важным этапом радионуклидной диагностики является обработка полученной информации для количественной оценки функционального состояния исследуемых органов [1].

Радионуклидные методы находят широкое применение в кардиологии. Несмотря на существование целого ряда методов: УЗИ, МРТ, КТ, позволяющих получать достаточно точные анатомические изображения сердца, за радионуклидными методами остается преимущество, так как их агенты непосредственно участвуют в обмене веществ в кардиомиоците или других звеньях физиологических процессов, происходящих в миокарде. Исследования сердца проводятся методами ОФЭКТ и ПЭТ. Метод ОФЭКТ позволяет проводить томографические и томографические с ЭКГ синхронизацией исследования и вычислять широкий спектр диагностических параметров [2, 3]. Метод ПЭТ дает возможность проводить динамические томографические исследования сердца. Целью таких исследований является количественная оценка миокардиального кровотока, которая может быть произведена с помощью метода камерного моделирования. В зависимости от используемого в исследовании радиофармацевтического препарата (РФП) выбирается соответствующая камерная модель и вычисляются значимые физиологические параметры. Одним из наиболее часто применяемых в клинической практике радионуклидов является ^{82}Rb , получаемый генераторным методом. В данной

Стрельцова Арина Андреевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: streltsova_arina@inbox.ru, тел.: +7(981)856-16-86

работе реализован алгоритм идентификации параметров для модели с ^{82}Rb , рассмотрены возможные виды аппроксимации входной функции и получена искомая оценка миокардиального кровотока.

Построение камерной модели. При построении камерной модели учитывается кинетика радионуклида в организме или в некоторой рассматриваемой области. В качестве камер могут выступать органы или их части: полости, ткани, сосуды. Каждая камера характеризуется концентрацией радионуклида в ней, а связь между камерами — транспортными константами. Радионуклид попадает в организм посредством болюсного введения в вену, поэтому в исследуемую область он попадает через кровеносную систему. Соответственно, одной из камер будет сосудистое пространство, отражающее концентрацию РФП в плазме крови. Функцию зависимости концентрации радионуклида в крови от времени принято называть входной функцией. Также очень часто при подсчете камер модели данную камеру принято не учитывать, это отражено и в названиях камерных моделей в данной работе.

Камерная модель для ^{82}Rb . Существует несколько вариантов моделей для описания распространения ^{82}Rb в миокардиальной области. Чем больше камер, тем модель является более точной с физиологической точки зрения. Но, как показано в [4], использование двухкамерной или трехкамерной моделей дает статистически неточные результаты в силу зашумленности данных ПЭТ. В [5] подтверждена возможность использования однокамерной модели для ^{82}Rb в исследованиях перфузии миокарда.



Рис. 1. Однокамерная модель для ^{82}Rb На рис. 1 представлена однокамерная модель, отражающая распространение радионуклида в сердце. В качестве входной функции можно рассматривать концентрацию ^{82}Rb в полости левого желудочка. Транспортная константа K_1 характеризует перфузию миокарда, функции $C_a(t)$ и $C_T(t)$ — концентрацию радионуклида в крови и ткани миокарда соответственно. Данную камерную модель описывает

дифференциальное уравнение

$$\frac{dC_T(t)}{dt} = K_1 C_a(t) - k_2 C_T(t).$$

Используя метод преобразования Лапласа, нетрудно получить решение в виде

$$C_T(t) = K_1 e^{-k_2 t} * C_a(t),$$

где символ «*» означает операцию свертки.

Следует отметить, что в силу технических ограничений измеренная концентрация, во-первых, не является мгновенной, а соответствует интегралу по промежутку времени, в течение которого формировалось изображение; во-вторых, является суммой концентраций в сосудистом и внесосудистом пространствах с поправкой на частичный объемный эффект. Последнее замечание приводит к тому, что в итоговой функции появляется еще один коэффициент f_a , характеризующий объемную долю крови. Таким образом, измеренная концентрация

$$C_{meas}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[(1 - f_a) \int_0^t K_1 e^{-k_2(t-\tau)} C_a(\tau) d\tau + f_a C_a(t) \right] dt.$$

Идентификация транспортных констант. Важным этапом в решении задачи идентификации транспортных констант является аппроксимация входной функции. Рассмотрено несколько вариантов аппроксимирующей функции, в том числе линейная интерполяция. В итоге оставлены два наиболее подходящих варианта. Первый предложен в [6]:

$$C_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leq T_{ap}, \\ \frac{1}{T_{in}} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i(t-T_{ap})}), & T_{ap} < t < T_{ap} + T_{in}, \\ \frac{1}{T_{in}} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\lambda_i} (e^{-\lambda_i(t-T_{ap}-T_{in})} - e^{-\lambda_i(t-T_{ap})}), & t \geq T_{ap} + T_{in}. \end{cases}$$

Здесь T_{ap} — время первого появления радиоактивности в крови, T_{in} — время введения РФП, для ^{82}Rb оно обычно составляет порядка 30 секунд. Второй вариант предложен в [7]:

$$C_a(t) = A_1 t^{B_1} e^{-C_1 t} + A_2 e^{-C_2 t} - A_2 e^{-C_3 t}.$$

Графики полученных функций представлены на рис. 2. Имея, та-

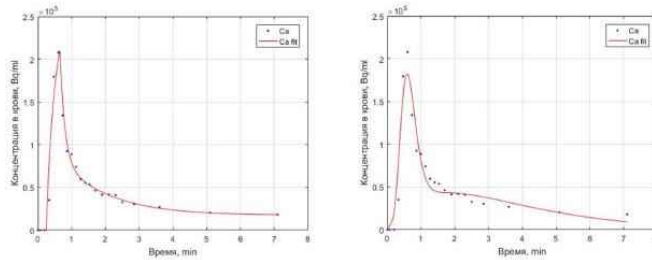


Рис. 2. Графики концентраций РФП в крови. Слева использовался первый вариант аппроксимирующей функции, справа — второй

ким образом, аналитический вид функции $C_a(t)$, можно использовать его для аппроксимации итоговой функции и определения неизвестных констант K_1, k_2, f_a . Соответствующие графики представлены на рис. 3. В обоих случаях для аппроксимации использовался метод Левенберга–Марквардта. Таким образом, были вычислены искомые параметры для первого и второго варианта аппроксимирующей функции $C_a(t)$. Значения диагностически важного параметра K_1 и соответствующие 95% доверительные интервалы вычислены методами регрессионного анализа:

$$K_1 = 0,89 \text{ мл/г/мин } (0,82; 0,96),$$

$$K_1 = 0,88 \text{ мл/г/мин } (0,80; 0,96).$$

Оценка миокардиального кровотока. Для оценки миокардиального кровотока F используем полученные транспортные константы. Как показано в [8], $K_1 = F \cdot E(F)$, где $E(F)$ — фракция выделения индикатора, т. е. часть от общего числа РФП, которая пересекает мембрану капилляров и попадает в ткань миокарда. Данный показатель $E(F) = 1 - e^{PS(F)/F}$. Здесь $PS(F)$ характеризует про-

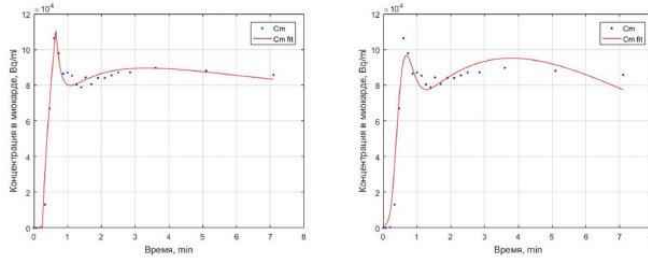


Рис. 3. Графики концентраций РФП в миокарде. Слева использовался первый вариант аппроксимации входной функции, справа — второй

нищаемость поверхности капилляров. Также в [5] показано, что для ^{82}Rb имеет место соотношение $PS(F) = 0,63 + 0,26F$. Вычисленный согласно приведенным формулам кровотока будет иметь следующие значения:

$$F = 2,06 \text{ мл/г/мин } (1,79; 2,33),$$

$$F = 2,02 \text{ мл/г/мин } (1,72; 2,32).$$

Результаты. Оба варианта входной функции дают хорошую аппроксимацию данных радиоактивности в крови. Однако выбор первого варианта может оказаться предпочтительнее, поскольку дает меньший 95% доверительный интервал, а именно, разброс составляет порядка 13% для значений кровотока. Также благодаря наличию параметров $T_{ар}$ и T_{in} проще регулировать пик радиоактивности.

Заключение. Представлен и реализован алгоритм идентификации параметров камерной модели, который протестирован на данных для динамического ПЭТ исследования сердца с ^{82}Rb . Данный алгоритм может быть применен и к более сложным камерным моделям при соответствующей замене моделирующих функций, при этом входную функцию изменять не обязательно. Показано, как на основе полученных значений можно оценить миокардиальный кровоток.

Литература

1. Котина Е. Д. Программный комплекс «Диагностика» для обработки радионуклидных исследований // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 2. С. 100–113.
2. Kotina E. D., Ploskikh V. A., Babin A. V. Radionuclide methods application in cardiac studies // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Vol. 88, No 6. P. 179–182.
3. Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. et al. Data processing in nuclear medicine // Cybernetics and Physics. 2014. Vol. 3, No 2. P. 55–61.
4. Coxson P. G., Huesman R. H., Borland L. Consequences of using a simplified kinetic model for dynamic PET data // The Journal of Nuclear Medicine. 1997. Vol. 38, No 4. P. 660–667.
5. Lortie M., Beanlands R. S., Yoshinaga K., Klein R. et al. Quantification of myocardial blood flow with ^{82}Rb dynamic PET imaging // European journal of nuclear medicine and molecular imaging. 2007. Vol. 34, No 11. P. 1765–1774.
6. Oakes N. D., Kjellstedt A. et al. Development and initial evaluation of a novel method for assessing tissue-specific plasma free fatty acid utilization in vivo using (R)-2-bromopalmitate tracer // Journal of lipid research. 1999. Vol. 40, No 6. P. 1155–1169.
7. Meyer C., Peligrad D. N., Weibrecht M. Assessment of input function distortions on kinetic model parameters in simulated dynamic ^{82}Rb PET perfusion studies // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2007. Vol. 571, No 1. P. 199–202.
8. Yoshida K., Mullani N., Gould K. L. Coronary flow and flow reserve by PET simplified for clinical applications using rubidium-82 or nitrogen-13-ammonia // The Journal of Nuclear Medicine. 1996. Vol. 37, No 10. P. 1701–1712.

4. Информационные
и компьютерные
технологии



УДК 004.93'1

Авдеева А. С.

Распознавание математических формул и выражений

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Стученковым А. Б.*

1. Введение. Распознавание математических формул — важная и сложная проблема в задаче распознавания текста, так как математические выражения — неотъемлемая часть научной литературы. Сложность задачи состоит в двумерной структуре формул и её правильном восстановлении после распознавания извлеченных символов. В статье предлагается алгоритм решения данной проблемы для формул некоторой степени сложности.

В целом для достижения результата необходимо решить четыре подзадачи: выполнить предварительную обработку изображения, провести корректное распознавание каждого символа, произвести восстановление структуры выражения, реализовать вывод полученного результата в некотором удобном формате. В данной работе в качестве формата выходных данных взят I^AT_X.

2. Предварительная обработка. Состоит из этапов:

1. Определение угла искажения изображения. Для определения угла искажения применяется трансформация Хафа. Идея алгоритма взята из [1] с некоторыми изменениями: предварительно к изображению применяется гауссовское размытие, дилатация и морфологическое закрытие. Затем находятся линии с помощью преобразования Хафа [2], реализованного в *openCV*; полученный массив линий кластеризуется, находится кластер с наибольшим числом линий, рассчитывается угол их наклона к горизонтальной и берется среднее значение. Далее при необходимости поворота с помощью функций *openCV* задается матрица поворота и производится аффинное преобразование.

Авдеева Анастасия Сергеевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ananaskelly@mail.ru, тел.: +7(991)212-85-06

2. Бинаризация с применением метода Оцу [3] — алгоритм для вычисления порога бинаризации, разделяющий пиксели на два класса, таких, что внутриклассовая дисперсия минимальна. Так же используется реализация из *openCV*.

3. Извлечение выражений. К настоящему времени для извлечения структуры выражений применялись различные техники. Например, используются подходы, основанные на графах и деревьях, перестраивающихся по некоторому набору правил и грамматик. Но в независимости от подхода, главным образом исследуются отношения между отдельным символом и его соседями, и на основании их взаимного расположения принимается решение о их взаимосвязи. Основная идея данного алгоритма состоит в выделении независимых друг от друга частей выражения с дальнейшей сегментацией зависимых частей с учетом пространственных отношений.

3.1. Обозначения. В программной реализации основным компонентом является класс *Node*, который содержит некоторые характеристики данного сегмента — координаты ограничивающего прямоугольника, тип, а также либо массив линейных сегментов, на которые он разбивается, являющихся экземплярами того же класса, либо вложенные сегменты (схематично показано на рис. 1).

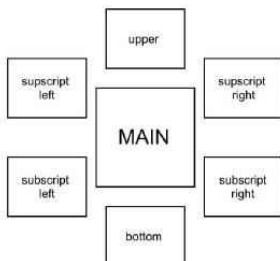


Рис. 1. Схема сегмента

Основные типы сегментов:

1. Одиночный символ — single.
2. Сегмент, содержащий несколько компонент связанности, но не имеющий точек разрыва в горизонтальной проекции — multi.
3. Сегмент, содержащий несколько компонент связанности, имеющий точки разрыва — несколько линий — multilinear.
4. Сегмент, содержащий несколько линий, одна из которых предположительно является знаком деления — fraction.

3.2. Алгоритм. Основные этапы:

1. Обработчик сегмента выполняет несколько функций: проверяется, сколько компонент связанности содержит сегмент. Если одну — выход, сегмент помечается обработанным, иначе — сегментация (схема на рис. 2) — текущий сегмент разделяется на сегменты-кандидаты точками разрыва в вертикальной проекции, определяется тип каждого сегмента, отношения в рамках этого сегмента на максимально возможном уровне и проверяются отношения соседних сегментов на основе правил, зависящих от их типа. Например, для двух одиночных элементов проверяется, одной ли базовой линии они принадлежат, и отыскиваются нижние и верхние индексы, в случае необходимости.
2. Для каждой из найденных в итоге компонент: для всех её вложенных сегментов снова вызывается функция обработчика, пока все компоненты не будут сегментированы.

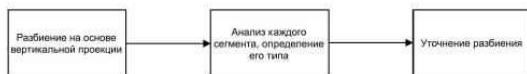


Рис. 2. Линейная сегментация

3.3. Разбиение сегмента. Неразделимые линейно и не являющиеся одиночным символом сегменты подвергаются сегментации на вложенные, также согласно ограничениям в зависимости от их типа. Так, для элементов типа fraction центральной компонентой считается знак деления, числитель — верхней, а знаменатель — нижней. Для элементов типа multi определяется центральный элемент, его связи

с соседними, если несколько компонент принадлежат одной базовой линии, то они разделяются на отдельные сегменты и помещаются в массив линейных компонент данного сегмента.

4. Формирование результата. После полной сегментации и распознавания формируется выходная строка по правилам написания в \LaTeX . Перед этим происходит анализ полученных сегментов с целью объединения символов, состоящих из нескольких компонент, например, =, \leq , \geq .

5. Распознавание символов. Для распознавания извлеченных символов реализована сверточная нейронная сеть с архитектурой [4], описанной в таблицах 1, 2.

Таблица 1. Архитектура сети, часть 1

Слой	Число ядер (для слоя свертки)	Размер
Сверточный	6	5
Субдискритизации		2
Сверточный	19	5
Субдискритизации		2
Сверточный	190	5

Таблица 2. Архитектура сети, часть 2

Слой	Число нейронов	Функция активации
Полносвязный	150	ReLU
Полносвязный	140	Tanh
Полносвязный	104	Softmax

Сеть была обучена на символах, извлеченных из [5] — базы, содержащей около 500 страниц английских математических журналов. В общей сложности было использовано 208000 символов, разделенных на 104 класса. Данные разбиты на тренировочное (90%) и тестовое (10%) множества. На тестовом множестве корректно распознано 98% символов.

6. Некоторые результаты. На рис. 3 представлен результат работы на некоторых изображениях. Показаны исходные изображения, а подпись под ними сгенерирована алгоритмом. Структура выражений распознается верно, но есть ошибки в распознавании похожих символов. В основном это одинаковые в обоих регистрах буквы, например, «S» и «s», «C» и «c» и т. д. В целом на тестовой выборке из

выражений средней сложности верно распознается около 70%.

$$\frac{1x+2y+\frac{q^l+\frac{x}{mn}}{m}}{m_p} \frac{\partial G}{\partial w}(0) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{w \rightarrow 0} \frac{F(w)}{a_1 w^l} = 1$$

$$f = \frac{(c+v)(c-w)}{(c-v)(c+w)}$$

Рис. 3. Результаты работы

Литература

1. Kumar B., Kumar G., Kumar A. An approach for skew detection using Hough transform // International Journal of Computer Applications. 2016. Vol. 136, No 9. P. 21–23.
2. Hough. Method and Means for Recognizing Complex Patterns // U.S. Patent. 1962. No 3069654.
3. Otsu N. A. Threshold selection method from gray-level histograms // IEEE Transactions on systems, man, and Cybernetics. January 1979. Vol. SMC-9, No 1. P. 62–66.
4. LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P. Gradient based learning applied to document recognition // Proc. of the IEEE. 1998.
5. Suzuki M., Uchida S., Nomura A. A ground-truthed mathematical character and symbol image database // In Proc. Int'l Conf. Document Analysis and Recognition. Seoul, Korea. 2005. Vol. 2. P. 675–679.

УДК 004.85

Арзумян Н. К.

Применение метода SVD в задаче коллаборативной фильтрации

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. В настоящее время нас окружает огромное количество товаров и объектов, большие объемы информации, на обработку которой уходит много времени. Такое разнообразие порождает необходимость в различных рекомендательных системах, которые используют разные принципы построения рекомендаций в зависимости от поставленной задачи и стремятся увеличить точность прогноза.

2. Рекомендательные системы. В рекомендательных системах используется три базовых подхода: коллаборативная фильтрация; методы, основанные на контенте; а также смешанные подходы. Коллаборативная фильтрация представляет собой совокупность методов построения рекомендаций, основанных на реакциях пользователей. Каждый пользователь ставит явные (выражение степени симпатии в числах, «звездочках») и неявные (например, количество просмотров) оценки объектам, с помощью чего строятся рекомендации без использования дополнительной информации о пользователях или объектах [1, 2]. Методы, основанные на контенте, используют информацию о пользователях и объектах, строя рекомендации путем сопоставления желаний пользователя и свойств объекта. Смешанные подходы объединяют вышеперечисленные методы.

3. Метод SVD. Если R — матрица размера $n \times m$, то сингулярное разложение этой матрицы представляет собой разложение матрицы R в произведение трех матриц $R = UDV$ [3], где U имеет размер $n \times n$, D — $n \times m$, V — $m \times m$. Матрица D является диагональной, причем на диагонали стоят сингулярные числа матрицы R

Арзумян Наринэ Карапетовна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: narzana@mail.ru, тел.: +7(952)375-14-78

в порядке убывания значения:

$$R = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} V \approx U \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} V.$$

Из этого разложения вытекает следующий метод построения рекомендаций: оставляются только первые k строк и столбцов матрицы D , остальные отбрасываются ввиду малости значений сингулярных чисел. Тогда размеры матриц U и V становятся $n \times k$ и $k \times m$ соответственно. Матрица R представляется в виде произведения двух матриц $\tilde{R} = \tilde{U}\tilde{V}$, где $\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{D}$. Для получения оценки i -м пользователем j -го фильма необходимо умножить i -ю строку матрицы \tilde{U} на j -й столбец матрицы \tilde{V} .

4. Постановка задачи. Пусть имеется n пользователей и m фильмов. Каждый пользователь ставит оценки произвольному числу фильмов. Таким образом формируется матрица R размера $n \times m$. Элемент r_{ij} этой матрицы соответствует оценке i -м пользователем j -го фильма (оценки принадлежат отрезку $[1, 5]$). Далее матрица R дозаполняется нулями, если i -й пользователь не поставил оценку j -му фильму.

Таким образом, каждый пользователь представляет собой вектор $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$, где $x_{ij} \in [0, 5]$.

Задача состоит в том, чтобы провести анализ корректности полученного прогноза при использовании метода сингулярного разложения матрицы R при построении рекомендаций.

Тестовые данные взяты из [4] и представляют собой набор строк следующего вида: идентификатор пользователя, идентификатор фильма, а также оценка конкретного пользователя конкретному фильму. Всего в тестовых данных 963 пользователя, 1682 фильма и 100 000 оценок.

5. Алгоритм анализа корректности оценок. Рассмотрим алгоритм определения новой оценки:

1. Найти матрицы U, D, V сингулярного разложения матрицы R , построенной по тренировочным данным.

2. Уменьшить размер матрицы D до $k \times k$, отбросив малые значения сингулярных чисел, стоящих на диагонали, и получить матрицу \tilde{D} .
3. Уменьшить соответствующим образом размерности матриц U, V и получить матрицы \tilde{U}, \tilde{V} .
4. Найти приближение исходной матрицы R матрицей $\tilde{R} = \tilde{U}\tilde{V}$, где $\hat{U} = \tilde{U}\tilde{D}$.
5. Предсказать оценку пользователю с идентификатором id_p фильма с идентификатором id_f как произведение id_p -й строки матрицы \hat{U} на id_f -й столбец матрицы \tilde{V}

$$\tilde{r}_{id_p, id_f} = \hat{u}_{id_p} \tilde{v}_{id_f}.$$

6. Если полученная оценка вышла за пределы отрезка $[1, 5]$, то необходимо увеличить или уменьшить ее до ближайшей границы этого отрезка.

Алгоритм определения ошибки полученной оценки заключается в следующем:

1. В матрице оценок Rt , построенной по тестовым данным, найти множество $S = \{(i, j) : Rt_{ij} \neq 0\}$.
2. Определить нормированную разницу между вычисленной оценкой \tilde{r}_{ij} и исходной Rt_{ij} , поставленной самим пользователем

$$err_{ij} = \frac{|\tilde{r}_{ij} - Rt_{ij}|}{5}.$$

3. Повторить вычисления err_{ij} для всего множества S .
4. Найти суммарную ошибку

$$err = \frac{\sum_{(ij) \in S} err_{ij}}{N(S)},$$

где $N(S)$ — мощность множества S .

6. Результаты корректности при определении новых оценок. Для анализа результатов на языке Python в открытом веб-приложении Jupyter Notebook реализована программа. Преимуществом Jupyter Notebook является возможность создавать документы, содержащие программный код, уравнения, текст, графики. В

программе использованы такие библиотеки, как numpy, pandas, scipy.sparse и другие.

Исходные данные были разбиты произвольным образом на тренировочные и тестовые данные в разных пропорциях в процентах (90/10, 95/5, 98/2). При этом получены следующие результаты ошибок при использовании различного числа отбрасываемых строк и столбцов (см. таблицу 1). Здесь k — новая размерность матрицы D .

Таблица 1. Нормированная средняя абсолютная ошибка

Число k	Значение ошибки (90/10)	Значение ошибки (95/5)	Значение ошибки (98/2)
5	40,95	40,31	39,09
10	39,55	38,8	37,63
20	39,54	38,68	37,51
50	42,98	42,08	40,77
100	47,1	46,8	45,74

Во всех трех случаях разбиения минимальное значение ошибки достигается при $k = 20$, время выполнения программы в среднем 5 с. Таким образом существенно уменьшились размерности матриц, при этом точность прогноза увеличилась.

В полученном разложении матрица \hat{U} характеризует пользователей: каждая i -я строка матрицы представляет собой вектор, описывающий i -го пользователя через k компонент. Матрица \tilde{V} подобным образом характеризует фильмы.

При использовании метода K -ближайших соседей в работе [5] получены следующие результаты, представленные в таблице 2.

Таблица 2. Нормированная средняя абсолютная ошибка

Число k	Косинусная мера	Эвклидова мера	Мера Пирсона	Модифицир. мера
1	19,11	19,66	18,6	19,07
4	15,78	16,56	15,38	15,97
7	15,02	15,97	15,4	15,23
10	14,87	15,65	15,04	14,87
13	14,7	15,04	14,68	14,68
16	14,46	15,06	14,4	14,55
19	14,29	14,87	14,19	14,63
22	14,36	14,63	14,46	14,55
25	14,34	14,83	14,42	14,57

Здесь k — количество наиболее похожих пользователей, оценки которых учитывались при определении новой оценки пользователя.

Приблизительное время выполнения программы с использованием косинусной меры — 170 с, евклидовой меры — 75 с, меры Пирсона — 195 с, модифицированной меры Эвклида — 60 с.

Из таблиц 1, 2 видно, что ошибка прогноза в методе K -ближайших соседей существенно ниже, однако в методе SVD время работы программы существенно меньше. Метод сингулярного разложения матрицы безусловно нуждается в доработке, но его идея в преобразовании матрицы R стоит внимания.

7. Выводы. В работе рассмотрен метод SVD коллаборативной фильтрации, на языке Python в Jupyter Notebook реализована программа. Также проведено сравнение полученных результатов при использовании этого метода и метода K -ближайших соседей. Полученные методы могут использоваться в других областях [6–15].

Литература

1. Гомзин А. Г., Коршунов А. В. Системы рекомендаций: обзор современных подходов // Труды Института системного программирования РАН. 2012. Т. 22. С. 401–403.
2. Segaran T. Programming Collective Intelligence. First Edition. 1005 Gravenstein Highway North, Sebastopol, CA 95472: O'Reilly Media, August 2007. P. 1–29.
3. Королева Д. Е., Филиппов М. В. Анализ алгоритмов обучения коллаборативных рекомендательных систем // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 6. С. 3–4. [Электронный ресурс]: URL:<http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/816.html> (дата обращения: 17.02.16).
4. Grouplens [Электронный ресурс]: URL:<https://grouplens.org/datasets/movie1ens/> (дата обращения: 17.02.16).
5. Арзумян Н. К., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Анализ использования различных мер сходства в коллаборативной фильтрации // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 342–347.
6. Красовская И. К., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Корреляционный метод в задаче распознавания речи // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 409–413.

7. Макаров М. А., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Реализация RSA шифрования при обмене сообщениями // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 430–434.
8. Тихонов Н. О., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Разработка кроссплатформенного приложения с использованием технологии ORM // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 534–538.
9. Arzumanyan N.K., Smirnova M.A., Smirnov M.N. Synthesis and modeling of anti-lock braking system // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 606–608.
10. Veremey E.I., Smirnova M.A., Smirnov M.N. Synthesis of stabilizing control laws with uncertain disturbances for marine vessels // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 552–554.
11. Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Астатическая коррекция цифровых законов управления // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2. № 11. С. 481–486.
12. Арзуманян Н. К., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Моделирование системы управления тормозными усилиями автомобиля в Simulink // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 357–363.
13. Какорин Н. С., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Моделирование распространения вирусного заболевания на основе данных о взаимодействии индивидов // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 421–425.
14. Королев Е. А., Петрунин В. Н., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Разработка системы шифрования с применением стегано-криптографических методов // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 437–441.
15. Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Вопросы синтеза стабилизирующих управлений при наличии неопределенных внешних возмущений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 503–508.

УДК 004.75, 311.21, 61

Бебяков А. М.

Разработка информационной системы для автоматизации биомедицинских исследований с использованием облачных технологий

Рекомендовано к публикации доцентом Никифоровым К. А.

1. Введение. В настоящее время автоматизация научных исследований в области биомедицины и генетики представляет собой одну из актуальных научно-технических задач [1, 2]. Особое место в таких исследованиях занимает выявление предрасположенности пациентов к различным заболеваниям.

Целью работы является создание информационной системы, обеспечивающей поддержку проведения научных исследований по определению взаимосвязи генотипа человека и склонности к заболеваниям сердечно-сосудистой системы. В настоящее время такое исследование приобрело большую актуальность в связи с увеличением количества случаев гипертонии в молодом возрасте [3].

С целью изучения ассоциации гипертонического типа реакции сосудов на физическую нагрузку с полиморфизмом T-786C гена eNOS у практически здоровых молодых людей требуется произвести статистическую обработку данных, полученных в процессе обследований.

Обследование включает в себя:

- измерение артериального давления и частоты сердечных сокращений до и после дозированной физической нагрузки (проба Мартине – Кушелевского [4]) с определением типа реакции сосудов на нагрузку;
- молекулярно-генетическое исследование полиморфизма T-786C гена eNOS, производимое методом полимеразной цепной реакции.

В ходе проведения пробы у испытуемого измеряются показатели: SP_1 — систолическое артериальное давление в покое в мм рт. ст., DP_1 — диастолическое артериальное давление в покое в мм рт. ст.,

Бебяков Александр Михайлович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st012196@student.spbu.ru, тел.: +7(911)836-91-73

HR_1 — частота сердечных сокращений в покое (уд./мин.), SP_2 — систолическое артериальное давление после нагрузки в мм рт. ст., DP_2 — диастолическое артериальное давление после нагрузки в мм рт. ст., HR_2 — частота сердечных сокращений после нагрузки (уд./мин.), SP_3 — систолическое артериальное давление через три минуты после нагрузки в мм рт. ст., DP_3 — диастолическое артериальное давление через три минуты после нагрузки в мм рт. ст., HR_3 — частота сердечных сокращений через три минуты после нагрузки (уд./мин.).

Входными данными информационной системы являются: присвоенный пациенту номер (целое положительное число), результаты обследования по пробе Мартине–Кушелевского (целые положительные числа) и результаты молекулярно-генетического исследования полиморфизма (генотип — строка «ТТ», «ТС», или «СС»).

Данные вводятся последовательно по каждому испытуемому человеку. В процессе ввода данных необходимо обеспечить удаленный доступ к базе данных.

В рамках исследования требуется создать информационную систему, способную обеспечить ввод и хранение показателей проб в базе данных вместе с результатами расчетов типа реакции сосудов; доступ к показателям исследований и результатам их обработки, в том числе, агрегатов по типу реакции сосудов и генотипу испытуемых.

2. Разработка информационной системы. Разработка информационной системы включает в себя выбор архитектуры, математическое описание расчета результатов исследования, выбор СУБД, выбор средств разработки веб-приложения, реализация элементов архитектуры.

2.1. Выбор архитектуры системы. Одним из требований к разрабатываемой системе является необходимость поддержки удаленной работы. Для осуществления такого требования выбрана трехзвенная архитектура «клиент-сервер», так как веб-приложение, построенное на данной архитектуре, позволяет обеспечить наибольшую доступность данных в любых условиях исследования [5, 6].

2.2. Расчет результатов исследования. После проведения пробы показатели измерений используются для расчета следующих значений:

1. Относительное изменение частоты сердечных сокращений на

- нагрузку: $(HR_2 - HR_1) \cdot 100 / HR_1$ (в процентах).
2. Изменение систолического давления после нагрузки: $SP_2 - SP_1$.
 3. Изменение диастолического давления после нагрузки: $DP_2 - DP_1$.
 4. Относительное изменение частоты сердечных сокращений через три минуты после нагрузки: $(HR_3 - HR_1) \cdot 100 / HR_1$ (в процентах).
 5. Относительное изменение систолического давления через три минуты после нагрузки: $(SP_3 - SP_1) \cdot 100 / SP_1$ (в процентах).
 6. Относительное изменение диастолического давления через три минуты после нагрузки: $(DP_3 - DP_1) \cdot 100 / DP_1$ (в процентах).

В целях решения задачи определения типа гемодинамической реакции сосудов на нагрузку применяется следующий алгоритм [4].

Шаг 1. Если значения пунктов 4, 5, 6 по модулю меньше 10 %, то тип реакции на нагрузку считается нормотоническим.

Шаг 2. Если значение пункта 2 превышает 30 мм рт. ст., а значение пункта 3 не менее -10 мм рт. ст., то тип реакции на нагрузку считается гипертоническим.

Шаг 3. Если значение пункта 2 превышает 15 мм рт. ст., а значение пункта 3 менее -10 мм рт. ст., то тип реакции на нагрузку считается дистоническим.

Шаг 4. Если значение пункта 1 превышает 40 %, то тип реакции на нагрузку считается гипотоническим.

Шаг 5. Тип реакции на нагрузку считается нормотоническим.

2.3. Выбор СУБД. В качестве системы управления базами данных использована MongoDB 3.0.11. Применение документо-ориентированной СУБД позволяет с легкостью изменять логические структуры данных в базе, основываясь на коде приложения без строгого их предопределения. Такой подход повышает скорость разработки и тестирования приложений [7].

2.4. Выбор средств разработки веб-приложения. Приложение разработано на платформе .NET Framework 4.5 с применением движка Razor и языка программирования C#. В качестве интегрированной среды разработки использована среда Microsoft Visual Studio 2015, предоставляющая значительные возможности по отладке программных продуктов и обладающая механизмом публикации в

Microsoft Azure. Для взаимодействия с СУБД MongoDB применяется библиотека MongoDB.Driver. Для работы с документной моделью данных используется библиотека MongoDB.BSON.

Веб-приложение реализовано в рамках ASP.NET MVC 5, так как её применение позволяет сконцентрироваться на реализации различных аспектов приложения последовательно: отделить создание представления от разработки элементов бизнес-логики [8].

2.5. Реализация элементов архитектуры. Для развертки системы используется облачная платформа Microsoft Azure. Применение облачных технологий предоставляет возможность создания платформонезависимых приложений с возможностью масштабирования и высоким уровнем доступности.

Разработана система со следующей структурой:

- виртуальная машина Linux с установленной на ней СУБД MongoDB;
- ASP.NET MVC веб-приложение.

Посредством СУБД организована база данных «Tests», коллекция «TestsList».

Веб-приложение представляет собой набор интернет-страниц. В верхней части главной страницы приложения выводится таблица (см. таблицу 1) с записями, извлекаемыми из базы данных и состоящими из следующих полей: номер участника исследования, значения снимаемых в ходе обследования показателей, тип реакции сосудов на нагрузку и генотип исследуемого полиморфизма.

Таблица 1. Пример записей базы данных

№	SP_1	DP_1	HR_1	SP_2	DP_2	HR_2	SP_3	DP_3	HR_3	Reaction	GT
1	145	85	80	150	74	88	148	80	82	Normotonic	TT
21	116	80	95	160	96	112	160	84	98	Hypertonic	TC
25	122	84	72	164	100	136	146	90	112	Hypertonic	TC
31	144	82	102	200	96	116	188	90	106	Hypertonic	CC

Далее на главной странице в форме Test предлагается указание номера испытуемого и заполнение значений снимаемых показателей (все значения определяются как целые положительные) для передачи в базу данных.

При помощи формы Genotype возможно добавление информации о генотипе исследуемого полиморфизма к имеющимся записям. Для

этого необходимо указать номер испытуемого и определенный для него генотип GT («ТТ», «ТС», или «СС»).

Также присутствует ссылка для перехода на страницу Statistics, где пользователь может ознакомиться с представленным в таблице (см., например, таблицу 2) результатом расчета количества испытуемых, агрегированного на базе значений типа реакции сосудов на нагрузку и определенного в ходе исследования генотипа.

Таблица 2. Агрегированные данные

	Normotonic	Hypertonic	Hypotonic	Dystonic
ТТ	1	0	0	0
ТС	0	2	0	0
СС	0	1	0	0

3. Заключение. Разработана информационная система, обеспечивающая сбор и автоматизированную обработку данных в ходе проводимого биомедицинского исследования с целью дальнейшего статистического анализа.

Реализованная система применялась для обработки результатов 170 обследований при проведении исследования [9]. Подобные исследования связаны с обработкой больших объемов различных показателей и требуют создания высокоэффективных систем, которые позволяют значительно упростить и ускорить процессы вычислений результатов и принятия решений [10].

В дальнейшем возможна разработка приложения для применения среди населения в целях определения типа реакции сосудов на нагрузку во время спортивных тренировок, или тяжелой физической работы. Подобное знание предоставит возможность принять своевременные меры для предотвращения развития сердечно-сосудистой патологии [3].

Данное приложение является абсолютно доступным для пользователей благодаря использованию современных информационных технологий, таких как веб-интерфейсы и облачные технологии. Пополнение базы данных с помощью разработанного приложения возможно на мобильных устройствах, что позволяет проводить научные исследования вне специализированных лабораторий.

Литература

1. Карпенко А. П., Собенин И. А., Харламов В. В. Программная система АОРТА для автоматизации исследований в области оценки предрасположенности пациента к атеросклерозу на основе генетических и фенотипических маркеров // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. № 01. С. 224–249.
2. Танаева Е. Г., Хафизов Р. Г. Алгоритм выделения сосудистой системы сетчатки на изображениях глазного дна на основе контурного анализа // Символ науки. 2016. № 1–2 (13) С. 102–107.
3. Сухарукова О. В. Влияние лечебной физкультуры на состояние микроциркуляции у больных артериальной гипертонией в молодом возрасте // Лечебная физкультура и спортивная медицина. 2015. № 5. С. 35–40.
4. Чекалова Н. Г., Силкин Ю. Р. и др. Функциональные резервы организма детей и подростков. Методы исследования и оценки: учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во НижГМА, 2010. 164 с.
5. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных. Вильямс, 2005. 1328 с.
6. Гаврилова И. В. Разработка приложений: учебное пособие. М.: ФЛИНТА, 2012. С. 57–69.
7. Banker K., Bakum P., Hawkins T., Verch S., Garrett D. MongoDB in Action. Manning Publications Company, 2016. 375 p.
8. Фримен А. ASP.NET MVC 5 с примерами на C# 5.0 для профессионалов. Вильямс, 2015. 736 с.
9. Куба А. А., Бебяков А. М. Ассоциация гипертоической реакции сосудов с полиморфизмом T-786C гена eNOS у молодых людей // Бюллетень СГМУ. 2015. Вып. 35, № 2. С. 24–25.
10. Купеева И. А., Разнаговский К. И., Раводин Р. А., Карелин В. В., Буре В. М., Гусаров М. В. Оценка эффективности интеллектуальной системы поддержки принятия врачебных решений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 62–68.

УДК 004.051

Белезко А. А., Кучумов Р. И., Фаткина А. И.,
Ганкевич И. Г.

Применение технологий параллельного программирования в задаче моделирования волн в программе MASNUM WAVE

1. Введение. Ветровые волны создаются в результате воздействия ветра на поверхность воды и могут перемещаться на большие расстояния пока не достигнут суши. Так как их размер может достигать нескольких десятков метров, они оказывают большое влияние на безопасность морской навигации и прибрежных территорий. Кроме этого, ветровые волны являются причиной изменения климата, так как несколько кубических метров воды имеют значительно большую теплоемкость, чем такой же объем воздуха.

Рост потребности предсказания ветровых волн обуславливает развитие гидрологии, создание математических моделей и разработку программного обеспечения. Точность результатов вычислений этих математических моделей зависит от рассматриваемого разрешения в пространстве и времени. Однако, с ростом разрешения растут и требования к вычислительным системам.

В данной статье рассмотрено ускорение пакета для моделирования ветровых волн по Земному шару Masnum Wave (MARine Science and NUMerical Modeling) [1]. Кроме этого, описаны особенности параллельной реализации программ на китайском суперкомпьютере Sunway TaihuLight.

2. Моделирование волн в Masnum Wave. Модель Masnum Wave основана на уравнении баланса волновой энергии в сферических координатах. В качестве параметров модели используются

Белезко Алексей Анатольевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st058509@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-83

Кучумов Руслан Ильдусович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st058444@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-83

Фаткина Анна Игоревна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st035020@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-83

Ганкевич Иван Геннадьевич – ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.gankevich@spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-83

функции, описывающие рассеивание волн, влияние ветра, рассеивание из-за трения об океанское дно, взаимодействие между волнами и влияние подводных течений.

Была использована оригинальная реализация Masnum Wave на языке Fortran 90 с технологией MPI. Каждый MPI процесс выполняет итерации, содержащие следующие этапы: чтение данных функций внешнего воздействия, вычисление продвижения волн, синхронизация граничных областей и сохранение результатов. На этапе продвижения волн вычисляются координаты и волновые числа волнового пакета на границах временного интервала и спектр энергии интерполируется между этими значениями. На этапе синхронизации граничных областей MPI процессы, вычисляющие смежные области, обмениваются значениями на их границах. На этапе сохранения результата Masnum Wave записывает спектр, волновое смещение и контрольные точки в файлы.

3. Используемое аппаратное и программное обеспечение.

Работа с пакетом Masnum Wave осуществлялась на вычислительном кластере Sunway TaihuLight, занявшим в 2016 году первое место в рейтинге наиболее производительных суперкомпьютеров мира TOP500 [2].

Sunway TaihuLight состоит из вычислительных узлов с процессорами Shenwei 26010. Каждый процессор содержит по 4 гетерогенные процессорные группы, содержащие по одному управляющему (Management Processing Element, MPE) и по 64 вычислительных ядра (Computing Processing Elements, CPE). Тактовая частота всех ядер 1,45 ГГц. У каждого вычислительного ядра имеется локальный кэш размером 64 Кб.

Для работы с Sunway TaihuLight и вышеописанными процессорами разработчиками предоставлены такие технологии, как MPI 3.0, OpenACC 2.0, Accelerated Multithread library (аналог PThreads) [3].

Чтобы использовать все доступные вычислительные ресурсы, было изменено количество процессов MPI и добавлены в исходный код директивы OpenACC. При использовании OpenACC ядра MPE будут выполнять последовательные части кода, создавать задачи, доступные для параллельного выполнения на CPE, и записывать данные, необходимые для их выполнения, в локальный кэш. Ядра CPE, в свою очередь, будут получать эти задачи, выполнять их и возвращать результат MPE.

4. Анализ и применение технологий параллельного программирования. Проведена оценка времени выполнения функций и процедур, вызываемых при работе Masnum Wave. Замеры времени выполнения каждого этапа показали, что вычисление продвижения волн является одним из наиболее затратных. Стадия записи в файл также занимала достаточно много времени, но ее не учитывали, так как фактическая запись происходила только один раз за моделируемый день и ее периодичность может быть настроена. Время синхронизации MPI процессов было незначительным.

Функция, вычисляющая продвижение волн содержит четыре вложенных цикла, каждый из которых итерирует по координатам фазового пространства. Итерации этих циклов не содержат зависимостей по данным и поэтому могут выполняться параллельно на CPE ядрах. Все необходимые для этой функции данные могут быть скопированы в кеш CPE, потому что, во-первых, с ростом числа процессов размер вычислительной области каждого процесса уменьшается и поэтому требует меньше памяти и, во-вторых, OpenACC позволяет копировать массивы частично. Кроме этого, некоторые массивы (такие как координаты, волновые числа и частоты) имеет смысл сохранять в кэше между вызовами функции продвижения волн.

Для Sunway TaihuLight есть собственная реализация OpenACC, в которой, как утверждается в [3], доступны все функции стандарта версии 2.0. Однако в ходе использования OpenACC выяснилось, что директивы для копирования данных в кэш памяти вычислительных узлов не работают. Эта особенность не позволяет задействовать весь потенциал платформы, так как вычислители используют общую память, что замедляет этот процесс.

Помимо этого возникли следующие сложности:

- отсутствует документация и руководства пользователя. Многие сообщения компилятора выводились по-китайски, на C++ или в бинарном формате;
- компилятор не обрабатывает директивы OpenACC, находящиеся в отдельных файлах `.inc`. Для решения этой проблемы, необходимо было вручную переместить содержимое этих файлов в файлы с исходным кодом (`.f90`);
- компилятор не поддерживает определенные в стандарте директивы для управления памятью (`data`);
- компилятор не может определить размер массива и скопировать его в кеш CPE, если память под него выделяется в другом

объектном файле. Чтобы обойти эту проблему, была изменена архитектура некоторых модулей и переписали функции инициализации и выделения памяти.

- не поддерживается вложенный параллелизм.

5. Полученные результаты. После применения описанной в предыдущем разделе модификации были получены результаты, которые представлены в таблице.

Таблица. Результаты расчетов. M — количество MPI процессов, N — количество потоков OpenACC

Версия программы	M	N	Время, с.	Ускорение
Последовательная	1	1	71	1
MPI + OpenACC	1	64	284	0,25
MPI	64	1	0,55	129
MPI + OpenACC	64	64	1,54	46

После модификации Masnum Wave были обнаружены некоторые не документированные проблемы компилятора, которые не позволили полноценно использовать многие возможности процессоров суперкомпьютера. Несмотря на то, что некоторые из них удалось обойти, ускорение было получено только при увеличении количества вычислительных узлов, а не при использовании специальных вычислительных ядер.

Во второй строке таблицы представлено время работы одного MPI процесса с применением OpenACC. При таких условиях загрузка программа имеет наибольшее время работы. Это связано с невозможностью копирования данных в кэш CPE, что вызывает большие накладные расходы.

Из таблицы видно, что наиболее производительный результат был получен при использовании 64 потоков MPI без использования OpenACC. Такой результат объясняется тем, что программа хорошо параллелизуема.

6. Заключение. Рассмотрена программа для моделирования волн по всему Земному шару Masnum Wave. В ней используются MPI процессы, каждый из которых в своей области выполняет итерационную процедуру численного решения уравнения.

Проанализирована работа этой программы на первом в мире по производительности китайском суперкомпьютере Sunway TaihuLight.

Выявлены наиболее затратные этапы вычислений и предложен способ для их оптимизации с учетом особенностей этого суперкомпьютера. Кроме того, программа была модифицирована с использованием реализации стандарта OpenACC 2.0, доступного на используемом аппаратном обеспечении.

Литература

1. Fangli Qiao, Wei Zhao, Xunqiang Yin et al. A highly effective global surface wave numerical simulation with ultra-high resolution // SC'16 Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. Salt Lake City: IEEE Press Piscataway. 2016. P. 46–56.
2. The TOP500 List. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.top500.org/lists/2016/11/> (дата обращения: 01.03.17).
3. Report on the Sunway TaihuLight System. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/PAPERS/sunway-report-2016.pdf> (дата обращения: 1.03.17).

УДК 004.032.26

Бендриковский А. Я.

Обнаружение и классификация объектов на изображении с помощью нейросетевого алгоритма YOLO

Рекомендовано к публикации доцентом Корховым В. В.

1. Введение. На сегодняшний день актуальной задачей в области цифровой обработки изображений является обнаружение и классификация объектов. Результаты достижений в этой сфере широко применяются в разработке программного обеспечения для автопилотируемых технических средств, летательных аппаратов и во многих других направлениях [1–3].

Например, в [4] применяется алгоритм Fast R-CNN [5] для обнаружения и классификации различных предметов гардероба. К настоящему моменту произошел ряд улучшений этого алгоритма, а также появились новые подходы к решению задачи. От алгоритма обнаружения требуется высокая точность классификации объекта и определения его местоположения на изображении, важна также и скорость обработки изображения. Алгоритмы на основе глубоких нейросетей сейчас достигают очень хороших показателей по данным критериям. Спектр подходов к решению этой задачи достаточно велик, что позволяет выбирать наиболее подходящие под конкретные нужды методы. Например, Faster R-CNN [6] считается одним из самых точных нейросетевых алгоритмов обнаружения объектов на изображении, но для достижения

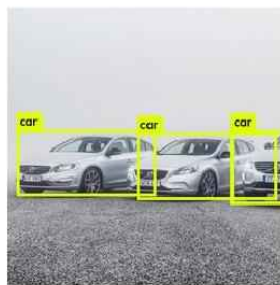


Рис. 1. Пример работы алгоритма

Бендриковский Анатолий Ярославович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: bendrikovski@gmail.com, тел.: +7(981)845-31-45

точности приходится жертвовать скоростью обработки, что не всегда подходит для использования в онлайн-режиме. Одним из самых быстрых алгоритмов является YOLO (You only look once) [7], однако его точность на порядок ниже, чем у вышеупомянутого алгоритма. Рассмотрим подробнее каждый из них.

2. Faster R-CNN. В алгоритме Faster R-CNN обнаружение объектов происходит в два этапа. Первый этап — это глубокая полносвязная нейросеть (Region Proposal Networks), которая предлагает регионы, отличные от фона, вторая часть — это Fast R-CNN detector, который использует эти предложения по регионам. Этот алгоритм — логическое продолжение алгоритма Fast R-CNN, в котором решены проблемы долгого и не очень точного поиска окон-кандидатов (Selective Search [8], MultiBox [9]). Таким образом RPN выбирает на изображении области, которые Fast R-CNN должен проверить на наличие какого-либо объекта. При этом нейросети тренируются отдельно.

3. YOLO. Подходит для работы в реальном времени, но имеет низкую точность на больших и маленьких объектах, средняя точность (mAP) — 63,4%. В этом подходе нейронная сеть предсказывает обрамляющие окна (bounding boxes) и вероятности классов, применяясь к полному изображению.

3.1. Описание алгоритма. На выходе нейросеть дает тензор размера $7 \times 7 \times 30$, который содержит всю информацию, необходимую для нанесения на изображение обрамляющих окон.

1. На изображение наносится сетка 7×7 . Если центр объекта попадает в ячейку сетки, эта ячейка сетки отвечает за обнаружение этого объекта.
2. Каждой клетке этой сетки соответствует вектор размера $(4 + 1) \times B + C$, где:
 - а) каждое обрамляющее окно (bbox — bounding box) характеризуется пятью показателями:
 - некоторая вероятность того, что окно правильно нашло объект:

$$Pr(object) * IoU_{predicted}^{truth}$$

где IoU (intersection over union) — это оценочная метрика, равная отношению площади пересечения и площади объединения двух областей. В данном случае, ground-truth bboxes и predicted bboxes. Здесь ground-truth bboxes — размеченные вручную обрамляющие окна тестирующего набора данных, predicted bounding boxes — предсказанные моделью окна;

- (x, y) — координаты центра соответствующей ячейки сетки;
- w — ширина обрамляющего окна относительно всего изображения;
- h — высота обрамляющего окна относительно всего изображения.

б) B — число обрамляющих окон для каждой ячейки сетки, $B = 2$;

с) C — число классов, которые могут быть предсказаны. В каждом из этих элементов вектора хранятся вероятности того, что внутри ячейки сетки лежит объект конкретного класса, без привязки к конкретному обрамляющему окну.

3. Таким образом, каждая ячейка сетки предсказывает B ограничивающих окон и доверительные оценки (confidence scores) для них. Теперь перемножим эти оценки каждого окна с вероятностями классов соответствующей ячейки сетки. Получим набор векторов размера C в количестве $2 \times 7 \times 7$.

4. Для финального нанесения на изображение обрамляющих окон с полученным набором производятся следующие действия:

- рассматриваются значения набора векторов по классам;
- обнуляются не удовлетворяющие пороговому значению значения;
- сортируются по убыванию;
- применяется алгоритм Non-maximal suppression, который оставит наиболее точное из пересекающихся окон;
- на изображение наносятся только те окна, в векторе которых есть ненулевые значения, при этом окну присваивается класс с наибольшим значением.

3.2. Описание архитектуры нейросети. Изображение размера 448×448 пропускается через часть модифицированной модели классификации изображений GoogLeNet, которая в конечном счете имеет 24 сверточных слоя и 2 полносвязных слоя. Вместо «Inception module» GoogLeNet, используются слои 1×1 с последующим сверточными слоями 3×3 .

4. YOLOv2. В модификации YOLOv2 [10] добавлены ряд улучшений, которые дают значительную прибавку в скорости и точности алгоритма, при этом точность достигла точности Faster R-CNN. Наиболее существенными улучшениями являются:

- Batch Normalization [11] дает прибавку точности в 2%;
- High Resolution Classifier. Осуществлена точная настройка результирующей сети для обнаружения. Использован классификатор, обученный на наборе данных ImageNet. Эта сеть классификации с высоким разрешением дает прирост почти на 4% mAP;
- Dimension Clusters + Direct location prediction. Использование размерных кластеров наряду с прямым прогнозированием расположения центра обрамляющего окна улучшает YOLO почти на 5%.

Таким образом точность YOLO с 63,4% поднялась до 76,8 %.

5. YOLO vs Faster R-CNN. В таблице представлены показатели обоих алгоритмов, обученных на наборах данных VOC2007 и VOC2012, тестируемых на наборе test VOC2007.

Таблица. Сравнение

Алгоритмы	Test	mAP	FPS
Fast R-CNN VGG-16	test VOC2007	73,2	7
YOLOv2 480×480	test VOC2007	76,8	59
YOLO	test VOC2007	63,4	45

6. Эксперимент. На скорость обучения и работы алгоритма влияет архитектура процессора, с помощью которого производятся вычисления. Нейронная сеть Darknet, используемая в YOLO, до 500 раз быстрее на GPU, чем на CPU [12]. Воспроизведем результаты,

описанные в [10] на машине с GPU: Nvidia GTX 1060, CPU: AMD FX-8370, используя инструкции из [13].

6.1. Запуск на CPU. Для изображения (см. рис. 1) размера 448×448 YOLO понадобилось 9,669285 секунды, алгоритм нашел три автомобиля, с вероятностями 86%, 82%, 68%. Правый автомобиль виден не полностью, поэтому для него вероятность ниже. Для Tiny YOLO — упрощенной, менее точной, но достаточно быстрой модификации YOLO, понадобилось 1,784568 секунды, однако обнаружено уже только два автомобиля, с вероятностями 82%, 78%.

6.2. Запуск на GPU. YOLO — 1,202523 секунды с теми же вероятностями. Tiny YOLO — 1,141075 секунды с теми же вероятностями. Таким образом, GPU дает заметное приращение в скорости.

7. Выводы. Рассмотрены два основных нейросетевых алгоритма обнаружения и классификации объектов на изображении: YOLO и Faster R-CNN. Продемонстрированы преимущества алгоритма YOLO. Произведен запуск на CPU и GPU. Алгоритм YOLO достаточно хорошо справляется с решением задачи онлайн, если использовать GPU. При условии использования библиотеки OpenCV возможно обрабатывать видеопоток с камеры или видео.

Литература

1. Голокоз А. Ю. Детектирование движущихся объектов на видеозображении с одиночной камеры квадрокоптера // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 372–376.
2. Назукин Д. Е. Классификация автодорожных знаков с использованием сверточной нейронной сети // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 440–444.
3. Ялов А. Л. Автоматическое детектирование нарушения на пешеходном переходе // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 571–575.
4. Куликин А. Б., Смирнов Е. А. Нейросетевое детектирование объектов в условиях ограниченного времени // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 419–424.

5. Girshick R. Fast R-CNN [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1504.08083> (дата обращения: 16.03.2017).
6. Shaoqing Ren S., He K., Girshick R., Sun J. Faster R-CNN [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1506.01497> (дата обращения: 16.03.2017).
7. Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1506.02640> (дата обращения: 16.03.2017).
8. Uijlings J., K. van de Sande, Gevers T., Smeulders A. Selective Search for Object Recognition [Электронный ресурс]: URL:<https://docs.google.com/viewer?docex=1&url=https://ivi.fnwi.uva.nl/isis/publications/2013/UijlingsIJCV2013/UijlingsIJCV2013.pdf> (дата обращения: 16.03.2017).
9. Szegedy C., Reed S., Erhan D., Anguelov D., Ioffe S. Scalable, High-Quality Object Detection [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1412.1441> (дата обращения: 16.03.2017).
10. Redmon J., Farhadi A. YOLO9000: Better, Faster, Stronger [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1612.08242> (дата обращения: 16.03.2017).
11. Ioffe S., Szegedy C. Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/pdf/1502.03167> (дата обращения: 16.03.2017).
12. Compiling With CUDA [Электронный ресурс]: URL:<https://pjreddie.com/darknet/install/#cuda> (дата обращения: 16.03.2017).
13. YOLO: Real-Time Object Detection [Электронный ресурс]: URL:<https://pjreddie.com/darknet/yolo/> (дата обращения: 16.03.2017).

УДК 519.714

Верхотуров М. С., Завадский С. В.

Цифровое управление сервоприводом на диагностическом комплексе МТУ-17

Введение. Сегодня промышленность предъявляет все больше требований к средствам управления объектами робототехники. Использование модульной, программно управляемой архитектуры позволяет решить задачу постоянного увеличения производительности.

Диагностический комплекс МТУ-17 включает в себя модульные приборы открытого промышленного стандарта PXI [1, 2]. Приборы легко устанавливаются, заменяются и используются в едином синхронном исполнении.

В качестве программного обеспечения применяется среда разработки LabVIEW, основанная на языке графического программирования G [3, 4]. Написание программ на LabVIEW напоминает сбор электрической схемы, что делает его интуитивно понятным для ученых и инженеров.

Сервоприводом называется такой механический привод, который управляется при помощи отрицательной обратной связи [5]. При таком типе связи изменение выходного сигнала системы противодействует влиянию сигнала на входе, что увеличивает устойчивость системы и точность управления параметрами движения.

Сервоприводы используются для механических задвижек и рабочих органов в промышленных станках с числовым программным управлением и для промышленных роботов. В последнее время высокоскоростные модели получили популярность в среде авиамоделирования.

Целью данной научно-исследовательской работы является разработка программы в среде программирования LabVIEW для настройки и выполнения задачи управления углом поворота сервопривода на высокотехнологическом измерительном комплексе МТУ-17. Интерес

Верхотуров Михаил Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vms2108@mail.ru, тел.: +7(812)428-47-29

Завадский Сергей Вячеславович – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: svzav11@yandex.ru, тел.: +7(812)428-47-29

представляет формирование непрерывного периодического управляющего цифрового сигнала с высокоточными временными характеристиками. Напряжение и сила тока должны отображаться в процессе работы, что позволит определять мощность, требуемую системе, при конкретном действии и текущей нагрузке.

Описание сервопривода. На рис. 1 представлены:

1. Электрический мотор, преобразующий электричество в механический поворот.
2. Редуктор, который понижает скорость вращения мотора и преобразует ее в крутящий момент.
3. Выходной вал, воздействующий на управляемый объект.
4. Потенциометр, используемый как датчик обратной связи. Сопротивление меняется с поворотом бегунка потенциометра. Величина сопротивления помогает установить текущее значение изменяемого параметра.
5. Блок питания и управления, который поддерживает отрицательную обратную связь и отвечает за питание мотора.
6. Три провода: питание, земля и цифровой вход.

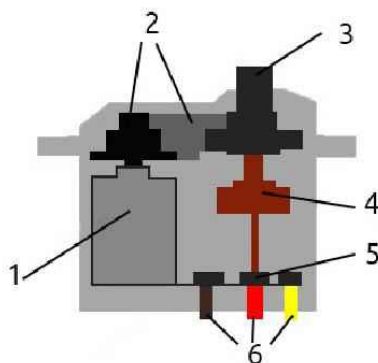


Рис. 1. Устройство сервопривода

Физическая постановка задачи. Рассмотрим задачу управления углом поворота сервопривода. Для управления необходимо посылать по проводу с цифровым входом управляющий сигнал, который состоит из импульсов с постоянной частотой и переменной длительностью высокого уровня. Ожидаемое положение сервопривода зависит от длительности импульсов. Импульс попадает в блок управления, далее генерируется еще один импульс, определяемый потенциометром, и сравниваются длительности двух импульсов. Motor включается только в том случае, если длительность различна. При одинаковой длительности мотор останавливается.

Сервопривод 9g SG90 способен вращаться от 0 до 180 градусов. Для него известны следующие соотношения между длительностью импульса и углом поворота сервопривода: 0 градусов \sim 544 мкс, 90 градусов \sim 1520 мкс, 180 градусов \sim 2400 мкс. При этом импульсы следует генерировать с частотой в 50 Гц, т. е. один раз в 20 мс. Таким образом, задача управления сервоприводом сводится к задаче модуляции импульсов по их длительности. В этой задаче длительность импульсов важнее частоты их появления, но и частота не должна сильно отклоняться от значения в 50 Гц [5]. Управляющий сигнал аналогичной формы используется и в других исследованиях, например, в задаче оптимизации положения квадрокоптера [6–9] и в задаче стабилизации плазмы [10–12].

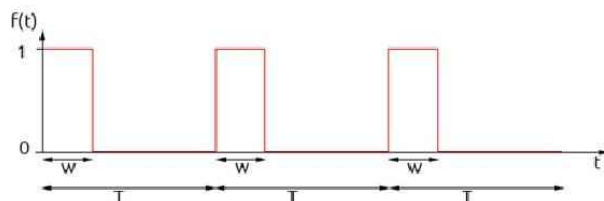


Рис. 2. Вид управляющего сигнала

Математическая постановка задачи. Пусть известны T — период управляющего сигнала, α — требуемый угол поворота сервопривода и задано взаимно-однозначное соответствие длительности высокого уровня управляющего сигнала внутри периода и угла

в градусах $w = W(\alpha)$. Требуется построить управляющий сигнал (рис. 2):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \bmod (T) \leq W(\alpha); \\ 0, & \text{если } t \bmod (T) > W(\alpha). \end{cases}$$

Методика решения поставленной задачи на МТУ-17. Программируемый источник питания NI PXI-4130 позволит передавать необходимые для работы сервопривода напряжение и силу тока, а программируемое устройство цифрового ввода-вывода NI PXIe-6535 генерировать импульсы различной длительности с заданной частотой.

Описание практической части. Для проведения работы необходимо подключить цифровой модуль диагностического комплекса с беспаяечной макетной платой, затем соединить выход источника питания и используемый цифровой порт с сервоприводом.

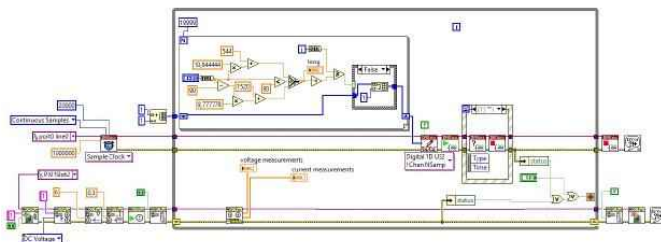


Рис. 3. Блок-диаграмма

Перед запуском программы (рис. 3) задаются начальные данные: номера портов, режимы работы, характеристики питания и управляющего сигнала. Испускание одного бита производится с частотой в 1 МГц, значит, за 20 мс будет передаваться пакет размером 20 тысяч одноканальных значений.

Программа написана таким образом, чтобы одномерный массив длиной 20 тысяч формировался целиком до начала генерации и ждал своей очереди. Заданный пользователем угол (рис. 4) преобразуется в количество единиц. Изменения вносятся без перезапуска программы, обновленный массив начнет передаваться только после

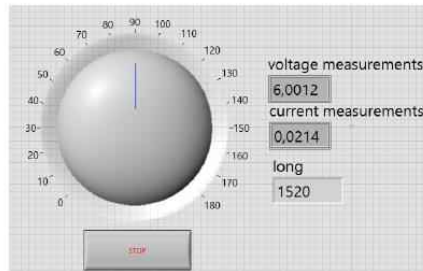


Рис. 4. Интерфейс

записи предыдущего. Время ожидания составит меньше либо будет равно 20 мс. Пользовательский интерфейс дополняется индикаторами длительности управляющего сигнала, напряжения и силы тока.

Заключение. В работе представлена задача цифрового управления сервоприводом на диагностическом комплексе МТУ-17, рассмотрены актуальность использования модульной архитектуры системы и преимущества среды разработки LabVIEW, показана область применения и объяснен принцип работы сервопривода. В ходе работы получены следующие результаты:

1. Разработана программа, которая позволяет управлять углом поворота сервопривода. Управляющий цифровой сигнал обладает высокоточными временными характеристиками, и непрерывно подается на сервопривод. Измерение, отображение и контроль в реальном времени за мгновенной величиной потребляемого приводом тока позволяет регулировать силу захвата объектов роботизированным манипулятором и детектировать моменты столкновения с препятствиями.
2. Представлены математическая и физическая постановка задачи, решаемой на МТУ-17. Составлена методика решения поставленной задачи с применением разработанной программы.

Литература

1. Завадский С. В., Сиротинин И. В. Автоматизация верификационных процессов в жизненном цикле разработки объектов критической инфраструктуры и встраиваемых систем управления // Сборник докладов научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь (RLNC)». 2014. Т. 2. С. 943–947.
2. Завадский С. В., Сиротинин И. В. Программно-аппаратное макетирование аппаратуры передачи данных с использованием современных визуальных сред // Актуальные вопросы развития систем и средств ВКО. Сборник докладов научно-технической конференции «Научные чтения к 105-летию со дня рождения академика А. А. Расплетина». М.: ОАО «ГСКБ «Алмаз-Антей», 2013. С. 554–558.
3. Maslov A. A., Lepikhin T. A. Comparative characteristics and selection of optimal filtering algorithm signal using LabVIEW software package // In International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM). 2014. Vol. 1648. P. 450013-1–450013-4.
4. Бутырин П. А., Васьковская Т. А., Каратаев В. В., Матеркин С. В. Автоматизация физических исследований и эксперимента: компьютерные измерения и виртуальные приборы на основе Lab VIEW, 2-е изд. М.: ДМК Пресс, 2011. 265 с.
5. Сервоприводы [Электронный ресурс] // Амперка URL:<http://wiki.amperka.ru/робототехника:сервоприводы> (дата обращения: 05.03.2017).
6. Zavadskiy S. V., Sharovatova D. S. Improvement of quadcopter command performance system // «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015 International Conference, 2015. P. 609–610.
7. Завадский С. В., Шароватов Д. С. Параллельная параметрическая оптимизация динамических систем стабилизации на высокопроизводительном кластере // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 409–415.

8. Завадский С. В., Шароватова Д. С. Синтез фильтра Калмана в контуре системы управления квадрокоптера // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. Санкт-Петербург, 2015. С. 523–524.
9. Lepikhin T. A. The analysis of Quadrocopter and Hexacopter dynamics // In International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), 2015. Vol. 1738. P. 450013-1–450013-4.
10. Zavadskiy S. V. Concurrent optimization of plasma shape and vertical position controllers for ITER tokamak // 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization (BDO), 2014. P. 196–197.
11. Zavadsky S. V., Ovsyannikov D. A., Chung S. L. Parametric optimization methods for the tokamak plasma control problem // International Journal of Modern Physics. 2009. Vol. 24. No 5. P. 1040–1047.
12. Zavadskiy S. V., Kiktenko A. Simultaneous parametric optimization of plasma controllers for vertical position and shape // Cybernetics and Physics. 2014. Vol. 3. No 3. P. 147–150.

Нейронные сети в задаче предсказания дорожного трафика

1. Введение. Жизнь современного города сложно представить без автомобилей, а жизнь современного мегаполиса — еще и без пробок. Это особенно критично для социально важных служб, таких как милиция, пожарная, скорая помощь, когда ценой некорректного выбора маршрута может стать чья-то жизнь. В этой области постоянно ведутся исследования, позволяющие увеличить скорость получения прогноза и его точность. Нет сомнений, что прогнозирование дорожного трафика еще долго будет оставаться одной из наиболее актуальных задач. Кроме общеизвестных сервисов, например, «Яндекс.Пробки», есть много других проектов, также использующих предсказание трафика в контексте своей функциональности. Таким проектам часто приходится разрабатывать свои собственные пути решения этой задачи.

В данной работе решена задача о наиболее точном прогнозировании дорожного трафика с помощью нейронных сетей на основе данных для того же участка транспортной сети за несколько дней до этого. Необходимо определить, является ли данный подход уместным в этой задаче.

2. Оптимизация нейронной сети. Все изменения, проведенные в рамках исследования можно разделить на две части: начальная модель, изменение данных и изменение архитектуры. Кратко опишем ход работы для каждого из них.

2.1. Начальная модель. Исходные данные записаны в двух csv файлах. Первый содержит описание графа, представленное в виде списка ребер, второй — данные о загруженности каждого узла за период с 1 марта 0:00 до 20 апреля 8:00 с периодичностью пять минут.

Гавриков Антон Александрович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st047437@student.spbu.ru, тел.: +7(931)967-94-31

Свешникова Светлана Юрьевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: svetavesh@yandex.ru, тел.: +7(812)428-47-83

Ганкевич Иван Геннадьевич – ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: i.gankevich@spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-83

Уровень пробки измеряется от 1 до 4, где 4 — максимальная загруженность дороги, а 1 — свободное движение по дороге. На основе этих данных требуется предсказать дорожный трафик 20 апреля с 8:00 до 10:00 с той же периодичностью. Обучение нейронной сети производится с помощью фреймворка PaddlePaddle. Для подсчета ошибки используется RMSE (Root Mean Squared Error) — средне-квадратичная ошибка модели:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}},$$

где y_i — значение, вычисленное по алгоритму, а \hat{y}_i — известное эталонное значение. В нашей задаче y_i — показатель загруженности дороги в момент времени i .

В качестве отправной точки для исследования будем использовать простейшую нейронную сеть с одним скрытым слоем. Данная нейронная сеть получает на вход данные за последние два часа одного узла и предсказывает загруженность дорог на следующие два часа с шагом в пять минут для этого же узла. Для тренировки программа использует два часа из разных промежутков времени за все 50 дней со всех узлов. Для каждого шага в предсказании, т. е. для каждых пяти минут, используется отдельная нейронная сеть.

2.2. Изменение данных. Простейшая нейронная сеть с одним скрытым слоем, запущенная на всех исходных данных, показала ошибку 0,68. Вместо того, чтобы обучать всю сеть, было решено обучать каждый узел независимо. Так как необходимо получить данные только для двух часов, с 8 до 10, то для обучения был взят промежуток с 6 до 12. Применение каждого из этих подходов не дало результата, но их совместное использование уменьшило ошибку на 0,08 до 0,60. Известно, что пробка на одном перекрестке может повлиять на дорожную обстановку на соседних перекрестках. Для учета такой ситуации вместо изначального значения узла в сеть подается его перевзвешенное значение, взятое с учетом значений в смежных узлах. Формула расчета нового уровня пробки для вершины:

$$\text{speed}[i] = \frac{1}{2} \left(\text{speed}[i] + \frac{\sum_{j=1}^k \text{speed}[j]}{k} \right),$$

где $i = \overline{1, n}$ — узлы, $j = \overline{1, k}$ — смежные узлы.

После этого был добавлен учет дня недели и обучение по последнему часу, а не двум, как это было ранее. Эти изменения совместно с перевесом значений уменьшили ошибку до 0,56, при этом учет дня недели и обучение по последнему часу на исходных весах не дало результата. Для обучения нейронной сети самостоятельному перевесу узлов подаются данные соседних узлов за один промежуток времени на каждый из 12 слоев, а данные о самом узле в отдельный слой. Далее все это обрабатывалось с помощью еще одного слоя и объединялось в слой из 12 нейронов (по количеству временных промежутков). Данный подход не дал положительных результатов. Основные идеи взяты из статьи [2].

2.3. Архитектура сети. В ходе исследования произведены следующие эксперименты с конфигурацией сети:

1. Изменение функции активации. Эта функция вычисляет значение выходного сигнала нейрона так, чтобы он находился в определенном промежутке (обычно от 0 до 1). Лучший результат показала `softmax` функция. Также были использованы функции `sigmoid`, `tanh` и `stanh`.
2. Выбор количества внутренних слоев сети от 1 до 3. Использование одного слоя наиболее оптимально. При увеличении количества слоев происходила потеря точности.
3. Использование рекуррентной модели (LSTM), которая считается наиболее предпочтительной для задач предсказания, но в нашем случае она показала ровно такой же результат. К недостаткам стоит отнести более сложный процесс настройки, по сравнению с обычной сетью [1, 3].
4. Изменение количества нейронов в одном слое от 6 до 200. Наилучший результат был достигнут при значении 64.

2.4. Окончательная версия. Таким образом, наилучший результат продемонстрировала нейронная сеть с одним скрытым слоем, которая предсказывает и тренируется отдельно для каждого узла, используя лишь тот день недели, на который формируется предсказание и промежуток времени с 6 до 12. Предсказание формируется на основе данных за полтора часа.

Таблица 1. Влияние изменений на значение ошибки

Начальная ошибка	0.68
Использование своей нейронной сети для каждого узла	0.68
Период обучения с 6 до 12	0.68
Предыдущие два пункта вместе	0.6
Рекуррентная сеть	0.6
Перевзвес узлов	0.6
Обучение по одному дню в неделю	0.58
Использование одного часа вместо двух часов для обучения	0.56

3. Заключение. Получено увеличение точности прогноза после изменения формата начальных данных. Изменение и усложнение архитектуры сети не повлияло на точность прогноза. Тем не менее, использование более сложных моделей сети это единственный способ добиться более точных результатов, но в данной работе не удалось подобрать оптимальную архитектуру сети для описанной задачи. Хорошим подходом будет комбинирование различных архитектур. Отметим, что используется RMSE для подсчета ошибки в рассмотренной задаче, но данный подход не дает реального представления о том, насколько различна ситуация на дороге. Таким образом, в дальнейшем следует найти или разработать другой способ подсчета ошибки, так как этот не удовлетворяет данной задаче в полной мере. При использовании другого метода подсчета ошибки рекуррентная модель может дать более точные результаты. Также стоит объединить рекуррентную модель и пересчет весов с помощью нейронной сети и узнать, как это повлияет на результат предсказания.

Литература

1. Yisheng Lv, Yanjie Duan, Wenwen Kang et al. Traffic flow prediction with big data: a deep learning approach // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2015. No 2. P. 865–873.
2. Пупырев С., Пронченков А. Прогнозирование загруженности автомобильных дорог // IV Российская летняя школа по информационному поиску RuSSIR'2010. Воронеж. 2010. С. 64–78.
3. Yasdi R. Prediction of road traffic using a neural network // Neural computing and applications. 1999. No 2. P. 135–142.

УДК 004.93

Глушкова Е. Д.

Алгоритм предварительной обработки изображений электронных схем цифровых устройств

Рекомендовано к публикации доцентом Гришкиным В. М.

1. Введение. Большинство современных электронных устройств разрабатываются и изготавливаются с применением компьютерных технологий. Для их создания используются системы автоматизированного проектирования (САПР), а схема проектируемого устройства хранится в виде файла определенного формата, позволяющего ее редактирование, а также использование для создания более сложных устройств.

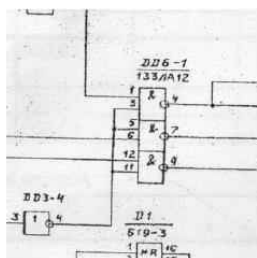


Рис. 1. Пример части исходного изображения

Однако при модернизации ранее разработанных устройств и создании электронных архивов приходится сталкиваться с тем, что большое число схем таких устройств существует лишь в виде чертежа на бумаге. Это представление создает дополнительные трудности при разработке тестов устройств и переносе их на современную элементную базу. Перевод таких схем в цифровой формат — процедура весьма трудоемкая и длительная. В работе предлагается алгоритм предварительной обработки

изображений схем цифровых устройств, позволяющий автоматизировать процесс перевода изображений таких схем в формат, использующийся в современных САПР для разработки, моделирования и тестирования цифровых устройств [1, 2].

Глушкова Екатерина Дмитриевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yekaterina.glushkova@gmail.com, тел.: +7(999)525-79-27

2. Постановка задачи. Исходными данными являются изображения формата JPEG, полученные путем сканирования цифровых схем (рис.1). Схема должна целиком помещаться на изображении и быть читаемой, однако само изображение может иметь небольшие случайные сдвиги или повороты, а также различные виды шумов. Необходимо разработать алгоритм выделения объектов интереса на изображениях данного типа с достаточной точностью. В качестве объектов интереса выступают такие части изображения схемы как изображения компонентов, а также изображения линий связи между ними. Таким образом, алгоритм предварительной обработки должен локализовать изображения компонентов и связей между ними.

3. Выравнивание изображения. Первым шагом обработки является поворот изображения таким образом, чтобы линии проводников располагались как можно ближе к горизонтали и вертикали — это позволит упростить дальнейшую обработку.



Рис. 2. Применение алгоритма Хафа

Для начала схема очищается от шума и грязи: исходное изображение из цветного переводится в монохромное, добавляется размытие и запускается детектор ребер, после чего уже применяется алгоритм Хафа [3] для обнаружения произвольных кривых на изображениях, а именно — отрезков прямых. Все эти действия можно осуществить с помощью стандартных методов библиотеки `opencv`.

Кроме линий проводников, даже несмотря на фильтрацию, метод Хафа находит множество других объектов на изображении — например буквенные обозначения. Однако после исключения всех коротких линий и тех, что далеки от горизонтального значения, по среднему углу наклона оставшихся линий легко определяется общий наклон изображения, и с помощью матрицы поворота исходное изображение поворачивается на нужное значение.

4. Определение точек интереса. Теперь на изображении выделяются темные пиксели, которые будут относиться к самой схеме. Каждое изображение представляется в виде матрицы размерности $[m \times n]$, элементами которой являются вектора размерности 3, задающие цветовые характеристики каждого пикселя в виде значений цветового пространства RGB. Для простоты, каждый элемент этой

матрицы заменяется на яркостное значение данного пикселя. Яр-
костная составляющая рассчитывается так:

$$Y = 0,299R + 0,587G + 0,114B$$

где R , G и B , соответственно, красная, зеленая и синяя состав-
ляющая данного пикселя.

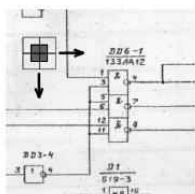


Рис. 3. Окно поиска

Далее все изображение разбивается на квадратные перекрывающиеся друг друга ок-
на размерностью всего в несколько пиксе-
лей. Для каждого такого окна находится его
средняя яркость, а затем находится сред-
няя яркость всех рядов и столбцов пиксе-
лей из данного окна. Координаты пиксе-
лей тех рядов и столбцов, средняя яр-
кость которых оказалась значительно тем-
нее яркости самого окна, считаются частью
схемы и запоминаются как точки интереса.

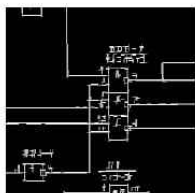


Рис. 4. Найденные
точки интереса

5. Определение линий и их обработ- ка.

Далее отдельные пиксели объединяются в
прямые и среди них выделяются группы, от-
носящиеся к одним и тем же частям проводни-
ков. Путем прохода по рядам и столбцам ма-
трицы всего изображения, среди точек интере-
са ищутся рядом стоящие пиксели и объеди-
няются в единые линии толщиной в 1 пиксель.
При этом если разрыв между двумя группами
пикселей, лежащими на одной прямой, доста-
точно мал – они также объединяются в одну
линию.

Так как линии на исходном изображении чаще всего имеют тол-
щину больше, чем один пиксель, то и распознаваться при таком под-
ходе они будут как группы рядом стоящих параллельных отрезков.
Поэтому происходит уплотнение: группа линий, лежащих на сосед-
них рядах, заменяется одной прямой толщиной в один пиксель. При
этом осуществляется фильтрация, благодаря которой отбрасываются
слишком короткие и толстые линии, так как они, скорее всего,
окажутся частями буквы или цифры.

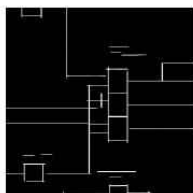


Рис. 5. Сортировка

Затем осуществляется процесс уточнения крайних точек линий — ведь из-за искажений изображения некоторые прямые выступают за границы, а некоторые, наоборот, не пересекаются, хотя и должны. Будем считать, что каждая горизонтальная линия на изображении пересекается на концах с двумя вертикальными и наоборот. Исходя из этого «отрубаются» концы отрезков, если они короткие и не имеют пересечения с другими линиями, либо если они длинные и близки к пересечению с другой прямой — они дорабатываются их до пересечения. Отрезки, не имеющие пересечения с другими линиями, также считаются частью букв или цифр и выбраковываются.

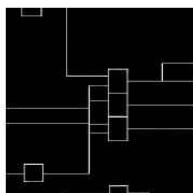


Рис. 6. Результат

6. Заключение. Данный алгоритм работает достаточно хорошо (локализуется около 90% линий связи и компонент) для данной задачи, даже если исходное изображение имеет разную яркость на разных участках, или когда линии прорисованы недостаточно точно. Он позволяет получить актуальные сведения о местоположении объектов на исходном изображении. В результате создается список линий на изображении с параметрами их локализации. Этот список будет использован в

дальнейшем для сегментации и поиска связей между элементами электронных схем цифровых устройств.

Литература

1. Grishkin V. M., Melnik V. I., Mikhailov A. N.. Methods of modeling of the test inputs for analysis the digital devices // International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICSTPEA 2014 – Proceedings, 2014. P. 112–113.
2. Гришкин В. М., Лопаткин Г. С., Михайлов А.Н., Овсянников Д.А. Интерфейсный метод построения моделей входных воздействий для тестирования электронных цифровых модулей // Вопросы радиоэлектроники. 2013. Т. 1. № 1. С. 80-89.
3. Duda R. O, Hart P. E. Use of the hough transformation to detect lines and curves in pictures// Commun. acm. 1972. Vol. 15, No. 1, P. 11–15.

УДК 004.891.3

Григорян Д. А.

Алгоритм обоснования операции на основе анализа данных группы пациентов

Рекомендовано к публикации доцентом Добрыниным В. Ю.

1. Введение. В последнее время во многих больницах, поликлиниках помимо бумажных носителей начали внедрять IT-технологии. Например, в удаленных населенных пунктах внедряются телемедицинские технологии. Они позволяют высококвалифицированным врачам удаленно участвовать в лечении пациентов, тем самым повышая его качество [1].

Также распространены ERP-системы (Enterprise resource planning) — компьютерные программы, помогающие оптимизировать ресурсы и процессы в компании. Данное программное обеспечение использует единую модель данных, хранящую информацию о всех подразделениях компании и о всех процессах, происходящих в ней (финансы, управление персоналом, поставки, производство, оказание услуг и т. д.). Данные системы автоматизируют многие бизнес-процессы, что благотворно сказывается на их эффективности [2].

Для исследования взята часть SQL-базы одной из больниц, использующих ERP-систему, отвечающая за отделение сердечно-сосудистой хирургии. Поставлена задача: создать систему, которая принимает решение о необходимости операции тому или иному пациенту на основе данных о его анализах и обследованиях. Очевидно, что система будет иметь рекомендательный характер, и окончательное решение принимает врач.

Часто перед врачом стоит задача обоснования операции — понять, нужна пациенту операция или нет. В данной статье рассматривается алгоритм, позволяющий выполнить обоснование операции методами машинного обучения.

Григорян Давид Артурович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mr.d.grigoryan@gmail.com, тел.: +7(921)576-92-93

2. Основная часть. Дан дампы базы данных SQL, из ERP-системы отделения некоторой больницы, содержащий данные о пациентах. Необходимо создать модель машинного обучения, помогающую врачам принять решение об обосновании операции.

2.1. Подготовка данных. Для начала требуется узнать, какие заболевания наиболее распространены среди пациентов. Каждое заболевание имеет свой код в МКБ-международном классификаторе болезней, принятом Всемирной организацией здравоохранения. Каждая болезнь обозначается уникальным трехзначным кодом, причем болезни распределены по рубрикам [3].

Для этого дампы базы данных был загружен в СУБД MySQL и написан скрипт на языке версии Python 3.5 с использованием библиотеки MySQLdb. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Самые распространенные заболевания среди пациентов

Код заболевания по МКБ	Расшифровка	Количество пациентов
I63	Инфаркт мозга	92
I20	Стенокардия [грудная жаба]	57
I80	Флебит и тромбофлебит	47
I82	Эмболия и тромбоз других вен	41
I21	Острый инфаркт миокарда	37
I70	Атеросклероз	26
I61	Внутричерепное кровоизлияние	24
I11	Гипертензивная болезнь сердца [гипертоническая болезнь с преимущественным поражением сердца]	23
I25	Хроническая ишемическая болезнь сердца	20
I64	Исульт, не уточненный как кровоизлияние или инфаркт	20

2.2. Составление выборки. Составим выборку пациентов, перенесших определенное заболевание. Выберем инфаркт мозга, для того чтобы выборка была как можно больше. Так как инфаркт мозга часто возникает по причине недостаточного кровоснабжения, будем использовать данные клинического анализа крови пациентов [4]. Он позволяет узнать количество эритроцитов, лейкоцитов, тромбоцитов в крови. Каждый элемент выборки будет представлять вектор, состоящий из 13 элементов, представляющих из себя определенные численные характеристики.

2.3. Обучение. Будем использовать метод опорных векторов (*SVM*) с разными ядрами. Так как размерность выборки очень мала, применим кросс-валидацию (*cross-validation*), чтобы избежать переобучения модели. Она заключается в следующем: выборка разбивается на k частей, и далее k раз выполняется процедура:

- модель обучается на $(k - 1)$ частях;
- работа полученной модели проверяется на оставшейся части.

Точность модели рассчитывается как среднее арифметическое всех полученных значений [5].

2.4. Результаты. Написан скрипт на языке Python 3.5 с использованием библиотеки *scikit-learn*. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Точность полученной модели машинного обучения (микро-оценка)

Ядро	$k = 3$	$k = 4$
Линейное	93,91%	94,04%
Полиномиальное	88,97%	92,60%
Сигмоид	96,34%	96,42%

3. Вывод. Полученный классификатор имеет высокую точность работы, однако это связано с малой размерностью выборки. В дальнейшем планируется применить данный алгоритм на выборке с большей размерностью и использовать другие алгоритмы классификации. После этого классификатор может быть встроен в ERP-систему больницы. Также он может быть применен в телемедицинской системе для определения необходимости операции тому или иному пациенту.

Литература

1. Guskov V. P., Gushchanskiy D. E., Kulabukhova N. V., Abrahamyan S., Balyan S., Degtyarev A. B., Bogdanov A. V. An interactive tool for developing distributed telemedicine systems // Computer Research and Modeling. 2015. Vol. 7, No 3. P. 521–527.
2. ERP definition – Enterprise Resource Planning [Электронный ресурс] // Gartner IT. URL:<http://www.gartner.com/it-glossary/enterprise-resource-planning-erp/> (дата обращения: 07.03.2017).
3. Manual of the international statistical classification of diseases, injuries, and causes of death. Vol. 1. Geneva, World Health Organization, 1977. 352 p.
4. Ишемический инсульт – Заболевания [Электронный ресурс] // Национальный медико-хирургический Центр имени Н. И. Пирогова. URL:<http://old.pirogov-center.ru/illness/24/> (дата обращения: 14.03.2017).
5. Cross-validation: evaluating estimator performance [Электронный ресурс] // scikit-learn: machine learning in Python - scikit-learn 0.18.1 documentation. URL:http://scikit-learn.org/stable/modules/cross_validation.html (дата обращения: 14.03.2017).
6. Куликова К. Ю. Исследование течения инфаркта миокарда у мужчин моложе 60 лет // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 293–298.
7. Феофанов В.А. Пошаговая дискриминация, кросс-валидация и бутстрап в задаче классификации пострадавших с сочетанной травмой груди // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 327–331.

УДК 004.94

Гусев Д. А., Глазырин А. Г., Горбунов В. И.

Компьютерное моделирование окружающей среды в робототехнических комплексах

Рекомендовано к публикации профессором Кулаковым Ф. М.

1. Введение. В последнее время возрос интерес к области задач дистанционного управления (ДУ) роботами. Это связано с тем, что оператор часто не имеет возможности находиться рядом с роботом во время управления робототехническим комплексом [1, 2]. Поскольку управление роботом может производиться в условиях, при которых оператор получает неполную информацию об окружающей среде [3, 4], то существует необходимость в построении 3D-модели рабочей сцены на основе данных, полученных с датчиков [5, 6]. Для этого можно находить положение искомого объекта в пространстве и выполнять взаимодействия с ним при помощи записанной ранее последовательности действий [7]. Также в системе ДУ необходимо учитывать длительную задержку сигнала, связанную с тем, что расстояние между роботом и оператором может быть значительным [8–10].

2. Постановка задачи. Требуется разработать архитектуру и реализовать прототип системы для дистанционного управления робототехническим комплексом в условиях неполной информации об окружающей среде с задержками при передаче управляющих сигналов.

3. Описание архитектуры. Оператор взаимодействует с роботом посредством управления виртуальной моделью рабочей сцены через человеко-машинный интерфейс с объектами, находящимися на рабочей сцене (рис. 1). Полученные высокоуровневые ко-

Гусев Данила Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: guseffdanila@ya.ru, тел.: +7(921)221-91-73

Глазырин Антон Георгиевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: greneret@gmail.com, тел.: +7(981)145-91-68

Горбунов Владислав Игоревич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gorbunov.v93@gmail.com, тел.: +7(911)900-41-62

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 16-19-001-99

манды обрабатываются в планировщике траектории для управления роботом и компьютерной моделью робота на 3D-сцене. Взаимодействие объектов моделируется с использованием физических моделей в физическом движке. Координаты объектов, расположенных на 3D-сцене подтверждаются с использованием данных, полученных со считывающих устройств робота для минимизации ошибки, полученной из-за программного моделирования физического взаимодействия объектов. В рамках предложенной архитектуры возможно создать несколько способов управления посредством взаимодействия оператора с интерфейсом: копирующие, управление с задержкой и управление в режиме симуляции для анализа рассогласования модели с данными, полученными с рабочей сцены, и ее корректировки.

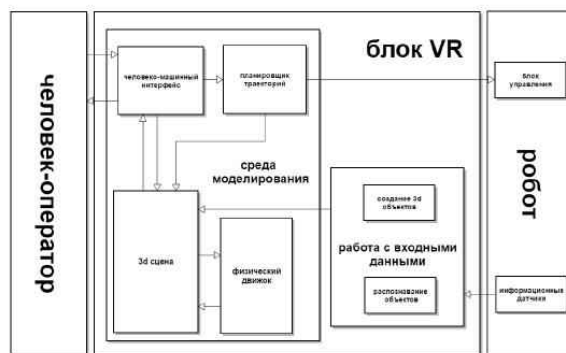


Рис. 1. Структура взаимодействия человека-оператора и робота

4. Создание прототипа. Одна из существующих систем, позволяющих проводить симуляции математических моделей роботов, это V-REP. Но она не поддерживает возможность добавления объектов во время симуляции [11].

Другой способ, который рассмотрен для решения этой проблемы — использование игровых движков, распространяемых в условно-свободном доступе: “Unreal Engine 4” и “Unity”. Данные платформы позволяют обрабатывать 3D-сцены, а также моделиро-

вать физику взаимодействия [12, 13].

В качестве итогового решения выбран “Unreal Engine 4” (UE4), так как он является продуктом с открытым исходным кодом и может быть модифицирован для решения поставленных задач.

5. Реализация прототипа. Загрузка объекта (в терминологии UE4 — актера) на сцену происходит с помощью функции `SpawnActor<>()`. Для отображения актера требуется, чтобы его класс содержал полигональную сетку — `UMeshComponent`. Для загрузки текстур используется функция `StaticLoadObject<>()`, которой в качестве параметра передается путь к искомому объекту.



Рис. 2. Структура прототипа

Если модель объекта, полученного с датчиков, имеется в существующем пуле объектов внутри движка, он сразу загружается на сцену (рис. 2). Если же это новый объект, то сначала нужно добавить его в пул. Для этого требуется передать необходимую информацию (облако точек объекта) в UE4, сгенерировать новую полигональную сетку и сохранить ее для дальнейшего использования. Таким обра-

зом новый объект помещен во множество объектов, доступных для добавления, и готов к загрузке на сцену. Существующему актеру можно задать все необходимые параметры для симуляции физики.

6. Вывод. Разработана архитектура и частично реализован прототип системы для дистанционного управления робототехническим комплексом в условиях неполной информации об окружающей среде с задержками при передаче управляющих сигналов. В дальнейшем планируется разработать интерфейс с использованием очков дополненной реальности, добавить управление роботом, а также реализовать аналогичные системы на движке “Unity” для сравнения производительности.

Литература

1. Кулаков Ф. М. Телеуправление космическими роботами // Изв. РАН. ТлСУ. 2016. № 4. С. 141–192.
2. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. A., Chernakova S. A., Shymanchuk D. V. Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects // “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015 International Conference. 2015. P. 102–105.
3. Кулаков Ф. М. Копирующее и супервизорное управление роботами при большом запаздывании сигналов управления и обратной связи. Часть I // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1 (10). С. 55–61.
4. Kulakov F. M., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G. V. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No 33–36. P. 1783–1796.
5. Kulakov F. M. et al. Information technology for interactive robot task training through demonstration of movement // Yu. P. Ko., Ri. J. Advances in intelligent robotics and collaborative automation. (River publishers series in automation, control and robotics). Denmark. River Publishers. 2015. 364 p.

6. Кулаков Ф. М. Тренажёр-интерфейс для управления космическим роботом // Материалы восьмой Всероссийской мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2015). Геленджик. 2015. 251 с.
7. Gorbunov V. I., Kulakov F. M. Project of vision system for remote controlled space robots // Extreme robotics. Proceedings of the International Scientific and Technological Conference. Saint-Petersburg: «AP4Print». 2016. 480 p.
8. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading. 2015. P. 710–742.
9. Ефимова П. А., Шиманчук Д. В. Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.
10. Кулаков Ф. М. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2009. 168 с.
11. Техническая документация по V-REP [Электронный ресурс]: URL:<http://www.v-rep.eu/helpFiles/en/apiFunctions.htm> (дата обращения: 18.03.17).
12. Техническая документация по Unity [Электронный ресурс]: URL:<https://docs.unity3d.com/ScriptReference/> (дата обращения: 18.03.17).
13. Техническая документация по Unreal Engine 4 [Электронный ресурс]: URL:<http://https://docs.unrealengine.com/latest/INT/API/> (дата обращения: 18.03.17).

УДК 004.942

Дворянчикова В. Э.

Организация внешних и внутренних взаимодействий мультиагентных систем

Рекомендовано к публикации доцентом Погожевым С. В.

1. Введение. Моделирование поведения групп интеллектуальных сущностей является одной из наиболее масштабных задач такого глобального направления современных исследований, как «искусственный интеллект». Группа взаимодействующих между собой сущностей называется *мультиагентной системой* [1]. Стремительное развитие областей робототехники, киноиндустрии и компьютерных игр вызывает актуальность поиска наиболее удачного решения задач по реализации как взаимодействия агентов внутри мультиагентной системы, так и взаимодействия нескольких таких систем между собой.

На сегодня, реализация поведения системы агентов имеет множество вариантов решений [2], большинство из которых упираются на организацию движений группы через поведение внутренних агентов. В данной работе рассмотрена модель организации движений нескольких таких групп, где в качестве агентов выступают мультиагентные системы, т. е. поведение группы зависит от поведения как внутригрупповых агентов, так и от поведения агентов внешних систем.

2. Постановка задачи. Ставится задача построения реалистичной компьютерной модели поведения групп агентов с использованием игрового движка Unity3D, покрывающей реализацию как взаимодействия агентов внутри мультиагентной системы, так и взаимодействия мультиагентных систем между собой.

В основу подхода для решения поставленной задачи положена модель К. Рейнольдса «Voids» [3], имитирующая поведение стаи птиц — группы объектов — с последующим расширением. Выбор обусловлен тем, что имея простую реализацию, модель позволяет получить реалистичные результаты и позволяет производить расширение под

Дворянчикова Валерия Эдуардовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: dvoryanchikova.lera@gmail.com, тел.: +7(999)534-62-56

другие задачи, связанные с организацией поведения существ в группе (наподобие стаи или роя).

3. Алгоритм К. Рейнольдса. В 1986 году Крейг Рейнольдс разработал компьютерную модель скоординированного движения живых существ, беря за основу поведение стаи птиц и косяков рыб. Данная модель основана на трехмерной вычислительной геометрии, обычно используемой в компьютерной анимации и вспомогательной компьютерной графике. Рейнольдс алгоритмически вывел поведение каждой из птиц в отдельности, а также их общее взаимодействие в стае. Алгоритм, симулирующий поведение стаи существ, назван «Boids». Объекты внутри стаи называются боидами. В базе алгоритма положены три простых правила (см. рис. 1), описывающие индивидуальные маневры каждого бойда с учетом положения и скоростей соседних:

- *разделение*: каждый бойд должен менять направление, чтобы избежать столкновения с соседями;
- *выравнивание*: каждый бойд должен стремиться к средней скорости соседей;
- *сплоченность*: каждый бойд должен стремиться двигаться вблизи центра группы.

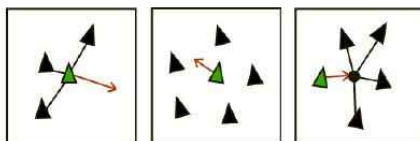


Рис. 1. Разделение, выравнивание, сплоченность

Несмотря на простоту лежащих в основе программы правил, стая, реализованная на компьютере, выглядела реалистично: птицы образовывали группы, пытались уйти от столкновений и хаотично бросались в разные стороны, повторяя поведение реальной стаи птиц.

В статье [4] Рейнольдс отметил, что разработанная им модель поведения стаи птиц может быть дополнена введением дополнитель-

ных факторов, например таких, как поиск пищи и/или уклонение от препятствия.

4. Решение поставленной задачи. Для решения задачи и наглядной демонстрации задействованы: алгоритм Рейнольдса с дополнительными правилами, позволяющими расширить его на случай взаимодействия между мультиагентными группами, и игровой движок Unity3D для визуальной составляющей.

В модели существуют группы существ, которые взаимодействуют между собой и с окружающим пространством. Для решения рассматриваются два вида групп существ — «хищники» и «жертвы». Поведение каждой из этих групп моделируется с помощью набора правил поведения:

1. Базовые правила алгоритма Рейнольдса:
 - разделение;
 - сплоченность;
 - выравнивание.
2. Дополнительные правила для алгоритма Рейнольдса:
 - *движение к цели*: если в поле видимости существа попадает целевой объект, то группа, к которой принадлежит существо осуществляет движение по направлению к объекту;
 - *управление скоростью*: каждая группа объектов ограничивается заранее заданной скоростью, которая выбирается в зависимости от природы существ, олицетворяющей конкретную группу;
 - *наличие препятствий*: в среде, где наблюдаются существа, существуют статичные объекты-препятствия, при столкновении с которыми направление движения меняется на противоположное;

Взаимодействие групп между собой также реализуется с помощью правил, которые применяются к группе, состоящей из объектов обеих групп. Для поведения системы «хищник-жертва» реализованы правила:

- *преследование*: если в поле зрения объекта, помеченного как «хищник», попадает объект из группы «жертв», то объект, а за ним и вся группа «хищников», начинает дви-

гаться по направлению к «жертве», если же объект «жертва» выходит за пределы видимости всех объектов из группы «хищников», то преследование прекращается;

- *побег*: если в поле зрения объекта «жертвы» попадает объект «хищник», то направление движение меняется в сторону, противоположную объекту «хищнику» до тех пор, пока «хищник» видим.

Пример. Реализация правила преследования:

```
void Rule5(Boid[] boids)
{
    v5 = Vector3.zero;
    prey = null;
    foreach(var boid in boids)
    {
        distance = boid.transform.position
            - gameObject.transform.position;
        if (!boid.enemy && (enemy == true) &&
            distance.magnitude < sight)
            prey = boid;
        else if (!boid.enemy && (enemy == true) &&
            distance.magnitude > sight)
            prey = null;

        if (prey != null && enemy == true)
            v5 += prey.transform.position
                - transform.position;
    }
}
```

Для каждой группы сущностей выбирается определённый набор правил, характеризующий природу объектов. Правила применяются непосредственно к объектам группы и вычисляют векторы направления скорости движения — для каждого конкретного правила свой собственный вектор. После получения всех векторов направления вычисляется результирующий вектор скорости, который отвечает за перемещение объекта в пространстве. Он вычисляется путем сум-

мирования полученных векторов направлений с соответствующими коэффициентами и после прибавляется к координатам объекта для расчета новой позиции. Коэффициенты выбираются опытным путем и отвечают за реалистичность поведения конкретной группы. Также для реалистичности модели реализовано понятие «вожака стаи» — объект, радиус обзора которого позволяет раньше всех обнаружить отличные от группы сущности и, следовательно, вести за собой группу.

Данные, необходимые для перемещения групп объектов (векторы направлений, результирующая скорость, позиция объекта и т. д.), обновляются с периодом в 0,016 с, что является временем между кадрами в Unity3D.

5. Заключение и дальнейшие перспективы. Полученная модель реалистично отображает взаимодействие как между объектами внутри конкретной группы (мультиагентной системы), так и между объектами различных мультиагентных систем. Модель в перспективе может быть использована для визуализации поведения между любым количеством систем.

Литература

1. Интеллектуальный агент. Персонализация и многоагентные системы [Электронный ресурс]: URL:<http://koriolan404.narod.ru/tipis/5.html> (дата обращения: 14.03.17).
2. Роевой интеллект [Электронный ресурс]: URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Роевой_интеллект (дата обращения: 14.03.17).
3. Boids: Background and Update [Электронный ресурс]: URL:<http://www.red3d.com/cwr/boids/> (дата обращения: 12.03.17).
4. Reynolds W. C. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model // Computer Graphics / ed. by Maureen C. Stone. Anaheim, California: SIGGRAPH. 1987. P. 25–34.

УДК 519.714

Завадский С. В., Разуваев С. С.

Моделирование цифровых подсистем квадрокоптера

Введение. Высокую популярность в любительской и профессиональной авиации получили квадрокоптеры — беспилотные летательные аппараты (БПЛА) с четырьмя несущими винтами. Имея ограниченный запас энергии и требования к высокой точности стабилизации положения, квадрокоптеры нуждаются в качественных системах управления с учетом конкретных требований. Сложность задачи определяют влияния аналого-цифровых подсистем, такие как несовершенство датчиков, шумы и задержки в каналах измерений и управления, и внешние возмущения, например, порывы ветра, разряд батареи, столкновения с препятствиями.

Рассмотрим основные причины, оказывающие влияние на аналого-цифровую систему управления полетом БПЛА:

1. Дискретный характер обработки информации в цифровом полетном контроллере.
2. Запаздывания акселерометров и гироскопов при сборе данных.
3. Наличие шумов в каналах измерений и управления.
4. Управление силовой подсистемой с помощью широтно-импульсной модуляции.

В работе проведено моделирование динамики системы стабилизации квадрокоптера с учетом влияния перечисленных факторов. Рассмотрены конкретные примеры аналого-цифровых подсистем. Практическая часть работы охватывает сравнение различных регуляторов с учетом влияния указанных факторов и без.

Разуваев Сергей Савельевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: dying-breed@mail.ru, тел.: +7(812)428-47-29

Завадский Сергей Вячеславович — старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: s.zavadsky@spbu.ru, тел.: +7(812)428-47-29

Постановка задачи стабилизации мультикоптера. Для обеспечения стабильности полета требуется корректировать управляющие напряжения, которые поступают на моторы летательного аппарата, в зависимости от показаний бортовых сенсоров [1].

Пусть получена линеаризованная система, характеризующая отклонения от положения равновесия вектора состояний квадрокоптера:

$$\dot{x}_s = A_s x_s + B_s u, \quad x_s(0) = x_{s0}, \quad y = C_s x_s, \quad (1)$$

где x_s — вектор отклонений фазовых переменных состояний, u — вектор управлений, y — вектор измерений.

Регулятор ищется в виде [2, 3]:

$$\dot{z} = A_c z + B_c y, \quad u = C_c z, \quad (2)$$

где $A_c = A_s + B_s K_{lqr} - C_s H_{klm}$, $B_c = H_{klm}$, $C_c = K_{lqr}$.

Также учитывается функционал качества [4-6]:

$$\int_0^T (x^*(p)Qx(p) + u^*(p)Ru(p))dt,$$

где Q, R — весовые матрицы.

Первые четыре компоненты вектора x выбраны как основные наблюдаемые величины: p — скорость по углу крена, q — скорость по углу тангажа, r — скорость по углу рысканья и w — ускорение по оси z_b .

Влияние аналого-цифровых подсистем на стабилизацию квадрокоптера. В ходе конструирования квадрокоптера были использованы следующие аналого-цифровые подсистемы:

1. Полетный контроллер Pixhawk 2.4.8., оснащенный процессором с архитектурой 32bit STM32F427 Cortex M4 и тактовой частотой 168 мГц. Его основная задача — это обработка данных, поступающих от гироскопа и акселерометра, вычисление и генерация управляющих сигналов на контроллеры управления моторами. Эмпирически установлено, что на данном контроллере уравнение динамического регулятора вычисляется за период 35 мс. Будем считать это значение шагом дискретизации.
2. 3-осевой гироскоп ST Micro L3GD20. Реагирует на изменения углов ориентации квадрокоптера и отправляет измерительную

информацию на контроллер. Сбор информации осуществляется с частотой 400 Гц, что вносит задержку 2,5 мс в канал измерения.

3. 3-осевой акселерометр ST Micro LSM303D. Измеряет проекцию ускорения квадрокоптера вдоль трех осей и отправляет измерительную информация на контроллер. Сбор информации осуществляется с частотой 400 Гц, что вносит задержку 2,5 мс в канал измерения.
4. Контроллер управления скоростью оборотов моторов DJI 18 A OPTO. Модулирует подаваемые на моторы мощности с помощью широтно-импульсной модуляции с рабочей частотой 450 Гц. Вносит задержку 2,2 мс в канал управления.

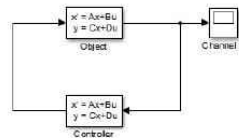


Рис. 1. Схема модели без учета аналого-цифровых подсистем

Сравним динамику системы стабилизирующего регулятора из [7] с учетом влияния аналого-цифровых подсистем и без его учета. На рис 1. представлена идеальная система (1) с замкнутым регулятором (2). Модифицируем эту модель с учетом характеристик перечисленных аналого-цифровых подсистем (рис. 2) и проведем практический эксперимент в Simulink.

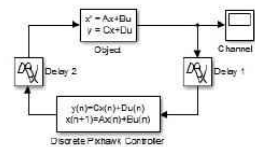


Рис. 2. Схема модели с учетом аналого-цифровых подсистем

Были получены динамики наблюдаемых величин p , q , r , w для первой (рис. 3) и второй модели (рис. 4). По сравнению с идеальной моделью в модели с учетом влияния аналого-цифровых подсистем время стабилизации увеличилось в 2,4 раза, энергозатраты выросли вдвое, а также появились колебательные процессы.

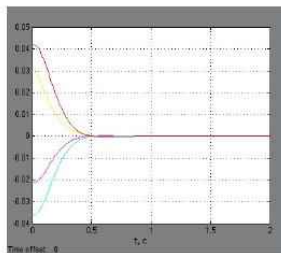


Рис. 3. Динамика наблюдаемых величин p , q , r , w без учета аналого-цифровых подсистем

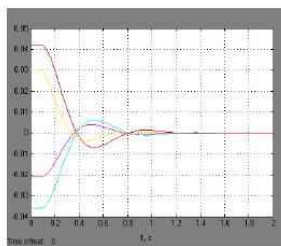


Рис. 4. Динамика наблюдаемых величин p , q , r , w с учетом аналого-цифровых подсистем

Параметрически оптимизируем регулятор [8, 9] с учетом влияния аналого-цифровых подсистем и повторим эксперимент. Оптимизация позволила уменьшить время переходных процессов на 50 %, убрать колебательные процессы и снизить энергетические затраты в 1,5 раза (см. рис. 5).

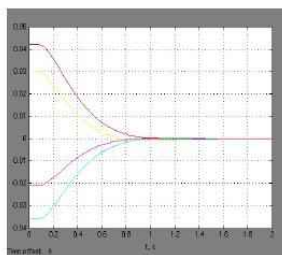


Рис. 5. Динамика наблюдаемых величин p , q , r , w с учетом аналого-цифровых подсистем и оптимизированным регулятором

Заключение. Предложенные в работе Simulink-модели позволяют провести моделирование динамики системы стабилизации квадрокоптера. Вычислительный эксперимент показал, что используемые аналого-цифровые компоненты системы стабилизации оказывают существенное влияние на динамику переходных процессов. Регулятор, полученный для идеальной модели, требует оптимизации для функционирования на реальном устройстве. Параметрически оптимизированный регулятор демонстрирует приемлемые динамические характеристики стабилизации положения летательного аппарата в пространстве.

Литература

1. Lepikhin T. A. The analysis of Quadrocopter and Hexacopter dynamics // In International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM). 2015. Vol. 1738. P. 450013-1–450013-4.

2. Завадский С. В., Шароватова Д. С. Синтез фильтра Калмана в контуре системы управления квадрокоптера // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. Санкт-Петербург, 2015. С. 523–524.
3. Завадский С. В., Шароватова Д. С. Параллельная параметрическая оптимизация динамических систем стабилизации на высокопроизводительном кластере // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 409–415.
4. Zavadsky S. V., Ovsyannikov D. A., Chung S. L. Parametric optimization methods for the tokamak plasma control problem // International Journal of Modern Physics. 2009. Vol. 24, No 5. P. 1040–1047.
5. Maslov A. A., Lepikhin T. A. Comparative characteristics and selection of optimal filtering algorithm signal using LabVIEW software package // In International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM). 2014. Vol. 1648. P. 450013-1–450013-4.
6. Zavadskiy S. V. Concurrent optimization of plasma shape and vertical position controllers for ITER tokamak // 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization (BDO). 2014. P. 196–197.
7. Zavadskiy S. V., Sharovatova D. S. Improvement of quadcopter command performance system // «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015 International Conference, 2015. P. 609–610.
8. Завадский С. В. Совместная оптимизация совокупности регуляторов в системах управления плазмой в токамаках // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. 2014. С. 4297–4302.
9. Zavadskiy S. V., Kiktenko A. Simultaneous parametric optimization of plasma controllers for vertical position and shape // Cybernetics and Physics. 2014. Vol. 3, No 3. P. 147–150.

УДК 004.89

Зайцева О. О.

Модель семантического анализа в задаче наивной квалификации в теории уголовно-правовой оценки деяния

Рекомендовано к публикации доцентом Блекановым И. С.

1. Введение. Благодаря внедрению во второй половине XX века в повседневную жизнь компьютерной техники, а также специализированного программного обеспечения возросла эффективность правоприменительной практики. Чем новее и точнее применяемые в юридической деятельности средства и методы, тем быстрее решаются такие задачи уголовного судопроизводства, как раскрытие и расследование преступлений. Одной из существенных частей правоприменительной практики является осуществление квалификации преступлений. Квалифицировать преступление — значит установить соответствие между определенным деянием и признаками того или иного состава преступления, определить статью уголовного закона, предусматривающую наказание за преступление [1].

На данный момент существует большое количество попыток создать систему для анализа преступных деяний. Ключевым компонентом существующих комплексов является применение методов интеллектуального анализа данных (с английского Data mining). В каждой из имеющихся систем используются различные методы и подходы анализа данных, но все они нацелены на использование в странах с прецедентным правом. В России право не прецедентное, т. е. использовать методы латентно-семантического анализа текста для поиска по дубликатам и квалификации преступных деяний не имеет смысла. Поэтому для решения задачи квалификации преступлений согласно структуре права РФ сначала необходимо произвести ручную семантическую разметку нормативно-правового акта, выделить основные характеристики всех составов преступлений. В дан-

Зайцева Ольга Олеговна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: o.o.zaitseva@gmail.com, тел.: +7(931)369-28-03

ной работе основное внимание уделяется уголовному праву и Уголовному Кодексу РФ (УК РФ), в частности, главе 16 УК РФ — преступления против жизни и здоровья (статьи 105–125).

2. Задача классификации в рамках наивной квалификации преступных деяний. В соответствие со статьей 8 УК РФ «основанием уголовной ответственности является совершение лицом деяния, содержащего все признаки состава преступления, предусмотренного Уголовным кодексом». К признакам состава преступления относятся: объект — то, на что направлено преступное деяние и чему в результате причиняется или может быть причинен вред; объективная сторона — внешняя сущность посягательства; субъект — лицо, совершившее преступное деяние; субъективная сторона — внутреннее отношение субъекта к содеянному. Отсутствие хотя бы одного вышеназванного элемента равносильно отсутствию всего состава преступления. В виду того, что речь идет о наивной квалификации, остановимся лишь на объекте и объективной стороне преступного деяния.

Для установления соответствия между признаками содеянного общественно-опасного деяния и признаками конкретных составов преступлений на первом шаге необходимо выделить конкретные признаки каждого состава преступления, предусмотренного УК РФ, которые отделяют один состав преступления от другого (например, убийство матерью новорожденного ребенка от убийства человека старше 14 лет). В главе 16 УК РФ имеется два основных объекта преступления — жизнь и здоровье человека. Иными словами, можно выделить два корневых элемента семантического шаблона — живой человек (*AliveHuman*) и мертвый человек (*DeadHuman*). Элемент *DeadHuman* содержит атрибуты, описывающие личность убитого, его деятельность, семейное положение, а также следы на теле. Атрибуты элемента *AliveHuman* описывают личность потерпевшего, его деятельность, семейное положение, состояние здоровья. Помимо элементов, описывающих состояние личности, необходимо выделить элемент, характеризующий метод совершения преступлений, орудия и частоту преступления, а также, чем занимался объект во время совершения преступления — *Circumstances*.

На примере статьи 105, части 2, пункта г) УК РФ — убийство женщины, заведомо для виновного находящейся в состоянии беременности — рассмотрим процесс построения семантического шаб-

лона для данного состава преступления. Предположим, что на месте преступления было найдено тело или фрагменты тела мертвого человека, следовательно, корневым элементом шаблона является *DeadHuman*. Также известно, что найдено тело или фрагменты тела взрослой беременной женщины:

- *DeadHuman:PhysCond:CorpseOrFragments:1*,
- *DeadHuman:Age:14-60:1*,
- *DeadHuman:Gender:Female:1*,
- *DeadHuman:Pregnant:1*.

Аналогично выделяются значимые атрибуты и в остальных статьях главы 16 УК РФ. Пример выделенных атрибутов частично представлен на рис. 1.

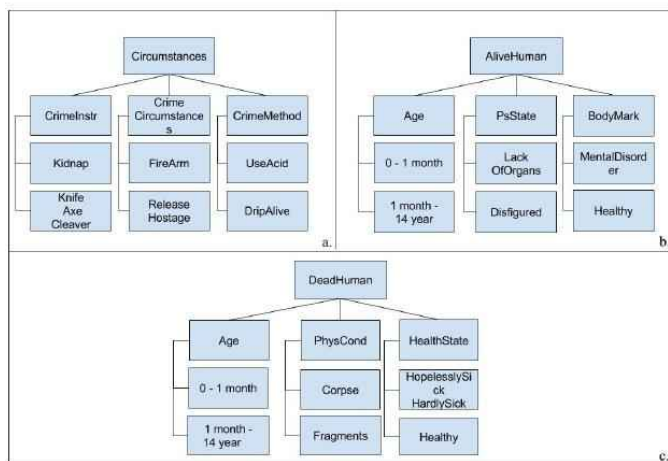


Рис. 1. Фрагмент деревьев выделенных атрибутов: а) Circumstances, б) AliveHuman, в) DeadHuman

Математически задачу наивной квалификации преступных деяний можно свести к задаче многоклассовой классификации с пересекающимися классами, так как количество классов составляет 71 и возможна ситуация, когда субъект последовательно совершил

несколько преступлений, тогда, согласно статье 17 УК РФ, данные деяния необходимо квалифицировать по совокупности преступлений, т. е. описываемое атрибутами деяние может относиться к нескольким классам одновременно.

3. Постановка эксперимента. В эксперименте ставилась задача проверки методики семантической разметки Уголовного кодекса РФ и задача апробации алгоритма многоклассовой классификации с пересекающимися классами для задачи наивной квалификации преступных деяний. Для решения данной задачи предварительно был выделен 81 признак, описывающий объект и объективную сторону составов преступлений, предусмотренных главой 16 УК РФ. Количество классов, выделенных в данной главе, составляет 71.

Из выделенного ограниченного набора атрибутов, искусственно ограниченного на примере главы 16 УК РФ, вручную составлена обучающая выборка (см. таблицу 1).

Таблица 1. Вид обучающей выборки

DH:PhysCond:Corpse	DH:Age:0-1	...	Class
1	0	...	1
0	0	...	3,7
0	0	...	72,78

В полях, описывающих атрибуты, 1 — наличие данного атрибута, 0 — отсутствие. Поле Class — это номер/номера соответствующих составов преступления.

При составлении обучающей выборки рассматривались и продумывались базовые, самые распространенные составы преступлений. Выбирались основные атрибуты для конкретного состава, выставлялись их значения, а затем комбинировались с другими возможными, но не обязательными, атрибутами. Оценка объектов производилась экспертами в области юриспруденции. Размер полученной выборки составляет 1000 прецедентов.

В качестве модели машинного обучения выбран структурный метод опорных векторов (Structured Support Machine Vector), который описан в статьях [2, 3], и его реализация для языка Python — библиотека структурного обучения PyStruct.

Для обучения модели на вход системе подавалась бинарная последовательность всех признаковых описаний из обучающей выборки, которой сопоставлены соответствующие метки классов, имеющие вид бинарного вектора после преобразования. Обучающая выборка

составляет 80% от объема исходных данных.

4. Результаты эксперимента. Для оценки качества алгоритма использовались следующие метрики качества [4]:

- точное совпадение (Exact Match Ratio);
- точность (Precision);
- полнота (Recall);
- F_1 -мера;
- функция потерь Хэмминга (HammingLoss).

В ходе работы алгоритма получены результаты, представленные в таблице 2.

Таблица 2. Полученные результаты

Алгоритм	Exact Match Ratio	Precision	Recall	F_1 -мера	Hamming Loss
SSVM	0,72	0,89	0,9	0,88	0,005

5. Выводы. Произведен семантический анализ Уголовного Кодекса РФ на примере главы 16, а также апробирован структурный метод опорных векторов для задачи классификации в рамках названной квалификации преступных деяний, который показал хорошие качественные показатели.

Литература

1. Корнеева А. В. Теоретические основы квалификации преступлений / под ред. А. И. Рагога. М.: Проспект, 2008. 176 с.
2. Tsochantaridis I., Joachims T., Hofmann T., Altun Y. Large margin methods for structured and interdependent output variables // JMLR. 2005. Vol. 6. P. 1453–1484.
3. Finley T., Joachims T. Training Structural SVMs when Exact Inference is Intractable // ICML. 2008. Vol. 8. P. 304–311.
4. Sorower M.S. A literature survey on algorithms for multi-label learning. PhD Thesis. Oregon State University, Corvallis. 2010. 25 p.

УДК 004.85+004.93

Зубаков А. В.

Генерация заголовка изображения на основе технологии нейронных сетей

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. За последние несколько лет в задачах распознавания объектов и машинного перевода достигнуты серьезные результаты. Одним из основных подходов решения задач такого типа является обучение сверточных или рекуррентных нейронных сетей [1, 2].

Еще одной из актуальных на сегодняшний день задач, напрямую связанных с задачами распознавания и машинного перевода, является задача построения математической модели, способной генерировать читаемые и наделенные смыслом заголовки по входным изображениям.

В данной статье реализован подход, заключающийся в разделении этой задачи на два этапа: применение сверточной нейронной сети и рекуррентной нейронной сети на первом и втором этапе, соответственно.

2. Постановка задачи. Пусть I — исходное изображение, представленное трехмерным тензором, $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ — некоторое предложение на естественном языке. Необходимо построить модель, оценивающую вероятность $p(S|I)$ того, что S — описание изображения I . При этом, очевидно, если S — корректное описание изображения, то оценка $p(S|I)$ должна быть максимальная.

3. Модель. Основой модели, рассматриваемой в данной статье, стала модель RNN Encoder-Decoder, предложенная в работе [2]. Она была применена к задаче машинного перевода и показала результат лучше, чем классические модели. Поэтому рассмотрим сначала задачу машинного перевода и схему Encoder-Decoder RNN.

Задачу машинного перевода, вообще говоря, можно поставить похожим образом. Пусть $T = \{T_1, \dots, T_N\}$ — предложение на исходном языке, $S = \{S_1, \dots, S_M\}$ — предложение на целевом языке. Тогда

Зубаков Алексей Васильевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: aleks.zubakov@gmail.com, тел.: +7(999)213-89-65

необходимо построить модель, оценивающую вероятность $p(S|T)$ того, что S — является переводом T . При этом также очевидно, что, если S — корректный перевод, то оценка $p(S|T)$ должна быть максимальной.

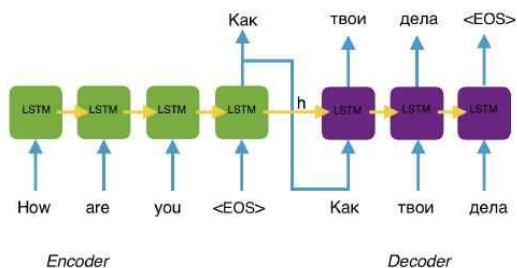


Рис. 1: RNN Encoder-Decoder

Модель RNN Encoder-Decoder представляет собой две LSTM сети. Первая сеть называется “encoder”, ей на вход итеративно подается исходная последовательность. Задача блока “encoder” — «кодировать» исходную последовательность в вектор скрытого состояния h фиксированной длины. Далее вектор h подается в качестве вектора начального скрытого состояния блоку “decoder”, вместе с ним на вход подается символ начала строки. “Decoder”, соответственно, декодирует последовательность, итеративно оценивая вероятность $p(S_i|h, S_{i-1}, \dots, S_1)$ того, что S_i — следующее слово в предложении. Архитектура модели представлена на рис. 1.

В данной статье использована похожая модель, отличающаяся лишь тем, что “encoder” RNN была заменена на сверточную нейронную сеть и в качестве входа сети использовано изображение I . Сеть была обучена максимизировать вероятность корректного описания данного изображения или, более формально, были найдены такие параметры модели θ^* , что

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} \sum_{(I,S)} \log p(S|I; \theta)$$

где θ — параметры модели, I — изображение, S — корректное опи-

сание изображения.

Архитектура модели представлена на рис. 2.

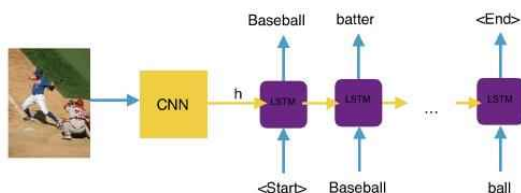


Рис. 2: Архитектура модели

Поскольку задача обучения и выбора архитектуры для сверточной нейронной сети — процесс трудоемкий и длительный, в данной работе были использованы предобученные модели VGG19 [1], GoogLeNet [3] и ResNet-50 [4], показавшие высокий результат на соревновании по классификации изображений ILSVRC 2014 и ILSVRC 2015.

4. Численные результаты. Модель реализована на языке Python с использованием библиотек Lasagne, Numpy и scikit-image.

Для обучения, из-за большого количества данных, необходимо наличие мощной видеокарты, поэтому на amazon web service были арендованы g2.2xlarge instance с NVIDIA GRID K520 GPU и p2.xlarge instance с Nvidia Tesla K80 GPU. При этом использовался метод Adaptive Moment Estimation [5], который представляет собой модифицированный алгоритм градиентного спуска.

Для автоматической оценки качества сгенерированных предложений считалась метрика BLEU. Она определяет процент n -грамм ($n \leq 4$), совпавших в сгенерированном и эталонном описаниях изображения. В данной работе использована BLEU-4. Таблица 1 иллюстрирует результаты для моделей с различными параметрами.

Таблица 1. Результаты

Модель	Bleu-4	Ошибка
VGG@19-LSTM@128	24,5	2,97
VGG@19-LSTM@256	25,2	2,92
VGG@19-LSTM@512	24,3	3,01
GoogleNet-LSTM@128	24,4	3,08
GoogleNet-LSTM@256	25,1	2,94
GoogleNet-LSTM@512	25,4	2,82
Resnet@50-LSTM@512	26,6	2,49

На рис. 3 приведены некоторые примеры входных изображений и описания к ним, сгенерированные моделью Resnet@50-LSTM@512.



(a) A small bird is sitting on a chair



(b) A man is riding an elephant through a dirt field

Рис. 3: Сгенерированные описания

5. Заключение. Как видно из результатов, построенная модель хорошо справляется с поставленной задачей и способна генерировать адекватные описания изображений. При этом, чем меньше объектов изображено на рисунке, тем проще нейронной сети его обработать. Предложенный подход актуален для смежных областей [6–10].

Литература

1. Simonyan K., Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1409.1556> (дата обращения: 21.01.17).

2. Sutskever I., Vinyals O., Quoc V. Sequence to sequence learning with neural networks // 27th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS), 2014. P. 3104–3112.
3. Szegedy C., Liu W., Yangqing J. et. al. Going deeper with convolutions [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1409.4842> (дата обращения: 21.01.17).
4. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep residual learning for image recognition [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1512.03385> (дата обращения: 21.01.17).
5. Kingma D. P., Ba J. L. Adam: a method for stochastic optimization. [Электронный ресурс]: URL:<https://arxiv.org/abs/1412.6980> (дата обращения: 10.11.16).
6. Дрокин И. С. Об одном алгоритме последовательной инициализации весов глубоких нейронных сетей и обучении ансамбля нейронных сетей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 4. С. 66–74.
7. Назукин Д. Е. Классификация автодорожных знаков с использованием сверточной нейронной сети // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 440–444.
8. Ялов А. Л. Автоматическое детектирование нарушения на пешеходном переходе // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 571–575.
9. Кулинкин А. Б., Смирнов Е. А. Нейросетевое детектирование объектов в условиях ограниченного времени // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 419–424.
10. Peresada V. P., Smirnov N. V., Smirnova T. E. Development control of a multicommodity economy based on the dynamical input-output model // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 4. С. 119–132.

УДК 519.24

Калинин В. И.

Подход к прогнозированию дорожного трафика через моделирование многомерных временных рядов

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. С каждым годом автомобилей на дорогах городов становится все больше и больше. Проблема дорожных заторов сейчас актуальна как никогда, особенно если речь идёт о крупных городах и пригородных трассах. На сегодняшний день предпринимается ряд мер по предотвращению автомобильных заторов: расширение трасс, оптимизация работы светофоров и общественного транспорта [1]. Стоит отметить, что в последнее время для решения этой проблемы также используются компьютерные и вычислительные технологии, позволяющие спрогнозировать дорожную ситуацию. Применяются микро- и макроскопические (гидродинамические) подходы к моделированию дорожного движения [2]. Кроме того, в [3] описана удачная попытка применения искусственных нейронных сетей. В данной статье представлен абсолютно иной подход. Предлагается использование модели многомерных временных рядов. Эта модель не требует больших вычислительных затрат и может быть применима к прогнозированию в реальном времени.

2. Описание модели. В качестве прогнозирующей модели использована векторная авторегрессионная модель или VAR(p), общий вид которой:

$$\bar{Y}_t = \bar{C} + \sum_{i=1}^p A_i \bar{Y}_{t-i} + \bar{\varepsilon}_t,$$

где $\bar{Y}_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})^T$ — вектор скорости потока в момент времени t , y_{it} — скорость на i -ом участке дороги в момент времени t , p — величина лагирования, n — размерность городской сети, $\bar{\varepsilon}_t$ — вектор ошибок, элементы которого, предполагается, не должны сильно

Калинин Владислав Ильич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: cripson1994@yandex.ru, тел.: +7(911)114-08-91

отличаться от гауссова белого шума [4]. Так как скорость по отношению ко времени непрерывна, а аргументами авторегрессионной модели являются дискретные величины, уместно разбить скорость на пяти- или десятиминутные интервалы.

Обозначим $\bar{C} \in \mathbb{R}^n$ — свободный вектор, а $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрицы параметров, которые нужно оценить. Всего подлежат оценке $n(1 + np)$ параметров. Можно уменьшить их число и увеличить точность модели, введя в неё пространственно-корреляционные матрицы $S_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$, в которых единица стоит на пересечении строки со столбцом, если от участка, соответствующего строке можно добраться до участка, соответствующего столбцу, за один дискретный промежуток времени. Индекс τ соответствует некоторому временному периоду, например, спокойные и пиковые часы [5]. Таким образом, модель преобразуется к виду

$$\bar{Y}_{t,\tau} = \bar{C}_\tau + \sum_{i=1}^p A_{i,\tau} S_\tau \bar{Y}_{t-i,\tau} + \bar{\varepsilon}_{t,\tau}.$$

Если каждый из рядов обладает свойством стационарности (математическое ожидание и дисперсия прогнозируемой величины не зависят от времени, а автоковариационная функция зависит только от разности моментов времени, т. е. $\text{cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma(\Delta t)$) и случайные возмущения $\bar{\varepsilon}_t$ обладают свойством белого шума, то уравнения модели VAR(p) можно оценить методом наименьших квадратов. В этом случае оценки будут состоятельны и асимптотически нормальны [6].

3. Реализация. Описанная выше модель реализована и протестирована с помощью прикладных пакетов MATLAB и EViews на реальных данных, предоставленных компанией Yandex.

3.1. Подготовка данных. Предоставленные данные были приведены к виду временных рядов путём их дискретизации на десятиминутные интервалы. В действительности, дорожное движение несёт в себе много шума (например: нарушение правил дорожного движения, внезапная поломка транспортного средства, «оживлённые» перекрёстки и т. п.), поэтому перед использованием рядов в модели их необходимо сгладить. В этой задаче использовалось экс-

по экспоненциальному сглаживанию, которое имеет общий вид:

$$s_t = \begin{cases} c_1, & t = 1, \\ s_{t-1} + \alpha \cdot (c_t - s_{t-1}), & t > 1, \end{cases}$$

где c_t — элементы исходного ряда, s_t — элементы сглаженного ряда, $\alpha \in (0, 1)$ — коэффициент сглаживания.

Кроме того, модель сильно чувствительна к нехватке данных, поэтому перед её использованием недостающие данные были восстановлены путём линейной интерполяции.

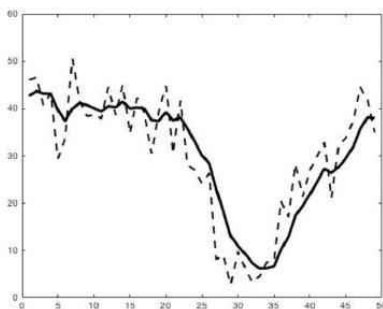


Рис. 1. Пример применения экспоненциального сглаживания: пунктирная линия — исходный ряд, сплошная — сглаженный

3.2. Анализ данных и оценка модели. Проверка стационарности рядов проводилась с помощью расширенного теста Дики – Фуллера (ADF Test) и теста Йохансена (Johansen Test) на наличие коинтегрирующих соотношений.

Количество лагов выбрано с помощью информационных критериев Акаике и Шварца.

Для проверки того, являются ли остатки $\bar{\varepsilon}_t$ гауссовым белым шумом, применены расширенный тест Уайта на наличие гетероскедастичности (White Heteroskedasticity Test) и расширенный тест множителей Лагранжа на отсутствие автокорреляций остатков (LM Test).

3.3. Результаты работы модели. Данная модель была оценена с помощью данных, соответствующих одному месяцу. На рис. 2, 3 представлены графики 20- и 30-минутного прогноза за три дня в период с 10 утра до 6 вечера для двух различных участков дороги.

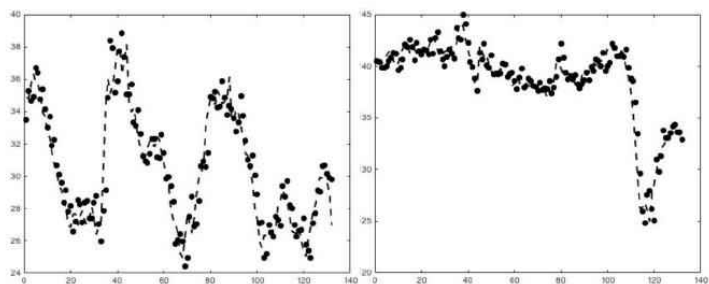


Рис. 2. 20-минутный прогноз

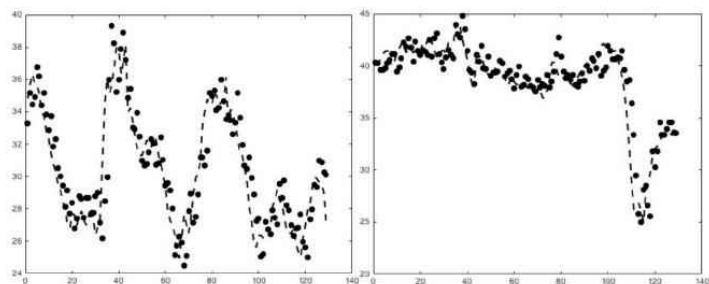


Рис. 3. 30-минутный прогноз

На графиках пунктирной линией обозначены реальные данные, а точками — прогноз.

4. Заключение. Несмотря на то, что модель протестирована в основном на прогнозе на 30 минут вперёд, она выдаёт хорошие результаты также и при прогнозе на более долгий срок, в частности, до 1 часа вперёд. Кроме того, высокие значения коэффициентов детерминации для каждого из уравнений свидетельствуют о высоком уровне аппроксимации. Поскольку при проектировании предполагалась минимизация числа параметров, необходимых для расчётов, то в итоге получившаяся модель имеет простую вычислительную структуру и, следовательно, легко расширяема даже до размеров целых городов.

Литература

1. Шабалина А. В., Власова Т. В. Оптимизация маршрутов общественного транспорта с различной вместимостью // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 731–735.
2. Швецов В. Н. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и Телемеханика. 2003. № 11. С. 3–46.
3. Weizhong Zheng, Der-Horng Lee, Qixin Shi. Short-term freeway traffic flow prediction: Bayesian combined neural network approach // Journal of transportation engineering, February 2006. P. 114–121.
4. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2003. Т. 7. № 1. С. 79–103.
5. Wanli Min, Laura Wynter, Yasuo Amemiya. Road traffic prediction with spatio-temporal correlations // IBM Watson Research Center. June 2007. P. 1–11.
6. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2002. Т. 6. № 4. С. 498–523.

УДК 004.852

Камалов М. В., Мартынов Р. С.

Сравнительный анализ алгоритмов онлайн-обучения ранжированию поисковой выдачи

Рекомендовано к публикации доцентом Добрыниным В. Ю.

Введение. Онлайн-обучение ранжированию — одна из наиболее развивающихся областей информационного поиска. В первую очередь это связано с обширным использованием различных поисковых систем, которые служат для получения ранжированных наборов документов по некоторому запросу. Использование классической постановки задачи обучения затруднительно — число признаков, используемых современными поисковыми системами, может превышать 1000 и, кроме того, размеченные данные крайне ограничены и могут быстро терять свою актуальность. Поэтому начали активно развиваться методы, способные обучаться ранжированию без использования таких данных — методы *онлайн-обучения ранжированию*.

Одним из первых алгоритмов в этой сфере стала онлайн-версия метода опорных векторов [1]. Затем был предложен метод многорукого бандита, основанного на градиентном спуске [2], который затем получил развитие в работах [3, 4]. В данной статье рассматриваются различные модификации данного алгоритма и оценивается эффективность их работы на различных наборах данных.

Описание алгоритма. Алгоритм многорукого бандита является одним из популярных алгоритмов онлайн-обучения ранжированию. Его основная идея заключается в следующем: изначально задаются параметры градиентного спуска: скорость обновления параметров α , длина градиентного шага δ и начальный вектор параметров ранжирующей функции w_0^0 размерности n , где n — число признаков, по которым система оценивает релевантность. Затем алгоритм

Камалов Михаил Валерьевич — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: mkamalov@gmail.com, тел.: +7(921)588-76-33

Мартынов Родион Сергеевич — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st019957@students.spbu.ru, тел.: +7(951)679-83-96

начинает принимать запросы от пользователей. Для каждого запроса q_t (где t — момент времени, в которое пришел запрос) составляется список документов l_0 — результат поиска, ранжированный с помощью функции $F(w_t^0, q_t)$. Затем делается градиентный шаг в пространстве параметров $w_t^1 = w_t^0 + \delta u$, где u — вектор, выбираемый случайно внутри единичной сферы и задающий направление шага. С использованием w_t^1 составляется список l_1 , основанный на функции $F(w_t^1, q_t)$. Эти списки смешиваются в единый набор l с использованием некоторого алгоритма смешивания (interleave [3]) и предъявляются пользователю. Пользователь выбирает документы (документ) при помощи кликов c_t , и на их основе выбирается лучший набор параметров среди w_t^0 и w_t^1 , который будет являться начальным для следующей итерации алгоритма (следующего запроса).

Основные модификации алгоритма включают в себя различные реализации ранжирующей функции $F(w, q)$ и изменение алгоритма смешивания. В данной статье рассматриваются следующие варианты алгоритма: вероятностное смешивание (probabilistic interleaving, PI) [5], сбалансированное смешивание (balanced interleaving, BI) [6], командное смешивание (team draft interleaving, TDI) [7] и смешивание, основанное на ограничениях документов (document constraints, DC) [8] при фиксированной ранжирующей функции.

Моделирование поведения пользователя. Для проведения эксперимента с использованием готовых наборов данных для ранжирования, необходимо рассмотреть вопрос о моделировании поведения пользователя. Основным способом моделирования являются *кликерные модели*. Кликерная модель — вероятностная модель, которая представляет поведение пользователя как серию наблюдаемых и скрытых событий. С её помощью можно оценить следующие вероятности: $P(C_i)$ — вероятность клика на i -й документ и $P(S_i)$ — вероятность останова поиска на i -м документе.

В данной работе используется каскадная кликерная модель, адаптированная для онлайн-обучения ранжированию [9], в которой вышеуказанные вероятности моделируются как условные вероятности, зависящие от релевантности документа $R_i \in \overline{0, n}$: $P(C_i) = P(C_i = 1 | R_i)$, $P(S_i) = P(S_i = 1 | R_i)$. Поведение пользователей, согласно этой модели, полагается следующим: изначально пользователь начинает просматривать ранжированный список документов, начиная с первого. Для каждого документа он решает, следует ли ознакомиться-

ся с ним более подробно, т. е. достоин ли он клика. После клика, пользователь выбирает: либо он нашел необходимую информацию и поиск следует прекратить, либо необходимо рассмотреть большее количество документов. Соответственно, варьируя указанные выше вероятности $P(C_i)$ и $P(S_i)$, можно задавать различные модели поведения пользователя.

В данной статье использовались три таких модели [9]:

1. Идеальная (рег): пользователь кликает исключительно на самые релевантные документы и только на них.
2. Навигационная (нав): пользователь в основном кликает на релевантные документы, однако ему требуется более обзорная информация по запросу.
3. Информационная (инф): пользователь рассматривает некоторое множество документов, выбирая их не только по релевантности.

Сравнение. Для оценки качества работы алгоритма применялась мера релевантности $NDCG$:

$$NDCG = \sum_{i=0}^k \frac{2^{R_i-1}}{\log_2(i+1)} iNDCG^{-1}.$$

Данная мера отражает прирост «полезности» документа в зависимости от его индекса в ранжированном списке, который затем нормируется при помощи лучшего возможного ранжирования $iNDCG$. Параметр k задает число документов, по которым вычисляется мера.

Каждый алгоритм оценивался в двух режимах работы:

1. Офлайн-режим, в котором вычислялся средний $NDCG$ для лучшего получившегося набора параметров w .
2. Онлайн-режим, в котором вычисляется накопленный за все взаимодействия с пользователем $NDCG$.

Сравнение алгоритмов производилось с помощью рангового критерия Вилкоксона. Результаты работы каждого алгоритма для каждого набора данных в двух режимах объединяются в выборки, к которым затем попарно применяется критерий Вилкоксона при гипотезе $H_0 : P(x_k^i > x_k^j) = \frac{1}{2}$ с альтернативой $H_1 : P(x_k^i > x_k^j) > \frac{1}{2}$

при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Затем вычисляется величина

$$S(A_i) = \sum_{j=0, i \neq j}^n M(A_i, A_j), \quad (1)$$

$$M(A_i, A_j) = \begin{cases} 1, & \text{если гипотеза } H_0 \text{ отвергнута,} \\ 0, & \text{если гипотеза } H_0 \text{ принята,} \end{cases}$$

где A_i — i -я модификация алгоритма, x_k^i — элементы выборки, соответствующей результатам работы i -го алгоритма на k -й итерации, n — число алгоритмов. Алгоритмы сравниваются отдельно по каждому режиму работы.

Таблица 1. Параметры кликовых моделей

R	$P(C_i = 1 R)$					$P(S_i = 1 R)$				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
per	0,0	0,5	1,0	—	—	0,0	0,0	0,0	—	—
nav	0,05	0,5	0,95	—	—	0,2	0,5	0,9	—	—
inf	0,4	0,5	0,6	—	—	0,1	0,3	0,5	—	—
per	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
nav	0,05	0,2	0,4	0,5	0,95	0,1	0,3	0,4	0,5	0,9
inf	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Вычисления производились на открытых наборах данных Letor 3.0 [10], основанных на трех уровнях релевантности, и LETOR 4.0 [11], Yahoo! Learning to Rank challenge [12], основанных на пяти уровнях релевантности. Каждый набор был разделен на пять частей и внутри каждой части выделена обучающая и тестовая выборки. Результаты усредняются по всем частям. Алгоритмы производили 1000 представлений ранжированного листа для пользователя при выбранных параметрах $\alpha = 0,01$ и $\delta = 0,1$. Мера $NDCG$ вычислялась при $k = 3$. Начальные параметры w_0^0 задавались случайным образом. Параметры кликовых моделей отображены в таблице 1 (прочерк означает, что в данных, на которых использовалась модель, соответствующий уровень релевантности не представлен). Все вычисления произведены с использованием библиотеки Lerot [13]. Результаты работы алгоритмов получены с использованием формулы (1) и представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты работы алгоритмов

Наборы данных		BI		DC		PI		TDI	
		off	on	off	on	off	on	off	on
идеальная	WEB10K	2	1	2	0	0	3	1	2
	MQ2007	2	2	1	1	0	0	3	3
	MQ2008	1	1	2	2	0	0	3	3
	OHSUMED	2	1	1	2	0	0	2	3
	TD2003	2	1	3	2	0	0	1	3
	TD2004	3	3	1	1	0	0	2	2
	Yahoo!	1	2	2	1	0	0	3	3
	Yahoo!	1	2	2	1	0	0	3	3
наблюдательная	WEB10K	3	1	2	0	0	3	1	2
	MQ2007	2	3	3	0	0	1	1	2
	MQ2008	2	1	1	0	0	1	3	3
	OHSUMED	1	1	2	2	0	0	3	3
	TD2003	2	3	1	1	0	0	3	2
	TD2004	1	1	3	0	0	2	2	3
	Yahoo!	0	0	3	3	1	2	2	1
	Yahoo!	0	0	3	3	1	2	2	1
информационная	WEB10K	3	3	1	2	0	0	2	1
	MQ2007	3	3	1	2	0	0	1	1
	MQ2008	1	2	2	1	0	0	3	3
	OHSUMED	3	3	2	2	0	0	1	1
	TD2003	2	2	3	1	0	0	1	3
	TD2004	0	2	3	1	1	0	2	3
	Yahoo!	2	1	1	2	0	0	2	3
	Yahoo!	2	1	1	2	0	0	2	3

Основываясь на полученных в результате эксперимента данных, можно сделать следующие выводы:

1. В целом можно утверждать, что качество работы алгоритма многорукого бандита напрямую зависит от выбранного метода смешивания ранжированных листов, так как в большинстве случаев гипотеза H_0 отвергается.
2. Оценки качества работы алгоритма исключительно в офлайн-режиме недостаточно для того, чтобы судить о его поведении при онлайн-обучении.
3. Вероятностное смешивание показало наихудшие результаты в онлайн-режиме среди большинства пар наборов данных и кликовых моделей.
4. Сбалансированное смешивание лучше остальных выбранных алгоритмов справляется с «зашумленными» входными данными, что может стать аргументом для его использования в поисковых системах общего назначения, так как в подобных системах пользователи зачастую рассматривают не только самые релевантные документы. В то же время, алгоритм командного

смешивания показал лучший результат в случае идеальной модели поведения пользователя, поэтому можно рекомендовать его к использованию в узкоспециализированных поисковых системах.

5. Метод смешивания, основанный на ограничениях документов, несмотря на отличные результаты в офлайн-режиме, уступает сбалансированному и командному смешиванию при онлайн-обучении.

Заключение. В ходе работы рассмотрены наиболее популярные модификации алгоритма многорукого бандита для решения задачи онлайн-обучения ранжированию. Приведен метод оценки качества работы каждого алгоритма и метод сравнения алгоритмов между собой с использованием рангового критерия Вилкоксона. Каждый алгоритм применен к различным открытым наборам данных с использованием кликовых моделей для имитации поведения пользователя. Сделаны выводы о результатах работы алгоритмов и влиянии выбора конкретного метода смешивания ранжированных списков на качество обучения. В дальнейшем предполагается рассмотрение различных видов модификации алгоритма, а также сравнение с другими существующими методами онлайн-обучения ранжированию.

Литература

1. Joachims T. Optimizing search engines using clickthrough data // Proceeding KDD '02 Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. New York: ACM. 2002. P. 133–142.
2. Yue Y., Joachims T. Interactively optimizing information retrieval systems as a dueling bandits problem // Proceeding ICML '09 Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning. New-York: ACM. 2009. P. 1201–1208.
3. Hoffman K., Whiteson S., M. de Rijke. Balancing exploration and exploitation in listwise and pairwise online learning to rank for information retrieval // Inf. Retr. Vol. 16. Iss. 1. Kluwer Academic Publishers Hingham, MA. USA. 2013. P. 63–90.

4. Schuth A., Oosterhuis H., Whiteson S., M. de Rijke. Multileave Gradient Descent for Fast Online Learning to Rank // Proceeding WSDM '16 Proceedings of the Ninth ACM International Conference on Web Search and Data Mining. New York: ACM. 2016. P. 457–466.
5. Hofmann K., Whiteson S., de Rijke M. A probabilistic method for inferring preferences from clicks // Proceeding CIKM '11 Proceedings of the 20th ACM international conference on Information and knowledge management. New-York: ACM. 2011. P. 249–258.
6. Joachims T. Evaluating retrieval performance using clickthrough data // Text Mining. Physica/Springer-Verlag, 2003. P. 79–96.
7. Kharitonov E., Macdonald C., Serdyukov P., Ounis T. Generalized Team Draft Interleaving // Proceeding CIKM '15 Proceedings of the 24th ACM International on Conference on Information and Knowledge Management. New-York: ACM. 2015. P. 773–782.
8. He J., Zhai C., Li J.. Evaluation of methods for relative comparison of retrieval systems based on clickthroughs // In Proceedings of CIKM. New York: ACM. 2009. P. 2029–2032.
9. Hoffmann K. Fast and reliable online learning to rank for information retrieval // ACM SIGIR Forum archive Vol. 47. Iss. 2. New York: ACM. 2013. P. 140–140.
10. Tao Qin, Tie-Yan Liu, China Jun Xu, China Hang Li. LETOR: A benchmark collection for research on learning to rank for information retrieval // Information Retrieval. 2010. No 13. Iss. 4. P. 346–374.
11. Tao Qin, Tie Yan Liu. Introducing LETOR 4.0 Datasets [Электронный ресурс] // CoRR 2013. Vol. abs/1306.2597. URL:<http://arxiv.org/abs/1306.2597> (дата обращения: 15.02.2017).
12. Yahoo Lab [Электронный ресурс]: URL:<https://webscope.sandbox.yahoo.com> (дата обращения: 15.02.2017).
13. Schuth A., Hofmann K., Whiteson S., de Rijke M. Lerot: an Online Learning to Rank Framework // Living Labs for Information Retrieval Evaluation workshop at CIKM'13. New York: ACM. 2013. P. 23–26.

УДК 004.942

Касенков Н. А., Краснопольская Е. В., Лепихин Т. А.

Построение модели поведения гексакоптера при аварийной ситуации с использованием нечеткой логики

1. Введение. На данный момент системы, основанные на нечетких множествах, разработаны и успешно внедрены в таких областях, как управление технологическими процессами, медицинская диагностика, биржевое прогнозирование, распознавание образов. Практический опыт разработки систем нечеткого логического вывода свидетельствует, что сроки и стоимость их проектирования значительно меньше, чем при использовании традиционного математического аппарата, при этом обеспечивается требуемый уровень моделей.

В данной работе рассматривается задача поведения гексакоптера при аварийных ситуациях. Правильное поведение беспилотного аппарата позволит существенно уменьшить вероятность печального исхода неудавшегося полета, и тем самым избежать вероятных материальных потерь. Для решения задачи нечеткого моделирования используются две среды, специально разработанные для данных целей: Fuzzy Logic Toolbox пакета MATLAB, а также программа FuzzyTECH.

2. Постановка задачи. Модуль нечеткой логики (см. рис. 1) регулярно запрашивает состояния: соединение с оператором (Connection), системы навигации (GPS) и акселерометра с гироскопом (AccGyr). В случае, когда принимается решение о передаче управления бортовому автопилоту, команды, поступающие от оператора (Operator) на модуль управления беспилотным летательным аппаратом (Control), игнорируются, а поведение гексакоптера (Hexacopter)

Касенков Никита Алексеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nikkos_29@mail.ru, тел.: +7(953)367-28-14

Краснопольская Елена Вячеславовна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st032380@student.spbu.ru, тел.: +7(981)837-71-70

Лепихин Тимур Андреевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: lepikhinta@gmail.com, тел.: +7(904)648-82-14

начнёт осуществляться за счет команд, отдаваемых модулем FUZZY.

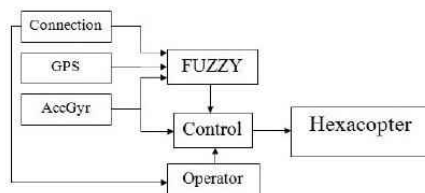


Рис. 1. Месторасположение модуля нечеткой логики в общей схеме гексакоптера

3. Математическая постановка задачи. Определим пять входных и одну выходную нечеткие лингвистические переменные $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$.

Наименования:

- β_1 — количество рабочих двигателей (“Motors”) [1],
- β_2 — исправность гироскопа с акселерометром (“AccGyr”),
- β_3 — исправность системы навигации (“GPS”),
- β_4 — исправность связи с оператором (“Connection”),
- β_5 — тип поверхности (“TypeTerr”),
- β_6 — действия (“Action”).

Терм-множества:

- $T_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- $T_2 = \{\text{Исправен (“Ok”)}, \text{Неисправен (“Fault”)}\}$,
- $T_3 = \{\text{Исправен (“Ok”)}, \text{Неисправен (“Fault”)}\}$,
- $T_4 = \{\text{Установлена (“Established”)}, \text{Потеряна (“Lost”)}, \}$,
- $T_5 = \{\text{Вода (“Water”)}, \text{Лес (“Forest”)}, \text{Поле (“Field”)}\}$,
- $T_6 = \{\text{Лететь в месторасположение оператора (“Flyback”)}, \text{Аварийная посадка (“Landing”)}, \text{Выпустить парашют (“Parachute”)}, \text{Продолжить полёт (“Nothing”)}\}$.

Фаззифицируем переменные, путем ввода функций принадлежности, которые изображены на рис. 2.

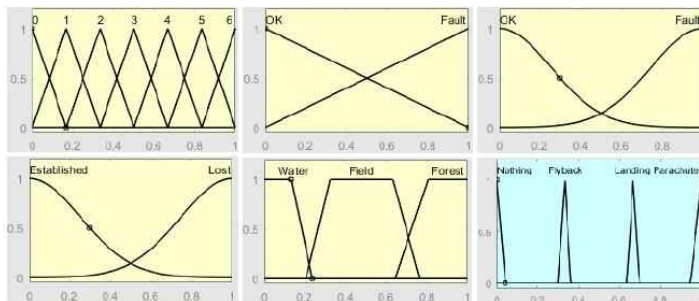


Рис. 2. Функции принадлежности нечетких лингвистических переменных

Определим систему правил в терминах лингвистических переменных, состоящую из 15 правил:

1. If (β_2 is "Fault") then (β_6 is "Parachute").
2. If ($\beta_1 < 4$) then (β_6 is "Parachute").
3. If (β_1 is 4) and (β_5 is "Forest") then (β_6 is "Parachute").
4. If (β_1 is 4) and (β_5 is "Water") then (β_6 is "Parachute").
5. If (β_1 is 4) and (β_5 is "Field") then (β_6 is "Landing").
6. If (β_1 is 4) then (β_6 is "Parachute").
7. If (β_1 is 5) and (β_3 is "Ok") and (β_4 is "Established") then (β_6 is "Flyback").
8. If (β_1 is 5) and (β_3 is "Fault") and (β_4 is "Established") then (β_6 is "Nothing").
9. If (β_1 is 5) and (β_3 is "Ok") and (β_4 is "Lost") and (β_5 is "Forest") then (β_6 is "Flyback").
10. If (β_1 is 5) and (β_3 is "Ok") and (β_4 is "Lost") and (β_5 is "Water") then (β_6 is "Flyback").
11. If (β_1 is 5) and (β_3 is "Ok") and (β_4 is "Lost") and (β_5 is "Field") then (β_6 is "Landing").

12. If (β_1 is 5) and (β_3 is "Fault") and (β_4 is "Lost") then (β_6 is "Parachute").

13. If (β_1 is 6) and (β_3 is "Ok") and (β_4 is "Established") then (β_6 is "Nothing").

14. If (β_1 is 6) and (β_3 is "Ok") and (β_4 is "Lost") then (β_6 is "Flyback").

15. If (β_1 is 6) and (β_3 is "Fault") and (β_4 is "Lost") then (β_6 is "Parachute").

4. Математическое обоснование. Согласно теореме о нечеткой аппроксимации (Fuzzy Approximation Theorem) [2], любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике.

В качестве схемы нечеткого вывода используется алгоритм Мамдани [3]. Для определения степеней истинностей условия каждого правила системы нечеткого вывода применяется минимальная конъюнкция. Согласно алгоритму Мамдани, в процессе композиции (нахождения функции принадлежности каждой из выходных лингвистических переменных множества правил нечетких продукций) используется метод максимальной дизъюнкции. Приведение к четкости осуществляется при помощи центроидного метода.

5. Сравнение реализаций. В таблице приведены сравнения для обеих реализаций.

Таблица. Сравнение результатов

Motors	AccGyr	GPS	Connection	TypeTerr	MATLAB	Fuzzy TECH
0,7865	0,5506	0,382	0,6854	0,2584	0,66	0,54616
0,6865	0,4506	0,482	0,5854	0,5583	0,472	0,49382
0,4618	0,2505	0,3258	0,7854	0,7583	0,853	0,83884
0,6281	0,3504	0,8416	0,4854	0,301	0,564	0,48972
0,6742	0,8504	0,3955	0,8854	0,2	0,776	0,76218
0,75	0	0	0	0,6	0,335	0,21252
1	1	0,8	1	0,1	0,87	0,985

Видно, что результаты обеих реализаций моделей схожи при одних и тех же входных параметров. Таким образом, можно говорить о правдоподобности построенной нечеткой модели.

6. Заключение. Построена нечеткая модель поведения гексакоптера при аварийной ситуации. Нечеткая система реализована в двух программных средах: MATLAB и FuzzyTECH. Модели строились идентично, чтобы иметь возможность сравнить принципы работы и возможные различия. Высокая точность работы системы и малая погрешность позволяют предположить возможность практического использования данной модели для построения нечеткой системы, которая сможет взять на себя управление гексакоптером при возникновении аварийной ситуации и снизить вероятность крушения.

Литература

1. Zavadskiy S., Sharovatova D. Improvement of quadrocopter command performance system // Proc. of the International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov. 2015. P. 609–610.
2. Kosko B. Fuzzy Systems as Universal Approximators // IEEE Trans. on Computers. 1994. Vol. 43, No 11. P. 1329–1333.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 167 с.

УДК 681.5.013

Князькин Я. В.

Спектральный синтез \mathcal{H}_2 -оптимального детектора динамических сбоев

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

1. Введение. В настоящее время проблеме обнаружения динамических сбоев уделяется исключительное внимание в связи со значительным возрастанием сложности управляемых объектов и с ужесточением предъявляемых к ним требований. Для обеспечения безопасного функционирования необходимо своевременное и гарантированное обнаружение отказов на фоне постоянно действующих внешних возмущения, таких как, например, морское волнение или ветер.

Несмотря на то, что существует большое количество работ, посвященных данной задаче (в [1] приведена подробная библиография), некоторые ее аспекты до сих пор не получили необходимого развития. В частности, не затрагивается вопрос учета спектральных свойств возмущающего воздействия. Цель данной работы — сформировать алгоритм синтеза наблюдателя-фильтра, предназначенного для обнаружения постоянных или медленно меняющихся аддитивных возмущений, порождающих динамический сбой (сбойных возмущений), невосприимчивого к внешнему возмущения с известной центральной частотой. В качестве основы используется специализированный спектральный подход, предназначенный для решения проблем \mathcal{H}_2 -оптимизации для SISO объектов. В отличие от широко применяемой техники синтеза, этот подход не использует решение уравнений Риккати или линейных матричных неравенств, но базируется на факторизации полиномов, что существенно снижает вычислительные затраты. Данное обстоятельство имеет особую значимость для вычислительных устройств с ограниченной оперативной памятью или работающих в режиме реального времени.

2. Постановка задачи. Представим объект управления, заданный линейной стационарной моделью в пространстве состояний

Князькин Ярослав Вячеславович – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: yaroslavknyazkin@fmail.com, тел.: +7(904)216-48-14

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{b}u + \mathbf{p}d + \mathbf{E}f, \\ y &= \mathbf{c}x,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x \in E^n$ — вектор состояния объекта, y, u, d, f — скалярные величины: y — измеряемая координата, u — управляющее воздействие, d — внешнее возмущение, f — сбойное воздействие. Предполагается, что сигнал f является медленно меняющимся, т. е. $df/dt \approx 0$.

Наблюдатель, предназначенный для обнаружения сбойного воздействия, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}\nu, \\ \nu(s) &= W(s)(y - \mathbf{c}z), \quad r = e_y = y - \mathbf{c}z,\end{aligned}\tag{2}$$

где $r(t)$ — сигнал о произошедшем сбое, $\nu(s)$ — корректирующий сигнал. Передаточная функция фильтра $W(s) = W_1(s)/W_2(s)$ и вектор \mathbf{L} — параметры, определяющие свойства наблюдателя-фильтра и подлежащие поиску в процессе его синтеза.

Будем считать, что внешнее возмущение представляется стационарным эргодическим случайным процессом $d(t)$, имеющим заданную спектральную плотность мощности $S_d(s)$:

$$S_d(s) = S_1(s)S_1(-s), \quad S_1(s) = \frac{N_d(s)}{T(s)} = \frac{\sqrt{4D_r\alpha}}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2},\tag{3}$$

где D_r — дисперсия, β — центральная частота, $\alpha = s_t\beta$, s_t — степень «размытости» спектра по частотам. Отметим, что при синтезе постоянный множитель не играет роли и может быть опущен. Также возможно использовать более простое полигармоническое описание этого возмущения в виде

$$d(t) = \sum_{i=1}^{n_d} A_{di} \sin(\sigma_i t + \varphi_i),$$

где A_{di} , σ_i , φ_i — амплитуда, частота и фаза соответствующих гармоник. Сигнал r должен быть максимально чувствителен к постоянному воздействию, порождающему сбой, и, в то же время, он не должен реагировать на внешнее возмущение r .

Для формализованной постановки задачи будем использовать идею, сходную с методом $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$, описанным в [1]. Функционал, характеризующий качество работы детектора (2), имеет вид

$$J = J(\mathbf{L}, W(s)) = J_1/J_2, \quad (4)$$

$$J_1 = \min_{\omega \in \Omega_1} |F_{rf}(j\omega)|, \quad J_2 = \max_{\omega \in \Omega_2} |F_{rd}(j\omega)|,$$

где $F_{rf}(s)$, $F_{rd}(s)$, — это передаточные функции от f , d к r , а Ω_1, Ω_2 — диапазоны частот, характерных для возмущений f и d .

Задача состоит в поиске элементов $W(s)$ и L , обеспечивающих максимум функционала $J(\mathbf{L}, W) \rightarrow \max_{\{\mathbf{L}, W\} \in \Omega_0}$, где Ω_0 — область параметров, обеспечивающих асимптотическую устойчивость детектора.

3. Задача спектральной H_2 -оптимизации. Запишем систему в отклонениях относительно переменных $e_x = x - \hat{x}$, $e_y = y - \hat{c}\hat{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \mathbf{A}e_x - \mathbf{L}\nu + \mathbf{p}d + \mathbf{E}f, \\ \nu(s) &= W(s)e_y, \end{aligned} \quad (5)$$

и рассмотрим ее в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned} A(s)e_y(s) &= -L(s)\nu(s) + P(s)d(s) + E(s)f(s), \\ A(s) &= \det(\mathbf{I}s - \mathbf{A}), \quad E(s) = A(s)\mathbf{c}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}, \\ P(s) &= A(s)\mathbf{c}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{p}, \quad L(s) = A(s)\mathbf{c}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L}, \end{aligned} \quad (6)$$

соответственно имеем

$$F_{rd}(s) = \frac{W_2(s)P(s)}{\Delta(s)}d(s), \quad F_{rf}(s) = \frac{W_2(s)E(s)}{\Delta(s)}f(s), \quad (7)$$

где $\Delta(s) = A(s)W_2(s) + L(s)W_1(s)$ — характеристический полином замкнутой системы.

Отметим, что динамика систем (5), (7) зависит от вектора \mathbf{L} и передаточной функции $W(s)$. Их последовательный поиск увеличит объем вычислений, поэтому в данной статье предложен алгоритм одновременного синтеза. Если произвести в (6) замену переменной ν на $\tilde{\nu} = V(s)e_y(s)$, где

$$V(s) = V_1(s)/V_2(s), \quad V_1(s) = L(s)W_1(s), \quad V_2(s) = W_2(s),$$

то (6) принимает вид

$$A(s)e_y(s) = -\tilde{\nu}(s) + P(s)d(s) + E(s)f(s). \quad (8)$$

Из уравнения (8) видно, что динамика замкнутой системы полностью определяется передаточной функцией $V(s)$, поиск которой может быть осуществлен посредством минимизации среднеквадратичного функционала

$$\tilde{J} = \tilde{J}(V) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (e_y^2 + k^2 \tilde{v}^2) dt \rightarrow \min_{V \in \Omega_V}, \quad (9)$$

где Ω_V — множество стабилизирующих регуляторов $V(s)$. Здесь коэффициент k характеризует соотношение между точностью коррекции и интенсивность подавления внешнего возмущения d . Заметим, что уменьшение k влечет повышение степени устойчивости замкнутой системы. Согласно теореме, приведенной в [2], для любого полинома $\Delta(s)$ с заданной степенью устойчивости α_{st} можно указать такой вектор $\gamma \in E^{m_d}$, что $\Delta(s) \equiv \Delta^*(s, \gamma, \alpha_{st})$, где

$$\Delta^*(s) = \begin{cases} \Delta^*(s, \gamma) = \tilde{\Delta}^*(s, \gamma), \\ \Delta^*(s, \gamma) = (s + a_{d+1})\tilde{\Delta}^*(s, \gamma), \end{cases}$$

$$\Delta^*(s, \gamma) = \prod_{i=1}^{k_d} (s^2 + a_i^1(\gamma, \alpha_{st})s + a_i^0(\gamma, \alpha_{st})), \quad k_d = [m_d/2],$$

$$a_i^1(\gamma, \alpha_{st}) = 2\alpha_{st} + \gamma_{i1}^2, \quad a_i^0(\gamma, \alpha_{st}) = \alpha_{st}^2 + \gamma_{i1}^2\alpha_{st} + \gamma_{i2}^2,$$

$$a_{d+1}(\gamma, \alpha_{st}) = \gamma_{d0}^2 + \alpha_{st},$$

$$\gamma = \{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{kd1}, \gamma_{kd2}, \gamma_{d0}\}. \quad (10)$$

Несложно заметить, что

$$\Delta(0, \gamma, \alpha_{st}) = \prod_{i=1}^{k_d} a_i^0(\gamma, \alpha_{st}) = \prod_{i=1}^{k_d} (\alpha_{st}^2 + \gamma_{i1}^2\alpha_{st} + \gamma_{i2}^2),$$

из чего следует, что чувствительность фильтра к постоянным воздействиям обратно пропорциональна степени устойчивости.

Для минимизации функционала \tilde{J} (9) используется специализированный спектральный подход [2] к решению SISO задач \mathcal{H}_2 -оптимизации, позволяющий получить решение задачи (8), (9) аналитически. Приведем алгоритм нахождения оптимальной $V_0(s)$.

Алгоритм 1.

1. Выполнить факторизации

$$\begin{aligned} k^2 A(s)A(-s) + 1 &= G(s)G(-s), \\ N(s)N(-s) &= N_d(s)N_d(-s)P(s)P(-s), \end{aligned} \quad (11)$$

где полиномы $G(s)$, $N(s)$ гурвицевы.

2. Построить вспомогательный полином

$$R(s) = - \sum_{i=1}^n \frac{G(-s)}{(g_i - s)} \frac{N(g_i)}{A(g_i)T(g_i)G'(-g_i)}, \quad (12)$$

где $g_i, i = \overline{1, n}$ — корни полинома $G(-s)$, полагаем, что они взаимно простые.

3. Сформировать оптимальную передаточную функцию

$$V_0(s) = \frac{V_{01}(s)}{V_{02}(s)} = \frac{(A(s)T(s)R(s) - N(s))/G(-s)}{(-T(s)R(s) - k^2 A(-s)N(s))/G(-s)}, \quad (13)$$

где деление на полином $G(-s)$ производится нацело.

Отметим, что характеристический полином $\Delta(s)$ в (7) имеет вид

$$\Delta(s) = N(s)G(s), \quad (14)$$

После проведения данных вычислений следует выделить группу корней полинома $V_{01}(s)$ $\xi_i, i = \overline{1, n_\xi}$, вычислить

$$L(s) = \prod_{i=1}^{n_\xi} (s - \xi_i), \quad W_1(s) = V_{01}(s)/L(s), \quad W_2(s) = V_{02}(s), \quad (15)$$

а затем найти соответствующий вектор \mathbf{L} .

Данный подход может быть модифицирован: для этого следует деформировать спектральную плотность (3), используя в вычислениях (11)–(13) вместо $N(s)$ измененный полином $\tilde{N}(s)$

$$\tilde{N}(s) = N(s)N^*(s), \quad (16)$$

где $N^*(s)$ — гурвицев полином с заданной степенью устойчивости.

Данное преобразование позволяет снизить степень устойчивости характеристического полинома (14) и, следовательно, повысить

чувствительность к низкочастотным возмущениям. Полином $N^*(s)$ может быть параметризован согласно формулам (10): $N^*(s) = N^*(s, \gamma, \alpha_{st})$. Поскольку в этом случае передаточная функция $V(s)$ (а значит, \mathbf{L} и $W(s)$) определяется параметрами k, γ, α_{st} , то функционал J также определяется ими, т. е. $J = J(k, \gamma, \alpha_{st})$.

4. Алгоритм синтеза оптимального детектора и практический пример. На базе рассуждений, приведенных в пункте 3, можно сформулировать алгоритм поиска оптимальных параметров наблюдателя — фильтра (2).

Алгоритм 2.

1. Задать начальные параметры: минимальную допустимую степень устойчивости α_{st} , степень деформирующего полинома $n^* = \deg N^*(s)$ и начальные $k = k_0, \gamma = \gamma_0 \in R^{n^*}$.
2. Вычислить $N^*(s) = N^*(s, \gamma, \alpha_{st})$ согласно формулам (10), а затем $\tilde{N}(s)$ (16).
3. Вычислить решение задачи (9), (10) $V(s) = V_1(s)/V_2(s)$ согласно алгоритму 1 (11)–(13), а также вектор \mathbf{L} и передаточную функцию $W(s)$ в соответствии с (15).
4. Вычислить значение $J = J(\mathbf{L}, W(s)) = J(k, \gamma, \alpha_{st})$ (4).
5. Получить вектор $\gamma = \gamma^*$, обеспечивающий максимум J , используя любой численный метод.
6. Если $J(k, \gamma^*, \alpha_{st})$ слишком мало, следует изменить k или α_{st} .
7. Получить оптимальные значения $k = k^*, \gamma = \gamma^*, \alpha_{st} = \alpha_{st}^*$. Используя их, вычислить соответствующие $\mathbf{L}, W(s)$.

Продемонстрируем эффективность данного алгоритма на примере. Пусть задана математическая модель (1), описывающая движение морского судна в горизонтальной плоскости, со следующими параметрами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,0936 & 0,6340 & 0 \\ 0,0480 & -0,7170 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0,0190 \\ 0,0160 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p} = (0,4100 \quad 0,0076 \quad 1)^T, \quad \mathbf{c} = (0 \quad 0 \quad 1).$$

Рассмотрим внешнее возмущение в полигармонической форме:

$$d(t) = 0,1 \sin(0,9\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) + 0,1 \sin(1,1\omega_0 t), \quad \omega_0 = 0,45.$$

Исходя из этого, выберем параметры (3) $\beta = 0,45$, $s_t = 0,01$ (малое значение усиливает частотные свойства детектора), $\Omega_1 = [0, 0, 1]$, $\Omega_2 = [0, 9\beta, 1, 1\beta]$, $n^* = 2$, $\gamma_0 = (1, 1)$. Применяв алгоритм 2, получим параметры оптимального наблюдателя

$$\mathbf{L} = (29,57 \quad 1,25 \quad 1)^T, \quad W_0(s) = \frac{16,43s^2 + 1,68s + 0,12}{s^3 + 6,37s^2 + 0,26s + 1,23}.$$

На рис. 1 слева изображены частотные характеристики передаточных функций (7), а справа — процесс обнаружения постоянного сбойного воздействия. Можно заметить провал в области центральной частоты сигнала $d(t)$, т. е. наблюдатель обладает выраженными фильтрующими свойствами.

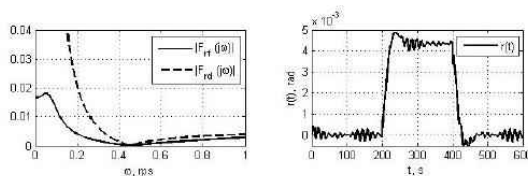


Рис. 1. Частотные характеристики функций $F_{rf}(s)$, $F_{rd}(s)$ и процесс обнаружения сбойного воздействия

5. Выводы. Предложен новый подход к построению наблюдателей, предназначенных для обнаружения сбоев в динамических системах. Эффективность предложенного алгоритма продемонстрирована на практическом примере с использованием пакета MATLAB.

Литература

1. Ding S. X. Model-based fault diagnosis techniques: design schemes, algorithms, and tools. Springer Science & Business Media, 2008. 473 с.
2. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 447 с.

УДК 004.932.72'1

Коваленко Л. А., Салимов Т. А., Горбунов В. И.

Детектирование объектов с использованием системы технического зрения

Рекомендовано к публикации профессором Кулаковым Ф. М.

1. Введение. В последнее время сделан значительный скачок в области решения задач детектирования и классификации объектов на изображении, в связи с увеличением мощности аппаратного обеспечения и созданием новых методов обработки изображений. В работах [1–4] алгоритмы детектирования с использованием данных со считывающего оборудования решают задачи нахождения положения искомого объекта в пространстве. Данный подход может быть использован в качестве основы для реализации подсистемы в модульной архитектуре при построении робототехнических систем [5]. При реализации системы [6–8] возникла необходимость в создании алгоритма детектирования объектов для нахождения положения на рабочей сцене с выбором параметров для приемлемой скорости решения поставленной задачи с учетом допустимых погрешностей.

2. Постановка задачи. Требуется разработать систему технического зрения (СТЗ), позволяющую распознавать искомый объект с определением его положения в пространстве относительно камер СТЗ. Разрабатываемая система должна удовлетворять следующим условиям:

- распознавание объектов различной формы и цветов;
- детектирование объектов при различной степени освещенности рабочей сцены.

Коваленко Лев Алексеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: levozavr@mail.ru, тел.: +7(981)855-10-97

Салимов Тимур Альфредович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st054614@student.spbu.ru, тел.: +7(911)786-65-47

Горбунов Владислав Игоревич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gorbunov.v93@gmail.com, тел.: +7(911)900-41-62

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 16-19-001-99

3. Решение задачи.

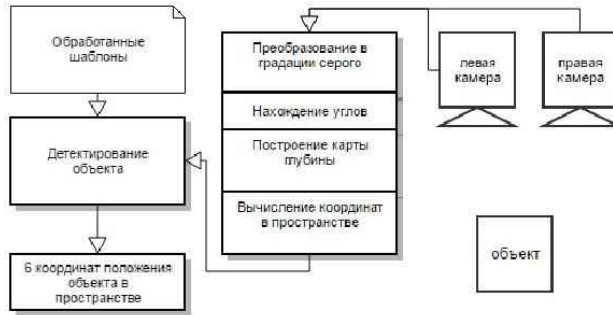


Рис. 1. Алгоритм детектирования объекта

1. Получаем набор шаблонов объекта под разными углами съемки СТЗ (рис. 1): производим съемку объекта под разными углами, сохраняя градусные меры крена и тангажа для каждого из шаблонов (крен и тангаж определяют две координаты поворота).

2. Каждый из шаблонов проходит алгоритм предобработки:

2.1. Изображение помещаем в структуру данных «матрица» и преобразуем в градации серого.

2.2. После преобразований вычисляем матрицу особых точек для последующего нахождения углов. Получаем матрицу особых точек: $dst = (D_xsrc)^2 \cdot D_{yysrc} + (D_yysrc)^2 \cdot D_{xxsrc} - 2D_xsrc \cdot D_yysrc \cdot D_{xyysrc}$, где D_x, D_y — это производные первого порядка матрицы src , $D_{x,x}, D_{y,y}$ — это производные второго порядка, $D_{x,y}$ — смешанные производные.

2.3. В качестве особых точек выбраны «углы» — точки, формируемые из двух или более пересекающихся граней. Находим наиболее явные углы на изображении: рассчитываем меру качества каждого угла исходного изображения с помощью вычисления минимальных собственных значений матрицы градиента. Для отсеивания шумов не рассматриваем углы с минимальным собственным значением меньше, чем заданный параметр. Остальные углы сортируем по мере качества в порядке убывания и сохраняем их матричные координаты

в динамический массив.

2.4. Строим карту глубины изображения на основе стерео-изображения, получаемого с двух откалиброванных камер. Производим расчет диспаратета для каждого пикселя на изображении, полученного с левой камеры. Диспаратет пикселя d равен расстоянию между соответствующими пикселями левого и правого изображений. Соответствие устанавливаем путем блочного сравнения:

$$d = |x_{right} - x_{left}|.$$

Таким образом, получаем матрицу смещений каждого пикселя. На ее основе производим расчет расстояний Z до каждого пикселя: $Z = \frac{f \cdot S}{d \cdot c}$, где f — фокусное расстояние камер, S — расстояние между камерами, c — размер пикселя на камере. Из-за обратной зависимости расстояния и смещения, данный метод позволяет строить более точную карту глубины на близких расстояниях, чем на дальних.

Так как координаты углов на плоскости уже известны, нет необходимости в построении карты глубины целого изображения. Вместо этого рассчитываем карту глубины в окрестности каждого угла. Таким образом получаем расстояние от левой камеры стереопары до этого угла. На основе полученных данных можно рассчитать две координаты положения в декартовом пространстве: $X = \frac{x_{pixel}}{d} S$, $Y = \frac{y_{pixel}}{d} S$, где x_{pixel}, y_{pixel} — матричное расстояние от центра изображения до точки.

3. Рассчитываем длины векторов от каждого угла до остальных особых точек из полученного массива матричных координат и сохраняем их в отдельные массивы.

4. Сохраняем градусные меры углов между вектором, построенным от первого угла вертикально вверх, и другими векторами, построенными от этого угла к другим точкам. Это необходимо для определения градусной меры поворота относительно шаблона.

5. Получаем изображение рабочей сцены, которое проходит алгоритм предобработки.

6. Осуществляем поиск среди найденных на изображении рабочей сцены углов путем сравнения: $P_{template} = P_{scene}$, где $P_{template}$ — пиксель шаблона, P_{scene} — соответствующий ему пиксель рабочей сцены. При совпадении, вычисляем длины векторов от этого угла до других особых точек на изображении сцены и сравниваем полученные данные с предварительно рассчитанными длинами на основе шаблонов. При допустимом количестве совпадений длин векторов, считаем, что объект находится на сцене. При наличии объекта про-

исходит вычисление градусной меры рысканья детектируемого объекта относительно шаблона (третья координата угла поворота).

4. Пример работы алгоритма. Алгоритм предобработки идентичен для шаблонов и изображения рабочей сцены, поэтому в качестве примера продемонстрирована обработка только рабочей сцены (рис. 2).



Рис. 2. Изображение, полученное со стереопары

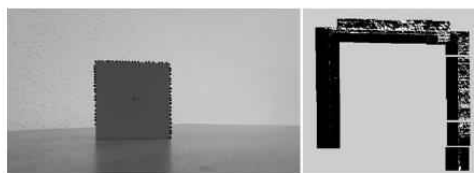


Рис. 3. Изображение с найденными углами и блочная карта глубины

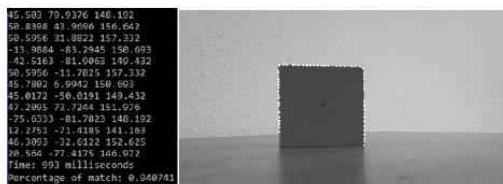


Рис. 4. Детектирование объекта на сцене и вывод координат особых точек

5. Выводы. В результате экспериментов при вычислении расстояния до объекта (рис. 3) получены погрешности не более 4 мм.

При детектировании объекта использовались заранее подготовленные шаблоны, при этом точность совпадения объекта на шаблоне с распознаваемым объектом на рабочей сцене составила 94% (рис. 4).

Литература

1. Kulakov F. M., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G. V. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10, No 33–36. P. 1783–1796.
2. Gorbunov V. I., Kulakov F. M. Project of vision system for remote controlled space robots // Extreme robotics. Proceedings of the International Scientific and Technological Conference. Saint-Petersburg: «AP4Print». 2016. 480 p.
3. Кулаков Ф. М. Телеуправление космическими роботами // Изв. РАН. ТИСУ. 2016. № 4. С. 141–192.
4. Kulakov F. M., Alferov G. V., Efimova P. Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading. 2015. 710–742 p.
5. Кулаков Ф. М. Копирующее и супервизорное управление роботами при большом запаздывании сигналов управления и обратной связи. Часть I // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 1 (10). С. 55–61.
6. Kulakov F. M. et al. Information technology for interactive robot task training through demonstration of movement // Yu. P. Ko., Ri. J. Advances in Intelligent Robotics and Collaborative Automation. (River Publishers Series in Automation, Control and Robotics). Denmark. River Publishers. 2015. 364 p.
7. Кулаков Ф. М. Тренажёр-интерфейс для управления космическим роботом // Материалы восьмой Всероссийской мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2015). Геленджик. 2015. 251 с.
8. Кулаков Ф. М. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009. 168 с.

УДК 519.688

Красовская И. К.

Идентификация параметров модели морского судна в условиях внешнего возмущения

Рекомендовано к публикации доцентом Коровкин М. В.

1. Введение. Развитие теории управления обусловило потребность в предсказании поведения объекта управления как при использовании управляющих воздействий, так и в условиях воздействия возмущений различной природы. В связи с этим появилась необходимость в построении математической модели объекта управления [1]. Создание математической модели может производиться следующими методами:

- аналитический метод применяется, если рассматриваемый объект достаточно прост по структуре и хорошо изучен. Его математическое описание производится на основе законов химии, механики, физики и т. д.;
- экспериментальный метод подразумевает статистическую обработку данных;
- экспериментально-аналитический метод состоит в уточнении модели, полученной аналитическим путём [2].

Одним из средств построения математической модели является идентификация. Данная задача может быть сформулирована в широком и узком смыслах в зависимости от априорной информации об объекте управления [3]:

- структурная идентификация. Определение вида математической модели;
- параметрическая идентификация. Определение числовых параметров математической модели [2].

Красовская Ирина Константиновна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: irina.k.krasovskaya@mail.ru, тел.: +7(981)834-23-39

В данной статье рассмотрена идентификация в узком смысле на основе известных уравнений линейной модели морского подвижного объекта.

2. Постановка задачи. Основной целью работы является процесс идентификации параметров модели морского судна в условиях внешнего возмущения. Для проведения идентификации необходимо:

- провести сбор данных;
- выбрать модель из множества моделей-кандидатов;
- определить правило оценки степени соответствия испытываемой модели данным наблюдений [4].

3. Реализация. Для сбора данных построена «модель-идеал», зависящая от известных уравнений и числовых характеристик. Для вывода уравнений динамики используется система координат, представленная на рис. 1.

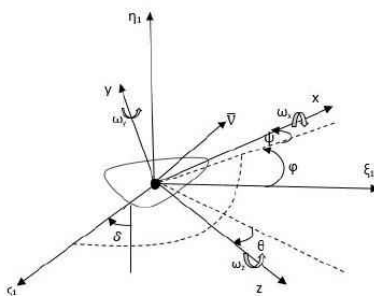


Рис. 1. Система координат для вывода уравнений динамики

На рис. 1 изображены $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ — полусвязанная система координат, начало которой жестко связано с центром масс морского судна, $O\xi\eta\zeta$ — связанная система координат, играющая важнейшую роль в выводе уравнений динамики, φ — угол курса, который будет положительным при повороте судна на левый борт относительно направления движения, θ — угол крена, принимающий положительные

значения при крене на правый борт, ψ — угол дифферента, положительное значение которого определяется поднятием носа морского судна.

Для проведения идентификации использована следующая математическая модель бокового движения:

$$\begin{aligned}\dot{V}_y &= a_{11}V_y + a_{12}\omega_x + b_1\delta, \\ \dot{\omega}_x &= a_{21}V_y + a_{22}\omega_x + b_2\delta, \\ \dot{\varphi} &= \omega_x, \\ \dot{\delta} &= u,\end{aligned}\tag{1}$$

где V_y — боковая составляющая скорости, ω_x — угловая скорость вращения по курсу, δ — угол перекладки вертикальных рулей, φ — курс, u — управляющий сигнал [5].

4. Программная реализация. Для решения задачи выбрана среда MATLAB. Использовался System Identification Toolbox, входящий в состав данной программы. С его помощью получена модель морского подвижного объекта.

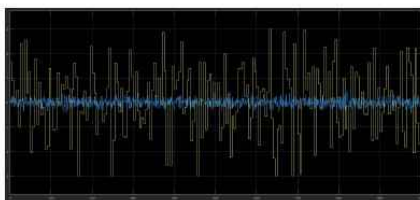


Рис. 2. Входной сигнал для проведения идентификации

При проведении идентификации на вход объекта подавался сигнал, в котором шум составлял 10% от максимальной амплитуды полезного сигнала (см. рис. 2). Далее в System Identification Toolbox проводилась идентификация, которая показала, что полученная математическая модель совпадает с «моделью-идеалом» на 94,96% (см. рис. 3).

Проверка адекватности модели проводилась по следующему правилу: $fit = norm(yh - y)/\sqrt{N}$, где $norm$ — норма вектора, yh и y — выходы объекта и модели соответственно, N — количество элементов

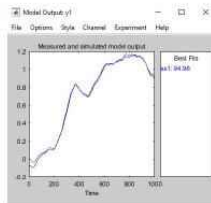


Рис. 3. Результат идентификации в System Identification Toolbox

массива данных [5]. Для визуального сравнения результатов была создана модель, состоящая из математической модели, используемой для получения данных для идентификации, и математической модели объекта, полученной в результате идентификации (см. рис. 4).

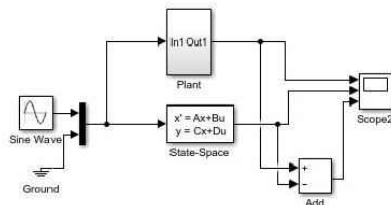


Рис. 4. Модель для визуального сравнения результатов

Первые два графика на рис. 5 сверху показывают выходы систем при подаче на них синусоиды, последний иллюстрирует разность между выходами систем. Видно, что разница между выходами систем составляет менее 10% по отношению к выходу «модели-идеала», что удовлетворяет требованиям к результатам идентификации.

5. Заключение. Создана модель морского подвижного объекта, наиболее близкая к оригиналу. В дальнейшем возможны следующие модификации программы:

- усовершенствование работы при большем уровне шума;
- сравнение результатов работы различных алгоритмов идентификации;

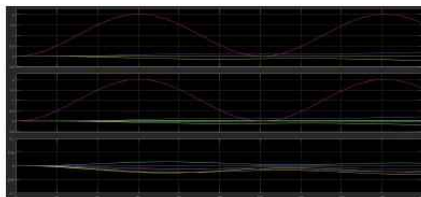


Рис. 5. Графики для сравнения результатов идентификации

- графический интерфейс.

Описанный в статье метод идентификации может применяться в различных областях знаний [6–16].

Литература

1. Райбман Н. С. Что такое идентификация. М.: Наука, 1970. 117 с.
2. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. 211 с.
3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 680 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория пользователя.: Пер. с англ. М.: Наука, 1991. 432 с.
5. Ведякова А. О. Идентификация в условиях внешнего возмущения с использованием нейронных сетей // International Journal of Open Information Technologies. 2014. Т. 2. № 3. С. 18–22.
6. Пюкке Г. А. Моделирование и расчет параметров при решении задач идентификации технических систем. Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2011. 187 с.
7. Арзуманян Н. К., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Анализ использования различных мер сходства в коллаборативной фильтрации // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 342–347.

8. Красовская И. К., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Корреляционный метод в задаче распознавания речи // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 409–413.
9. Макаров М. А., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Реализация RSA шифрования при обмене сообщениями // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 430–434.
10. Тихонов Н. О., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Разработка кроссплатформенного приложения с использованием технологии ORM // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 534–538.
11. Arzumanyan N. K., Smirnova M. A., Smirnov M. N. Synthesis and modeling of anti-lock braking system // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 606–608.
12. Veremey E. I., Smirnova M. A., Smirnov M. N. Synthesis of stabilizing control laws with uncertain disturbances for marine vessels // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 552–554.
13. Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Астатическая коррекция цифровых законов управления // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2. № 11. С. 481–486.
14. Арзуманян Н. К., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Моделирование системы управления тормозными усилиями автомобиля в Simulink // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 357–363.
15. Какорин Н. С., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Моделирование распространения вирусного заболевания на основе данных о взаимодействии индивидов // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 421–425.
16. Королев Е. А., Петрунин В. Н., Смирнов М. Н., Смирнова М. А. Разработка системы шифрования с применением стегано-криптографических методов // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 437–441.

УДК 004.942

Красун С. В., Ямщиков С. А., Кравченко Л. А.

Нечеткая кластеризация игроков в техасский холдем

Рекомендовано к публикации профессором Прониной Ю. Г.

Введение. Работа с неполной информацией — основная причина, по которой научные исследования в области покера или бриджа отстают от исследований в области игр с полной информацией, например, шахмат, шашек, реверси. В играх с полной информацией, при наличии достаточных вычислительных мощностей, поиск оптимальной стратегии достигается за счет перебора полного дерева игры [1]. Однако, на пути создания программы, способной вести выигрышную игру в покер с живыми игроками, встает целый ряд задач, подробно описанных в [1].

Решение задач, связанных с восстановлением неполной информации, может быть полезно в социальном, экономическом и бизнес-моделировании, незаменимо в военной и криптоаналитической сферах. Однако основной областью применения разработок в контексте игр с неполной информацией является создание программ, способных взаимодействовать с живыми людьми и окружающим миром: чтобы обеспечить себе существование в мире, программе необходимо научиться дополнять представление о нем. Так же как и человек с самого раннего детства учится познавать мир и социум, непрерывно выясняя, какие свойства скрывают от него окружающие его объекты, какие мысли, намерения и чувства таят (или не таят) в себе другие люди. В статье предлагается способ описания игры людей, необходимый для построения *имитационных моделей*, мимикрирующих под игру живых людей, и нечеткая кластеризация игроков на основе статистических данных.

Красун Сергей Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: taksebezoloto@gmail.com, тел.: +7(999)527-08-61

Ямщиков Семен Алексеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: splaff8@gmail.com, тел.: +7(981)831-46-31

Кравченко Любовь Андреевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kravchenko.lyubov.of@yandex.ru, тел.: +7(952)380-22-51

Моделирование оппонента. Хороший покерный игрок непременно обращает внимание на игру своих соперников, выделяя при этом их склонности, слабые и сильные места. С математической точки зрения он решает *задачу моделирования оппонента*, что в более общем смысле эквивалентно определению *характера человека*, пусть и через призму игры в покер. В общем и целом, было выделено два подхода для формирования статистики на игроков: *поведенческий* (апостериорный сбор статистики действий игроков в различных игровых ситуациях) и *психологический* (интеллектуальный анализ поведенческой статистики с целью выявления и категоризации состояний психики человека; здесь аппаратом для исследований выступает, в основном, *теория выбора в условиях неопределенности*).

В данной статье используется только первый подход, хотя, на наш взгляд, именно в умелом комбинировании вышеперечисленных парадигм и состоит эффективность моделирования оппонента.

Ниже перечислены основные характеристики игроков, собираемые на основе статистики. В дальнейшем будем называть их *параметрами*. Описание используемых покерных терминов можно найти в [2].

Параметризация игроков. Здесь и далее все параметры, имеющие отношения к денежным вложениям, выражены в больших блайндах. Параметры разбиты на несколько категорий:

- параметры эффективности;
- общие параметры игры;
- Preflop-статистика;
- Flop-статистика;
- Turn-статистика;
- River-статистика.

Параметры эффективности состоят из:

1. *BB100* — средний выигрыш за сто раздач;
2. *Ingame Profit* — средний выигрыш за все раздачи, в которых игрок принимал участие;
3. *Wins by Preflop*, *Wins by Flop*, *Wins by Turn*, *Wins by River* — отношение числа выигрышей на различных этапах торговли к общему числу частей в соответствующих этапах;

4. *Wins by Showdown* — отношение числа выигрышей при вскрытии карт к общему числу вскрытий.

Общие параметры игры включают в себя:

1. *Folds, Calls, Opens, Raises* — отношение числа сбрасываний, ответных ставок, открытий банка и повышений, соответственно, к общему числу игровых решений.
2. *Cont-Bets* — отношение числа продолженных ставок к общему числу агрессий на предыдущих этапах торговли.
3. *Open-Raises* — отношение числа открытий банка повышением к общему числу участия во всех этапах торговли.
4. *Check-Raises* — отношение числа комбинирования стратегий *check raise* и к общему числу выбранных стратегий *check*.
5. *Reraises* — отношение числа переповышений к числу ситуаций, в которых игроку необходимо было отвечать на повышение.
6. *Raises Size, Reraises Size* — средняя сумма повышения и переповышения.
7. *Fold to Raise Pre* — отношение числа сбрасываний в ответ на повышение в ситуациях, когда игрок ещё не успел вложить деньги в банк в данном раунде, к общему числу таких ситуаций.
8. *Fold to Raise Post* — то же самое для ситуаций, когда игроку необходимо защищать свои ставки.
9. *Call to Raise Pre, Call to Raise Post* — аналогично предыдущим параметрам, но для стратегий *call*.
10. *Fold to Reraise* — частота сбрасывания в ситуации переповышения собственного повышения другим игроком.
11. *Fold Pot, Call Pot* — среднее отношение предлагаемой к ответу ставки к имеющемуся банку для случаев сброса (ответной ставки). Другими словами, *средние шансы банка*, при которых игрок принимает решение сбросить карты или уравниваться [2].
12. *Raise Pot* — среднее отношение вкладываемой ставки к имеющемуся банку для случаев повышения.

Остальные категории статистики, в целом, содержат параметры, аналогичные общей статистике. Однако, поскольку в покере огром-

ную роль играет позиция игрока за столом (которая меняется от раздачи к раздаче), для каждой игровой позиции на каждом этапе торговли сохраняется отдельная игровая статистика в виде:

1. *Folds on Place* — отношение числа сбрасываний на данной позиции к общему числу действий на данной позиции.
2. *Calls on Place* — то же для ответных ставок.
3. *Opens on Place* — то же для открытий банка.
4. *Raises on Place* — то же для повышений.

Для первого этапа игры (*preflop*) каждая позиция нумеруется по порядку принятия решения игроком, сидящим на этой позиции. Для остальных трех этапов игры позиции подразделяются на открывающую (*pre-position*), срединные (*middle-position*), закрывающую (*post-position*).

Кластеризация игроков. По большому счету, собираемую на оппонента в процессе игры статистику уже можно использовать при принятии игровых решений. Однако, есть целый ряд причин, описанных в [3], по которым подобный подход является недостаточным. Основная проблема моделирования игроков «на лету» заключается в том, что для формирования показательной статистики необходимо большое количество наблюдений. Решить эту сложность предлагается при помощи классификации игроков на основе заранее вычисленных классов.

Классификация игроков невозможна без предварительного выделения *классов*, к которым он могут принадлежать. Другими словами, перед решением задачи классификации игроков необходимо решить *задачу кластеризации*. Поскольку классифицировать игрока на основе четких классов представляется нелогичным (ближе к реальной ситуации будет полагать, что игрок совмещает в себе какие-то *доли склонностей*, нежели *абсолютно* типизировать игрока), воспользуемся нечетким моделированием [4]. На основе 3 млн. раздач покерного клиента PokerStars была собрана статистика на игроков в контексте начальных ставок 0,1\$–0,25\$.

Таким образом, игровые склонности каждого игрока были описаны параметрами, указанными в предыдущем разделе. Итоговая длина вектора параметров для каждого игрока составила 177 параметров. После чего была проведена кластеризация игроков, в наблюде-

ниях на которых отражено более 1000 раздач, при помощи алгоритма *Fuzzy c-means* [5]. Так как критерием близости вектора к центру кластера выступает евклидова норма расстояния между ними, во избежание избыточного влияния отдельных параметров на результаты кластеризации, все параметры выборки были нормированы по следующему принципу. Пусть X — множество всех параметров одного типа из выборки. Тогда каждый параметр $\tilde{x} \in X$ преобразуется указанным ниже образом:

$$\hat{x} = \frac{\tilde{x} - \min_{x \in X} x}{\max_{x \in X} x - \min_{x \in X} x}.$$

Заключение. Проведена параметризация игроков на основе апостериорных статистических данных, взятых из реального игрового контекста. Разработан подход, существенно уточняющий и ускоряющий моделирование незнакомых программе игроков в процессе игры с ними.

Литература

1. Billings P., Papp D., Schaeffer J., Szafron D. Poker as a testbed for AI research // Department of Computing Science: University of Alberta. 1997. P. 1–3.
2. Sklansky D. A. The theory of Poker. Two Plus Two Publishing. 1999. 301 p.
3. Billings P., Papp D., Schaeffer J., Szafron D. Improved opponent modeling in poker // Department of Computing Science: University of Alberta. 1998. P. 2–3.
4. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: Изд-во Бинном, 2009. 800 с.
5. Тараскина А. С. Нечеткая кластеризация по модифицированному методу с-средних и её применение для обработки микрочиповых данных // Проблемы интеллектуализации и качества систем информатики. Новосибирск. 2006. С. 217–228.

УДК 004.93'12

Малых Е. А.

Использование свёрточных нейронных сетей и Triplet Probabilistic Embedding в задаче автоматической идентификации по лицу

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Малиным К. А.*

1. Введение. Задача автоматической идентификации субъекта по изображению его лица является важным направлением исследований в области распознавания визуальных образов. Уже сейчас успешное решение этой задачи позволяет строить современные эффективные системы биометрической идентификации, автоматически размечать, кластеризовать и категоризировать фотографии, искать людей в видеопотоке. В статье рассмотрен и применён к небольшой базе из 277 субъектов метод решения задачи, основанный на использовании свёрточных нейронных сетей и метода Triplet Probabilistic Embedding (TPE) [1]. Показано существенное относительное увеличение точности на 44% при использовании TPE. По итогам исследования реализован программный комплекс, предназначенный для соотнесения между собой лиц одних и тех же людей на разных фотографиях.

2. Постановка задачи. Пусть пространство \mathcal{P} описывает все возможные изображения лиц, а множество T содержит метки всех возможных субъектов, которым эти лица могут принадлежать. Существует сюръекция $\text{id} : \mathcal{P} \rightarrow T$, ставящая в соответствие каждому изображению лица метку соответствующего субъекта.

Пусть дано конечное множество

$$M = \{(x_i, \text{id}(x_i))\}_{i=1}^N,$$

где $x_i \in \mathcal{P}$, $i = \overline{1, N}$, называемое обучающим множеством. Отдельно обозначим множества обучающих примеров

$$M_x = \{x \in \mathcal{P} \mid \exists t \in T : (x, t) \in M\}$$

Малых Егор Андреевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: fnk@fea.st, тел.: +7 (921) 425-13-00

и соответствующих им меток

$$M_t = \{t \in T \mid \exists x \in \mathcal{P} : (x, t) \in M\}.$$

Пусть также $K = |M_t|$. Требуется найти функцию (идентификатор)

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P} \times \mathcal{P} &\rightarrow [0, 1], \\ F(x, y) &= P(\text{id}(x) = \text{id}(y) \mid x, y), \end{aligned}$$

определяющую вероятность принадлежности любой пары изображений лицу одному субъекту.

3. Декомпозиция задачи. Пусть

$$F(x, y) = d(e(x), e(y)),$$

где функция $e : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^k$ сопоставляет каждому изображению лица высокоуровневые признаки в пространстве \mathbb{R}^k некоторой фиксированной размерности k , а функция $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ предназначена для оценки близости векторов признаков в этом пространстве. Дополнительно представим e как композицию двух функций:

$$e = e_d \circ e_M,$$

где e_M будет обучена с использованием только апостериорного опыта, добытого из обучающего множества M , а e_d – исходя ещё и из информации о виде функции d [1]. Зафиксируем d как косинусную дистанцию:

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{xy}{\|x\| \|y\|} \right).$$

4. Свёрточная нейронная сеть. Представим функцию e_M как свёрточную нейронную сеть. Для этого используем архитектуру, исследованную в [2], и модифицируем количество фильтров на каждом слое так, чтобы число параметров соответствовало размерности задачи.

Архитектура сети описана в таблице 1.

Таблица 1. Архитектура свёрточной нейронной сети

Слой	Размер свёртки	Шаг свёртки	Размерность
Conv1	11 × 11	4 × 4	57 × 57 × 96
MaxPool1	3 × 3	2 × 2	28 × 28 × 96
Conv2	5 × 5	1 × 1	28 × 28 × 256
MaxPool2	3 × 3	2 × 2	13 × 13 × 256
Conv3	3 × 3	1 × 1	13 × 13 × 384
Conv4	3 × 3	1 × 1	13 × 13 × 384
Conv5	3 × 3	1 × 1	13 × 13 × 256
MaxPool5	3 × 3	2 × 2	6 × 6 × 256
FC6	—	—	2048
FC6	—	—	256

В качестве функции активации для всех слоёв используется функция

$$f(y) = \begin{cases} y, & y > 0, \\ \alpha y, & y \leq 0, \end{cases}$$

где α — обучаемый параметр [3].

Обучать сеть предлагается с помощью метода «бутылочного горлышка». Для этого необходимо добавить к сети ещё один полностью соединённый слой с K нейронами и функцией активации softmax

$$s(y)_i = \frac{e^{y_i}}{\sum_{k=1}^K e^{y_k}},$$

где y_i обозначает выходное значение i -го нейрона текущего слоя, а затем обучить сеть решать задачу классификации на множестве M с K классами. В качестве функции потерь используется категориальная кроссэнтропия. После обучения добавленный слой отбрасывается и выход предпоследнего 256-мерного слоя рассматривается как выход сети.

5. Triplet Probabilistic Embedding. Рассмотрим множество всех троек

$$\mathcal{T} = \{(x^a, x^p, x^n) | x^a, x^p, x^n \in M_x\},$$

таких, что

$$\begin{aligned} \text{id}(x^a) &= \text{id}(x^p), \\ \text{id}(x^a) &\neq \text{id}(x^n), \end{aligned}$$

т. е. x_i^a и x_i^p принадлежат одному субъекту, а x_i^a и x_i^n — разным.

Тогда, исходя из вида функции d , для успешного решения задачи необходимо, чтобы для любой тройки $(x^a, x^p, x^n) \in \mathcal{T}$ выполнялось неравенство

$$F(x^a, x^p) > F(x^a, x^n),$$

откуда следует

$$d(e_d(e_M(x^a)), e_d(e_M(x^p))) > d(e_d(e_M(x^a)), e_d(e_M(x^n))).$$

Переобозначив $z^i = e_M(x^i)$ для компактности, можем записать

$$d(e_d(z^a), e_d(z^p)) > d(e_d(z^a), e_d(z^n)).$$

Вероятность выполнения этого неравенства равна [1]

$$p = \frac{e^{d(e_d(z^a), e_d(z^p))}}{e^{d(e_d(z^a), e_d(z^p))} + e^{d(e_d(z^a), e_d(z^n))}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $e^{d(e_d(z^a), e_d(z^p))}$, получим

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{1 + e^{d(e_d(z^a), e_d(z^n)) - d(e_d(z^a), e_d(z^p))}} = \\ &= \sigma(d(e_d(z^a), e_d(z^p)) - d(e_d(z^a), e_d(z^n))), \end{aligned}$$

где σ — логистическая функция. Пусть

$$e_d(x) = W \frac{x}{\|x\|}.$$

Найдём матрицу параметров W , максимизируя логарифм вероятности:

$$W = \arg \max_W \log \sigma \left(d \left(W \frac{z^a}{\|z^a\|}, W \frac{z^p}{\|z^p\|} \right) - d \left(W \frac{z^a}{\|z^a\|}, W \frac{z^n}{\|z^n\|} \right) \right).$$

Такой подход, впервые предложенный в [1], носит название Triplet Probabilistic Embedding.

6. Эксперимент и результаты. Для проведения эксперимента взяты открытые базы Caltech Faces [4], FEI Face Database [5] и Georgia Tech face database [6] и объединены в одну. Результирующая база насчитывает 277 субъектов и 4003 изображения, в среднем по 14 изображений на субъекта.

Каждое изображение было обработано следующим образом:

1. Найден ограничивающий лицо прямоугольник.
2. Выделены ключевые точки лица.
3. Найдено и применено аффинное преобразование такое, что точки, соответствующие глазам и верхней губе, всегда оказывались на одном месте.
4. Изображение кадрировалось до размера 227×227 .

В валидационное множество были выделены 12 субъектов, 2 фотографии каждого из оставшихся субъектов были выделены в тестовое множество.

Было обучено два варианта системы:

1. Свёрточная нейронная сеть, т. е. случай, когда $e = e_M$.
2. Свёрточная нейронная сеть + TPE, т. е. случай, когда $e = e_d \circ e_M$.

И нейронная сеть, и матрица W были обучены методом стохастического градиентного спуска [7]. Для контроля обучения сети использовалось тестовое множество, матрица W обучалась фиксированное число шагов.

Результаты на валидационном множестве представлены в таблице 2. В качестве метрики используется Equal Error Rate.

Таблица 2. Результаты

Система	EER
Свёрточная нейронная сеть	22,55%
Свёрточная нейронная сеть + TPE	12,05%

7. Заключение. Исследованы свёрточная нейронная сеть и метод Triplet Probabalistic Embedding применительно к задаче автоматической идентификации по лицу. Показано, что применение метода TPE даёт относительный прирост точности на 44% на исследуемой базе. На основе обученной системы реализован программный комплекс, задача которого заключается в поиске лиц одинаковых людей на разных фотографиях [8].

Литература

1. Triplet probabilistic embedding for face verification and clustering [Электронный ресурс] // arXiv.org URL: <https://arxiv.org/abs/1604.05417> (дата обращения: 17.03.2017).
2. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E ImageNet classification with deep convolutional neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems 25. 2012.
3. Delving deep into rectifiers: surpassing human-level performance on ImageNet classification [Электронный ресурс] // arXiv.org URL: <https://arxiv.org/abs/1502.01852> (дата обращения: 17.03.2017).
4. Computational vision: archive [Электронный ресурс] // Computational Vision at Caltech URL: <http://www.vision.caltech.edu/html-files/archive.html> (дата обращения: 17.03.2017).
5. FEI face database [Электронный ресурс] // Centro Universitario da FEI URL: <http://fei.edu.br/cet/facedatabase.html> (дата обращения: 17.03.2017).
6. Ara nefian face recognition page [Электронный ресурс] // URL: http://www.anefian.com/research/face_reco.htm (дата обращения: 17.03.2017).
7. Дрокин И. С. Об одном алгоритме последовательной инициализации весов глубоких нейронных сетей и обучении ансамбля нейронных сетей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 4. С. 66–74.
8. Face identification using CNN + TPE written with Keras [Электронный ресурс] // GitHub URL: <https://github.com/meownoid/face-identification-tpe> (дата обращения: 17.03.2017).

УДК 004.912

Масловская М. А.

Сравнение методов тематического моделирования

Рекомендовано к публикации профессором Печниковым А. А.

Введение. Сервисы, предоставляющие различные услуги в Вебе, собирают информацию о качестве оказанных услуг. В силу того, что количество объектов в базе такого веб-ресурса может достигать сотни тысяч, а отзывов на них может быть на порядок больше, не представляется возможным обрабатывать эту информацию вручную. Поэтому требуются методы автоматического анализа текстов, позволяющие значительно сократить время обработки данных.

В данной работе рассматривается задача анализа отзывов, собранных с ресурса компании «Booking.com» [1]. Итоговое множество данных содержит 4000 отзывов на английском языке об отелях одного города, собранных с помощью краулер-сервиса `scrapinghub`, который рассмотрен в [2]. Основная задача данной работы — определить главную тему отзыва и характеристику отеля по его названию. Для этого использованы методы: `word2vec` и латентное распределение Дирихле.

1. Подготовка данных. Отзывы представляют собой короткие тексты, в основном состоящие из 20 слов, и делятся на два класса: положительные и отрицательные. Для сбора данных воспользовались краулер-сервисом `scrapinghub` [2] и выгрузили их в формате `.csv`.

Собранные данные содержат множество особенностей, которые могут влиять на качество автоматического анализа текстов, например, незаполненные строки, символы различных регистров, шумовые слова. Шумовые слова или стоп-слова — это слова, вспомогательные глаголы, частицы, союзы, которые очень часто употребляются, но смысловой нагрузки в себе не несут. Такие элементы текста нужно исключить, поэтому этап подготовки данных включает удаление пустых строк и стоп-слов и перевод всех слов в нижний регистр.

Для подготовки данных использован язык Python 3 и стандартная библиотека `Pandas`, включающая в себя функции `dropna()` для

Масловская Мария Алексеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: 0913757@mail.ru, тел.: +7(911)091-37-57

удаления строк с пустым значением и `lower()` для перехода в нижний регистр, и универсальная библиотека `nlTK` для удаления стоп-слов. Результатом выполнения этого процесса является корпус документов, который можно обрабатывать методами автоматического анализа текстов.

2. Методы тематического моделирования. Задача определения темы или тематическое моделирование — это способ построения модели коллекции текстовых документов, которая определяет, к каким темам относится каждый из документов. Данная задача встречается в таких областях, как информационный поиск, автоматическая генерация текстов и автоматическое извлечение знаний из текстов.

Воспользуемся методами тематического моделирования для определения темы каждого отзыва и факторов, положительно или отрицательно описывающих отель. Особенностью данной задачи является то, что количество тем, встречающихся в документах, меньше количества различных слов во всем корпусе. Ввиду этого, тематическое моделирование тесно связано с другим классом задач, известным как уменьшение размерности данных.

2.1. Word2vec. Первым рассмотрим `word2vec` — группу методов, для расчета векторных представлений слов [3]. Он использует две основные архитектуры — `continuous bag of words (CBOW)` и `Skip-gram`. Задачей метода `CBOW` является предсказание слова по близлежащему контексту. В то время как `Skip-gram` решает противоположную задачу предсказания контекста слова по текущему слову. Оба метода используют искусственные нейронные сети. На вход сети подается слово, которое представляет собой случайный N -мерный вектор. Во время обучения алгоритм решает задачу максимизации косинуса угла между векторами слов, которые появляются в близких контекстах, и минимизации косинусной близости между векторами слов, которые не появляются рядом. Результатом обучения является оптимальный вектор для каждого слова, полученный с помощью метода `CBOW` или `Skip-gram`. Последовательность работы `word2vec`:

1. На вход подается текст, который разбивается на слова, и определяется их частотность.
2. Полученный массив сортируется по частоте и удаляются слова, которые встречаются реже заданного порогового значения.
3. Строится дерево Хаффмана для слов. Оно применяется для ко-

дирования словаря, что снижает вычислительную и временную сложность алгоритма.

4. Далее изымаются слишком часто встречающиеся слова, что позволяет ускорить процесс обучения используемой сети. Этот этап называется *subsampling*.
5. Полученный элемент текста на этапе *subsampling* проходят методом скользящего окна, где окно определяется как максимальная дистанция между текущим и предсказываемым словом в предложении.
6. Применение сети прямого распространения, которая использует функцию активации *hierarchical softmax* или *negative sampling*. *Hierarchical softmax* применяется при анализе использования низкочастотных слов. *Negative sampling* применяется с частотными словами.

Для анализа собранного множества отзывов был использован метод *Skip-gram* с использованием *negative sampling*, так как необходимо найти слова, описывающие отель, т. е. предсказать контекст по слову. Размер окна был выбран равным 10. В результате применения данной модели для отеля «The Penny Outpost» был получен вектор: [(«toilets», 0,942), («poorly», 0,882), («bathrooms», 0,868), («find», 0,837), («dirty», 0,820), («worst», 0,819), («cheap», 0,817), («hostel», 0,812)]. Это означает, что пользователи отмечают проблемы с сантехникой, что он грязный, плохой и дешевый.

Качественная проверка работы алгоритма, путем сравнения с публичными оценками данного отеля, показывает: чистота — 4,1, удобства — 4,3 и соотношение цена/качество — 5,4. Что свидетельствует о том, что построенная модель корректно выявляет основные факторы. Таким образом, в результате обучения *word2vec* получена группа ассоциативных связей, описывающих отель на основе отзывов о нем.

2.2. LDA. Другой метод, использующийся в тематическом моделировании — латентное распределение Дирихле (*Latent Dirichlet allocation, LDA*) — это генеративная статистическая модель, в которой каждый документ рассматривается как смесь нескольких тем (см. рис. 1). Согласно этому методу, предполагается, что распределение тем в документах соответствует распределению Дирихле. Данный метод позволяет предсказывать тему относительно глобального контекста, всего набора документов. Подбор параметров модели

LDA производится либо сэмплированием по Гиббсу либо вариационным байесовским выводом.

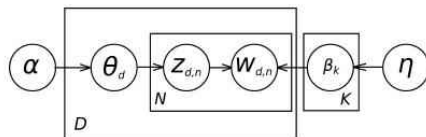


Рис. 1. Графическое представление модели LDA, где K — количество тем в коллекции, β_k — распределение слов по темам, D — коллекция документов, θ_d — распределение тем в документе, N — количество слов в документе, $z_{d,n}$ — тема, $w_{d,n}$ — наблюдаемое слово, α, η — параметры распределения Дирихле

Для настройки LDA необходимо согласно [4]:

1. Создать словарь, содержащий все слова из сгенерированного корпуса.
2. Преобразовать входной текст в матрицу, значениями которой являются количества вхождений данного слова в текст.
3. Задать количество тем в документе, также указать значения параметров модели (см. рис. 1), если это необходимо.
4. Выбрать метод для обновления тем: «пакетный» или «онлайн». Если объем данных большой, то «онлайн» будет работать быстрее, чем «пакетное» обновление.
5. Указать количество слов-тем для вывода результата.

В данной работе использована следующая конфигурация LDA: укажем одну тему в документе, используем метод «онлайн», для вывода запросим 4 слова. Результатом работы программы получаем набор тем: [«good», «breakfast», «hotel», «staff»], которые характеризуют отзыв «Very good hotel just 2-minute walk from the Old Town. Rooms are clean and spacious. Excellent breakfast. Very friendly and helpful staff». По полученным данным можно сделать вывод, что метод LDA правильно определяет главные смысловые компоненты.

2.3. Сравнение рассмотренных методов. Во время реализации программы можно столкнуться с такой особенностью рассмотренных методов, как требуемый формат входных данных. Word2vec

запрашивает на вход предложения, в то время как LDA принимает данные в форме текста. Следующее отличие методов заключается в получении результата. Так LDA определяет тему документа, а вот word2vec предсказывает контекст, с которым чаще всего употребляется слово. Еще одна особенность заключается в представлении слов: у word2vec это плотный вектор вещественных чисел, у LDA разреженный вектор вероятностей слов, принадлежащих к одной теме. За счет разреженности вектора получается большая интерпретируемость модели, что отсутствует у word2vec. Зато последний выигрывает в гибкости, так как обеспечивается больше степеней свободы модели, благодаря плотности вектора. Несмотря на эти отличия, оба метода работают хорошо, особенно с большими наборами данных, и очень похожи алгоритмически.

3. Заключение. Рассмотрены методы word2vec и латентное распределение Дирихле для задачи выявления слов, описывающих отели, а также для поиска основной темы отзыва. Показано, что оба метода дают корректное тематическое описание того или иного объекта. Кроме того, обнаружено, что объем собранных данных мал для качественного обучения моделей. Это означает, что размер корпуса следует увеличить.

Литература

1. Booking.com [Электронный ресурс]: URL:<http://www.booking.com> (дата обращения: 18.03.17).
2. Печников А. А., Сотенко Е. М. Программы-краулеры для сбора данных о представительских сайтах заданной предметной области – аналитический обзор // Современные наукоемкие технологии. 2017. № 2.
3. Mikolov T., Sutskever I., Chen K., Corrado G., Dean J. Distributed representations of words and phrases and their compositionality // Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems. 2013. P. 3111–3119.
4. Hoffman M. D., Blei D. M., Wang C. Stochastic Variational Inference // Journal of Machine Learning Research. 2013. P. 1303–1347.

УДК 621.389

Мащинский Н. С., Пушко Ф. А.

Автоматизация генерации тестовых сигналов для цифровых схем с элементами памяти

Рекомендовано к публикации профессором Овсянниковым Д. А.

Введение. Медицина и телемеханика, робототехника и спутниковая связь, аудиовизуальная техника и автоматика, измерительные приборы и системы глобального позиционирования — это далеко не полный список областей, в которых широко используется цифровая техника. Надежное функционирование сложных электронных систем невозможно без методической организации процессов контроля качества и технической диагностики. В связи с огромным разнообразием цифровых плат, применение средств автоматического тестирования и систем автоматизированного проектирования тестов выходит на первый план.

Разработанный в СПбГУ программный комплекс САПР тестов «SimTest» позволяет автоматизировать некоторые этапы создания тестовых программ для цифровых устройств. Однако на данный момент процесс составления проверяющих воздействий целиком зависит от оператора, его знаний о связях внутренних элементов устройства и алгоритмов их работы. Таким образом, автоматизация генерации тестовых последовательностей, сокращающая временные затраты человеческих ресурсов, является актуальной задачей.

Методика построения тестовых программ. Процесс разработки тестовых программ можно разбить на несколько этапов, которые более подробно описаны в [1–4]:

- разработка программного представления объекта контроля — описание алгоритмов работы внутренних компонентов устройства на языке описания аппаратных средств, учет связей между компонентами;

Мащинский Николай Сергеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nmaschinskiy@mail.ru, тел.: +7(952)363-61-66

Пушко Фёдор Александрович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ICcup.PickNick@mail.ru, тел.: 8(911)179-87-12

- составление последовательности тестовых воздействий и ее дальнейшая корректировка — поиск таких входных воздействий, при которых порожденные ими внутренние сигналы проходят через все компоненты устройства, определяют их исправность и изменяют состояние выходных сигналов объекта контроля;
- моделирование в системе автоматизированного проектирования тестов и анализ полученных результатов — получение временной диаграммы состояний всех внутренних сигнальных линий устройства;
- отладка тестовой программы на установке тестового контроля с использованием заведомо исправного устройства — поиск возможных ошибок, возникающих при разработке программной модели объекта контроля и при построении тестовой последовательности.

Значительную сложность составляет поиск тестовых воздействий для устройств, содержащих элементы с памятью, так как состояние выходных сигналов таких элементов зависит от входных воздействий в предшествующие моменты времени.

Счетчик 1533ИЕ7. В качестве примера элемента с памятью, рассмотрим микросхему 1533ИЕ7 — четырехразрядный двоичный реверсивный счетчик [5].

Режим	Вход							Выход						
	R	\overline{PE}	C_U	C_D	D_0	D_1	D_2	D_3	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	$\overline{TC_U}$	$\overline{TC_D}$
Сброс	1	x	x	0	x	x	x	x	0	0	0	0	1	0
	1	x	x	1	x	x	x	x	0	0	0	0	1	1
Параллельная загрузка	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	x	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Счет на увеличение	0	1	\uparrow	1	x	x	x	x	Счет на увеличение			1	1	
Счет на уменьшение	0	1	1	\uparrow	x	x	x	x	Счет на уменьшение			1	1	

Рис. 1. Режимы работы счетчика ИЕ7

Поясним алгоритмы работы счетчика, проиллюстрированный на рис. 1. Для загрузки в счетчик определенного значения, необходи-

мо подать на информационные входы $D0, D1, D2, D3$ соответствующие сигналы, а на вход записи \overline{PE} подать отрицательный импульс напряжения. Положительный импульс напряжения на входе сброса R устанавливает счетные выходы $Q0, Q1, Q2, Q3$ в состояние «логического 0». Для осуществления прямого счета на вход C_u подаются положительные импульсы, а на вход C_d подается «логическая 1». При достижении в памяти счетчика максимального значения, на выходе прямого переноса $\overline{TC_u}$ появляется отрицательный импульс. Аналогично счетчик работает в режиме обратного счета.

Генерация тестовых воздействий. На рис. 2 представлен фрагмент цифровой схемы, выполненный в среде проектирования AlteraQuartus II [6, 7]. Этот фрагмент содержит комбинационные элементы 1533.ЛЕ1, 1533.ЛЕ3 (выполняют логическую операцию ИЛИ-НЕ) и 15533.ЛА6 (выполняет логическую операцию И-НЕ), а также счетчик 1533.ЛЕ7.

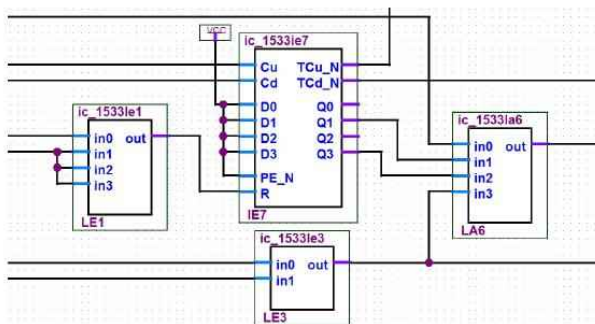


Рис. 2. Фрагмент цифровой схемы в среде проектирования AlteraQuartus II

Выводы (входные и выходные разъемы) элементов и схемы назовем связанными или ассоциированными, если они соединены одной непрерывной сигнальной линией.

Пусть в ходе составления тестовой последовательности потребовалось подать на входы элемента LA6 комбинацию сигналов (0 1 0 1). Для этого необходимо, чтобы связанные с входами элемента LA6 выходные контакты приняли соответствующие значения. Таким образом требуется, чтобы выходы $Q0, Q1, Q2, Q3$ счетчика LE7 приняли

значения $Res = (x\ 1\ x\ 0)$, где x — произвольный сигнал, 0 или 1. Для примера рассмотрим ситуацию, когда в счетчике ИЕ7 хранится значение $Mem = (0\ 1\ 0\ 1)$ (старший бит указан последним).

В [6] подробно представлены шаги работы программы генерации тестовых воздействий для комбинационных элементов. Поэтому остановимся на алгоритме поиска входных сигналов в том случае, когда «путь» к проверяемому элементу проходит через элемент с памятью. Когда от элемента с памятью требуется сформировать на своих выходах определенные сигналы, программа рассматривает режимы работы этого элемента и пытается сформировать минимальную последовательность комбинаций сигналов, приводящую к состоянию выходов элемента из Mem в Res .

В простейшем случае, когда входы счетчика ИЕ7 связаны напрямую со входами схемы или только через комбинационные элементы, можно сразу записывать в память счетчика требуемое значение Res . Но если запись в счетчик запрещена, т. е. информационные входы $D0, D1, D2, D3$ и/или вход записи \overline{PE} подключены к источникам постоянного сигнала (VCC — источник постоянного напряжения высокого уровня), то необходимо оперировать только прямым и обратным счетом, также используя вход сброса R . В такой ситуации неизбежно создание «ненужных» промежуточных комбинаций сигналов, удлиняющих тестовую последовательность.

В рассматриваемом случае есть две оптимальные возможности достижения состояния выходных сигналов $Res = (x\ 1\ x\ 0)$ из хранящегося в счетчике значения $Mem = (0\ 1\ 0\ 1)$. Это значение $Res_1 = (0\ 1\ 0\ 0)$, которое можно получить сбросом выходов счетчика и последующей подачей двух положительных импульсов на входе прямого счета C_u , и значение $Res_2 = (1\ 1\ 1\ 0)$, которое получается при последовательной подаче трех положительных импульсов на входе обратного счета C_d .

Однако программа хранит все способы получения значений, подходящих к Res , ввиду того, что сигналы, необходимые для минимальной последовательности переходов значений счетчика, могут исходить от других элементов с памятью, за счет которых изначально оптимальная для счетчика последовательность сигналов может не быть минимально возможной в конечном итоге. В таком случае программа выберет для счетчика новую последовательность комбинаций сигналов и уже ее будет реализовывать через другие «пути» распространения сигналов к счетчику.

Заключение. Разработана программа автоматизированной генерации тестовых воздействий для цифровых схем с элементами памяти, которая ускоряет процесс формирования тестовой последовательности оператором. Рассмотрен фрагмент схемы со счетчиком 1533ИЕ7. Таким же образом могут программно обрабатываться фрагменты с другими типами счетчиков, разнообразными триггерами и регистрами.

Литература

1. Михайлов А. Н., Гришкин В. М., Мельник В. И., Овсянников Д. А. Методика разработки тест-программ контроля и диагностики цифровых устройств с использованием САПР SimTest // Электроника: Наука, технология, бизнес. 2013. № 128. С. 118–124.
2. Grishkin V., Yelaev Y., Lopatkin G., Mikhailov A., Ovsyannikov D. Interface method of digital devices testing // 10th International Vacuum Electron Sources Conference, IVESC 2014 and 2nd International Conference on Emission Electronics, ICEE 2014 – Proceedings. 2014. P. 1–2.
3. Михайлов А. Н., Мельник В. И., Овсянников Д. А. Тестовый контроль и диагностика радиоэлектронной аппаратуры // Электроника: Наука, технология, бизнес. 2013. № 128. С. 114–117.
4. Елаев Е. В. Интерфейсный метод автоматизированной генерации тестовых воздействий для цифровых радиоэлектронных объектов контроля // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1: Естественные и технические науки. 2015. № 4. С. 19–24.
5. Шило В. Л. Популярныe цифровые микросхемы. М.: Радио и Связь, 1987. 352 с.
6. Гусев О. А., Елаев Е. В., Машинский Н. С., Нуракунов А. Автоматизация генерации тестовых воздействий для комбинационных цифровых схем // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 389–393.
7. Лопаткин Г. С. Подход к автоматизации тестирования электронных цифровых устройств // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 4. С. 90–98.

УДК 004.05

Меньщиков М. А., Лепихин Т. А.

Применение модели MapReduce в архитектуре статического анализатора кода

1. Введение. В современной разработке программного обеспечения важную роль играют средства контроля качества. Одним из таких методов является статический анализ исходного кода, позволяющий проверить программу на предмет различных ошибок без её непосредственного запуска. Такой подход даёт гибкость и полноту исследования возможных путей исполнения.

По мере роста сложности проектов вырастает и их объём, что негативно сказывается на скорости проведения анализа. Один из подходов к решению проблемы обработки больших массивов информации был предложен компанией Google — модель MapReduce [1]. Идея программной модели достаточно проста: при выполнении некоторых условий возможно разбиение данных на несколько фрагментов, их обработка по отдельности и объединение результатов.

В рамках данной работы рассмотрена применимость модели MapReduce для статического анализа кода на языке C и разработанных алгоритмов. Для этого достаточно проверить списочный гомоморфизм функций выделения объектов. Также описана возможная реализация анализатора кода и проведено сравнение результатов с однопоточным вариантом.

2. Программная модель MapReduce. Процедура обработки информации (рис. 1) принимает набор входных пар ключ-значение и создаёт набор выходных пар. Вычисление результатов производится в два основных этапа: отображение (map) и редукция (reduce).

Функция отображения принимает входные данные и производит набор промежуточных пар ключ-значение.

Меньщиков Максим Александрович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: maximmenshchikov@gmail.com, тел.: +7 (921) 766-41-38

Лепихин Тимур Андреевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: t.lepihin@spbu.ru, тел.: +7 (904) 64-88-214

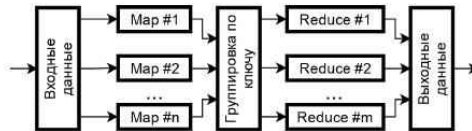


Рис. 1. Модель MapReduce

Промежуточные пары объединяются по ключу в наборы и отправляются в функцию редукции, которая реализует объединение информации и подбор итоговых выходных данных.

Выбор типов данных на каждом этапе целиком и полностью зависит от предпочтений разработчика, но, естественно, типы входов/выходов смежных этапов должны совпадать.

Модель MapReduce позволяет эффективно разделять информацию на фрагменты, которые могут обрабатываться в разных потоках или даже разных узлах кластера. Такой подход, при полной его реализации, даёт использующим его системам *устойчивость к сбоям* (есть возможность назначить задачу на другой, несбойный узел), обеспечивает *локальность данных* (так как узлам можно назначать те задачи, на решение которых у них имеется необходимая часть общей информации), а также вынуждает разработчиков делать алгоритмы *гранулярными*, что является полезным качеством и при балансировке нагрузки в высоконагруженных системах [1].

2.1. Сравнение с другими моделями. Несмотря на многочисленные преимущества, у модели есть и недостатки. Например, долгая инициализация полноценных MapReduce-систем вследствие необходимости планирования задач, синхронизации с другими узлами и сбора информации об этих узлах. Также модель MapReduce едва ли применима для задач с сильной связанностью данных.

Чаще всего используется модель параллельных вычислений Fork/Join (рис. 2). Её недостатками являются низкая масштабируемость (в базовом варианте вычисления вообще нельзя разнести по узлам кластера), необходимость синхронизации доступа к переменным, а также факт выделения системным планировщиком сравнительно малых квантов времени разным потокам и процессам. Последнее немного нивелируется установкой большего приоритета задачи.

MapReduce обладает значительно лучшей масштабируемостью,

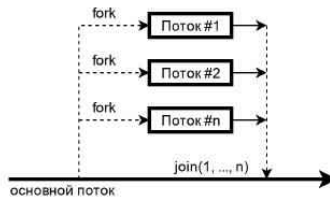


Рис. 2. Модель Fork/Join

но, как показывают исследователи [2] и логические рассуждения, паттерн MapReduce лучше подходит для решения очень больших задач, требующих много времени и памяти для выполнения. Модель Fork/Join лучше обрабатывает небольшие задачи.

Следует отметить, что в разрабатываемом проекте используется гибридная модель вычислений, но основой синтаксико-семантического анализа является именно MapReduce.

3. Обзор литературы. Большинство опубликованных работ по теме статического анализа освещают вопрос проверки MapReduce-программ, но не затрагивают тему распределенности самого анализа.

Статья [3] от Microsoft Research раскрывает некоторые детали реализации распределенного статического анализа, базирующегося на модели акторов по принципу «один метод — один актор». Метод отлично подходит для разбора проектов, состоящих из больших файлов, но он требует как минимум предварительного синтаксического разбора файлов. В статье приведен пример использования алгоритма для составления графа вызовов.

Работа [4] реализует похожую систему *агентов*. Предлагается сначала найти главным агентом точку входа в программу, а затем отправить ему же задачу провести анализ, начиная с точки входа, в то время как второстепенные агенты обрабатывают частные случаи вызовов функций.

В целом по MapReduce-паттерну существует множество статей. Уже упомянутая работа [1] вводит само понятие MapReduce, в [5] дан большой обзор методики. Существуют десятки реализаций алгоритма: проект Hadoop, nVidia CUDA, CouchDB, MongoDB и т. д.

Написано много критических статей о парадигме [6], но есть и большое число исследований, показывающих её эффективность [7, 8].

4. Постановка задачи и её решение. Требуется выполнить синтаксико-семантический разбор кода программных продуктов, используя паттерн MapReduce.

Пусть входными данными для программы будет множество файлов (input) с исходным кодом исследуемого проекта. Синтаксический разбор входных файлов может выполняться любым парсером параллельно.

Рассмотрим шаги анализатора в хронологической последовательности.

4.1. Чтение и разделение входных данных. На данном этапе основной задачей является разделение входных данных. Предлагается разделить их по простейшему принципу: по файлам.

`WorkspaceRunner` обрабатывает входной набор исходных кодов или директивы для компилятора (например, в виде Makefile, проектов или решений интегрированных сред разработки), составляет набор проверяемых файлов и конструирует множество объектов `InputRunner`, каждый из которых разбирает конкретный файл. Заголовочные файлы в полной мере участвуют в препроцессинге.

Каждый обнаруженный файл отправляется в функцию отображения (map) для дальнейшей обработки.

4.2. Отображение (map). На входе этой операции — единица трансляции (Translation Unit, обычно файл с исходным кодом). На выходе — список ресурсов, список фрагментов. Операция выполняется последовательно для каждого объекта.

4.3. Препроцессинг и синтаксический разбор. Входной файл подвергается препроцессингу с целью выполнения директив препроцессора. Это может происходить при помощи готовых средств, например, `cpp` из состава GCC в случае языка C, или Clang [9]. После получения файла, не имеющего внутри директив препроцессора, начинается синтаксический анализ при помощи любого парсера вроде Clang.

4.4. Семантический разбор. После получения абстрактного синтаксического дерева (Abstract Syntax Tree, AST) исходного кода, необходимо выделить из него основные семантические данные. Предлагается произвести обход AST при помощи алгоритма *поиска в глубину* (Depth-First Search) [10].

Целью данного этапа является выделение *ресурсов, фрагментов, выражений* [11].

Определение 1. Ресурс — основная семантическая единица, обозначающая объект, имеющий некоторое название, тип, а также область значения.

Определение 2. Фрагмент исходного кода — некоторая конечная последовательность строк исходного кода, обладающая определенными общими свойствами.

Определение 3. Выражение — любое унарное, бинарное, тернарное действие над операндами-ресурсами или литералами. Также к выражением относятся *утверждения* (statement), вызовы функций и т. д.

Иными словами, фрагменты являются отражением синтаксикологической структуры, ресурсы — обобщением понятий «переменная» или «объект», а выражения составляют область значения ресурсов (одновременно обладая свойством принадлежности к фрагменту).

Данные ресурса можно представить в виде кортежа

$$v = (E_{value}, c_i, c_e, R_m, R_p),$$

где E_{value} — выражения, составляющие область значения ресурса, c_i и c_e — *внутренний* (internal) и *внешний* (external) контексты, соответственно; R_m — члены структурного объекта (или \emptyset , если объект не является таковым); R_p — параметры метода (или \emptyset , если ресурс — не метод).

Отметим, что определение самого ресурса r будет введено далее.

Пусть $u \in U$ — единица компиляции, а R — множество ресурсов. Функцию извлечения списка ресурсов из единицы компиляции можно записать следующим образом:

$$extr : U \rightarrow R. \quad (1)$$

4.5. Редукция (Reduce). На входе и выходе даны список ресурсов и список фрагментов. Операция может выполняться в несколько потоков путем объединения частей результатов на разных исполнителях.

4.6. Редукция ресурсов и проблема выбора ключа. Нивный алгоритм редукции выглядел бы следующим образом:

1. Объединить данные одинаковых ресурсов в один ресурс.
2. Выдать искомый список.

Однако возникают две проблемы. Первая из них — слияние данных одинаковых ресурсов из разных частей результата отображения. Нет необходимости объединять данные локальных переменных, поскольку они не могут быть рассредоточены согласно предложенному определению операции отображения. Глобальные переменные в рамках одного исполняемого файла сливаются по названию. В случае использования контекстуальных структур и классов их необходимо объединять иначе. В [12] предложено объединять разные объекты эквивалентных сложных типов в один. В этом есть резон: обычно сложные типы являются хранилищем некоторой контекстной информации, и имеющиеся в проекте методы работают с ней. Таким образом, композитный ключ ресурса для дальнейшего объединения состоит из названия исходного файла (в случае статических переменных), типа (для всех объектов сложных типов) и названия объекта (для глобальных переменных).

Вернёмся к функции извлечения ресурсов. Природа множества R такова:

$$r = (k, v) \in R,$$

где k — ключ ресурса, а v — значение (сведения о нём).

Положим, что метод $for_each_key(R_1, R_2, f)$ применяет функцию f для каждой пары r_1, r_2 с одинаковым ключом k и возвращает список результатов $R = (K, V)$, или, в случае пустых начальных списков — \emptyset .

Тогда рекурсивная операция объединения двух ресурсов r_1 и r_2 с одинаковым ключом k выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} merge(r_1, r_2) &= (k, merge_data(v_1, v_2)) \\ merge_data(v_1, v_2) &= (E_{value_1} \cup E_{value_2}, \\ &c_{i_1} \vee c_{i_2}, c_{e_1} \vee c_{e_2}, for_each_key(R_{m_1}, R_{m_2}, merge), \\ &for_each_key(R_{p_1}, R_{p_2}, merge)). \end{aligned}$$

4.7. Ассоциативность и коммутативность операции объединения ресурсов. Для доказательства возможности распараллеливания программы, необходимо знать, является ли операция объединения ресурсов ассоциативной и коммутативной.

Операция объединения множеств по определению является ассоциативной.

Побитовое ИЛИ (при слиянии данных контекстов) эквивалентно применению логического ИЛИ для каждой пары битов с одинаковых позиций. Логическое ИЛИ допускает различную группировку операндов по закону ассоциативности дизъюнкции.

Слияние членов структуры и параметров метода выполняется одинаково. В случае отсутствия дочернего ресурса какой-либо категории, итоговое действие равнозначно конкатенации, а при существовании — всей рекурсивно вызываемой операции объединения. Так как количество дочерних ресурсов всегда конечно, то с учётом ассоциативности всех остальных действий данной операции, можно считать и это действие таковым.

Порядок элементов в списках выражений и членов структур ни на что не влияет (на самом деле, порядок членов в структуре важен, но в рамках семантического анализа эту информацию можно уточнить через расширение функциональности списка). Порядок параметров метода важен, но достаточно лишь сохранить порядок ресурсов до операции объединения и восстановить его после. Следовательно, объединение списков полностью коммутативно. Операция дизъюнкции коммутативна по определению.

Значит, операция объединения ресурсов ассоциативна и коммутативна.

4.8. Списочный гомоморфизм операции нахождения ресурсов. Операция выделения списка ресурсов является списочным гомоморфизмом [13], так как на какие бы части ни происходило разделение входных данных, результат останется одинаковым.

Определение 4. Функция h называется списочным гомоморфизмом для бинарного оператора \odot и для всех списков x и y тогда и только тогда, когда

$$h(x \# y) = h(x) \odot h(y).$$

Здесь $\#$ обозначает операцию конкатенации списков.

Таким образом, в нашем примере x, y — списки единиц компиляции, оператор $\#$ означает объединение подобных списков, h — функция выделения ресурсов из входных данных, а оператор \odot отождествляется с операцией слияния списков ресурсов. Перепишем определение гомоморфизма для нашего случая:

$$res(x ++ y) = res(x) \odot res(y).$$

Переопределим функцию *merge* так, чтобы она действовала на множество ресурсов с одинаковым ключом. Пусть оператор \oplus в данном примере отождествляется с *merge_data*. Тогда с учётом ассоциативности *merge_data* и введенного оператора \odot имеем

$$\begin{aligned} merge(r_1, \dots, r_n) &= (k, foldl(\oplus) e [v_1, \dots, v_n]) = \\ &= (k, foldr(\oplus) e [v_1, \dots, v_n]) = \\ &= (k, v_1 \oplus v_2 \oplus \dots \oplus v_n) = r_1 \odot r_2 \odot \dots \odot r_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть e — пустой список ресурсов. Можно сказать, что оператор \odot коммутрует с пустым списком, так как $merge(r_1) = r_1$ согласно (2). Вследствие ассоциативности и коммутативности этой операции, её можно представить в виде редукции:

$$merge = hom(\odot) id e. \quad (3)$$

Тогда функцию выделения ресурсов в целом можно представить в виде композиции редукции (3) и отображения (1):

$$res = hom(\odot) id e \circ map extr.$$

Следовательно, по первой теореме о гомоморфизме [13] функция нахождения ресурсов *res* является списочным гомоморфизмом и, значит, может быть распараллелена.

4.9. Списки фрагментов. При обработке исходного кода фрагментным обходчиком не может быть случая пересечения множеств фрагментов, так как один и тот же метод не может присутствовать в коде программы два раза. Следовательно, полученные в результате работы шар множества можно простейшим образом объединить (\cup).

5. Реализация. Практически идея реализована на языке C++. В качестве синтаксического парсера использован Clang. Общая схема работы приведена на рис. 3.

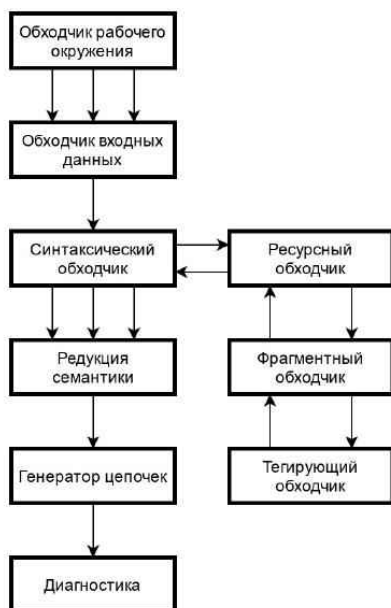


Рис. 3. Схема реализации анализатора

Отображение (map) осуществляется при помощи системы обходчиков в параллельном режиме с использованием OpenMP и MPI. Синтаксический обходчик выполняет обход синтаксического дерева *нерекурсивным* методом поиска в глубину с использованием очереди задач. В частности, обработка простых утверждений происходит сразу, а обработка ветвей, циклов и тел методов ставится в очередь. Редукция производится после завершения всех потоков, занимающихся отображением, и изъятия из них полученной семантической информации. В дальнейшем эти данные отправляются в модули построения путей исполнения и диагностики для непосредственного выявления ошибок.

6. Пример. Фрагменты кода приведены в таблице 1.

Таблица 1. Пример ввода

Файл 1:	Файл 2:	Файл 3:
<pre>int x; int main() { x = 5; }</pre>	<pre>int f() { x = 7; }</pre>	<pre>int h() { if (x == 7) x = 3; f(); }</pre>

Для обработки файлов созданы три потока мар (таблица 2). Для каждого ключа создан свой Reduce (таблица 3).

Таблица 2. Результаты работы мар

Мар 1:	Мар 2:	Мар 3:
Ресурс <i>x</i> : Global. выражение: <i>x</i> =5 Ресурс <i>main</i> : Method. Фрагмент: <i>x</i> =5. выражение: <i>x</i> =5.	Ресурс <i>f</i> : Method. Ресурс <i>x</i> : NonExistent, Global. выражение: <i>x</i> =7 Фрагмент: <i>x</i> =7. выражение: <i>x</i> =7	Ресурс <i>h</i> : Method. Ресурс <i>x</i> : NonExistent, Global. Фрагмент: <i>if (x==7)</i> <i>x</i> =3; сравнение: <i>x</i> ==7 выражение: <i>x</i> =3. Ресурс <i>f</i> : NonExistent, Method. Фрагмент: <i>f()</i> ; выражение: <i>f()</i> ;

Таблица 3. Результаты работы Reduce

Reduce <i>x</i>	Reduce <i>main</i>
Ресурс <i>x</i> : Global. выражение: <i>x</i> =5 выражение: <i>x</i> =3 выражение: <i>x</i> =7	Ресурс <i>main</i> : Method. Фрагмент: <i>x</i> =5. выражение: <i>x</i> =5.
Reduce <i>f</i>	Reduce <i>h</i>
Ресурс <i>f</i> : Method. Фрагмент: <i>x</i> =7. выражение: <i>x</i> =7.	Ресурс <i>h</i> : Method. Фрагмент: <i>if (x==7)</i> <i>x</i> =3; сравнение: <i>x</i> ==7. выражение: <i>x</i> =3.

Как видно из таблицы 3, анализ по модели MapReduce позволяет получить требуемую семантическую модель программы.

7. Тестирование. Для тестирования реализации анализатора были выбраны проекты с высокой сложностью синтаксических конструкций и обширными связями между модулями. В таблице 4 проведены замеры производительности в секундах и вычислено ускорение.

Таблица 4. Результаты тестирования

1 поток	4 потока	Ускорение (раз)
0,267	0,112	2,38
0,304	0,133	2,28
0,925	0,252	3,67
0,356	0,191	1,86
0,125	0,036	3,47

Четырехпоточная модель работает быстрее во всех случаях. Среднее ускорение составляет 2,732.

8. Применение результатов. Одним из итогов данной работы является практическая реализация статического анализатора кода на базе модели MapReduce. Данный продукт может применяться для нахождения логических ошибок в критически важных приложениях. Проведенный анализ применимости модели MapReduce позволяет ускорить процесс синтаксико-семантического разбора кода, что даёт возможность использовать анализ на больших проектах.

9. Заключение. Описана программная модель MapReduce. Подробно рассмотрено приложение данной модели на статический анализ кода, в частности, на разбор семантики программных продуктов. Доказан списочный гомоморфизм операции выделения ресурсов и, как следствие, возможность параллелизации указанной функции. Приведены схема и принципы практической реализации анализатора кода. Проведенное тестирование показало эффективность разработанной реализации модели MapReduce для статического анализа по сравнению с однопоточным аналогом.

Литература

1. Dean J., Ghemawat S. MapReduce: simplified data processing on large clusters // Communications of the ACM. 2008. Vol. 51, No 1. P. 107–113.

2. Stewart R., Singer J. Comparing Fork/Join and MapReduce // Cite-seer, Tech. Rep. 2012.
3. Garbervetsky D., Zoppi E., Ball T., Livshits B. Toward full elasticity in distributed static analysis // Microsoft Research. 2016.
4. Pistoia M., Tripp O., Weisman O. Distributed static analysis of computer software applications: nar. 8984493 США. 2015. 12 p.
5. Lammel R. Google's MapReduce programming model – Revisited // Science of computer programming. 2008. Vol. 70, No 1. P. 1–30.
6. DeWitt D. J., Stonebraker M. MapReduce: A major step backwards. // The Database Column. Vol. 1. 2008.
7. Ranger C. Evaluating MapReduce for multi-core and multiprocessor systems // 13th International Symposium on High Performance Computer Architecture. IEEE, 2007. P. 13–24.
8. Jiang D. The performance of MapReduce: An in-depth study // Proceedings of the VLDB Endowment. 2010. Vol. 3, No 1-2. P. 472–483.
9. Clang: a C language family frontend for LLVM [Электронный ресурс]: URL:<https://clang.llvm.org> (дата обращения: 13.03.2017).
10. Cormen T. H. Introduction to algorithms. 3rd edition. Cambridge, USA: MIT press, 2009. 1312 p.
11. Меньщиков М. А. Нахождение условий гонки в коде на C методом статического анализа // Архив открытого доступа Санкт-Петербургского государственного университета. 2016. 75 с.
12. Engler D., Ashcraft K. RacerX: effective, static detection of race conditions and deadlocks // ACM SIGOPS Operating Systems Review. ACM. 2003. Vol. 37, No 5. P. 237–252.
13. Bird R. S. An introduction to the theory of lists // Logic of programming and calculi of discrete design. Springer Berlin Heidelberg, 1987. P. 5–42.

Моделирование и управление квадрокоптером

1. Введение. Беспилотные летательные аппараты — одна из наиболее популярных и широко используемых тем. Они активно используются для различных целей от развлекательных до исследовательских, например, при работе в местах, опасных для людей [1].

Все беспилотные летательные аппараты можно разделить на два типа:

1. С неподвижным крылом (fixed wing, например, самолеты).
2. С подвижным крылом (rotary wing, например, вертолеты и прочие коптеры).

Основное преимущество аппаратов с подвижным крылом в том, что они способны сесть и взлететь, не используя для этого разгоночную полосу, а также в их способности к зависанию в воздухе.

В свою очередь, аппараты с подвижным крылом различаются по количеству двигателей: одномоторные (single rotor, вертолет), четырехмоторные (quad-rotor, квадрокоптер) и прочие [2].

В данной статье рассмотрено построение управления для квадрокоптера.

2. Построение динамической модели квадрокоптера. Математическая модель или система дифференциальных уравнений необходима для управления квадрокоптером. Однако стоит понимать, что есть множество нелинейных факторов, которые сильно усложнят эту модель [3]. Поэтому наложим следующие условия:

1. Тело коптера неподвижно и симметрично.
2. Моторы неподвижны, т. е. исключается возможность управления с помощью изменения углов тяги.

Нечипорук Антон Алексеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nota26@email.ru, тел.: +7(911)900-84-73

Лепихин Тимур Андреевич — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: t.lepihin@spbu.ru, тел.: +7(904)648-82-14

Щербинин Артем Владимирович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: evarancorp@gmail.com, тел.: +7(999)210-07-26

3. Изменение силы тяжести при удалении от земли незначительно.
4. Начало связанной с коптером системы координат совпадает с его центром тяжести.

Введем две системы координат: связанную с телом коптера (body frame) и связанную с землей (earth frame).

Матрица поворота, связывающая эти две системы, может быть получена с помощью углов Эйлера:

$$R_{EB} = R_\psi R_\phi R_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta C_\psi & C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - C_\psi S_\phi \\ C_\theta S_\psi & S_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix},$$

где C и S — тригонометрические функции косинуса и синуса соответственно, а углы ψ — рысканье (yaw), θ — тангаж (pitch), ϕ — крен (roll).

В связанной с телом квадрокоптера системе координат, благодаря матрице поворота, силы могут быть представлены следующим образом:

$$F_B = \begin{bmatrix} F_{xB} \\ F_{yB} \\ F_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}.$$

Итак, для земной системы координат:

$$F_E = \begin{bmatrix} F_{xE} \\ F_{yE} \\ F_{zE} \end{bmatrix} = R_{EB} F_B = \begin{bmatrix} C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi \\ C_\phi S_\theta S_\psi - C_\psi S_\phi \\ C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i.$$

Далее, используя законы Ньютона, построим уравнение движения коптера относительно земной системы координат:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xE} - K_{fx} \dot{x} \\ F_{yE} - K_{fy} \dot{y} \\ F_{zE} - K_{fz} \dot{z} - mg \end{bmatrix},$$

где K_{fx} , K_{fy} , K_{fz} — коэффициенты сопротивления, которыми можно пренебречь при малых скоростях.

Рассмотрим теперь вращательное движение квадрокоптера также с использованием ньютоновских законов:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{l(K_l(\omega_3^2 - \omega_1^2))}{I_y}, \\ \ddot{\phi} &= \frac{l(K_l(\omega_4^2 - \omega_2^2))}{I_x}, \\ \ddot{\psi} &= \frac{l(K_d(\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_4^2))}{I_z},\end{aligned}$$

где l — расстояние от центра мотора до центра тяжести квадрокоптера, K_l , K_d — коэффициенты подъемной силы (lift) и аэродинамического сопротивления (drag) соответственно, I_x , I_y , I_z — моменты инерции квадрокоптера, ω_i — угловые скорости моторов.

Объединив вращательное и поступательное движения, получим динамическую модель квадрокоптера:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)u_1 - K_{fx}\dot{x}}{m}, \\ \ddot{y} = \frac{(\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi)u_1 - K_{fy}\dot{y}}{m}, \\ \ddot{z} = \frac{(\cos \phi \cos \theta)u_1 - K_{fz}\dot{z}}{m} - g, \\ \ddot{\phi} = \frac{l(u_2 - K_l\dot{\phi})}{I_x}, \\ \ddot{\theta} = \frac{l(u_3 - K_l\dot{\theta})}{I_y}, \\ \ddot{\psi} = \frac{l(u_4 - K_d\dot{\psi})}{I_z}, \end{cases}$$

где u_i , $i = 1, \dots, 4$ — управления, подающиеся на вход данной модели, выраженные следующим образом:

$$\begin{cases} u_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4, \\ u_2 = F_4 - F_2, \\ u_3 = F_3 - F_1, \\ u_4 = F_1 + F_3 - F_2 - F_4. \end{cases}$$

3. Построение системы управления. Рассмотрим построение управления квадрокоптером с помощью PID-регулятора, общий вид которого следующий:

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt},$$

где e — ошибка, K_p , K_I , K_D — пропорциональный, интегральный и дифференциальный коэффициенты соответственно.

Весь процесс управления можно разделить на две части: контроль высоты и контроль положения. Высоту квадрокоптера обозначим через α [4].

3.1. Контроль высоты. Управление, необходимое для достижения этой высоты α_d , имеет вид

$$U_1 = \frac{K_{p1}(\alpha_d - \alpha) + K_{I1} \int_0^t (\alpha_d - \alpha) + K_{D1}(\dot{\alpha}_d - \dot{\alpha})}{\cos \theta \cos \phi}.$$

3.2. Контроль положения. Контроль положения осуществляется по оси x и y и, соответственно, через углы тангажа и крена. Таким образом,

$$U_2 = K_{p2}(\phi_d - \phi) + K_{I2} \int_0^t (\phi_d - \phi) + K_{D2}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}).$$

Аналогично

$$U_3 = K_{p3}(\theta_d - \theta) + K_{I3} \int_0^t (\theta_d - \theta) + K_{D3}(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}).$$

Необходимые углы тангажа и крена могут быть выражены следующим образом через желаемое положение по координатам x и y :

$$\phi_d = \arcsin(K_p(y_d - y) + K_I \int_0^t (y_d - y) + K_D(\dot{y}_d - \dot{y})),$$

$$\theta_d = \arcsin(K_p(x_d - x) + K_I \int_0^t (x_d - x) + K_D(\dot{x}_d - \dot{x})).$$

Управление углом рыскания

$$U_4 = K_{p4}(\psi_d - \psi) + K_{I4} \int_0^t (\psi_d - \psi) + K_{D4}(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}).$$

4. Экспериментальная часть. Квадрокоптер обладает характеристиками, представленными в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики квадрокоптера

Параметр	Значение
Общая масса (m)	3
Длина плеча (l)	0,2
Коэффициент аэродинамического сопротивления (K_d)	1,5
Коэффициент подъемной силы (K_l)	6

Экспериментально найдены коэффициенты PID-регулятора (см. таблицу 2).

Таблица 2. Коэффициенты PID

Коэффициент	Значение	Коэффициент	Значение
K_{p1}	20	K_{p2}	2
K_{I1}	13,4	K_{I2}	0,4
K_{D1}	8	K_{D2}	2,5
K_{p3}	0,8	K_{p4}	1
K_{I3}	0,1	K_{I4}	0
K_{D3}	1,6	K_{D4}	0
K_p	0,001	K_D	0,01

Математическая модель квадрокоптера построена в Simulink.

На рис. 1 показан вертикальный взлет с зависанием на заданной высоте. Все маневры квадрокоптера проводились на данной высоте. На рис. 2, 3 показаны наклоны на желаемые углы по крену и тангажу. На рис. 4 показан поворот на желаемый угол рыскания.

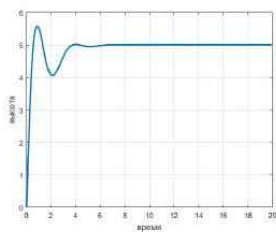


Рис. 1. Взлет

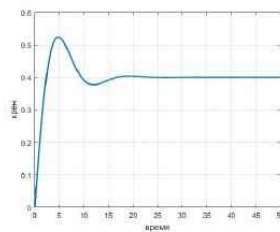


Рис. 2. Крен

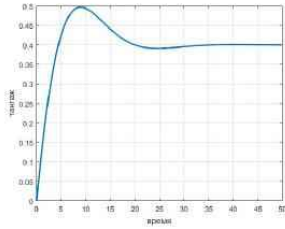


Рис. 3. Тангаж

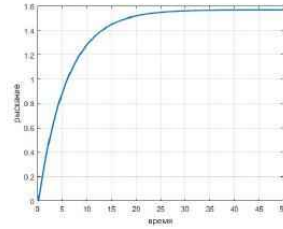


Рис. 4. Рыскание

На рис. 5 изображено движение квадрокоптера по заданной круговой траектории. На входы x , y подаются функции синуса и косинуса соответственно.

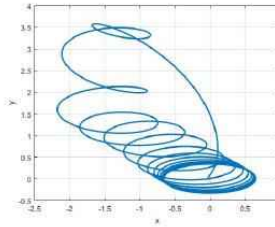


Рис. 5.

Движение по траектории

5. Заключение. Представлена математическая модель квадрокоптера, а также построен PID-регулятор для решения задач стабилизации и следования квадрокоптером заданной траектории.

Литература

1. Changlong Liu, Jian Pan, Yufang Chang PID and LQR trajectory tracking control for an unmanned quadrotor helicopter: Experimental Studies // 35th Chinese Control Conference. 2016. P. 10845–10850.
2. Alastair K. Cooke Modelling of the Flight Dynamics of a Quadrotor Helicopter. Cranfield: 2007. 289 p.
3. Min B. C., Cho C. H., Choi K. M., Kim D. H. Development of a micro quad-rotor UAV for monitoring an indoor environment // Advances in Robotics. 2009. P. 262–271.
4. Zavadskiy S., Sharovatova D. Improvement of quadrocopter command performance system // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov. 2015. P. 609–610.

УДК 004.912

Огурцова А. С.

Кластеризация русскоязычных новостных текстов с помощью графовых алгоритмов

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Малиншой М. А.*

1. Введение. Несмотря на актуальность задачи кластеризации данных, на сегодняшний день она окончательно не решена. Существующие алгоритмы [1] имеют множество недостатков, большинство которых связаны с наличием априорных знаний о входных данных. Таким образом, универсального алгоритма, позволяющего решать задачи такого плана, не существует. В качестве априорных данных большинство алгоритмов требуют в качестве параметров число кластеров, которое должно быть получено в результате. В действительности, количество кластеров, как правило, неизвестно. Наиболее широким классом, не требующим задания предполагаемого количества кластеров, является класс графовых алгоритмов.

Данные алгоритмы предполагают представление исходных данных в виде графа $G = (V, E)$, вершинами которого являются объекты, а ребра имеют вес, равный расстоянию между ними. В данной статье задача кластеризации данных решается с помощью графовых алгоритмов кластеризации, основанных на случайных блужданиях.

2. Постановка задачи. В настоящее время количество новостных ресурсов постоянно увеличивается. Находить информацию по интересующим вопросам, с точки зрения затраченного времени, становится все труднее. Поэтому было бы разумно каким-то образом автоматизировать разбиение новостей по группам, соответствующим одному событию. Такую задачу распределения множества объектов на группы, внутри которых собраны похожие объекты, называют задачей кластеризации.

В качестве способов решения поставленной задачи в статье используются графические алгоритмы кластеризации walktrap и infomap. Выбор упомянутых методов обоснован тем, что лексика,

Огурцова Анастасия Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: anastasia.7195@gmail.com, тел.: +7(981)711-27-51.

используемая в новостных текстах, не отличается разнообразием, что затрудняет процесс разделения на кластеры. В результате чего в группы объединяются тексты, имеющие в исходной выборке порядковые номера, идущие друг за другом. Поэтому предполагается, что процесс случайного блуждания позволит объединять в кластеры объекты вне зависимости от их расположения.

3. Метод Walktrap [2]. Граф G ассоциируем с его матрицей смежности A : $A_{ij} = 1$, если вершины i и j имеют смежное ребро, в противном случае $A_{ij} = 0$. Степенью вершины i будем называть величину $d_i = \sum_j A_{ij}$.

В алгоритме Walktrap используется идея случайных блужданий на графе. На каждом шаге процесса блуждающий объект находится в вершине, из которой он равновероятным образом перемещается в соседние вершины. Последовательность таких посещений вершин составляет цепь Маркова. На каждом шаге вероятность перехода из вершины i в вершину j будет равна $P_{ij} = \frac{A_{ij}}{d_i}$. Матрицу P можно представить в виде $P = D^{-1}A$, где D — матрица, на диагонали которой стоят степени вершин. Вероятность перехода из вершины i в вершину j за t шагов можно вычислить как P_{ij}^t .

Для того, чтобы сгруппировать вершины, необходимо определить способ сравнения близости вершин. Считается, что если расстояние между двумя вершинами велико, то они принадлежат различным сообществам, иначе являются членами одного. Определим расстояние между вершинами как

$$r_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(P_{ik}^t - P_{jk}^t)^2}{d_k}} = \| D^{-\frac{1}{2}} P_{i\bullet}^t - D^{-\frac{1}{2}} P_{j\bullet}^t \|,$$

где $\| \bullet \|$ — евклидова норма, а $P_{i\bullet}^t$ — вектор столбец, в j -й позиции которого стоит значение P_{ij}^t .

Теперь определим расстояние между сообществами. Пусть сообщества C_1 и $C_2 \in V$, тогда расстояние между ними

$$r_{C_1 C_2} = \| D^{-\frac{1}{2}} P_{C_1 \bullet}^t - D^{-\frac{1}{2}} P_{C_2 \bullet}^t \| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(P_{C_1 k}^t - P_{C_2 k}^t)^2}{d_k}},$$

где $P_{C_j}^t = \frac{1}{|C_j|} \sum_{i \in C_j} P_{ij}^t$, а $P_{C \bullet}^t$ — вектор из вероятностей $P_{C_j}^t$.

Теперь, когда метрика определена, задача выделения сообществ сведена к задаче кластеризации вершин.

Укажем алгоритм объединения вершин в кластеры.

1. Определение начального разбиения $P_1 = \{\{v\}, v \in V\}$, в котором каждая вершина содержится в своем кластере.
2. Вычисление расстояния между всеми смежными вершинами.
3. На каждом шаге k необходимо:
 - (a) выбрать два сообщества C_1 и C_2 из P_k по критерию, основанному на метрике, которая будет описана ниже;
 - (b) объединить эти сообщества в одно новое $C_3 = C_1 \cup C_2$ и соответствующим образом преобразовать P_k в P_{k+1} ;
 - (c) обновить расстояния между сообществами.

На $(n-1)$ -м шаге получим $P_n = \{V\}$ и алгоритм завершается. Таким образом получена дендрограмма для вершин графа, т. е. дерево, показывающее порядок объединения вершин в кластеры.

Объединение сообществ происходит следующим образом: рассматриваются только те пары сообществ C_1 и C_2 , которые инцидентны друг другу. На каждом шаге k два сообщества объединяются так, чтобы квадрат расстояния между каждой вершиной и их сообществом был минимальным. Эта задача эквивалентна поиску C_1 и C_2 , минимизирующих величину

$$\Delta\sigma(C_1, C_2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in C_3} r_{iC_3}^2 - \sum_{i \in C_1} r_{iC_1}^2 - \sum_{i \in C_2} r_{iC_2}^2 \right) \rightarrow \min_{C_1, C_2}.$$

4. Метод Infomap [3]. Как и предыдущий алгоритм, Infomap использует механизм случайных блужданий. Здесь задача кластеризации определяется как задача кодирования пути, который пройдет блуждающий элемент, длину которого пытаются минимизировать.

Каждое сообщество, а также каждая вершина в нем имеют свой уникальный бинарный код. Также есть дополнительный код выхода из сообщества, не совпадающий с кодами вершин в этом сообществе. При попадании в другое сообщество записывается его код и внутренний код вершины, в которую попал объект. При переходах внутри сообщества записываются внутренние коды вершин. Если осуществляется переход в другое сообщество пишется код выхода из данного сообщества и код нового. Для каждого уровня кодирования используются коды Хаффмана [4], где среднее описание длины одного перехода

$$L(M) = qH(C) + \sum_{i=1}^m p^i H(C_i),$$

где q — вероятность покинуть какое-либо сообщество на любом шаге, $H(C)$ — энтропия кодов сообществ, $H(C_i)$ — энтропия кодов внутри сообщества C_i , вес p^i — это доля перемещений внутри сообщества C_i сложенная с вероятностью покинуть сообщество. Матрица P , описанная в предыдущем методе, позволяет вычислять вероятность посещения той или иной вершины. С использованием этой информации происходит жадная оптимизация функционала $L(M)$.

5. Подготовка данных. Кластеризацию будем проводить для текстов русскоязычных новостных лент. В качестве тестовой выборки взяты новостные тексты с портала lenta.ru. Для получения более объективной картины рассмотрим работу выбранных методов на данных, прошедших стемминг и лемматизацию. Для первого будем использовать `RussianStemmer` из библиотеки `nlTK.stem.snowball` [5]. А для приведения слов к нормальной форме используем библиотеку `ru morphology2` [6]. Затем представим данные в виде матрицы *tf-idf*, строки которой соответствуют номеру документа, а столбцы — терминам, входящим во все документы. Учёт *idf* позволит уменьшить вес широко употребляемых слов. Теперь, когда каждый документ представляет собой строку матрицы, найдем расстояния между ними. Поскольку новостные тексты не отличаются разнообразием употребляемых слов, то расстояние, определяемое по евклидовой метрике, между всеми документами будет примерно одинаковым. Поэтому вместо евклидового расстояния было выбрано расстояние Чебышева: $(x, x') = \max(|x_i - x'_i|)$. Теперь данные готовы к кластеризации. Для представления данных в виде графа использо-

вался пакет python-igraph [7].

6. Анализ полученных результатов. Поскольку истинного разбиения на сообщества мы не имеем, то для оценки качества кластеризации используем значение функционала модулярности

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - \frac{d_i d_j}{2m} \right) \delta(C_i, C_j),$$

здесь $\delta(C_i, C_j) = 1$, если $C_i = C_j$, иначе $\delta(C_i, C_j) = 0$.

Значение модулярности равно разности между долей ребер внутри сообщества и ожидаемой долей связей, если бы ребра были размешены случайно. Чем больше значение модулярности, тем лучше алгоритм справился с кластеризацией. Недостатком данного способа оценки результатов является то, что функционал не учитывает масштаба данных, в результате чего маленькие сообщества могут быть не учтены при оценивании. В таблице представлен результат сравнения описанных выше методов. Для алгоритма Walktrap в качестве полученных кластеров взят срез первого уровня полученной дендрограммы.

Таблица. Результаты

	Walktrap				Infomap			
	31	298	31	298	31	298	31	298
Количество документов								
Значение модулярности	-0,03 1425	-0,00 3337	-0,03 5708	-0,00 3343	-0,03 1078	-0,00 3344	-0,03 5239	-0,00 3355
Количество кластеров	23	148	20	191	15	149	28	297
	стемминг		лемматизация		стемминг		лемматизация	

Как видно из таблицы, для малых данных лучший результат модулярности показали Infomap со стеммингом, а для данных большего размера Walktrap совместно со стеммингом. Тем не менее результаты со стеммингом и лемматизацией несущественно отличаются друг от друга. С другой стороны, не стоит забывать о таком параметре как количество выделенных кластеров. Результаты, в которых количество кластеров сравнимо с количеством исходных документов, нельзя считать приемлемыми. В целом оба алгоритма дают одинако-

вые результаты. Однако, оба метода показывают несколько худший результат по сравнению с общепользуемым алгоритмом k-means.

7. Заключение. Рассмотрены два метода кластеризации на графах, основанных на процессе случайного блуждания, и проведено их сравнение. Оба метода показали сравнимые результаты. Однако следует отметить, что для маленького объема данных лучше использовать Infomap, на большом же наборе данных лучше себя показывает алгоритм Walktrap. Для более точной оценки качества кластеризации можно использовать улучшенный функционал модулярности [8].

Литература

1. Jain A., Murty M., Flynn P. Data Clustering // ACM Computing Surveys. 1999. Vol. 31, No 3. P. 264–323.
2. Pons P., Latapy M. Computing communities in large networks using random walks // Computer and Information Sciences-ISCIS. 2005. P. 284–293.
3. Rosvall M., Axelsson D., Bergstrom C. T. The map equation // The European Physical Journal Special Topics. 2009. Vol. 178, No 1. P. 13–23.
4. Левитин А. В. Жадные методы: Алгоритм Хаффмана // Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. С. 392–398.
5. Библиотека NLTK [Электронный ресурс]: URL:<http://www.nltk.org/api/nltk.stem.html> (дата обращения: 14.03.17).
6. Библиотека rumorphy2 [Электронный ресурс]: URL:<https://rumorphy2.readthedocs.io/en/latest/> (дата обращения: 14.03.17).
7. igraph library [Электронный ресурс]: URL:<http://igraph.org/python/> (дата обращения: 14.03.17).
8. Le Martelot E., Hankin C. Fast multi-scale detection of relevant communities in large-scale networks // The Computer Journal 2013. Vol. 56, No 9. P. 1136–1150.

УДК 519.172

Павлов И. Н.

Нерекурсивный алгоритм построения независимого контура

Рекомендовано к публикации профессором Карповым А. Г.

1. Введение. Построение математической модели системы с помощью теории графов требует составления либо системы уравнений независимых контуров, либо системы уравнений отсечений [1]. Получив одну из этих систем, можно перейти к другой с помощью соотношения $\mathbf{CD}^T = \mathbf{0}$, где \mathbf{C} — матрица системы уравнений независимых контуров, а \mathbf{D} — матрица системы уравнений отсечений. Из определения отсечения следует, что построить систему уравнений отсечений можно только с помощью полного перебора всевозможных разбиений множества вершин дерева графа, что весьма трудноемко при компьютерной реализации. Иначе обстоит дело с построением независимых контуров и составлением соответствующей системы уравнений, поскольку существует множество алгоритмов построения пути из одной вершины графа в другую. Однако большинство из них работает со взвешенными неориентированными графами, что заставляет выполнять лишние операции с матрицей смежности графа. Кроме того, большинство алгоритмов работают рекурсивно, что при программной реализации уменьшает производительность, а при больших графах приводит к переполнению стека вызовов функций [2]. В данной работе предлагается алгоритм построения независимого контура, основанный на нерекурсивном поиске в глубину [3].

2. Нерекурсивный алгоритм построения независимого контура. Как известно, для составления системы уравнений независимых контуров необходимо сначала построить дерево графа, чтобы для каждой полученной хорды построить независимый контур. Поэтому входной информацией для предложенного алгоритма является матрица смежности дерева графа, а также начальная и конечная вершины хорды, для которой и строится независимый контур.

Павлов Илья Николаевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gnupinguin@yahoo.com, тел.: +7(999)529-16-32

Результатом работы алгоритма будет последовательность вершин, входящих в построенный независимый контур, для которого составляется соответствующее уравнение.

2.1. Обозначения и определения. Введем ряд обозначений, которые будем использовать для описания алгоритма. Пусть \mathbf{V} — множество вершин графа, v_{start} и v_{end} — начальная и конечная вершины поиска. Дерево задается матрицей смежности \mathbf{A} , с элементами a_{ij} . Во время выполнения алгоритма для хранения рассмотренных вершин будем использовать стек S с головой S_{top} . Через $color$ обозначим массив длины $|\mathbf{V}|$, каждая ячейка которого содержит цвет вершины с номером, равным номеру ячейки. Каждая вершина может быть окрашена в белый (*WHITE*), черный (*BLACK*) и красный (*RED*) цвета. Изначально все вершины дерева окрашены в белый цвет. Под *опорной вершиной* дерева будем понимать вершину, с которой необходимо начинать каждый следующий проход алгоритма. Эта вершина окрашивается в красный цвет.

2.2. Алгоритм. Укажем основные этапы алгоритма.

1. Инициализация.
 - (a) $v := v_{start}$,
 - (b) $S := \{v\}$,
 - (c) $color[v] := RED$.
2. Начало цикла обработки текущей вершины.
 - (a) $color[v] \neq RED$? Если да, то перейти к шагу 3; если нет, перейти к шагу 4.
3. Удаление рассмотренной вершины.
 - (a) $v := S_{top}$,
 - (b) $S := S \setminus \{v\}$,
 - (c) Перейти к шагу 2.
4. Пометить опорную вершину как рассмотренную.
 - (a) $color[v] := BLACK$,
 - (b) Перейти к шагу 5.
5. Проверка достижения конечной вершины.
 - (a) $v = v_{end}$? Если да, то перейти к шагу 7; иначе перейти к шагу 6.

6. Раскрасить опорные вершины.
 - (a) $R := \{\forall u \in V : color[u] = WHITE, a_{vu} \neq 0\}$,
 - (b) $S := S \cup R$,
 - (c) $\forall u \in R \Rightarrow color[u] := RED$,
 - (d) Перейти к шагу 2.
7. Выделение искомой последовательности вершин.
 - (a) $S := S \setminus \{u : u \in V, color[u] = RED\}$,
 - (b) Перейти к шагу 8.
8. Конец.
 - (a) Окончание выполнения алгоритма. S — искомая последовательность вершин независимого контура.

3. Обсуждение. Как упоминалось ранее, предложенный алгоритм основан на алгоритме поиска в глубину (DFS), поэтому нетрудно видеть, что скорость его работы пропорциональна $O(m + n)$, где m — число ребер, а n — число вершин.

Заметим, что данный алгоритм можно улучшить, учитывая условия задачи. Одна из идей улучшения основана на том, что если конечная вершина хорды является так называемой «висячей» вершиной, то указатель на конечную вершину можно переместить на смежную вершину. Более того, специфика, например, электрических цепей такова [4], что очень часто в дереве может существовать последовательное соединение ребер, каждая вершина которых имеет степень 2, кроме начальной и конечной вершин цепи. Для такого случая можно сместить указатель окончания поиска v_{end} на вершину начала такой последовательности, предварительно запомнив последовательность вершин этой цепи. Так, если для графа на рис. 1 необходимо построить независимый контур для хорды (4, 7), то вершины 2, 1, 5, 6, 7 образуют висячую цепь, поэтому указатель на конечную вершину можно переместить с 7 на 2. Процедуру переноса указателя на конечную вершину необходимо провести сразу после шага инициализации. Стоит отметить, что в простейшем случае, ко-

гда каждая вершина дерева имеет степень 2, за исключением двух вершин степени 1, данная процедура перенесет указатель конечной вершины на начальную вершину, тем самым построив независимый контур.

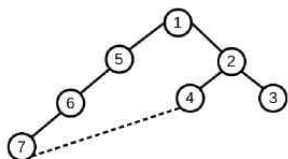


Рис. 1. Пример «висячей» цепи.

Другая идея улучшения состоит в том, что более быстрого поиска пути к конечной вершине можно было бы достигнуть, переходя на шаг 5 не из шага 4, а выполняя шаг 5 при каждом выполнении шага 6(a), при нахождении очередной смежной белой вершины.

Указанные улучшения могут существенно ускорить поиск конечной вершины при большой «ветвистости» дерева (при высоких степенях вершин дерева). В самом неблагоприятном случае скорость алгоритма останется прежней.

4. Заключение. Предложен и реализован алгоритм построения независимого контура, который устойчив к переполнению стека вызовов функций при программной реализации. Кроме того, данный алгоритм учитывает особенности поставленной задачи, что позволяет улучшить производительность программы.

Литература

1. Львович А. Ю. Основы электромеханических систем. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. 196 с.
2. Кормен Томас Х., Лейзерсон Чарльз И., Ривест Рональд Л., Штайн Клиффорд. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.
3. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 455 с.
4. Корис Р., Шмидт-Вальтер Х. Справочник инженера-схемотехника. М.: Техносфера, 2008. 608 с.

УДК 004.89

Павлов Ю. А.

Построение алгоритма распознавания речевых команд

Рекомендовано к публикации доцентом Козыменко В. А.

1. Введение. Распознавание речи в настоящее время используется в различных областях, в том числе такими компаниями как Google, Яндекс, ЦРТ и другие. С развитием искусственных нейронных сетей и возрастанием вычислительных мощностей компьютеров наблюдается развитие алгоритмов распознавания речи и расширение области их применения.

В данной работе рассматривается отдельный класс задач распознавания речи — распознавание речевых команд. Для распознавания речевых команд возможно использование сверточных нейронных сетей. В работе предлагается нейросетевой алгоритм обработки речевых команд, основанный на использовании сверточных нейронных сетей.

2. Постановка задачи. Задачу распознавания речевых команд сформулируем как задачу классификации.

Пусть X — множество объектов (аудиофайлы с командами), Y — конечное множество классов (множество команд). Существует *целевая зависимость* — отображение $y^* : X \rightarrow Y$, значения которой известны только на объектах конечной обучающей выборки $X^m = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$. Требуется построить алгоритм $a : X \rightarrow Y$, способный классифицировать произвольный объект $x \in X$.

3. Описание предобработки. Аналого-цифровая запись звукового сигнала подразумевает запись частотных колебаний с заданной частотой и глубиной дискретизации. На запись входного сигнала влияют такие составляющие, как величина и напряжение тока на записывающем устройстве, зашумленное помещение и другие. С

Павлов Юрий Андреевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: wl.sh.pavlov@gmail.com, тел.: +7(911)150-62-86

целью формирования входных данных для системы распознавания используется предобработка сигнала.

4. Удаление постоянной составляющей. Постоянная составляющая DC-offset — смещение сигнала на постоянную величину. Она возникает в аналого-цифровой записи, когда на входе к переменному сигналу добавляется постоянная величина напряжения. При больших смещениях в записи появляются щелчки. Удаление постоянной составляющей производится вычитанием усредненного значения сигнала из каждого отсчета.

5. Выделение начальной-конечной точки слова. Поиск точек начала и конца команды производится по алгоритму Рабинера — Ламель, который использует две основные характеристики речевого сигнала: мгновенную энергию сигнала и число переходов сигнала через ноль [1].

6. Выделение речевых признаков. В настоящее время существует множество алгоритмов выделения речевых признаков. Нами был выбран алгоритм мел-частотных центральные коэффициенты (Mel Frequency Cepstral Coefficients — MFCC) [2].

7. Описание входных данных. Входные данные представлены файлом с записанной командой в формате .wave и входными параметрами: 44100 Гц — частота дискретизации, mono-channel — моно канал записи. Речь записывалась одним диктором.

Входные данные пропускались через реализованную функцию предобработки и выделения признаков. Множество обучающих данных представляет собой файл формата .csv, содержащий нумерацию примеров, матрицы признаков (размером 99×13), лейблы примеров (маркировка принадлежности к определенному классу).

Количество примеров на вход составило 350 примеров тренировоч-

вочного множества (по 35 примеров на каждый класс) и 150 примеров тестового множества (15 примеров на каждый класс).

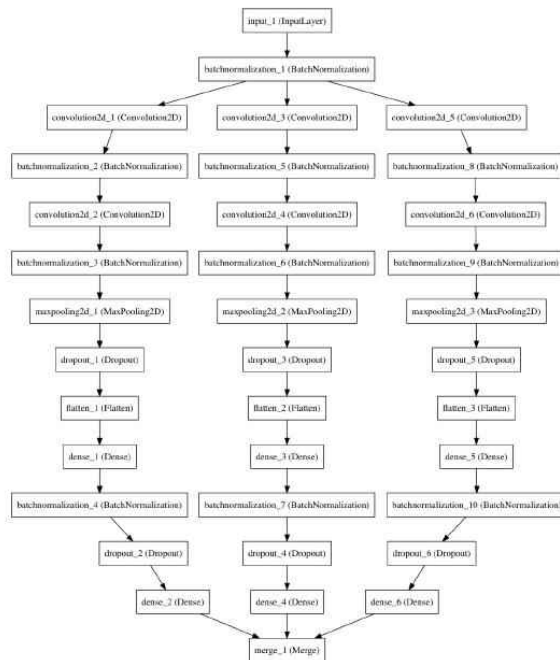


Рис. 1. Общая архитектура нейронной сети

8. Описание архитектуры сверточной нейронной сети.

Рассмотрим предложенную архитектуру ансамбля сверточных нейронных сетей.

8.1. Краткое описание. Сверточная нейронная сеть — тип многослойной нейронной сети прямого распространения [3]. Она объединяет в себе две ключевые идеи, которые обеспечивают инвариантность сети к небольшим сдвигам, изменениям масштаба и искажениям: локальные рецептивные поля и общие веса. Входной слой состоит

из одной плоскости, его размерность совпадает с размерностью входных данных. Последующие слои являются сверточными и состоят из нескольких плоскостей нейронов, называемых картами признаков. Каждый нейрон сверточного слоя соединен с небольшой подобластью предыдущего слоя (локальное рецептивное поле). Последние слои сети являются полносвязными и представляют собой обычную сеть прямого распространения (многослойный перцептрон).

8.2. Описание входных и выходных данных нейронной модели. На вход модели поступает файл, содержащий матрицы коэффициентов (размерность 99×13) и лейблы примеров. На вход сети поступает обучающий массив в формате (количество примеров, лейбл, матрица коэффициентов) или $(350, 1, (99, 13))$ соответственно. Размерность тестового массива отличается только количеством примеров.

В качестве функции потерь использовалась функция категориальной кросс-энтропии. На выходе из модели получено значение целевой функции и процент правильно распознанных тестовых примеров.

8.3. Архитектура. Из рис. 1 видно, что архитектура представляет собой ансамбль трех сверточных нейронных сетей, по пять слоев каждая. Применена нормализация батчей [4], использован подход dropout [5]. Объединение ансамбля вычисляется как среднее по всем подсетям.

9. Заключение. Создан программный комплекс, включающий в себя реализацию описанных в данной работе подходов и моделей. Проведены эксперименты на различных параметрах модели сверточной нейронной сети. Применены такие подходы оптимизации нейронных сетей, как нормализация батчей, регуляризация весовых коэффициентов, dropout.

В целях повышения производительности обучение модели проводилось на графическом процессоре с использованием технологии Nvidia CUDA. Точность полученной модели составляет 91,17%. В качестве дальнейшего совершенствования модели можно выделить программное устранение шумов входного сигнала, модификацию алгоритма предобработки, повышение глубины предложенной архитектуры нейронной сети.

Литература

1. Тищенко И. П., Котомин А. В. Предобработка звукового сигнала в системе распознавания речевых команд // Труды Молодежной конференции «Научно-технические информационные технологии», УГП им. А. К. Айламазяна. Переславль-Залесский, 2011. С. 25–38.
2. MFCC tutorial [Электронный ресурс]: URL:<http://www.practicalcryptography.com/miscellaneous/machine-learning/guide-mel-frequency-cepstral-coefficients-mfccs/> (дата обращения: 15.02.2017).
3. Matsugu M., Mori K., Mitari Y., Kaneda Y. Subject independent facial expression recognition with robust face detection using a convolutional neural network // Neural Networks. 2003. No 16. P. 555–559.
4. Ioffe S., Szegedy C. Batch normalization: accelerating deep network training by reducing internal covariate shift // arXiv:1502.03167v3. 2015.
5. Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Sutskever I., Salakhutdinov R. Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting // Journal of Machine Learning Research. 2014. Vol. 15. P. 1929–1958

УДК 004.932.2

Пенкрат А. О.

Методы стереозрения. Модификация алгоритма AD-Census

Рекомендовано к публикации доцентом Гришкиным В. М.

1. Постановка задачи. Задача стереозрения заключается в нахождении пиксельного расстояния (далее диспаратета) между проекциями точки на матрицы стереокамеры с целью вычисления карты глубины.

2. Основные подходы. В зависимости от конечной цели в стереозрении могут применяться различные подходы.

Для задачи распознавания жестов и некоторых других может быть достаточно «неплохой» карты диспаратетов. Такую карту чаще всего получают методами, основанными на ключевых точках.

Более широкое применение и развитие имеют алгоритмы получения «сплошной» карты, покрывающей всё изображение. Такие методы, в свою очередь, традиционно делятся на локальные и глобальные.

Локальный алгоритм стереозрения — это алгоритм, в котором для сопоставления точек на правом и левом изображениях стереокамеры используются только определённые окрестности этих точек.

В глобальных же алгоритмах диспаратет каждого пикселя определяется изображениями целиком. Обычно это достигается построением и глобальной минимизацией так называемой «энергетической функции».

Основным предметом статьи будут локальные алгоритмы, как наиболее применимые в задачах реального времени.

3. Общая схема. Исследователи часто делят алгоритмы стереозрения на следующие четыре шага [1]:

1. Подсчёт цен соответствия точек.
2. Агрегация цен.

Пенкрат Андрей Олегович — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: penkrat8@gmail.com, тел.: +7(931)287-86-09

3. Вычисление диспаритетов.
4. Уточнение диспаритетов.

4. Методы оценки. Для оценки качества алгоритмов будем использовать бенчмарк Middlebury с тренировочным набором данных, представляющим собой набор ректифицированных стереоснимков различных сцен в трёх разрешениях и с точными результатами (полученными с помощью структурированного света) для сравнения [2]. Основными показателями является количество ошибочных пикселей и средняя ошибка.

5. AD-Census. В 2011 году группа учёных из Китая представила локальный алгоритм стереозрения [3], занявший первую позицию в бенчмарке Middlebury. Алгоритм основывается на метрике схожести AD-Census, крестовой агрегации и полуглобальной оптимизации цен.

5.1. Ценовая метрика. Метрика AD-Census составляется из абсолютной разности цветов и расстояния Хэмминга между цензус-преобразованиями с окном 9×7 . Комбинируются данные величины суммой результатов робастной функции вида $1 - e^{-x/\lambda}$. Здесь $\lambda = \{\lambda_{AD}, \lambda_{Census}\}$ — коэффициент, задающий влияние каждой из величин.

Цена соответствия вычисляется для каждого пикселя базового (левого) изображения с диспаритетами в заранее заданном диапазоне $[d_{min}, d_{max}]$.

5.2. Агрегация. Далее цены сглаживаются усреднением по областям с близкими цветами.

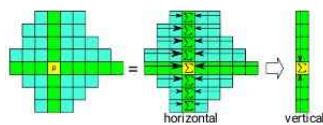


Рис. 1. Крестовая агрегация

Каждому пикселю ставится в соответствие крест, состоящий из пикселей, близких по цвету. Далее производится агрегация (подсчёт среднего арифметического цен) сначала по горизонтали, а затем по вертикали, как показано на рис. 1.

5.3. Оптимизация по направлениям. Следующий этап производит полуглобальную оптимизацию по четырём направлениям методом, предложенным Хиршмюллером в рамках алгоритма SGM (Semi-Global Matching) [4].

5.4. Вычисление диспаритетов. Каждому пикселю присваивается диспаритет, удовлетворяющий минимуму цены:

$$d(p) = \arg \min_{d \in [d_{min}, d_{max}]} C(p, d).$$

5.5. Уточнение диспаритетов. Далее, полученные диспаритеты улучшаются в несколько шагов:

1. Все предыдущие этапы повторяются с правым изображением в качестве основного. Выделяются ошибочные точки, удовлетворяющие неравенству $d_L(x, y) \neq d_R(x - d_L(x, y), y)$.
2. Для ошибочных пикселей составляются гистограммы распределения диспаритетов верных (неошибочных) пикселей в тех же областях, что использовались при агрегации. В случае, если один из диспаритетов набрал более 40% голосов, а общее число голосов оказалось выше заданного порога, этот диспаритет назначается обрабатываемому пикселю и он более не считается ошибочным. Эта процедура повторяется пять раз, чтобы убрать большинство ошибок.
3. Оставшиеся ошибки исправляются в зависимости от своего типа. Если $\exists d : d = d_R(x - d, y)$, пикселю присваивается диспаритет самого близкого по цвету пикселя окрестности. В противном случае, пиксель считается принадлежащим фону и ему выбирается самое низкое значение диспаритета в области.
4. Для исправления неточностей на границах объектов, цена текущего диспаритета каждого пикселя сравнивается с ценами текущих диспаритетов своих соседей. Если цена диспаритета соседа оказалась ниже, пикселю присваивается диспаритет этого соседа.
5. Наконец, для достижения субпиксельной точности производится параболическая интерполяция и полученные диспаритеты сглаживаются медианным фильтром 3×3 .

6. Модификация алгоритма. В процессе реализации и тестирования вышеописанного алгоритма выявились следующие недостатки в методе агрегации:

- очень близкие по цвету объекты, расположенные друг за другом, «сливаются»;

- на горизонтальных поверхностях в результате агрегации точек различных диспаритетов падает точность.

Для исправления данных недостатков предлагается изменение в методе составления агрегационных крестов, учитывающее исходные цены соответствия. Как и в исходном алгоритме, с каждой из четырёх сторон от пикселя в крест итеративно добавляются новые точки, пока не будет нарушено условие добавления либо превышен порог максимальной длины плеча. Однако условие добавления пикселя в крест заменяется следующим:

$$1 - e^{-\|I(p) - I(p_a)\|/\lambda_{AD}} + \min \left\{ \left| \min_d C(p, d) - C \left(p_a, \arg \min_d C(p, d) \right) \right|, \left| \min_d C(p_a, d) - C \left(p, \arg \min_d C(p_a, d) \right) \right| \right\} \leq \tau_a.$$

Здесь p_a — пиксель для добавления, τ_a — порог, который принимается равным 0,5 при длине плеча меньше половины максимальной и 0,25 — в противном случае.

7. Результаты. Полученная реализация алгоритма на CUDA обрабатывает 5 кадров в секунду для половинного разрешения (1500×1000) и 10 кадров — для четвертичного (750×500) на GeForce GTX 1060. Это не до конца удовлетворяет требованиям большинства задач реального времени, однако предложенная модификация во многих случаях заметно улучшает качество без существенных потерь в производительности: не более 10 мс и 2 мс для половинного и четвертичного разрешений соответственно. Возможно, она позволит упростить более тяжёлые части алгоритма и получить приемлемое качество при выполнении в режиме 10 кадров в секунду на HD снимках.

Сравнение качества модификации и исходного алгоритма приведено в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Четвертичное разрешение

Имя	Число ошибок	Ч. О. оригинала	Средняя ошибка	С. О. оригинала
Motorcycle	16,83	31,58	0,66	0,87
Piano	29,18	43,37	1,35	1,51
Pipes	19,31	24,51	1,43	1,87
PlayableP	19,76	42,43	0,64	1,77
Recycle	22,27	37,29	0,62	0,72

Таблица 2. Половинное разрешение

Имя	Число ошибок	Ч. О. оригинала	Средняя ошибка	С. О. оригинала
Motorcycle	13,91	21,93	1,36	1,43
Piano	25,21	32,65	2,68	2,74
Pipes	16,02	17,84	2,52	3,19
PlayableP	16,00	24,86	1,00	1,82
Recycle	21,95	26,40	2,29	1,51

Литература

1. Scharstein D., Szeliski R. A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms // International Journal of Computer Vision. 2002. No 47. P. 7–42.
2. Scharstein D., Hirschmüller H., Kitajima Y. et al. High-resolution stereo datasets with subpixel-accurate ground truth // In German Conference on Pattern Recognition (GCPR 2014). Münster: GCPR. 2014. P. 31–42.
3. Xing M., Xun S., Mingcai Z. et al. On building an accurate stereo matching system on graphics hardware // 2011 IEEE International Conference on Computer Vision Workshops (ICCV Workshops). Barcelona: IEEE. 2011. P. 467–474.
4. Hirschmüller H. Stereo processing by semiglobal matching and mutual information // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2008. Vol. 30. No 2. P. 328–341.
5. Гришкин В. М. Компьютерная система мониторинга состояния объектов культурного наследия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. №3. С. 181–188.

УДК 004.584

Пискунова А. С.

Разработка приложения для автоматического определения SMS спам-сообщений для устройств, работающих на платформе андроид

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Малицкой М. А.*

На сегодняшний день человечество не может обойтись без компьютерных и сетевых технологий. Средства связи вторглись в большинство сфер жизнедеятельности общества, начиная с помощи в образовании и заканчивая рекламой и продвижением какой-либо платной продукции. Отсюда возникла необходимость фильтрации нежелательных сообщений, иными словами, спама. Коммерческая реклама делает массовую рассылку, в том числе и людям, которые не хотели бы получать подобные сообщения. В них может быть непотребный контент, или же, рекламодатель может иметь мошеннические намерения. Целью данной работы является написание программы для андроид-устройств, блокирующей SMS спам. Для написания программы использован язык программирования Java, среда разработки: Android Studio.

Введем основные понятия.

Определение 1 [1]. Бинарная логистическая регрессия — статистическая модель, используемая для предсказания вероятности отношения текста/элемента/события к одному из двух классов путем подгонки данных к логистической кривой.

Определение 2 [1]. Логистическая функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}.$$

Пискунова Анна Сергеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: an.piskunova2013@yandex.ru , тел.: +7(905)270-61-87

Определение 3 [1]. Функция правдоподобия

$$L(\theta) = \prod_i^n P\{y = y_i | x = x_i\}.$$

Метод градиентного спуска [2] состоит в итерационном вычислении θ по формуле:

$$\theta := \theta + \alpha \sum_i^m (y_i - f(\theta^T x_i)) x_i, \quad \alpha > 0,$$

до тех пор, пока значение θ на предыдущем шаге не будет отличаться от следующего на $\varepsilon = 0,005$, где α — константа, которая подбирается вручную в зависимости от поставленной задачи. В программе использовано значение $\alpha = 0,0005$, начальное значение $\theta_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Метод максимального правдоподобия [2] заключается в подборе параметров, максимизирующих функцию правдоподобия, что эквивалентно нахождению максимума её логарифма. Для этого применяется метод градиентного спуска.

Определение 4 [3]. Полнота (*Rec*) — это доля найденных классификатором сообщений, являющихся спамом относительно всех спам-сообщений в тестовой выборке.

Определение 5 [3]. Точность (*Pr*) — это доля сообщений, действительно являющихся спамом, относительно всех сообщений, которые программа отнесла к спаму.

$F_{мера}$ представляет собой гармоническое среднее между точностью и полнотой [3].

		Экспертная оценка	
		спам	не спам
Оценка системы	спам	TP	FP
	не спам	FN	TN

Рис. 1. Оценки

На рис. 1 показано TP — истинно-положительное решение; TN — истинно-отрицательное решение; FP — ложно-положительное решение; FN — ложно-отрицательное решение [3].

$$Pr = \frac{TP}{TP + FP},$$

$$Rec = \frac{TP}{TP + FN},$$

$$F_{mera} = \frac{2PrRec}{Pr + Rec}.$$

Для решения проблемы получения нежелательных сообщений написано множество программ, использующих различные фильтры:

1. Байесовский фильтр. Основывается на теореме Байеса и формуле полной вероятности. Условная вероятность того, что сообщение A — спам, при том, что в нем содержится слово B , рассчитывается по формуле Байеса [4]:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Метод является самообучаемым. Однако, у него есть существенные недостатки: обрабатывается только текст сообщения, не учитывается номер отправителя, игнорируются редко встречающиеся слова [5].

2. Ручная фильтрация. В основе не автоматических фильтров лежат списки доступа. Пользователь самостоятельно выбирает нежелательные номера (в случае SMS) или адреса (в случае электронных писем) и добавляет их в «черный список», тем самым настраивая фильтр. Но ручные способы фильтрации имеют низкую эффективность и нуждаются в регулярном пополнении списков доступа, дополнительно нагружая пользователя [6, 7].

Новизна метода сортировки сообщений, реализованного в данной работе заключается в том, что используется сразу несколько признаков, каждый из которых по-своему влияет на характеристику сообщения. Кроме того, SMS спам является самым трудным по предотвращению и редко подвергается исследованиям [8].

Укажем принципы работы программы. Получив сообщение, клиент отправляет данные о нем на сервер, где происходит обработка сообщения: стемминг и подсчет значения характеристической функции

f . Взято граничное значение, равное 0,5. При $f > 0,5$ сообщение классифицируется как спам. Подсчитав вероятность спама, сервер отправляет ответ клиенту.

Основные этапы работы:

1. Собрана обучающая выборка из 2100 сообщений, 1200 из которых — спам, 900 — не спам, произведена ручная классификация.
2. Составлен список признаков сообщения: наличие в тексте отдельных слов, написанных заглавными буквами (s_1), тройного восклицательного или вопросительного знака (s_2), веб-адреса (s_3), одного из слов, находящихся в словаре спама (s_4), номера телефона (s_5), ключевых слов, находящихся в словаре не спама (g_1), факт получения сообщения с длинного номера (g_2) или от оператора (g_3). Здесь s_i — признаки спама, g_j — признаки нужного сообщения, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$.
3. Произведена процедура стемминга и парсинга слов в сообщениях и наборах ключевых слов, использована библиотека lucene-snowball.
4. Составлена бинарная матрица сообщение-признак, в которой значение 1 соответствует наличию того или иного признака в сообщении.
5. Методом максимального правдоподобия найдены весовые коэффициенты каждого признака.
6. Программа разделена на клиентскую и серверную части. Клиент устанавливается на смартфон, сервер — на удаленную машину. При этом полученные коэффициенты подставляются в логистическую характеристическую функцию, которая считается на удаленном сервере.
7. Произведена проверка работы алгоритма на тестовой коллекции сообщений (100), подсчет мер точности (Pr), полноты (Rec), F-меры. $Pr = 0,87$, $Rec = 0,93$, $F_{мера} = 0,899$.

В результате проведенной работы написана программа, выявляющая спам среди SMS-сообщений. Для оценки качества классификатора подобрана тестовая коллекция сообщений, для которой метод показал высокие значения точности и полноты.

Литература

1. Supervised learning [Электронный ресурс] // URL:<https://see.stanford.edu/materials/aimlcs229/cs229-notes1.pdf> (дата обращения: 05.03.2017).
2. Фальк В. Н., Бочаров И. А., Шаграев А. Г. Трансдуктивное обучение логистической регрессии в задаче классификации текстов // Программные продукты и системы. 2014. № 2 (106). С. 115–118.
3. Журавлева Л. В., Стригулин К. А. Анализ тональности отзывов пользователей в мета-области фильмов // Молодой ученый. 2016. № 12. С. 157–161.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. 11-е изд. М.: Высшая школа, 2005. 479 с.
5. Машечкин И. В., Петровский М. И., Розинкин А. Н. Система предотвращения массовых рассылок на основе алгоритмов машинного обучения // Программные продукты и системы. 2005. № 3. С. 10–15.
6. Мироненко А. Н. Автоматическая фильтрация спама на базе сети формальных нейронов // Вестник Омского университета. 2011. № 2. С. 178–182.
7. Коробейников А. Г., Блинов С. Ю., Лейман А. В., Маркина Г. Л., Кутузов И. М. Алгоритм определения спамности документов на основе фейеровских отображений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 6. С. 123–127.
8. Мухин Д. Д. Разработка системы автоматической фильтрации нежелательной электронной корреспонденции // Бизнес-информатика. 2007. № 2. С. 39–44.

УДК 004.891

Прус Е. А.

Система автоматической рекомендации статей для онлайн ресурса

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Мишениным А. Н.*

1. Введение. В современном мире для практически любого интернет-ресурса очень важно иметь свою рекомендательную систему. Подобные программы позволяют значительно улучшить опыт работы с сайтом, что выливается в увеличение количества посещений и времени пребывания, а в случае интернет-магазинов — еще и в увеличение числа покупок.

Однако для максимального эффекта такие системы должны подбирать рекомендации для каждого пользователя индивидуально. Одним из традиционных подходов является коллаборативная фильтрация — метод, основанный на предположении, что рекомендацию можно давать исходя из предпочтений других пользователей, чьи оценки контента похожи на оценки целевого пользователя. Сейчас очень распространены прямые или не прямые оценки в бинарном виде, которые свидетельствуют о том, что произошло некоторое событие — лайк (нажатие кнопки «Мне нравится») под статьей, покупка в магазине, посещение веб-страницы. Благодаря доступности подобных данных рекомендательные системы, работающие с ними, набирают все большую популярность.

Далее рассматривается система, использующая информацию о лайках, однако принцип ее работы переносится и на некоторые другие бинарные оценки.

2. Постановка задачи. Основная цель — разработать и реализовать алгоритм, эффективно выбирающий рекомендации (в пределах онлайн ресурса) для некоторого пользователя, используя данные о лайках, поставленных пользователями под статьями на сайте.

Прус Егор Андреевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kazuare@mail.ru, тел.: +7(921)976-95-58

3. Метод решения и реализация. Для решения задачи была выбрана модификация метода ближайших соседей с ручной настройкой двух гиперпараметров. Для работы программе не нужны темы статей или какие-либо сведения помимо того, каким статьям ставил лайк каждый пользователь ресурса, что делает систему универсальной. Если отказаться от универсальности и использовать в алгоритме в качестве дополнительной информации еще и темы статей, то качество работы системы заметно возрастет.

В качестве языка программирования выбран Python, в качестве формата взаимодействия с пользователем — бот для мессенджера Telegram. Данные выглядят как набор множеств лайков, т. е. если некоторый пользователь поставил лайк статье, то ее идентификатор присутствует в множестве лайков этого пользователя. Так как в задаче в качестве данных используются исключительно лайки, это добавляет ей сложности, ведь если некоторый пользователь не поставил лайк некоторой статье, то нельзя с уверенностью сказать, что статья ему не нравится, так как он мог просто не прочитать ее. Для метода, предложенного в работе, это не является проблемой, однако становится существенным препятствием для других традиционных алгоритмов, использующихся для рекомендаций.

После того как программа загрузит в свою память данные о лайках, она готова к работе. Это также является существенным преимуществом, ведь не требуется тратить время на обучение алгоритма. Однако время работы линейно зависит от количества данных, поэтому при большом размере обучающей выборки программа будет работать не очень быстро. Использование средств параллельного программирования для поиска соседей позволяет значительно сгладить этот недостаток.

Для любого пользователя, для которого необходимо получить рекомендацию, программа делает следующие шаги.

- **Находит от n до m наиболее подходящих соседей.** Согласно [1], для подобных задач n и m как правило лежит в диапазоне $(10, 100)$, однако их надо подбирать исходя из свойств данных.

Пусть \mathbf{u}_1 — наш целевой пользователь, для которого нужно найти рекомендацию, тогда для определения того, какие соседи подходят лучше, можно ввести функцию

$$D_m(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \text{count}(\text{likes}(\mathbf{u}_1) \setminus \text{likes}(\mathbf{u}_2)) + \text{count}(\text{likes}(\mathbf{u}_2) \setminus \text{likes}(\mathbf{u}_1)),$$

т. е. за каждый несовпадающий лайк начисляется одно «штрафное очко». Однако у такой функции есть проблема.

Рассмотрим трех пользователей: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, пусть \mathbf{u}_1 — целевой. Пусть также $likes(\mathbf{u}_1) = \{3\}$, $likes(\mathbf{u}_2) = \{1, 2\}$, $likes(\mathbf{u}_3) = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда $D_m(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = D_m(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = 3$, т. е. при использовании этой функции приходим к выводу, что \mathbf{u}_2 подходит для рекомендации так же хорошо, как \mathbf{u}_3 , что неверно, так как у \mathbf{u}_2 и \mathbf{u}_1 даже нет общих лайков. Поэтому для решения этой проблемы вводится функция (надо отметить, что она не является метрикой):

$$D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = count(likes(\mathbf{u}_1) \setminus likes(\mathbf{u}_2)) * \mathbf{p} + count(likes(\mathbf{u}_2) \setminus likes(\mathbf{u}_1)),$$

где \mathbf{p} — гиперпараметр, удовлетворяющий условию $\mathbf{p} > 1$.

Таким образом, за лайки, которые есть у \mathbf{u}_1 , но отсутствуют у \mathbf{u}_2 , функция накладывает более сильный штраф, что решает описанную выше проблему.

- **Подсчитывает количество очков для каждой статьи.** Для подсчета используется популярность статьи среди соседей, а также удаленность этих соседей от целевого пользователя.

Пусть $\mathbf{R} = \cup_{like \in neighborhood} likes$ — потенциальные рекомендации, \mathbf{u}_1 — целевой пользователь, а \mathbf{d} — наименьшее значение функции D .

Тогда для любой из страниц $\mathbf{i} \in \mathbf{R}$ счет получается следующим образом. Если у некоторого соседа \mathbf{u}_2 стоит лайк \mathbf{i} , то к счету \mathbf{i} прибавляется величина:

$$1/(D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - \mathbf{d} + 1)^{\mathbf{k}},$$

где \mathbf{k} — гиперпараметр.

- **Выбирает статью с наибольшим счетом.** Очевидно, что при необходимости можно выбрать не одну лучшую статью, а несколько.

4. Выбор гиперпараметров. Для выбора \mathbf{p} и \mathbf{k} был использован поиск по сетке $[1; 6] \times [0,2; 4]$ с шагом 0,2 и ручным подсчетом очков.

Для некоторого числа случайно выбранных пользователей вычислялись рекомендации, при этом координаты точек использовались в качестве \mathbf{p} и \mathbf{k} , после чего рекомендациям вручную ставились оценки. Точкам, давшим удовлетворительные рекомендации, начислялись очки. Лучшие результаты получились в точке $\mathbf{g} = (3,4; 0,4)$.

Надо отметить, что сумма очков имела несколько локальных максимумов, некоторые из них были ненамного хуже максимума в \mathbf{g} .

Кроме того, вполне возможно, что найденные значения \mathbf{p} и \mathbf{k} не универсальны, скорее всего они зависят от многих факторов, включая в том числе и количество данных для обучения модели.

5. Оценка результатов. Для оценки работы алгоритма произведено сравнение с простейшим алгоритмом, основанным на условной вероятности.

Для каждой статьи вычислялась вероятность $P(\text{user likes article } i | \text{user likes article } j) = \frac{\text{count}(\text{users with like } i)}{\text{count}(\text{users with likes } i \text{ and } j)}$.

Для каждого конкретного пользователя вероятность лайка для каждой статьи можно приближенно вычислить как

$$\prod_{\text{like} \in \text{user likes}} P(\text{user likes article } i | \text{like}).$$

Для сравнения этих моделей использован тот же принцип, что и при выборе \mathbf{p} и \mathbf{k} : были выбраны 95 пользователей, после чего каждая модель давала пять рекомендаций для каждого из пользователей.

Автор расставлял оценки от 0 до 2 для каждой рекомендации. В итоге модель, предложенная в работе, получила 509 баллов, в то время как простейшая вероятностная модель получила лишь 440.

С большой долей уверенности можно сказать, что вероятностная модель в этом случае подвержена недообучению, так как она слишком проста для нахождения сложных зависимостей между лайками. В то же время метод, основанный на поиске соседей, будет показывать все более хорошую точность при увеличении размера обучающих данных.

6. Заключение. Итоговая модель показала хорошие результаты по сравнению с простейшей вероятностной моделью. Для улучшения результатов можно реализовать более быстрый поиск похожих пользователей (с использованием нескольких потоков), увеличение размера обучающих данных, а также использование дополнительной информации о статьях, например, их тематику.

Литература

1. Symeonidis P., Ntempos D., Manolopoulos Y. Recommender Systems for Location-based Social Networks. Springer Science + Business Media, 2014. 108 с.

УДК 004.93.1

Ращенко Д. В., Ращенко Ю. В.

Применение методов обнаружения объекта по характерным точкам в алгоритме TLD

Рекомендовано к публикации доцентом Козыменко В. А.

1. Введение. Одним из перспективных подходов интеллектуальной обработки видеорядов является алгоритм TLD (tracking-learning-detection) [1]. Одной из актуальных задач, решаемых этим методом является составление богатых обучающих выборок для обучения искусственных нейронных сетей [2, 3].

Основная идея TLD заключается в обучении детектора на различных изображениях исследуемого объекта в процессе слежения за ним при помощи оптического потока. Обучение детектора на множестве различных ракурсов позволяет качественно обнаруживать объект в случае прекращения слежения оптическим потоком (выход объекта из области видимости или низкое качество оптического потока). После обнаружения объекта детектором слежение продолжается.

В системе TLD, а также в ее модификациях используются детекторы, основанные на сканировании всего изображения в поисках исследуемого объекта. При этом проверяется наличие как самого объекта, так и его масштабированных и повернутых версий. Такой подход, несмотря на использование быстрых (каскадных) методов сравнения, имеет высокую вычислительную сложность и из-за этого может быть неприменим в некоторых задачах. По этой причине перспективным представляется исследование методов обнаружения объекта по характерным точкам («точкам интереса») для применения в задаче TLD. В данной работе предложен один из таких методов, основанный на нахождении характерных точек по алгоритму SURF (speeded up robust features).

Ращенко Дмитрий Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st013098@student.spbu.ru, тел.: +7(911)837-10-37

Ращенко Юлия Владимировна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st012879@student.spbu.ru, тел.: +7(911)980-78-67

2. Описание алгоритма. Алгоритм TLD с детектором объекта по характерным точкам реализован с использованием библиотеки EmguCV 3.0 и протестирован на ряде задач. Также приведены комментарии о некоторых особенностях данного алгоритма, которые следует учитывать при реализации.

1. *Выделение исследуемого объекта прямоугольником.*
2. *Слежение за объектом (tracking).* Слежение осуществляется с помощью оптического потока, построенного по текущему и следующему кадру видеоряда. При реализации использовался разреженный оптический поток, вычисленный с помощью метода Лукаса–Канаде на пирамиде изображений (функция CalcOpticalFlowPyrLK в EmguCV). Параметры оптического потока (количество слоев пирамиды и размер окрестности поиска) следует выбирать, опираясь на максимальное перемещение, которое может совершить объект в решаемой задаче. Подробнее выбор этих параметров описан в [4].
 - (а) *Выбор точек для вычисления оптического потока.* При реализации использовался случайный равномерный выбор точек из прямоугольника слежения, однако при наличии возможности фильтрации рекомендуется не использовать точки фона для построения оптического потока. В дальнейшем по статистике данных о перемещениях этих точек будет определяться качество оптического потока, смещение, масштабирование и поворот прямоугольника слежения, поэтому количество этих точек рекомендуется выбирать не только из соображений производительности, но и для получения адекватной статистики.
 - (б) *Вычисление оптического потока.*
 - (в) *Определение качества оптического потока и перемещение прямоугольника слежения.* Следует учитывать, что высокое качество оптического потока очень важно для работы всего алгоритма, так как ошибки в определении смещения со временем могут накопиться, и объект выйдет за пределы прямоугольника трекинга. При этом прекращение слежения не произойдет, и детектор обучится на новых данных, забыв исследуемый объект. Именно по этой причине при реализации использован ряд критериев для

фильтрации низкокачественных точек: для устранения точек фона используется удаление точек со смещением ниже заданного порога; для фильтрации точек с высокой ошибкой используется удаление точек со смещением выше заданного порога или со слишком высокой ошибкой трекинга. Если после всех фильтраций осталось достаточное количество качественных точек, то трекинг признается успешным, и определяются смещение, поворот и масштабирование прямоугольника слежения. В противном случае трекинг прекращается, детектор заново находит объект, и слежение начинается сначала.

3. *Обучение детектора (learning)*. Если слежение оптическим потоком прошло успешно, то изображение внутри прямоугольника слежения участвует в обучении детектора, а затем происходит переход к пункту 2, иначе — переход к поиску объекта (пункт 4). Подходы для обучения детектора, описанные в [1], оказываются неприменимы при поиске объекта по характерным точкам. В данной работе предлагается использовать в качестве модели исследуемого объекта принадлежащие ему характерные точки. При этом для того, чтобы при поиске учитывались только робастные точки, а не случайно появившиеся точки или точки фона, предлагается использовать систему значимости (весов).
 - (а) *Поиск характерных точек на изображении для обучения*. При реализации использовался детектор SURF, для которого следует отметить важность правильного выбора минимального значения гессиана (параметр `hessianThresh` в `EmguCV`). Низкие значения этого параметра позволяют сравнивать образы по большему количеству точек, однако могут сильно снизить быстродействие.
 - (б) *Сравнение найденных точек с уже имеющимися в модели исследуемого объекта*. При реализации использовался поиск ближайшего соседа в пространстве L_2 с проверкой обратного соответствия.
 - (в) *Фильтрация плохо совпавших точек*. На данном этапе отсеиваются точки, расстояние которых до ближайшего со-

седа выше заданного порога. Также отсеиваются точки, координаты которых сильно отличаются от координат их ближайшего соседа (функция `VoteForSizeAndOrientation` в `EmguCV`). Точки, оставшиеся после этих фильтраций, в дальнейшем будут называться «хорошими».

- (d) *Построение матрицы гомографии.* Если «хороших» точек осталось больше некоторого заданного порога, то по ним строится матрица гомографии. При этом вновь происходит фильтрация, и остается только несколько точек, которые в дальнейшем будут называться «лучшими».
- (e) *Добавление в модель новых точек и изменение весов старых.* Новые точки (для которых не было установлено соответствие на шаге 3(b)) добавляются в модель с некоторым небольшим начальным весом. Также происходит небольшое увеличение весов для «хороших» точек и значительное — для «лучших». Для всех остальных точек модели происходит уменьшение весов. Как только вес какой-либо точки опускается ниже нуля, она удаляется из модели. Такой подход позволяет со временем устранять случайно появившиеся и фоновые точки и учитывать только часто встречающиеся точки.

Замечание. Несмотря на множество фильтраций, на шаге 3(d) может быть построена ошибочная матрица гомографии. Рекомендуется проверять ее качество, и в случае, если оно неудовлетворительно, никакие точки не признавать «лучшими». При реализации использовались следующие проверки: сравнивалось среднее расстояние «лучших» точек до ближайшего соседа с максимально допустимым порогом; в соответствии с матрицей гомографии строилось трехмерное преобразование исходного прямоугольника, и длины сторон получившегося четырехугольника сравнивались с минимально и максимально допустимой длиной.

- 4. *Обнаружение потерянного объекта (detection) с использованием обученного на предыдущих шагах детектора.* Данный шаг выполняется для всех последующих кадров до тех пор, пока объект не будет найден. После этого происходит переход к шагу 2.
 - (a) *Поиск характерных точек на новом кадре видеоряда.*

- (b) *Сравнение найденных точек с теми, которые уже содержатся в модели исследуемого объекта.*
- (c) *Фильтрация плохо совпавших точек.* Дополнительно к описанным выше фильтрам отсеиваются точки с весом ниже заданного порога.
- (d) *Построение матрицы гомографии и вычисление по ней предполагаемого положения объекта.* Как описано в замечании к шагу 3, предполагаемое положение вычисляется путем трехмерного преобразования исходного прямоугольника. Описанные проверки качества матрицы гомографии также производятся.
- (e) *Построение нового прямоугольника слежения по найденному четырехугольнику.* При реализации проверены несколько способов построения прямоугольника, и лучшие результаты достигнуты при усреднении сторон четырехугольника.

Замечание. При реализации использовались те же параметры, что и при обучении.

3. Заключение. Описанный алгоритм позволяет в задаче tracking-learning-detection использовать преимущества обнаружения по характерным точкам. Хотя в некоторых задачах описанный алгоритм не применим, он показал свою эффективность на тестовых задачах.

Литература

1. Kalal Z., Mikolajczyk K., Matas J. Tracking-Learning-Detection // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2010. No 34. P. 1409–1422.
2. Ращенко Д. В. Модификация нейронной сети АРТ-1, направленная на сокращение фазы поиска // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 477–481.
3. Ращенко Ю. В. Исследование применимости искусственной нейронной сети АРТ-1 и ее модификаций в задаче распознавания образов на большой выборке // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 482–486.
4. То, что вы хотели знать про оптический поток, но стеснялись спросить [Электронный ресурс]: URL:<https://habrahabr.ru/post/201406/> (дата обращения: 15.03.2017).

УДК 004.051

Смирнов В. А.

Оптимизация вычислений в задаче об определении параметров надводной непотопляемости подводной лодки

Рекомендовано к публикации профессором Богдановым А. В.

1. Введение. Одной из задач, возникающих при компьютерном моделировании поведения подводных лодок, в частности, в тренажерах, является задача определения посадки лодки, т. е. ее крена, дифферента и осадки. В тренажерах обычно применяется моделирование подводной лодки в реальном времени, однако, на практике часто возникает необходимость в ускорении модели, чтобы быстрее увидеть результат тех или иных действий экипажа. При этом потеря точности недопустима, так как со временем погрешность накапливается, из-за чего возникает необходимость в ускорении алгоритма расчета посадки.

Поскольку современные центральные процессоры (CPU) общего назначения являются многоядерными, одним из способов ускорения является распараллеливание алгоритма там, где это возможно [1]. Учитывая, что лодка может быть представлена в виде набора отдельных частей, таких как жилые и нежилые отсеки и относительно простые геометрически фрагменты корпуса, а расчет параметров лодки можно свести к расчету параметров этих частей и последующей агрегации результата, очевидным способом распараллеливания является распараллеливание по отдельным частям лодки в рамках парадигмы MapReduce.

2. Описание математической модели. Задача определения посадки подводной лодки при заданном состоянии отсеков сводится к определению значений трех параметров посадки: крена, дифферента и осадки, при которых архимедовы и весовые силы уравновешены.

Смирнов Виктор Александрович – магистрант, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); e-mail: ariox41@gmail.com, тел.: +7(921)367-66-51

Условие равновесия сил приводит к системе из шести уравнений, выражающих равенство нулю компонент главного вектора и главного момента системы сил относительно выбранного полюса [2]:

$$F_i = 0, \quad M_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

В силу того, что силы, действующие на корабль, коллинеарны вертикальной оси неподвижной системы отсчета, уравнение, выражающее равенство нулю момента относительно этой оси, а также два из трех уравнений для компонент главного вектора сил выполняются тождественно. Таким образом, необходимо решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$F_z(\theta, \psi, h) = 0, \quad M_{xz}(\theta, \psi, h) = 0, \quad M_{yz}(\theta, \psi, h) = 0,$$

где θ, ψ, h — крен, дифферент и осадка соответственно, ось z направлена вертикально.

Решение данной системы осуществляется соответствующим алгоритмом поиска решения уравнения, например, методом Ньютона. Независимо от выбора алгоритма на каждой итерации необходимо получить главный вектор и главный момент лодки.

Объемные силы и моменты определяются объемом и формой погруженной части корабля. При их вычислении корпус удобно разделить на отдельные элементы, форма которых описывается простыми геометрическими примитивами. Тогда расчет главного вектора и главного момента объемных сил сводится к расчету сил и моментов, действующих на элементы корпуса, с последующим применением агрегирующей функции.

Аналогично, массовые силы включают вес корпуса подводной лодки, приложенный к его центру масс, веса неподвижных грузов, приложенные в соответствующих точках, а также веса подвижных грузов, в частности, воды в затопленных отсеках и цистернах. Точки приложения последних и, соответственно, их моменты относительно выбранного полюса определяются геометрией затопленного отсека или цистерны, а также параметрами посадки корабля.

Учитывая сложность вычислений на основе геометрии, для увеличения быстродействия алгоритма целесообразно заранее рассчитать нужные значения на некоторой нерегулярной сетке. Затем приближенное значение можно получить при помощи интерполяции.

Вводя определенные упрощения в модель, в частности, предполагая, что угол дифферента достаточно мал, можно добиться того, что в интерполяционных сетках для объемных сил останется только два независимых параметра — крен и осадка.

3. Используемые подходы и инструменты для распараллеливания. При распараллеливании алгоритмов на центральном процессоре (CPU) основным способом распараллеливания является создание нескольких потоков выполнения (thread) с последующей синхронизацией при помощи специальных объектов. Однако создание нового потока является сравнительно дорогостоящей операцией, из-за чего создание новых потоков является нежелательным при повторном выполнении алгоритма.

3.1. Пул потоков. Для того, чтобы избежать затрат на их создание, используется устоявшийся подход — пул потоков. При его использовании потоки создаются заранее, после чего ждут появления задачи в очереди задач [3]. Пулы потоков часто упоминаются в учебной литературе, и для них существует множество свободно распространяемых реализаций.

Из-за некоторых проблем в интерфейсах этих реализаций была разработана собственная реализация пула потоков на основе стандартной библиотеки поддержки многопоточности C++11.

3.2. MapReduce. При построении распределенных систем в настоящее время часто применяется подход MapReduce [4]. Идея этого подхода заключается в разбиении исходного большого набора данных на сравнительно небольшие части, каждая из которых обрабатывается независимо, и применении к ним двух операций: map и reduce. На шаге map выполняется некое преобразование каждого элемента исходного набора, в результате чего образуется новый набор данных, на шаге reduce выполняется некая агрегирующая операция для нового набора. Этот подход хорошо согласуется с заданной математической моделью, поскольку для каждого элемента расчет параметров выполняется независимо от остальных.

Учитывая, что распределение на несколько узлов кластера не требуется, механизм MapReduce можно сравнительно легко реализовать на основе пула потоков.

4. Тестирование производительности алгоритма вычисления статистики в разных режимах. Поскольку параметры каждого элемента лодки рассчитаны заранее, для эффективного поиска нужных параметров каждому элементу соответствует двумерная матрица, строки которой упорядочены по первому аргументу, а столбцы — по второму. Это позволяет свести расчет параметров элемента в худшем случае к трем логарифмическим поискам значения.

В соответствии с подходом MapReduce эти матрицы равномерно распределяются между потоками. При этом, так как каждому элементу соответствует своя матрица, они не помещаются в кэш одновременно.

Тестирование производительности проводилось в двух режимах: в первом режиме аргументы плавно увеличивались в некотором диапазоне (оптимистичный вариант), во втором режиме аргументы выбирались случайным образом по равномерному распределению на том же диапазоне (пессимистичный вариант). Результаты получены на двух системах: с процессором Intel i5-6200U (2 физических ядра по 2 логических на каждом) и с процессором AMD 8350 (8 ядер, но эффективно работают 4 из-за особенности архитектуры). Время измерялось в усредненных микросекундах. В результате были выявлены общие тенденции (см. рис. 1).

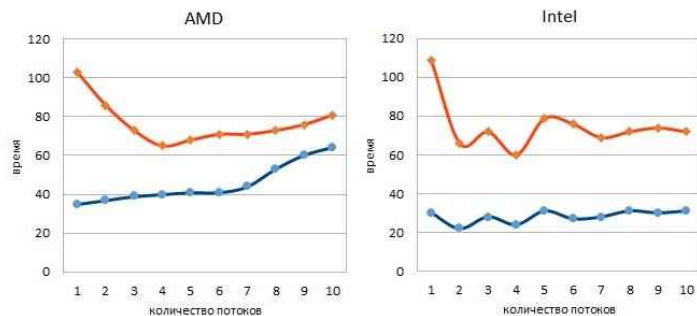


Рис. 1. Зависимость времени выполнения от количества потоков

Как и ожидалось, время выполнения в оптимистичном режиме всегда меньше. Тем не менее эффективность распараллеливания в этом режиме оказалась ниже. Кроме того, не удалось уменьшить время выполнения более, чем в два раза по сравнению с однопоточным вариантом. Если для процессора Intel это можно объяснить особенностями архитектуры, так как в нем два физических ядра, то для процессора AMD такие результаты неожиданны.

Для увеличения эффективности распараллеливания была предпринята попытка использовать аллокаторы для того, чтобы создать все матрицы в минимальном количестве блоков памяти. Для этого был использован `boost::allocator`. Однако увеличения эффективности распараллеливания достичь не удалось, хотя в целом производительность немного повысилась (до 10%) (см. рис. 2).

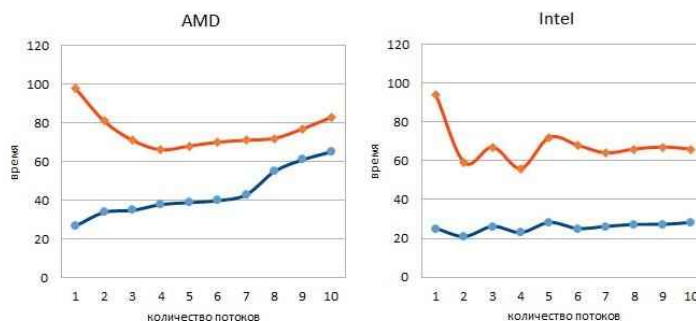


Рис. 2. Зависимость времени выполнения от числа потоков для реализации с использованием аллокатора

5. Заключение. Несмотря на то, что на первый взгляд исходная задача хорошо подходила для распараллеливания, из-за активного использования оперативной памяти эффективность распараллеливания оказалась заметно ниже ожидаемой. Что еще хуже, она сильно зависит от характера изменения аргументов, из-за чего становится практически невозможно делать выводы об эффективности без тщательного тестирования в реальных условиях.

Литература

1. Многоядерный процессор [Электронный ресурс]: URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Многоядерный_процессор (дата обращения: 08.03.2017).
2. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Том 1. Статика и кинематика. 8-е изд. М.: Наука, 1982. 352 с.
3. Уильямс Э. Параллельное программирование на C++ в действии. Практика разработки многопоточных программ / пер. с англ. А. А. Слинкин. М.: ДМК Пресс, 2012. 672 с.
4. MapReduce [Электронный ресурс]: URL:<https://en.wikipedia.org/wiki/MapReduce> (дата обращения: 06.03.2017).

УДК 004.94

Смирнов К. В., Хмель Д. С.

Визуализация решения уравнения Блэка–Шоулза для цены азиатского опциона

Рекомендовано к публикации профессором Богдановым А. В.

1. Введение. При использовании математических методов для прогнозирования цены опциона необходимо решать задачу визуализации многомерных данных. В данной работе представлена программа, позволяющая производить визуализацию прогнозов цены азиатского опциона. Продемонстрировано ее применение на примере уравнения Блэка–Шоулза.

Опционом называют контракт на продажу или покупку ценных бумаг по договорной цене S_0 , покупаемых до или в момент срока исполнения опциона T [1]. Существует два основных типа опционов: call и put опционы. Put опцион — это опцион, который дает право держателю опциона продать актив по фиксированной цене s_0 в момент времени T . Call опцион — это опцион, который дает право купить актив по фиксированной цене s_0 в момент времени T . После установленного договором срока, т. е. по истечении времени T ($t > T$), опцион обесценивается, и выплата такого опциона становится равной нулю.

Помимо типов опционы подразделяются по стилям: европейские, американские и другие. Европейский опцион может быть исполнен только в момент времени исполнения опциона T , американский опцион — при $t \leq T$.

Азиатский опцион — это опцион, цена исполнения которого определяется как средняя цена опциона за весь период его исполнения. Цена этого опциона определяется историей ценовых значений базового актива.

Метод Блэка–Шоулза для расчета цены опциона был разработан в 1973 г. [2]. В случае азиатского опциона, результатом применения этого метода является функция цены опциона в зависимости

Смирнов Константин Валерьевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: constcoh@gmail.com, тел.: +7(921)554-93-91

Хмель Дмитрий Сергеевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: dskhmel@cc.spbu.ru, тел.: +7(911)978-51-45

от трех параметров, для визуализации которой необходимо применять дополнительные средства. Данный метод имеет существенные ограничения для применения касательно функционирования рынка.

2. Уравнение Блэка – Шоулза. Классическое уравнение Блэка – Шоулза для опциона европейского типа имеет вид [3–5]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0.$$

Здесь t – время, S – цена базового актива, σ – волатильность, r – безрисковая процентная ставка, $C(S, t)$ – искомая цена опциона.

Для опциона азиатского типа уравнение принимает вид [6]

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - rS \frac{\partial C}{\partial S} - S \frac{\partial C}{\partial A} - \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rC = 0,$$

где A – усредненное значение всех имеющихся цен базовых активов S , T – время исполнения опциона.

Решения последнего уравнения определены в области $C = C(S, A, t) \in L_2(\Omega)$, где $\Omega \in [0, S_{max}] \times [0, A_{max}] \times [0, T]$, где $L_2(\Omega)$ – класс вещественных функций, измеримых на Ω и суммируемых на Ω с квадратом.

Для полноты задачи необходимо обозначить граничные условия. Используя замену переменной $\tau = T - t$, это можно сделать следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} C(S, A, T) &= \max \left\{ \frac{A}{T} - K, 0 \right\}, \\ C(0, A, \tau) &= e^{-r\tau} \max \left(\frac{A}{T} - K, 0 \right), \\ C(S, A_{max}, \tau) &= e^{-r\tau} \max \left(\frac{A_{max}}{T} - K, 0 \right) + \frac{S}{rT} (1 - e^{-r\tau}), \\ C(S_{max}, A, \tau) &= e^{-r\tau} \max \left(\frac{A}{T} - K, 0 \right) + \frac{S_{max}}{rT} (1 - e^{-r\tau}), \\ C(S, 0, \tau) &= \frac{S}{rT} (1 - e^{-r\tau}). \end{aligned}$$

Так как среднее значение цены базового актива, определенное таким образом, не зависит от текущего значения цены, то переменные S и A независимы.

3. Реализация и визуализация результатов. Программная реализация численной схемы решения уравнения Блэка–Шоулза для азиатского опциона выполнена в виде двух модулей. Первый из них производит вычисления по формулам, которые описаны выше, и для каждого расчетного момента времени t получает результат в виде матрицы $C_t(A, S)$. Этот модуль реализован на языке программирования Python. Для представления результатов пользователем используется второй модуль, позволяющий в режиме реального времени строить график для $C_t(A, S)$. Последний модуль реализован в виде программной библиотеки на языке программирования C++.

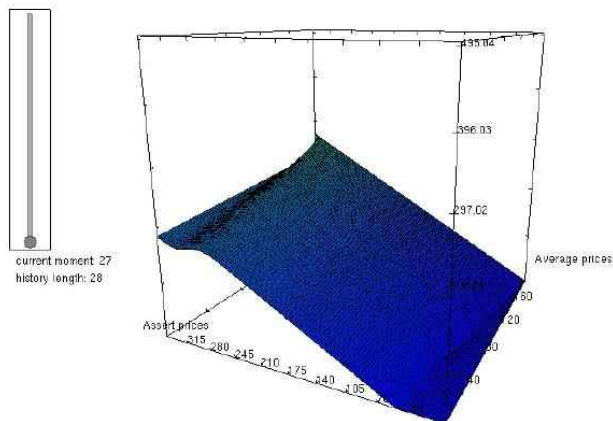


Рис. 1. Пример визуализации решения для параметров $\sigma = 0, 1$; $r = 0, 2$; $S \in [0, 350]$; $A \in [0, 200]$; $T = 3$; $K = 150$

Таким образом, программа в процессе вычисления представляет пользователю результаты для последнего рассчитанного момента времени, после завершения расчетов пользователь может просмотреть все полученные результаты для любого момента времени. На рис. 1. приведен пример визуализации вычислений.

4. Заключение. Представлена программа, позволяющая производить визуализацию прогнозов цены азиатского опциона. Демонстрировано ее применение на примере уравнения Блэка – Шоулза.

Представленную программную реализацию можно развивать в нескольких направлениях: оптимизации созданного решения, использование многопоточности для ускорения вычислений [7], организации экспорта результатов в численном и графическом виде.

Литература

1. Вайн Саймон. Опционы. Полный курс для профессионалов. М.: Альпина Паблишер, 2003. 416 с.
2. Black F., Sholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy*. 1973. No 81. P. 637–659.
3. Hugger J. A fixed strike Asian option and comments on its numerical solution // *ANZIAM Journal*. 2003. Vol. 45. P. 215–231.
4. Hugger J. The boundary value formulation of the Asian Call Option // *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. 2003. P. 409–418.
5. Hugger J. Wellposedness of the boundary value formulation of a fixed strike Asian option // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2006. Vol. 185. 2. P. 460–481.
6. Богданов А. В., Мареев В. В., Степанов Э. А., Панченко М. В. Влияние экстремальных значений параметров на решение задачи ценообразования азиатских опционов // *Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014)*. 2014. С. 42–44.
7. Кобышев С. С., Корхов В. В. Построение модели распределенной вычислительной системы // *Процессы управления и устойчивость*. 2016. Т. 3. № 1. С. 601–606.

УДК 004.94

Сторублевцев Н. В.

Анализ потенциала ускорения CFD-вычислений с использованием технологии OpenCL

Рекомендовано к публикации профессором Богдановым А. В.

CFD и проблема масштабирования. Вычислительная гидродинамика (computational fluid dynamics, CFD) широко используется в различных областях для численной симуляции процессов. CFD представляет собой совокупность физических, математических и численных методов, предназначенных для вычисления характеристик потоковых процессов [1]. Это осуществляется путем разбиения пространства модели на ячейки, для создания так называемой «сетки» и применения к ним подходящего алгоритма для решения уравнений движения. Среди наиболее популярных пакетов для CFD можно привести FLUENT, CFX, STAR-CD и OPENFOAM.

В последнее время спрос на детальное моделирование различных физических процессов стремительно растет во многих областях промышленности и науки. Это провоцирует разработчиков на постоянные попытки оптимизировать и ускорить процесс симуляции, который в противном случае легко может занять месяцы машинного времени.

Задачу ускорения CFD-вычислений можно отнести к классу задач «большого вызова», в частности, к сильносвязанным задачам, требующим большого объема памяти и производительности вычислительных мощностей [2]. Обусловлено это тем, что модели необходимой детальности и сложности занимают значительные объемы памяти. Также, так как результатом симуляции является набор состояний модели в различных временных точках, требования по памяти возрастают пропорционально длине симуляции. В большинстве случаев нет необходимости хранить все предыдущие состояния модели в оперативной памяти, но это создает дополнительные затраты на своевременную выгрузку обработанных данных на диск. С дру-

Сторублевцев Никита Владимирович – студент, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет; e-mail: 100.rub@mail.ru, тел.: +7(911)901-58-94

гой стороны, хотя закон Мура все еще выполняется, для достижения предсказанной производительности стало необходимо задействовать параллельные вычисления. На протяжении многих лет производители процессоров постоянно увеличивали частоту и параллелизм на уровне инструкций, так что на новых процессорах старые однопоточные приложения выполнялись быстрее без каких-либо изменений в программном коде. Сейчас по разным причинам производители процессоров предпочитают многоядерные архитектуры, и для получения всей выгоды от возросшей производительности центрального процессора, программы должны переписываться в соответствующей манере [3].

Изначально CFD-пакеты, которые разрабатывались в 60-80-х годах XX века, не поддерживали какого-либо параллелизма, так как не существовало реализующего его аппаратного обеспечения. Далее по мере развития многоядерных процессоров разработчики старались использовать открывшийся потенциал и распараллеливать вычисления на доступные ядра. Но со временем прогресс в области многоядерных процессоров замедлился. Современные процессоры не превышают тактовой частоты в 5ГГц и количество потоков обычно не превышает нескольких десятков. Конечно технологии, вроде MPI (Message Passing Interface), позволяют объединять множество процессоров в кластеры, но закон Амдала накладывает сильные ограничения на подобный метод ускорения вычислений [4]. К тому же, стоимость создания кластера приличной производительности быстро становится неподъемной для энтузиастов и малого бизнеса.

GPGPU, OpenCL и OpenFOAM. Помимо традиционных и даже векторных процессоров, есть еще одна, слабо освоенная, платформа для CFD-вычислений — GPGPU (General Purpose computing for Graphics Processing Units). Технология GPGPU представляет собой технику использования графического процессора для выполнения общих вычислений.

Архитектура GPU (Graphics Processing Unit) имеет несколько значительных отличий от CPU (Central Processing Unit), что обуславливает ее потенциал для CFD-вычислений. Основная задача CPU сводится к выполнению цепочки инструкций за максимально короткое время. CPU спроектирован таким образом, чтобы иметь возможность выполнять несколько цепочек параллельно, или разбивать их на части, и сливать вместе после выполнения в правильном

порядке. Большинство инструкций в цепочке зависит от предыдущих, и поэтому в CPU относительно мало исполнительных блоков, а весь упор делается на скорость выполнения и уменьшение времени простоя.

Работа GPU сводится к оперированию над огромным количеством независимых между собой задач. Для этого он содержит большой объем памяти и огромное количество исполнительных блоков. В современных GPU их может быть более 2048, в то время как у CPU их количество может достигать 48, но чаще всего остается на уровне 2–8.

CPU отличается от GPU в первую очередь способами доступа к памяти. В GPU он связанный и легко предсказуемый, если читается регион памяти, то вскоре настанет очередь соседних ячеек. С записью все обстоит таким же образом. Также графическому процессору не нужна кэш-память большого размера. Кроме того, в видеокартах используется более быстрая память, что дает GPU большую пропускную способность, что важно для параллельных расчетов.

Множество различий присутствует и в поддержке многопоточности. CPU исполняет 1–2 потока вычислений на процессорное ядро, а GPU может поддерживать несколько тысяч потоков на каждый мультипроцессор, которых на чипе может быть несколько штук. И если переключение потоков для CPU стоит несколько тактов, то GPU переключает несколько потоков за один такт.

Тем не менее, GPGPU это всего лишь принцип, и существует несколько конкурирующих программных реализаций. Среди них наиболее популярными являются CUDA и OpenCL. Первая разработана и поддерживается производителем GPU nVidia. Вторая, изначально разработанная компанией Apple, впоследствии была передана группе Khronos Compute, состоящей из Apple, nVidia, AMD, IBM, Intel, ARM, Motorola и других. Обе реализации, естественно, имеют свои особенности.

CUDA, будучи творением nVidia, ориентирована на ее же ускорители и не поддерживает из коробки GPU других производителей. Для обеспечения выполнения программ на CUDA на них приходится использовать сторонние программы-посредники, что увеличивает сложность системы, увеличивает вычислительную нагрузку и снижает общую производительность. OpenCL будучи открытым отраслевым стандартом, обеспечивает параллелизм на уровне инструкций и позволяет проводить вычисления одновременно на GPU и на

CPU. Так как OpenCL является абстрактным стандартом, поддержка его выпадает на долю производителей GPU. И AMD и CUDA имеют технологии-прослойки, обеспечивающие работу OpenCL, но поддержка ускорителей nVidia реализована через CUDA, что добавляет еще одного посредника в процесс вычислений.

Существуют и другие проекты, пытающиеся перенести вычислительную нагрузку CFD-задач на GPU. К примеру, проекты Culises и SpeedIt, оба из которых представляют собой библиотеки, реализующие поддержку GPU в пакете OpenFOAM и предоставляющие очередного посредника в цепочку вычислений. Они используют общий подход, не ограничивая типы задач и оборудования в системе, но, исходя из публично доступных данных, эти решения обеспечивают максимальное ускорение в 1,7 и 3,5 раза соответственно [5, 6]. Для практических применений данные решения не являются достаточно эффективными.

Индивидуальный подход. Хотя универсальный подход к переносу CFD-вычислений на GPU был бы идеален для программиста, в реальности есть несколько факторов, требующих рассмотрения.

Во-первых, каждый GPU имеет свои особенности архитектуры. Различаются объем, тип и иерархия памяти — по аналогии с CPU современный графический ускоритель имеет несколько областей памяти. Обычно присутствует разделение на локальную (меньшую, но более быструю) и глобальную (большую, но медленную) области. Различается количество мультипроцессоров и исполнительных блоков в них и т. д.

Во-вторых, каждая задача также имеет свои особенности. К примеру, даже в пределах одной задачи возможно разное количество ячеек сетки, а между задачами может различаться набор симулируемых параметров.

Создать решение, подходящее под все возможные комбинации задач и аппаратного обеспечения, не представляется возможным. Поэтому в этой работе рассматривается задача обеспечения максимального ускорения для конкретного типа CFD-задач на конкретных моделях GPU.

В качестве платформы для вычислений взята NVIDIA Tesla P40. Задачей-примером является простейшая тестовая задача из модуля FireFoam, пакета OpenFOAM. Технологией посредником выступает OpenCL. Далее рассмотрено, какие показатели могут сыграть важ-

ную роль и какого результата можно ожидать.

Tesla P40 представляет собой профессиональный ускоритель, основанный на GPU GP102, с 3840 ядрами и частотой 1303–1541 МГц. Также карта оборудована 24 GB памяти GDDR5 частотой 7200 МГц и пропускной способностью в 346 GB/с. Потенциальная производительность достигает 12 TFLOPS. Из этих показателей разработчику важны только два: конфигурация ядер и параметры памяти. Процессоры Pascal используют кластерную структуру по типу предшественников, где каждый кластер GPC (Graphics Processing Cluster), по сути, является самостоятельным вычислительным блоком. В основе GP102 лежат шесть кластеров. Младшие исполнительные блоки сгруппированы в пять мультипроцессорных блоков SM. Каждый такой крупный блок обработки данных связан со своим блоком обработки геометрии Polymorph Engine. Блок SM обладает конфигурацией, унаследованной от Maxwell, и включает 128 ядер CUDA. Из этих показателей выходит, что за один такт ускоритель теоретически может выполнять до 7787 операций с плавающей точкой одинарной точности, с возможностью использования векторных операций для обработки нескольких наборов данных меньшей разрядности за один такт.

Память часто играет важную роль в параллельных вычислениях и часто становится ограничивающим фактором. Взаимодействие между памятью ускорителя и оперативной памятью системы осуществляется через PCI-шину, пропускная способность которой не бесконечна. В большинстве случаев невозможно уместить все данные прямо в памяти ускорителя, поэтому обмен данными через шину становится неизбежным. В связи с этим, важно максимально сократить объем лишних операций чтения/записи, чтобы минимизировать простой ускорителя. Тем не менее, даже в лучшем случае на одну операцию обработки обычно приходится 4–5 операций чтения/записи. Определить реальную производительность ускорителя в терминах данных/секунду практически невозможно, так как это сильно зависит от остальных параметров системы и особенностей конкретной задачи.

Одним из важнейших этапов симуляции в OpenFOAM является создание так называемой сетки. Сетка представляет собой набор ячеек в пространстве модели, построенный по принципу окто-дерева. Ячейки могут быть различной формы и размера и вычисление параметров в ячейках происходит полунезависимо. Значение параметров

в ячейке зависит от значений в ней и в соседних ячейках в предыдущий момент времени. Это значит, что теоретически вычисление каждой ячейки можно доверить отдельному процессорному ядру. Эта задача включает в себя множество операций, но их количество почти не различается между ячейками, что транслируется в ускорение, пропорциональное количеству параллельных операций.

Детали реализации OpenCL тоже играют роль в определении потенциала ускорения. Система реализует распределенные вычисления через систему WorkGrid. Для выполнения задачи разработчиком создается виртуальная трехмерная структура, состоящая из экземпляров ядра, каждый из которых напрямую транслируется на процессорное ядро при исполнении. Экземпляры объединены в группы произвольного размера, которым доступна более быстрая локальная память напрямую на видеокарты. Также каждому экземпляру доступна приватная память. В начале выполнения задачи хост-программа загружает данные в память видеокарты или другого вычислительного устройства и запускает на выполнение специальную подпрограмму, называемую kernel, которая исполняется напрямую на ядре для каждого экземпляра. Выполнение всех экземпляров происходит параллельно в пределах количества процессорных ядер.

Таким образом, есть возможность транслировать ячейки модели OpenFOAM на экземпляры ядра OpenCL и запустить их выполняться на ядрах GPU. Это требует внесения глубоких изменений в исходный код модуля OpenFOAM и создания kernel, выполняющих необходимые вычисления.

Заключение. С развитием архитектур графических ускорителей и их нарастающей специализацией становится все сложнее переносить вычислительные задачи на платформу GPGPU. Попытки реализовать абстрактный подход к распределению вычислительной нагрузки и данных приводит к результатам значительно хуже ожидаемых. Использование индивидуального подхода теоретически позволяет достичь максимального ускорения в 250 раз. Накладные расходы на передачу данных и закон Амдала снижают этот потенциал до 40–60 раз.

Литература

1. Вычислительная гидродинамика // Википедия [Электронный ресурс]: URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Вычислительная_гидродинамика (дата обращения: 18.03.2017).
2. Богданов А. В., Дегтярев А.Б., Храмушин В. Н. Высокопроизводительные вычисления на гибридных системах: будут ли решены «задачи большого вызова»? // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 3. С. 429–437.
3. Закон Мура // Википедия [Электронный ресурс]: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Мура (дата обращения: 18.03.2017).
4. Закон Амдала // Википедия [Электронный ресурс]: URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Амдала (дата обращения: 18.03.2017).
5. Fluidyna [Электронный ресурс]: URL:<http://www.fluidyna.com/content/culises-acceleration-potential> (дата обращения: 18.03.2017).
6. SpeedIT Flow and IBM Power 8 // vrtis.com [Электронный ресурс]: URL:<http://vrtis.com/blog/> (дата обращения: 18.03.2017).

УДК 004.9

Стученков А. Б., Улитина И. А.

Построение изображений по проекциям с использованием анатомического атласа

1. Постановка задачи. Работа посвящена практическому решению задачи восстановления картины среза тела пациента по двум проекциям (рентгеновским снимкам) и анатомическому атласу. Идея решения и обобщенный алгоритм описаны в статьях [1, 2]. Целью данного исследования является детализация шагов алгоритма и его практическая реализация в виде готового приложения. Помимо построения произвольного среза по двум проекциям разработан подход к созданию трёхмерной модели исследуемой области.

Важной составляющей решения является анатомический атлас, представляющий собой набор срезов тела человека (см. рис. 1). В настоящее время подобные атласы получили широкое распространение среди студентов-медиков как хорошее подспорье в процессе прохождения курса анатомии человека. В связи с этим в сети существует огромное количество проектов, таких как [3, 4] и др., которые содержат полные атласы срезов. В качестве материала для данной работы использованы снимки с сервиса Kenhub, а также различные рентгенограммы, которые были найдены в сети Интернет в свободном доступе [5].

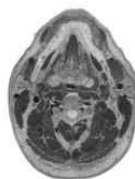


Рис. 1. Пример среза

2. Теоретическое обоснование. Решение подобной задачи имеет большое практическое значение. Например, во многих хирургических

Стученков Александр Борисович – старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: stuchenkov@hotmail.com, тел.: +7(911)283-91-67

Улитина Ирина Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: hg.ulitina@yandex.ru, тел.: +7(921)314-33-85

ческих операциях необходима стимуляция отдельных частей мозга путём воздействия на них электродами. Построение объёмной модели головы, которая была бы фактически применима к конкретному пациенту, это дорогостоящая операция, требующая специализированного аппаратного (томограф) и программного обеспечения.

Подобные исследования крайне сложно организовать в масштабах целого региона, поэтому важна разработка программного решения, которое позволило бы провести визуализацию данных прямо на месте.

Существует метод построения среза тела пациента на основе метода упругой плёнки, учитывающий деформацию внутренних контуров органов [6]. В представленной работе данные о внутренних контурах не учитываются.

Проведённое исследование является основой для будущей разработки полного комплекса, направленного на получение данных, которые на следующих этапах станут материалом для построения объёмной модели.

3. Практическая реализация. В процессе работы над реализацией алгоритма использовались библиотека OpenCV и приложение к MATLAB — Image Processing Toolbox. Также был разработан интерфейс, который даёт возможность не только программисту, но и обычному пользователю воспользоваться программой.

3.1. Разработка интерфейса. Интерфейс был написан на JavaFX и подключен к основной программе, реализованной на C++.

Пользователю предлагается выбрать *аппарат*, при помощи которого были сделаны рентгенограммы, загрузить эти *снимки*, а также указать путь до *анатомического среза из атласа*.

После этого пользователю предлагается указать *уровень*, на котором расположен выбранный ранее срез. Эта возможность реализована двумя способами: при помощи бегунка и с помощью текстового поля под изображением.

3.2. Обработка рентгенограмм и реализация алгоритма. Решение задачи вписывания изображения среза в четырёхугольник, полученный путём пересечения прямых, соединяющих два источника и границы контуров, состоит из трёх этапов.

На первом этапе считываются все входные данные, строится четырёхугольник ABCD (см. рис. 2), основываясь на параметрах оте-

чественных и некоторых импортных моделей *цифровых матричных флюорографов* [7].

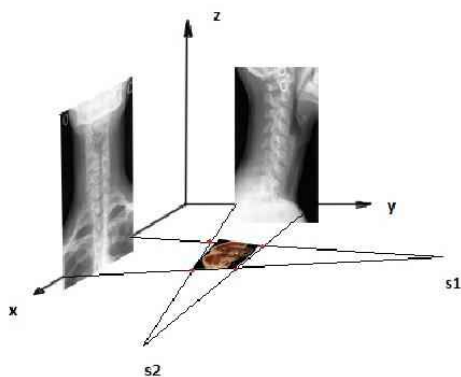


Рис. 2. Пример нахождения четырёхугольника $ABCD$, где $s1$ и $s2$ — источники излучения

Параметры должны быть переведены в пиксели для соответствия размерностей. В найденный четырёхугольник будет производиться вписывание среза. Далее изображение подвергается специальной обработке, которая включает в себя *следующие операции*:

1. Установка значений интенсивностей на изображении с помощью функции *imadjust*, где указан диапазон интенсивностей результирующего изображения. В ходе эксперимента получены следующие параметры для данной функции: значения яркости в диапазоне от 0 до 75/255 преобразуются в значения яркости в диапазоне от нуля до единицы, параметр $\gamma = 1$, что соответствует линейной характеристике передачи уровней и отсутствию гамма-коррекции.
2. Заполнение отверстий (*holes*) на бинарном изображении, получ.

после изменения интенсивности. Используется алгоритм морфологической реконструкции.

3. Поиск контура на изображении (*boundaries*) и сохранение найденного контура на данном изображении. Применяется модифицированный алгоритм отслеживания границ на основе окрестности Мура с использованием критерия останковки Якоба.

На втором этапе вычисляется *линейное преобразование*, используя полученный на предыдущем этапе четырёхугольник $ABCD$ и преобразованное изображение среза.

Сначала находим прямые, параллельные сторонам четырёхугольника $ABCD$, которые касаются крайних точек среза. Получаем четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$. Предлагается следующий вариант реализации данного этапа: для каждой из четырёх сторон обходим контур среза, в каждой точке контура ищем значение коэффициента прямой \bar{b} , сохраняем координаты точки и значение \bar{b} . После этого, осуществляется поиск прямой, которая проходит через крайнюю точку контура среза и является ближайшей к соответствующей стороне четырёхугольника $ABCD$, т. е. расстояние от найденной прямой до стороны четырёхугольника $ABCD$ минимально.

Затем необходимо найти линейное преобразование, используя полученные данные. Оно позволит вычислить новые координаты для каждой точки среза.

Поскольку система

$$-x_0 \sin \phi_i + y_0 \cos \phi_i + k \bar{b}_i \cos \phi_i - h_i = b_i \cos \phi_i, \quad i = 1, \dots, 4$$

содержит четыре уравнения и четыре неизвестных, а именно x_0, y_0, k, h , где h — это расстояние между двумя контурами, а x_0, y_0, k — это коэффициенты линейного преобразования

$$\bar{x} = kx + x_0, \quad \bar{y} = ky + y_0.$$

Третий этап предполагает *корректировку решения системы*, полученного на втором этапе. Корректировка включает в себя редактирование координат расположения среза в пространстве, а также подгон изображения под границы четырёхугольника после применения линейного преобразования. В конце данного шага, получаем

срез, вписанный в четырёхугольник $ABCD$.

4. Полученные результаты. Разработанная реализация даёт возможность получить данные, которые затем можно использовать для построения объёмной модели. Подобный подход также применим для набора снимков МРТ, а не срезов, который необходимо представить в виде объёмной модели.

Литература

1. Sergeev S. L., Stuchnikov A. B. An algorithm of deformation of a flat image // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). 2014. P. 159.
2. Sergeev S. L., Stuchnikov A. B. Modeling of deformation of an elastic body slice // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). 2014. P. 158.
3. Visible Human Project [Электронный ресурс]: URL:https://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html (дата обращения: 20.12.16).
4. Cross Sections — Online Atlas with Pictures and Diagrams [Электронный ресурс]: URL:<https://www.kenhub.com/en/atlas?lecture=cross-sections> (дата обращения: 22.01.17).
5. Радиография — Сайт врачей-радиологов. Medical Radiologists [Электронный ресурс]: URL:<http://radiographia.ru/node/9069> (дата обращения: 22.10.15).
6. Сергеев С. Л., Севрюков С. Ю. Использование метода упругой пленки в программном комплексе построения среза тела пациента // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 1. С. 73—79.
7. Характеристики рентгенофлюорографических комплексов для исследования грудной клетки [Электронный ресурс]: URL:http://www.renex.ru/texts/vibor_fluorograph_tab1.htm (дата обращения: 05.09.16).

УДК 004.93'14

Таранова О. В.

Сравнение методов обучения без учителя для иерархического выделения признаков в сверточных нейронных сетях

Рекомендовано к публикации доцентом Козыченко В. А.

1. Введение. Сверточные нейронные сети [1] используются во многих научных и прикладных приложениях [2]. Но классический способ обучения сетей с учителем, основанный на методе обратного распространения ошибки в большинстве случаев занимает много времени и не гарантирует избежания локальных минимумов. Поэтому для предобучения сетей полезно использовать методы обучения без учителя, так как они позволяют обнаруживать и извлекать полезные свойства из данных и осуществлять поиск внутренних взаимосвязей между объектами только на основе обучающего множества. Рассматривая нейронные сети, можно отметить, что слои нейронной сети, обученные без учителя, могут следовать друг за другом, образуя иерархию признаков. Как правило, предобучение сети методами обучения без учителя позволяет избежать попадания в локальные минимумы и ускорить в целом процесс обучения сети при дальнейшей настройке весов.

В данной работе сравниваются процессы обучения сверточных сетей, которые были предобучены с помощью методов обучения без учителя, и сверточной сети, веса которой не были заранее настроены.

2. Архитектура сетей, используемых для предобучения. Одними из видов сетей, способных обучаться на множестве, состоящем лишь из входных векторов, являются автокодировщик и самоорганизующаяся карта Кохонена.

2.1. Auto-Encoder (AE). Автокодировщик представляет собой двухслойный перцептрон [3], в котором размерность входного слоя совпадает с размерностью выходного слоя.

Так как на выходе автокодировщика ожидается отклик наиболее

Таранова Ольга Владимировна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ek.stepano@yandex.ru, тел.: +7(921)871-78-26

близкий к входному сигналу, автокодировщик позволяет применять обучение без учителя, используя метод обратного распространения ошибки.

Главной целью данной сети является выделение общих признаков, которые формируются в скрытом слое. Чтобы заставить сеть находить эти признаки и за счет этого сжимать данные, скрытый слой делают меньшей размерности по сравнению с входным и выходным слоями.

2.2. Convolutional Auto-Encoder (CAE). Обычный полносвязный автокодировщик не учитывает двумерную размерность изображения, т. е. при его использовании у каждого нейрона скрытого кодирующего слоя веса будут связаны со всеми пикселями входного изображения, что не подходит для выделения локальных признаков, а также приводит к избыточной трате ресурсов. Из этого следует, что полносвязный АЕ плохо приспособлен для работы с изображениями. Но эти особенности хорошо учитывает сверточная нейронная сеть. Поэтому, перенимая идеи об общих весах и о локальной связности нейронов с некоторой областью предыдущего слоя, получаем новую архитектуру автокодировщика — CAE. В новой архитектуре входным слоем будет $(n \times n)$ -матрица X , представляющая собой изображение. Скрытым слоем будет слой свертки, а выходной слой будет представлять собой слой обратной свертки. Таким образом, представление входной матрицы X после прохождения кодирующего сверточного слоя

$$h_k = f(X \otimes W^k + b^k),$$

где k — номер ядра свертки, f — вектор-функция активации, b^k — коэффициент смещения для k -го ядра свертки, W^k — веса k -го ядра свертки, а \otimes означает двумерную свертку [4], h_k — карта признаков k -го ядра свертки. Тогда выход сети будет иметь вид

$$Y = f\left(\sum h_k \otimes \widehat{W}^k + \widehat{b}\right),$$

где Y — матрица, размерностью которой совпадают с размерностями матрицы X .

2.3. Stacked Convolutional Auto-Encoders (CAES). Можно заметить, что к набору карт признаков $\{h_1, \dots, h_n\}$, полученных после прохождения кодирующего сверточного слоя, также можно применить CAE, аналогично как и к входному изображению. Объединяя таким образом несколько CAE (см. рис. 1), получаем сеть, состоящую уже из нескольких кодирующих сверточных слоев и соответствующих декодирующих слоев обратной свертки. Продолжая эту операцию до тех пор, пока размерность выхода последнего кодирующего сверточного слоя достаточно велика, чтобы при последовательном декодировании слоями обратной свертки можно было получить образ входного изображения без существенных искажений, получим одну глубокую сеть, где сначала входной сигнал последовательно проходит через кодирующие сверточные слои, тем самым уменьшая размерность их выходов, а затем последовательно декодируется [5].

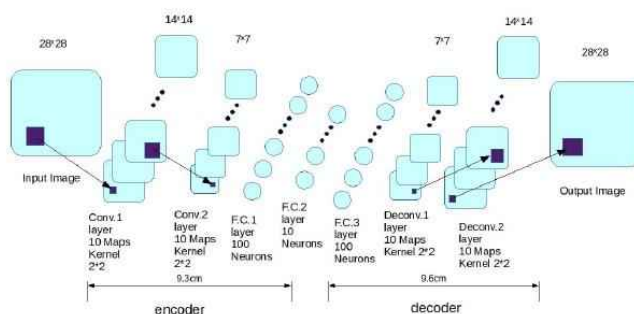


Рис. 1. Пример CAES

2.4. Самоорганизующаяся карта Кохонена. Самоорганизующаяся карта Кохонена — это тип искусственной нейронной сети, которая обучается с помощью обучения без учителя для получения дискретизированного представления входного пространства обучающей выборки меньшей размерности.

Алгоритм обучения:

1. Вектор X подается на вход сети.

2. Определяются расстояния D_j (в n -мерном пространстве) между X и весовыми векторами W_j каждого нейрона. В евклидовом пространстве это расстояние вычисляется по формуле

$$D_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - w_{ij})^2},$$

где x_i — компонента i входного вектора X , w_{ij} — вес входа i нейрона j .

3. Нейрон, который имеет весовой вектор, самый близкий к X , объявляется победителем. Этот весовой вектор, называемый W_c , становится основным в группе весовых векторов, которые лежат в пределах расстояния D от W_c .
4. Группа весовых векторов настраивается в соответствии со следующим выражением:

$$W_j(t+1) = W_j(t) + \alpha[X - W_j(t)]$$

для всех весовых векторов в пределах расстояния D от W_c .

5. Повторяются шаги с 1 по 4 для каждого входного вектора.

В процессе обучения нейронной сети значения D и α постепенно уменьшаются [6].

3. Процесс обучения. Результаты. Для обучения сетей использовался стандартный метод обратного распространения ошибки с постоянным шагом, измененный в соответствии с особенностями сверточных нейронных сетей. В качестве целевой функции использовалось среднеквадратичное отклонение. Остановка процесса обучения происходила после достижения определенного количества итераций.

Сравним процесс обучения двух сверточных нейронных сетей: предобученной CAES и предобученной CAES с последним классифицирующим слоем, обученным по алгоритму Кохонена. Обучать будем на множестве рукописных цифр из MNIST. В обучающей выборке 55 тысяч изображений, каждое изображение имеет размер 28×28 пикселей. Погрешность будем считать на тестовом множестве, содержащем 10 тысяч изображений.

В качестве моделей были взяты сети, состоявшие из четырех сло-

ев, двух сверточных и двух полносвязных (см. таблицу).

Таблица. Конфигурация

номер слоя	Количество ядер свертки/нейронов	Размер рецептивного поля
1	10	2×2
2	10	2×2
3	100	—
4	10	—

Первая представляла собой классическую сверточную сеть. Вторая — предобученную CAES с отброшенной декодирующей частью. Третья сеть строилась на основе второй, где выходной слой обучался с помощью алгоритма Кохонена. На рис. 2 представлены результаты работы алгоритма обратного распространения ошибки для этих сетей.

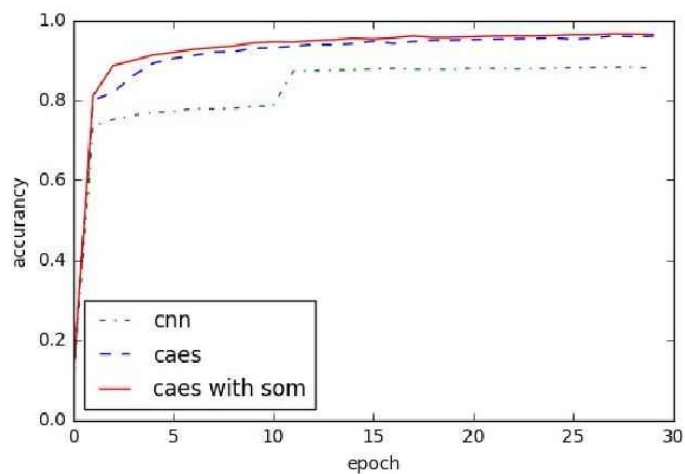


Рис. 2. Процесс обучения сетей

4. Выводы. Проведено сравнение процессов обучения сверточных сетей, которые были предобучены, и сверточной нейронной сети,

для которой предобучение не проводилось. Из рис. 2 видно, что при применении предобучения для сети повышается скорость её обучения и вероятность избежания локальных минимумов.

Литература

1. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. 2-е изд. М.: Вильямс, 2016. 1104 с.
2. Коноплев Д. В. Автоматическое приведение в соответствие номенклатуры товаров поставщика и информационного логистического центра // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 432–436.
3. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика, 2004. 344 с.
4. Deconvolutional Networks [Электронный ресурс]: URL: <http://www.matthewzeiler.com/pubs/cvpr2010.pdf> (дата обращения: 10.09.2016).
5. Stacked Convolutional Auto-Encoders for Hierarchical Feature Extraction [Электронный ресурс]: URL: <http://people.idsia.ch/~ciresan/data/icam2011.pdf> (дата обращения: 15.12.2016).
6. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М.: Мир, 1992. 184 с.

УДК 004.932.2

Тоскин Н. Д., Севостьянов Р. А.

Распознавание траектории баллистического снаряда в удаленной лаборатории

Рекомендовано к публикации профессором Веремеем Е. И.

Введение. В последние несколько лет наблюдается неугасающий интерес к технологиям дистанционного обучения. В качестве примера можно привести проект Coursera [1] или отечественную Национальную платформу открытого образования [2], которые предоставляют доступ к курсам ведущих университетов.

Вместе с платформами дистанционного обучения определенной популярностью пользуются лаборатории удаленного доступа Global Online Laboratory Consortium (GOLC), Labshare [3, 4]. Эти проекты рассчитаны на использование научными сотрудниками и студентами высших учебных заведений. Но удаленный доступ к лабораториям может быть интересен не только им, но и школьным преподавателям физики и самим школьникам, так как зачастую в школах отсутствует необходимое оборудование для проведения наглядных физических экспериментов.

В 2013 году в рамках образовательного проекта «It's physics!» [5] для проведения школьных удаленных лабораторных работ по физике был создан первый стенд для изучения движения тела, брошенного под углом к горизонту [6]. Стенд позволяет удаленно (через сеть интернет) стрелять стальными шариками из электромагнитной пушки Гаусса, установленной пользователем под заданным углом, и передавать изображение с камеры, направленной на стенд.

Изначально на стенде не было установлено дополнительных датчиков для измерения дальности и высоты полета шарика. Пользователи вынуждены были визуально отслеживать место падения и фиксировать расстояние на линейке, расположенной над поверхностью падения. После начала эксплуатации стенда было принято решение разработать систему распознавания для определения параметров по-

Тоскин Николай Дмитриевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: itonik@me.com, тел.: +7(931)250-73-41

Севостьянов Руслан Андреевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: zetoster@gmail.com, тел.: +7(921)883-32-52

лета по видеоряду. Задача состояла из трех частей: выделение всей траектории, определение места первого отскока от поверхности стенда, аппроксимация математической функцией. Данная статья посвящена описанию работы программного обеспечения, реализующего эту задачу. Разработка велась на языке C++ с использованием библиотеки OpenCV [7] для работы с изображением и видеорядом.

Выделение траектории полета шарика. Для определения параметров полета шарика в первую очередь необходимо отделить следы шарика от фона каждого изображения. В связи с тем, что направляющая ось на пушке, показывающая угол наклона, сдвигается в момент выстрела, было использовано попиксельное сравнение с «базовым» кадром, являющимся попиксельным максимумом двух кадров, в которых шарик не оставил следа — до выстрела и после:

$$B[y][x][k] = \max(I_0[y][x][k], I_n[y][x][k]),$$

$$y = \overline{1, h}, \quad x = \overline{1, w}, \quad k = \overline{1, 3},$$

где B — «базовое» изображение, I_0 — кадр до выстрела, I_n — кадр после выстрела, $[y][x]$ — координаты пикселя, k — цветовая компонента, h — высота изображения, w — ширина изображения.

Сравнение производится покомпонентно, так как это позволяет усилить или уменьшить «вес» изменения по отдельной компоненте, а фон в лаборатории равномерного синего цвета. Если значение яркости каждой цветной компоненты пикселя кадра (со следом от шарика) превышало сумму значения яркости компоненты соответствующего пикселя базового кадра и порога (для соответствующей цветной компоненты), то пиксель отмечался как часть следа шарика

$$\text{if } (I_i[y][x][k] > B[y][x][k] + t[k]), \quad k = \overline{1, 3} \Rightarrow (y, x) \in T,$$

где I_i — кадр со следом от шарика, T — множество точек следа шарика в кадре, t — вектор пороговых значений для всех цветных компонент пикселя. В сочетании с фильтром Гаусса для фильтрации шумов на изображении этот метод давал достаточно хорошие результаты.

Определение первого отскока. Главной задачей при анализе видеоряда является выделение части траектории шарика до первого отскока от поверхности стенда для дальнейшего уточнения места

падения и высоты полета шарика с помощью аппроксимации траектории математической функцией. Усложняет эту задачу тот факт, что частота кадров камеры жестко ограничена оборудованием и параметрами сети. На рис. 1 приведено изображение, полученное с помощью наложения следов шарика на «базовое» изображение, иллюстрирующее исходные данные с камеры. Видно, что следы шарика на изображении не образуют непрерывную траекторию. В связи с этим приходится рассматривать отдельные части траектории покадрово. На каждом кадре происходит одна из следующих ситуаций: шарик может набирать высоту (взлетать), набирать высоту и потом терять ее (такое поведение обозначено как «пик»), терять высоту (падать) и отскакивать от стола (рис. 2.4).



Рис. 1. Траектория полета и след шарика после выстрела

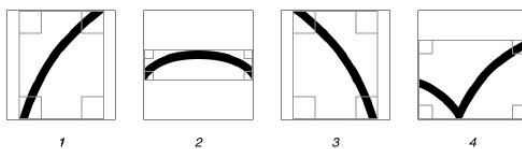


Рис. 2. Возможное поведение шарика в момент экспонирования кадра

Был разработан простой и быстрый способ определения поведения шарика. Находятся границы минимального прямоугольника, в котором заключен след. Когда шарик набирает высоту, след обязательно попадет в нижний левый и верхний правый угол. В «пи-

ке» след попадет в один либо оба нижних угла одновременно. Когда шарик теряет высоту, след обязательно попадет в верхний левый и нижний правый угол. Когда шарик отскакивает, след попадет в один либо оба верхних угла. Может также случиться, что в случае «пика» след попадет во все четыре угла (т. е. выродится в прямую, параллельную горизонту).

Алгоритм анализа видеоряда выглядит следующим образом. След шарика из каждого кадра добавляется на изображение траектории, пока не выполнится одно из двух условий:

1. В текущем кадре найден отскок. Тогда текущий кадр не добавляется в изображение траектории и анализ видеоряда заканчивается. Траектория дальше не интересна для рассмотрения.
2. В предыдущем кадре найдено «падение», а в текущем — любой другой тип следа. В этом случае так же, как и в предыдущем, текущий кадр игнорируется, и анализ видеоряда заканчивается.

Таким образом выполняется первая задача — выделение части траектории шарика до отскока от поверхности.

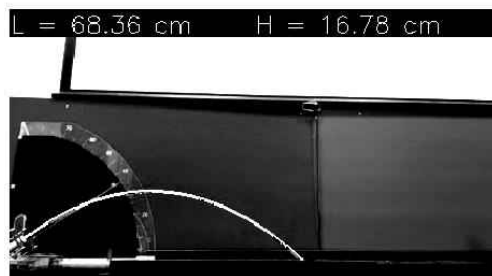


Рис. 3. Результат работы программы

Аппроксимация и вывод результатов. В условиях описанной удаленной лаборатории сопротивлением воздуха можно пренебречь. Таким образом, траекторию полета можно аппроксимировать параболой и при помощи метода квадратичной регрессии определить ее

коэффициенты. Считая ось вращения пушки началом координат и зная параметры камеры, можно рассчитать параметры полета в реальных единицах измерения. После этого аппроксимированная траектория полета подсвечивается на изображении и выводятся полученные параметры (рис. 3).

Результаты тестирования и планы развития. При малых углах выстрела (10–15 градусов) или очень малой начальной скорости шарика работа алгоритма не гарантирована и только в редком случае выдает верные результаты. В нормальных условиях алгоритм выдает верный результат в примерно 97,5% опытов, что является удовлетворительным результатом.

В данный момент такие параметры, как реальная длина и высота стола стенда в кадре, а также координаты пушки на изображении задаются вручную в конфигурационном файле. В дальнейшем планируется использовать специальные метки, чтобы определять эти параметры автоматически в процессе работы стенда.

Литература

1. Coursera [Электронный ресурс]: URL:<https://coursera.org> (дата обращения: 15.03.2017).
2. Национальная платформа открытого образования [Электронный ресурс]: URL:<https://openedu.ru> (дата обращения: 15.03.2017).
3. Global Online Laboratory Consortium [Электронный ресурс]: URL:<http://online-lab.org> (дата обращения: 15.03.2017).
4. Labshare [Электронный ресурс]: URL:<http://www.labshare.edu.au> (дата обращения: 15.03.2017).
5. Проект «It's physics!» [Электронный ресурс]: URL:<http://www.its-physics.org> (дата обращения: 15.03.2017).
6. Севостьянов Р. А., Попов А. П. Опыт создания стендов удаленного доступа для проведения школьных лабораторных работ по физике // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2014. № 10. С. 792–798.
7. OpenCV [Электронный ресурс]: URL:<http://opencv.org> (дата обращения: 15.03.2017).

УДК 519.688

Туренко А. А.

Сравнительный анализ инструментов сбора данных о дискуссиях пользователей в социальных сетях

Рекомендовано к публикации доцентом Блекановым И. С.

1. Введение. Социальные сети являются важной компонентой социальной жизни и привлекают внимание множества исследователей. Одной из основных причин важности анализа социальных сетей является их массовость. Они относятся именно к той методике интернет проектирования, в которой система активно развивается и улучшается в большом потоке самими пользователями, а именно, Веб 2.0 [1]. В таких условиях рост информации, накапливаемой социальными сетями, экспоненциален, что показано, например, в исследованиях «Netcraft» [2].

В статье ставятся задачи сравнительного анализа инструментов сбора, основанных на использовании API социальных сетей, а также апробации собственного комплекса сбора данных и исследования дискуссий, использующего «Twitter API».

2. Методы сбора данных для исследования дискуссий. Автоматизированный сбор данных из социальных сетей является начальным и ключевым этапом. Рассмотрим различные инструменты и стратегии сбора данных:

1. Эмуляция поведения пользователя.
2. Использование специализированных коммерческих сервисов.
3. Использование бесплатных API социальной сети.

Первый метод предполагает использование для сбора информации стратегий, не взаимодействующих с API, например, написание поисковых роботов. Основной проблемой является время обработки, необходимое для быстрого роста сети. При работе с большими объемами данных строят распределенные системы для эффективной балансировки ресурсов [3]. В исследованиях социальных сетей

Туренко Анастасия Алексеевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: aaturenko@gmail.com; тел.: +7(981)781-34-04

такой подход имеет важное преимущество, он эмулирует поведение реального пользователя, что делает исследование точным и полным.

Таблица 1. Сравнение платного и бесплатного API «Twitter»

Сервис	Преимущества	Недостатки
«Gnip»	<p>Полный доступ к данным.</p> <p>Доступ к данным историческим и в реальном времени.</p> <p>Надежность и устойчивость.</p> <p>Встроенные сервисы обработки.</p> <p>Доступ к потокам данных других социальных сетей.</p> <p>Большое количество данных на запрос (до 500).</p> <p>Ограничение количества запросов несущественно (120 в мин.).</p>	<p>Высокая стоимость.</p> <p>Для отличных от «Twitter» социальных сетей реализует инструменты сбора с использованием их открытого API.</p>
REST Search API	<p>Доступ к историческим данным.</p> <p>Бесплатный.</p> <p>Полная документация.</p> <p>Удобные операторы запросов.</p> <p>Большой список GET и POST запросов.</p> <p>Готовые библиотеки, реализующие прозрачное взаимодействие.</p> <p>Удобный формат данных</p>	<p>Данные ограниченные.</p> <p>Локальность на одной социальной сети.</p> <p>Большие ограничения на количество запросов.</p> <p>Отсутствие дополнительной аналитики.</p>
Streaming API	<p>Бесплатный.</p> <p>Данные в реальном времени.</p> <p>Доступ с низкой задержкой.</p> <p>Готовые библиотеки.</p> <p>Несколько базовых потоков: общественные, пользовательские и многопользовательские.</p>	<p>Ограничение на запросы при многократном подключении (420 запросов).</p> <p>Неполные данные.</p> <p>Неотсортированный порядок.</p> <p>Дублирование сообщений.</p> <p>Многопользовательская версия недоступна.</p> <p>Объем потоковой передачи непостоянный.</p>

Коммерческие сервисы применяются в бизнес решениях. Их ярким представителем является платформа «Gnip» [4]. Преимущества и недостатки таких систем приведены в таблице 1.

Бесплатная служба API является доступной и используется многими исследователями в крупных проектах и аналитических платформах [5]. Таблица 2 демонстрирует ограничения, налагаемые на информационные системы, основанные на использовании API

«Twitter» и «Facebook» [6, 7]. Несмотря на ограничения, с их помощью можно получить набор данных для исследования, но необходимо оценить их качество и актуальность.

Таблица 2. Ограничения API «Facebook» и «Twitter»

Характеристики	Twitter API	Facebook API
Частота запросов	15 минут	час
Количество запросов	450 для приложения	200 на клиента
Количество записей на запрос	100	—
Аутентификация	нужна	нужна
Полнота данных	нет	нет
Взаимовязи объектов	100 ретвитов	до 25 ответов
Поиск по хештегу	есть	нет
Пакетные запросы	нет	есть

3. Эксперимент. В ходе исследования разработан собственный программно-аналитический комплекс, позволяющий анализировать дискуссию пользователей, данные которой собираются с помощью «Twitter Search API». Такая задача сводится к исследованию ориентированного графа, где узлы — это пользователи, а ребра — комментарии, репосты или «лайки».

Активность пользователей собирается в виде постов, публикуемых пользователями в отношении ключевых слов, или «хештегов» и профилей этих пользователей. В эксперименте поиск «твитов» осуществлялся по «хештегу» «Brexit» за 23.06.2016 и 24.06.2016.

Была получена информация более чем по 2 млн. «твитов» и 1 млн пользователей, по которой требовалось составить список активных и авторитетных пользователей, получить динамику их публикационной активности, выявить пики дискуссии по количеству постов, зависимости количества пользователей от частоты публикаций. Результаты приведены в таблицах 3, 4 и на рис. 1, 2.

Таблица 3. Наиболее активные пользователи по количеству публикаций

Пользователь	Заблокирован	Количество публикаций
AliUzairM	да	941
LiveEUDebate	нет	730
InvestingLatest	нет	719
serge poznanski	нет	686
SpiderFinance	нет	555

Таблица 4. Наиболее авторитетные пользователи по количеству «репостов»

Пользователь	«Репосты»	«Лайки»
BBCBreaking	72054	39108
CNN	38148	2976
business	33668	14987
golub	33348	31052
PrisonPlanet	28522	4248

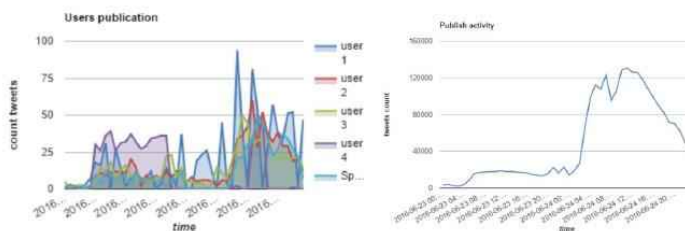


Рис. 1. Динамика авторитетных пользователей по публикационной активности и график публикационной активности

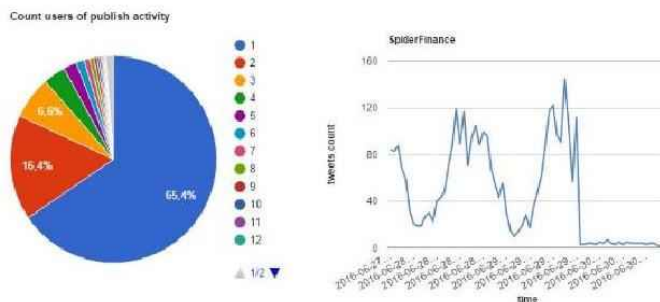


Рис. 2. Диаграмма зависимости количества пользователей от частоты публикаций и график публикационной активности пользователя SpiderFinanca

Полученные данные передаются экспертам для более детального изучения пользователей, выделенных из дискуссии.

4. Выводы. Разработка методик сбора данных является важной для исследовательского процесса. В работе приведены основные подходы к сбору информации и выявлены их недостатки. При разработке собственного инструмента сбора использован общедоступный «REST Search API» социальной сети «Twitter» и выделены его особенности и ограничения. Основная проблема — отсутствие целостности данных, что оказывает негативное влияние на выделение социальных закономерностей при работе в определенной тематикой. Учитывать каждое мнение в виде отдельной публикации или ответа на нее очень важно. Поэтому инструмент сбора, использующий API как источник информации, подходит для использования математических методов, но не для социологического исследования.

Литература

1. What Is Web 2.0 [Электронный ресурс]: URL:<http://www.oreilly.com/pub/a/web2/archive/what-is-web-20.html> (дата обращения: 20.03.2017).
2. Total number of websites [Электронный ресурс]: URL:<https://news.netcraft.com/archives/2017/02/27> (дата обращения: 20.03.2017).
3. Li B., Chan K.C. A fast big data collection system using MapReduce framework // CCIS 2014 – Proceedings of 2014 IEEE 3rd International Conference on Cloud Computing and Intelligence Systems. 2014. No 7175793. P. 530–535.
4. Gnip [Электронный ресурс]: URL:<https://gnip.com/sources/> (дата обращения: 16.03.2017).
5. Tutorial: Social Media Data Collection [Электронный ресурс]: URL:<https://netlytic.org/home/?p=10908> (дата обращения: 17.03.2017).
6. The Twitter Search API [Электронный ресурс]: URL:<https://dev.twitter.com/rest/public/search> (дата обращения: 15.03.2017).
7. Facebook Graph API [Электронный ресурс]: URL:https://developers.facebook.com/docs/public_feed (дата обращения: 15.03.2017).

УДК 004.932.1

Фаустов Б. А.

Поиск похожих изображений

Рекомендовано к публикации доцентом Гришкиным В. М.

1. Введение. Поиск похожих изображений является весьма важной задачей. При работе с большим объёмом данных возникают проблемы с хранением и сортировкой. Поиск похожих изображений позволяет автоматизировать процедуру формирования тренировочных наборов при создании систем распознавания изображений и отработки алгоритмов обучения нейронных сетей [1]. С его помощью эффективно решаются задачи классификации изображений [2], удаления дубликатов, отслеживания нарушений авторских прав. Для оценки близости множественных представлений изображений применяются различные коэффициенты сходства множеств, например, коэффициент Жаккара [3]. Вычисление коэффициентов сходства изображений напрямую является достаточно трудоёмкой задачей. Для быстрого приближенного вычисления коэффициента Жаккара можно использовать метод MinHash [4]. Для сравнения больших объемов данных применяется локально-чувствительное хэширование (locality-sensitive hashing, LSH) — вероятностный метод понижения размерности многомерных данных [5]. Этот метод позволяет строить структуру для быстрого приближенного (вероятностного) поиска n -мерных векторов, «похожих» на искомый шаблон. В данной работе рассмотрено использование методов MinHash и LSH для сигнатур, получаемых с помощью этих методов. Алгоритмы определения похожих изображений реализованы в виде программы в среде Wolfram Mathematica 11.0.1.

2. Реализация и тестирование алгоритмов. Цель данной работы — описать программную реализацию различных методов определения похожих изображений и сравнить результаты их работы. Была рассмотрена база из 5586 изображений в формате JPEG с размерами по ширине от 112 до 1000 пикселей и высоте от 38 до 1000 пикселей включительно. Средняя ширина изображения составила

Фаустов Богдан Андреевич — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: bogfaust@gmail.com, тел.: +7(906)258-32-32

571 пиксель, а средняя высота — 459 пикселей. Среди данных изображений были группы изображений, отличающиеся друг от друга только различной обрезкой, надписями и по небольшим фрагментам. Параметры алгоритмов, такие как количество диапазонов значений компонент цветов, выбирались таким образом, чтобы похожие изображения успешно находились. Для сравнения изображений различных размеров использовалось приведение размеров к эталонному разрешению (получение эскизов). Опытным путем было установлено, что для определения похожих изображений в данной базе хорошо подходит эталонное разрешение 16×16 пикселей. Цвет каждого пикселя полученного эскиза кодировался методом TrueColor (24 бит на пиксель). По этому методу цвет пикселя представляется с использованием 256 уровней для каждой из трех компонент модели RGB: красного (R), зеленого (G) и синего (B), что в результате позволяет закодировать $16\,777\,216$ (224) различных цветов. Таким образом, каждое изображение описывалось массивом целых чисел от 0 до 255 включительно с размерами $16 \times 16 \times 3$ (цветовой матрицей). Такое описание одного изображения занимает 768 байт. Для реализации алгоритмов была выбрана система Wolfram Mathematica 11.0.1, так как в ней содержатся удобные встроенные функции для работы с изображениями, обработки, анализа и визуального представления данных. Также стоит отметить, что используемый высокоуровневый мультипарадигмальный язык программирования Wolfram Language и удобная система встроенных функций позволяют получать очень короткий и интуитивно понятный код, что уменьшает время разработки и облегчает понимание работы программы.

2.1. Сравнение цветových матриц. Пусть задано изображение (образец), для которого требуется найти наиболее похожие изображения из имеющейся базы. Представим данное изображение описанным выше методом в виде цветовой матрицы размером $16 \times 16 \times 3$. После этого для поиска похожих на образец изображений достаточно обойти в цикле все цветových матрицы в базе, для каждой вычислить норму разности между этой матрицей и цветовой матрицей образца и найти в этом цикле изображение из базы, на котором достигается наименьшее значение нормы. В качестве нормы была использована сумма модулей всех компонент цветовой матрицы, так как она вычисляется наиболее просто и учитывает отклонения всех компонент.

2.2. Коэффициент Жаккара. Представим эскиз данного изображения-образца в виде множества цветов, состоящего из 16×16

цветов его пикселей. В качестве цвета пикселя будем использовать 3-мерный вектор целых чисел — компонент RGB, причем будем использовать числа от 0 до 15, разбив диапазон чисел от 0 до 255 из цветовой матрицы на 16 групп для увеличения вероятности совпадения цветов в изображениях. Тогда для поиска похожих на образец изображений можно обойти в цикле все множества цветов в базе, вычислить коэффициент Жаккара между каждым таким множеством и множеством цветов образца и найти в этом цикле изображение из базы, на котором достигается наибольшее значение коэффициента Жаккара.

2.3. Метод MinHash. Чтобы ускорить вычисление коэффициентов Жаккара для рассмотренных цветовых множеств, воспользуемся приближенным методом MinHash. Для этого нужно предварительно вычислить матрицу сигнатур. Для ее получения зададим 1000 случайных хэш-функций со значениями от 0 до $16^3 = 4096$, отображающих цвет (вектор с тремя компонентами от 0 до 15) в число. Далее для каждого изображения из базы применим эти функции к каждому цвету из множества цветов данного изображения, и таким образом найдем наименьшее значение каждой хэш-функции для каждого изображения. После этого для поиска похожих на образец изображений достаточно вычислить вектор сигнатур для множества цветов данного образца, и затем найти в цикле изображение из базы, столбец из матрицы сигнатур которого имеет наибольшее количество одинаковых компонент с вектором сигнатур образца.

2.4. Метод LSH для сигнатур метода MinHash. Для ускорения работы метода сравнения MinHash-сигнатур используем метод понижения размерности LSH. Для работы с этим методом без перестроения корзин требуется изображение-образец выбирать из базы, по которой были построены корзины. Разобьем матрицу сигнатур на группы по две строки. Далее в каждой группе выделим некоторое количество корзин, каждая из которых будет содержать по крайней мере два (этот параметр можно увеличивать для получения меньшего количества малозначимых корзин) изображения, которые имеют одинаковое значение хэш-функции от вектора из двух значений MinHash, находящихся в данной группе. После того, как все корзины построены, для поиска похожих на образец изображений можно выбрать все корзины, содержащие данный образец. Затем можно выполнить поиск наиболее часто встречающихся изображений из этих корзин.

3. Анализ полученных результатов. Сравнение цветковых матриц по норме требует значительных затрат времени на вычисление норм разностей матриц, что не позволяет эффективно применять данный алгоритм для решения задач классификации изображений. В отличие от других методов, данный метод использует представление изображения в виде упорядоченных элементов и, таким образом, позволяет сравнивать изображения с сохранением их структуры. Прямое вычисление коэффициентов Жаккара для сравнения множественных представлений изображений занимает очень много времени. Метод MinHash представляет собой быстрое и эффективное приближение такого способа и пригоден для решения задач классификации изображений. На рис. 1 представлено измеренное время (в секундах) работы программы сравнения MinHash-сигнатур в зависимости от количества изображений в базе.

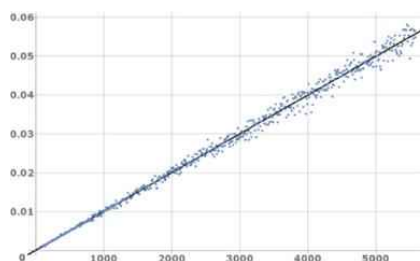


Рис. 1. Время работы программы в зависимости от количества изображений

В случае, если размерность векторов сигнатур высока и время работы алгоритма MinHash неприемлемо, ее можно уменьшить, используя LSH. На время работы алгоритма непосредственно влияет количество построенных корзин. Использование корзин при правильном подборе параметров также позволяет автоматически решать задачи разделения изображений на группы похожих между собой. Метод LSH на имеющихся данных показал лучшее время работы из рассматриваемых алгоритмов. На рис. 2 представлено измеренное время (в секундах) работы программы LSH для MinHash-сигнатур в зависимости от количества изображений в базе.

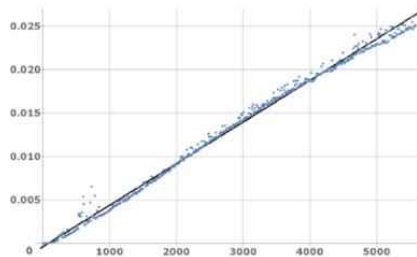


Рис. 2. Время работы программы в зависимости от количества изображений

4. Заключение. Рассмотрено использование методов MinHash и LSH для сигнатур, получаемых с помощью этих методов. Данные алгоритмы определения похожих изображений реализованы в виде программы в среде Wolfram Mathematica 11.0.1, проведено сравнение времени их работы.

Литература

1. Гришкин В. М., Тимошенко Д. М. Параллельный алгоритм обучения нейронной сети с машиной опорных векторов в качестве выходного слоя // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2. С. 75–79.
2. Батюков А. М. Анализ цифровых изображений, основанный на построении стационарного потока на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. С. 115–122.
3. Topics in algorithm design-lecture notes for COMP 5703 // School of Computer Science Carleton University URL:<http://people.scs.carleton.ca/~maheshwa/courses/5703COMP/Notes/edited-notes.pdf> (дата обращения: 14.12.15).
4. Broder Andrei Z., Charikar M., Frieze Alan M., Mitzenmacher M. Min-wise independent permutations // Journal of Computer and System Sciences. 1998. No 60. P. 327–336.
5. Rajaraman A., Leskovec J., Ullman J.D. Mining of Massive Datasets. Cambridge University Press, 2011. 102 p.

УДК 004.93

Холод Н. Г.

Наложение двух снимков земной поверхности

Рекомендовано к публикации доцентом Коровкиным М. В.

1. Введение. Задача наложения двух снимков земной поверхности состоит в том, чтобы найти преобразование, связывающее два снимка земной поверхности, на которых изображена одна и та же местность. При этом, снимки могут быть сделаны при разных условиях, одно из изображений может быть схемой либо панорамным изображением. Эта задача имеет применение при обновлении спутниковых карт или в задаче позиционирования при отсутствии данных GPS. В [1] описан один из методов ее решения. В данной статье предложен алгоритм, ищущий преобразование между снимками в виде преобразования подобия. Выполняется сегментация входных изображений для нахождения областей, похожих на дороги, затем происходит построение скелетного графа областей. Далее, на основе локальной информации о вершинах скелетных графов происходит вычисление преобразования подобия между двумя скелетами с помощью процедуры голосования и метода RANSAC.

2. Предварительная обработка. Для сегментации изображений используется совмещение результатов глобальной и адаптивной бинаризации [2]. Глобальная бинаризация состоит в кластеризации яркости пикселей изображения алгоритмом *k-means* [3], с числом кластеров равным двум. У получившегося бинарного изображения находится скелет с помощью алгоритма, описанного в [4]. Производится фильтрация графа с помощью фильтра Гаусса. Ребра полученного скелетного графа представляют собой кривые, заданные дискретно, а вершины являются точками пересечения нескольких ребер или концевыми точками ребер.

3. Алгоритм сопоставления скелетных графов. Сопоставление скелетов производится в несколько этапов:

Холод Николай Григорьевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nikkholod@mail.ru, тел.: +7(981)844-96-12

1. Вычисление признаков для всех вершин обоих скелетов.
2. Поиск попарных соответствий между всеми парами признаков и процедура их голосования для нахождения возможных ориентаций одного изображения относительно другого.
3. Для каждой ориентации вычисление сдвига и масштаба.



Рис. 1. Результат работы алгоритма

3.1. Вычисление признаков. В качестве признака вершины используется вектор, содержащий углы входа ребер в данную вершину, т. е. углы между осью x и отрезком, аппроксимирующим ребро в окрестности вершины. Из-за возможности искажения графа в окрестности вершин возникает проблема нахождения этого отрезка. Для определения таких отрезков предложена следующая эвристика: последовательно происходит поиск подходящего отрезка длиной l , начиная от $l = l_{max}$ и уменьшение шага на Δl , если отрезок текущей длины не найден. Пусть Γ — ребро скелетного графа, a и b — индексы начала и конца отрезка, $a \geq 0$, $a < b$, изначально $a = 0$, $b = l_{max}$. Алгоритм состоит в следующем:

1. Находится $d_{max} = \max_{i \in (0, l)} d(\Gamma_{i+a}, \overline{\Gamma_a \Gamma_b})$, где $d(\Gamma_k, \overline{\Gamma_a \Gamma_b})$ — расстояние от точки Γ_k до отрезка $\overline{\Gamma_a \Gamma_b}$.
2. Если $d_{max} \leq \varepsilon$, то $\overline{\Gamma_a \Gamma_b}$ — результирующий отрезок, иначе $a = a + \arg \max_{i=0, \dots, l} d(\Gamma_{i+a}, \overline{\Gamma_a \Gamma_b})$, $b = a + l$ и предыдущий шаг повторяется, пока не произойдет выход за пределы ребра. При достижении конца ребра уменьшаем l и начинаем проход сначала, пытаясь найти отрезок меньшей длины.

После нахождения координат концов отрезка, угол входа вычисляется в градусах по формуле $\theta = \frac{180}{\pi} \arctan \left(\frac{\Gamma_{b,y} - \Gamma_{a,y}}{\Gamma_{b,x} - \Gamma_{a,x}} \right) + 180$, $\theta \in [0, 360)$.

Все значения углов для каждой вершины сортируются по возрастанию. Также будем хранить координаты концов отрезков.

3.2. Нахождение соответствий между двумя вершинами. Пусть имеется две вершины скелета со степенями n и m , а θ_i^1, θ_j^2 — углы входа первой и второй вершины соответственно. Необходимо найти такие величины φ_i , что циклические последовательности θ^1 и $\theta^2 + \varphi_i$ в целом совпадут, т. е. после удаления некоторого небольшого количества элементов из этих последовательностей и циклического сдвига одной из них, разница между соответствующими элементами этих последовательностей меньше некоторого наперед заданного значения. Введем функцию $\varrho(\psi_1, \psi_2)$ — разница между углами, $\varrho(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 - \psi_2 + 360T$, где $T = \arg \min_{T \in \mathbb{Z}} |\psi_1 - \psi_2 + 360T|$.

Зафиксируем первую пару индексов соответствия (i, j) . Вычислим $\psi = \theta_i^1 - \theta_j^2$. Далее будем последовательно искать для ребер первой вершины $t_1 = (i + 1) \bmod n, \dots, (i - 1) \bmod n$ такое ребро второй вершины k , что $|\varrho(\psi, \theta_{t_1}^1 - \theta_k^2)| \leq 2\beta$, $k \in [(t_2 + 1) \bmod m, (j - 1) \bmod m]$, где t_2 — индекс последнего добавленного в соответствие ребра второй вершины. Если для t_1 нашлось такое k , то пару (t_1, k) добавляем в соответствие и помечаем. Прделав вышеописанную процедуру для всех непомеченных пар (i, j) , получаем набор соответствий $h_{i,j}^l$, $l \in \{1, 2\}$, $i \in [1, s]$, $j \in [1, r_i]$, где s — число найденных соответствий, а r_i — размер i -го соответствия, т. е. число ребер в соответствии. Чтобы уменьшить число заведомо ложных соответствий, из набора соответствий оставляют только те, у которых $r_i \leq \frac{\max(n, m)}{2}$ и $i \in \arg \max_{j \in [1, s]} r_j$. Углы соответствий φ_i вычисляются как решение

задачи $\sum_{j=1}^{r_i} (\varrho(\theta_{h_{i,j}^1}^1, \theta_{h_{i,j}^2}^2) - \varphi_i)^2 \rightarrow \min$. Ее решением является

$$\varphi_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} \varrho(\theta_{h_{i,j}^1}^1, \theta_{h_{i,j}^2}^2)}{r_i}. \quad (1)$$

3.3. Голосование. Применив описанную выше процедуру для всех пар вершин первого и второго графов, получим набор соответствий H . Введем Λ — аккумулятор, $\Lambda_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq 359$. Каждое соответствие H_i голосует за свое значение ориентации φ_i , оно добавляет в ячейки с $\Lambda_{\lfloor \varphi - \beta \rfloor}$ по $\Lambda_{\lceil \varphi + \beta \rceil}$ значение своего размера r_i .

Локальные максимумы в окне радиуса β берутся в качестве возможных ориентаций. Для каждого локального максимума происходит уточнение угла ориентации по формуле (1), примененной к проголосовавшим за эту ячейку соответствиям $M \subset H$. Далее, для каждой ориентации выполняется вычисление остальных параметров преобразования, в процессе которого некоторые соответствия отсеиваются. Итоговым преобразованием объявляется то, которому соответствует наибольшее число оставшихся соответствий.

3.4. Вычисление сдвига и масштаба. Для вычисления оставшихся параметров используется метод RANSAC, описанный в [5] для вычисления оптимального преобразования, переводящего один набор параллельных прямых в другой. Пусть $l_{i,j}^k$ — прямые, проходящие через j -й отрезок i -го соответствия из M на k -ом изображении. Введем $L^k = \{l_{0,0}^k, l_{0,1}^k, \dots, l_{0,r_0}^k, l_{1,0}^k, \dots, l_{s,0}^k, \dots, l_{s,r_s}^k\}$, где $k = \{1, 2\}$ — наборы прямых. Чтобы добиться параллельности, прямые второго набора поворачивают на угол ориентации для компенсации поворота, но даже после этого они пересекаются под углом меньшим β . Чтобы это устранить, заменим направляющие косинусы прямых на их нормированную полусумму. После этих процедур имеем $L_i^1 = \{a_i, b_i, c_i^1\}$ и $L_i^2 = \{a_i, b_i, c_i^2\}$, $i = 1, \dots, n$ — коэффициенты уравнений прямых. После сдвига и масштабирования прямые первой группы переходят в прямые $L_i' = \{a_i s, b_i s, a_i t_x + b_i t_y + c_i^1\}$. Приравняв коэффициенты L_i^1 и L_i' с учетом однородности, получим уравнение $a_i t_x + b_i t_y - c_i^2 s = -c_i^1$. Взяв три пары прямых, не пересекающихся в одной точке, получим систему

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1^2 \\ a_2 & b_2 & -c_2^2 \\ a_3 & b_3 & -c_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1^1 \\ -c_2^1 \\ -c_3^1 \end{pmatrix},$$

которая имеет единственное решение. Производится 100 итераций RANSAC с этой системой в качестве модели и пороговым параметром d_{\perp} . В качестве функции оценки соответствия данных гипотезе используется расстояние между прямыми. После нахождения преобразования производится пересчет угла поворота по формуле (1) на прямых, удовлетворяющих гипотезе, и запуск RANSAC заново, до тех пор, пока гипотеза не стабилизируется.

4. Результаты экспериментов. Алгоритм был запущен на нескольких изображениях. Для всех тестов параметры алгоритма

выбраны так: $\beta = 7$, $d_{\perp} = 16$, $l_{max} = 50$, $\varepsilon = 1$, $\Delta l = 5$. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 1, 2.



Рис. 2. Результат наложения изображения на схему

5. Заключение. Предложен и реализован алгоритм для решения задачи наложения двух снимков земной поверхности. Алгоритм опробован на нескольких изображениях и дал приемлемые результаты.

Литература

1. Taejung K., Yong-Jo I. Automatic satellite image registration by combination of matching and random sample consensus // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 2003. Vol. 41. P. 1111–1117.
2. Bradley D., Roth G. Adaptive thresholding using the integral image // Journal of graphics, gpu, and game tools. 2007. Vol. 12, No 2. P. 13–21.
3. Hartigan J. A., Wong M. A. Algorithm AS 136: A k-means clustering algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics). 1979. Vol. 28, No 1. P. 100–108.
4. Telea A., van Wijk J. J. An augmented Fast Marching Method for computing skeletons and centerlines // Data Visualization 2002. Proc. Eurographics – IEEE TCVG Symposium / Ed. by D. Ebert, P. Brunet, I. Navazo. New York: ACM, 2002. P. 251–259.
5. Fischler M. A., Bolles R. C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM. 1981. Vol. 24, No 6. P. 381–395.

УДК 519.237.5

Цаплина Д. Д.

Прогнозирование бюджета медицинских учреждений с использованием современных методов анализа данных

Рекомендовано к публикации доцентом Корховым В. В.

1. Введение. Постановка задачи. В настоящий момент качество услуг системы здравоохранения напрямую зависит от выделяемых средств. Информационные технологии уже повсеместно применяются в больницах в виде электронных карт пациентов, сервисов учета больных, но для планирования и распределения бюджета нет единой системы, необходимой для процесса принятия решений. Сотрудники делают прогнозы на месяц вручную, основываясь на данных за прошедшие года, не учитывая тренды, сезонность и факторы, которые могли бы минимизировать погрешность, и сэкономить выделяемые средства. Определение объемов оказанной медицинской помощи застрахованным лицам на ближайший месяц напрямую влияет на дальнейшее финансирование учреждения. В случае превышения установленной нормы в установленный период, разница не компенсируется. А в случае переизбытка выделяемой суммы, бюджет в следующий период урезают.

Поставлена задача: разработать систему, прогнозирующую сумму, на которую пациентам оказали услуги в соответствии с тарифным соглашением по Краснодарскому краю.

2. Исходные данные. За исходные данные взяты обращения в медицинские учреждения застрахованных жителей Краснодарского края с 2013 г. по 2016 г. Возмещение расходов за оказанные услуги, которое должна выплатить страховая медицинская организация (СМО), описывает «Тарифное соглашение в сфере обязательного медицинского страхования на территории Краснодарского края».

Цаплина Дарья Дмитриевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kt.dasha@gmail.com, тел.: +7(931)211-32-74

Полученные данные оказались неполными, с дублирующимися записями и большими выбросами, которые объясняются человеческим фактором и достаточно тяжело протекающим процессом внедрения новых технологий в больницы.

В начале предварительной обработки была восстановлена целостность данных добавлением недостающих дат, а на месте значений записаны нули. Для сглаживания полученного временного ряда выбран метод экспоненциально взвешенного скользящего среднего [1], так как сглаживанию подвергается значение результирующей функции. После этого данные были нормированы и готовы к дальнейшей работе (см. рис. 1).

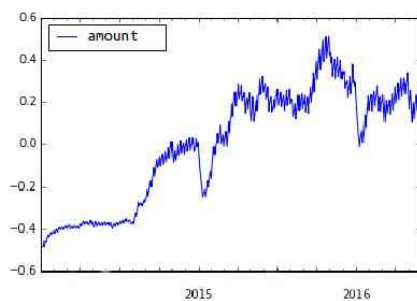


Рис. 1. Обработанные данные. Присутствует тренд

3. Выбор модели. Временной ряд [2] — последовательность измерений значений некоторой переменной, произведенных через равные промежутки времени. Если принять длину промежутка за единицу времени, то можно считать, что измерения x_1, \dots, x_n проведены в моменты $t = 1, \dots, n$.

Перед выбором математической модели анализа временного ряда его необходимо исследовать на стационарность. Ряд $x_t, t = 1, \dots, n$, называется строго стационарным (или стационарным в узком смысле), если для $\forall m < n$ совместное распределение вероятностей случайных величин X_{t_1}, \dots, X_{t_m} такое же, как и $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$, при t_1, \dots, t_m и τ , таких, что $1 \leq t_1, \dots, t_m \leq n$ и $1 \leq t_1+\tau, \dots, t_m+\tau \leq n$.

Другими словами, свойства данного стационарного временного ряда не изменяются при изменении начала отсчета времени.

Очевидно, что объем денежных средств относительно времени — величина, не меняющая свои статистические характеристики, т. е. временной ряд. Для построения прогноза можно использовать модель авторегрессии — скользящего среднего (ARMA) [3]. Основу метода составляет предположение о том, что существует связь между соседними значениями временного ряда. Именно это позволяет предсказывать значения $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_{t+2}, \dots$ на основании известных значений $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$, затем на основании регрессионной модели строятся будущие значения X_{t+1}, X_{t+2}, \dots .

Ряд ε_t считается реализацией случайного процесса ARMA(p, q). Поиск гиперпараметров осуществлен по сетке. Наилучший результат показала $\varepsilon_t \sim \text{ARMA}(1,1)$, из этого следует, что

$$\varepsilon_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1} + b_1u_{t-1} + u_t$$

и прогнозное значение

$$\widehat{\varepsilon}_{t+1} = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1\varepsilon_t + \widehat{b}_1u_t.$$

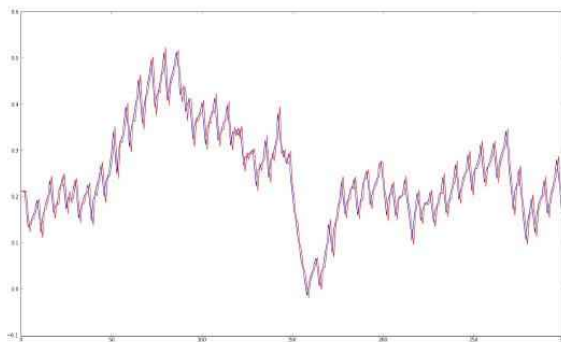


Рис. 2. Результаты построения прогнозов

4. Результаты. Для проведения оценки данного подхода выбран метод среднеквадратичного отклонения MSE (Mean Square Error) [4]. Если \hat{y}_i — величина, полученная с помощью прогноза, и y_i — величина из выборки, тогда можно вычислить среднеквадратичную ошибку MSE. В данном случае $MSE \approx 0,00083$. Как видно из рис. 2, используемая математическая модель достаточно точно справляется с задачей прогнозирования.

5. Заключение. Данная статья является основой для разработки описанной системы принятия решений. Для дальнейших исследований предполагается построить прогноз для каждой СМО. Кроме того, для увеличения точности можно по каждой страховой компании строить прогноз распределения больных по видам медицинской помощи.

Литература

1. Петрова Л. Н. Моделирование и прогнозирование показателей межтерриториальных расчетов в сфере обязательного медицинского страхования // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 671–676.
2. Time Series / Date functionality [Электронный ресурс]: URL:<http://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/timeseries.html> (дата обращения: 13.03.2017).
3. Statsmodels.tsa.arima-model.ARMA.fit [Электронный ресурс]: URL:http://statsmodels.sourceforge.net/devel/generated/statsmodels.tsa.arima_model.ARMA.fit.html (дата обращения: 14.03.2017).
4. Sklearn.metrics.mean_squared_error [Электронный ресурс]: URL:http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.metrics.mean_squared_error.html (дата обращения: 13.03.2017).

УДК 004.896

Цыпушкин А. В.

Алгоритм поиска атрибутов преступления в тексте

Рекомендовано к публикации доцентом Корховым В. В.

1. Введение. Данная статья описывает решение задачи кластеризации и анализа текста в рамках проекта W6 assess.

Проект нацелен на получение 6 главных частей преступления из текста – что, где, когда, кто сделал, над кем и с помощью какого оружия. Это облегчит разбор больших статей и сразу выделит важные атрибуты преступления.

Проект предназначен для использования некоммерческой организацией Insecurity Insight, которая занимается сбором и анализом информации о преступлениях.

Цель проекта: создать универсальный инструмент для аналитиков, выделяющий 6 аспектов преступления с возможностью сохранения данных в удобном им формате для дальнейшего анализа.

2. Обзор предметной области. *Предмет проекта* – провести кластеризацию набора статей по критерию наличия состава преступления, статьи про криминал обработать на наличие 6 частей преступления и сохранить эти данные для дальнейшей аналитики.

2.1. Кластеризация статей. Для кластеризации требуется определить понятия и термины (ключевые слова), по которым она будет производиться. Ключевыми понятиями в данном случае являются 6 частей преступления. Анализируя зависимости между этими частями, можно понять, как они связаны между собой для лучшей кластеризации.

2.2. Выделение 6 частей преступления. Для этого необходимо либо создать свою модель, основанную на методах машинного обучения, для получения состава преступления из текста, либо использовать готовые фреймворки для синтаксического и лексического анализа текста. В данный момент используется готовое решение –

Цыпушкин Арсений Витальевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: arsenytsypushkin@gmail.com, тел.: +7(981)861-85-41

Stanford CoreNLP — библиотека для анализа текста, представляющая собой статистический анализатор, систему на основе машинного обучения и на основе правил (rule-based) для анализа текста.

2.3. Сохранение данных. Для решения этой задачи в качестве базы данных, где хранятся результаты получения 6 частей преступления, используется Apache Solr.

3. Алгоритм получения 6 частей преступления. Для получения 6 частей преступления используется библиотека Stanford CoreNLP. Она предоставляет грамматический разбор предложения в виде списка зависимостей (дерева зависимостей), разбор слов по частям речи и инструмент для нормализации слов.

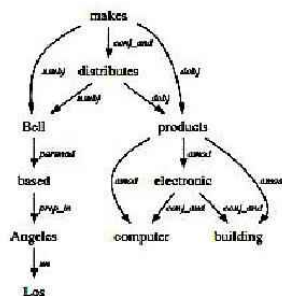


Рис. 1. Пример разбора предложения

можно получить объект и субъект действия. Возможны два случая — активный и пассивный залого. Для этого существуют разные типы связей: в активном подлежащее будет тем, кто исполнил преступление и дополнение будет тем, над кем его исполнили, а в пассивном залоге — наоборот.

Более того, важен контекст, а не одно слово, с которым связан насильственный глагол. Для этого берем все поддерево с корнем в подлежащем и дополнении. При этом получаем «словосочетания», которые являются тем, кто совершил преступление и над кем оно было совершено.

Если в тексте насильственного глагола нет, то можно найти толь-

Используя библиотеку Stanford CoreNLP, получаем дерево разбора предложения: вершины дерева — слова, ребра — связи между словами.

Алгоритм основывается на наличии в предложении насильственного глагола. Мы находим его в этом дереве, используя нормализацию слов и парсер слов по частям речи вместе с библиотекой насильственных глаголов.

Если в предложении есть насильственный глагол, то используя связь между сказуемым и подлежащим и сказуемым и дополнением,

ко оружие, место и время.

Для времени и места находим соответствующие типы зависимостей (обстоятельства времени и места). Если эти обстоятельства присутствуют, то мы так же выбираем все поддерево для получения контекста.

Для оружия нормализуем все существительные в предложении и, используя словарь оружия, созданный нами, проверяем на наличие каждого в словаре.

В итоге сложность алгоритма получается из O (количества слов в предложении) \times O (сложность работы библиотеки Stanford CoreNLP).

Узким местом данного алгоритма является использование библиотеки Stanford CoreNLP, сложность работы которой описать проблематично.

4. Пример разбора статьи. На рис. 2 приведен пример разбора новостной статьи предложенным алгоритмом.

W6 assess
news based security profiling

Gunmen **kidnapped** two foreign aid workers in Sudan's Darfur -- a French national and a Canadian -- as relief work becomes increasingly dangerous in the war-torn region, officials said on Sunday. The two international staff of the Aide Medicale Internationale -LRB- AMI -RRB- were abducted at Ed el-Fursan in southern Darfur on Saturday night, said the French group, which has been targeted twice so far this year. " There is one French and one Canadian, " senior foreign ministry official Ali Yussif later told AFP. " The government is doing its best to free them. " The Sudanese Media Centre, which is close to Sudan's intelligence services, said the kidnappers were demanding a ransom, a report which the official would not confirm. Two Sudanese staff of AMI were also **kidnapped** and later released, a local official said.

Who **Weapon** **What** **Whom** **Where** **When**

- Gunmen
- kidnapped
- two foreign aid workers
- in Sudan's Darfur a French national and a Canadian
- on Sunday
- Two Sudanese staff of AMI
- in the war-torn region
- this year
- on Saturday
- night

Рис. 2. Пример разбора новостной статьи

5. Альтернативные системы для анализа текста. Существуют также альтернативные решения для анализа текста. Вот некоторые из них:

- *SYNC3* – платформа для анализа новостей, предназначенная для журналистов. Платформа загружает статьи из разных источников, проводит кластеризацию по событиям. Собирает информацию как с официальных источников, так и с блогов обычных людей. Программа помогает составить независимые новости, опираясь на мнения не только источников, но и отзывы людей. Платформа имеет сервис-ориентированную архитектуру, сервера с REST API, которые имеют разные уровни (tier). Платформа очень гибкая, расширяемая и имеет API для интеграции в любые другие сервисы. Данная платформа нам не подходит, так как целью проекта является не генерация новостей, а выделение частей преступлений из текста;
- *Xerox Incremental Parser* – лингвистический парсер текста. Делает разбор текста по частям речи, умеет выделять важные части текста, строит диаграмму зависимостей между словами (дерево разбора предложения). Имеет REST API для интеграции в любые другие сервисы. Умеет работать с тремя языками – английским, французским, немецким. Так как решение не open source, то проверить его работу нельзя;
- *Apache OpenNLP* – лингвистический парсер текста. Очень похож на Stanford CoreNLP парсер. Имеет CLI интерфейс взаимодействия и Java API. Является неплохой альтернативой библиотеке Stanford CoreNLP;
- *NLTK* – лингвистический парсер текста. Имеет такие же возможности, что и Apache OpenNLP и Stanford CoreNLP. Недостаток для нашего проекта в том, что парсер имеет только python api.

6. Заключение. Предложенный алгоритм нахождения 6 частей преступления может быть использован, когда в тексте присутствуют насильственные глаголы. Поэтому, чтобы сделать нахождение состава

ва преступления более полноценным и свести к минимуму влияние библиотек для анализа текста, необходимо изучить связи между разными частями преступления и использовать алгоритмы машинного обучения для построения модели получения 6 частей преступления.

Литература

1. Сайт компании Insecurity Insight [Электронный ресурс]: URL: <http://www.insecurityinsight.org/> (дата обращения: 17.03.16).
2. Stanford Core NLP библиотека [Электронный ресурс]: URL: <https://stanfordnlp.github.io/CoreNLP/> (дата обращения: 17.03.16).
3. SYNC3 platform [Электронный ресурс]: URL: <http://www.sync3.eu/> (дата обращения: 17.03.16).
4. Xerox Incremental Parser [Электронный ресурс]: URL: <https://open.xerox.com/Services/XIPParser> (дата обращения: 17.03.16).
5. Apache OpenNLP документация [Электронный ресурс]: URL: <https://opennlp.apache.org/documentation> (дата обращения: 17.03.16).
6. NLTK документация [Электронный ресурс]: URL: <https://www.nltk.org/> (дата обращения: 17.03.16).

УДК 004.85

Юревич В. С.

Сравнительный анализ эффективности алгоритмов машинного обучения на примере болезни Паркинсона

Рекомендовано к публикации профессором Печниковым А. А.

1. Введение. Искусственный интеллект применяется в различных сферах жизни. Большое количество исследований, связанных с машинным обучением, ведётся в области здравоохранения. Вопросы медицины никогда не потеряют своей важности, так как одна из основных целей современного общества — улучшение качества жизни. Поэтому актуально проводить исследования в области машинного обучения и сравнивать эффективность различных алгоритмов.

Разработанные инструменты медицинской диагностики не заменяют работу врача, но помогают ему и ускоряют его работу. Их применение необходимо, когда постановка диагноза усложняется большим количеством медицинских данных или редким заболеванием.

В данной статье исследуются различные алгоритмы машинного обучения и сравнивается их эффективность на примере анализов речи пациентов с подозрением на заболевание Паркинсона.

2. Постановка задачи. В настоящем исследовании преследовались следующие задачи:

1. С использованием библиотеки «scikits.learn» [1] разработать на языке Python программы для метода опорных векторов, метода дерева принятия решений, метода k -ближайших соседей.
2. Разработать многослойную нейронную сеть с обучением алгоритмом обратного распространения ошибки на языке программирования Java.
3. Сравнить эффективность работы алгоритмов с помощью пятиэтапной кросс-проверки (скользящий контроль).

Юревич Владислав Сергеевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: vlad.your8@gmail.com, тел.: +7(981)861-23-81

3. Описание болезни. Болезнь Паркинсона — неврологическое заболевание, характеризующееся дегенерацией моторной системы. Интерес, проявленный именно к этой болезни, оправдан тем, что на сегодняшний день причин её появления не выявлено, на ранних стадиях она сложно различима, а динамика заболевания с каждым годом становится всё хуже.

4. Описание данных медицинского анализа. За основу взяты результаты речевого и голосового анализа, проведённого доктором Максом Литтл (Max Little) из Оксфордского университета совместно с Национальным центром голоса и речи (Денвер, Колорадо, США). Данные были получены из открытого источника данных UCI [2].

Была произведена запись голоса каждого пациента (длительные гласные, цифры, слова и короткие предложения). Каждая запись характеризуется двадцатью шестью показателями. Jitter: local — средняя абсолютная разница между последовательными периодами звуковой волны, делённая на средний период; local, absolute — средняя абсолютная разница между последовательными периодами звуковой волны в секунду; гар — средняя абсолютная разница между периодом звуковой волны и средним среди него и двух соседних периодов; rrq5 — средняя абсолютная разница между периодом звуковой волны и средним среди него и четырёх соседних периодов; ddr — это средняя абсолютная разность между последовательными изменениями в периодах звуковой волны, делённая на средний период. Shimmer: local — это средняя абсолютная разница между амплитудой последовательных участков записи, делённая на среднюю амплитуду; local, dB — это средний абсолютный десятичный логарифм разности между амплитудами последовательных участков записи, умноженный на 20; arq3 — средняя абсолютная разница между амплитудой участка записи и средней амплитудой его и двух соседних участков, делённая на среднюю амплитуду; arq5 — средняя абсолютная разница между амплитудой участка записи и средней амплитудой его и четырёх соседних участков, делённая на среднюю амплитуду; arq11 — средняя абсолютная разница между амплитудой участка записи и средней амплитудой его и десяти соседних участков, делённая на среднюю амплитуду; ddr — средняя абсолютная разница между последовательными изменениями амплитуд подряд идущих участков записи; AC — разница в уровне громко-

сти, выражающаяся в децибелах; NTH (Noise-to-Harmonics) и HTN (Harmonics-to-Noise) — коэффициент меры охриплости, Harmonics и Noise выражаются в децибелах; медиана основного тона; средняя высота; стандартное отклонение; минимальная высота; максимальная высота; число импульсов; число периодов; средний период; стандартное отклонение периода; доля локально не голосовых кадров; количество разрывов речи; степень разрыва речи.

5. Описание методов классификации. Рассмотрим следующие методы.

5.1. Метод опорных векторов (SVM – Support Vector Machine). В задаче бинарной классификации цель SVM — найти функцию, разделяющую обучающие данные на два класса таким образом, чтобы расстояние от этой функции до ближайших объектов обоих классов было максимальным [3]. Когда функция построена, принадлежность новых данных к тому или иному классу определяется её знаком.

5.2. Метод дерева принятия решений (DTree – Decision Tree). Алгоритм дерева принятия решений строит блок-схему, «задавая вопрос» относительно входящего атрибута и получая ответ в виде двух или более результатов. Процесс построения ветви заканчивается, когда ответом на «вопрос» становится класс, к которому принадлежит элемент. Каждый лист представляет выходные данные, внутренние узлы соответствуют входным атрибутам (в нашем случае, показателям анализа) [4].

5.3. Метод k -ближайших соседей (k -NN – k -Nearest Neighbors). Метод k -ближайших соседей — это метрический классификатор, сравнивающий похожесть объектов. Классифицируемый объект относится к тому классу, которому принадлежат большинство из k ближайших объектов тренировочных данных [5].

5.4. Многослойный перцептрон и метод обратного распространения ошибки (MLP – Multilayer Perceptron). Данный алгоритм основывается на упрощённом представлении нейронных связей мозга человека. Входные нейроны — показатели анализов, выходной нейрон — булева константа, определяющая принадлежность к классу. Значимость нейрона для нейрона следующего слоя определяется весами. Значение нейрона внутреннего и выходного слоя определяется результатом сумматорной функции, которой в задачах классификации чаще всего является сигмоида. Цель алго-

ритма — минимизация целевой функции. Взяв частные производные этой функции по весам, можно определить, насколько должны измениться веса нейронов для получения минимальной ошибки [6].

6. Скользящий контроль. Для более объективной проверки эффективности работы алгоритма используют метод скользящего контроля. Его суть состоит в том, что выборку данных делят на n непересекающихся частей, после этого модель обучают на $n - 1$ частях, а на одной части тестируют [7]. На каждом из n этапов тестируемая часть разная. В настоящем исследовании $n = 5$.

7. Параметры, используемые в оценке качества классификации. Приведём ряд понятий, необходимых при оценке классификации [8]. Accuracy — это доля правильных ответов, предсказанных алгоритмом, среди всех тестовых данных. Precision — это доля объектов, действительно принадлежащих данному классу относительно всех объектов, которые система отнесла к этому классу. Recall — это доля найденных классификатором объектов, принадлежащих классу относительно всех объектов этого класса в тестовой выборке. F-measure представляет собой гармоническое среднее между точностью и полнотой.

8. Результаты исследования. Обозначим tp — сумма истинно-положительных решений, tn — сумма истинно-отрицательных решений, fp — сумма ложно-положительных решений, fn — сумма ложно-отрицательных решений.

В таблице 1 указаны результаты работы каждого вышеописанного алгоритма при использовании метода скользящего контроля.

Таблица 1. Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	tp	tn	fp	fn
SVM	353	341	179	167
DTree	302	334	186	218
k-NN	327	363	157	193
MLP	425	380	95	140

Таблица 2. Оценка качества классификации алгоритмов

Алгоритм	Accuracy	Precision	Recall	F-measure
SVM	0,667308	0,663534	0,678846	0,671103
DTree	0,611538	0,618852	0,580769	0,599206
k-NN	0,663462	0,67562	0,628846	0,651394
MLP	0,774038	0,817308	0,752212	0,78341

9. Заключение. Из результатов таблицы 2 видно, что наилучшим образом с поставленной задачей справляется многослойная нейронная сеть. В ситуации, когда болезнь плохо диагностируется, её сложно выявить на ранних стадиях, как в случае заболевания Паркинсона, разумным было бы использовать MLP для предсказания диагноза в силу его большей эффективности в сравнении с другими алгоритмами.

Литература

1. Scikit-learn [Электронный ресурс]: URL:<http://scikit-learn.org/stable/index.html> (дата обращения: 15.02.17).
2. UCI [Электронный ресурс]: URL:<http://archive.ics.uci.edu/ml/index.html> (дата обращения: 15.02.17).
3. Cristianini N., Shawe-Taylor J. An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 189 p.
4. Utgoff P. E. Incremental induction of decision trees // Machine learning. 1989. Vol 4, No 2. P. 161–186.
5. Altman N. S. An introduction to Kernel and Nearest-Neighbor nonparametric regression // The American Statistician. 1992. Vol. 46, No 3. P. 175–185.
6. Bishop C. M. Neural Networks for Pattern Recognition. 2 ed. Oxford: Oxford University Press. 1995. 482 p.
7. Geisser S. Predictive Inference. Predictive Inference. New York: Chapman and Hall. 1993. 240 p.
8. Madjarov G., Dragi Kocev D., Gjorgjevikj D., Dzeroski S. An extensive experimental comparison of methods for multi-label learning // Pattern Recognition. 2012. No 45. P. 3084–3104.

UDC 004.855.5

Churikov N.

Experience of using machine learning methods in document processing system

Recommended for publication by associate professor Dobrynin V.

1. Introduction. Document management system (DMS) [2] is a software to ease management and storage of documents and reduce number of physical paper. It was invented in the 80s, as a storage for paper-based documents. Later systems for management of electronic documents like mails, assignments, papers, images, etc. were developed. Such systems constantly evolve and new features, like text extraction from images [3] or text classification [4], are introduced to improve user experience.

Digital Design Company [7] decided to go further and to automatically suggest an executor of a certain task on base of the metadata, like the task creator and approving person, its kind, etc. In the paper we cover the extraction of features from metadata and preprocessing them for classification. The target variable is a person, who should be appointed for the task on base of the metadata. We get explanatory variables in a form of categorial features.

2. Docsvision overview. Before we consider raw data and the problem formulation, it is useful to discuss Docsvision—the DMS by Digital Design [7]. It is quite straightforward and easy to start working with. You'll see a large button with “Create” on it. Click it and you'll create a new **document**.

One can consider a document to be a folder with various objects like tasks, files and the history of the process. Files could be of any type, from scans of papers to Outlook mails (Microsoft mail application).

We do not cover the information extraction from files in the paper. It is quite a difficult problem itself and deserves a separate study. Our goal is to form suggestions on who should be **appointed** for the task based on the metadata corresponding the documents.

Churikov Nikita – student, Saint-Petersburg State University; e-mail: nikita@chur.ru, phone: +7(921)858-06-93

3. Metadata analysis. Document metadata is stored in the two files: **document.json** and **resolution.json**. The file **document.json** stores all the data available before tasks creation, while **resolution.json** stores data about tasks. We are interested in task executors UUID [11].

Actually for each person, task, organisation, document, and anything else there is a unique identifier. That means that we are dealing with categorial features.

So we are going to extract features from the **document.json** file and the target variable from **resolution.json**. The structure of the used **.json** files is in details presented in [5].

Note that we will be using an actual dataset of 131214 documents collected in a certain government organization during a couple of years. Unfortunately, we have no permission to share it or discuss its contents, but we are allowed to describe its structure.

3.1. Features extraction. There are 9 features in **document.json**: *Addressees*, *AddresseeType*, *AccessType*, *Categories*, *Kind*, *Registrar*, *Urgency*, *Operator* and *Content*. *Content* is a string value; all the other are categorial and while the majority of them are UUIDs, *AccessType* is of integer type. There also are values that are lists, like *Categories*.

After the extraction of all the features we get something like the example in Table 1. There also exist objects that describe relationships. They are called *Addressees*. A relationship could be between people or companies. Usually, a company sends a task or a message to another. This relationship is described by UUID the of sender and UUID of the receiver. We are going to use only *AddresseeType*, because some *Addressees* occur just once (like citizens, who sent complaints) and other appear too often (like a ministry). On the other hand, *AddresseeType* takes only four values: from 0 to 3. 0 – recipient, 1 – sender, 2 – real recipient, 3 – signer.

Table 1. Features

Name	Type	Unique values
Content	string	7193 words
Urgency	UUID	4
AccessType	UUID	3
Categories	List of UUIDs	157
RegistrarDepartment	UUID	65
Registrar	UUID	158
Operator	UUID	145
Operator.Unit	UUID	80
AddresseeType	int	4

The variables in Table 1 mean the following:
Content – String that contains brief description of the document;
Urgency – Priority of the document;
AccessType – Security level of the document;
Categories – Document category, as Agriculture or Technology;
RegistrarDepartment – Place where the document was registered;
Registrar – Person who approved the document;
Operator – Person who created the document;
Operator.Unit – Place where the operator works;
AddresseeType – Type of the *Addressee*.

3.2. Preprocessing. First, we need to preprocess the categorical features. A transformation into binary matrix is represented at the Fig. 1. Binary values in this scenario are called dummy values.

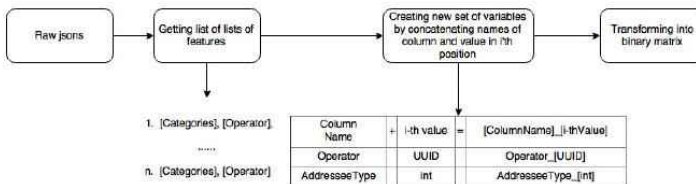


Figure 1. Data transformation into binary matrix

Then we can cluster the *content* using K-means or LDA [6] and use cluster numbers as columns in the binary matrix. Note, that technically it is rather topic modeling than clustering, but we can use topics numbers as clusters.

3.3. Getting target variables. We get target variables from *resolution.json*. The *resolution* has multiple layers of tasks and their parts. Here we are going to use only the first level of tasks. It is possible to extend predictions to the next level “Appointeds”. We do not cover the details of this here. In short, we would have to extend the Table 1 with UUIDs of whom task was appointed to, and then predict who’d be next in *resolution* tree.

On the first level the *.json* file has “Tasks” object. It is a list and each its element is a task containing “Appointeds”. So, there can be multiple “Appointeds” for every document. One way of dealing with it, is to use just the first “Appointed” in “Tasks” list, but this is a “lazy” approach,

which doesn't give nice results. Instead we are going to duplicate rows of the binary matrix with multiple appointed persons.

3.4. Analyzing target variables. After parsing all the resolutions we get a list consisting of 131214 lists, and 421 of them have more than 1 element. That means there actually exist tasks with multiple appointed persons. Let's take a look at their distribution. There are 324 unique UUIDs and their total number is 131775. As it could be seen in Fig. 2. in the top left bar plot we have 16014 "Missing" appointed persons. Lets exclude them for now. We also have UUIDs that appear only once or twice. That means that such persons had got the job not long before the data was gathered and we don't have much information about them.

In our prediction model we are going to cut out people with different number of completed tasks: from 0 to 5 at the bottom and from 1000 to 6000 at the top.

And this is how the distributions look like:

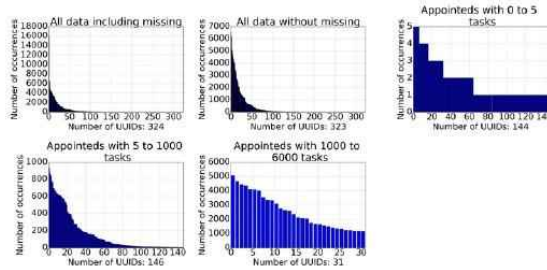


Figure 2. Target variable distribution

The reason to split data into such chunks is that we are dealing with an imbalanced data. And chunks splitting is a possible way of solving this problem [10].

4. Classification. In Section 3.2 we created matrix \mathbf{X} of size $[n \times m]$ where n is the number of "Appointed" from Section 3.3 and m is the number of binary features we got in Section 3.2.

And in section 3.3 we created vector \mathbf{Y} of target variables. Now, lets use our observations of target variable distribution and create classifica-

tion model.

We use a popular Random Forest classification algorithm [8] with default parameters from `sklearn` [9] library, except for the class weight. The latter is set to “balanced”, which is another way to deal with the imbalanced data [10].

5. Implementation. Sklearn is an extensive library with many popular algorithms implemented in python. We use it to create the prediction model.

Results would be measured with F1 score, micro, macro [1] and as we are creating suggestions, naturally, user would expect more than one prediction. Random Forest algorithm predicts vector of probabilities over all classes. So we sort this vector in descending order and return the best three and five predicted persons.

6. Results. In the Tables 2–5 below “F1” stands for F1 score; “top3” is the probability to find the desired UUID in Top 3 predicted UUIDs; and “top5” is the same for Top 5 predicted UUIDs.

6.1. No selection, just removing “Missing”. In this section no filtering by frequency of “Appointededs” is used. We have the matrix \mathbf{X} of size $[115761 \times 535]$ and the vector \mathbf{Y} of size 115761. Number of unique “Appointededs” is 323 (Table 2).

Table 2. Using full dataset

	F1	recall	precision	top3	top5
Random Forest	0.27	0.27	0.51	0.57	0.73

6.2. Selecting “Appointededs” with 1 to 5 tasks done. The selection of rows in \mathbf{X} based on the number of completed tasks: at least 1 done and of most 5 done. New matrix \mathbf{X} is of shape $[262 \times 535]$. \mathbf{Y} is of length 262. Number of unique “Appointededs” is 144 (Table 3).

Table 3. Training and testing on full dataset (no test) of 262 rows

	F1	recall	precision	top3	top5
Random Forest	0.75	0.78	0.79	0.95	0.98

6.3. Selecting “Appointededs” with 6 to 1000 tasks done. The selection of rows in \mathbf{X} based on the number of completed tasks: at least 6 done and of most 1000 done. New matrix \mathbf{X} is of shape $[23780 \times 535]$. \mathbf{Y} is of length 23780. Number of unique “Appointededs” is 146 (Table 4).

Table 4. Selected from 6 to 1000

	F1	recall	precision	top3	top5
Random Forest	0.47	0.5	0.6	0.84	0.91

6.4. Selecting “Appointeds” with 1001 to 6000 tasks done.

The selection of rows in \mathbf{X} based on the number of completed tasks: at least 1001 done and of most 6000 done. New matrix \mathbf{X} is of shape $[91719 \times 535]$. \mathbf{Y} is of length 91719. Number of unique “Appointeds” is 33 (Table 5).

Table 5. Selected from 1001 to 6000

	F1	recall	precision	top3	top5
Random Forest	0.6	0.61	0.66	0.84	0.96

7. Conclusion. A suggestion system prototype was created. It suggests whom to appoint for a certain task on base of only a few categorical features. Random forest classification algorithm was used due to its speed and prediction quality. It performed well even with no subsampling of initial data.

8. Further work. In future work we are going to further investigate the given dataset and create a automated system for splitting data into different categories. We will also try to predict time for completion of tasks and suggest attributes like *Categories*. And use texts files that comes with documents to gain more features.

References

1. Manning C. D., Raghavan P., Seltze H. (2008). Introduction to Information Retrieval. Cambridge University Press, 558 p.
2. Document management system // Wikipedia [Internet resource]: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Document_management_system (date: 02.06.17)

3. Khalaf S. Alkhalaf, Abdulelah I. Almishal, Anas O. Almahmoud, and Majed S. Alotaibi, "OCR-Based Electronic Documentation Management System", *International Journal of Innovation, Management and Technology* vol. 5, no. 6, pp. 465–469, 2014.
4. Esposito F. et al. *Machine Learning for Digital Document Processing: from Layout Analysis to Metadata Extraction // Machine Learning in Document Analysis and Recognition / Ed. by S. Marinai and H. Fujisawa. Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 105–138.*
5. Example of json structure [Internet resource]: URL: www.dropbox.com/sh/640t7wms0tt3eeb/AAA02IF-f10ctE-g-uycJK1Ua?dl=0 (date: 02.06.17)
6. Document Clustering with Python [Internet resource]: URL: <http://brandonrose.org/clustering> (date: 02.06.17)
7. Digital Design. Official web-site [Internet resource]: URL: <http://www.digdes.com/about> (date: 18.03.17)
8. Random forest // Wikipedia [Internet resource]: URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Random_forest (date: 02.06.17)
9. Scikit-learn: Machine Learning in Python [Internet resource]: URL: scikit-learn.org (date: 02.06.17)
10. Brownlee J. 8 Tactics to Combat Imbalanced Classes in Your Machine Learning Dataset [Internet resource]: URL: <http://machinelearningmastery.com/tactics-to-combat-imbalanced-classes-in-your-machine-learning-dataset/> (date: 02.06.17)
11. Universally unique identifier // Wikipedia [Internet resource]: URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/UUID> (date: 02.06.17)

UDK 004.852

Zgonnikova I. S.

Statistical analysis of dynamical features of human control in virtual stick balancing

1. Introduction. Human operator behavior has a serious impact on numerous automated processes. Understanding underlying control mechanisms is important and challenging problem investigated in various studies. Some aspects of human control can be exhibited using simple models like one of inverted pendulum (stick) balancing.

Stick balancing task is often employed in human control research as a transparent model of a human-controlled unstable system [1]. The integrity of the model provides researchers with insight into fundamentals of human control, contributing to further investigation of human erroneous behavior under more sophisticated circumstances.

Existing approaches to human operator behavior consider human control to be either continuous or intermittent process [2, 3]. Continuous control models assume human operates an unstable system constantly, whilst intermittent models imply control process to be a sequence of successive active and passive control phases. Even though continuous models accurately describe human control in many laboratory and real-life situations, recent studies caused the intermittent model to achieve higher popularity.

Despite the fact intermittent control models proved themselves to be effective in describing human control processes, many dynamical phenomena remain unexplored. Of particular importance for practical applications is the problem of stick falls: understanding causes of erroneous behavior in simplified laboratory task of stick balancing can provide us, for instance, with essential knowledge on human posture control failure, unexplained by modern models [4].

In previous studies, machine learning approaches were utilized to predict stick falls in virtual overdamped stick balancing [5]. However, the features previously used to describe time segments of human control have not been analysed for possible interdependencies. In the present article we conduct statistical analysis of the features used in the previous studies [6, 7]. The results indicate that some of these features

Zgonnikova Irina – Saint-Petersburg State University; e-mail: irina.zgonnikova@gmail.com, phone: +7(921)399-75-90

demonstrate linear dependence, therefore, the accuracy of the machine learning-based human error prediction can be improved, e.g., by using feature extraction techniques.

2. Background. In the earlier studies we developed an approach to human operator error prediction via machine learning analysis of unstable human-controlled system dynamics [6, 7]. The goal of the studies was, based experimental data collected previously [5], to investigate the possibility of human error prediction and prevention. The experimental data consisted of time series of cart velocity, stick angle and angular velocity. Collected data series were divided in equal length data samples, based on which simple statistical characteristics were calculated and band together to embody samples' feature sets. Each feature set contained 14 characteristics, including the mean duration of active and passive control phases (\bar{t}_a, \bar{t}_p), the mean and standard deviation of the maximum cart speed ($\bar{v}_{max}, \sigma_{v_{max}}$), and the number of active phases (N_a). Further on, established feature sets were engaged as samples' representation for machine learning algorithms to distinguish between "safe" and "dangerous" periods of stick balancing. The results determined, erroneous behavior can be predicted with precision of 70-80% in time interval of one second before the stick falls. However, up to now it is not clear to what extent the features based on the intermittent properties of human control are independent of each other. In this paper we discuss particular statistical characteristics unveiling the link between the dynamical features used in the previous studies.

3. Results. To quantify the linear dependency between the features, we calculated Pearson's correlation coefficients for each pair of control characteristics (Fig. 1).

We found that the average duration of active phases \bar{t}_a correlates strongly with standard deviation of active phase duration σ_{t_a} . One of the possible mechanisms behind such high values of correlation coefficient is high variability of active phase durations within samples. For example, if on average values of t_a within one sample are of similar magnitude, increase in the number of active phases will not affect standard deviation value σ_{t_a} . The same pattern was found for passive phases, moreover, correlation between \bar{t}_p and σ_{t_p} was found to be even stronger (with the correlation coefficients of 0.803 in the latter pair and 0.591 in the former). This means that variability of duration of passive phases is lower than that in duration of active phases.

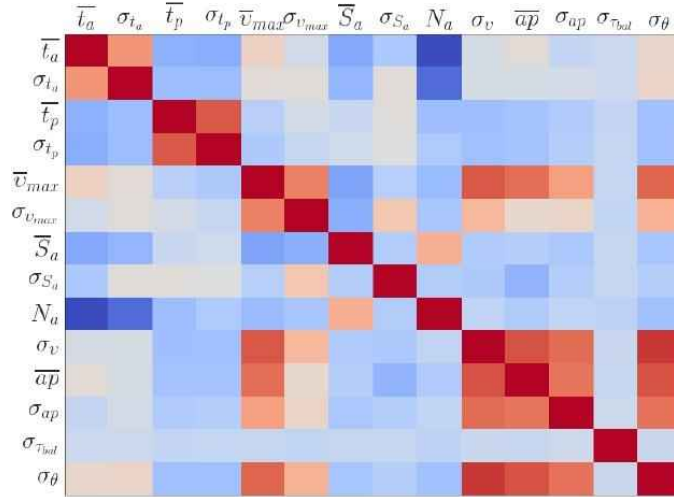


Figure 1. Heatmap of Pearson's correlation coefficient computed for each pair of features. Red color corresponds to positive correlations, and blue color denotes negative correlation. The intensity of the color matches the strength of the correlation.

Feature S_a is calculated as

$$S_a = \frac{\sum_{i=1}^{t_a} v_i^a}{v_{max}^a t_a},$$

where v_i^a is the active phase velocity value at moment i , v_{max}^a is the maximum value of active phase velocity, and t_a is the duration of the active phase. Parameter S_a characterizes the structure of active control segments. For example, if an active phase consists of one control segment demonstrating gradual cart velocity changes, corresponding value of S_a will be close to 1. However, if an active phase contains several successive control sub-movements of different amplitude, the value of S_a will be

close to 0. Therefore, strong negative correlation between the values of \overline{S}_a and \overline{t}_a evinces stronger velocity fluctuations over longer active phases. Another support for this hypothesis comes from high negative correlation between the values of \overline{S}_a and \overline{v}_{max} together with positive correlation between \overline{S}_a and N_a values.

Correlations of features N_a and τ_{bal} with the other features provide further insight into data. High level of negative correlation between the number of active phases N_a and the mean value of the active phases duration appears to be a direct consequence of a fixed sample length value. Parameter τ_{bal} (“time to balance” [8]) is the only non-linear characteristic in the suggested feature set. It illustrates the deviation of a stick equilibrium position, and can be calculated as

$$\tau_{bal} = \theta/\omega,$$

where θ and ω are stick angle and angular velocity correspondingly. The non-linear nature of the parameter τ_{bal} is reflected in the correlation matrix by a low level correlation with other features.

The mean value of active phase maximum velocity \overline{v}_{max} shows strong correlation with mean value \overline{ap} of parameter ap (stick angle at the moment of control activation) and standard deviations σ_v , $\sigma_{v_{max}}$, σ_{ap} , and σ_θ . All these features characterize the scale of stick oscillations, which is relative to the average scale of each individual operator.

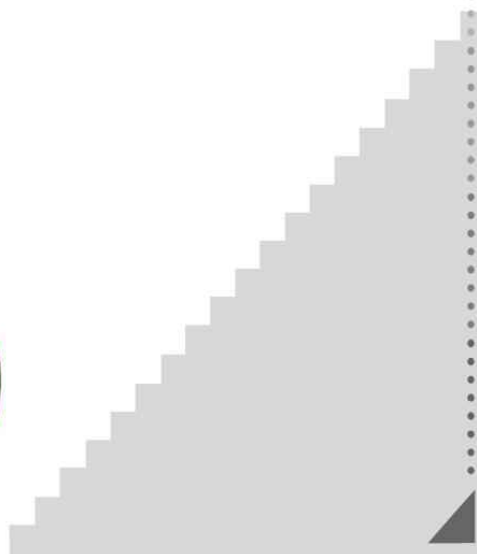
4. Conclusion. In this work, we analyzed statistical characteristics of human control features, namely pairwise Pearson correlation coefficients, to investigate possible interconnections within proposed in earlier study feature set. Analysis of correlations has confirmed some anticipated results, such as strong correlation between mean and standard deviation of certain values, or negative correlation between the number and the duration of active phases. Additionally, we deduced less evident information, such as a correlation between mean values of ap and active phases length, or linear independence of parameter τ_{bal} from other features. These results suggest that excluding part of the features from initial feature set or using principal component analysis can make further data analysis more efficient.

References

1. Milton J.G. Intermittent Motor Control: The ‘drift-and-act’ Hypothesis // Progress in Motor Control. Springer, 2013. P. 169–193.

2. Gawthrop P., Loram I., Lakie M., Gollee H. Intermittent control: a computational theory of human control // *Biological cybernetics*. 2011. Vol. 104, No. 1–2. P. 31–51.
3. Loram, I., Gollee H., Lakie M., Gawthrop P. Human control of an inverted pendulum: is continuous control necessary? Is intermittent control effective? Is intermittent control physiological? // *The Journal of Physiology*. 2011. Vol. 589, No. 2. P. 307–324.
4. Cabrera J. L., Milton J. G. Stick balancing, falls and Dragon-Kings // *The European Physical Journal Special Topics*. 2012. Vol. 205, No. 1. P. 231–241.
5. Zgonnikov A., Lubashevsky I., Kanemoto S., Miyazawa T., Suzuki T. To react or not to react? Intrinsic stochasticity of human control in virtual stick balancing // *Journal of the Royal Society Interface*. 2014. Vol. 11, No 99. P. 20140636.
6. Zgonnikova I. S., Zgonnikov A. V., Kanemoto S. Analysis and prediction of human control errors in inverted pendulum balancing // *The XLVI annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'15). Abstracts / Edited by N. V. Smirnov. St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V., 2015. P. 40–46.*
7. Zgonnikova I. S., Zgonnikov A. V., Kanemoto S. Stick must fall: Using machine learning to predict human error in virtual balancing task // *IEEE International Conference on Data Mining Workshop (ICDMW)*, 2016. P. 173–178.
8. Foo P., Kelso J., de Guzman G. C. Functional stabilization of unstable fixed points: Human pole balancing using time-to-balance information // *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*. 2000. Vol. 26, No 4. P. 1281–1297.

5. Управление
социально-
экономическими
системами



УДК 519.7

Арасланов А. А.

Задача равновесного распределения ресурсов

Рекомендовано к публикации доцентом Крылатовым А. Ю.

Введение. Общая задача оптимального распределения ресурсов формулируется следующим образом. Некий объект распоряжается определенными ресурсами различного характера. Такими ресурсами могут быть материально-вещественные, например сырье, трудовые, финансовые и другие. Возможна ситуация, когда ресурсы могут быть распределены на классы. Трудовые — по видам профессий или квалификации сотрудников, сырьевые — по видам сырья и т. п. Ресурсы разных видов могут измеряться в различных единицах.

В течение планового периода предприятие обладает некоторыми объемами ресурса каждого вида. Из этих ресурсов объект может производить различную продукцию. Продукция также может измеряться в различных единицах. Объем затрат зависит от вида ресурса, вида продукции и количества единиц этой продукции. Задача равновесного распределения ресурсов состоит в том, чтобы определить, в каком объеме и какую продукцию необходимо изготовить объекту из имеющихся ресурсов с тем, чтобы затраты по всем видам продукции были минимальными, при условии, что на их изготовление требуются одни и те же производственные мощности [1]. Заметим, что наиболее яркими примерами задачи распределения ресурсов являются задачи, связанные с распределением транспортных потоков [2, 3]. Игровые постановки задачи доступны в статье [4].

Равновесные стратегии распределения ресурсов. Введем следующие обозначения: D — объем ресурса, который необходимо распределить между альтернативными путями использования; x_i — объем ресурса, направляемый по i -му пути использования; $a_i - b_i x_i$ — функция полезности i -го маршрута. Тогда задача равновесного распределения ресурсов имеет следующий вид:

Арасланов Александр Алексеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: araslnder@gmail.com, тел.: +7(911)845-08-67

$$x^* = \arg \max_x \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} (a_i - b_i u) du, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = D, \quad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Это задача оптимизации (1) с ограничениями (2), (3), решение которой приводит распределение ресурсов к равновесию.

Без умаления общности переименуем маршруты так, чтобы

$$a_1 \geq \dots \geq a_n. \quad (4)$$

Теорема. *Равновесное распределение ресурсов в задаче (1)–(3), при условии (4), достигается реализацией следующих стратегий распределения ресурса:*

$$x_i^* = \begin{cases} D - \sum_{j=1}^{k^*} \frac{a_j}{b_j} + \frac{a_i}{b_i}, & \text{при } i \leq k^*, \\ 0, & \text{при } i > k^*, \end{cases} \quad (5)$$

где $i \in \{1, n\}$, k^* может быть найдено из условий

$$\sum_{i=1}^{k^*} \left(\frac{a_i - a_{k^*}}{b_i} \right) \geq D > \sum_{i=1}^{k^*} \left(\frac{a_i - a_{k^*+1}}{b_i} \right). \quad (6)$$

Доказательство. Воспользуемся условиями теоремы Куна – Таккера. Заметим, что в силу выпуклости целевого функционала (1), а также области допустимых решений (2), (3), условия Куна – Таккера являются как необходимыми, так и достаточными. Для задачи (1)–(3) построим лагранжиан:

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} (a_i - b_i u) du + \omega \left(D - \sum_{i=1}^n x_i \right) + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i.$$

Продифференцируем лагранжиан по x_i и, приравняв полученное выражение к нулю, получим $a_i - b_i x_i = \omega - \eta_i$.

Согласно условию дополняющей нежесткости $\eta_i x_i = 0$. Очевидно, что если $x_i > 0$, то с необходимостью $\eta_i = 0$, и тогда $a_i - b_i x_i = \omega$. Если же $x_i = 0$, то $\eta_i \geq 0$, откуда $a_i - b_i x_i \leq \omega$.

Таким образом, получаем, что распределение x_i^* при $i \in \{1, n\}$ обеспечивает равновесное распределение ресурсов тогда и только тогда, когда

$$a_i - b_i x_i^* \begin{cases} = \omega^*, & \text{при } x_i^* > 0, \\ \leq \omega^*, & \text{при } x_i^* = 0, \end{cases}$$

Выразим x_i^* через ω^* при $x_i^* > 0$:

$$x_i^* = \frac{a_i - \omega^*}{b_i} > 0,$$

а значит

$$\omega^* < a_i. \quad (7)$$

Используя условие (7), получаем правило определения номеров $i \in \{1, n\}$ путей, распределение ресурса по которым должно быть положительным, а именно:

$$x_i^* = \begin{cases} \frac{a_i - \omega^*}{b_i}, & \text{при } a_i > \omega^*, \\ 0, & \text{при } a_i \leq \omega^*. \end{cases} \quad (8)$$

Введем $k^* \in \{1, n\}$ такое, что при условии выполнения (4) $a_{k^*} \geq \omega^*$, а $a_{k^*+1} < \omega^*$. Тогда, подставив в (2) выражение из (8), имеем

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{k^*} \left(\frac{a_i - \omega^*}{b_i} \right) = D.$$

Следовательно,

$$\omega^* = \frac{-D + \sum_{i=1}^{k^*} \frac{a_i}{b_i}}{\sum_{i=1}^{k^*} \frac{1}{b_i}}. \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), с учетом (4) получаем (5). Для нахождения значения k^* рассмотрим функцию

$$S(\omega^*) = \sum_{i=1}^{k^*} \left(\frac{a_i - \omega^*}{b_i} \right),$$

которая является возрастающей. Тогда из неравенства

$$a_{k^*} \geq \omega^* > a_{k^*+1},$$

следует $S(a_{k^*}) \geq S(\omega^*) > S(a_{k^*+1})$, что окончательно позволяет вывести условия (6).

Теорема доказана.

Заключение. Рассмотрена задача равновесного распределения ресурса, которая решена в явном виде для простого случая одного ресурса и нескольких независимых путей его использования. Получены стратегии справедливого распределения ресурса, приводящие к одинаковым значениям функций полезности по всем альтернативным путям использования ресурса. В дальнейшем предполагается расширить полученные результаты на более общий случай.

Литература

1. Patriksson M. A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem // European Journal of Operational Research. 2008. Vol. 185. P. 1–46.
2. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Конкурентное равновесие Вардрона на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 476–481.
3. Крылатов А. Ю., Раевская А. П. Оптимальное расположение датчиков на транспортной сети для оценки матрицы корреспонденций // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 629–634.
4. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. № 4. С. 23–44.

УДК 519.246.8

Бабшуква Е. В.

Прогнозирование среднедушевого дохода населения Санкт-Петербурга

Рекомендовано к публикации доцентом Евстафьевой В. В.

1. Введение. Величина денежного дохода является ключевым индикатором, определяющим уровень жизни населения. Она играет важную роль не только в жизни отдельных людей, но и в реализации целей и задач различных сфер жизни региона и страны.

Наиболее показательными для анализа уровня жизни населения являются значения среднедушевого денежного дохода, которые располагаются в открытом доступе [1]. В статье на этих данных построен и анализируется временной ряд, состоящий из 96 значений за период с января 2009 г. по декабрь 2016 г., приведены математические модели с хорошими прогностическими свойствами и осуществлён прогноз на три шага: январь, февраль, март 2017 г.

2. Построение математических моделей. При визуальном анализе данных отмечается наличие трендовой и сезонной составляющей во временном ряде (рис. 1).

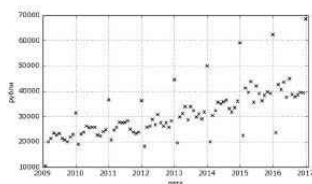


Рис. 1. Значения среднедушевых доходов населения Санкт-Петербурга (руб/месяц) в 2009–2016 гг.

во временном ряде присутствует мультипликативная сезонность.

В данной статье используется метод, основанный на устранении сезонной компоненты и выделении трендовой, а также метод Хольта–Уинтерса [2].

Период сезонности рассчитан с помощью автокорреляционной функции и составляет 12 месяцев. Амплитуда сезонных колебаний зависит от времени, поэтому

Бабшуква Екатерина Викторовна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: katrine9955@mail.ru, тел.: +7(999)203-20-59

Для построения моделей используются 72 значения временного ряда $y_t, t = \overline{1, 72}$, а остаток из 24 значений — в качестве контрольной выборки.

2.1. Линейная трендовая модель. Для нахождения сезонных коэффициентов $s_i, i = \overline{1, 12}$, применяется метод выделения сезонной компоненты в рамках классической декомпозиции [2] (таблица 1).

Таблица 1. Сезонные коэффициенты для y_t

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s_i	1,02	0,93	0,92	0,92	0,96	1,44	0,71	0,96	0,99	1,08	1,01	1,07

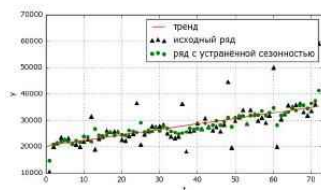


Рис. 2. Исходный ряд, скорректированный и тренд

Временной ряд с устранённой путём деления фактических значений на соответствующие им s_i сезонностью, представлен на рис. 2. Используя метод наименьших квадратов, строим линейную трендовую модель для скорректированного ряда:

$$\tilde{y}_t = 208,9083t + 20180.$$

Ряд остатков удовлетворяет предпосылкам регрессионного анализа [3].

2.2. Метод Хольта – Уинтерса. Данный метод эффективен в прогнозировании временных рядов, имеющих сезонную и трендовую компоненты. Суть метода состоит в тройном экспоненциальном сглаживании.

Пусть n — количество уровней ряда ($n = 72$), m — период сезонности ($m = 12$). Мультипликативная версия метода Хольта – Уинтерса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \ell_t &= \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}, \\ s_t &= \gamma \frac{y_t}{\ell_{t-1}} + (1 - \gamma)s_{t-m}, \\ \hat{y}_{t+h} &= (\ell_t + b_t h)s_{t+h-m}, \end{aligned}$$

где ℓ_t — общий уровень ряда, b_t — тренд, s_t — сезонная составляющая, \hat{y}_{t+h} — прогноз на h шагов.

Начальный тренд

$$b_0 = \frac{1}{m} \left(\frac{y_{m+1} - y_1}{m} + \frac{y_{m+2} - y_2}{m} + \dots + \frac{y_{m+m} - y_m}{m} \right).$$

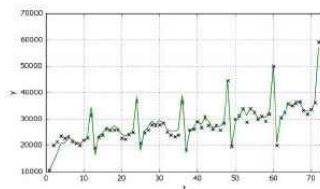


Рис. 3. Сглаживание методом Хольта–Уинтерса

Для нахождения сезонных коэффициентов $s_i, i = \overline{1, 12}$, вычисляем средний уровень каждого имеющегося периода сезонности, делим наблюдения на соответствующие им сезонные средние и получаем нужные значения как средние по каждому номеру $i = \overline{1, 12}$ (таблица 2).

Параметры α, β, γ определены путём минимизации суммы квадратов ошибок: $\alpha = 0,9,$

$\beta = 0,001, \gamma = 0,001$. Результат построения представлен на рис. 3.

Таблица 2. Сезонные коэффициенты для y_t (метод Уинтерса)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s_i	0,65	0,92	0,96	1,05	0,99	1,06	1,02	0,94	0,93	0,94	0,99	1,52

3. Сравнение прогностических свойств моделей. На рис. 4 приведены два графика с 24 значениями контрольной выборки и прогностическими значениями, полученными с помощью трендовой модели с учётом сезонности и метода Хольта–Уинтерса соответственно.

Таблица 3. Сравнение прогностических свойств моделей

	MAPE, %	RMSE
трендовая модель с учётом сезонности	8,476	4315,676
модель Хольта–Уинтерса	7,286	3236,39

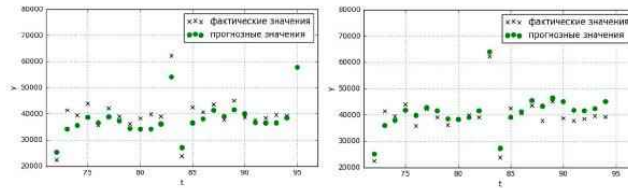


Рис. 4. Фактические и прогнозные значения, полученные с помощью трендовой модели с учётом сезонности и метода Хольта–Уинтерса

После сравнения прогностических свойств моделей по критериям средней абсолютной ошибки в процентах (MAPE) и квадратному корню из среднеквадратичной ошибки (RMSE) для построения прогноза была выбрана модель Хольта–Уинтерса (таблица 3).

4. Построение прогноза. Построим краткосрочный прогноз значений среднедушевого дохода по методу Хольта–Уинтерса на январь, февраль и март 2017 г. (таблица 4).

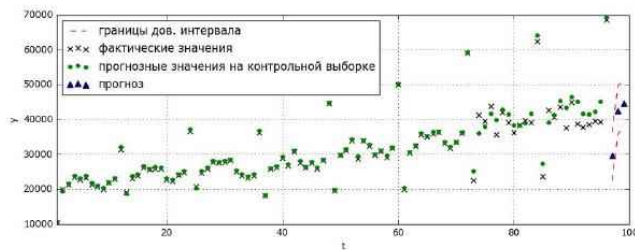


Рис. 5. Исходный временной ряд y_t , модель Хольта–Уинтерса и прогноз по модели

Таблица 4. Прогноз по модели Хольта–Уинтерса для среднедушевых доходов СПб с 95% доверительным интервалом

месяц 2017 г.	прогноз	верхняя граница	нижняя граница
январь	29570,455	36262,414	22382,322
февраль	42327,947	49503,7	35731,4
март	44567,518	51369,06	37871,116

Таким образом, прогностические свойства модели Хольта–Уинтерса оказались лучше, чем свойства линейной трендовой модели. По ней построен прогноз на три шага. В дальнейшем предполагается сравнить полученные значения с фактическими после появления на сайте Росстата последних, однако можно говорить о возрастающей тенденции среднедушевых доходов. Прогностические свойства выбранной модели можно улучшить, скорректировав параметры α , β , γ в ходе проверки на контрольной выборке.

Литература

1. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]: URL: http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/population/level/ (дата обращения: 26.02.2017).
2. Makridakis S., Wheelwright S., Hyndman R. J. Forecasting: Methods and Applications. Third Edition. New York: Wiley, 1998. 642 p.
3. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс. 6-е изд. М.: Дело, 2004. 576 с.

УДК 519.83

Бакутеев А. Н.

Применение методов теории игр в оптимизации систем водоснабжения

Рекомендовано к публикации профессором Петросьяном Л. А.

1. Введение. Согласно статистическим данным потребление воды пользователями в среднем происходит по установившемуся временному портрету, в котором наблюдается пик потребления в дневные часы и минимум потребления в ночные часы. Проблема заключается в том, что требуется постоянная поддержка в трубах высокого давления для того, чтобы в часы максимального потребления обеспечить достаточный напор воды. Вследствие этого возрастают затраты на электроэнергию, а также создается избыточное давление в трубах, что значительно увеличивает утечки воды [1]. Оптимизация расходов возможна как со стороны водоснабжающей компании, так и со стороны потребителей. В [2] рассматривается проблема определения оптимального плана гидроэлектростанции, которая частично может быть применена и по отношению к сетям водоснабжения. Тема снижения пиковой нагрузки в настоящее время популярна в контексте «умных сетей» электроснабжения (smart grids). В [3] представлена распределенная система управления спросом для снижения пикового спроса в умных сетях и доказано, что теоретико-игровая модель системы является потенциальной игрой, а также предложены стратегии, которые сходятся к равновесию по Нэшу. В [4] рассмотрена тема зависимости высоты пика потребления воды от количества пользователей.

2. Общая модель системы водоснабжения. Элементами модели являются компания, которая управляет тарифами на воду, и пользователи (жители домов). Цель компании — назначить тарифы так, чтобы уменьшить ежедневные пики водопотребления. Цели пользователей — потратить определенное количество воды с минимальными затратами, которые они могут снизить, распределив потребление воды в зависимости от тарифов.

Бакутеев Антон Николаевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: bakuteyev@gmail.com, тел.: +7(965)761-33-91

Итак, пусть имеется \mathcal{H} домов, в каждом отдельном доме h находится упорядоченное множество $\mathcal{A}^{(h)}$ приборов, потребляющих воду, которые будут включены за день. При этом время включения некоторых приборов может быть сдвинуто пользователем. Обозначим это множество приборов как \mathcal{SA}_h . Тогда как время включения других приборов \mathcal{FA}_h сдвинуть нельзя.

Представим день в виде объединения множества \mathcal{T} непересекающихся промежутков, на которых компанией будут установлены цены. Тогда каждый прибор $i \in \mathcal{A}^{(h)}$ должен быть запущен на $d_i^{(h)}$ последовательных промежутках. Обозначим за $ST_i^{(h)}$ временной интервал, на котором прибор может быть включен, а за $ET_i^{(h)}$ — временной интервал, отвечающий времени выключения прибора. Тогда, если прибор относится к множеству \mathcal{SA}_h , то $ST_i^{(h)} \leq ET_i^{(h)} - d_i^{(h)} + 1$, иначе $ST_i^{(h)} = ET_i^{(h)} - d_i^{(h)} + 1$. Далее последовательность интервалов $ST_i^{(h)}, \dots, ET_i^{(h)}$ будем называть *допустимым временем работы*.

Рассмотрим потребление воды прибором за время его работы. Оно может быть неравномерно распределено во времени. Обозначим фазы водопотребления этого прибора через \mathcal{F} . Это подмножество промежутков разбиения \mathcal{T} , на которых водопотребление приборов больше нуля. При этом $d_i^{(h)} = |\mathcal{F}_i^{(h)}|$. В каждой фазе $f \in \mathcal{F}$ потребление воды прибором $i \in \mathcal{A}^{(h)}$ обозначим через $l_i^{(h)}(f)$. Так как рассматриваются дискретные промежутки времени, то потребление воды прибором за данный промежуток рассчитывается как среднее потребление за весь промежуток.

Со стороны пользователя управление прибором $i \in \mathcal{A}^{(h)}$ в момент времени $t \in \mathcal{T}$ представлено индикаторами $a_i^{(h)}(t)$. Если прибор i пользователь включает в момент t , то $a_i^{(h)}(t) = 1$, иначе $a_i^{(h)}(t) = 0$. Управлять временем включения пользователь может лишь для приборов из \mathcal{SA}_h . Для приборов из \mathcal{FA}_h переменные $a_i^{(h)}(t)$ фиксированы.

Компания управляет ценой $c_t(\cdot)$ на воду в момент $t \in \mathcal{T}$. Ее целью является снижение ежедневного пика потребления воды, который возникает из-за одновременного включения приборов.

3. Иерархическая модель. Рассмотрим игру в рамках иерархической модели Штакельберга, где лидером является водоснабжающая компания \mathcal{V} , а последователями — пользователи $h \in \mathcal{H}$. Компания \mathcal{V} может устанавливать разные тарифы для разных типов потре-

бителей. Стратегия \mathcal{V} — это вектор-функция $c(t) \in C$, определенная на дискретном множестве интервалов времени \mathcal{T} , где

$$C = \left\{ c(t) = (c_1(t), \dots, c_{|\mathcal{H}|}(t)) : \mathcal{T}^{|\mathcal{H}|} \rightarrow R^{|\mathcal{H}|} \mid c_h(t) \leq b_h, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \right\}. \quad (1)$$

После того как тарифы заданы водоснабжающей компанией, пользователи выбирают свои стратегии. Стратегия пользователя $h \in \mathcal{H}$ — это вектор-функция $a_t^{(h)} \in A^{(h)}$, определенная на дискретном множестве интервалов времени \mathcal{T} , где

$$A^{(h)} = \left\{ a^{(h)}(t) = (a_1^{(h)}(t), \dots, a_{|\mathcal{A}^{(h)}|}^{(h)}(t)) : \mathcal{T}^{|\mathcal{A}^{(h)}|} \rightarrow \{0, 1\}^{|\mathcal{A}^{(h)}|} \mid \sum_{t=ST_i^{(h)}}^{ET_i^{(h)} - d_i^{(h)} + 1} a_i^{(h)}(t) = 1, \quad \forall i \in \mathcal{A}^{(h)} \right\}. \quad (2)$$

Ограничение возникает из-за того, что рассматриваются лишь приборы, которые нужно запустить ровно один раз в день. Если прибор в действительности нужно запустить несколько раз, то в рассматриваемой модели для него создаются фиктивные приборы со своим допустимым временем работы. Заметим, что выбор тарифа компанией \mathcal{V} не накладывает ограничений на множество стратегий пользователя.

Определим функции выигрышей игроков. При фиксированных тарифах $c(\cdot)$ каждый из пользователей $h \in \mathcal{H}$ минимизирует свою целевую функцию, которая отвечает цене за воду

$$U^{(h)}(a^{(h)} | c^{(h)}) = \sum_{i \in \mathcal{A}^{(h)}} \sum_{t=ST_i^{(h)}}^{ET_i^{(h)} - \min\{t, d_i^{(h)}\}} \sum_{f=1} c^{(h)}(t) a_i^{(h)}(t - f + 1) l_i^{(h)}(f), \quad (3)$$

где $l_i^{(h)}(f)$ — потребление воды прибором $i \in \mathcal{A}$ в фазе f . Обозначим через

$$\bar{a}^{(h)}(\cdot | c^{(h)}) = \min_{a^{(h)}(\cdot) \in A_h} U^{(h)}(a^{(h)}(\cdot) | c^{(h)}(\cdot)).$$

Минимизирующие стратегии, выбранные пользователями при фиксированном тарифе, обозначим через $I = \{\bar{a}^{(h)}(\cdot|c^{(h)})\}_{h \in \mathcal{H}}$.

Для компании \mathcal{U} целевой функцией является пик потребления

$$W(c(\cdot)|I) = \max_{t \in \mathcal{T}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \left[\sum_{i \in \mathcal{A}^{(h)}} \sum_{f=1}^{\min\{t, d_i^{(h)}\}} \bar{a}_i^{(h)}(t-f+1|c^{(h)}) l_i^{(h)}(f) \right]. \quad (4)$$

Обозначим через $\bar{c}(\cdot) = \min_{c(\cdot) \in \mathcal{C}} W(c(\cdot)|I)$.

Заметим, что задача (2), (3) является параметрической задачей целочисленного линейного программирования. Задача (1), (4) носит нелинейный характер. Решением этих задач являются $\bar{a}^{(h)}(\cdot|c^{(h)})$ и $\bar{c}(\cdot)$ соответственно. В [5] доказано, что указанные стратегии образуют ситуацию равновесия по Нэшу при условии, что компании \mathcal{U} известны стратегии пользователей при заданных тарифах.

3.1. Решение задачи минимизации пика. Перепишем (3) в виде

$$U^{(h)}(a^{(h)}|c^{(h)}) = \sum_{i \in \mathcal{A}^{(h)}} \sum_{t=ST_i^{(h)}}^{ET_i^{(h)}-d_i^{(h)}+1} a_i^{(h)}(t) \sum_{f=1}^{d_i^{(h)}} c^{(h)}(t+f-1) l_i^{(h)}(f).$$

Отсюда можно заключить, что минимум целевой функции достигается тогда и только тогда, когда

$$\bar{a}_i^{(h)}(t|c^{(h)}) = \begin{cases} 1, & t = \arg \min_{t \in [ST_i^{(h)}, ET_i^{(h)}-d_i^{(h)}+1]} \sum_{f=1}^{d_i^{(h)}} c^{(h)}(t+f-1) l_i^{(h)}(f), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что задача достижения глобального минимума высоты пика не всегда имеет решение относительно $c^{(h)}$, поскольку для приборов, имеющих одинаковое допустимое время работы и одинаковые профили потребления при фиксированных тарифах время запуска будет одним и тем же, если пользователи действуют оптимально.

3.1.1. Единичные профили потребления. Поскольку задача (1), (4) нелинейна и разрывна, то ее решение стандартными способами затруднено. Для решения методом перебора даже в простейшем случае, когда $d_i^{(h)} = 1$ и $l_i^{(h)}(1) = 1$ для $\forall h \in \mathcal{H}$, $\forall i \in \mathcal{A}^{(h)}$, требуется перебор $|\mathcal{T}|!$ вариантов, т. е. решение сводится к установлению порядка на $c^{(h)}(t)$. На практике при $|\mathcal{T}| = 24$ число вариантов

превосходит $6 \cdot 10^{23}$, поэтому такое решение является вычислительно слишком сложным. Опишем алгоритм получения тарифов в случае $|\mathcal{H}| = 1$. Для краткости опустим индекс h .

Алгоритм 1. Снижение пика для единичных профилей.

1. Пусть задано множество различных цен $\{c(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$.
2. Для любого $t \in \mathcal{T}$ найти количество приборов m_t , чье допустимое время работы содержит t .
3. Установить минимальную цену в любой из моментов t , для которых число m_t минимально.
4. Удалить из расписания запуска те приборы, для которых допустимое время работы содержит t из пункта 3.
5. Перейти к пункту 2 для $\mathcal{T} = \mathcal{T} \setminus t$, если цены установлены не для всех $t \in \mathcal{T}$.

Теорема. Если $|\mathcal{H}| = 1$, $d_i = 1$, $l_i(1) = 1$ для $\forall i \in \mathcal{A}$, то тариф, полученный с помощью алгоритма 1, позволяет обеспечить минимум высоты пика потребления.

Доказательство. При $t = \arg \min_{t \in \mathcal{T}} c(t)$ потребление равно m_t . Поэтому минимальная возможная высота пика потребления всегда не меньше чем $\min_{t \in \mathcal{T}} m_t$ на первой итерации. Так как на каждой последующей итерации рассматриваются лишь приборы, чье допустимое время работы не содержит t (поскольку, для оставшихся приборов время запуска равно t), то это же рассуждение можно применить и к остальным итерациям. И поэтому минимальная возможная высота пика потребления равна $\min_{t \in \mathcal{T}} m_t$ на одной из итераций.

Теорема доказана.

Замечание. Как можно заметить, полученное решение не является единственным относительно порядка $c(t)$.

3.1.2. Профили потребления произвольной высоты. Случай единичных профилей потребления $d_i = 1$ и $l_i(1) = 1$ для $\forall i \in \mathcal{A}$ легко обобщить до случая профилей потребления произвольной высоты $d_i = 1$ для $\forall i \in \mathcal{A}$, а $l_i(1)$ произвольно. Действительно, два прибора с единичными профилями потребления и одинаковым допустимым временем работы влияют на высоту пика абсолютно также, как один прибор с тем же допустимым временем работы и $l_i(1) = 2$. Поэтому для произвольного $l_i(1)$ достаточно выбрать минимальную целочисленную единицу измерения и добавить $l_i(1)$ дополнительных

приборов с тем же допустимым временем работы. Тогда для минимизации высоты пика в алгоритме 1 необходимо заменить число пересечений на максимальное возможное потребление. Будем ссылаться на данную версию алгоритма, как на алгоритм 2.

3.1.3. Случай произвольных профилей потребления. Решение в общем случае представляет собой более сложную задачу. Это связано с тем, что даже при условии совпадения допустимого времени работы оптимальное время запуска приборов с разными профилями потребления может различаться. Поэтому тарифы, используемые в ранее указанных случаях, не всегда являются оптимальными. Также в случае произвольных профилей потребления невозможно найти минимум пика потребления методом перебора, так как для выбора времени запуска прибора пользователи руководствуются не только порядком, заданным на ценах тарифа, но и количественными соотношениями между ценами. Тем не менее на практике алгоритм 2 может быть применен и в этом случае. Покажем, что алгоритм 2 позволяет снизить высоту пика потребления с помощью компьютерного моделирования.

3.1.4. Генерация расписаний потребления. Построим расписание с помощью генерации случайных профилей потребления и допустимых времен работы. Список допустимых времен работы составим следующим образом: в качестве начала интервала $ST_i^{(h)}$ выберем равномерно интервал из множества \mathcal{T} , а в качестве конца — равномерно интервал из множества \mathcal{T} не раньше $ST_i^{(h)}$. Список профилей составим так: длину профиля $d_i^{(h)}$ выберем равномерно в пределах допустимого времени работы, а каждое потребление профиля $l_i^{(h)}(f)$ для заданного интервала зададим как случайную величину с равномерным распределением на промежутке $[0, 1]$.

3.1.5. Результаты вычислений. Для оценки эффективности алгоритма 2 реализуем дополнительно функцию, вычисляющую лучший тариф с помощью перебора всех возможных перестановок упорядоченных цен аналогично случаю единичных потреблений. В силу ограниченных вычислительных ресурсов произведем расчет для $|\mathcal{T}| = 6$, $|\mathcal{H}| = 1$ и $|\mathcal{A}| = 50$. При фиксированном расписании эксперимент заключается в сравнении высоты пика без оптимизации с высотой пика при оптимизации с помощью алгоритма 2 и метода перебора. Сгенерируем расписание случайным образом 1000 раз согласно пункту 3.1.4 и вычислим процентное соотношение высот

пиков. Использование алгоритма 2 позволяет снизить высоту пика в среднем на 13%. Но при этом высота пика при использовании алгоритма 2 на 6% выше, чем при использовании метода перебора. При $|T| = 24$ произведена симуляция для 1000 приборов с потреблением от 1 до 3 часов. В этом случае алгоритм 2 позволяет снизить пиковую нагрузку на 30%.

4. Заключение. В рамках представленной модели управление тарифами позволяет снизить высоту пика потребления воды не менее чем на 19%. На данный момент решение в общем случае представляет собой аналитически и вычислительно сложную задачу. В работе разработан не требовательный к вычислительным ресурсам алгоритм, позволяющий снизить пиковую нагрузку от 13% до 30%.

Литература

1. Leakage monitoring. Reducing leakage through effective flow measurement [Электронный ресурс]: URL:https://library.e.abb.com/public/e0cc9b7d337e577dc125790d0027c37b/AG_LEAKAGE-EN.pdf (дата обращения: 17.03.08).
2. Будылин М. А., Соколов С. В. Влияние вида распределения располагаемой мощности и размера штрафов на определение оптимального плана гидроэлектростанции // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 80–86.
3. Barbato A., Capone A., Chen L. A power scheduling game for reducing the peak demand of residential users // Online Conference on Green Communications (GreenCom). 2013. P. 137–142.
4. Tricarico C., de Marinis G., Gargano R. Peak residential water demand // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Water Management. 2007. Vol. 160. P. 115–121.
5. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. Изд. 2-е. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

УДК 519.7

Бикташева А. М.

Задача распределения причалов в контейнерных терминалах

Рекомендовано к публикации доцентом Крылатовым А. Ю.

1. Введение. Рассмотрим задачу распределения причалов в морском порту. Задача состоит в том, чтобы составить план швартовки прибывших контейнеровозов в контейнерный терминал (рис. 1). Интеллектуальные системы планирования распределения причалов среди прибывающих судов играют важную роль в уменьшении общего времени задержек и простоев не разгруженных судов в морских портах. Целью данной статьи является исследование алгоритма решения задачи распределения причала (*Berth allocation problem*). Решение задачи распределения причалов заключается в минимизации суммы времени, которое контейнеровозы проводят в ожидании свободных причалов и обработки грузов [1]. Отметим, что математически задача распределения причалов близка задаче распределения ресурсов или распределения потоков [2, 3, 7–12]

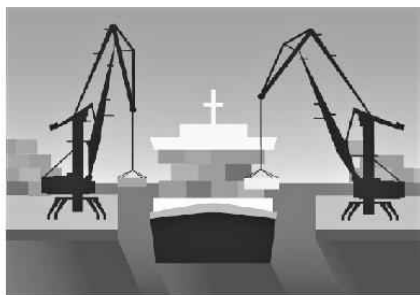


Рис. 1. Разгрузочно-погрузочные работы

Бикташева Айгуль Марселевна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: abic312@mail.ru, тел.: +7(905)231-48-31

В таблице показаны время ожидания свободного причала, оцененного в порту города Кобе в феврале 1996 года.

Таблица. Время ожидания свободного причала

количество причалов	3	4	5	6	7
время (минуты)	221	36	10	2	0

Из таблицы видно, что чем больше причалов в контейнерном терминале задействованы, тем значительно эффективнее организован процесс обслуживания. В связи с этим важен процесс оптимизации работы причалов в крупных контейнерных терминалах.

2. Математическая модель оптимизации распределения причалов. В статической задаче распределения причалов предполагается, что все корабли уже находятся в порту. Также предполагается, что каждый причал может обслуживать только один корабль и никакие физические или технические ограничения не накладываются (например, отношения между судном и глубиной воды). Более того, контейнеровозы могут прибывать в терминал для разгрузки только после того, как причал даст разрешение. Время обработки предполагается детерминированным (определенным), но причальный план может быть определен прежде, чем все контейнеровозы придут в порт. Целевая функция минимизирует сумму времени ожидания наличия причала, назначенного каждому судну, и времени обработки, которое они проводят у причала. При планировании распределения причалов, считается, что судно тратит до 24 часов для погрузочно-разгрузочные работы. Кроме того, эта модель гарантирует последовательное обслуживание всех судов без сбоев.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\min_x \sum_{i \in B} \sum_{j \in V} \sum_{k \in O} \{(T - k + 1)C_{ij} + S_i - A_j\} x_{ijk} \quad (1)$$

при условии

$$\sum_{i \in B} \sum_{k \in O} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in V, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall i \in B, \quad k \in O, \quad (3)$$

$$x_{ijk} \in [0, 1] \quad \forall i \in B, \quad k \in O, \quad j \in V, \quad (4)$$

где $i = (1, \dots, I)$, $i \in B$ — множество причалов, $j = (1, \dots, T)$, $j \in V$ — множество судов, $k = (1, \dots, T)$, $k \in O$ — порядок обслуживания, S_i — время, когда причал i становится свободным для планирования распределения причала, A_j — время швартовки судна j , C_{ij} — время обработки судна j у причала i , $x_{ijk} = 1$, если судно j обслуживается у причала i в порядке k , иначе $x_{ijk} = 0$.

Множество судов и множество порядков обслуживания имеют одинаковое количество элементов, так как допустимым решением является такое, при котором каждое судно обслуживается одним определенным причалом. Целевая функция (1) минимизирует сумму времени ожидания причала и времени, которое потребуется на разгрузку каждого судна. Заметим, что из условия задачи следует, что $S_i \geq A_j$ для всех i, j . Ограничение (2) гарантирует, что каждое судно j будет обслужено каким-либо причалом i в любом порядке обслуживания. Ограничение (3) предусматривает, что каждый причал i обслуживает не более одного судна j в любой промежуток времени. В целевой функции (1) время обработки C_{ij} определяется как $(T - k + 1)$. Это следует из того, что время обработки конкретного судна, обслуживаемого у причала i , вносит изменение во время, которое будет обслуживаться у того же причала следующее после него судно. Другими словами, время ожидания для конкретного судна представлено как совокупное время разгрузки предшествующих ему контейнеровозов.

3. Числовой эксперимент. Рассмотрим морской торговый порт в Усть-Луге. Порт обладает 19 причалами, способными принимать контейнеровозы (рис. 2). Предположим, что необходимо спланировать разгрузки 20 кораблей, прибывающих в контейнерный терминал Усть-Луги. Будем считать, что время разгрузки одного корабля на одном причале варьируется от 70 до 90 часов. В таком случае, задача (1)–(4) принимает конкретный вид с заданными параметрами. Существует большое количество алгоритмов для решения подобных задач бинарного программирования [4]. Мы использовали алгоритм, разработанный в [5]. Оптимальное решение было построено за 200 итераций. При условии, что с увеличением размерности задача становится NP-сложной, такой результат является вполне приемлемым. Таким образом, рассмотренная модель применима и удобна в исполь-

зовании при планировании обслуживания судов портами.



Рис. 2. Порт Усть-Луга

4. Заключение. Апробированы модель и алгоритм распределения причалов между судами в контейнерном терминале. Произведен численный эксперимент планирования обслуживания контейнеровозов причалами порта Усть-Луга. Результаты эксперимента показывают, что существующие алгоритмы позволяют использовать модель (1)–(4) в качестве базы для разработки интеллектуальных систем на морском транспорте. Подобные системы позволяют, в первую очередь, автоматизировать процесс планирования обслуживания кораблей портами, а самое главное, оптимизировать этот процесс, минимизировав время ожидания и сократив тем самым транзакционные издержки.

Литература

1. Imai A., Nishimura E., Papadimitriou S. The dynamic berth allocation problem for a container port // *Transportation Research Part B*. 2001. No 35. P. 401–417.
2. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // *Математическая теория игр и ее приложения*. 2012. Т. 4. № 4. С. 23–44.
3. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Современные проблемы использования интеллектуальной базы математического моделирования при борьбе с заторами в крупных городах России // *Транспорт российской федерации*. 2014. № 4(53). С. 69–73.

4. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1982.
5. Imai A., Nagaiwa K., Chan W.T. Efficient planning of berth allocation for container terminals in Asia // Journal of Advanced Transportation. 1997. No 31. P. 75–94.
6. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 121–130.
7. Буре В. М., Карелин В. В. О задаче планирования работы терминала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 2. С. 32–38.
8. Буре В. М., Карелин В. В., Елфимов А. Н. Об одной задаче управления детерминированной системой обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 100–112.
9. Архипов И. В. Математические модели и опыт реализации системы планирования раскроя лесосырья // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 82–92.
10. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Конкурентное равновесие Вардропа на транспортной сети из параллельных каналов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 476–481.
11. Буре В. М., Сергеева А. А. Оптимальные стратегии выбора логистической фирмы // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 440–443.
12. Захаров В. В. Методы и модели прикладной математической логистики // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 742–776.

УДК 517.977.5

Бойко А. В.

Применение адаптивного метода к задаче оптимального распределения капитальных вложений в отрасли

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. Рассматривается задача построения оптимального распределения капитальных вложений в отрасли [1, 2]. Интенсивность ввода основных производственных фондов является управляющим воздействием. Требуется найти управление, которое доставляет минимум критерию качества. Для решения этой задачи используется адаптивный метод Р. Габасова [3, 4]. Данный метод успешно применяется в различных задачах оптимального управления техническими объектами [5–8], а также в задачах управления макроэкономическими системами [9–16]. Для применения метода исходную динамическую систему нужно свести к интервальной задаче линейного программирования (ИЗЛП). Рассмотрим его подробно.

2. Адаптивный метод. Особенностью адаптивного метода является то, что он работает с ИЗЛП, не требуя введения дополнительных переменных и повышения размерности задачи, как это происходит в классическом симплекс-методе. В рассматриваемых моделях структура ИЗЛП специфична: число столбцов матрицы основных ограничений много больше числа строк, т. е. множество планов имеет форму вытянутого многогранника. В таком случае перебор вершин симплекс-методом нецелесообразен, и адаптивный метод является более эффективным. В ходе алгоритма метода Р. Габасова [3] могут использоваться произвольные точки из множества планов, не обязательно вершины, в силу этого метод способен работать с любыми начальными предположениями. По аналогии с базисом в симплекс-методе, для плана в адаптивном методе строится опора, но в отличие от базиса опора не связана с планом. Это позволяет менять их независимо друг от друга и более эффективно строить оптимальный план.

Бойко Алина Владимировна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alina.boyko@mail.ru, тел.: +7(911)992-30-87

Общий алгоритм метода несложен. Вначале задается допустимый план и опора. Затем вычисляются векторы потенциалов и оценок, сопровождающие опору. Проверяется критерий оптимальности, в случае его не выполнения строится направление изменения плана и максимально допустимый шаг, вычисляется новый план и заменяется опора.

3. Задача построения оптимального распределения капитальных вложений в отрасли. Рассмотрим экономику некоторой отрасли. Обозначим через $K(t)$ величину основных производственных фондов в году t . Прирост основных производственных фондов за промежуток времени Δt будет

$$\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t).$$

Пусть $V(t)$ — интенсивность ввода основных производственных фондов, т. е. количество вводимых фондов за единицу времени, например, за год. За счет капитальных вложений происходит рост основных производственных фондов $K(t)$, но за счет физического и морального износа их количество уменьшается с течением времени. Будем считать, что интенсивность выбытия основных производственных фондов в году равна $\mu K(t)$. Тогда за промежуток времени Δt будет выведено из производства $\mu K(t)\Delta t$ единиц фондов и введено $V(t)\Delta t$ единиц новых фондов. Таким образом, уравнение баланса основных производственных фондов имеет вид

$$K(t + \Delta t) - K(t) = V(t)\Delta t - \mu K(t)\Delta t.$$

Поделим обе части этого равенства на Δt и устремим $\Delta t \rightarrow 0$. Получим модель роста основных производственных фондов отрасли

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + V(t). \quad (1)$$

Пусть k_0 — заданное начальное значение основных фондов, k_1 — заданное значение основных фондов в конечный момент, R — известная величина и $T = [t_0, t_1]$. Введем дополнительные ограничения:

$$K(t_0) = k_0, \quad (2)$$

$$K(t_1) \geq k_1, \quad (3)$$

$$0 \leq V(t) \leq R, \quad t \in T, \quad (4)$$

и рассмотрим критерий качества

$$F(K(t), V(t)) = \alpha \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt - \beta K(t_1) \rightarrow \min. \quad (5)$$

(1)–(5) — это линейная задача оптимального управления, в которой требуется найти пару $(K(t), V(t))$, удовлетворяющую (1)–(4) и доставляющую минимум функционалу (5). Здесь управлением является $V(t)$, а фазовой переменной — $K(t)$. Заметим, что функционал (5) состоит из двух слагаемых. Его минимизация означает, во-первых, экономию капиталовложений, а во-вторых, максимизацию $K(t_1)$ основных фондов в конце рассматриваемого отрезка времени. Числа α и β — это весовые коэффициенты, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Если $\beta > \alpha$, то приоритет отдается первому требованию, если $\alpha > \beta$ — то второму.

Сведение к ИЗЛП. С помощью формулы Коши и некоторых преобразований, задачу (1)–(5) можно свести к интервальной задаче линейного программирования [4]. Управление $V(t)$ будем искать в классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования $h = \frac{t_1 - t_0}{N}$, где N — некоторое натуральное число. В итоге получим

$$C^T V \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$AV \geq B, \quad (7)$$

$$0 \leq V(t) \leq R, \quad t \in T, \quad (8)$$

$$V = (V(t_0), \dots, V(t_0 + (N-1)h)), \quad B = k_1 - k_0 e^{-\mu(t_1 - t_0)},$$

$$C = (C_h(t_0), \dots, C_h(t_0 + (N-1)h))^T, \quad C_h(t) = \alpha - \beta e^{-\mu t_1} \int_t^{t+h} e^{\mu \tau} d\tau,$$

$$A = (A_h(t_0), \dots, A_h(t_0 + (N-1)h)), \quad A_h(t) = e^{-\mu t_1} \int_t^{t+h} e^{\mu \tau} d\tau,$$

4. Численная реализация. Подставим в задачу (1)–(5) конкретные значения параметров и найдем оптимальное управление $V(t)$, доставляющее минимум функционалу (5). Положим $t_0 = 0$, $t_1 = 5$, $k_0 = 2$, $k_1 = 6$, $\mu = 0,05$, $N = 20$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $R = 23$.

В качестве начальной опоры выберем первый элемент вектора A , а в качестве начального плана — границу. Рассматриваемый интервал времени составляет 5 лет. Период поквартального квантования времени — 3 месяца.

Полученное значение целевой функции равно 113,0300532921691.

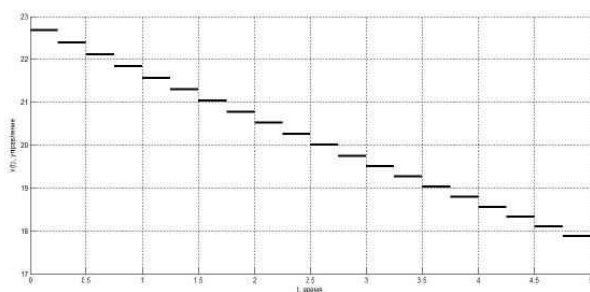


Рис. 1. Оптимальное управление

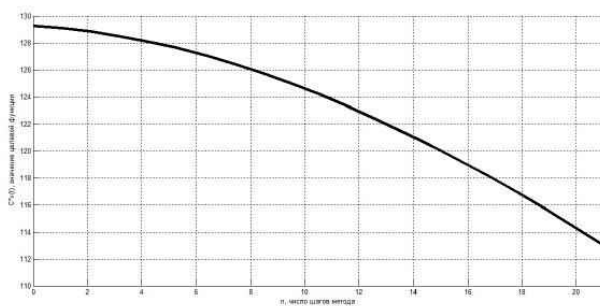


Рис. 2. Изменение целевой функции

5. Заключение. Задача (1)–(5) сведена к ИЗЛП (6)–(8) и с помощью адаптивного метода [3] найдено оптимальное управление $V(t)$. Алгоритм адаптивного метода реализован в среде MATLAB. Полу-

ченное управление является кусочно-постоянной функцией, определенной на интервале прогнозирования $[0,5]$ (см. рис. 1). Изменение целевой функции (6) в ходе работы адаптивного метода представлено на графике (см. рис. 2). Целевая функция равномерно убывает, достигая минимума на правой границе. Из-за специфического вида множества планов, применение симплекс-метода не целесообразно для этой задачи, в то же время, адаптивный метод быстро сходится к оптимальному плану.

Литература

1. Трошина Н. Ю. Теория оптимального управления [Электронный ресурс]: URL:http://nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/_54992.pdf (дата обращения: 16.03.2017).
2. Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. 2-е изд. испр. СПб.: Лань, 2015. 352 с.
3. Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С. Оптимизация линейных экономических моделей. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 211 с.
4. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 2000. Вып. 40, № 6. С. 838–859.
5. Попков А. С., Баранов О. В. Об оптимальном управлении вращательным движением вала электродвигателя // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 31–36.
6. Клюенков А. Л. Реализация адаптивного метода в одной задаче оптимального управления // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 53–58.
7. Баранов О. В., Попков А. С., Смирнов Н. В. Оптимальная стабилизация квадрокоптера в режиме реального времени // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 115–116.
8. Баранов О. В., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Гибридная многопрограммная стабилизация с применением нелинейного дискретного идентификатора // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 507–508.

9. Бойко А. В., Зубаков А. В. Применение адаптивного метода в неоклассической модели экономического роста // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 607–611.
10. Волик К. М., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Моделирование инвестиционных программ на основе импульсных программных управлений // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 419–420.
11. Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Социально ориентированная налоговая система страны как существенный инструмент управления развитием ее экономики // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 447–448.
12. Владимиров Е. В., Смирнов Н. В. Моделирование развития предприятия, использующего кредитные ресурсы, при условии нестационарной цены // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 584–590.
13. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Постановки задач управления экономикой в рамках динамической модели «затраты-выпуск» // В сборнике: Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем. Сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума АМУР–2013. Под редакцией А. В. Сигала. 2013. С. 320–326.
14. Волик К. М., Смирнов Н. В. Построение области достижимости в управляемой динамической модели межотраслевого баланса // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 597–604.
15. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в экономике // В сборнике: Инновационные технологии в медиаобразовании. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. А. И. Ходанович (отв. ред.) [и др.]. 2015. С. 17–21.
16. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в одном классе социально-экономических моделей // Математическое моделирование и краевые задачи Труды тринадцатой межвузовской конференции. Редакционная коллегия: В. П. Радченко (отв. редактор), Э. Я. Рапопорт, М. Е. Лернер, Е. Н. Огородников (отв. секретарь), М. Н. Саушкин (отв. секретарь). 2003. С. 152–155.

УДК 519.83

Бубякина Г. И., Плеханова Т. М.

Теоретико-игровой подход в задаче сокращения затрат для транспортной сети Якутии

Рекомендовано к публикации доцентом Громовой Е. В.

1. Введение. В Республике Саха (Якутия) находятся 629 населенных пунктов. Из них круглогодичной транспортной связью (дорогами с твердым покрытием) обеспечены только 46 населенных пунктов. Эксплуатационная протяженность сети автомобильных дорог общего пользования к концу 2014 года составила 35 656 км. Из них к дорогам с твердым покрытием относятся 30%, остальные 70% дорог представлены автозимниками [1].

Особый интерес представляет участок село Нижний Бестях — город Якутск, поскольку содержит паромную переправу в летний период, что позволяет разделить расходы на перевозку сельскохозяйственной и другой продукции между несколькими производителями.

Возможности применения теории кооперативных игр для подобных задач рассмотрены в работах [2–6]. Сеть автомобильных дорог представляется в виде конечного графа, задаваемого некоторым множеством вершин и ребер. При этом вершины соответствуют населенным пунктам, а ребра — автомобильным дорогам (транспортным связям). В качестве игроков выступают производители сельскохозяйственной продукции, расположенные в улусных центрах, которые соединены с городом Якутском сетью автомобильных дорог [1]. Задачей каждого игрока является транспортировка продукции в г. Якутск, причем под стратегией игрока понимается выбор пути, на котором затраты на перевозку будут наименьшими. Транспортная сеть рассматривается как в летний, так и зимний период. Предполагается, что в летний период возможна кооперация игроков на участке паромной переправы.

Бубякина Галина Игоревна — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st047224@student.spbu.ru, тел.: +7(812) 428-46-69

Плеханова Татисия Михайловна — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: st018970@student.spbu.ru, тел.: +7(812)428-46-69

2. Кооперативная игра. Рассмотрим математическую модель игры n лиц $\Gamma = (G, N, z_0, z_l)$, которая описана в [4]. Оптимальной траекторией в рассматриваемой сети называется траектория, которой соответствует ситуация h^* , минимизирующая суммарные затраты $l(h)$ в игре Γ :

$$l(h) = \sum_{r_{ij} \in U(h)} l(r_{ij}),$$

где r_{ij} — ребро графа G , а $U(h)$ — множество всех ребер в ситуации $h = (h^1, \dots, h^n)$.

Найти оптимальную траекторию в игре Γ можно на основе метода динамического программирования, а именно, на основе принципа оптимальности Беллмана [7]. Пусть $S \subseteq N$ — возможная коалиция игроков. При этом минимальные суммарные затраты $v_h(S)$ коалиции S представляют собой минимальные суммарные затраты $l(h)$ в соответствующей подыгре $\Gamma(S)$. Для каждой ситуации h в подыгре $\Gamma(S)$ суммарными затратами будет сумма затрат на переход по каждому из ребер, входящих в стратегию игрока i коалиции S . Затраты на переход по определенному ребру входят в эту сумму лишь один раз, независимо от того, сколько игроков использует это ребро.

Затраты коалиции S складываются из двух составляющих: непосредственные затраты $l_h(S)$ по перевозке сельскохозяйственной продукции по пути $U(h_s) \setminus U_0(h_s)$, где $U(h_s)$ — множество ребер, входящих в пути $h^i \in S$, $U_0(h_s)$ — множество общих ребер, входящих в пути $h^i \in S$ и затраты $a_h(S)$ на аренду транспортного средства коалицией S на преодоление пути $U_0(h_s)$:

$$v_h(S) = l_h(S) + a_h(S),$$

где

$$l_h(S) = \alpha \sum_{r_{ij} \in U(h_s) \setminus U_0(h_s)} l(r_{ij}),$$

$$a_h(S) = \alpha \sum_{r_{ij} \in U_0(h_s)} l(r_{ij}),$$

при этом α — затраты на транспортировку сельскохозяйственной продукции на единицу пути. Положим $\alpha = 10$ из расчета того, что стоимость 1 литра бензина составляет 50 рублей, а на преодоление 1 километра требуется 10 рублей.

Определим характеристическую функцию [2, 3]:

$$v(S) = \min\{\min_{Q \subset S} \{v(S \setminus Q) + v(Q)\}, v_h(S)\}.$$

В качестве принципа оптимального распределения затрат между игроками выберем вектор Шепли [8].

Рассмотрим пример решения поставленной задачи. Итак, пусть имеется игра 4 лиц на сети: 1-й игрок — село Амга, 2-й игрок — село Чурапча, 3-й игрок — село Борогонцы, 4-й игрок — село Павловск. Граф данной игры приведен на рис. 1.

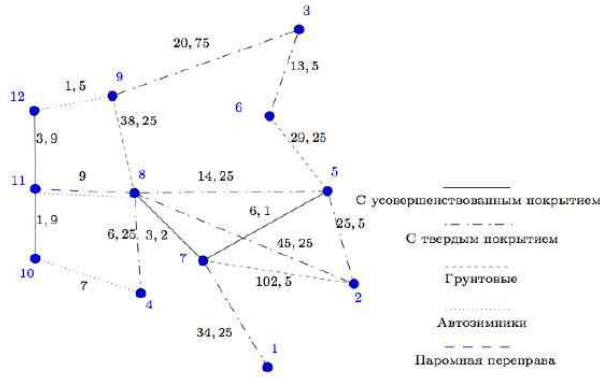


Рис. 1. Сеть автомобильных дорог

Начальным состоянием сети является $z_0 = (1, 2, 3, 4)$, а конечным состоянием служит $z_l = (11, 11, 11, 11)$.

Рассмотрим бескоалиционные игры Γ_1 и Γ_2 , соответствующие летнему и зимнему состоянию сети автомобильных дорог. Предельные тарифы на преодоление паромной переправы Якутск — Нижний Бестях, на автомобиле зависят от их веса, а именно до 1 тон-

ны (транспортировка одним производителем) — 340 руб., до 2 тонн (перевозка двумя производителями) — 610 руб., до 3 тонн (транспортировка тремя производителями) — 935 руб., до 4 тонн (перевозка четырьмя производителями) — 1275 руб.

В этих играх оптимальные пути игроков и их затраты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Бескоалиционные игры Γ_1 и Γ_2

i -й игрок	Оптимальный путь i -го игрока в игре Γ_1	Индивидуальные затраты i -го игрока	Оптимальный путь i -го игрока в игре Γ_2	Индивидуальные затраты i -го игрока
1	(1,7),(7,8),(8,11)	714,5	(1,7),(7,8),(8,11)	464,5
2	(2,5),(5,7),(7,8),(8,11)	688	(2,5),(5,7),(7,8),(8,11)	438
3	(3,6),(6,5),(5,7),(7,8),(8,11)	860,5	(3,9),(9,12),(12,11)	261,5
4	(4,8),(8,11)	402,5	(4,10),(10,11)	89

Из таблицы 1 следует, что переход от графа бескоалиционной игры Γ_1 к графу бескоалиционной игры Γ_2 , основанному на добавлении ребер, соответствующих проложенным автозимникам, приводит к сокращению затрат каждого из игроков.

Теперь рассмотрим кооперативную игру Γ_1^* , соответствующую летнему состоянию сети автомобильных дорог. В этой игре оптимальные пути игроков и их затраты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Кооперативная игра Γ_1^*

i -й игрок	Оптимальный путь i -го игрока в Γ_1^*	Затраты i -го игрока по вектору Шепли
1	(1,7),(7,8),(8,11)	666,125
2	(2,5),(5,7),(7,8),(8,11)	609,292
3	(3,6),(6,5),(5,7),(7,8),(8,11)	781,625
4	(4,8),(8,11)	375,458

На основе таблиц 1, 2, т. е. сравнения решений бескоалиционной игры Γ_1 и кооперативной игры Γ_1^* , сделан вывод, что в летний период возможна эффективная кооперация игроков на участке паромной переправы, указывающая на уменьшение затрат каждого из игроков.

3. Заключение. Теоретико-игровой подход к задаче сокращения затрат для транспортной сети Якутии позволяет находить оптимальные решения игр на сетях автомобильных дорог. При этом решение задачи в виде кооперативной игры дает возможность более эффективно разделить затраты между производителями сельскохозяйственной продукции.

Литература

1. Атлас автомобильных дорог республики Саха (Якутия). СПб.: Первый издательско-полиграфический холдинг, 2009. 64 с.
2. Shchegryaev A. N., Zakharov B. B. Multi-period cooperative vehicle routing games // Contributions to Game Theory and Management, 2014. Vol. 7. P. 349–359.
3. Захаров В. В., Щегряев А. Н. Устойчивая кооперация в динамических задачах маршрутизации транспорта // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Т. 4. Вып. 2. С. 39–56.
4. Карпов М. И., Петросян Л. А. Кооперативные решения в коммуникационных сетях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 4. С. 37–45.
5. Гусев В. В., Мазалов В. В. Оптимальные стратегии в игре патрулирования на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 2. С. 61–76.
6. Бутенко М. С. Двухэтапный принцип оптимальности в сетевой игре с шоком специального вида // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 573–578.
7. Беллман Р. Е. Динамическое программирование / пер. с англ. И. М. Андреевой. М.: Изд-во ИЛ, 1960. 400 с.
8. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2017. 432 с.

УДК 658.5

Гаврилина А. В.

Приемлемость последовательности кузовов на автомобильном производстве

Рекомендовано к публикации профессором Шишкиным В. И.

1. Суть проблемы. На автозаводах существует определенный запланированный порядок следования кузовов по конвейеру, который стараются соблюдать при производстве как можно точнее. При этом, для каждого кузова изначально определено, какая у него в дальнейшем будет комплектация. Это делается в связи с тем, что автомобили некоторых комплектаций нельзя располагать в очереди близко друг к другу, так как при сложности реализации этих комплектаций в следующих цехах могут возникнуть простои [1]. Для того, чтобы этого избежать, между ними в очередь помещают более простые комплектации, за счет которых восполняют ушедшее на сложную комплектацию время.

Рассмотрим случай, когда после прохождения некоторого цеха сразу несколько кузовов меняют свое расположение. На рис. 1 приведен пример изменения последовательности. Кузова могут только отставать из-за возникающих проблем, но не могут независимо от других выйти вперед: это будет случай, когда следующие за ним кузова, идущие по плану раньше, отстали от своей очереди.

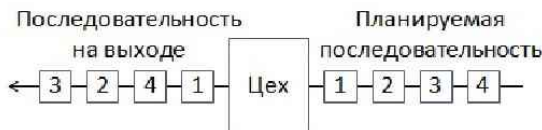


Рис. 1. Пример изменения последовательности при прохождении через цех

Гаврилина Анна Владимировна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: wercade@yandex.ru, тел.: +7(905)271-28-75

Рассмотрим чередование одной комплектующей, для которой необходимо следующее ограничение: между каждыми кузовами со сложным вариантом комплектации должно идти минимум l кузовов простой комплектации. На рис. 2 приведен пример чередования простых и сложных последовательностей.

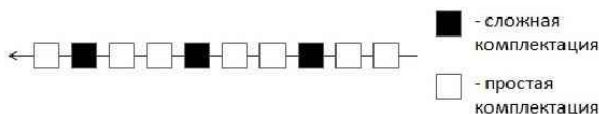


Рис. 2. Пример чередования простых и сложных комплектаций

2. Формулировка задачи. Как уже было сказано, при проходе через определенную точку последовательность может сильно изменяться. При этом могут нарушаться планируемые схемы расположения сложных комплектаций в очереди.

Задача заключается в вычислении вероятности того, что для определенной последовательности из N кузовов при прохождении через рассматриваемую точку (цех) нарушится приемлемость схемы, т. е. сложные комплектации будут находиться друг от друга на неприемлемом расстоянии (менее l простых комплектаций).

Будем использовать вероятности сдвигов кузовов на определенное число позиций, полученные из статистики входа и выхода кузовов из данного цеха. За сдвиг на k позиций примем количество кузовов с номерами, превышающими номер рассматриваемого кузова, стоящих перед ним в очереди после прохождения точки.

Пусть P'_k — полученная из статистики вероятность сдвига на k позиций назад,

$$\sum_{k=0}^{N-1} P'_k = 1.$$

Обозначим P_{kn} вероятность сдвига на k позиций назад для кузова n , которая определяется с помощью статистической вероятности и зависит от порядка кузова в планируемой очереди.

С увеличением номера максимально возможный сдвиг будет уменьшаться, а его вероятность увеличиваться:

$$P_{kn} = \begin{cases} P'_k, & \text{если } k + n < N; \\ \sum_{i=k}^{N-1} P'_i, & \text{если } k + n = N; \\ 0, & \text{если } k + n > N. \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_{kn} = 1, \quad n = \overline{1, N}.$$

3. Алгоритм. Рассмотрим конечную последовательность из N кузовов, т. е. ни перед этими кузовами, ни после них не имеется других кузовов в очереди.

Для начала рассчитаем, сколько может быть различных последовательностей вследствие задержек кузовов. Очевидно, что число возможных последовательностей равно $N!$. Каждая из этих последовательностей может образоваться единственным образом от определенного набора сдвигов кузовов.

Пусть $m_{n_1, \dots, n_N} = (m_{n_1}, \dots, m_{n_N})$ — вектор сдвигов последовательности n_1, \dots, n_N , где m_{n_i} — сдвиг кузова n_i , а каждое n_i — один из кузовов начальной последовательности, $n_i \neq n_j, i \neq j$:

$$m_{n_i} = \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & n_i < n_j, \\ 0, & n_i > n_j. \end{cases}$$

Зная, какое количество сдвигов для каждого кузова исходной последовательности необходимо для образования исследуемой последовательности, и имея вероятности P_{kn} каждого из этих сдвигов, можно определить вероятность появления данной последовательности:

$$P(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N P_{m_{n_i}, n_i}.$$

Если S_N — группа перестановок, тогда

$$\sum_{n_1, \dots, n_N \in S_n} P(n_1, \dots, n_N) = 1.$$

Каждая из получившихся последовательностей является либо приемлемой, либо неприемлемой. Как уже отмечалось, приемлемая последовательность — та, в которой количество кузовов с простой комплектацией между кузовами со сложной комплектации не меньше l .

Обозначим вектор комплектаций

$$H = (h_1, \dots, h_N).$$

При этом $h_i = 1$, если кузов i начальной последовательности имеет сложную комплектацию, и $h_i = 0$, если кузов i имеет простую комплектацию.

Определим приемлемости каждой последовательности:

$$S_{n_1, \dots, n_N} = \begin{cases} 1, & \forall n_i, n_{i+1}, \dots, n_{i+l} : \sum_{j=i}^{i+l} h_{n_j} \leq 1, \\ 0, & \exists n_i, n_{i+1}, \dots, n_{i+l} : \sum_{j=i}^{i+l} h_{n_j} > 1, \end{cases} \quad i = \overline{1, N-l}.$$

В случае $S_{n_1, \dots, n_N} = 1$ последовательность приемлемая, в случае $S_{n_1, \dots, n_N} = 0$ — неприемлемая.

Теперь можно найти вероятность того, что после прохождения рассматриваемой точки данная начальная последовательность будет являться приемлемой:

$$P_{OK} = \sum_{S_{n_1, \dots, n_N} = 1} P(n_1, \dots, n_N).$$

Также найдем вероятность того, что итоговая последовательность окажется неприемлемой:

$$P_{NG} = \sum_{s_{n_1, \dots, n_N} = 0} P(n_1, \dots, n_N),$$

$$P_{OK} + P_{NG} = 1.$$

4. Заключение. Таким образом, имея порядок, в котором кузова заходят в рассматриваемую точку, можно определять, с какой вероятностью возникнет проблемная для производства ситуация. Имея эти вероятности, можно пересматривать порядок следования кузовов, меняя его на более безопасный, либо готовиться к устранению проблем уже на следующих участках производства.

Литература

1. Туревский И. С. Экономика отрасли (автомобильный транспорт). М.: ИД «Форум» – Инфра-М, 2011. С. 131–158.

УДК 519.872.2

Елфимов А. Н.

Стационарный режим обслуживания для детерминированной системы с двумя потоками требований

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. В статье изучается детерминированная система обслуживания с двумя потоками требований и двумя обслуживающими устройствами. Близкие задачи рассматривались в работах [1–7].

2. Постановка задачи. Рассматривается модель системы обслуживания с двумя устройствами (U_1, U_2), обслуживающими входящие требования, а также двумя потоками требований (m_1, m_2), поступающих на вход системы. Каждый поток регулируется при помощи информационного табло. На табло демонстрируется разрешение на проведение операции с устройством или запрет. При этом одно обслуживающее устройство обслуживает только заявки одного потока, для определенности обозначим его m_1 . Второе устройство попеременно переключается с обслуживания заявок потока m_1 на заявки потока m_2 , поэтому индикация на информационном экране будет относиться только к требованиям из потока m_2 .

2.1. Основные понятия и обозначения. Пусть $q_i(t)$ — длины очередей заявок, ожидающих обслуживания для i -го потока в момент времени t соответственно, $i = 1, 2$. Обозначим $a_i(t)$ и $d_i(t)$ — скорости поступления и выполнения заявок для i -й очереди соответственно, $i = 1, 2$. Примем $g_1 > 0$ — длительность непрерывного обслуживания только заявок из очереди m_1 . Будем считать $g_2 > 0$ — длительность непрерывного обслуживания заявок из очередей m_1 и m_2 . Сделаем следующие допущения:

1. В рассматриваемой задаче время — дискретная величина, пропорциональная условной единице времени l . Длина l — минимальный интервал времени, в течение которого в каждом из

Елфимов Антон Николаевич — магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: elfpro@list.ru, тел.: +7(981)126-00-37

потоков происходит или может происходить только целое число событий, т. е. $g_i = k_i l$, $k_i \in \mathbb{N}$, — множество натуральных чисел.

2. Пусть $a_i(t) = a_i \geq 0$ — известная постоянная величина.
3. Будем считать, что $q_i(t)$ — неотрицательное целое число (число заявок в очереди на обслуживание потока i в момент t).
4. Примем

$$d_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{обслуживание заявки из очереди } j, j \neq i, \\ d, & \text{обслуживание заявки из } m_1 \text{ и } m_2, \\ 2d, & \text{обслуживание только заявки из } m_1. \end{cases}$$

5. Будем считать, что $a_2 < d < a_1 < 2d$.
6. В начальный момент времени очередь отсутствует, т. е. $q_i(0) = 0$, $i = 1, 2$.
7. Длительности непрерывного обслуживания заявок — g_1 и g_2 постоянны для каждой из очередей, но могут различаться в разных очередях.
8. Устройство U_1 обрабатывает только требования из m_1 .
9. Устройство U_2 обрабатывает требования из m_1 и иногда переключается на обработку требований из m_2 .

Пару (g_1, g_2) будем называть циклом. Введем в рассмотрение последовательности моментов времени для системы с двумя потоками заявок и двумя обслуживающими устройствами:

$$\tau_1^{(1)} = g_1, \tau_2^{(1)} = g_1 + g_2 + g_1, \dots, \tau_{k+1}^{(1)} = k(g_1 + g_2) + g_1, \dots$$

Данная последовательность представляет собой моменты начала обслуживания требований потока m_1 одновременно на двух обслуживающих устройствах. Рассмотрим вторую последовательность моментов времени:

$$\tau_0^{(2)} = 0, \tau_1^{(2)} = g_1 + g_2, \tau_2^{(2)} = 2(g_1 + g_2), \dots, \tau_k^{(2)} = k(g_1 + g_2), \dots$$

Вторая последовательность моментов времени представляет собой моменты начала обслуживания заявок из потока m_2 , т. е. однове-

менно обслуживаются заявки потоков m_1 и m_2 .

Начальный момент времени $\tau_0^{(0)} = 0$ — время начала работы устройства (поступления первой заявки для обслуживания).

Определение. Под стационарным режимом функционирования системы обслуживания будем понимать такой режим обслуживания, при котором $q_1(\tau_k^{(2)}) = 0$ и $q_2(\tau_{k+1}^{(1)}) = 0, \forall k = 0, 1, \dots$

3. Основные результаты. Приведем необходимые и достаточные условия установления стационарного режима в системе с двумя обслуживающими устройствами и двумя потоками требований.

Теорема. Пусть $q_1(0) = q_2(0) = 0$. Цикл (g_1, g_2) порождает стационарный режим тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\frac{a_2}{d - a_2} \leq \frac{g_1}{g_2} \leq \frac{2d - a_1}{a_1 - d}.$$

Следствие. Пусть $q_1(0) = q_2(0) = 0$. Необходимым условием установления стационарного режима в цикле (g_1, g_2) является выполнение следующего условия:

$$\frac{a_1 + a_2 - d}{d} \leq 1.$$

4. Заключение. Рассмотрена детерминированная система обслуживания с двумя потоками требований и двумя обслуживающими устройствами. Найдены необходимые и достаточные условия установления стационарного режима.

Литература

1. Буре В. М., Карелин В. В., Елфимов А. Н. Об одной задаче управления детерминированной системой обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 4. С. 100–112.
2. Karelin V., Bure V., Polyakova L., Elfimov A. Control problem of a deterministic queueing system // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10 (21). P. 1023–1030.

3. Елфимов А. Н., Буре В. М. О существовании стационарных циклов в детерминированной системе обслуживания при ограничении на длину цикла // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 633–637.
4. Елфимов А. Н. О задаче управления системой массового обслуживания с двумя очередями // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 605–611.
5. Полякова Л. Н., Карелин В. В., Буре В. М., Хитров Г. М. Точные штрафные функции в задаче управления одной системой массового обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 1. С. 73–81.
6. Haddad J., Mahalel D., Ioslovich I., Gutman P.-O. Constrained optimal steady-state control for isolated traffic intersections // Control Theory Tech. 2014. Vol. 12 (1). P. 84–94.
7. Haddad J., De Schutter B., Mahalel V. et al. Optimal steady-state control for isolated traffic intersections // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55 (11). P. 2612–2617.

УДК 519.866

Звягинцева А. А.

Количественная оценка синергетического эффекта сделок слияний и поглощений на примере ПАО «Роснефть» и ПАО «Башнефть»

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

1. Введение. В условиях неустойчивой макроэкономической ситуации для роста прибыли и поддержания конкурентоспособности на рынке компании все чаще выбирают стратегию слияний и поглощений. Для достижения цели сделки необходимо проводить тщательный предварительный анализ, используя количественные методы [1, 2]. В работе рассмотрены два метода оценки синергетического эффекта от сделок поглощения на примере ПАО «Роснефть» и ПАО «Башнефть».

2. Метод дисконтированных денежных потоков. Синергетический эффект в денежном выражении определяется по формуле $V_{syn} = EV_{R+B} - (EV_R + EV_B)$, где EV_R , EV_B , EV_{R+B} – стоимость компаний «Роснефть», «Башнефть» и объединенной компании. Стоимость компании

$$EV = \sum_{i=1}^n DCF_i + V_{term},$$

где $\sum_{i=1}^n DCF_i$ – сумма дисконтированных денежных потоков, V_{term} – стоимость бизнеса в постпрогнозный период. Денежный поток определяется по формуле [3, 4]

$$CF = EBIT - Tax + D\&A - \Delta NWC - CAPEX,$$

где $EBIT$ – прибыль компании до уплаты налогов, Tax – величина уплачиваемых налогов, $D\&A$ – амортизационные отчисления, ΔNWC – экономия на инвестициях в оборотный капитал, $CAPEX$ – капиталовложения.

Звягинцева Александра Александровна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alexandra.azv@gmail.com, тел.: +7(981)132-72-91

Для прогнозирования денежных потоков на 2016–2020 гг. была собрана статистика за 2010–2015 гг. и использован метод имитационного моделирования Монте-Карло [5–7] (проведено 1000 имитаций). Ставка дисконтирования ($WACC$) найдена как средневзвешенная стоимость капитала, рассчитанная с помощью модели оценки финансовых активов ($CAPM$) на основе статистики Bloomberg. Соответствующие распределения суммы денежных потоков за 5 лет приведены на рис. 1, 2. Распределение близко к нормальному.

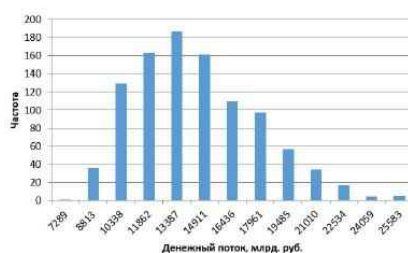


Рис. 1. Распределение прогнозируемого денежного потока компании «Роснефть»

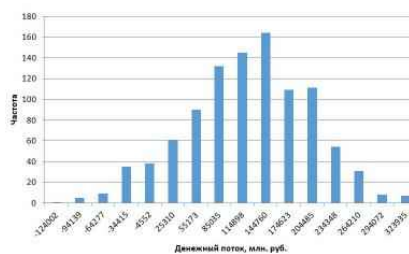


Рис. 2. Распределение прогнозируемого денежного потока компании «Башнефть»

Стоимость бизнеса в постпрогнозном периоде определена с помощью модели Гордона: $V_{term} = \frac{CF_n(1-g)}{WACC-g}$, где g — темп роста компании в постпрогнозном периоде, CF_n — денежный поток последнего года прогнозного периода. Полученные стоимости компаний представлены в таблице 1.

Таблица 1. Прогноз стоимости компаний

	Роснефть	Башнефть	Объединенная компания
$\sum DCF_i$ (млрд. руб.)	13697,66	107,83	13696,09
CF_{2020} (млрд. руб.)	6556,11	23,82	6683,07
V_{term} (млрд. руб.)	48019,33	161,63	48195,2
EV (млрд. руб.)	61716,99	269,45	61891,3

Получаем, что синергетический эффект составляет 147,36 млрд. руб.

3. Метод нечеткого анализа для оценки синергетического эффекта сделок слияния и поглощения. Количественные методы оценки синергетического эффекта недостаточно разработаны. Поэтому предложен метод на основе теории нечетких множеств. Для анализа использованы треугольные функции принадлежности, которые задаются аналитически следующим образом:

$$f(u, a, b, c) = \begin{cases} 0, & u \leq a, \\ \frac{u-a}{b-a}, & a \leq u \leq b, \\ \frac{c-u}{c-b}, & b \leq u \leq c, \\ 0, & c \leq u, \end{cases}$$

где a, b, c — некоторые действительные числовые параметры, причем $a \leq b \leq c$.

На основе исторических данных выделены промежутки изменения параметров, от которых зависят денежные потоки и синергетический эффект. Возможные изменения записаны в виде нечетких треугольных чисел. Далее получены прогнозные значения $EBIT$, $D\&A$, $CAPEX$, Tax , ΔNWC для 2016–2020 гг., рассчитаны стоимость компаний. Таким образом, получены треугольные числа для стоимости трех компаний (млрд. руб.), представленные в таблице 2.

Таблица 2. Стоимость компаний (треугольные числа)

	a	b	c
EV_R (млрд. руб.)	19411,72	21063,55	197185,66
EV_B (млрд. руб.)	19177,72	20382,81	196339,53
EV_{R+B} (млрд. руб.)	142,95	531,4	644,7

Для синергетического эффекта от сделки поглощения треугольное число: (91,05; 149,35; 201,43). Графическое изображение соответствующей функции принадлежности представлено на рис. 3.

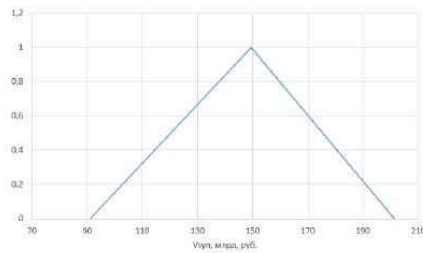


Рис. 3. Синергетический эффект от сделки (млрд. руб.)

Наибольшее значение функции принадлежности достигается при значении оценки синергетического эффекта 149,35 млрд. руб., соответственно, это наиболее вероятное значение оценки синергии. Полученное значение очень близко к результату первого метода (147,36 млрд. руб.)

4. Выводы. Рассмотренные методы позволяют количественно оценить синергетический эффект от сделки поглощения. Оценка синергетического эффекта от сделки поглощения «Башнефти» «Роснефтью», по словам представителя «Роснефти», составила 150–180 млрд. рублей. Полученные в работе данные близки к этим значениям и между собой, некоторые отклонения допустимы из-за погрешности исходных данных. Разработанный метод оценки синергетического эффекта с помощью нечетких множеств позволяет получить не единственное значение, а оценить промежуток возможного значения с соответствующей степенью уверенности. Метод гораздо быстрее дает результат и прост в интерпретации.

Литература

1. Дамодаран А. Инвестиционная оценка: Инструменты и методы оценки любых активов. М.: Альпина Паблшер, 2017. 1316 с.
2. Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов. М.: Олимп-Бизнес, 2016. 1008 с.
3. Колбин В. В. Теория риска. Часть 2. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. 236 с.
4. Звягинцева А. А. Принятие управленческих решений компании в условиях неопределенности рынка на примере ОАО «Лукойл» // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 637–641.
5. Звягинцева А. А. Задача многокритериальной оптимизации параметров инвестиционного проекта // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 617–622.
6. Сvirкин М. В., Карелин В. В., Буре В. М., Екимов А. В. Имитационное моделирование социальной сети с двумя лидерами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 92–98.
7. Дорошко А. А., Сvirкин М. В. Имитационная модель для анализа кредитных рисков банка // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 628–632.

УДК 519.2

Иванов Н. Г.

Оценка горизонта прогнозирования на основе тригонометрических многочленов Чебышёва

Рекомендовано к публикации профессором Прасоловым А. В.

1. Введение. В работе предложен метод аппроксимации тренда временного ряда с помощью системы Чебышёва и алгоритм нахождения горизонта прогнозирования временного ряда [1–4]. Данный алгоритм апробируется на среднесуточных ежедневных температурных данных в Москве с 1.01.1995 по 5.03.2017 [5]. Для сравнения приводится пример прогнозирования синоптиками температурных данных на период от одного дня до двух недель [6].

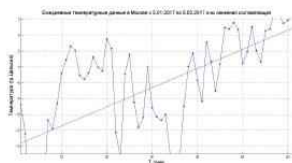


Рис. 1. Температура в Москве.
Линейная составляющая

Построение тренда, т. е. линии математических ожиданий стохастического процесса, строится в три шага:

1. Выделение линейной составляющей. Методом наименьших квадратов приблизим $A(T_i)$ полиномом первой степени $Y(T_i) = aT_i + b, i = \overline{1, n}$ (рис. 1). Вычтем полученную линейную составляющую из ряда $A(T_i)$. Получим новый ряд

$$R(T_i) = A(T_i) - Y(T_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Иванов Никита Григорьевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ivanov.n.g.1995@gmail.com, тел.: +7(952)224-07-21

2. Выделение системы тригонометрических многочленов Чебышёва [7]. В качестве системы Чебышёва возьмём тригонометрические функции:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T_n}T_i\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T_n}T_i\right), \dots, \cos\left(\frac{2\pi N}{T_n}T_i\right), \sin\left(\frac{2\pi N}{T_n}T_i\right).$$

Будем предполагать, что $n \geq 2N+1$. В этом случае согласно общей теории на интервале $[T_1, T_n]$ будет однозначно определяться тригонометрический многочлен наилучшего приближения в смысле метода наименьших квадратов

$$P_c(T_i) = \sum_{k=1}^c \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_n}T_i\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_n}T_i\right) \right), \quad i = \overline{1, n},$$

где $c = 1, \dots, N$ и будет определяться алгоритмом из раздела 3.

Коэффициенты тригонометрического многочлена находятся по формулам Бесселя:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n R(T_i) \cos\left(\frac{2\pi k}{n}T_i\right); \quad b_k = \frac{2}{T_n} \sum_{i=1}^n R(T_i) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_n}T_i\right).$$

3. Для построения модели тренда временного ряда $A(T_i)$, необходимо найти

$$F_c(T_i) = Y(T_i) + P_c(T_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Оценка горизонта прогнозирования. Под прогнозом временного ряда будем понимать модель тренда случайного процесса, построенного по временному ряду, и полосу возможных отклонений вокруг него. Приведём алгоритм нахождения горизонта прогнозирования временного ряда, т. е. интервала в будущем, на который делается прогноз по прошлому:

1. Построим временной ряд первых разностей $D(T_i)$ на половине данных ряда $A(T_i)$: $n_1 = n/2$; $D(T_i) = A(T_{i+1}) - A(T_i)$, $i = \overline{1, n_1 - 1}$.
2. Строим на половине данных ряда $A(T_i)$ тренд $F_c(T_i)$ по одной гармонике ($c = 1$).

3. Рассматриваем ряд $X(T_i) = A(T_i) - F_c(T_i)$ на половине данных. Из этого ряда нам понадобится размах.
4. Сравниваем его с размахом ряда $D(T_i)$: если половина размаха ряда $D(T_i)$ меньше размаха ряда $X(T_i)$, то увеличиваем число гармоник на единицу и возвращаемся к пункту 2, иначе остаемся и строим модельный прогноз.
5. Строим полосу ширины половины размаха ряда $D(T_i)$ вокруг модельных данных $F(T_i)$ как на идентификационной, так и на прогнозной части ряда $A(T_i)$.
6. Определяем выход контрольных данных из полосы, окружающей модельные данные на второй половине ряда $A(T_i)$. Этот выход и будет являться горизонтом прогнозирования (рис. 2).

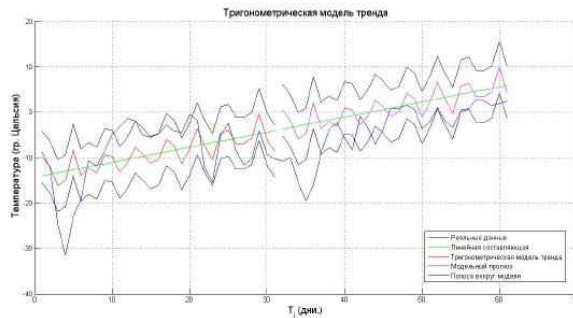


Рис. 2. Прогноз температуры

Однако возникает вопрос о сохранности величины горизонта, если сместить идентификационный интервал. Для решения этой проблемы рассматривается следующий алгоритм:

1. Из временного ряда $A(T_i)$ выделяется его некоторая часть.
2. На новом участке временного ряда осуществляется алгоритм, приведённый выше. В результате получается горизонт.
3. Смещаем новый участок вправо на единицу времени.
4. До тех пор, пока правая граница нового участка не достигла конца ряда $A(T_i)$, повторяем пункты 2, 3.

- Находим среднее арифметическое всех полученных горизонтов ряда и называем это значение средним горизонтом временного ряда $A(T_i)$.

Для примера рассмотрим ряд ежедневных температурных данных, усреднённых по 24 часам, в Москве за период с 1.01.1995 по 5.03.2017 (всего 8101 день). Скользящим «окном» выберем 60 дней. Тогда, усреднив 8042 значения горизонта и ширины полосы, получим, что средний горизонт равен 3,54 дня, а средняя ширина полосы — 8,23 градуса Цельсия.

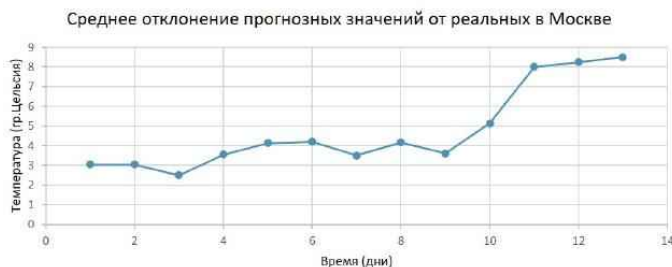


Рис. 3. Температура в Москве с 1.03.17 по 17.03.17

4. Сравнение алгоритма с предсказаниями синоптиков.

Рассмотрим пример прогнозирования с метеосайта [6]. В течение семнадцати дней записывались предсказания синоптиков на каждый из тринадцати будущих дней. Затем рассматривалось отклонение реальных данных от прогнозных. Результат отклонения от реальных данных в зависимости от горизонта прогнозирования показан на рис. 3. Видно, что с первого по девятый день среднее отклонение от фактических данных не превосходит 4,1, что соответствует полученным модельным результатам. Горизонт при этом равен девяти (после этого среднее отклонение резко возрастает). Он довольно большой, потому что на данный момент исследовано лишь семнадцать дней.

5. Выводы. Рассмотрена модель построения тренда временного ряда через систему Чебышёва. Выведен алгоритм оценки горизонта прогнозирования временного ряда. Приведён пример работы алгоритма на ежедневных температурных данных в Москве. Адек-

ватность работы алгоритма проверялась на прогнозируемых синоптиками данных. Несмотря на малое количество замеров, видно, что ширина полосы соответствует полученным по алгоритму результатам, хотя горизонт прогнозирования больше предполагаемого.

Литература

1. Иванов Н. Г., Прасолов А. В. Анализ различных методов аппроксимации тренда временного ряда // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 623–628.
2. Ivanov N. G., Prasolov A. V. Analysis of the approximation of time series trend and forecasting based on it // «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 460–462.
3. Иванов Н. Г., Прасолов А. В. О попытке решения обратной задачи с горизонтом прогнозирования // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 642–646.
4. Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. 2-е изд. испр. СПб.: Лань, 2015. 352 с.
5. Average Daily Temperature Archive [Электронный ресурс]: URL:<http://academic.udayton.edu/kissock/http/Weather/g sod95-current/RSMOSCOW.txt> (дата обращения: 17.03.17).
6. Погода в Москве на две недели [Электронный ресурс]: URL:<http://gismeteo.ru/weather-moscow-4368/2-weeks/> (дата обращения: 17.03.17).
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. Изд. 2-е, стереотип. М.: Физматлит, 1962. 464 с.

УДК 519.71

Каменская Е. А., Шихова К. А.

Задача распределения акторов по геополитическим проектам на основе алгоритма Гейла — Шепли

Рекомендовано к публикации доцентом Крылатовым А. Ю.

1. Введение. Сегодня в рамках стремительного и сложного процесса глобализации, в условиях усиления роли масс-медиа на международной и региональной аренах, а также при существующем ужесточении политики перераспределения сфер влияния в мире, решение геополитических задач становится необходимостью. Один из основных вопросов геополитики в настоящее время — как сохранить баланс в мире и максимально удовлетворить потребности каждой стороны. Очень ярко сложность данной проблемы проявляется в ситуациях, когда возникает необходимость лучшим образом распределить геополитические проекты между акторами, учитывая экономические, политические, социальные и другие интересы участников. В общем виде такая задача оптимального распределения всех акторов по всем проектам еще не решена. Однако, существуют механизмы, позволяющие сделать это в частных случаях. Один из них основывается на алгоритме отложенного принятия решения Гейла — Шепли и рассматривается в настоящей статье.

Отметим, что ранее задачи, решение которых базируется на этом алгоритме, охватывали лишь рынки двух типов: один-на-один и один-на-много. Большинство из них представлены в работах [1–4]. Проблема распределения акторов по геополитическим проектам относится к рынкам типа много-на-много, не рассматриваемых ранее. Оптимальность размещения, достигаемая использованием алгоритма Гейла — Шепли, доказывается, как и раньше, наличием стабильности такого распределения.

Каменская Елизавета Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: elizaveta1207@gmail.com, тел.: +7(965)786-31-38

Шихова Ксения Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: shihova.ksenia@yandex.ru, тел.: +7(911)082-71-56

2. Постановка задачи распределения на рынке многона-многo. Рассмотрим два конечных непересекающихся множества $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $P = (p_1, \dots, p_m)$. Назовем их элементы акторами и геополитическими проектами соответственно. Предпочтения j -го проекта представим списком $L^{p_j} = (l_1, \dots, l_{r_p})$. Пусть $l_k = (\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^s)$ — вектор акторов из A на k -ом месте в списке проекта p_j . Аналогично, список предпочтительных проектов для актора a_i имеет вид $L^{a_i} = (\rho_1, \dots, \rho_{r_\alpha})$, где ρ_k — любой геополитический проект. Под α_k^q , $q = \overline{1, s}$, будем понимать актор из A такой, что $\alpha_k^i \neq \alpha_k^j$ для любого $i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, где s — количество акторов на k -ом месте. Если $l_i >_p l_j$, то актор l_i предпочтительнее l_j для проекта p . Аналогично, если $\rho_i >_\alpha \rho_j$, то проект ρ_i лучше для актора, чем проект ρ_j .

Введем бинарную переменную

$$\delta(l_k, \alpha_k^q) = \begin{cases} 1, & \text{актор } \alpha_k^q \text{ согласен на участие в проекте,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, окончательный ответ акторов, расположенных на k -ом месте в списке приоритетов L^{p_j} , есть

$$\delta(l_k) = \prod_{q=1}^s \delta(l_k, \alpha_k^q). \quad (1)$$

Обозначим функцию затрат (вкладов) через φ . Она строится путем анализа влияния на решение экономических, политических, социальных, географических и других аспектов. Под весом

$$w_{i,j}(\varphi) \quad (2)$$

будем понимать затраты i -го актора на j -й проект. Аналогичным образом

$$\omega_{j,i}(\varphi) \quad (3)$$

есть вклад в j -й проект i -го актора. Будем считать, что актор может принять участие в геополитическом проекте, если

$$W_i(\varphi) = \sum_{j=1}^m w_{i,j}(\varphi) \leq 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Таким же образом, проект принят к исполнению, если

$$\Omega_j(\varphi) = \sum_{i=1}^n \omega_{j,i}(\varphi) = 1, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5)$$

По условиям задачи каждый геополитический проект должен быть инициирован актором или группой акторов. Обозначим суммарный вес этих проектов для акторов-инициаторов через $W_0(\varphi)$. Тогда $\Omega_0(\varphi)$ — суммарный вес вклада акторов-инициаторов в геополитический проект.

Распределением акторов по геополитическим проектам μ называется взаимно однозначное отображение множества $P \cup A$ на себя, обладающее свойствами:

1. $|\mu(A)| = m$ для каждого актора A ;
2. $|\mu(P)| = n$ для каждого актора P ;
3. Если $\mu(\alpha_i) = p_j$, то $\mu(p_j) = \alpha_i$.

Результатом распределения является множество паросочетаний (P, A) . Паросочетание будем называть *устойчивым*, если выполнен ряд требований. Во-первых, ни один актор не участвует в неприемлемом геополитическом проекте (*требование индивидуальной рациональности*). Во-вторых, если в проекте остались свободные места, ни один актор, из числа зачисленных в другие проекты, не хочет перейти на свободное место (*требование эффективности*). В-третьих, не найдется такой пары актор-проект, что актор хотел бы перейти в проект, а тот готов исключить кого-то из распределенных ему участников в пользу указанного актора (*требование попарной устойчивости*) [1].

3. Алгоритм. Согласно теореме Гейла – Шепли, множество стабильных распределений по парам не пустое. Для доказательства был предложен алгоритм [5]. Для случая взаимного распределения акторов по геополитическим проектам алгоритм работает следующим образом:

Перед началом алгоритма инициирующие акторы автоматически ставят свои проекты вверх списка и изначально учитывают веса затрат на проект. Аналогичным образом все геополитические проекты учитывают веса всех вкладов своих акторов-инициаторов и ставят их вверх списка L^p .

1. На первом этапе каждый проект делает предложение всем акторам, стоящим у него на первом месте. Каждый актер рассматривает все сделанные ему предложения и, следуя своему списку приоритетов и сумме весов затрат, соглашается на проекты, удовлетворяющие всем его критериям. Всем остальным проектам, сделавшим предложение актору, но не принятым на первом этапе, актер отвечает «может быть». Далее все геополитические проекты считают свои окончательные ответы по формуле (1). Если ответ равен единице, то проект одобряется.

2. Все непринятые проекты отправляют дополнительные запросы актерам, находящимся следующими в их списке предпочтений. Каждый актер сравнивает старые и новые предложения и удовлетворяет все приоритетные, не забывая учесть веса затрат. Геополитический проект, актер которого предпочел более выгодный проект, возвращается к поиску акторов-участников, если у него еще остались пункты в списке приоритетов.

3. Так этап за этапом, проекты, которым ответили «может быть», делают предложение актерам, двигаясь вниз по своим спискам.

4. Алгоритм прекращает работу, когда больше нет геополитических проектов, желающих сделать предложение.

5. В заключении алгоритма все одобренные проекты принимают к исполнению. Если на конец работы программы проект актора-инициатора был отвергнут остальными актерами, то этот геополитический проект отменяется, а его вес вычитается из суммарного веса затрат для этого актора.

4. Результаты применения алгоритма на данных. Рассмотрим входные данные нашего примера. Акторы: Россия (РФ), США, Германия (Герм), Франция (Фр), Англия (Англ), Италия (Ит), Китай (Кит), Япония (Яп). Геополитические проекты со своими актерами-инициаторами представлены в следующем виде: «Экономический союз Европы» (Союз) — Франция; «Азиатский таможенный союз» (АТС) — Китай; «Западно-Европейская железная дорога» (Жд) — Италия; «G5» — США; «Газопровод Россия—Германия» (Газ) — Россия, Германия; «Европейский таможенный союз» (ЕТС) — Англия; «Европейско-Азиатский валютный фонд» (Фонд) — Россия, Китай; «Трансатлантический альянс» (Альянс) — США.

Функция затрат (вкладов) $\varphi = 1$. Функция вклада (3) имеет вид

$$\omega_{j,i}(\varphi) = \frac{(1 - \omega_{j,0})\varphi}{n_k}, \quad (6)$$

где $\omega_{j,0}$ — вес вклада акторов-инициаторов j -го проекта, а n_k — количество акторов в строке приоритетов i . Функция затрат (2), зависящая в данном случае от (6), определена для каждого актора и представлена в таблице 1.

Таблица 1. Значения функции $W_{i,j}(\varphi)$

Акторы	Вес затрат
Россия	$\omega_{j,i} - 0,1$
США	$\omega_{j,i} - 0,1$
Германия	$\omega_{j,i}$
Франция	$\omega_{j,i} + 0,1$
Англия	$\omega_{j,i}$
Италия	$\omega_{j,i} - 0,1$
Китай	$\omega_{j,i} + 0,2$
Япония	$\omega_{j,i} + 0,1$

После реализации алгоритма, учитывая ограничения (4) и (5), получаем результаты, представленные в таблицах 2, 3 для акторов и геополитических проектов соответственно. Можно сделать вывод, что последние были приняты к реализации все, кроме «Экономического союза Европы» и «Европейского таможенного союза».

Таблица 2. Итоговые затраты акторов на проекты

Актор	Г5	Жд	Союз	Фонд	Альянс	ЕТС	АТС	Газ
РФ	0,1	—	—	0,1	—	—	0,15	0,2
США	0,1	0,1	—	—	0,5	—	—	—
Герм	—	—	—	—	0,2	—	—	0,7
Фр	0,3	0,3	—	—	—	—	—	—
Англ	0,2	0,2	—	—	0,2	—	—	—
Ит	0,4	0,6	—	—	—	—	—	—
Кит	—	—	—	0,2	—	—	0,4	—
Яп	—	—	—	0,6	—	—	0,35	—

Проверим данное решение на устойчивость. Требование индивидуальной рациональности выполнено из условий поставленной задачи. Требования эффективности и попарной устойчивости выполнены по построению алгоритма. Значит, полученные распределения устойчивы по определению.

Таблица 3. Итоговые вклады акторов в проекты

Проект	РФ	США	Герм	Фр	Англ	Ит	Кит	Яп
Г5	0,2	0,2	—	0,2	0,2	0,2	—	—
Жд	—	0,2	—	0,2	0,2	0,4	—	—
Союз	—	—	—	—	—	—	—	—
Фонд	0,2	—	—	—	—	—	0,3	0,5
Альянс	—	0,6	0,2	—	0,2	—	—	—
ЕТС	—	—	—	—	—	—	—	—
АТС	0,25	—	—	—	—	—	0,5	0,25
Газ	0,3	—	0,7	—	—	—	—	—

5. Заключение. Модель двусторонних рынков Гейла – Шепли расширена на рынки типа много-на-много и приложена к задаче распределения акторов по геополитическим проектам. Реализация представленного механизма в реальной жизни гораздо сложнее, но она может быть осуществима со знаниями людей, глубоко разбирающихся в тонкостях современной геополитики.

Литература

1. Алескерев Ф. Т., Кисельгоф С. Г. Лауреаты Нобелевской премии – 2012: Ллойд Шепли и Элвин Рот // Экономический журнал ВШЭ. 2012. No 4. С. 433–443.
2. Balinski M., Sonmez T. A tale of two mechanisms: student placement // Journal of Economic Theory. 1999. No 1. P. 73–94.
3. Roth A. E., Sotomayor M. A. O. Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 280 p.
4. Roth A. E. The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem // Journal of Economic Theory. 1985. No 2. P. 277–288.
5. Gale D., Shapley L. S. College admissions and the stability of marriage // American Mathematical Monthly. 1962. No 1. P. 9–15.

**Влияние времени оборота капитала
на устойчивость положения равновесия
двух конкурирующих фирм**

Постановка задачи. Рассмотрим конкуренцию двух инвесторов (двух фирм), которую будем описывать системой дифференциальных уравнений с запаздыванием. Запаздывание в системе будет играть роль времени оборота капитала. Задача заключается в том, чтобы выяснить, как влияет время оборота капитала на устойчивость экономической системы. Будет показано, что при увеличении этого времени теряется устойчивость положения равновесия нашей системы. Также будут получены условия, при которых эту устойчивость можно восстановить.

Математическая модель конкуренции двух фирм. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = r_1 \left(1 - \frac{N_1(t-h)}{K_1} + a_1 \left(1 - \frac{N_2(t-h)}{K_2} \right) \right) N_1(t), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = r_2 \left(1 - \frac{N_2(t-h)}{K_2} + a_2 \left(1 - \frac{N_1(t-h)}{K_1} \right) \right) N_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь K_1, K_2 — необходимое количество продукции, выраженное в деньгах, которое целесообразно выпускать каждой фирмой для удовлетворения спроса, $N_1(t), N_2(t)$ — соответственно, капиталы фирм, a_1, a_2 — коэффициенты давления одной фирмы на другую, $r_1(1+a_1), r_2(1+a_2)$ — коэффициенты линейного роста, которые характеризуют процент, получаемый фирмами от вложения своих инвестиций (ставка), h — время оборота капитала, которое считается одинаковым у обеих фирм. В этой системе точка (K_1, K_2) является нетривиальным

Кириянен Александр Иванович — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kirjanen@mail.ru, тел.: +7(921)797-98-90

Логоша Елизавета Сергеевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: lilo9556@gmail.com, тел.: +7(921)753-52-39

положением равновесия, т. е. при значениях капиталов, равных соответственно этим величинам, не будет явного перенасыщения или недостатка у какой-либо из фирм. Модель построена так, что точка равновесия (K_1, K_2) явно присутствует в системе дифференциальных уравнений. Таким образом описанная модель конкуренции встречается в работах [1–4]. В работе [5] выделен обширный класс экономических задач, динамика в которых может быть описана моделью Лотки – Вольтерры. В этой же работе, а также в [6] приведены условия, при которых положения равновесия будут асимптотически устойчивыми или неустойчивыми и изучено качественное поведение траекторий.

В предложенной модели предполагается, что конкуренция двух фирм в первую очередь зависит от их взаимного давления друг на друга. А именно, при $h = 0$ нетривиальное положение равновесия (K_1, K_2) этой системы глобально асимптотически устойчиво при $a_1 a_2 < 1$, а при $a_1 a_2 > 1$ один из конкурентов выдавливает другого с рынка, что соответствует устойчивости одного из положений равновесия $(K_1(1 + a_1), 0)$ или $(0, K_2(1 + a_2))$.

Для исследования устойчивости положения равновесия (K_1, K_2) сделаем в системе (1) замену $N_j(t) = K_j(1 + x_j(t))$, $j = 1, 2$, и выпишем систему линейного приближения

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} + r_1(x_1(t-h) + a_1 x_2(t)) = 0, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} + r_2(x_2(t-h) + a_2 x_1(t)) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Характеристический квазиполином, соответствующий системе (2), имеет вид

$$H(\lambda) = \lambda^2 + r_1 r_2 e^{-2h\lambda} + (r_1 + r_2)\lambda e^{-h\lambda} - r_1 r_2 a_1 a_2 = 0. \quad (3)$$

Обозначив $c_1 = r_1 r_2$, $c_2 = r_1 + r_2$, $c_3 = r_1 r_2 a_1 a_2$, получим характеристическое уравнение

$$H(z) = z^2 + c_1 e^{-2hz} + c_2 z e^{-hz} - c_3 = 0. \quad (4)$$

Предположим, что при $h = 0$ корни характеристического квазиполинома (4) лежат в левой полуплоскости, т. е. квазиполином устойчив. Покажем, что с ростом h корни квазиполинома будут двигаться

вправо и наступят такие значения h , что корни перейдут из левой полуплоскости в правую, т. е. найдем максимальное допустимое запаздывание, при котором будет сохраняться асимптотическая устойчивость положения равновесия. Более того, укажем такие условия, при которых корни могут возвратиться из правой полуплоскости в левую, т. е. асимптотическая устойчивость будет вновь восстановлена.

1. I. Предположим, что $0 < c_3 < c_1$, тогда

1. При $c_2^2 > 4c_1^2/(c_1 - c_3)$ на мнимой оси у квазиполинома есть две пары комплексно-сопряженных корней $\pm iy_{1,2}$, где $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 + c_3)} \right)$ при значениях $h_{jk} = \frac{1}{y_j} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, $j = 1, 2; k = 0, 1, \dots$, и с ростом h корни уходят в правую полуплоскость.
2. Если $c_2^2 = 4c_1^2/(c_1 - c_3)$, то на мнимой оси появляется третья пара корней $\pm iy_3$.
3. Если $4(c_1 + c_3) < c_2^2 < 4c_1^2/(c_1 - c_3)$, то квазиполином (4) будет иметь на мнимой оси три пары корней $\pm iy_j$, $j = 1, 2, 3$, причем $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 + c_3)} \right)$, а $y_3 = \sqrt{c_1 - c_3}$. Этим трем парам корней соответствуют три последовательности запаздываний h_{jk} , $j = 1, 2, 3$, определяемых соотношениями $\cos h_j y_j = 0$ при $j = 1, 2$ и $\sin h_3 y_3 = c_2 \sqrt{c_1 - c_3} / (2c_1)$. В этом случае несколько меняется направление движения корней при их переходе через мнимую ось, а именно, через точки $\pm iy_1$ и $\pm iy_3$ переход корней квазиполинома с ростом h осуществляется из левой полуплоскости в правую, а через точки $\pm iy_2$ — наоборот.
4. Если $c_2^2 = 4(c_1 + c_3)$, то две пары корней $\pm iy_{1,2}$ сливаются в одну $\pm ic_2/2$, которая с увеличением h исчезает.
5. Если $c_2^2 < 4(c_1 + c_3)$, то на мнимой оси у квазиполинома может быть лишь одна пара корней $\pm iy_3$ при $h = h_{3k}$, и с ростом h корни переходят всегда из левой полуплоскости в правую.

II. Пусть $c_1 = c_3$, тогда

1. При $c_2^2 > 8c_1$ квазиполином (4) может иметь мнимые корни $\pm iy_{1,2}$, $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 8c_1} \right)$, а также $y_3 = 0$ (третья пара корней слилась в точку $y_3 = 0$). Направление перехода через мнимую ось аналогично пункту I.3.
2. При $c_2^2 = 8c_1$ корни $\pm iy_{1,2}$ сливаются в одну пару, которая с ростом h исчезает.
3. При $c_2^2 < 8c_1$ на мнимой оси лишь один корень $y_3 = 0$.

III. Пусть $c_3 > c_1$, тогда

1. При $c_2^2 > 4(c_1 + c_3)$ квазиполином (4) имеет на мнимой оси две пары корней $\pm iy_{1,2}$, $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 + c_3)} \right)$, причем с ростом h корни квазиполинома переходят из левой полуплоскости в правую через точки $\pm iy_{1,2}$.
2. При $c_2^2 = 4(c_1 + c_3)$ точки $y_{1,2}$ сливаются в одну $\pm ic_2/2$ и с ростом h исчезают.
3. При $c_2^2 < 4(c_1 + c_3)$ квазиполином (4) не имеет корней на мнимой оси.

Подставив $z = iy$ в (4) и отделив вещественную и мнимую части, получим систему

$$\begin{cases} \operatorname{Re} H(iy) = -y^2 + c_1 \cos 2hy + c_2 y \sin hy - c_3 = 0, \\ \operatorname{Im} H(iy) = -c_1 \sin 2hy + c_2 y \cos hy = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Так как корни (4) комплексно-сопряженные, $\operatorname{Re} D(iy)$ — четная функция относительно y , а $\operatorname{Im} D(iy)$ — нечетная, то в дальнейшем будем рассматривать лишь $y \geq 0$.

Второе уравнение в (5) распадается на два: либо $\cos hy = 0$, либо $\sin hy = c_2 y / (2c_1)$.

Пусть $\cos hy = 0$, тогда $\cos 2hy = -1$, $\sin hy = \pm 1$.

Если $\sin hy = 1$, то подставляя все в первое уравнение системы (5), получаем $y^2 - c_2y + c_1 + c_3 = 0$. Так как коэффициенты положительны, то при неотрицательном дискриминанте ($c_2^2 \geq 4(c_1 + c_3)$) квадратное уравнение имеет только положительные корни $y_1 \geq y_2 > 0$, $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4(c_1 + c_3)} \right)$, которым соответствуют две последовательности $h_{jk} = \frac{1}{y_j} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, $j = 1, 2$.

Если $\sin hy = -1$, то приходим к уравнению $y^2 + c_2y + c_1 + c_3 = 0$, которое не имеет положительных решений. Этот случай в дальнейшем не рассматривается.

Пусть теперь $\sin hy = c_2y/(2c_1)$, тогда из первого уравнения системы (5) получим $y_3 = \sqrt{c_1 - c_3}$. Таким образом, если $c_1 \geq c_3$ и $c_2\sqrt{c_1 - c_3} \leq 2c_1$, то из уравнения $\sin hy = c_2\sqrt{c_1 - c_3}/(2c_1)$ можно найти последовательность h_{3k} , которая будет соответствовать мнимым корням $\pm iy_3$ квазиполинома (4).

Покажем теперь, что с ростом h корни квазиполинома (4) переходят через точки $\pm iy_1$ и $\pm iy_3$ всегда из левой полуплоскости в правую, но движение корней через точки $\pm iy_2$ может менять свое направление, а именно, при отсутствии третьей пары $\pm iy_3$ движение происходит слева направо, а при ее наличии — справа налево. Вычислим $\text{sign} \left\{ \text{Re} \frac{dz}{dh} \right\}_{z=iy_j}$, $j = 1, 2, 3$. Продифференцировав уравнение (4) по h , имеем

$$z'_h (2z - 2c_1 h e^{-2hz} + c_2(1 - hz)e^{-hz}) = 2c_1 h z e^{-2hz} + c_2 z^2 e^{-hz}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \text{Re } z'_h|_{z=iy} = J^{-1} & \left[(2c_1 y \sin 2hy - c_2 y^2 \cos hy) \times \right. \\ & \times (-2c_1 h \cos hy + c_2 hy - c_2 hy \sin hy) + \\ & + (2c_1 y \cos 2hy + c_2 y^2 \sin hy) \times (2y + 2c_1 h \sin 2hy - \\ & \left. - c_2 \sin hy - c_2 hy \cos hy) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $J > 0$ — квадрат модуля знаменателя. Правую часть выражения (6) можно упростить, в результате чего получим

$$\operatorname{Re} z'_h|_{z=iy} = J^{-1} \left(4c_1 y^2 \cos 2hy - c_2^2 y^2 + 2c_2 y (c_1 + y^2) \sin hy \right). \quad (7)$$

Вычислим знак выражения (7) при $z = iy_3$. Так как $y_3 = \sqrt{c_1 - c_3}$, $\sin hy = c_2 y_3 / (2c_1)$, то после подстановки в (7) будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z'_h|_{z=iy_3} &= J^{-1} \left(4c_1 y^2 - \frac{2c_2^2 y^4}{c_1} - c_2^2 y^2 + \right. \\ &\left. + \frac{c_2^2 y^2 (c_1 + y^2)}{c_1} \right) = \frac{y^2}{c_1 J} (4c_1^2 - c_2^2 (c_1 + c_3)) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, через точки $\pm iy_3$ корни квазиполинома (4) всегда переходят из левой полуплоскости в правую.

Вычислим теперь знак выражения (6) при $z = iy_{1,2}$. В этом случае $\cos hy = 0$, $\cos 2hy = -1$, $\sin hy = 1$. Подставив эти значения в (6), получим

$$\operatorname{Re} z'_h|_{z=iy} = y(c_2 y - 2c_1)(2y - c_2).$$

При $y = y_1$ выполняется $c_2 y_1 - 2c_1 > 0$, $2y_1 - c_2 > 0$, следовательно, $\operatorname{Re} z'_h|_{z=iy_1} > 0$. При $z = iy_2$ $2y_2 - c_2 < 0$, а $c_2 y_2 - 2c_1 > 0$ в том и только в том случае, если $4c_1^2 > c_2^2 (c_1 + c_3)$. Это неравенство гарантирует, с одной стороны, существование мнимых корней $\pm iy_3$, переход через них в правую полуплоскость, а с другой стороны, отрицательность $\operatorname{Re} z'_h|_{z=iy_2}$, т. е. движение справа налево. Если $4c_1^2 < c_2^2 (c_1 + c_3)$, то нет корней вида $\pm iy_3$, но при этом и $\operatorname{sign} z'_h|_{z=iy_2} > 0$, т. е. корни будут переходить уже из левой полуплоскости в правую.

Теорема доказана.

2. Пусть $a_1 a_2 < 1$, тогда

1. При $4r_1 r_2 / (1 - a_1 a_2) < (r_1 + r_2)^2$ характеристическое уравнение (3) имеет на мнимой оси две пары сопряженных корней $\pm iy_{1,2}$, где $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 (1 + a_1 a_2)} \right)$

при $h_{jk} = \frac{1}{y_j} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, $j = 1, 2$. Все корни функции $H(\lambda)$

лежат в левой полуплоскости при $0 \leq h < h_{10} = \frac{\pi}{2y_1}$ и с ростом h они через точки $\pm iy_{1,2}$ переходят в правую полуплоскость. При $h \in [0, h_{10}]$ положение равновесия (K_1, K_2) яв-

ляется устойчивым узлом.

2. При $4r_1r_2(1 + a_1a_2) < (r_1 + r_2)^2 < \frac{4r_1r_2}{1 - a_1a_2}$ характеристическое уравнение (3) помимо вышеуказанных корней имеет на мнимой оси еще третью пару $\pm iy_3$, $y_3 = \sqrt{r_1r_2(1 - a_1a_2)}$, при запаздывании $h = h_{3k} = \frac{1}{y_3} \left[(-1)^k \arcsin \frac{(r_1 + r_2)y_3}{2r_1r_2} + \pi k \right]$. В этом случае корни $H(\lambda)$ через точки $\pm iy_1$ и $\pm iy_3$ переходят в правую полуплоскость, а через точки $\pm iy_2$ возвращаются назад в левую. При $0 \leq h < \min(h_{10}, h_{30})$ все корни функции $H(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости и положение равновесия (K_1, K_2) — устойчивый узел. Если $h_{20} < \min(h_{11}, h_{30}) = h^*$, то возникает еще один интервал (h_{20}, h^*) , на котором положение равновесия (K_1, K_2) асимптотически устойчиво, правда, узел становится вырожденным узлом. Таких устойчивых интервалов может быть лишь конечное число, но после того, как два раза подряд при возрастании h встретятся точки h_{jk} с нечетными первыми индексами, узел потеряет устойчивость.
3. Если $(r_1 + r_2)^2 < 4r_1r_2(1 + a_1a_2)$, то характеристическое уравнение имеет на мнимой оси одну пару корней $\pm iy_3$, через которые при возрастании h происходит движение корней в правую полуплоскость. Положение равновесия становится фокусом, причем при $0 \leq h < h_{30}$ устойчивым, а при $h > h_{30}$ неустойчивым.

Выводы. Приведем основные результаты:

1. Если коэффициенты характеристического квазиполинома удовлетворяют неравенству $4r_1r_2 / (1 - a_1a_2) < (r_1 + r_2)^2$, то величина $h_{10} = \frac{\pi}{2y_1}$, где $y_1 = \frac{1}{2} \left(r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2(1 + a_1a_2)} \right)$, является максимально допустимым запаздыванием, при котором не происходит потери устойчивости. Получено ограничение на время оборота капитала.
2. Если выполняется $(r_1 + r_2)^2 < 4r_1r_2(1 + a_1a_2)$, то максимально

допустимым запаздыванием становится величина $h = h_{30} = \frac{\pi}{2y_3}$.

3. В случае, когда справедливо неравенство $4r_1r_2(1 + a_1a_2) < (r_1 + r_2)^2 < \frac{4r_1r_2}{1 - a_1a_2}$, создается впечатление, что максимальным допустимым запаздыванием будет $\min(h_{10}, h_{30})$. Однако, если $h_{20} < \min(h_{11}, h_{30}) = h^*$, то при $h \in [h_{20}, h^*]$ положение равновесия также будет асимптотически устойчиво. Получаем так называемую лагуну устойчивости. Таких лагун может быть лишь конечное число до тех пор, пока через мнимую ось в правую полуплоскость не перейдет два корня подряд.

1. Колесов Ю. С., Федотов И. К. К проблемам видообразования // Дифференциальные уравнения и их применение. Нелинейные модели биологии. Вильнюс. 1981. Вып. 29. С. 41–49.
2. Hsu S. B. Limiting behavior of competing species // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34, No 4. P. 760–763.
3. Кирьянен А. И. Устойчивость систем с последствием и их приложения. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994. 240 с.
4. Kirjanen A. I. Coefficient criteria of stable coexistence of two competitors // Proceedings of the 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP). Saint-Petersburg, 2015. P. 463–466.
5. Прасолов А. В. Математические методы взаимодействия фирм как инструмент корпоративного управления // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов. 2001. № 2. С. 32–48.
6. Прасолов А. В. Опостроении периодического решения одной системы второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 4. С. 470–474.

УДК 338.24, 519.71

Колесова А. А.

Алгоритмы коррекции инвестиционных программ

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. В экономической науке наиболее известной балансовой моделью является модель В. Леонтьева «затраты-выпуск» [1]. Теория межотраслевого баланса была разработана В. Леонтьевым в США в 30-х годах XX века. Эта модель характеризует связи между выпусками продукции отраслей и использованием ими продукции других отраслей для обеспечения этого выпуска. В её основе лежит таблица межотраслевого баланса (МОБ), состоящая из четырёх квадрантов, которые описаны в [1]. В работе [2] предложена динамическая модель МОБ, заданная системой дифференциальных уравнений

$$\dot{I} = DI + Qu, \quad (1)$$

где вектор выпусков по отраслям I является вектором фазовых переменных, матрица $D = M\tilde{R}$,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{Fe_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{m_n}{Fe_n} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{m_{n+1}}{Fe_{n+1}} \end{pmatrix},$$
$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & Yr_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} & Yr_n \\ 1 - rp_1 & 1 - rp_2 & \dots & 1 - rp_n & rg \end{pmatrix},$$

Q — диагональная матрица, элементы которой показывают, в какую отрасль производятся инвестиции, значения параметров $rp_1, \dots, rp_n, rg, m_1, \dots, m_n$ зависят от макроэкономической ситуации, u — вектор управлений. В рассматриваемой модели в качестве управления выступают инвестиции.

Колесова Александра Александровна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.kolesova@icloud.com, тел.: +7(911)722-60-21

2. Постановка задачи. Задачи управления многопродуктовой экономикой можно условно разделить на два класса: построение режима программного, управляемого роста и его стабилизации. Первая задача — это разработка инвестиционного плана, вторая — его корректировка, если возникают текущие отклонения от запланированной тенденции. Цель работы — показать возможности применения алгоритмов стабилизации при полной и неполной обратной связи к динамической модели МОБ (1). Такие алгоритмы позволят моделировать и прогнозировать макроэкономические тенденции.

3. Построение стабилизирующих управлений. Будем считать, что (1) — это стационарная система в отклонениях [3]. Для нее построим управление вида

$$u = CI, \quad (2)$$

где C — постоянная ($r \times n$)-матрица. Данное управление будем называть допустимым управлением вида линейной обратной связи. Задача стабилизации системы (1) состоит в том, чтобы построить допустимое управление вида (2), при котором замкнутая система

$$\dot{I} = (D + QC)I \quad (3)$$

будет асимптотически устойчива. Если такое управление существует, то оно называется стабилизирующим.

3.1. Случай полной обратной связи. В случае полной обратной связи предполагается, что все элементы вектора I доступны для измерения. Стабилизирующее управление может быть построено с точностью до набора эталонных собственных чисел. Критерием выбора эталонного набора служит время переходного процесса и затраты на переходный процесс, т. е. на реализацию стабилизирующего управления. Пусть для системы (1) заданы эталонные собственные числа μ_1, \dots, μ_n . Тогда стабилизирующее управление можно построить по одному из алгоритмов, представленных в [3].

3.2. Случай неполной обратной связи. Не всегда о векторе состояния I есть полная информация. Иногда для измерения доступны только отдельные компоненты этого вектора или их линейные комбинации. В этом случае вместе с системой (1) задано уравнение измерителя

$$y = RI, \quad (4)$$

где y — m -мерный известный вектор измерений, R — заданная постоянная $(m \times n)$ -матрица.

Тогда для решения задачи стабилизации необходимо построить оценку $\hat{I}(t)$ такую, что имеет место асимптотика

$$\hat{I}(t) - I(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \quad (5)$$

Стабилизирующее управление строится в виде $u = C\hat{I}$,

$$\dot{\hat{I}} = D\hat{I} + Qu + L(y - R\hat{I}). \quad (6)$$

Система (6) — это идентификатор состояния. Матрицу L необходимо определить так, чтобы имело место свойство (5).

Рассмотрим две вспомогательные системы

$$\dot{x}_1 = DI_1 + Qu_1, \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = D^T I_2 - R^T u_2. \quad (8)$$

Стабилизирующие управления для (7), (8) строим в виде $u_1 = \bar{C}I_1$, $u_2 = \bar{L}^T I_2$ соответственно.

Обозначим

$$n_1 = \text{rank}(Q, DQ, D^2Q, \dots, D^{n-1}Q),$$

$$n_2 = \text{rank}(R^T, D^T R^T, (D^T)^2 R^T, \dots, (D^T)^{n-m} R^T).$$

Пусть μ_1, \dots, μ_{n_1} и ν_1, \dots, ν_{n_2} наперёд заданные эталонные собственные числа для систем (7) и (8) соответственно. Рассмотрим алгоритм построения стабилизирующего управления и идентификатора состояния [3]:

1. Вычислим n_1, n_2 .
2. (а) Если $n_1 = n, n_2 = n$, то системы (7), (8) являются полностью управляемыми. Тогда для поиска матриц \bar{C}, \bar{L} можно воспользоваться одним из алгоритмов, описанных в [3]. Тогда собственные числа матриц $P + Q\bar{C}$ и $P^T - R^T \bar{L}^T$ будут совпадать с наперёд заданными эталонными собственными числами μ_1, \dots, μ_{n_1} и ν_1, \dots, ν_{n_2} соответственно.

- (b) Если одна из систем не является полностью управляемой, то проверяем выполнение теоремы о существовании стабилизирующего управления. Если условия теоремы выполняются, тогда для поиска матриц \bar{C} , \bar{L} можно воспользоваться одним из алгоритмов, описанных в [3]. Иначе, построение асимптотического идентификатора не возможно.

3. Строим асимптотический идентификатор

$$\hat{I} = (D + Q\bar{C} - \bar{L}R)\hat{I} + \bar{L}y. \quad (9)$$

4. Численная реализация. Данные алгоритмы протестированы на конкретных примерах, которые приведены в работах [4, 5]. В качестве матриц D , Q системы (1) и матрицы R измерителя (4) взяты

$$D = \begin{pmatrix} 0,142 & 0,033 & 0,016 \\ 0,031 & 0,009 & 0,067 \\ 0,645 & 0,676 & 0,701 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad R^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эталонные собственные числа для системы (7): $\mu_1 = -0,15$; $\mu_2 = -0,1$; $\mu_3 = -0,05$; для измерителя (8): $\nu_1 = -0,1$; $\nu_2 = -0,07$; $\nu_3 = -0,05$. Такой выбор собственных чисел обусловлен тем, что стабилизация экономических систем не может производиться резко, так как чаще всего системы не успевают адекватно реагировать на существенные скачки в макроэкономических показателях.

Получены следующие матрицы коэффициентов управления и идентификатора:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} -4,608 & -4,317 & -4,722 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = (0,6643 \quad 1,072 \quad 12,66).$$

На рис. 1 представлены интегральные кривые замкнутой системы и идентификатора. Видно, что асимптотическое свойство (5) выпол-

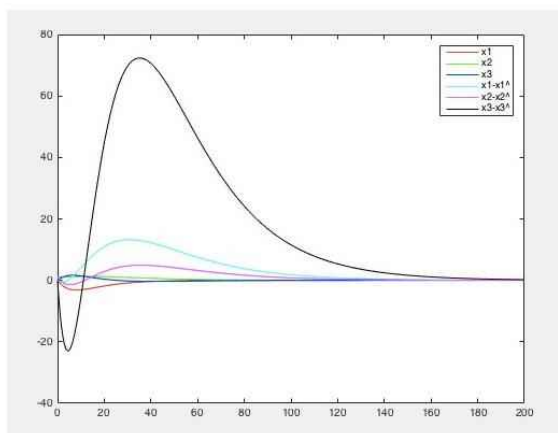


Рис. 1. Сходимость идентификатора

нено, а построенное управление стабилизирует систему.

5. Заключение. Исследование и численные эксперименты показали, что динамическая модель МОБ (1) позволяет эффективно использовать потенциал математической теории управления. Это важно для ее различных приложений [6–10].

Литература

1. Леонтьев В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика: пер. с англ. М.: Политиздат, 1990. 415 с.
2. Peresada V. P., Smirnov N. V., Smirnova T. E. Development control of a multicommodity economy based on the dynamical input-output model // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 4. С. 119–132.

3. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Тамасян Г. Ш. Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2016. 128 с.
4. Волик К. М., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Моделирование инвестиционных программ на основе импульсных программных управлений // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 419–420.
5. Smirnov N. V., Smirnova T. E., Volik K. M., Peresada V. P. Modelling of investment programs based on the impulse program controls // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP) 2015. С. 494–497.
6. Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Социально ориентированная налоговая система страны как существенный инструмент управления развитием ее экономики // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 447–448.
7. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Постановки задач управления экономикой в рамках динамической модели «затраты-выпуск» // В сборнике: Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем. Сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума АМУР–2013. Под редакцией А. В. Сигала. 2013. С. 320–326.
8. Волик К. М., Смирнов Н. В. Построение области достижимости в управляемой динамической модели межотраслевого баланса // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 597–604.
9. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в экономике // В сборнике: Инновационные технологии в медиа-образовании. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. А. И. Ходанович (отв. ред.) [и др.]. 2015. С. 17–21.
10. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в одном классе социально-экономических моделей // Математическое моделирование и краевые задачи Труды тринадцатой межвузовской конференции. Редакционная коллегия: В. П. Радченко (отв. редактор), Э. Я. Рапопорт, М. Е. Лернер, Е. Н. Огородников (отв. секретарь), М. Н. Саушкин (отв. секретарь). 2003. С. 152–155.

УДК 519.837.3

Курносых З. А., Губар Е. А.

Моделирование эволюционной игры с учетом сетевой структуры

1. Введение. Окружающий мир усложняется с каждым днем и нуждается в адекватных моделях, описывающих динамические процессы, протекающие в нем. Эволюционные игры — это раздел теории игр, в рамках которого возможно решение широкого круга задач: процесс смены тех или иных общественных предпочтений, распространение информации [1], приспособление биологических организмов или экономических агентов к различным условиям и т. д. В настоящее время приобретают популярность эволюционные модели, учитывающие структуру популяции, которая может быть представлена в виде сети. В данном случае сеть представляет способ задания связи между агентами популяции [2], ее структура оказывает влияние на процесс адаптации агентов к окружающей среде, так как в отличие от неструктурированных моделей, любые взаимодействия агентов могут происходить только при наличии связи между ними. В данной работе представлено общее описание эволюционного процесса с учетом различных сетевых структур, приведена специальная процедура на языке Python, позволяющая проследить процесс эволюции, и результаты численных экспериментов.

2. Постановка задачи [3]. Пусть $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{E} \rangle$ — неориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков (агентов) и $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ — набор ребер, каждое из которых представляет собой симметричную игру [4] между двумя соседними агентами.

Определение. Симметричной называется игра, если множества чистых стратегий всех игроков совпадают, т. е. $S_i = S_j$, и выполняется условие $M_i = M_j^T$, где M_i и M_j — матрицы выигрышей i -го и j -го игроков соответственно, $\forall i, j \in \mathcal{V}$.

Курносых Злата Александровна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: kurnosykhzлата@yahoo.com, тел.: +7(981)839-81-46

Губар Елена Алексеевна — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: e.gubar@spbu.ru, тел.: +7(911)935-01-29

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-11-01079

Предполагаем, что в каждый момент времени агент выбирает одну чистую стратегию против всех оппонентов. Обозначим *состояние игры* с помощью вектора $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, где $x_i(t) \in S_i$ — стратегия i -го игрока в момент времени t .

Выигрыши игроков обозначим:

$$y_i(t) = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} M_{x_i(t), x_j(t)}, \quad (1)$$

где $N_i := \{j \in \mathcal{V} : i, j \in \mathcal{E}\}$ — множество оппонентов i -го игрока, а $M_{x_i(t), x_j(t)}$ — выигрыш i -го игрока при взаимодействии с j -м, $|N_i|$ — количество соседей i -го игрока. Вектор выигрышей агентов $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$. Далее можно в общем виде записать *правило изменения стратегий* i -го игрока как функцию от элементов состояния популяции (стратегий) и выигрышей агентов:

$$x_i(t+1) = f(\{x_j(t), y_j(t) : j \in N_i \cup \{i\}\}). \quad (2)$$

Одним из известных правил изменения состояния популяции является механизм *пропорциональной имитации*: каждый игрок выбирает соседа случайно, и если он в предыдущий момент времени достигает лучшего результата, используя другую стратегию, то агент может поменять свою стратегию с вероятностью, пропорциональной разности их выигрышей

$$p(x_i(t+1) = x_j(t)) = \left[\frac{\lambda}{|N_i|} (y_j(t) - y_i(t)) \right]_0^1, \quad (3)$$

где j — случайно выбранный сосед i -го агента, $j \in N_i$, $\lambda > 0$ — произвольный коэффициент пропорциональности, квадратные скобки $[Z]_0^1$ означают $\max(0, \min(1, Z))$. Особенностью данной модели является то, что в «хорошо смешанной» популяции, использующей пропорциональную имитацию, распространение стратегии аппроксимируется уравнением *репликативной динамики* (replicator dynamic [5]). Далее будем рассматривать эволюционный процесс с учетом структуры популяции.

Целью данной работы является построение модели сетевой эволюционной игры, ее наблюдение с течением времени и выявление некоторых закономерностей.

3. Алгоритм. В ходе решения поставленной задачи создана процедура на языке программирования Python, алгоритм которой выглядит следующим образом:

1. Задается граф взаимодействия в популяции и начальное распределение стратегий.
2. Описывается правило пересмотра своих стратегий игроками.
3. Процесс эволюции: на одном этапе происходит пересмотр (по правилу из пункта 2) и изменение стратегий.

Данный процесс заканчивается, когда достигается равновесие во всей системе: на каждом последующем шаге ни одному агенту не выгодно менять свою стратегию.

4. Результаты исследования. В рамках решения задачи была проведена серия экспериментов. Использовались различные типы графов, начальные распределения стратегий и матричные игры.

Пример 1. Рассмотрим популяцию из 16 агентов на графе типа *решетка*, попарное взаимодействие среди которых подобно игре «Дилемма заключенного» [6]. Общий вид матрицы выигрышей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \end{array}$$

где $c > a > d > b$ и $2a > c + b$. В нашем случае использовались коэффициенты: $a = 4, b = -1, c = 5, d = 0$.

Данную игру можно интерпретировать так: агенты либо сотрудничают ради общего блага (A), либо заботятся только о собственной выгоде (B). В итоге для двух агентов возможно четыре исхода: оба сотрудничают (A, A) и получают выигрыш по 4 единицы; оба предают (B, B) и получают выигрыш 0; первый предает, второй сотрудничает (B, A) — выигрыши 5 и -1 соответственно; первый сотрудничает, второй предает (A, B) — выигрыши -1 и 5. Каждый агент популяции имеет ограниченное число соседей: 2, 3 либо 4 и начальную стратегию: черный узел — сотрудничество, светлый узел — предательство.

Рассмотрим процесс «эволюции» — выбора игроками стратегий, основанный на сравнении своего выигрыша и выигрыша окружающих его соседей. Так как возможность контактов с каждым

равновероятна, будем рассматривать смешанную стратегию популяции соседей — их доленое распределение на множестве стратегий и зададим соответствующий средний выигрыш (1). Таким образом, агент оценивает выигрыш соседей и, если это значение больше его выигрыша, то выбирает наиболее популярную стратегию среди них. Также были введены особые правила для ситуаций-исключений, а именно, в случае равенства выигрышей агент выбирает «ничего не делать» (оставляет свою стратегию). То же происходит и в случае равной популярности стратегий среди соседей. Из начального соот-

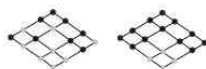


Рис. 1. Начальное состояние системы и равновесие

ношения в популяции (9 — сотрудничают, 7 — предают) приходим к состоянию равновесия (популяция неизменна), а именно 4 — сотрудничают, 12 — предают (см. рис. 1).

Из классической теории игр известно, что для двух игроков равновесием является ситуация обоюдного предательства (B, B) . Однако благодаря тому, что в нашей популяции нет связи «каждого с каждым», появилась обособленная группа агентов, которым выгодно сотрудничать (правый нижний угол решетки).

Пример 2. Рассмотрим тот же характер взаимодействия («Дилемма заключенного») на графе типа *кольцо*. В этом случае каж-

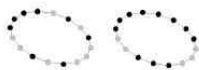


Рис. 2. Начальное распределение и равновесие для популяции а)

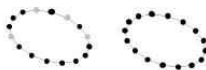


Рис. 3. Начальное распределение и равновесие для популяции б)

дый агент имеет только двух соседей. Сравним различные начальные распределения стратегий и состояния, к которым они приводят.

Изображение популяции а) иллюстрирует выживаемость стратегии сотрудничества в случае образования скоплений соседей-агентов с этой стратегией (см. рис. 2). В популяции б) видно, как одиночные особи со стратегией «сотрудничества» меняют ее на противоположную и вся популяция приходит к одной стратегии (см. рис. 3).

5. Заключение. Рассмотренные в работе результаты экспериментов иллюстрируют существование нетривиального стационарного положения популяции, зависящего от ее структуры. Представленные механизмы могут быть применены для более детального описания процессов, где агенты имеют свой круг знакомых, от которых зависит их выигрыш и на которых они опираются в выборе стратегии.

Литература

1. Савельева М. М. Графическое моделирование имитационных динамик // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 695–699.
2. Порохнявая О. Ю. Один алгоритм построения безмасштабных сетей // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 702–707.
3. Riehl J. R., Cao M. Control of stochastic evolutionary games on networks // 5th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems, Philadelphia, PA, United States. 2015. P. 76–81.
4. Колесин И. Д., Губар Е. А., Житкова Е. М. Стратегии управления в медико-социальных системах: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2014. 128 с.
5. Sandholm W. H. Population Games and Evolutionary Dynamics. The M.I.T. Press, Cambridge, MA, 2011. 589 p.
6. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

УДК 517.97+519.86

Лапин Е. Д.

Анализ поведения модели эндогенного роста Лукаса при варьировании параметров

Рекомендовано к публикации профессором Смирновым Н. В.

1. Введение. В отличие от неоклассических экономических моделей теория эндогенного роста пытается объяснить причины роста производительности. Данное направление активно развивалось во второй половине XX века такими учеными как Пол Ромер, Лукас, Ромер и Ребело. Модель эндогенного роста Лукаса была разработана в 1988 г. и представляет собой двухсекторную экономическую модель [1], в которой рост есть результат накопления человеческого капитала в секторе образования и физического капитала без учета амортизации. В работе [2] для максимизации эффективности экономики получен алгоритм нахождения оптимального управления распределением рабочего временем сотрудника между его обучением и трудом.

2. Модель эндогенного роста Лукаса. Будем использовать экономическую модель из работы [1] с идентичными рациональными работниками, динамика численности которых описывается уравнением

$$\dot{N} = \lambda N(t), \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

Пусть $h(t)$ — функция человеческого капитала репрезентативного работника, $u(t)$ — некоторая доля его рабочего времени, посвященная производству благ, $1 - u(t)$ — доля времени, посвященная накоплению человеческого капитала. Предполагается, что рост человеческого капитала определен уравнением

$$\dot{h} = \delta(1 - u(t))h, \quad \delta > 0, \quad (2)$$

а накопление физического капитала $K(t)$ соответственно

$$\dot{K} = Y(t) - N(t)c(t), \quad (3)$$

Лапин Егор Дмитриевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: intoxications1195@email.ru, тел.: +7(999)209-79-97

где $Y(t)$ — выпуск, $c(t)$ — поток потребления на душу населения. Выпуск связан с введенными величинами формулой

$$Y(t) = AK^\beta (uhN)^{1-\beta} h_\alpha^\gamma, \quad (4)$$

где $N(t) \geq 0$, $N(0) = 1$, $h(t) \geq 0$, $h_\alpha \geq 0$, $c(t) \geq 0$, $K(t) \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq 1$. Уровень технологий A , эластичность по человеческому капиталу γ , эластичность по физическому капиталу β считаются постоянными. На них накладываются следующие ограничения:

$$A > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \gamma > 0.$$

Предпочтения определяются нормой дисконтирования $\rho > 0$ и коэффициентом несклонности к риску $\sigma > 0$. Задан целевой функционал, определяющий зависимость рискованности работников и размеров потребления на душу населения:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1-\sigma} [c(t)^{1-\sigma} - 1] N(t) e^{-\rho t} dt, \quad (5)$$

который требуется максимизировать.

Принята гипотеза о том, что при максимизации функционала (5) и заданных условиях (1)–(4) работник считает переменным собственный человеческий капитал $h(t)$. При этом средний для экономики человеческий капитал $h_\alpha(t)$ полагается экзогенно заданным. Если выполняется $h(t) = h_\alpha(t)$, то данный набор называется равновесной траекторией.

3. Применение принципа максимума. Применим принцип максимума Понтрягина [3] к задаче (1)–(5). Запишем гамильтониан

$$\begin{aligned} H(K, h, \lambda_1, \lambda_2, c, u) &= \\ &= \frac{1}{1-\sigma} [c^{1-\sigma} - 1] N + \lambda_1 [AK^\beta (uhN)^{1-\beta} h_\alpha^\gamma - Nc] + \lambda_2 \sigma (1-u)h, \end{aligned}$$

где λ_1 , λ_2 — двойственные переменные для $K(t)$ и $h(t)$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} c^{-\sigma} &= \lambda_1, \\ \lambda_1 (1-\beta) AK^\beta (uNh)^{-\beta} N h^{1+\gamma} &= \lambda_2 \delta h, \\ \dot{\lambda}_1 &= \rho \lambda_1 - \lambda_1 \beta AK^{\beta-1} (uNh)^{1-\beta} h_\alpha^\gamma, \\ \dot{\lambda}_2 &= \rho \lambda_2 - \lambda_1 (1-\beta) AK^\beta (uN)^{1-\beta} h^{-\beta} h_\alpha^\gamma - \lambda_2 \delta (1-u). \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия $K(0) = K_0$, $h(0) = h_0$ и условия трансверсальности

$$\lambda_1 K e^{-\rho t} \rightarrow 0, \quad \lambda_2 h e^{-\rho t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

В [2] для частного случая $\sigma = \beta$ для равновесных траекторий получено дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = \frac{u}{\beta} [\lambda + (1 + \gamma - \beta)\delta - \rho] - \frac{(\gamma - \beta)\delta}{\beta} u^2.$$

В работах [2, 4] также представлены ограничения на параметры задачи

$$\gamma > \beta, \quad \delta \leq \rho - \lambda < \delta(1 + \gamma - \beta).$$

4. Постановка задачи. Цель данной работы — изучить поведение модели при условии $\sigma \neq \beta$, показать расширение возможности поиска оптимального управления рабочим временем репрезентативного работника при выполнении данного условия, а также выявить основные отличия от случая $\sigma = \beta$.

5. Параметрический анализ. Рассмотрим случай, когда $\sigma \neq \beta$, но их значения отличаются на бесконечно малую величину, т. е. $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\beta} + \varepsilon$, где ε — величина несоответствия. Вариация обратных величин удобна для последующих выкладок.

Применение принципа максимума Понтрягина в данном случае дало более сложную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}}{u} &= \varepsilon \beta A K^{\beta-1} (uN)^{1-\beta} h^{1+\gamma-\beta} - \omega, \\ \dot{N} &= N(t)\lambda, \\ \dot{h} &= \delta(1 - u(t))h(t), \\ \dot{K} &= Y(t) - N(t)c(t), \\ \omega &= \varepsilon\rho + \frac{\lambda}{\beta} + \frac{(\gamma - \beta)\delta(1 - u)}{\beta} - \frac{\rho - \delta}{\beta}. \end{aligned} \tag{7}$$

Для интегрирования системы (7) будем использовать метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Для коэффициентов примем следующие модельные значения:

$$\lambda = 0,035, \quad \beta = 0,21, \quad \gamma = 0,6, \quad \delta = 0,03, \quad A = 1.$$

Также зададим начальные условия

$$\begin{aligned}u(0) &= 0,666, & N(0) &= 600, \\h(0) &= 10, & K(0) &= 1500.\end{aligned}$$

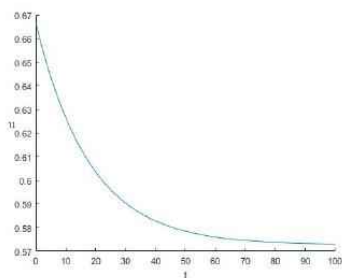


Рис. 1. График изменения управления при $\varepsilon = 0$

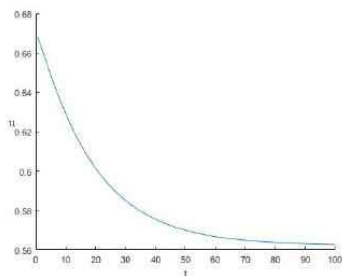


Рис. 2. График изменения управления при $\varepsilon = 0,01$

6. Анализ результатов. На рис. 1–3 видно, что управляемая величина при различных вариациях ε имеет одинаковый переходный период выхода на определенное постоянное значение. При этом предельные значения u отличаются не более чем на 2×10^{-3} . Это

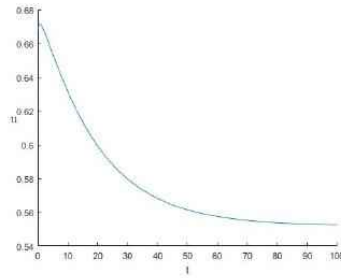


Рис. 3. График изменения управления при $\varepsilon = 0,02$

позволяет сделать вывод, что рассмотренный случай $\sigma \neq \beta$ при мере несоответствия ε расширяет возможности исходной модели.

Модель экономического роста, учитывающая динамику человеческого капитала имеет широкий спектр приложений, в том числе в различных задачах анализа макро- и микроэкономических тенденций [5–13].

Литература

1. Lucas R. E. On the mechanics of economic development // J. Monetary Econom. 1988. Vol. 22, No 1. P. 18–31.
2. Xie D. Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria // J. Econom. Theory. 1994. Vol. 63, No 1. P. 97–112.
3. Понтрягин Л. С. Принцип максимума. М.: Фонд математического образования и просвещения, 1998. 70 с.
4. Королев А. В., Матвеев В. Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // Автоматика и Телемеханика. 2006. № 4. С. 126–136.
5. Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. 2-е изд. испр. СПб.: Лань, 2015. 352 с.

6. Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Социально ориентированная налоговая система страны как существенный инструмент управления развитием ее экономики // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 447–448.
7. Волик К. М., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Моделирование инвестиционных программ на основе импульсных программных управлений // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. СПб.: Издательский дом Федоровой Г. В. 2015. С. 419–420.
8. Бойко А. В., Зубаков А. В. Применение адаптивного метода в неоклассической модели экономического роста // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 607–611.
9. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Постановки задач управления экономикой в рамках динамической модели «затраты-выпуск» // В сборнике: Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем. Сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума АМУР–2013. Под редакцией А. В. Сигала. 2013. С. 320–326.
10. Волик К. М., Смирнов Н. В. Построение области достижимости в управляемой динамической модели межотраслевого баланса // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 597–604.
11. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в экономике // В сборнике: Инновационные технологии в медиаобразовании. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. А. И. Ходанович (отв. ред.) [и др.]. 2015. С. 17–21.
12. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Многопрограммные управления в одном классе социально-экономических моделей // Математическое моделирование и краевые задачи Труды тринадцатой межвузовской конференции. Редакционная коллегия: В. П. Радченко (отв. редактор), Э. Я. Рапопорт, М. Е. Лернер, Е. Н. Огородников (отв. секретарь), М. Н. Саушкин (отв. секретарь). 2003. С. 152–155.
13. Владимиров Е. В., Смирнов Н. В. Моделирование развития предприятия, использующего кредитные ресурсы, при условии нестационарной цены // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 584–590.

УДК 519.8

Ложкин А.

Модель ценообразования в логистической задаче

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Описание задачи. В работе предлагается рассмотреть один из подходов к решению задачи, связанной с ценообразованием предоставляемого сервиса. Рынок состоит из продавца услуг и нефиксированного количества потребителей. Потребители необязательно являются постоянными клиентами продавца услуг.

Продавец услуг — логистическая компания, которая совершает транспортировку груза из пункта A в пункт B . Перевозки совершаются с некоторой фиксированной периодичностью. Интересы компании — найти клиента на покупку рейса из B в A , в противном случае компания несет убытки по транспортировке транспортного средства из пункта B в A . Время ожидания клиента зависит от периодичности совершения рейсов из пункта A в пункт B , т. е. транспорт необходимо возвращать к фиксированному времени.

Компания оплачивает дополнительно стоянку транспортного средства в пункте B и несет затраты на работу водителя по часам (время ожидания клиента), т. е. в случае, когда транспортное средство возвращается сразу после совершения рейса, затраты на работу водителя и оплата стоянки транспортного средства минимальны. В пункте A у компании есть собственная стоянка и водитель может завершить работу.

Клиентами услуг логистической компании являются случайные потребители, у которых появилась необходимость совершить рейс из B в A для транспортировки незапланированного груза, в рассматриваемый период времени. Цель клиента — найти услугу перевозки груза по приемлемой цене.

Предполагается, что клиент имеет свои ожидания по цене за услугу, в зависимости от своего времени ожидания поставщика услуг, т. е. если на рынке предлагается услуга по цене больше, чем его ожидаемая цена, то он будет ждать, пока не появится поставщик

Ложкин Алексей — аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: aleksejs.lozkin@gmail.com, тел.: +7(952)279-61-32

услуг с подходящей для него стоимостью.

В статье рассмотрен случай одной логистической компании с динамическим ценообразованием предлагаемых услуг и случайными клиентами. В работах [1, 2] изучаются различные аспекты математического моделирования и управления экономическими системами, близкие в идейном плане к проводимому исследованию.

2. Математическая модель. В модели предполагается наличие статистических или аппроксимационных данных для оценки вероятности $P(V, T)$ продажи услуг по цене $V \geq 0$ в момент времени $T \geq 0$, величины V и T являются случайными. Тогда вероятность продажи услуги по цене больше, чем v в момент времени t определяется вероятностью $P_{V,T}(V > v | T = t)$. Функция вероятности может быть дискретной или непрерывной. В данной работе рассматривается случай непрерывной функции вероятности.

Значения времени $t \in [0, T_i]$, где T_i — крайний момент времени отправления транспортного средства. Затраты на стоянку транспортного средства и затраты на водителя, находящегося в режиме ожидания заказа, определяются фиксированными затратами FX (Fixed Costs) в единицу времени. В модели потребуется минимальная цена продажи рейса $v_{min} \geq 0$ и $v_s \geq v_{min}$. Предполагается, что компания не готова доплачивать клиенту за рейс.

Основная идея работы — критерий формирования цены. Задача заключается в выборе детерминированной функции $v(t)$, которая представляет собой предложение логистической компании в момент времени t . Предлагается считать решение «хорошим», если вероятность продажи в момент времени t по цене $V > v$ за вычетом фиксированных затрат — максимальна. В математических обозначениях функционал качества записывается в следующем виде:

$$\Phi[v] = \int_0^{T_i} [v(t)P_{V,T}(V > v(t), dt) - FX] dt, \quad (1)$$

где $v(t)$ — неизвестная функция цены в зависимости от времени t . Необходимо найти функцию цены $v(t)$, которая будет максимизировать функционал (1). Получаем простейшую задачу вариационного исчисления без граничных условий [3]. Функцию цены находим из уравнения Эйлера [3]

$$\frac{\partial [v(t)P_{V,T}(V > v, t) - FX]}{\partial v} = 0. \quad (2)$$

Заметим, что подинтегральная функция (1) не зависит от v' , поэтому имеем не дифференциальное, а конечное уравнение, которое определяет одну или несколько функций $v(t)$. Решение краевой задачи для уравнения Эйлера не существует, поэтому на решение не будут накладываться эти ограничения. Предполагается, что функция вероятности $P_{V,T}(V \leq v, T \leq t)$ непрерывно-дифференцируема по v и t . Решение экстремальной задачи (2) является необходимым условием экстремума, поэтому требуются дополнительные исследование функции цены $v(t)$.

Из уравнения (2) найдем некоторое решение $v^*(t)$, определенное на промежутке $t \in [0, T_i]$. В постановке задачи есть минимальная цена v_{min} , которую необходимо учесть в $v^*(t)$:

$$v_f(t) = \begin{cases} v_{min}, & \text{если } v^*(t) \leq v_{min}, \\ v^*(t), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом решение исходной задачи — $v_f(t)$ для $t \in [0, T_i]$.

3. Эксперимент. Рассмотрим функцию вероятности

$$P_{V,T}(V \leq v, T \leq t) = P_V(V \leq v)P_T(T \leq t).$$

Функция вероятности появления клиента за период $T \leq t$ задается экспоненциальным распределением $P_T(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где $\frac{1}{\lambda} > 0$ — среднее время ожидания клиента [4]. Функция вероятности покупки услуги по цене $V > v$ задается равномерным распределением

$$P_V(V > v) = \frac{v_{max} - v}{v_{max} - v_{min}},$$

где $v_{max} > v_{min}$ — максимальная цена услуги [4] и $v_{min} \leq v \leq v_{max}$.

Подставим функции распределения в уравнение (2) с учетом, что v является функцией $v(t)$:

$$\frac{\partial \left[\lambda e^{-\lambda t} v \frac{v_{max} - v}{v_{max} - v_{min}} - FX \right]}{\partial v} = 0.$$

В результате получим следующее выражение:

$$v_1(t) = \frac{\lambda v_{max} e^{-\lambda t}}{2}. \quad (3)$$

Решение $v_1(t)$ является экстремалью рассматриваемой вариационной задачи. Достаточным условием максимума [5] функционала

$$\Phi[v] = \int_0^{T_1} \left[\lambda e^{-\lambda t} v \frac{v_{max} - v}{v_{max} - v_{min}} dt - FX dt \right] \quad (4)$$

в нашем случае является условие

$$\frac{\partial^2 \left[\lambda e^{-\lambda t} v \frac{v_{max} - v}{v_{max} - v_{min}} - FX \right]}{\partial v^2} = -2\lambda e^{-\lambda t} \frac{1}{v_{max} - v_{min}}. \quad (5)$$

Заметим, что (5) не зависит от v и $-2\lambda e^{-\lambda t} \frac{1}{v_{max} - v_{min}} < 0$ для $\forall t \in [0, T_1]$. Поэтому можно заключить, что найденная функция $v_1(t)$ доставляет максимум функционала (4).

Решение должно удовлетворять условию минимальной и максимальной цены. Поэтому решение исходной задачи будет иметь вид

$$v_1(t) = \begin{cases} v_{min}, & \text{если } v_1(t) \leq v_{min}, \\ v_1(t), & \text{если } v_{min} < v_1(t) < v_{max}, \\ v_{max}, & \text{если } v_1(t) \geq v_{max}. \end{cases}$$

Таким образом, решением исходной задачи является функция $v_1(t)$, определенная на промежутке $t \in [0, T_1]$.

4. Заключение. Рассмотрена логистическая задача. Разработан функционал качества для оценки функции цены услуги предлагаемой логистической компанией. Функционал качества отражает ожидаемую прибыль от продажи услуги. Предложен критерий выбора цены, который состоит в максимизации функционала (1) выбором функции цены $v(t)$. Задача сведена к простейшей задаче вариационного исчисления без краевых условий. Сформулировано необходимое условие экстремума (2).

Проведен эксперимент с заданными независимыми функциями вероятности продажи услуги по цене $V > v$ и появления клиента. Проведено исследование на выполнение достаточного условия максимума функционала (4). В результате получено решение $v_1(t)$, которое адаптировано к условиям минимальной и максимальной цены.

Литература

1. Буре В. М., Сергеева А. А. Конкуренция двух фирм на рынке логистических перевозок // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. №3. С. 22–28.
2. Буре В. М., Карелин В. В. О задаче планирования работы терминала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. №2. С. 32–38.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961. 228 с.
4. Буре В. М., Париллина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 680 с.

УДК 330.42

Малафеев О. А., Рылов Д. С.

Динамическая модель коррупционных и легальных капиталовложений

1. Введение. Коррупция оказывает существенное влияние на мировую экономику. Общий сумма взяток в мире оценивается в 2% мирового ВВП [1]. Методы математического моделирования получили широкое распространение в областях науки и техники [2–8]. В работах [9, 10] аппарат и методы теории игр применяют к проблемам коррупции.

В данной статье формализуется и исследуется инвестиционный процесс, в котором участвуют несколько коррумпированных и законопослушных фирм. Законопослушные фирмы привлекают долгосрочные капиталы для покрытия текущих расходов, связанных с увеличением объемов производств или НИОКР. Инвесторы вкладывают деньги в эти фирмы в ожидании будущих дивидендов. Предполагается, что размер дивидендов пропорционален объему привлеченных капиталов. Коррумпированные фирмы уже капитализированы до некоторого постоянного уровня. Они ведут нелегальный бизнес и легализуют аккумулированные коррупционные капиталы, инвестируя в законопослушные фирмы.

2. Модель инвестиционного процесса. Рассматривается n законопослушных и m коррумпированных фирм на отрезке времени $[0, T]$. Законопослушные фирмы продают акции для привлечения капиталов. Коррумпированные фирмы покупают акции законопослушных фирм с целью легализации коррупционных капиталов.

Пусть $x(t)$ — количество свободного капитала, который может быть инвестирован в законопослушные фирмы в момент времени t . Для простоты изложения отождествим инвесторов с их капиталами, т. е. функцией $x(t)$. Будем считать, что функция $x(t)$ не возрастающая, т. е. инвесторы не могут получить обратно уже инвестирован-

Малафеев Олег Алексеевич – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: malafeyevoa@mail.ru, тел.: +7(812)428-42-47

Рылов Денис Сергеевич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: denisrylow@gmail.com, тел.: +7(950)016-60-45

ные капиталы. Обозначим через $y_i(t)$ весь капитал, инвестированный в фирму i до момента времени t , $i = \overline{1, n+m}$. Первыми n индексами обозначены законопослушные фирмы, а остальными m индексами — коррумпированные фирмы. Пусть $z_{ij}(t)$ — капитал, переданный из фирмы i в фирму j в момент времени t , $i, j = \overline{1, n+m}$.

Предположим, что модель замкнутая, т. е. общая сумма капитала $x(t) + \sum_{i=1}^{n+m} y_i(t) = N(t)$ постоянна. Обозначим через $a_i(t)$ фонды, которые фирма i тратит на увеличение объемов производств или НИОКР. Пусть $b_i(t)$ — котировка фирмы i в момент времени t .

Инвесторы со свободным капиталом стремятся максимизировать будущие дивиденды, инвестируя свой капитал в разные законопослушные фирмы. Предполагается, что размер дивидендов находится в пропорциональной зависимости от размера привлеченных капиталов, поэтому задача максимизации дивидендов может быть заменена задачей оптимизации инвестиций.

3. Модель распределения капитала. Держатели капитала не инвестируют весь имеющийся капитал одновременно. Вместо этого они постепенно увеличивают количество инвестированного капитала в фирмы, пока все возможности для инвестирования не становятся исчерпанными.

Крупные инвестиции в фирму привлекают внимание других инвесторов. Инвесторы ожидают от фирм инвестирования привлеченного капитала в увеличение объемов производств или НИОКР, поскольку именно такие расходы способны увеличить доходность фирм в будущем и тем самым увеличить дивиденды. Котировки фирм отражают ожидания инвесторов. Растущая котировка фирмы выражает уверенность инвесторов в том, что эта фирма станет более ценной в будущем и принесет большие дивиденды. Падающая котировка отражает негативные ожидания инвесторов касательно будущей доходности фирмы и отталкивает держателей капитала от инвестирования в эту фирму. В предположении, что все функции $z_{ij}(t)$, $a_i(t)$, $y_i(t)$, $\alpha_{ij}(t)$, $b_i(t)$ и $x(t)$ непрерывны, модель может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = a_i(t)y_i(t)\left(1 + \frac{|\dot{b}_i(t)|}{b_i(t)}\right)^{\text{sgn}(\dot{b}_i(t))} x(t) - \\ - \sum_{j=1}^n z_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n+m} z_{ji}(t), i = \overline{1, n}, \\ \dot{x}(t) = -x(t) \sum_{i=1}^n a_i(t)y_i(t)\left(1 + \frac{|\dot{b}_i(t)|}{b_i(t)}\right)^{\text{sgn}(\dot{b}_i(t))}, \\ \dot{y}_i(t) = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)z_{ij}(t), i = \overline{n+1, n+m}, \\ z_{ii}(t) = 0, i = \overline{1, n+m}. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение в (1) описывает изменение капитала, инвестированного в фирму i , с течением времени. В нем первое слагаемое соответствует количеству свободного капитала, инвестированного в фирму i в момент времени t . Множитель $\beta_i(t) = \left(1 + \frac{|\dot{b}_i(t)|}{b_i(t)}\right)^{\text{sgn}(\dot{b}_i(t))}$ выражает влияние изменения котировки фирмы i на инвестиции в эту фирму. При этом $\beta_i(t) \equiv 1$ тогда и только тогда, когда котировка не меняется в момент времени t ($\dot{b}_i(t) = 0$). Если котировка падает, то $0 < \beta_i(t) < 1$. Если котировка растет, то $\beta_i(t) > 1$. Второе слагаемое в первом уравнении — отток капитала из фирмы i . Последнее слагаемое $\sum_{j=1}^{n+m} z_{ji}(t)$ — приток капитала в фирму i .

Второе уравнение в (1) означает, что количество свободного капитала уменьшается на количество свободного капитала, инвестированного во все законопослушные фирмы.

Третье уравнение в (1) означает, что количество капитала, инвестированного в коррумпированные фирмы, уменьшается пропорционально количеству капитала, переданного в законопослушные фирмы. Здесь α_{ij} — коэффициент эффективности легализации коррупционного капитала через инвестирование в законопослушные фирмы, $\alpha_{ij} \leq 1$.

Четвертое уравнение в (1) означает, что фирмы не могут инвестировать капитал сами в себя. Общая сумма капитала не меняется, поэтому $x(t) + \sum_{i=1}^{n+m} y_i(t) = N$.

Инвестиционный процесс начинается в момент времени $t = 0$ с мгновенной инвестиции в размере $\varepsilon_i N$ в каждую законопослушную фирму, $i = \overline{1, n}$. Предполагается, что каждая коррумпированная

фирма уже капитализирована до уровня $\varepsilon_i N$, $i = \overline{n+1, n+m}$.

$$\begin{aligned} x(0) + \sum_{i=1}^{n+m} y_i(0) &= N, & y_i(0) &= \varepsilon_i N, & i &= \overline{1, n+m}, \\ z_{ij}(0) &= 0, & i &= \overline{1, n+m}, & j &= \overline{1, n+m}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sum_{i=1}^{n+m} \varepsilon_i = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Если функции $z_{ij}(t)$ предположить свободными и выбрать их в качестве управлений, тогда задача оптимизации формализуется сле-

дующим образом: $\max_{z_{ij}(t)} \int_0^T \sum_{i=1}^n \omega_i(t) y_i(t) dt$, где $z_{ij}(t)$ являются кусочно-

непрерывными и ограниченными функциями, $y_i(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2), а $\omega_i(t)$ — непрерывная функция веса фирмы i , $i = \overline{1, n}$. Если фирмы, реинвестирующие свои капиталы, не выражают особого интереса к какой либо законопослушной фирме, то можно принять $\omega_i(t) \equiv 1$, $i = \overline{1, n}$.

4. Заключение. Рассмотрен инвестиционный процесс, в котором участвуют коррумпированные и законопослушные фирмы. Коррумпированные фирмы пытаются легализовать коррупционные капиталы через инвестирование в законопослушные фирмы. Инвестиционный процесс формализуется с помощью дифференциальных уравнений. В дальнейшем предполагается рассмотреть оптимизационные и теоретико-игровые проблемы, связанные с этой моделью.

Литература

1. Corruption: Costs and mitigating strategies: IMF Staff Discussion Notes: 16/05 / International Monetary Fund; Executor: Bernardin Akitoby, Aiko Mineshima, Anja Baum et al.: 2016. 47 p.
2. Малафеев О. А., Грицай К. Н. Конкурентное управление в моделях аукционов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2004. № 36. С. 74–82.

3. Малафеев О. А., Грицай К. Н. Задача конкурентного управления в модели многоагентного взаимодействия аукционного типа // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2007. № 39. С. 36–45.
4. Малафеев О. А., Колокольцов В. Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (теория игр для всех). СПб.: Лань, 2012. 624 с.
5. Сvirкин М. В., Карелин В. В., Буре В. М., Екимов А. В. Имитационное моделирование социальной сети с двумя лидерами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 1. С. 92–98.
6. Петросян О. Л. Решение с информационной дискриминацией в кооперативных дифференциальных играх с бесконечной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 4. С. 18–30.
7. Гусин В. В., Мазалов В. В. Оптимальные стратегии в игре патрулирования на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 2. С. 61–76.
8. Жабко А. П., Мышков С. К. К вопросу об асимптотической устойчивости линейных нестационарных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 2. С. 166–175.
9. Малафеев О. А., Дейнега Л. А., Андреева М. А. Модель взаимодействия коррумпированного предприятия и федерального отдела по борьбе с коррупцией // Молодой ученый. 2015. № 12 (92). С. 15–20.
10. Линейная алгебра с приложениями к моделированию коррупционных систем и процессов / О. А. Малафеев, Н. Н. Сотникова, И. В. Зайцева и др. Ставрополь: ООО "Издательский дом "ГЭС-ЭРА", 2016. 366 с.

УДК 519.834

Малахова А. П.

О динамической устойчивости принципов оптимальности в одной дифференциальной игре со случайным моментом окончания

Рекомендовано к публикации доцентом Громовой Е. В.

1. Введение. Дифференциальные игры со случайной продолжительностью являются удобным аппаратом для моделирования реальных экономических, экологических и других процессов (см., например, [1]). Впервые дифференциальные игры со случайной продолжительностью введены в работе [2], а в кооперативной постановке впервые рассмотрены в [3]. В указанных работах предполагалось, что момент окончания игры T_f является абсолютно непрерывной случайной величиной. Проблема динамической устойчивости принципов оптимальности для дифференциальных игр такого типа изучена в работах [3, 4].

В данной работе рассматриваются дифференциальные игры со случайным моментом окончания при предположении, что заданы вероятности окончания игры в дискретные моменты времени.

2. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальную игру N лиц $\Gamma(t_0, x_0, T)$. Пусть игра начинается в момент t_0 , а момент окончания игры T_f является дискретной случайной величиной, а именно, заданы вероятности $p_j, j = \overline{0, m}$, окончания игры в моменты времени $t_j \in \Theta, \Theta = \{t_0, \dots, t_m\}, t_m = T$.

Динамика игры описывается следующей системой ОДУ:

$$\dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_n), \quad x \in R^m, \quad u_i \in U \subseteq \text{Comp } R^l, \quad x(t_0) = x_0.$$

Предположим [5], что $f(x, u_1, \dots, u_n)$ непрерывна по совокупности переменных на заданной области определения, удовлетворяет условию Липшица по x и решение соответствующей задачи Коши продолжимо на всем рассматриваемом отрезке $[t_0, T]$.

Малахова Анастасия Павловна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nastyushamishka@mail.ru, тел.: +7(981)825-29-43

Будем полагать, что функция «мгновенного» выигрыша i -го игрока [6] задана функцией $h_i(x(t), u(t))$, где $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$. Тогда математическое ожидание выигрыша игрока имеет вид

$$\begin{aligned} K_i(x_0, u(t)) &= \sum_{j=1}^m p_j \int_{t_0}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=j}^n p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть задача решается в классе программных стратегий [6]. Рассмотрим кооперативный вариант игры. Это означает, что игроки используют оптимальные управления $u^*(t) = \{u_1^*(t), \dots, u_n^*(t)\}$, максимизирующие суммарный выигрыш:

$$\sum_{i=1}^n K_i(x_0, u^*(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} h_i(x^*(t), u^*(t)) dt, \quad (2)$$

где траектория $x^*(t)$ — траектория, соответствующая $u^*(t)$.

3. Проблема динамической устойчивости. Предположим, игроки договорились разделить суммарный выигрыш (2) согласно некоторому принципу оптимальности и выбрали соответствующий ему дележ $\xi(t_0, x_0, T) = \{\xi_i(t_0, x_0, T)\}_{i=\overline{1, n}}$.

Определение 1. Вектор-функцию $\beta(t) = \{\beta_i(t) \geq 0\}_{i=\overline{1, n}}$, такую что

$$\xi_i(t_0, x_0, T) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=j}^n p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt, \quad i = \overline{1, n},$$

будем называть процедурой распределения дележа (ПРД).

Впервые определение ПРД для кооперативной дифференциальной игры с фиксированной продолжительностью введено в [6], а для дифференциальной игры со случайной продолжительностью в [3].

Рассмотрим подыгру $\Gamma(x^*(\theta_1), \theta_1, T)$, начинающуюся в момент $\theta_1 \in [t_0, t_1)$. Математическое ожидание выигрыша игрока i в игре

$\Gamma(x^*(\theta_1), \theta_1, T)$ будет записано аналогично (1), с учетом того, что игра не должна закончиться до момента θ_1 . Справедливо следующее:

Лемма. *Математическое ожидание выигрыша игрока i в подыгре $\Gamma(x^*(\theta_1), \theta_1, T)$, $\theta_1 \in [t_0; t_1]$ имеет следующий вид:*

$$K_i(x_0, \theta_1, u(t)) = \frac{1}{1-p_0} \left(\sum_{l=1}^m p_l \int_{\theta_1}^{t_1} h_i(x(t), u(t)) dt + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Доказательство. Имеем

$$K_i(x_0, \theta_1, u(t)) = \frac{p_1}{1-p_0} \int_{\theta_1}^{t_1} h_i(x(t), u(t)) dt + \dots + \\ + \frac{p_m}{1-p_0} \int_{\theta_1}^T h_i(x(t), u(t)) dt = \frac{1}{1-p_0} \sum_{j=1}^m p_j \int_{\theta_1}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt,$$

откуда после преобразований получаем (3).

Лемма доказана.

Обобщая, запишем математическое ожидание выигрыша для подыгры $\Gamma(x^*(\theta_k), \theta_k, T)$, начинающейся в момент времени $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 1. *Математическое ожидание выигрыша игрока i в подыгре $\Gamma(x^*(\theta_k), \theta_k, T)$, $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1, m}$, имеет следующий вид:*

$$K_i(x_0, \theta_k, u(t)) = \frac{1}{\sum_{l=k}^m p_l} \left(\sum_{l=k}^m p_l \int_{\theta_k}^{t_k} h_i(x(t), u(t)) dt + \right. \\ \left. + \sum_{j=k+1}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы имеем

$$\begin{aligned} K_i(x_0, \theta_k, u(t)) &= \frac{1}{1 - \sum_{l=0}^{k-1} p_l} \sum_{j=k}^m p_j \int_{\theta_k}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\sum_{l=k}^m p_l} \sum_{j=k}^m p_j \int_{\theta_k}^{t_j} h_i(x(t), u(t)) dt, \end{aligned}$$

откуда после преобразований получаем (4).

Теорема 1 доказана.

Определение 2. Будем называть $\xi(t_0, x_0, T)$ динамически устойчивым дележом, если существует такая ПРД $\{\beta_i(t) \geq 0\}_{i=\overline{1, n}}$, что вектор $\xi(\theta_k, x^*(\theta_k), T) = \{\xi_i(\theta_k, x^*(\theta_k), T)\}_{i=\overline{1, n}}$, $\forall \theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, вычисленный по формуле

$$\begin{aligned} \xi_i(\theta_k, x^*(\theta_k), T) &= \frac{1}{\sum_{l=k}^m p_l} \left(\sum_{l=k}^n p_l \int_{\theta_k}^{t_k} \beta_i(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=k+1}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt \right), \end{aligned}$$

также является дележом в соответствующей подыгре, начинающейся в момент времени $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\forall k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2. Пусть дележ $\xi(t_0, x_0, T)$ в игре $\Gamma(t_0, x_0, T)$ является почти всюду непрерывной функцией начального момента времени. Пусть существует ПРД, такая что

$$\beta_i(\theta_k) = -(\xi_i(\theta_k, x^*(\theta_k), T))', \quad \theta_k \in [t_{k-1}, t_k], \quad \forall k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

тогда дележ $\xi(t_0, x_0, T)$ является динамически устойчивым дележом в игре $\Gamma(t_0, x_0, T)$ с ПРД (5).

Доказательство. Заметим, что

$$\xi_i(t_0, x_0, T) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt + \sum_{l=k}^m p_l \int_{t_{k-1}}^{t_k} \beta_i(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=k}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt + \\
& + \sum_{l=k}^m p_l \left(\xi_i^{\theta_k} - \frac{1}{\sum_{l=k}^m p_l} \sum_{j=k+1}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt \right) + \\
& + \sum_{l=k}^m p_l \int_{t_{k-1}}^{\theta_k} \beta_i(t) dt + \sum_{j=k}^m \sum_{l=j}^m p_l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i(t) dt.
\end{aligned}$$

Продифференцировав по θ_k , после преобразований получим (5). Теорема 2 доказана.

Литература

1. Малахова А. П. Дисперсия как числовая характеристика функции выигрыша в задаче оптимального управления со случайным моментом окончания // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 112–116.
2. Петросян Л. А., Мурзов Н. В. Теоретико-игровые проблемы в механике // Литовский математический сборник. 1966. № VI-3. С. 423–433.
3. Петросян Л. А., Шевкопляс Е. В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2000. Вып. 4. С. 18–23.
4. Шевкопляс Е. В. Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // МТИП. Т 2–3. 2010. С. 79–105.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вестник ЛГУ. 1979. № 1. С. 46–54.

УДК 519.25

Никитина А. А.

О методике статистического анализа банковских рисков

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Кумачевой С. Ш.*

1. Введение. Проблема финансовой устойчивости коммерческих банков в условиях мирового финансового кризиса все чаще становится объектом исследования ученых [1, 2]. В связи с этим задача обеспечения устойчивости российских коммерческих банков приобретает ключевое значение.

Так как кредитование является одним из основных видов деятельности банков, то именно доходы от кредитных операций составляют значительную часть в общей структуре доходов. А значит, качество кредитного портфеля становится определяющим фактором для выживания и успеха банка как коммерческого предприятия. Кредитный портфель представляет собой остатки на балансовых счетах по основному долгу по активным кредитным операциям на определенную дату.

2. Постановка задачи. Для эффективного управления кредитным портфелем необходим его анализ по таким характеристикам, как ожидаемая доходность и риск. В связи с этим возникает задача разработки модели, позволяющей сформировать «систему раннего оповещения» о возникновении проблемы с достаточностью капитала организации вследствие ухудшения качества кредитного портфеля, что может привести к отзыву лицензии данной организации.

3. Описание данных. Для анализа было выбрано 17 банков, у которых в конце 2015 года были отозваны лицензии по причине высокорискованной кредитной политики, а также 12 банков с отозванными в конце 2016 года лицензиями. По этим банкам были выгружены агрегированный баланс и отчет о прибылях и убытках за 2008–2015 гг. из [3].

Никитина Анастасия Александровна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.nikitina1993@gmail.com, тел.: +7(952)272-99-30

В данной статье в качестве примера приводятся некоторые характеристики кредитного портфеля ООО «Коммерческий банк „Ренессанс“».

4. Методы решения задачи. Исследование надежности банков проводилось на основе обязательных нормативов Банка России и характеристик портфеля с использованием бинарных регрессий.

4.1. Обязательные нормативы Банка России. В рамках поставленной задачи в первую очередь были рассмотрены обязательные нормативы Банка России [4], так как они являются официальным методом регулирования банковской деятельности. Все коммерческие банки обязаны предоставлять ежемесячные отчеты о соблюдении нормативов. Всего обязательных нормативов 9, но важными с точки зрения финансового анализа являются следующие: норматив достаточности капитала, норматив мгновенной ликвидности, норматив текущей ликвидности и норматив долгосрочной ликвидности.

4.2. Оценка параметров портфеля. Главными параметрами при управлении портфелем являются его ожидаемая доходность и риск. Их вычисление основывается на доходности активов, входящих в портфель. Кредитный портфель состоит из таких активов, как кредиты, выданные банкам, юридическим и физическим лицам.

В классической экономической литературе [5] оценка доходности актива находится по следующей формуле

$$r_i = \frac{ПП}{KB} \times 100\%,$$

где $ПП$ — это процентный доход по соответствующему виду кредита за рассматриваемый квартал, а KB — средний остаток ссудной задолженности за квартал. Таким образом, была поквартально оценена доходность кредитов, выданных банкам, юридическим и физическим лицам.

Основываясь на оценках доходности активов, вычислим ожидаемую доходность кредитного портфеля для каждого квартала

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n r_i \theta_i,$$

где θ_i — удельный вес актива в портфеле, вычисляемый как отношение стоимости актива к стоимости портфеля.

При вычислении риска портфеля используются оценки рисков активов, формирующих портфель. Риск отдельно взятого актива

вычисляется как стандартное отклонение доходности актива за определенный период.

Зная коэффициенты ковариации между доходностью активов, можно оценить риск всего портфеля

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_i \theta_j Cov_{i,j}, \quad (1)$$

где $Cov_{i,j}$ — коэффициент ковариации между активами i и j .

Так как рассматривается портфель, состоящий из трех активов (a , b и c), то (1) примет вид

$$\sigma_p^2 = \theta_a^2 \sigma_a^2 + \theta_b^2 \sigma_b^2 + \theta_c^2 \sigma_c^2 + 2\theta_a \theta_b Cov_{a,b} + 2\theta_a \theta_c Cov_{a,c} + 2\theta_b \theta_c Cov_{b,c}.$$

На графике (см. рис. 1) можно проследить динамику увеличения риска с 2012 года.

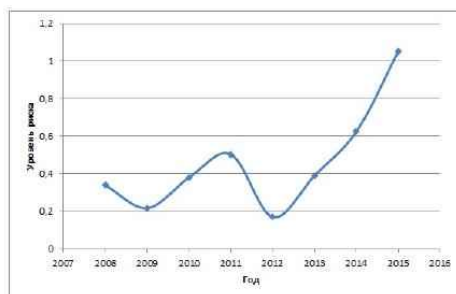


Рис. 1. Вычисленные значения риска портфеля

4.3. Оценка величины VaR. Помимо стандартного отклонения, в финансовом анализе рассчитывают такой показатель риска, как VaR.

Определение. VaR (Value-at-Risk) — это оценка величины убытков, которую не превысят в течение данного периода времени ожидаемые потери с заданной вероятностью (уровнем доверия).

По определению VaR оценивается следующим образом:

$$P(VaR \geq x) = 1 - \alpha,$$

где α — уровень значимости, x — величина возможных потерь.

Таким образом для оценки VaR необходимо знать закон распределения. Критерии Шапиро–Уилка и Колмогорова–Смирнова [6] отклонили гипотезу о нормальности распределения ряда ожидаемой доходности портфеля, поэтому оценим VaR «ручным способом». Для этого построим эмпирическую функцию распределения ряда. Ее минимальному значению, а именно 3,57%, соответствует квантиль $x_\alpha = 2,81$.

Для «Коммерческого банка „Ренессанс“» $VaR = 197480,53$ на сентябрь 2015 года. Найденное значение показывает, что кредитный портфель банка с вероятностью 96,43% не уменьшится более, чем на 197480,53 тысяч рублей. Однако, в действительности в сентябре 2015 года дела у банка пошли хуже, так как, помимо высокорискованной кредитной политики, банк не исполнял нормативные акты Банка России.

4.4. Бинарные регрессии. Вычисленные характеристики портфеля, а также обязательные нормативы далее используются при построении правила классификации банков по критерию их надежности. Для этого были выбраны логит- и пробит-модели [7]. Особенность этих моделей в том, что зависимая переменная принимает значения 0 или 1. В нашем случае 0 эквивалентен отзыву лицензии у банка, а 1 означает, что банк продолжает функционировать. Общий вид моделей бинарной регрессии следующий:

$$P\{Y = 1\} = F(z),$$

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n,$$

где β_i — коэффициенты регрессии, а x_i — факторы модели.

Обе модели были построены по банкам, лицензию которых отзывали в 2015 году. В качестве факторов были использованы такие показатели, как : риск портфеля (Risk), норматив достаточности капитала (H1), норматив текущей ликвидности (H3) и норматив долгосрочной ликвидности (H4), вычисленные на конец 2014 года.

С помощью пакета R были оценены коэффициенты логит- и пробит-регрессии соответственно:

$$z_l = 11,117 - 2,455 \cdot Risk - 0,26 \cdot H1 - 0,052 \cdot H3 - 0,043 \cdot H4,$$

$$z_p = 6,721 - 1,855 \cdot Risk - 0,144 \cdot H1 - 0,03 \cdot H3 - 0,027 \cdot H4.$$

При подстановке в модели показателей 12-и банков, закрытых в 2016 году, логит-модель 11 из них относит в группу ненадежных, а пробит-модель — 10. Таким образом, мы видим хорошую согласованность результатов анализа.

5. Выводы. В статье проведен анализ кредитного портфеля по основным характеристикам на примере ООО «Коммерческий банк „Ренессанс“». Вычисленные характеристики кредитного портфеля (ожидаемая доходность, риск и VaR) адекватны реальному положению дел в анализируемом периоде в данном банке.

На основе характеристик кредитного портфеля были получены правила классификации банков по критерию надежности их функционирования с помощью логит и пробит регрессий.

Литература

1. Розен В. В. Математические модели принятия решений в условиях риска при частичном упорядочении исходов // Математическая теория игр и ее приложения. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2016. Т. 8. Вып. 3. С. 20–33.
2. Серков Д. А. Оптимальное по риску управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 74–103.
3. КУАП. Финансовый анализ банков [Электронный ресурс]: URL: <http://kuap.ru/> (дата обращения: 03.04.17).
4. Вестник Банка России / под ред. Г. И. Лунтовский. 2012. № 74. 73 с.
5. Буренин А. Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов: Учебное пособие. М.: Федеративная Книготорговая Компания, 1998. 352 с.
6. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Физматлит, 2006. 816 с.
7. Краснощекова А. К. Прогнозирование результата конкурсной процедуры с использованием методов регрессионного анализа // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 670–674.

УДК 519.863

Реут А. В.

Аппроксимация оптимальной шкалы средних ставок подоходного налога

Рекомендовано к публикации профессором Поляковой Л. Н.

1. Постановка задачи. Зафиксируем натуральное число $m \geq 2$, введём векторы $H = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, $A = (a_0, \dots, a_{m-1})$. Обозначим за H_k и A_{k-1} векторы, компонентами которых являются первые k элементов векторов H и A соответственно, $k = \overline{1, m-1}$.

Введём функции, определённые на интервале $(0, +\infty)$,

$$y_k(x, H_k, A_{k-1}) = \eta_k - \frac{\sum_{i=1}^k a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x}, \quad k = \overline{1, m-1}. \quad (1)$$

Функция *средних ставок подоходного налога* определяется по формуле [1]

$$y(x, H, A) = \begin{cases} y_1(x, H_1, A_0), & \text{если } a_0 \leq x \leq a_1, \\ \dots & \dots \\ y_k(x, H_k, A_{k-1}), & \text{если } a_{k-1} < x \leq a_k, \\ \dots & \dots \\ y_{m-1}(x, H_{m-1}, A_{m-2}), & \text{если } a_{m-2} < x \leq a_{m-1}, \\ \eta_m, & \text{если } x > a_{m-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Оптимальная шкала средних ставок подоходного налога задаётся функцией [1]

$$y^*(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_-}{x}\right)^\sigma, & \text{если } x_- \leq x < x_0, \\ 1 - (1 - y_+) \left(\frac{x_+}{x}\right)^\delta, & \text{если } x_0 \leq x \leq x_+, \\ y_+, & \text{если } x > x_+, \end{cases}$$

где

$$x_0 = \left((1 - y_+) \frac{x_+^\delta}{x_-^\sigma} \right)^{\frac{1}{\delta - \sigma}},$$

Реут Андрей Валерьевич – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: manticula@yandex.ru., тел.: 248-44-68.

$x_-, x_+, y_+, \delta, \sigma$ — некоторые заданные параметры, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_- < x_+, \quad 0 < y_+ < 1, \quad 0 < \delta < \sigma < 1, \quad (3)$$

$$\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\sigma \leq 1 - y_+ \leq \left(\frac{x_-}{x_+}\right)^\delta. \quad (4)$$

Обозначим через T совокупность разбиений τ отрезка $[x_-, x_+]$ на $m - 1$ часть, $\tau = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$, $x_- = a_0 < \dots < a_{m-1} = x_+$. Требуется решить задачу [1-3]

$$\max_{i \in \overline{1, m-1}} \min_{H_i} \sup_{x \in (a_{i-1}, a_i]} |y^*(x) - y_i(x, H_i, A_{i-1})| \rightarrow \inf_{\tau \in T} \quad (5)$$

при наличии ограничений

$$a_0 = x_-, \quad a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1}, \quad a_{m-1} = x_+, \quad (6)$$

$$\eta_0 := 0, \quad \eta_0 \leq \eta_1 \leq \dots \leq \eta_{m-1}, \quad \eta_m = y_+, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^k a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \leq \left[(1 - \eta_k)a_{k-1} + \sum_{i=1}^k a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \right] \sigma, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^k a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \geq \left[(1 - \eta_k)a_k + \sum_{i=1}^k a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \right] \delta, \quad (9)$$

$$k = \overline{1, m-1},$$

$$a_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0. \quad (10)$$

2. Анализ нелинейных ограничений. Ограничения (8) можно записать в виде

$$\eta_1 \leq \sigma =: \bar{\eta}_1, \quad (11)$$

$$\eta_k \leq \bar{\eta}_k(\eta_1, \dots, \eta_{k-1}, a_0, \dots, a_{k-1}), \quad k = \overline{2, m-1}, \quad (12)$$

где $\bar{\eta}_k = \sigma + (1 - \sigma) \left[\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}} \right]$. В частности, если $\eta_k = \bar{\eta}_k$, $k \in \overline{1, m-1}$, то $\bar{\eta}_k = \bar{\eta}_k(a_0, \dots, a_{k-1})$, $k = \overline{2, m-1}$.

Ограничения (9) эквивалентны следующим

$$a_k \leq \bar{a}_k(\eta_1, \dots, \eta_k, a_0, \dots, a_{k-1}), \quad k = \overline{1, m-1},$$

где $\bar{a}_k = \frac{1 - \delta}{\delta} \sum_{i=1}^k a_{i-1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{1 - \eta_k}$. Если $a_k = \bar{a}_{k-1}$, то будем обозначать $\eta_k = \underline{\eta}_k$.

3. Вспомогательные леммы. Зафиксируем векторы H , A и натуральное число $m \geq 3$.

Лемма 1. Функция средних ставок подоходного налога $y(x)$ (2) представима в виде максимума функций $y_k(x)$, $k = \overline{1, m-1}$, (1) на отрезке $[x_-, x_+]$:

$$\max_{x \in [x_-, x_+]} \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_{m-1}(x)\},$$

если справедливы ограничения (6), (7). Более того,

$$y(x) = y_k(x) \quad \forall x \in (a_{k-1}, a_k], \quad k = \overline{1, m-1}.$$

Предположим, что для некоторого натурального числа $v \leq m-2$ точка $x_0 \in (a_{v-1}, a_v)$, и определим параметры

$$\eta_i := \overline{\eta}_i, \quad i = \overline{1, v}, \quad \eta_i := \underline{\eta}_i, \quad i = \overline{v+1, m-1}. \quad (13)$$

Лемма 2. Если выполнены неравенства (8), (9) и равенство (10), то справедливо $y(x) < y^*(x) \quad \forall x \in (x_-, x_+)$ для любых параметров $x_-, x_+, y_+, \delta, \sigma$, удовлетворяющих неравенствам (3), (4).

Лемма 3. Пусть выполнены ограничения (6), (8)–(10), тогда

$$\arg \max_{x \in [x_-, x_+]} (y^*(x) - y(x)) = x_0.$$

4. Упрощение исходной задачи. Согласно леммам 1–3 и предположению (13) можно существенно упростить задачу (5)–(10). Задача (5) равносильна следующей задаче

$$\min_H \sup_{x \in (x_-, x_+]} |y^*(x) - y(x, H, A)| \rightarrow \inf_{\tau \in T}.$$

В силу леммы 2, имеем

$$\min_H \sup_{x \in (x_-, x_+]} (y^*(x) - y(x, H, A)) \rightarrow \inf_{\tau \in T}.$$

Так как максимальное отклонение достигается в точке x_0 (лемма 3), то задача переписется следующим образом:

$$\min_H (y_0 - y(x_0, H, A)) \rightarrow \inf_{\tau \in T}, \quad y^*(x_0) =: y_0.$$

Далее, в силу (11)–(13), данная задача эквивалентна следующей:

$$y_0 - y(x_0, A) \rightarrow \inf_{\tau \in T}.$$

Поскольку $y_0 = const$, то от неё можно избавиться, т. е. решить задачу $-y(x_0, A) \rightarrow \inf_{\tau \in T}$. По свойству функции инфимума [4] имеем $y(x_0, A) \rightarrow \sup_{\tau \in T}$. В силу леммы 1 и предположения, что $x_0 \in (a_{v-1}, a_v)$, справедливо $y_v(x_0, A_{v-1}) \rightarrow \sup_{\tau \in T}$.

В итоге задача (5)–(10) переписывается следующим образом:

$$y_v(x_0, A_{v-1}) \rightarrow \sup_{\tau \in T}, \quad (14)$$

$$a_0 = x_-, \quad a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1}, \quad a_{m-1} = x_+, \quad (15)$$

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_v \leq \eta_{v+1}, \quad \eta_m = y_+, \quad (16)$$

$$a_k \leq \frac{1-\delta}{\delta} \sum_{i=1}^k a_{i-1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{1 - \eta_k}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad (17)$$

$$a_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0. \quad (18)$$

Пример. Рассмотрим решение задачи (14)–(18) при входных параметрах [5, 6]: $v = 2$, $m = 4$, $x_- = 12 \times 10965$, $x_0 = 3x_-$, $x_+ = 10x_-$, $y_0 = 0,228242$, $y_+ = 0,3$. В таблице приведён результат решения методом множителей Лагранжа.

Таблица. Параметры аппроксимации $y(x)$

i	0	1	2	3
η_i	0	0,235829	0,311996	0,35674
a_i	131580	227903	587104	1315800

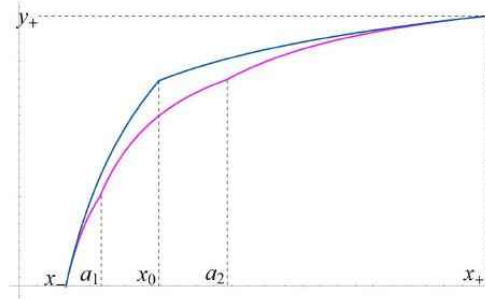


Рис. 1. График функций $y^*(x)$, $y(x)$

На рис. 1 изображена функция $y^*(x)$ и её миноранта $y(x)$. Полученное максимальное отклонение $h \approx 0,03883$.

5. Заключение. В статье рассмотрена нелинейная задача аппроксимации оптимальной шкалы средних ставок подоходного налога в равномерной метрике. Проведён анализ нелинейных ограничений. Приведены формулировки лемм, благодаря которым удалось существенно упростить решение исходной задачи (5)–(10). Методом множителей Лагранжа получено решение упрощённой задачи (14)–(18) (см. таб. и рис. 1). Данное решение является единственным, оптимальным и глобальным. Следует отметить, что исходная и упрощённая задачи не эквивалентны, но решение задачи (14)–(18) является оптимальным для задачи (5)–(10).

Литература

1. Чистяков С. В., Ишханова М. В. Математические модели выбора налоговых шкал: Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1998. 52 с.
2. Вершик А. М., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация // Сибирский матем. журнал. 1975. Т. 16. № 5. С. 925–938.
3. Малозёмов В. Н. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация [Электронный ресурс]: URL:<http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/2014/BestApprox.pdf> (дата обращения: 18.03.17).
4. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
5. Смирнов Р. О. Моделирование выбора параметров шкалы подоходного налога // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 5: Экономика. 2011. № 4. С. 141–148.
6. Андерсен А. А., Чистяков С. В. Методологические основы разработки интерактивной системы построений шкалы ставок подоходного налога // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 3. С. 9–19.

Многокритериальная задача оптимального размещения производства в сети

1. Введение. Задача оптимального размещения производства в сети представляет практический интерес в экономике. Исследованию таких задач посвящено множество работ [1]. Чаще всего рассматриваются задачи размещения пунктов производства одной продукции, а в качестве критериев оптимальности, которые следует минимизировать, берутся расстояния от пунктов производства до пунктов потребления. В качестве принципа оптимальности, согласующего эти критерии, ранее рассматривались оптимумы по Парето, сумма расстояний, максимум из расстояний. Оптимизация по принципу минимума суммы сводится к задаче о поиске медиан графа, а оптимизация по принципу минимума максимума — к задаче о поиске центров графа [2]. Также в [2] рассматриваются λ -центидантные постановки задачи, совмещающие задачи о минимизации максимума и суммы критериев.

Подобные задачи являются задачами целочисленного линейного программирования, для которых возможны различные алгоритмы точного и приближенного решения. Алгоритмы поиска медиан и центров, преимущественно основанные на методе ветвей и границ, рассмотрены в [3].

В данной работе ставится многокритериальная задача, которая обобщает задачу из [2]: имеется несколько видов продукции, каждый из которых необходим в пунктах потребления, и нужно разместить несколько групп заводов, производящих различные виды продукции. При этом в одном пункте не может размещаться несколько заводов. Для решения задачи применяется метод ветвей и границ.

2. Постановка задачи. Пусть имеется множество городов, соединенных между собой дорогами. Данную систему можно представить в виде ориентированного графа $G = (X, Y)$, вершинами $x \in X$

Ринчинов Роман Цыдыпович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: roman1001001@gmail.com, тел.: +7(981)682-16-01

Парфенов Андрей Павлович – ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: keldoor@gmail.com, тел.: +7(911)987-54-42

которого будут являться P городов, а дугами $(x^1, x^2) \in Y$ — дороги между пунктами x^1 и x^2 . Пронумеруем вершины $X = \{1, \dots, P\}$.

На дугах задана неотрицательная вещественная функция $c: M \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $c(x^1, x^2)$ — стоимость транспортировки продукции из x^1 в x^2 . Помимо этого, существует N различных товаров, каждый из которых потребляется всеми городами в определенном количестве. Таким образом каждой вершине j соответствует вектор $d_j = (d_{1j}, \dots, d_{Nj})$ размерности N , где d_{ij} — количество i -го вида продукции, потребляемого j -ым городом.

Необходимо разместить в P городах (вершинах графа) M заводов, причем в одном городе не может находиться более одного завода. Пусть множество заводов $Z = \cup_{i=1}^N Z_i$, где Z_i — множество мощности m_i заводов, производящих i -ю продукцию.

Функцию стоимости транспортировки продукции будем считать линейной по количеству транспортируемого товара, т. е. $c_{jk}x$ — стоимость транспортировки x единиц товара из пункта j в пункт k , где c_{jk} — стоимость транспортировки одной единицы товара. Величина c_{jk} — это длина кратчайшего пути из j в k в графе, в котором длина каждой дуги (x^1, x^2) равна $c(x^1, x^2)$. Для решения задачи полезно знать матрицу стоимостей $C = (c_{jk})_{j,k=1}^P$. Для поиска элементов матрицы C можно воспользоваться алгоритмом Флойда. Сложность данного алгоритма пропорциональна $O(P^3)$. Как будет видно далее, она незначительна по сравнению со сложностью основной задачи оптимизации.

Пусть $A \subset X$ — подмножество вершин графа, в которых размещены пункты производства. Множество A разбивается на непесекающиеся подмножества A_i мощности m_i , $i = 1, \dots, N$, каждое из которых соответствует заводам, производящим только i -ю продукцию. Размещение заводов $A = A_1 \cup \dots \cup A_N$, в свою очередь, разбивает множество городов X на группы N разными способами. Способ, соответствующий i -му виду продукции, выглядит так: $X = X_{j_1}(A_i) \cup \dots \cup X_{j_{m_i}}(A_i)$, $j \in A_i$. Здесь $X_j(A_i)$ — множество городов, для которых завод в вершине j , производящий продукцию i , является ближайшим.

Для каждого вида продукции i задан критерий оптимальности, который необходимо минимизировать, — стоимость транспортировки i -го вида продукции от заводов, расположенных в вершинах A_i ,

до пунктов потребления

$$f_i(A_i) = \sum_{j \in A_i} \sum_{k \in X_j(A_i)} c_{jk} d_{ik}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Итак, имеется N критериев оптимальности (1). В предположении, что нужно минимизировать суммарные затраты всех производителей, в качестве общего принципа оптимальности выберем взвешенную сумму всех критериев (1) $\sum_{i=1}^N a_i f_i(A_i)$, где $a_i > 0$ — веса различных видов продукции, отражающие, например, удельную стоимость их транспортировки.

Все решения, минимизирующие взвешенные суммы критериев, оптимальны по Парето, но существуют решения оптимальные по Парето, которые не являются минимумами взвешенных сумм критериев [2]. Поэтому, находя минимум взвешенной суммы критериев (1) при разных a_i , будем находить различные оптимальные по Парето решения. Но все оптимумы по Парето таким образом найти невозможно.

3. Решение задачи. В работе [2] показано, что в задаче размещения пунктов производства одного вида продукции задача минимизации взвешенной суммы сводится к задаче поиска M -медиан в графе. Ограничение, согласно которому в одном городе может размещаться не больше одного завода, при $M \leq P$ не изменит множества решений задачи, ведь для минимизации взвешенной суммы расстояний нужно, чтобы как можно больше вершин было занято заводами, а следовательно, в оптимальном решении в одной вершине находится не больше одного завода.

В нашем случае, минимизация взвешенной суммы критериев (1) при отсутствии ограничения на количество заводов в одном городе сводится к N задачам о m_i -медианах. Действительно, в этом случае множества A_i не зависят друг от друга, а значит минимизацию суммы $\sum_{i=1}^N a_i f_i(A_i)$ можно производить покомпонентно по слагаемым. Если же в каждом городе может располагаться не более одного завода, задача усложняется. Ее можно решить методом ветвей и границ. Обобщим метод, изложенный в [3].

Определение. Назовем *заводом* вершину графа, в которой расположен пункт производства.

Построим N матриц Q^i , $i = 1, \dots, N$, с элементами q_{kj}^i . Матрица Q^i размера $P \times P$ описывает размещение заводов, производящих i -ю продукцию. Ее строки соответствуют вершинам, в которых гипотетически могут располагаться заводы, а j -й столбец содержит вершины графа $q_{1j}^i, q_{2j}^i, \dots$, расположенные в неубывающем порядке по расстоянию до вершины j . При переборе в методе ветвей и границ сперва перебираем все столбцы первой матрицы, потом второй, и т. д. В i -й матрице вершина j последовательно прикрепляется к вершинам $q_{1j}^i, q_{2j}^i, \dots$. Прикрепление j к q_{kj}^i означает, что в вершине q_{kj}^i расположен завод, производящий i -ю продукцию, ближайший к городу j (при этом город q_{kj}^i автоматически прикрепляется к заводу q_{kj}^i). Если к вершине x прикреплена хоть одна вершина, при дальнейшем переборе пропускаем x в i -й и последующих матрицах.

3.1. Некоторые замечания для перебора. Чтобы уменьшить множество перебираемых вершин в каждой матрице Q^i , сделаем несколько замечаний из [3].

- Из матрицы Q^i можно удалить m_i последних строк.
- Пусть вершина j' прикреплена к заводу $q_{k'j'}^i$. Пусть вершина j' будет k -й ближайшей вершиной к некоторой еще не прикрепленной вершине j ($j' < j \leq P$), соответствующей столбцу матрицы. Тогда, очевидно, все элементы q_{lj}^i с $l > k$ могут быть при движении вверх в дереве вариантов исключены из дальнейшего рассмотрения (временно отмечены, а при движении по дереву вниз отметки будут сняты).
- Пусть вершина j' прикреплена к заводу $q_{k'j'}^i$. Тогда можно предположить, что все вершины $q_{1j'}^i, q_{2j'}^i, \dots, q_{(k'-1)j'}^i$ не являются заводами.
- Если из рассмотрения исключены t верхних элементов j -го столбца, соответствующего нераспределенной вершине j , а $(t+1)$ -й элемент $q_{(t+1)j'}^i$ является заводом, то j должна быть прикреплена к вершине $q_{(t+1)j'}^i$.
- Если на некотором этапе проводимого поиска будет построено множество из m_i заводов, то каждую оставшуюся нераспределенную вершину можно прикрепить к ближайшему заводу.

3.2. Вычисление нижней границы. Пусть на определенном шаге метода вычислены прикрепления для матриц Q^1, \dots, Q^{i-1} .

Пусть в матрице Q^i выполненные прикрепления дали m' заводов и j' городов прикреплено. Значит, осталось прикрепить еще $h = m_i - m'$ заводов. Пусть J — множество индексов еще нераспределенных вершин.

Пусть l_{a_j} и l_{b_j} — первые два неотмеченных элемента в столбце j матрицы Q^i (не исключенные из рассмотрения). Пусть число различных l_{a_j} для $j \in J$ равно h' . Наилучшим прикреплением вершины j будет l_{a_j} .

Если $h = h'$, то, прикрепив вершины j к l_{a_j} , получим m_i заводов, а значит, матрица Q^i заполнена. Если же $h > h'$, для получения нижней границе нужно заменить $h - h'$ минимальных стоимостей на вторые по величине. Для поиска дополнительной стоимости нужно найти на $h - h'$ наименьших значений $d_{ij}(c_{l_{b_j}j} - c_{l_{a_j}j})$ по всем вершинам из J . Нижняя граница будет получаться из суммирования уже выполненных распределений и $h - h'$ наименьших значений. Если же $h < h'$, то наилучшее пополнение частного решения даст меньше заводов, чем m_i . Из [3] известно, что $f_i(A)$ монотонно убывает с увеличением m_i , значит, текущее частное решения не является частью оптимального.

Нижняя граница считается в предположении, что элементы матриц Q^1, \dots, Q^{i-1} уже прикреплены, а значит, стоимость для них суммируется с нижней границей для Q^i -й матрицы.

4. Заключение. В этой работе обобщена задача, рассмотренная в [2]. Взят случай, в котором размещается множество пунктов производства различной продукции. В качестве принципа оптимальности взята взвешенная сумма критериев. Для поиска решения создан алгоритм, основанный на методе ветвей и границ.

Литература

1. Farahani R. Z., SteadieSeifb M., Asgari N. Multiple criteria facility location problems: A survey // Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, Iss. 7. 2010. P. 1689–1709.
2. Ogryczak W. Location Problems from the Multiple Criteria Perspective: Efficient Solutions. // Archives of Control Sciences, 7 (XLIII). 1998. P. 161–180.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 430 с.

УДК 519.81

Синицын Д. Д.

Использование модели Катаоки для анализа итогов президентских выборов в США

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

1. Введение. Задача прогнозирования является одной из наиболее важных в экономике, она позволяет принять решение о выборе оптимальной стратегии в будущем. Данная работа посвящена анализу прошедших президентских выборов в США 2016 года с использованием модели Катаоки. Итоги выборов сопоставлялись с прогнозами, полученными с помощью данной модели, для этого использовались исторические данные за прошедшие года. В связи со спецификой президентских выборов в США было решено использовать данные о голосах людей за выборщиков для колеблющихся штатов, в которых накануне выборов наблюдается равный уровень популярности кандидатов от двух основных партий.

2. Модель Катаоки. Для представления задачи выбрана модель Катаоки [1–2]. В общем виде она выглядит так:

$$\begin{aligned} \max f, \\ p\{c(\omega)x \leq f\} = \beta, \\ p\{a_i x \leq b_i(\omega)\} \geq \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

где A — матрица, b , c и x — векторы, компоненты которых могут быть случайными величинами. Предположив, что распределение случайной величины b_i и вектора $c(\omega)$ нормальное, проводится ряд преобразований. В результате получаем задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} \max f = \bar{c}'x - q\sqrt{x'Vx}, \\ Ax \leq b^*, \quad x_j \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Синицын Даниил Дмитриевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: dansinitsyn@gmail.com, тел.: +7(981)840-54-52

где $b_i^* = \bar{b}_i - q_i \sigma_i$, $q = -\Phi^{-1}(\beta) \geq 0$, $q_i = -F^{-1}(\alpha_i) \geq 0$, \bar{c} — математическое ожидание случайного вектора, V — матрица его дисперсии, Φ и F — это гауссовы интегралы с переменным верхним и нижним пределом соответственно.

Предполагается, что задача (1) имеет решение. Для ее решения определяются задача линейного программирования:

$$\begin{aligned} \max f &= \bar{c}'x, \\ Ax &\leq b^*, \\ b^* &\geq 0, \\ x_j &\geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

и задача квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} \max f &= \bar{c}'x - \frac{q}{2R}x'Vx, \\ Ax &\leq b^*, \\ x_j &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где R — положительный параметр. В [2] приведены теоремы для решения задачи (3) и параметра R :

Теорема 1 [2]. Если оптимальное решение $x(R)$ задачи (3) удовлетворяет $R = \sqrt{\hat{x}'(R)V\hat{x}(R)}$, то это решение является также оптимальным для задачи (1), и наоборот.

Теорема 2 [2]. Функция $r(R) = \sqrt{\hat{x}'(R)V\hat{x}(R)}$ является монотонно невозрастающей по R и имеет конечный предел.

Также в [2] приведен итерационный метод Катаоки решения данной задачи, реализующийся по следующей схеме:

Шаг 1: Решается задача линейного программирования (2) и находится начальное значение $R = \sqrt{\hat{x}_0'V\hat{x}_0}$;

Шаг 2: Используя найденное R , решаем задачу нелинейного программирования (3). Если $r = R$, то оптимальное решение найдено, если $r < R$, то полагаем $R = r$ и возвращаемся к шагу 2.

3. Решение поставленной задачи. Решение задачи состоит из нескольких этапов.

3.1. Исходные данные. Были взяты данные [3] за 2000, 2004, 2008, 2012 года для штатов Флорида, Северная Каролина, Мичиган, Висконсин, Миннесота, Колорадо, Пенсильвания, Огайо, Виргиния.

Матрица A заполняется общим числом голосов для каждого штата в определенный год. Вектор b — вектор со случайными величинами, характеризующий количество голосовавших в определенный год. Компоненты случайного вектора $c(\omega)$ — количество людей, которые проголосуют в определенном штате за Демократическую партию в данном году. Для применения модели Катаоки нужно, чтобы компоненты вектора b и вектор $c(\omega)$ имели нормальное распределение. Это условие выполнено, поскольку голоса людей — это независимые случайные величины, а их сумма является также случайной величиной, чье распределение стремится к нормальному.

3.2. Реализация метода. Для решения поставленной задачи решено реализовать итерационный метод Катаоки на языке C++, используя стороннюю библиотеку CGAL. На вход программа получает файл с исходными данными, а на выходе выдает вектор x — решение, компоненты которого являются долями голосов за определенный штат. Границы изменения данного вектора взяты следующие: $0,05 \leq x \leq 0,95$. Это связано с тем, что согласно правилам президентских выборов США партия, набравшая менее 5% голосов, не будет учтена в перечне результатов, а штаты, выбранные для анализа, являются колеблющимися штатами, поэтому можно утверждать, что в каждом таком штате партия точно наберет минимум голосов.

4. Результаты. Результат работы программы в сравнении с прогнозом, взятым с ресурса FiveThirtyEight, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Доли голосов

Штат	Выход программы	FiveThirtyEight
NC	0,95	0,55
OH	0,05	0,354
PA	0,86108	0,77
VA	0,95	0,855
CO	0,644901	0,775
MN	0,05	0,85
WI	0,05	0,8315
MI	0,95	0,789
FL	0,05	0,551

Разделение предпочтений между двумя основными партиями на прошедших выборах представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результат выборов

Штат	Демократическая партия	Республиканская партия
NC	0,481	0,51875
OH	0,458	0,542
PA	0,496	0,504
VA	0,53	0,47
CO	0,526	0,474
MN	0,507	0,493
WI	0,496	0,504
MI	0,499	0,501
FL	0,494	0,506

4.1. Анализ результатов. Из таблиц 1, 2 видно, что реализованный метод предсказал победу Демократической партии в 5 штатах из 9, прогноз с FiveThirtyEight показал, что она побеждает в 8 из 9 выбранных штатах, а результаты выборов оказались такими, что она побеждает в 3 из 9 штатах. Возможно, результат работы программы отличен от результата взятого со стороннего ресурса, потому что входными данными была информация всего о 9 штатах. Это оказало влияние на разброс долей голосов.

5. Вывод. Как оказалось, только лишь данных о предыдущих выборах недостаточно для точного прогноза. Можно сделать вывод о том, что рассмотренный в статье метод не применим к решению данной задачи. В дополнении к использованному методу необходимо применять другие, учитывающие особенности бинарных предпочтений при почти равных шансах альтернатив, что даст возможность ограничить разброс голосов для каждого штата.

Литература

1. Kataoka S. A Stochastic programming model // *Econometrica*. January-April. 1963. Vol. 31. P. 181–196.
2. Колбин В.В. Специальные методы оптимизации. СПб.: Лань, 2014. 378 с.
3. National Archives [Электронный ресурс] URL:<https://www.archives.gov/federal-register/electoral-college/historical.html> (дата обращения: 02.12.2016).

УДК 519.24

Сковородина Т. В., Губар Е. А.

Моделирование эпидемического процесса с использованием модели NIMFA

1. Введение. На протяжении всей истории человечества люди сталкивались с различными видами инфекционных заболеваний. По статистическим данным, эпидемии нанесли больший урон человечеству, чем войны. Под термином эпидемия подразумевается распространение болезней инфекционного характера [1–4]. Однако, эпидемией также можно назвать распространение вредоносного программного обеспечения в компьютерной сети или информации в обществе [5]. Моделирование эпидемического процесса происходит с помощью таких моделей, как SIR, SIS и их модификаций. Модель SIS (susceptible-infected-susceptible) предполагает три стадии развития эпидемии: $S(t)$ — доля узлов, которые еще не инфицированы в момент времени t , но предрасположены к заражению; $I(t)$ — доля узлов, которые были заражены и способны передать вирус узлам из группы $S(t)$. Выздоровевшие узлы из группы $I(t)$ попадают вновь в группу $S(t)$. В настоящее время в связи с развитием сетевых технологий и возможностью их применения для описания связей в обществе создаются новые модификации моделей SIR, SIS, а также их аппроксимации, такие как NIMFA (N-Intertwined Mean-Field Approximation) [6].

2. Постановка задачи. Как описано выше, модели распространения эпидемии можно рассматривать как для компьютерной сети, так и для общества, где связи между узлами будут соответствовать контактам людей. Будем исследовать эпидемический процесс, описываемый моделью SIS на сети.

Сковородина Татьяна Валерьевна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: stv_95@mail.ru, тел.: +7(981)087-69-19

Губар Елена Алексеевна — доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: e.gubar@spbu.ru, тел.: +7(911)935-01-29

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01079)

Зададим граф G , обладающий следующими свойствами: связный, неориентированный, невзвешенный, с N вершинами. Он описывается с помощью матрицы смежности A , которая является бинарной матрицей, с элементами a_{ij} . Если узел i связан с узлом j , то $a_{ij} = 1$, иначе $a_{ij} = 0$.

В графе G , в котором узлы могут быть непосредственно заражены от соседнего инфицированного узла со скоростью β , зараженный узел может быть вылечен со скоростью δ , после чего он становится здоровым, но восприимчивым к вирусу. Все узлы в системе могут быть заражены и вылечены в любое время. Вероятность заражения узла i во время t будем обозначать $v_i(t)$. Каждый узел i в момент времени t может находиться в одном из двух возможных состояний: либо с вероятностью $v_i(t)$ он инфицирован, либо здоров с вероятностью $1 - v_i(t)$. Для каждого узла i в графе G_n уравнение модели NIMFA имеет вид [7]

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\beta \sum_{j=1}^N a_{ij} v_j(t) - v_i(t) \left(\beta \sum_{j=1}^N a_{ij} v_j(t) + \delta \right), \quad (1)$$

где a_{ij} — элемент матрицы A ; N — количество узлов в сети.

К описанному процессу распространения вируса в сети, где узел может находиться в одном из двух возможных состояниях, применим теорию марковских процессов. Получим цепь Маркова с непрерывным временем, где множество состояний имеет вид $X_k \in (0, 1)$.

Определение 1. Непрерывной цепью Маркова $\{X(t), t \geq 0\}$ называют процесс, для которого выполняется [5]

$$\begin{aligned} P[X(t + \tau) = j | X(\tau) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < \tau] = \\ = P[X(t + \tau) = j | X(\tau) = i]. \end{aligned} \quad (2)$$

Состояние системы в целом зависит от состояния каждого узла, а именно: от вектора начальных вероятностей, от количества связей в системе (т. е. от матрицы смежности A), а также от коэффициентов β и δ . Под состоянием системы будем понимать значение $s(t)$, которое задается следующим образом:

$$s(t) = \frac{\sum_{i=1}^N v_i(t)}{N}. \quad (3)$$

Целью данной работы является создание программы для проведения численных экспериментов, базирующихся на модели NIMFA, и анализ полученных результатов.

3. Численное моделирование. Для численного моделирования модели создана функция в пакете MATLAB. В ней осуществлен поиск решения системы дифференциальных уравнений — поиск вероятностей инфицирования для каждого узла системы. На вход процедуры необходимо задать начальные условия: количество узлов в системе, коэффициенты β и δ , а также начальный и конечный моменты времени. Начальный вектор вероятностей инфицирования и матрица смежности A задаются случайным образом.

При помощи созданной функции проведены несколько серий экспериментов с различными начальными данными. Первая серия проведена с фиксированными матрицей смежности A , вектором начальных вероятностей инфицирования, а также отношения $\sigma = \frac{\beta}{\delta} = 1$. В ходе исследования менялись коэффициенты β и δ . В зависимости от их значений получены следующие результаты (см. рис. 1, рис. 2).

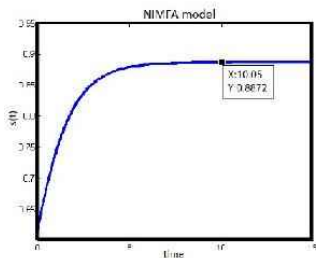


Рис. 1: $\beta = 0,1, \delta = 0,1$

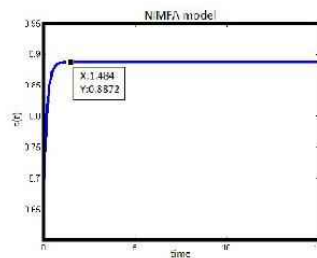


Рис. 2: $\beta = 0,8, \delta = 0,8$

1. На рис. 1 и рис. 2 значения двух кривых, описывающих состояние системы в различные моменты времени для разных коэффициентов, возрастают при $\sigma = 1$.
2. Чем больше значения β и δ , тем быстрее система достигает состояния равновесия.

3. Система приходит в состояние равновесия, достигая одинакового значения вероятности инфицирования для любых коэффициентов β и δ , для которых $\sigma = 1$ (при неизменных начальных данных).

Вторая серия экспериментов произведена с матрицей A , которая задавалась случайным образом. Начальный вектор вероятностей инфицирования и коэффициенты β и δ остались неизменными. В зависимости от матрицы A получены следующие результаты (см. рис. 3, рис. 4).

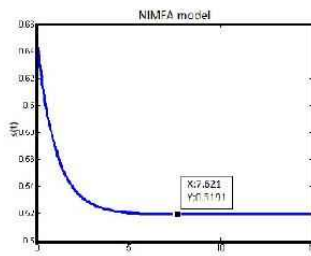
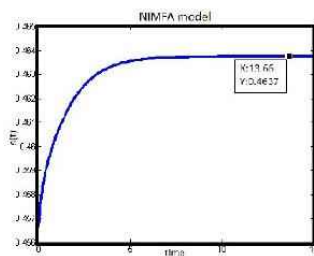


Рис. 3: $\beta = 0,15$, $\delta = 0,8$, $L = 105$ Рис. 4: $\beta = 0,15$, $\delta = 0,8$, $L = 105$

1. Рост кривой зависит не от величины σ , как это было в прошлых экспериментах, а от количества связей в системе.
2. Из результатов рис. 3 видно, что в системе с $L = 105$ узлами вероятность инфицирования повышается, тогда как при $L = 101$ вероятность инфицирования падает. Таким образом, чем больше число связей в системе, тем больше вероятность инфицирования узлов.

4. Заключение. В данной работе изучена новая модель NIMFA, которая описывает эпидемический процесс с учетом структуры сети. Исследования основывались на проведении серий экспериментов, с помощью созданной программы в пакете MATLAB. По полученным

результатам сделаны выводы о том, как изменяется поведение эпидемии в зависимости от различных начальных данных, описывающих эту эпидемию.

Литература

1. Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the mathematical theory of epidemics // Royal Society. 1927. №115. p. 700–721.
2. Житкова Е. М., Колесин И. Д. Задача управления профилактикой гриппа // Процессы управления и устойчивость: Труды 36-й межвузовской научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, В. Н. Старкова. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2005. С. 219–222.
3. Овсянникова Н. И. Детерминированная и стохастическая модель эпидемии // Процессы управления и устойчивость: Труды 39-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. СПб.: Издат. Дом С.-Петербург. гос. ун-та, 2008. С. 230–235.
4. Никитина И. П., Губар Е. А. Развитие эпидемического процесса в группах риска с учетом структуры популяции // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петербург. гос. ун-та, 2012 С. 308–312.
5. Goffman W., Newill V. A. Generalization of epidemic theory // Nature. 1964. №4966. p. 225–228.
6. Mieghem P. V., Omic J., Kooij R. Virus spread in Networks // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. №17. p. 1–14.
7. Mieghem P. V. Performance Analysis of Communications Networks and Systems. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006. 543 p.

УДК 519.21

Смирнов Д. С.

Задача о многоруком бандите при наличии эксперта

Рекомендовано к публикации доцентом Громовой Е. В.

Классическая формулировка задачи. Задача о многоруком бандите широко используется для моделирования ситуаций, в которых некоторая автоматизированная система максимизирует свой выигрыш путем поиска компромисса между обучением и применением полученных ранее знаний. Такие задачи часто возникают в реальных ситуациях, например, в клинических исследованиях [1], в построении алгоритмов динамической маршрутизации [2] и интернет-маркетинге [3].

Рассмотрим классическую формулировку задачи о многоруком бандите [1]. Пусть имеется набор из n действий a_1, \dots, a_n . Заметим, что действие можно интерпретировать как рычаг слот-машины, называемой «одноруким бандитом». Каждому действию a_i соответствует случайная величина $\xi_i \sim D_i$ с неизвестным математическим ожиданием μ_i и дисперсией σ_i^2 . Игрок в каждый момент времени $t = 1, \dots, T$ выбирает действие $a_{j(t)}$ и получает выигрыш $r_{j(t)}$, который является реализацией соответствующей случайной величины $\xi_{j(t)}$. Задача игрока состоит в том, чтобы получить наибольший суммарный выигрыш за время игры.

Для решения описанной задачи существуют алгоритмы (стратегии), которые в каждый момент времени t определяют, какое действие следует выбрать. Распространенной мерой производительности данных алгоритмов является *функция суммарного сожаления*, определяемая следующим образом:

$$R(T) = \mu^* T - \sum_{j=1}^n \mu_j E[N_j(T)],$$

где $\mu^* = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$, а $N_i(T)$ — случайная величина, обозначающая число раз, когда выбиралось действие с номером i за время T .

Смирнов Дмитрий Сергеевич – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: patrickjsmirnov@gmail.com, тел.: +7(921)636-18-22

В дальнейшем будем рассматривать задачу о многоруком бандите, в которой случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n имеют распределение Бернулли [4] с неизвестными параметрами p_1, \dots, p_n . Рассмотренный случай имеет множество практических приложений, например, в интернет-маркетинге [3].

В литературе описаны различные алгоритмы для решения задачи о многоруком бандите, такие как play-the-winner [5], ϵ -greedy [1], Thompson-Sampling [6], UCB1 [7], Softmax [1], Pursuit Algorithms [1] и другие.

Алгоритм UCB1. Рассмотрим более подробно алгоритм UCB1. В каждый момент времени t алгоритм выбирает действие $a_{j(t)}$ с индексом

$$j(t) = \arg \max_{i=1, \dots, n} \left(\bar{r}_i + \sqrt{\frac{2 \ln t}{n_i}} \right), \quad (1)$$

где \bar{r}_i — средний выигрыш в результате выбора действия a_i , n_i — число раз, когда выбиралось действие a_i . Одним из преимуществ алгоритма является отсутствие параметров.

Задача о многоруком бандите с одним экспертом. Рассмотрим следующую модификацию задачи о многоруком бандите. Пусть в рамках описанной выше задачи имеется эксперт, который в каждый момент времени t делает предположение о значениях выигрышей действий a_1, \dots, a_n . Каждый раз, когда игрок выбирает действие, эксперт предлагает вектор $(b_1(t), \dots, b_n(t))$, в котором компонента $b_i(t)$ есть предположение о значении выигрыша в результате выбора действия a_i в момент времени t . Допустим, что эксперт владеет некоторой информацией о значениях выигрышей выбираемых действий, что позволяет ему с некоторой степенью точности «предсказывать» выигрыши в каждый момент времени. Формализуем такие подсказки эксперта следующим образом. Пусть компоненты вектора $(b_1(t), \dots, b_n(t))$ являются реализациями случайных величин $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n$, имеющих распределение Бернулли с неизвестными параметрами $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$. Здесь рассматривается распределение Бернулли, поскольку случайные величины, соответствующие действиям, имеют распределение Бернулли. Задача игрока состоит в том же, однако теперь он, помимо данных о значениях полученных выигрышей, может воспользоваться подсказками эксперта.

Модификация алгоритма UCSV1. Поставим задачу модифицировать алгоритм UCSV1 таким образом, чтобы он учитывал информацию, полученную от эксперта. Изменим алгоритм так, чтобы выбор игрока зависел от значения подсказки эксперта и от её точности.

Для этого добавим в формулу (1) слагаемое $\bar{b}_i(t)k_i(t)$, где $\bar{b}_i(t)$ — среднее значение b_i за время t , т. е. средняя подсказка для действия a_i , а

$$k_i(t) = e^{-|\bar{b}_i(t) - \bar{r}_i(t)|}$$

— величина, характеризующая точность подсказки для действия a_i . Данный коэффициент позволит учитывать неточные подсказки с меньшим весом. Таким образом, модифицированный алгоритм UCSV1 на каждом шаге выбирает действие с индексом

$$j(t) = \arg \max_{i=1, \dots, n} \left(\bar{r}_i + \sqrt{\frac{2 \ln t}{n_i}} + \bar{b}_i(t)k_i(t) \right).$$

Численный эксперимент. Для анализа результатов работы модифицированного алгоритма UCSV1 выполнена его программная реализация на языке Python. На вход программе подается число действий n , вектор математических ожиданий случайных величин, соответствующих выбираемым действиям (p_1, \dots, p_n) , вектор математических ожиданий случайных величин, соответствующих подсказкам эксперта $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$ и число итераций T . Программа строит график функции сожаления.

Пусть $n = 5, T = 5000$ и

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (0,3; 0,45; 0,5; 0,47; 0,1).$$

Для сравнения приведем графики функции сожаления алгоритма без учета эксперта и функций сожаления модифицированных алгоритмов со следующими значениями математических ожиданий подсказок эксперта $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$:

$$e_1 = (0,5; 0,45; 0,1; 0,5; 0,7), \quad e_2 = (0,1; 0,1; 0,6; 0,1; 0,1),$$

$$e_3 = (0,3; 0,45; 0,52; 0,47; 0,1), \quad e_4 = (0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1),$$

$$e_5 = (0,2; 0,3; 0,45; 0,32; 0,05).$$

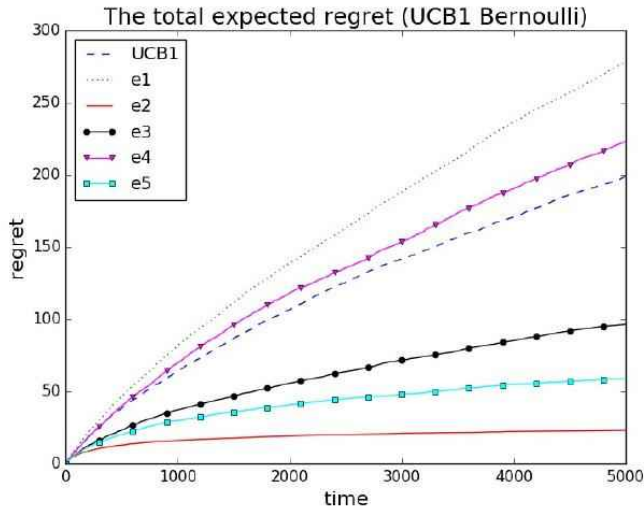


Рис. 1. Графики функции сожаления

Результаты работы программы в виде графиков функций сожаления представлены на рис. 1. Как видно, медленнее всех возрастает функция сожаления, соответствующая вектору математических ожиданий подсказок эксперта e_2 . Данное поведение алгоритма объясняется тем, что третья компонента, которая и соответствует действию с наибольшим средним выигрышем, намного больше других. Максимум функции сожаления достигается для вектора e_1 , в котором, наоборот, компоненты, соответствующие неоптимальным действиям, завышены. Второй по величине является функция сожаления, соответствующая вектору e_4 , в котором все компоненты $\hat{p}_i = 0,1, i = 1, \dots, n$. Как видно, одинаковые математические ожидания подсказок способствуют снижению выигрыша игрока.

Заключение. Сформулирована задача о многоруком бандите с одним экспертом. Предложена модификация алгоритма UCS1 для рассматриваемой задачи. Для анализа результатов работы алгоритма разработана программная симуляция. В дальнейшем планируется рассмотреть задачу о многоруком бандите с m экспертами и перейти к теоретико-игровой модели.

Литература

1. Kuleshov V., Precup D. Algorithms for the multi-armed bandit problem // Journal of Machine Learning Research. 2000. P. 1–48.
2. Awerbuch B., Kleinberg R. Online linear optimization and adaptive routing // Journal of Computer and System Sciences. 2008. Vol. 74, No 1. P. 97–114.
3. Смирнов Д. С. Использование задачи о многоруком бандите в тестировании веб-страниц // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 705–710.
4. Буре В. М., Париллина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Лань, 2013. 416 с.
5. Scott S. L. A modern Bayesian look at the multi-armed bandit // Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2010. Vol. 26, No 6. P. 639–658.
6. Agrawal S., Goyal N. Analysis of thompson sampling for the multi-armed bandit problem // Journal of Machine Learning Research: Workshop and Conference Proceedings. 2012. Vol. 23, No 39. P. 1–26.
7. Auer P., Cesa-Bianchi N., Fischer P. Finite-time analysis of the multiarmed bandit problem // Machine Learning. 2002. Vol. 47, No 2–3. P. 235–256.

УДК 519.25

Спиридонов Д. Ю.

Анализ социально-экономических показателей методами прикладной статистики

*Рекомендовано к публикации старшим преподавателем
Кумачевой С. Ш.*

1. Введение. В современном обществе социально-экономические данные играют важную роль. С одной стороны, лица, принимающие решения на различных уровнях власти и в бизнесе, нуждаются в подобного рода информации [1]. С другой стороны, общественность и средства массовой информации используют ее для отражения современной картины мира и сложившейся ситуации внутри отдельных регионов [2]. Так, международная статистика позволяет определить страны-ориентиры, страны схожего уровня развития, и в общем представить то, как мы живем.

2. Актуальность. На сегодняшний день собрано огромное количество данных по различным сферам жизнедеятельности. Однако большая часть этой информации отражает лишь частную сторону жизни и не позволяет ответить на вопрос об уровне жизни населения в целом. Этот вопрос стал особенно интересен в последние годы ввиду сложных экономической и политической ситуаций во многих странах мира. Показатель уровня счастья можно считать одним из вариантов ответа на вопрос об уровне жизни населения, но возможно ли его вычислить, используя лишь показатели, которые находятся в открытом доступе.

3. Постановка задачи. В связи с этим поставлена задача оценки общего уровня жизни населения с использованием находящихся в открытом доступе индексов и показателей, с помощью которых описываются различные сферы жизнедеятельности человека.

Спиридонов Дмитрий Юрьевич – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nelphi2208@gmail.com, тел.: +7(900)655-69-18

4. Данные. Выбор показателей производился в ориентире на Европейскую модель [3] представления качества жизни, которая делит ее на 9 сфер: материальное благосостояние, рабочая деятельность, здоровье, образование, досуг и общение, физическая и экономическая безопасность, лояльность к правительству и основные права, природа и окружающая среда [4], общий жизненный опыт.

Таким образом, была собрана информация по 35 индикаторам. Основные из них: индекс уровня счастья (*Happy*), стоимость здравоохранения в долларах США (*Hepr*), ожидаемая продолжительность жизни (*LEB*), уровень смертности (*DR*), свобода морали (*MF*), средняя длительность обучения (*MYoS*), индекс развития человеческого потенциала (*HDI*), уровень безработицы (*UR*), индекс Джини (*Gini*).

Количество представленных индексом стран варьируется от 105 до 225. Полученные данные были обработаны в два этапа. На первом этапе исключены из рассмотрения показатели, которые имели наиболее сильную корреляцию с другими, но при этом не уменьшилось количество представленных сфер жизни человека. На втором этапе отброшены индексы, уровень корреляции которых был 0,6. Таким образом сформированы три набора данных: исходный и полученные после первого и второго этапов.

5. Регрессионный анализ. По каждому из наборов данных построена линейная регрессия методом последовательного включения факторов в модель на основе прироста скорректированного коэффициента детерминации R_{adj}^2 . В качестве зависимого фактора рассмотрен индекс уровня счастья, который отражает общий уровень жизни населения. Таким образом получено три модели:

$$1. \textit{Happy} = 1,792 + 4,834 \textit{HDI} + 1,487 \cdot 10^{-4} \textit{Hepr}.$$

$$2. \textit{Happy} = 7,153 \cdot 10^{-2} \textit{LEB} + 2,16 \cdot 10^{-4} \textit{Hepr}.$$

$$3. \textit{Happy} = 3,913 + 0,217 \textit{MYoS} - 0,163 \textit{DR} + 0,021 \textit{MF}.$$

Для исследования качества моделей проведен ряд статистических тестов [5], результаты которых представлены в таблице 1. Все тесты реализованы с помощью пакета R.

В ходе исследования выявлено, что в моделях 1 и 2 имеет место автокорреляция первого порядка, что может быть результатом наличия неучтенного фактора. Более того, в модели 1 наблюдается гетероскедастичность. Все это говорит о непригодности этих моделей для дальнейшего использования. Модель 3 прошла все проверки, однако, средняя ошибка аппроксимации составила 10,6%. Поэтому был проведен дополнительный анализ, направленный на выявление наблюдений, сильнее других влияющих на качество модели.

Таблица 1. Проверка качества моделей

Название теста	Номер модели		
	1	2	3
<i>Проверка нормальности распределения остатков</i>			
тест Шапиро – Уилка	+	+	+
тест Андерсона – Дарлинга	+	+	+
тест Колмогорова – Смирнова	+	+	+
критерий χ^2 Пирсона	+	+	+
<i>Проверка гомоскедастичности</i>			
тест Бройша – Пагана	–	+	+
тест Уайта	–	+	+
<i>Отсутствие систематических ошибок</i>			
$E(\varepsilon_i) = 0$	+	+	+
<i>Отсутствие мультиколлинеарности</i>			
$ X^T X \neq 0$	+	+	+
<i>Проверка независимости остатков</i>			
тест Дарбина – Уотсона	–		+
тест Льюнга – Бокса	–	–	+
тест Бройша – Годфри	–	–	+

Для этого вычислены следующие величины [6]: $DFFIT_i$ — показывает, на сколько изменится значение, соответствующее i -й компоненте, при условии, что i -е наблюдение будет удалено из выборки, $DFBETA_{j(i)}$ — отражает изменение j -го коэффициента регрессии при удалении i -й компоненты, расстояние Кука — отражает то, на сколько изменится регрессия в целом после удаления i -го наблюдения, рычаг (от англ. leverage), в регрессионном анализе — мера удаленности i -го наблюдения от остальных. По итогам дополнительного анализа были исключены наблюдения, соответствующие таким государствам, как Нигерия, Арабская Республика Сирия, Афганистан и Камбоджа.

По вновь полученной выборке построена линейная регрессия, которая имеет вид

$$Harpy = 4,026 + 0,211 MYoS - 0,185 DR + 0,024 MF.$$

Данная модель прошла все проверки, средняя ошибка аппроксимации составила 9,77%, что является допустимым значением.

6. Вывод. В результате исследования собраны максимально новые и полные данные по 35 социально-экономическим показателям, которые представляют все аспекты человеческой жизнедеятельности, согласно европейской модели. Полученные сведения обработаны и сформированы в три набора данных. Проведен регрессионный анализ, который включает в себя:

- построение линейных регрессий по различным наборам данных;
- глубокий анализ каждой из полученных моделей.

По итогам регрессионного анализа была сформирована модель, описывающая уровень жизни населения, и выявлено, что этот показатель в большей степени зависит от таких социально-экономических параметров, как средняя длительность обучения, уровень смертности и уровень моральных свобод в обществе. Максимальное прогнозное значение соответствует Нидерландам и составляет 7,099 единицы (данный индекс измеряется в пределах от 0 до 10). Практически такое же значение соответствует Соединенным Штатам Америки – 7,097. Самый низкий показатель принадлежит Республике Гвинея-Бисау, уровень благосостояния там оценивается в 3,044 единицы. Россия получила среднюю оценку в 5,262 единицы.

Литература

1. Тарасев А. М., Усова Ю. В., Шмотина Ю. В. Расчет прогнозных траекторий развития экономики при наличии структурных изменений // Математическая теория игр и ее приложения. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2016. Т. 8. Вып. 3. С. 34–66.

2. Горбанева О. И., Угольницкий Г. А. Статические модели согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов // Математическая теория игр и ее приложения. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2016. Т. 8. Вып. 2. С. 28–57.
3. Сайт Евростата [Электронный ресурс]: URL:http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Quality_of_life_indicators_-_measuring_quality_of_life (дата обращения: 06.04.17).
4. Ровенская Е. А. Модель экономического роста и связанного с ним качества окружающей среды // Математическая теория игр и ее приложения. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2011. Т. 3. Вып. 3. С. 67–84.
5. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
6. Eyduran E., Ozdemir T., Alarslan E. Importance of diagnostics in multiple regression analysis // Journal of Applied Sciences. 2005. Vol. 5, No 10. P. 1792–1796.

УДК 519.25

Староверова К. Ю.

Новая метрика для кластеризации временных рядов

Рекомендовано к публикации профессором Буре В. М.

1. Введение. В современном мире для решения многих задач используются методы машинного обучения [1, 2]. К таким задачам относятся кластеризация и классификация данных. Большую роль при проведении кластеризации и классификации объектов играет выбор меры различия объектов для построения матрицы расстояний, так как неточно подобранная мера повлечет за собой некорректные результаты. Большое количество работ посвящено именно разработке мер различия временных рядов: в [3] описано применение алгоритма динамической трансформации шкалы в кластерном анализе; использование коэффициентов автокорреляции, спектральных характеристик, вейвлет-коэффициентов отмечено в работе [4], более полный обзор методов представлен в статье [5].

Существующие меры различия дают хорошие результаты при работе с длинными рядами и зачастую применяют различные приемы по сокращению размерности, но при кластеризации коротких временных рядов такие меры могут давать недостаточно точные оценки близости объектов, что приводит к увеличению количества ошибок кластеризации. В статье предложен способ нахождения расстояния между временными рядами, который учитывает различие между статистическими характеристиками объектов кластеризации или классификации. Эксперименты на искусственных наборах данных показали, что выбор этой меры для кластеризации временных рядов оправдан, так как количество ошибок кластеризации оказалось меньше, чем при использовании многих других наиболее известных мер различия, время работы алгоритма оказалось также меньше.

2. Описание метода. Идея метода основана на том, чтобы не находить расстояние непосредственно между наблюдениями, а использовать определенные величины, характеризующие временной

Староверова Ксения Юрьевна – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: ksenygnirps@gmail.ru, тел.: +7(911)825-27-59

ряд. Выделим три группы таких величин: не зависящие от времени, описывающие динамику и определяющие изменчивость.

Перед вычислением характеристик, *не зависящих от времени*, преобразуем временные ряды, сохраняя различие между объектами в плоскости, но отображая значения наблюдений в отрезок $[0, 1]$, т. е. если $M = [n \times m]$ — это матрица n временных рядов длиной m , то преобразование определяется формулой

$$\overline{M} = \frac{M - \min M}{M - \max M}.$$

После этого по матрице \overline{M} для каждого временного ряда (строки) вычисляем матрицу характеристик $C = [n \times 5]$: столбцы $C_{*,1}$ — средних значений каждого ряда, $C_{*,2}$ — стандартных отклонений, $C_{*,3}$ — медиан, $C_{*,4}$ — минимумов, $C_{*,5}$ — максимумов. Здесь не учитывается зависимость данных от времени.

Для вычисления *различий в динамике* для каждого временного ряда строим четыре вектора, характеризующих его поведение. Перед этим выполним преобразование матрицы M , но в этот раз таким образом, чтобы максимальному значению каждого ряда соответствовала 1, а минимальному — 0:

$$\widetilde{M}_{k,*} = \frac{M_{k,*} - \min M_{k,*}}{\max M_{k,*} - \min M_{k,*}}, \quad (1)$$

где $M_{k,*}$ означает строку матрицы M с номером k . Определим первые разности ряда с лагом 1

$$\widetilde{F}_{k,t} = \widetilde{M}_{k,t+1} - \widetilde{M}_{k,t}, \quad (2)$$

где $k = \overline{1, n}$, $t = \overline{1, m-1}$.

Нормализация (1) позволяет не обращать внимание на разбросанность наблюдений в пространстве и исследовать только поведение ряда. Построим первую матрицу, каждая строка которой отражает динамику процесса, а именно, показывает временные отрезки, на которых не убывают значения

$$D_{k,t}^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{F}_{k,t} \geq 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k = \overline{1, n}$, $t = \overline{1, m - 1}$. Вторая матрица показывает, как временной ряд флуктуирует около среднего значения:

$$D_{k,t}^2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{M}_{k,t} \geq E(\widetilde{M}_{k,*}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k = \overline{1, n}$, $t = \overline{1, m}$. Третья и четвертая матрицы показывают большие отклонения от среднего значения, чем стандартное отклонение:

$$D_{k,t}^3 = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{M}_{k,t} \geq E(\widetilde{M}_{k,*}) + \text{Sd}(\widetilde{M}_{k,*}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$D_{k,t}^4 = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{M}_{k,t} \leq E(\widetilde{M}_{k,*}) - \text{Sd}(\widetilde{M}_{k,*}), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k = \overline{1, n}$, $t = \overline{1, m}$, $E(\widetilde{M}_{k,*})$ — среднее значение k -го временного ряда, $\text{Sd}(\widetilde{M}_{k,*})$ — его стандартное отклонение.

Характеристики, отвечающие за *изменчивость*, включают 15 величин, которые вычисляются для первых разностей ряда с лагом 1 и 2, их можно представить в виде матрицы $V = [n \times 15]$. Столбцы $V_{*,1}, V_{*,2}, V_{*,3}$ характеризуют среднюю скорость роста, спада и изменчивость ряда, а компоненты столбцов $V_{*,4}, V_{*,5}, V_{*,6}$ — первых разностей ряда. Столбцы $V_{*,7}, V_{*,8}$ показывают величину наибольшего роста и наибольшего спада, а столбцы $V_{*,9}, V_{*,10}$ — те же характеристики, но для первых разностей ряда. Последние пять столбцов матрицы V соответствуют минимальному значению, квартилям и максимальному значению первых разностей.

Введем функцию, которая определяет расстояние между характеристиками динамики. Пусть M_k — это строка матрицы M с номером k , т. е. временной ряд, тогда

$$\text{DIST}_{D_{yn}}(M_{k_1}, M_{k_2}) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^{m-1} D_{k_1,t}^i \oplus D_{k_2,t}^i + \sum_{i=2}^4 \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m D_{k_1,t}^i \oplus D_{k_2,t}^i \right),$$

где $D_{k_1,t}^i \oplus D_{k_2,t}^i$ — покомпонентное сложение по модулю 2. Расстояние между временными рядами складывается из трех величин: различия

между характеристиками, не зависящими от времени, характеристиками динамики и характеристиками изменчивости:

$$\begin{aligned} \text{DIST}_{CBM}(M_{k_1}, M_{k_2}) = & \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^5 (C_{k_1,i} - C_{k_2,i})^2} + \\ & + \beta \text{DIST}_{Dyn}(M_{k_1}, M_{k_2}) + \\ & + (1 - \alpha - \beta) \sqrt{\sum_{i=1}^{15} (V_{k_1,i} - V_{k_2,i})^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Влияние каждой величины регулируется с помощью коэффициентов α и β , причем $(\alpha + \beta) \in [0, 1]$. Расстояние, введенное в формуле (3), является метрикой.

3. Результаты. Идея использовать характеристики временных рядов для проведения кластеризации описана в [6], однако удовлетворительных результатов получено не было. Нами проведен эксперимент на том же наборе искусственных данных, который содержит 600 временных рядов, сгенерированных по 6 моделям.

Сравнивать метод с другими расстояниями можно по проценту правильно кластеризованных объектов P . В [6] этот показатель составил 47,3%. При кластеризации методом с коэффициентами $\alpha = 0,55$, $\beta = 0,1$ эффективность кластеризации $P = 85,2\%$. Эксперименты с другими методами библиотеки «TSclust» пакета R показали, что для этого набора данных предлагаемая в статье мера дает лучшие результаты. Для большей части методов $P < 60\%$ и только для алгоритма динамической трансформации шкалы P составил 84,7%, однако время построения матрицы расстояний составляет 445,68 с, что более чем в 25 раз превосходит время, затраченное предложенным методом.

Второй эксперимент проведен с искусственными данными библиотеки «TSclust». Набор содержит по три реализации шести моделей длиной 200. Эксперименты на этих данных уже проводились в [7]. Наилучшие результаты показали методы, основанные на спектральных характеристиках ряда: «INT.PER» $P = 88,9\%$ и «SPEC.LLR» $P = 83,3\%$. Новый метод показывает удовлетворительные результаты и находится на третьем месте по точности кластеризации: $P = 82,8\%$ при $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,3$.

Эксперименты показали, что применение новой меры различия при кластеризации временных рядов оправдано. Преимуществами являются простота и скорость работы алгоритма. Стоит также отметить, что данный метод учитывает и динамику временного ряда, и характер изменчивости, при этом предложенная мера различия является метрикой. Недостаток алгоритма заключается в подборе параметров α и β , поэтому естественным развитием становится разработка критериев по выбору этих коэффициентов. Однако постановка некоторых задач позволяет понять, какие характеристики оказываются более важными для кластеризации, в таком случае трудности с подбором коэффициентов не возникают.

Литература

1. Ложкин А. Кластерный анализ стран Европы по уровню безработицы // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 641–646.
2. Bure V. M., Staroverova K. Yu. Applying clustering analysis for discovering time series heterogeneity using Saint Petersburg morbidity rate as an illustration // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 4. С. 44–50.
3. Berndt D. J., Clifford J. Using dynamic time warping to find patterns in time series // KDD workshop on knowledge discovery in databases. 1994. P. 359–370.
4. Corduas M., Piccolo D. Time series clustering and classification by the autoregressive metric // Computational Statistics & Data Analysis. 2008. Vol. 52, No 4. P. 1860–1872.
5. Fu T. C. A Review on Time Series Data Mining // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2011. Vol. 24, No 1. P. 164–181.
6. Alcock R. J., Manolopoulos Y. Time-series similarity queries employing a feature-based approach // 7th Hellenic Conference on Informatics. 1999. P. 27–29.
7. Montero P., Vilar J. TSclust: An R package for time series clustering // Journal of Statistical Software. 2015. No 62.1. P. 1–43.

Экссессоподобные решения в игре банкротства

Рекомендовано к публикации доцентом Тарашиной С. И.

1. Введение. Данная работа посвящена исследованию игры банкротства и нахождению α - N -ядра, предложенного в работах [1, 2]. Наиболее часто можно встретить конфликт, который заключается в следующем: сумма требований превышает сумму имущества должника. Главный вопрос в таком случае: как оптимально распределить ликвидационную сумму между кредиторами? Рассматривая различные концепции решения, известные в теории игр, можно получить справедливое распределение выплат.

2. Проблема банкротства. Рассмотрим ситуацию банкротства некоторой компании K , которая оставляет за собой долг перед n кредиторами. Введем следующие обозначения. Пусть $E \in R_+$ — ликвидационная сумма компании, d_i — требование i -го кредитора. Определим проблему банкротства с n кредиторами как пару $(E, d) \in R_+^n \times R_+$, где $d = (d_1, \dots, d_n)$ — вектор претензий, такой что $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n$ и $0 \leq E \leq d_1 + \dots + d_n$. Решением проблемы банкротства является вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$, такой что $x_1 + \dots + x_n = E$, где x_i — выплата кредитору i . Существуют несколько правил дележа ликвидационной суммы: пропорциональное (P), правило случайного поступления (RA), правило ограниченных равных выплат (CEA), правило ограниченных равных убытков (CEL), правило Талмуда (T). Остановимся подробнее на последних трёх.

1. *Правило ограниченных равных выплат (CEA)* предлагает равные вознаграждения всем кредиторам, но при этом ни один из агентов не получит больше, чем его требование, т. е. $CEA_i(E, d) \equiv \min\{d_i, \varepsilon\}$, где ε выбирается в соответствии с равенством $\sum_{i \in N} \min\{d_i, \varepsilon\} = E$.

Хамзина Альфия Жалиловна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: gumboots@mail.ru, тел.: +7(981)821-79-74

2. *Правило ограниченных равных убытков (CEL)*. Альтернатива CEA. Правило обращает внимание на убытки от выплаченных требований (разность между претензией и полученной выплатой) и уравнивает их, не оставляя никого из кредиторов должником. $CEL_i(E, d) \equiv \max\{0, d_i - \varepsilon\}$, где ε выбирается в соответствии с равенством $\sum_{i \in N} \max\{0, d_i - \varepsilon\} = E$.
3. *Правило Талмуда (T)* предполагает применение правила CEA, если E меньше или равна половине суммарных требований, и правила CEL, если E больше половины суммы требований всех кредиторов:

$$T_i(E, d) \equiv \begin{cases} CEA_i\left(E, \frac{d}{2}\right), & \text{если } E \leq \sum_{i \in N} \frac{d_i}{2}, \\ \frac{d_i}{2} + CEL_i\left(E - \sum_{i \in N} \frac{d_i}{2}, \frac{d}{2}\right), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3. Кооперативная ТП-игра. Рассмотрим класс кооперативных игр n лиц с трансферабельными полезностями (ТП-игры). Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ конечное множество игроков. Коалицией будем называть любое непустое подмножество S из N . Под характеристической функцией игры будем понимать вещественнозначную функцию $v: 2^N \rightarrow R^1$, такую, что $v(\emptyset) = 0$. Пара (N, v) определяет кооперативную ТП-игру. Полагая, что игроки сформировали максимальную коалицию N , рассмотрим задачу распределения величины $v(N)$ между всеми игроками.

Множество допустимых векторов выигрышей в игре (N, v) определим как $X^*(N, v) = \{x \in R^N : x(N) \leq v(N), \text{ где } \sum_{i \in S} x_i, S \subseteq N\}$.

Множество эффективно-рациональных векторов выигрышей в игре (N, v) есть множество $X^0(N, v) = \{x \in R^N : x(N) = v(N)\}$.

Определение 1. Множество дележей $X(N, v)$ в игре (N, v) будем называть множеством эффективно-рациональных векторов выигрышей, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности, т. е. множество векторов $x \in X^0(N, v)$, таких, что $x_i \leq v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Приведем основные определения, относительно N -ядра [3, 4].

Определение 2. Для произвольного $x \in X^0(N, v)$ эксцессом

$e(x, v, S)$ коалиции $S \subseteq N$ будем называть величину, определяемую по правилу $e(x, v, S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$.

Определение 3. N -ядро относительно множества $X \subset X^0(N, v)$, обозначаемое $\mathcal{N}(X)$ или $\mathcal{N}(N, v, X)$, — множество векторов $x \in X$:

$$\mathcal{N}(X) = \{x \in X : \theta(e(x, v, S)_{S \subseteq N}) \preceq_{lex} \theta(e(y, v, S)_{S \subseteq N}),$$

где $\theta(e(y, v, S)_{S \subseteq N})$ — вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания. Если $X = X^0(N, v)$, то соответствующее $\mathcal{N}(X^0)$ называется пред- N -ядром игры (N, v) .

Определение 4. Сбалансированным набором коалиций называется набор \mathcal{B} коалиций, если существуют такие положительные числа $\lambda_S > 0$, $S \in \mathcal{B}$, что для всех $i \in N$ $\sum_{S \in \mathcal{B}: S \ni i} \lambda_S = 1$.

Приведем теорему Колберга [5], которая позволяет характеризовать пред- N -ядро с помощью сбалансированных наборов коалиций. Для произвольной игры (N, v) , её вектора выигрышей $x \in X^0(N, v)$ и числа $\gamma \in R$ обозначим через $\mathcal{B}_\gamma(x)$ следующий набор коалиций: $\mathcal{B}_\gamma(x) = \{S \subsetneq N \mid e(x, v, S) \geq \gamma\}$. Тогда справедлива теорема.

Теорема 1 [3]. *Для того чтобы $x \in \mathcal{N}(X^0)$, необходимо и достаточно, чтобы наборы $\mathcal{B}_\gamma(x)$ были пусты или сбалансированны для всех γ .*

Приведем определение α - N -ядра [1]. Рассмотрим игру (N, v) . Характеристическая функция двойственной игры (N, v^*) задается как $v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S)$, $S \subseteq N$.

Определим α -эксцесс коалиции $S \subseteq N$ относительно $x \in X^0(N, v)$ для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$

$$e^\alpha(x, v, S) = \alpha e(x, v, S) + (1 - \alpha)e(x, v^*, S).$$

Определение 5. Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ α - N -ядром относительно множества $X^0(N, v)$, обозначаемого $\mathcal{N}^\alpha(X^0)$, называется множество векторов $x \in X^0(N, v)$:

$$\mathcal{N}^\alpha(X^0) = \{x \in X : \theta(e^\alpha(x, v, S)_{S \subseteq N}) \preceq_{lex} \theta(e^\alpha(y, v, S)_{S \subseteq N}),$$

для всех $y \in X^0(N, v)$,

где $\theta(e^\alpha(y, v, S)_{S \subseteq N})$ — вектор эксцессов, расположенных в порядке невозрастания.

Приведем основные результаты, касающиеся α - N -ядра.

Теорема 2 [1]. Для любого $\alpha \in [0, 1]$ α - N -ядро кооперативной игры (N, v) совпадает с пред- N -ядром игры (N, v^α) , где

$$v^\alpha(S) = \alpha v(S) + (1 - \alpha)v^*(S).$$

Теорема 3 [1]. Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ α - N -ядро кооперативной игры (N, v) непусто и состоит из единственной точки. Обозначим этот единственный элемент через $\nu^\alpha(v)$.

4. Игра банкротства. В пункте 2 рассматривается проблема банкротства (E, d) и определен перечень правил, которые позволяют разделить ликвидационную сумму и каким-то образом (пусть и не полностью) удовлетворить претензии кредиторов. Перейдем к определению кооперативной игры банкротства [6]. Определим ценность коалиции S как сумму, которую она может получить без суда, т. е. выигрыш коалиции есть разность между ликвидационной суммой и суммой претензий кредиторов, не входящих в коалицию S . Таким образом, характеристическая функция игры банкротства (N, v) задается в виде

$$v = \begin{cases} E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i, & \text{если } E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i \geq 0, \\ 0, & \text{если } E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i < 0. \end{cases} \quad (1)$$

В ходе исследования рассматриваются различные значения ликвидационной стоимости E , а именно

$$E < d_1, E = d_1, d_1 < E < d_2, E = d_2, \dots, E = d_n, d_n < E < d_1 + \dots + d_n.$$

Построив кооперативную игру (1) и проанализировав решения, определена закономерность для α - N -ядер игры банкротства, на основе которой получена и сформулирована теорема.

Теорема 4. Пусть задана кооперативная игра (1). При этом $E \leq d_1$. Тогда α - N -ядра $\nu^\alpha(v)$ игры банкротства равны пред- N -ядру для любого $\alpha \in [0, 1]$, т. е. $\nu^\alpha(v) = (\frac{E}{n}, \dots, \frac{E}{n})$.

Доказательство теоремы основывается на нахождении пред- N -ядра игры (N, v^α) путем применения теоремы Колберга.

Согласно результатам Ауманна–Машлера [6] правило Талмуда совпадает с пред- N -ядром соответствующей кооперативной игры (1). Исходя из полученных результатов, для случая $E \leq d_1$ можно заметить, что решение по правилу Талмуда дает такой же результат, что и α - N -ядро для любого $\alpha \in [0, 1]$.

Пример. В качестве примера рассмотрим классическую задачу банкротства «Задача о трех вдовах». Умирает муж, у которого было три жены. Свадебный контракт предусматривает выплату 100 зуз первой жене, 200 зуз — второй, а третья должна получить 300 зуз. После себя муж оставил наследство стоимостью 100 зуз. Встает вопрос: как распределить оставленную сумму между жёнами, при этом удовлетворить претензии каждой?

В данной задаче в качестве кредиторов выступают жёны, т. е. $n = 3$. Определим проблему банкротства (E, d) , где $E = 100$, $d = (100, 200, 300)$. Как видим, $E < \sum_{i=1,3} d_i$. Применим правила, описанные в пункте 2, чтобы определить вектор выплат. Таким же образом построим кооперативную игру (1) и вспомогательную к ней (N, v^α) , чтобы найти α - N -ядро. Вычислительный алгоритм α - N -ядра представлен в работе [7]. Характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{12\}) = v(\{13\}) = v(\{23\}) &= 0, \\ v(\{123\}) &= 100; \\ v^\alpha(\{1\}) = v^\alpha(\{2\}) = v^\alpha(\{3\}) = v^\alpha(\{12\}) = v^\alpha(\{13\}) = v^\alpha(\{23\}) &= \\ &= (1 - \alpha) \cdot 100, \quad v^\alpha(\{123\}) = 100, \end{aligned}$$

для любого $\alpha \in [0, 1]$.

Различные решения игры представлены в таблице.

Таблица. Решения игры банкротства

Правило	Решение
Правило ограниченных равных выплат, СЕА	$(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$
Правило ограниченных равных убытков, СЕЛ	$(0, 0, 100)$
Правило Талмуда, Т	$(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$
α - N -ядро, $\alpha \in [0, 1]$	$(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$

Мудрецы Талмуда и α - N -ядро приписывают всем женам равные выплаты, считая данное решение справедливым.

Литература

1. Смирнова Н. В., Тарашнина С. И. Геометрические свойства $[0,1]$ - N -ядра в кооперативных ТП-играх // Математическая теория игр и её приложения. 2012. № 1. С. 55–73.
2. Tarachnina S. The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game // TOP. 2011. Vol. 19 (1). P. 150–166.
3. Печерский С. Л., Яновская Е. Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы. СПб.: Европейский университет в Санкт-Петербурге, 2004. 460 с.
4. Maschler M., Peleg. B., Shapley L. S. Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts // Mathematics of operations research. 1979. Vol. 4. P. 303–338.
5. Kohlberg E. On the nucleolus of a characteristic function game // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1971. Vol. 20. P. 62–66.
6. Aumann R. J., Maschler M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud // Journal of economic theory. 1985. Vol. 36. P. 195–213.
7. Бритвин С. В., Тарашнина С. И. Алгоритмы нахождения пред- N -ядра и SM -ядра в кооперативных ТП-играх // Математическая теория игр и её приложения. 2013. № 4. С. 14–32.

УДК 519.863

Чугунова А. О., Власова Т. В.

Динамическая устойчивость модифицированного муравьиного алгоритма для решения задачи маршрутизации вывоза и доставки товаров

1. Введение. В настоящее время многие компании стараются организовать перевозку грузов или товаров таким образом, чтобы уменьшить свои экономические затраты. В связи с этим формулируются задачи транспортной логистики или задачи маршрутизации (Vehicle Routing Problem) [1–3]. При решении таких задач необходимо построить маршрут для одного или нескольких транспортных средств (ТС), который будет оптимальным в соответствии с определенными критериями. Как правило, под оптимальным маршрутом понимается маршрут наименьшей длины или самый быстрый по времени. Обычно в задачах маршрутизации клиенты в сети разбиваются на две группы: «поставщики» и «потребители». Грузы должны быть доставлены от «поставщиков» «потребителям» с учетом некоторых ограничений, например, грузоподъемность ТС, порядок обслуживания клиентов и т. д.

2. Задача маршрутизации 1–1 вывоза и доставки товаров (One-to-one Pickup and Delivery Problem). В данной работе рассматривается задача маршрутизации с вывозом и доставкой товаров типа 1–1. Особенность этой задачи состоит в том, что клиенты обслуживаются парами, т. е. каждому «поставщику» в сети соответствует только один «потребитель», которому необходимо доставить товар. Таким образом, ТС может обслужить «потребителя» только после того, как будет посещен соответствующий ему «поставщик» (ограничение предшествования).

3. Постановка динамической задачи маршрутизации 1–1 вывоза и доставки товаров с зависимостью от времени суток. На рынке есть n пар «поставщик-потребитель». Известны координаты всех клиентов на плоскости, а также объемы товаров,

Чугунова Анна Олеговна – студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: askudneva@yandex.ru, тел.: +7(904)618-90-25

Власова Татьяна Владиславовна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: t.vlasova@spbu.ru, тел.: +7(812)428-41-19

которые необходимо доставить каждому из «потребителей». Обслуживание всех клиентов в сети происходит с помощью одного ТС с известной грузоподъемностью. Оно выезжает из депо и после посещения всех клиентов возвращается обратно. Для каждого «поставщика» и «потребителя» задан временной промежуток, в течение которого ТС должно посетить этот пункт. Если ТС приехало раньше, то оно вынуждено ждать начала временного окна, причем за время ожидания начисляется штраф. При этом в задаче учитывается время суток, в которое ТС движется из одного пункта в другой, поскольку оно влияет на скорость движения ТС (утром и вечером в «часы-пик» скорость ТС ниже скорости днем). Также необходимо учесть, что в некоторый произвольный момент времени может появиться одна или несколько новых пар «поставщик-потребитель», которых требуется обслужить.

Необходимо построить маршрут ТС, при котором суммарные затраты на перевозку грузов будут минимальными (оптимальный маршрут). При этом ТС может посетить каждого клиента только один раз с учетом предшествования, а общий объем загруженных товаров не должен превышать грузоподъемность ТС ни на одном из участков пути.

4. Математическая формулировка. Введем обозначения: 0 — депо; P — множество «поставщиков», $P = (1, \dots, n)$; D — множество «потребителей», $D = (n + 1, \dots, 2n + 1)$, $PD = P \cup D$; ω — множество временных интервалов, на которые разделен весь день, $\omega = (1, \dots, m)$; C_T — стоимость переезда ТС за единицу времени; C_W — стоимость ожидания ТС за единицу времени (штраф); Q — грузоподъемность ТС; p_i — спрос клиента i на вывоз (для «поставщиков»); d_i — спрос клиента i на доставку (для «потребителей»); $[e_i, l_i]$ — временное окно клиента i , $i \in \{0\} \cup PD$; c_{ij} — расстояние между клиентами i и j , $\forall i, j \in \{0\} \cup PD$; v_{ij}^m — скорость ТС при переезде от клиента i к клиенту j во время интервала m ; R_{ij}^m — время переезда от клиента i к клиенту j во время интервала m ; t_i — время, в которое ТС приезжает к клиенту i ; q_{ij} — загрузка ТС после посещения клиента i и до посещения клиента j ; S_m — начало временного интервала m ; E_m — окончание временного интервала m . Также введем булеву переменную x_{ij}^m : $x_{ij}^m = 1$, если ТС посещает клиента j после клиента i в интервале m , $x_{ij}^m = 0$ — в противном случае.

Таким образом, с помощью введенных обозначений можно запи-

сать рассматриваемую задачу в виде задачи нелинейного программирования:

$$\min_{x_{ij}^m} \left(C_T \sum_{i \in \{0\} \cup PD} \sum_{j \in \{0\} \cup PD} \sum_{m \in \omega} R_{ij}^m x_{ij}^m + C_W \sum_{i \in \{0\} \cup PD} \sum_{j \in \{0\} \cup PD} \sum_{m \in \omega} x_{ij}^m \max(e_j - t_i - R_{ij}^m, 0) \right); \quad (1)$$

$$q_{0j} = 0, \forall j \in PD; \quad (2)$$

$$0 \leq q \leq Q, \forall i, j \in \{0\} \cup PD; \quad (3)$$

$$t_j = \sum_{m \in \omega} x_{ij}^m (t_i + R_{ij}^m + \max(e_j - t_i - R_{ij}^m, 0)), \forall i, j \in \{0\} \cup PD; \quad (4)$$

$$e_i \leq t_i \leq l_i, \forall i \in \{0\} \cup PD; \quad (5)$$

$$\sum_{i \in \{0\} \cup PD} \sum_{m \in \omega} x_{ij}^m = 1, \forall j \in \{0\} \cup PD; \quad (6)$$

$$\sum_{i \in \{0\} \cup PD} \sum_{m \in \omega} x_{ij}^m - \sum_{i \in \{0\} \cup PD} \sum_{m \in \omega} x_{ji}^m = 0, \forall j \in \{0\} \cup PD; \quad (7)$$

$$t_{n+i} \geq t_i + R_{i,n+i}, \forall i \in P; \quad (8)$$

$$S_m x_{ij}^m \leq x_{ij}^m t_i \leq E_m x_{ij}^m, \forall i, j \in \{0\} \cup PD, \forall m \in \omega; \quad (9)$$

$$x_{ij}^m \in \{0, 1\}, \forall i, j \in \{0\} \cup PD. \quad (10)$$

Здесь (1) — это минимизируемая функция, которая представляет собой сумму двух величин: стоимости переезда ТС и стоимости ожидания. Равенство (2) обеспечивает то, что ТС выезжает из депо пустым. Ограничение (3) показывает, что ни на одном участке пути грузоподъемность ТС не превышает. Равенство (4) определяет момент времени, в который ТС начинает обслуживать узел j , а именно, он равен сумме момента времени выезда ТС от клиента i , длительности переезда от клиента i к клиенту j и длительности ожидания в узле j . Неравенство в ограничении (5) описывает временной промежуток, в который должно начаться обслуживание клиента. Равенство (6) гарантирует однократное посещение каждого клиента. Ограни-

чение (7) обеспечивает связность маршрута, т. е. если ТС приехало к клиенту, то оно от него и уедет. Неравенство (8) описывает условие предшествования. Ограничение (9) показывает, что фактическое время приезда ТС к клиенту будет находиться внутри выбранного промежутка времени.

5. Метод решения. Для решения данного типа задач обычно используются различные эвристические алгоритмы [4]. Для решения рассматриваемой задачи за основу взят модифицированный муравьиный алгоритм из работы [5]. Он позволяет находить близкие к оптимальному маршруты следования для ТС с началом пути как из депо, так и от какого-либо клиента. Таким образом, с помощью данного алгоритма можно строить маршруты (на основе ранее найденного) в случае добавления во время движения ТС новых пар «поставщик-потребитель».

6. Динамическая устойчивость. Пусть r — произвольное решение задачи с выездом ТС из депо (маршрут). Разобьем его на две части $r = r^- \cup r^+$. Через S^+ обозначим множество вершин пути r^+ , через \tilde{r} обозначим маршрут, полученный для вершин из S^+ с началом в точке s^0 и концом пути в депо. Пусть функция $C(r')$ определяет расходы ТС на прохождение пути r' .

Определение. Решение r называется *динамически устойчивым* или *состоятельным во времени* [6,7], если для любого его разбиения на r^- и r^+ выполняется $C(r^+) \leq C(\tilde{r})$.

Для проверки на динамическую устойчивость решений задачи, полученных при помощи модифицированного муравьиного алгоритма, использовались четыре набора из тестовых данных с 20, 30, 40 и 50 парами «поставщик-потребитель». Для каждого набора был определен r — оптимальный маршрут следования ТС при помощи алгоритма, основанного на работе [5]. Для каждого маршрута r были сформированы все возможные пары r^- и r^+ , для которых проверялось условие динамической устойчивости.

7. Заключение. Задачи маршрутизации вывоза и доставки товаров являются неотъемлемым звеном в логистической цепи [8] многих компаний. Поэтому их изучению уделяется повышенное внимание, особенно алгоритмам решения, устойчивым с течением времени. Проведенное исследование показало, что модифицированный муравьиный алгоритм [5] позволяет находить близкое к оптимальному

решение с динамической устойчивостью 94,8%.

Литература

1. Parragh S. N., Doerner K. F., Hartl R. F. A survey on pickup and delivery problems. Part II: Transportation between pickup and delivery locations // *Journal für Betriebswirtschaft*. 2008. Vol. 58(2). P. 81–117.
2. Лежнина Е. А., Балькина Ю. Е., Власова Т. В. Модели кооперации в сфере транспорта // *Научные труды SWorld*. 2013. Т. 1. № 4. С. 44–47.
3. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2014. № 2. С. 121–130.
4. Cordeau F., Laporte J., Ropke S. Recent models and algorithms for one-to-one pickup and delivery problems // *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* / Ed. by B. Golden, S. Raghavan, E. Wasil. New York: Springer, 2008. P. 327–357.
5. Скуднева А. О., Власова Т. В. Применение модифицированного муравьиного алгоритма для решения нестационарной задачи маршрутизации вывоза и доставки // *Процессы управления и устойчивость*. 2016. Т. 3. № 1. С. 700–704.
6. Захаров В. В., Мугайских А. В. Динамическая адаптация эвристических алгоритмов для задач маршрутизации транспорта // *Логистика: современные тенденции развития. Материалы XV Международной научно-практической конференции*. 2016. С. 131–134.
7. Захаров В. В., Мугайских А. В. О задаче маршрутизации транспорта с учетом трафика // *Транспорт России: проблемы и перспективы — 2016. Материалы Международной научно-практической конференции*. 2016. Т. 1. С. 218–222.
8. Лежнина Е. А., Балькина Ю. Е., Власова Т. В. Методы теории игр в логистике // *Научные труды SWorld*. 2012. Т. 23. № 3. С. 81–83.

УДК 519.862.6

Ямщиков С. А., Гулидова А. В.

Нечетко-множественный анализ среднего класса населения страны

Рекомендовано к публикации профессором Колбиным В. В.

1. Введение. На данный момент в социологии и экономике не существует единого подхода к определению критериев выделения среднего класса (СК). Используются разные: от самоопределения и профессии до заработной платы и уровня образования. Но в абсолютном большинстве случаев критерии выделения среднего класса имеют либо лингвистическое представление, либо подразумевают размытые границы класса. В работах [5, 6] одними из ведущих факторов, участвующих в определении СК, являются показатели потребления, которые наиболее точно связывают СК с его экономической ролью.

В данной работе рассмотрено представление среднего класса как нечеткого множества. Такое описание СК решает проблему четкого разделения населения на классы, поскольку четкая классификация в реальных условиях оказывается затруднительной.

2. Нечеткое множество «Средний класс». Рассмотрим задачу нахождения нечеткого множества, характеризующего СК страны.

Определение 1. *Нечетким множеством типа 1 (НМТ1) [3] F будем называть множество упорядоченных пар вида*

$$\{u \mid \mu^F(u)\}, \quad u \in U,$$

где $\mu^F : U \rightarrow [0, 1]$ — функция принадлежности F [3].

Введем НМТ1 «Средний класс» — M :

$$\{i \mid \mu^M(i)\}, \quad i \in N, \quad (1)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество типов домохозяйств, которые в рамках модели будут иметь ту или иную степень принадлежности к СК.

Ямщиков Семен Алексеевич — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: splaff8@gmail.com, тел.: +7(981)831-46-31

Гулидова Алина Викторовна — студент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: alinagulidova@mail.ru, тел.: +7(911)213-25-64

Определим два критерия причисления к СК, которые выразим через НМТ1:

1. «Средний класс 1» — $M_1 : \{i \mid \mu^{M_1}(i)\}$, $i \in N$. Характеризует принадлежность к СК как соответствие стандартам потребления.
2. «Средний класс 2» — $M_2 : \{i \mid \mu^{M_2}(i)\}$, $i \in N$. Характеризует принадлежность к СК в момент времени t как изменение степени принадлежности к СК по отношению к моменту времени $t - 1$, исходя из соответствия стандартам изменения располагаемых ресурсов.

Тогда (1) можно представить как пересечение критериев 1 и 2:

$$M = M_1 \cap M_2 : \mu^M(i) = \mu^{M_1}(i) \wedge \mu^{M_2}(i) = \min \{\mu^{M_1}(i), \mu^{M_2}(i)\}. \quad (2)$$

Такой подход к отысканию решения предложен в работе [1].

2.1. Стандарты потребления. Обратимся к НМТ1 «Средний класс 1». Для оценки соответствия стандартам потребления семьями i -го типа будем использовать модель нечеткого экспертного управления, примеры которой описаны в [4]. Для этого введем

Определение 2. *Лингвистической переменной L* [2] будем называть набор $\{N^L, T^L, V^L, K^L\}$, где N^L — имя переменной, T^L — терм-множество значений переменной, V^L — область определения функций принадлежности термов из K^L , K^L — множество функций принадлежности термов из T^L .

Перейдем к рассмотрению модели нечеткого экспертного управления степенью принадлежности семьи i -го типа к СК $\mu^{M_1}(i)$. Далее опишем все этапы нечеткой продукции:

1. *Выходная переменная.* Введем одну управляемую лингвистическую переменную $\mu^{M_1}(i) = \{N^{\mu^{M_1}(i)}, T^{\mu^{M_1}(i)}, V^{\mu^{M_1}(i)}, K^{\mu^{M_1}(i)}\}$, где
 - $N^{\mu^{M_1}(i)} =$ «Степень принадлежности семьи i -го типа к среднему классу»;
 - $T^{\mu^{M_1}(i)} = \{t_1^{\mu^{M_1}} = \text{«очень низкая»}, t_2^{\mu^{M_1}} = \text{«низкая»}, t_3^{\mu^{M_1}} = \text{«высокая»}, t_4^{\mu^{M_1}} = \text{«очень высокая»}\}$;
 - $V^{\mu^{M_1}(i)} = [0, 1]$;
 - $K^{\mu^{M_1}(i)}(v) = \{\mu_s^{\mu^{M_1}(i)}(v)\}$, $s = \overline{1, 4}$, $v \in V^{\mu^{M_1}(i)}$.

2. *Входные переменные.* Пусть $B = \{1, \dots, b\}$ — множество некоторых видов благ, потребляемых населением. Введем $b + 1$ управляющих лингвистических переменных:

$S_j = \{N^{S_j}, T^{S_j}, V^{S_j}, K^{S_j}\}$, $j \in B$, где

- N^{S_j} = «Доля расходов на потребление благ j -го вида от располагаемых ресурсов семьи»;
- $T^{S_j} = \{t_1^{S_j} = \text{«очень низкая»}, t_2^{S_j} = \text{«низкая»}, t_3^{S_j} = \text{«средняя»}, t_4^{S_j} = \text{«высокая»}, t_5^{S_j} = \text{«очень высокая»}\}$;
- $V^{S_j} = [S_j^{\min}, S_j^{\max}]$;
- $K^{S_j}(v) = \{\mu_k^{S_j}(v)\}$, $k = \overline{1, 5}$, $v \in V^{S_j}$.

$E = \{N^E, T^E, V^E, K^E\}$, где

- N^E = «Качественность благ»;
- $T^E = \{t_1^E = \text{«очень низкая»}, t_2^E = \text{«низкая»}, t_3^E = \text{«средняя»}, t_4^E = \text{«высокая»}, t_5^E = \text{«очень высокая»}\}$;
- $V^E = [E^{\min}, E^{\max}]$;
- $K^E(v) = \{\mu_l^E(v)\}$, $l = \overline{1, 5}$, $v \in V^E$.

3. *База продукционных правил вывода.* Определим структуру потребительского бюджета семьи, принадлежащей к СК, с помощью набора лингвистических правил, которые будут иметь следующий вид:

$$\text{ЕСЛИ } E = t_l^E \text{ И } S_j = t_k^{S_j}, \text{ ТО } \mu^{M_1}(i) = t_s^{\mu^{M_1}(i)}. \quad (3)$$

База правил полностью определяется экспертной матрицей \bar{D} , составленной на основе [5, 6].

Пусть булева переменная R_{jkl_s} означает вхождение или невхождение правила (3) в базу:

$$R_{jkl_s} = \begin{cases} 1, & d_{lk} = s, \forall j \in L, \\ 0, & d_{lk} \neq s, \forall j \in L. \end{cases}$$

4. *Композиционный шах-тип вывод.* Применим аппарат нечеткого управления, описанный в [4].

Определение 3. Композиционным правилом вывода [4] будем называть НМТ1 F :

$$\left\{ u \mid \mu^F(u) = \bigvee_{i \in I} \mu_i^{x_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_i^{x_n}(u_n) \wedge \mu_i^F(u) \right\}, \quad (4)$$

где I — множество продукционных правил вывода, x_k — входная лингвистическая переменная: $u_k \in V^{x_k}$, $k = 1, \dots, n$.

Тогда, приняв \min за \wedge , а \max за \vee , функцию принадлежности выходной переменной будем находить по формуле (4):

$$\begin{aligned} \mu^{\mu^{M_1(i)}}(v_1, v_2, v_3) &= \\ &= \max_{jkl_s} \min \left\{ \mu_k^E(v_1), \mu_l^{S_j}(v_2), \mu_s^{\mu^{M_1(i)}}(v_3), R_{jkl_s} \right\}. \end{aligned}$$

5. Дефаззификация. Для получения четкого значения $\mu^{M_1(i)}$ необходимо провести дефаззификацию. Из возможных методов дефаззификации выберем метод левого модального значения:

$$\mu^{M_1(i)} = \mu^{M_1}(v_1(i), v_2(i)) = \arg \min_{v_3 \in V^{\mu^{M_1(i)}}} \max \mu^{\mu^{M_1(i)}}(v_1(i), v_2(i), v_3). \quad (5)$$

2.2. Стандарты изменения располагаемых ресурсов. Рассмотрим сперва выпуклую комбинацию двух нечетких множеств:

$$\bar{\mu}(u) = \xi \mu^{F_1}(u) + (1 - \xi) \mu^{F_2}(u), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (6)$$

Представим

$$\begin{aligned} \mu^{F_1}(u) &= \min \{1, \mu^{F_3}(u) + \eta\}, \\ \mu^{F_2}(u) &= \max \{0, \mu^{F_3}(u) - \eta\}. \end{aligned}$$

Тогда (6) примет вид

$$\bar{\mu}(u) = \xi \min \{1, \mu^{F_3}(u) + \eta\} + (1 - \xi) \max \{0, \mu^{F_3}(u) - \eta\}, \quad (7)$$

где $\xi \in [0, 1]$.

Обратимся к НМТ1 «Средний класс 2». Будем искать его вид как элемент выпуклой комбинации вида (7):

$$\mu^{M_2(i)} = \mu^{M_2}(\xi(i), \mu_{t-1}^M(i)) = \xi(i) \min \{1, \mu_{t-1}^M(i) + \eta\} +$$

$$+(1 - \xi(i)) \max \{0, \mu_{t-1}^M(i) - \eta\}, \quad (8)$$

где μ_{t-1}^M — функция принадлежности НМТ1 «Средний класс» за предыдущий промежуток времени, η — максимальная величина, на которую может измениться степень принадлежности к СК за минимальный промежуток времени, $\xi(i)$ характеризует изменение принадлежности семьи к СК по сравнению с прошлым моментом времени.

Введем стандарты изменения располагаемых ресурсов для определения $\xi(i)$, для чего используем рассмотренную в пункте 2.1 модель нечеткого экспертного управления:

1. *Выходная переменная.* Введем одну управляемую лингвистическую переменную $\xi(i) = \{N^{\xi(i)}, T^{\xi(i)}, V^{\xi(i)}, K^{\xi(i)}\}$, где
 - $N^{\xi(i)}$ = «Изменение домохозяйством степени принадлежности к СК»;
 - $T^{\xi(i)} = \{t_1^{\xi(i)} = \text{«уменьшение»}, t_2^{\xi(i)} = \text{«отсутствует»}, t_3^{\xi(i)} = \text{«увеличение»}\}$;
 - $V^{\xi(i)} = [0, 1]$;
 - $K^{\xi(i)}(v) = \{\mu_z^{\xi(i)}(v)\}$, $z = \overline{1, 3}$, $v \in V^{\xi(i)}$.
2. *Входная переменная.* Введем одну управляющую лингвистическую переменную $\delta I = \{N^{\delta I}, T^{\delta I}, V^{\delta I}, K^{\delta I}\}$, где
 - $N^{\delta I}$ = «Изменение количества располагаемых ресурсов домохозяйства»;
 - $T^{\delta I} = \{t_1^{\delta I} = \text{«сильное уменьшение»}, t_2^{\delta I} = \text{«уменьшение»}, t_3^{\delta I} = \text{«отсутствует»}, t_4^{\delta I} = \text{«увеличение»}, t_5^{\delta I} = \text{«сильное увеличение»}\}$;
 - $V^{\delta I} = [\delta I^{min}, \delta I^{max}]$;
 - $K^{\delta I}(v) = \{\mu_w^{\delta I}(v)\}$, $w = \overline{1, 5}$, $v \in V^{\delta I}$.
3. *База продукционных правил вывода.* Построим набор лингвистических правил, связывающих изменение количества располагаемых ресурсов семьи с изменением ее принадлежности к СК. Правила будут иметь следующий вид:

$$\text{ЕСЛИ } \delta I = t_w^{\delta I}, \text{ ТО } \xi(i) = t_z^{\xi(i)}. \quad (9)$$

База правил полностью определяется экспертным вектором D . Пусть булева переменная R_{wz} будет означать вхождение или невхождение правила (9) в базу:

$$R_{wz} = \begin{cases} 1, & d_w = z, \\ 0, & d_w \neq z. \end{cases}$$

4. **Композиционный \max - \min вывод.** Воспользуемся формулой (4):

$$\mu^{\xi(i)}(v_1, v_2) = \max_{wz} \min \left\{ \mu_w^{\delta I}(v_1), \mu_z^{\xi(i)}(v_2), R_{wz} \right\}.$$

5. **Дефаззификация.** Четкое значение найдем методом центра максимумов. Тогда

$$\begin{aligned} \xi(i) = \xi(v_1(i)) = & \frac{\arg \min_{v_2 \in V^{\xi(i)}} \max \mu^{\xi(i)}(v_1(i), v_2)}{2} + \\ & + \frac{\arg \max_{v_2 \in V^{\xi(i)}} \max \mu^{\xi(i)}(v_1(i), v_2)}{2}. \end{aligned}$$

3. Реализация модели на данных выборки. Согласно (2), (5) и (8), объект моделирования (1) примет вид

$$\{i \mid \mu_i^M(i) = \min \{ \mu^{M_1}(v_1(i), v_2(i)), \mu^{M_2}(\xi(v_3(i)), \mu_{i-1}^M(i)) \} \}. \quad (10)$$

Рассмотрим статистические данные [7]:

- средние располагаемые ресурсы семьи i -го типа на одного члена семьи в году $t - I^i(t)$, $i \in N = \{1, \dots, 10\}$, $t = \overline{2008, 2016}$;
- средние затраты семьи i -го типа на блага j -го вида на одного члена семьи в году $t - q_j^i(t)$, $i \in N = \{1, \dots, 10\}$, $t = \overline{2008, 2016}$, $j \in L = \{1, \dots, 13\}$.

Модель (10) имеет большое количество параметров в описании

лингвистических переменных, и не только. Пусть коэффициенты модели определяются из [7] следующим образом:

- $S_j^{\min} = \min_{it} \frac{q_j^i(t)}{I^i(t)}$, $S_j^{\max} = \max_{it} \frac{q_j^i(t)}{I^i(t)}$;
- $E^{\min} = \min_{ijt} \frac{\partial \ln q_j^i(t)}{\partial \ln I^i(t)}$, $E^{\max} = \max_{ijt} \frac{\partial \ln q_j^i(t)}{\partial \ln I^i(t)}$, если q_j^i рассматривать, как функцию аргумента I^i ;
- $\delta I^{\min} = \min_{it} \frac{I^i(t)}{I^i(t-1)}$, $\delta I^{\max} = \max_{it} \frac{I^i(t)}{I^i(t-1)}$;
- функции принадлежности $\mu_k^E(v)$, $\mu_l^{S_j}(v)$, $\mu_w^{\delta I}(v)$, $\forall k, l, w$ определим как ломаные, проходящие через точки, полученные в результате применения алгоритма нечеткой кластеризации c-means [8] на данных $\left\{ \frac{\partial \ln q_j^i(t)}{\partial \ln I^i(t)} \right\}$, $\forall i, j, t$, $\left\{ \frac{q_j^i(t)}{I^i(t)} \right\}$, $\forall i, t$ и $\left\{ \frac{I^i(t)}{I^i(t-1)} \right\}$, $\forall i, t$, соответственно.

Остальные параметры определим экспертным путем:

- функции принадлежности $\mu_s^{\mu^{M_1(i)}}(v)$ и $\mu_z^{\xi}(v)$, $\forall s, z$, определим через треугольные функции принадлежности [2] (см. рис. 1);

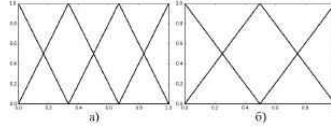


Рис. 1. Вид функций из а) $K^{\mu^{M_1(i)}}$ и б) K^{ξ}

- $\eta = 0,1$;
- ввиду того, что определение (10) требует знания $\mu_{t-1}^M(i)$, пусть $\mu_{2008}^M(i) = \mu_{2008}^{M_1}(i)$.

Тогда μ_t^M будет вычисляться по формуле

$$\mu_t^M(i) = \begin{cases} \mu^{M_1} \left(\frac{\partial \ln q_j^i(t)}{\partial \ln I^i(t)}, \frac{q_j^i(t)}{I^i(t)} \right), & t = 2008, \\ \min \left\{ \mu^{M_1} \left(\frac{\partial \ln q_j^i(t)}{\partial \ln I^i(t)}, \frac{q_j^i(t)}{I^i(t)} \right), \mu^{M_2} \left(\xi \left(\frac{I^i(t)}{I^i(t-1)} \right), \mu_{t-1}^M(i) \right) \right\}, & t = \overline{2009, 2016}, \end{cases}$$

и иметь вид, приведенный на рис. 2, где пунктирной линией выделены границы возможных значений $\mu^{M_2}(i)$, квадратными маркерами — $\mu^{M_2}(i)$, круглыми маркерами — $\mu^{M_1}(i)$, жирной линией — $\mu^M(i)$.

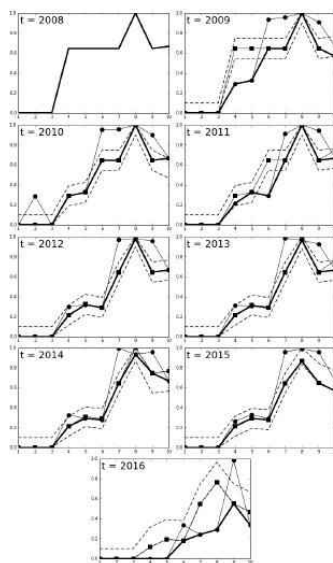


Рис. 2. Вид функций $\mu_t^M(i)$, $t = \overline{2008, 2016}$.

Как видно из рис. 2, в последние годы средний класс в РФ теряет как качественно, так и количественно, причем за 2016 год в структуре СК произошел коренной перелом.

4. Заключение. Метод определения среднего класса, приведенный в работе, позволяет работать с критериями выделения СК, выраженными в виде лингвистических правил. Также стоит заметить, что список критериев может быть сколь угодно расширен по замыслу эксперта, работающего с моделью, в том числе и критериями, имеющими размытые границы. Такой подход к интерпретации

социологических понятий может лечь в основу моделирования крупных систем, описанных в трудах социологов и экономистов, что существенно улучшит качество моделей.

Литература

1. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976. Т. 4. С. 172–215.
2. Колбин В. В. Теория рисков. Часть 2. СПб.: Изд-во ВВМ. 2012. С. 150–158.
3. Олизаренко С. А., Капранов В. А., Перепелица А. В. Интервальные нечеткие множества типа 2. Терминология, представление, операции // Системы обработки информации. Харьков: ХУПС, 2011. Вып. 2 (92). С. 39–45.
4. Перфильева И. Г. Приложения теории нечетких множеств // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». М.: ВИНТИ, 1990. С. 83–151.
5. Петухов В. В. Структура, возможности и модели потребления среднего класса // Средний класс в современной России: 10 лет спустя. Аналитический доклад ИС РАН. 2014. С. 52–68. [Электронный ресурс]: URL:http://www.isras.ru/analytical_report_sredny_klass_10_let_spustya.html (дата обращения: 17.09.2016).
6. Чикирева В. М. Универсалистские нормы и стандарты потребления как конституирующие элементы глобального среднего класса // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2007. Т. 13. № 2. С. 644–652.
7. Федеральная служба государственной статистики. Доходы, расходы и потребление домашних хозяйств [Электронный ресурс]: URL:http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1140096812812 (дата обращения: 21.09.2016).
8. Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику [Электронный ресурс]: URL:<http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php> (дата обращения: 20.11.2016).

Contents

1. Mathematical theory of control processes	11
<i>Agafonov Yu. O.</i> Minimization of transient process time in a nonlinear observer	11
<i>Vladimirova L. V., Setina I. A.</i> Locally Optimal Designs Search for Exponential Regression	16
<i>Voloshin M. V.</i> On the asymptotic stability of a class of nonlinear difference switched systems with saturation	22
<i>Gornak D. D.</i> The use of sparse matrix algorithms for calculation the Lyapunov matrix	27
<i>Grunina V. N.</i> On the relationship between the solutions of the second Zolotarev problem and one polynomial problem	33
<i>Ezhova E. V.</i> On the solvability of one filtering problem in the analytical form	38
<i>Levina E. G.</i> Robustness of the Lyapunov condition for time-delay systems	43
<i>Nurislamova E. F.</i> Research of solutions of differential equations with linear delay and homogeneous right-hand side	49
<i>Pezhirov I. A.</i> The Solution of the Second Zolotarev's problem for $n=4$	54
<i>Tamasyan G. S., Chumakov A. A.</i> One modification of the method of hypodifferential descent in the problem for finding a point of an ellipsoid nearest to the origin	59
<i>Fedorova D. S.</i> Lagrange problem on the simplex volume	64
<i>Tsimfer S. A.</i> The Nelder–Mead method in the problem of estimating the parameters of a linear difference-differential system	69
<i>Tamasyan G. S., Shulga G. S.</i> On the limiting point L'Huilier tetrahedron	75
2. Mathematical methods in mechanics and physics	80
<i>Buzin A. E.</i> Charge and electric moments in metallocenes: a study using effective core potentials	80
<i>Bykova D. S., Ermolaeva N. N.</i> Calculation of the coefficient of hydraulic resistance and the total heat transfer coefficient according to the experimental data	85
<i>Vinogradova E. M., Kalaturskaja E. V.</i> Field diode system of a cylindrical shape calculation	91

<i>Davydenko A. A., Kondratyuk A. S., Starkov V. N.</i> On the options to achieve the heliopolar region by the spacecraft.....	95
<i>Domanskaya T. O., Mal'kov V. M., Mal'kova Yu. V.</i> The stress state analysis of a plane with interface crack for semi-linear material.....	101
<i>Dremov L. S., Peregudin S. I.</i> Mathematical modeling in the problems of nautical hydrotechnics.....	106
<i>Drivotin O. I., Starikov D. A.</i> Numerical solution of the optimal control problem with application of the second order methods...	113
<i>Evaeva E. S.</i> The effect of the double discrimination on the distribution of null-dimensional defects.....	118
<i>Elaeva M. V.</i> Calculation of the optimum pipe thickness under pressure under internal corrosion conditions.....	123
<i>Ermolaeva N. N., Shalygina A. M.</i> Calculating characteristics of unsteady flow of the gas mixture transported by sea gas pipelines, taking into account the terrain slopes.....	128
<i>Efimov M. R., Vinogradova E. M.</i> Mathematical modeling of the field cathode system.....	134
<i>Efimova P. A., Alferov G. V., Ivanov G. G.</i> Stabilizing of program motion of a control object with it is elastic the associated elements.....	139
<i>Kobysheva N. V.</i> Free convective viscous fluid flow.....	144
<i>Kovrizhnykh N. A., Vinnichuk N. N.</i> Study of stability of structural methods for ODE integration.....	149
<i>Kozlov A. A., Krasun S. V.</i> Motion of space robot manipulator in environment with obstacles.....	154
<i>Lebedev N. A.</i> On the distance between the Keplerian orbits of celestial bodies.....	160
<i>Marnopolskaya E. S., Krivovichev G. V.</i> Investigation and optimization of the properties of high-order finite difference schemes for the advection equation.....	165
<i>Maslava T. A., Vinogradova E. M.</i> Mathematical modeling of the diode system with dielectric layers.....	171
<i>Mikheev S. A., Krivovichev G. V.</i> Analysis of the methods of body force action in the lattice Boltzmann method.....	175
<i>Moiseev V. I.</i> Runge–Kutta methods for neutral delay-differential equations in MATLAB.....	181
<i>Moiseev O. S., Gorbunov V. I.</i> The system of copying control robot-manipulator.....	186

<i>Najdenova M. A.</i> Research of the spacecraft periodic motion in the collinear libration point L_1 neighbourhood	192
<i>Peregudin S. I., Peregudina E. S., Kholodova S. E.</i> Dynamics of an electrically conducting liquid with allowance for geostrophic effects.....	199
<i>Petrukhin R. R., Mal'kova Yu. V.</i> Stress analysis of composite plate with an elliptic hole by finite element method.....	203
<i>Povalyaev N. D., Moiseev O. S., Gorbunov V. I.</i> Computer and mathematical model of a mobile three-wheeled robot	208
<i>Prokhorova E. A., Krivovichev G. V.</i> The numerical solution of two-dimensional problems of hydrodynamics using implicit schemes for the system of kinetic equations.....	213
<i>Saakyan A. T., Vinogradova E. M.</i> The diode system on the basis of the knife-edge cathode modeling.....	219
<i>Selikhova A. V., Starkov V. N., Stepenko N. A.</i> Simulation of the smoke of cities from forest fires.....	223
<i>Semenyuk A. E., Mal'kova Yu. V.</i> The dynamics of the metal plate lying on the rubber layer	229
<i>Starikova A. V., Vinogradova E. M.</i> Modeling of a multipole system with electrodes of arbitrary shape	234
<i>Suratov V. A., Matrosov A. V.</i> The method of initial functions in analysing a clamped plate	238
<i>Fedorov V. M., Sharlay A. S.</i> Application of a modified A* algorithm for constructing an obstacle traversal path by a wheeled robot.....	245
<i>Zhao Sh.</i> Algorithm for calculating the stress state of a plate with an elliptical hole in MATLAB.....	251
<i>Shuvalov G. M., Kostyrko S. A.</i> Second-order perturbation method for elastic solid with slightly curved boundary	256
3. Mathematical models of medical and biological systems	261
<i>Kayumova D. Sh., Shirobokov M. V.</i> Finding the optimal set of features in the problem of recognition of coding and non-coding regions of DNA	261
<i>Kirillova A. A.</i> Construction of an immune response model for skin melanoma.....	266
<i>Maslov A. A., Lepikhin T. A.</i> Adaptive filtering of network interference of an electrocardiac signal	272

<i>Mashchenkova Yu. N.</i> Analysis of medical data using contingency tables.....	278
<i>Mishnev M. S.</i> Modeling the spread of the influenza virus.....	283
<i>Savva E. K.</i> The analysis of statistical dependencies supressiruet factors in cutaneous melanoma.....	288
<i>Stegaru D. A.</i> Dynamic model of the B-lymphocyte population with skin melanoma.....	293
<i>Streltsova A. A.</i> Algorithm for identification of compartmental model parameters in positron emission tomography cardiac studies.....	298
4. Information and computer technologies.....	304
<i>Avdeeva A. S.</i> Recognition of mathematical formulas and expressions.....	304
<i>Arzumanyan N. K.</i> The application of SVD method in collaborative filtering.....	309
<i>Bebyakov A. M.</i> Development of the information system for automation of biomedical research by means of cloud technology.....	315
<i>Belezeko A. A., Kuchumov R. I., Fatkina A. I., Gankevich I. G.</i> An application of parallel programming technologies in the problem of wave modelling in the MASNUM WAVE program.....	321
<i>Bendrikovskii A. Ya.</i> Detection and classification of objects in an image using neural network algorithm YOLO.....	326
<i>Verkhoturov M. S., Zavadskiy S. V.</i> Servomotor Digital Control on the Diagnostic Complex MTU-17.....	332
<i>Gavrikov A. A., Sveshnikova S. Yu., Gankevich I. G.</i> Neural networks in task of road traffic prediction.....	339
<i>Glushkova E. D.</i> Algorithm of preprocessing of images of digital devices' schematics.....	343
<i>Grigoryan D. A.</i> Algorithm of surgery justification based on data mining of patients group.....	347
<i>Gusev D. A., Glazyrin A. G., Gorbunov V. I.</i> Computer simulation of the environment in robotic complexes.....	351
<i>Dvoryanchikova V. E.</i> Organization of external and internal interactions multi-agent systems.....	356
<i>Zavadskij S. V., Razuvaev S. S.</i> Modeling of quadrocopter digital control subsystems.....	361

<i>Zaitseva O. O.</i> Semantic analysis for naive qualification modeling in theory of criminal law assessments.....	367
<i>Zubakov A. V.</i> Generating an image header based on neural network technology.....	372
<i>Kalinin V. I.</i> Approach to traffic forecasting using the modeling of multidimensional time series.....	377
<i>Kamalov M. V., Martynov R. S.</i> Comparative analysis of online learning to rank algorithms.....	382
<i>Kasenkov N. A., Krasnopol'skaya E. V., Lepikhin T. A.</i> Construction of a hexacopter behavior model in an emergency using fuzzy logic.....	389
<i>Knyazkin Ya. V.</i> Spectral synthesis of \mathcal{H}_2 -optimal fault detection observer.....	394
<i>Kovalenko L. A., Salimov T. A., Gorbunov V. I.</i> Detecting objects using a vision system.....	401
<i>Krasovskaya I. K.</i> Identification of the model parameters of the marine vessel under external perturbations.....	406
<i>Krasun S. V., Yamshchikov S. A., Kravchenko L. A.</i> Texas Holdem players fuzzy clusterisation.....	412
<i>Malykh E. A.</i> Automatic face verification using Convolutional Neural Networks and Triplet Probabilistic Embedding.....	417
<i>Maslovskaya M. A.</i> Comparison of topic modeling methods.....	423
<i>Maschinskiy N. S., Pushko F. A.</i> Automation of test signals generation for digital circuits with memory elements.....	428
<i>Menshchikov M. A., Lepikhin T. A.</i> Applying MapReduce to static analysis.....	433
<i>Nechiporuk A. A., Lepikhin T. A., Scherbinin A. V.</i> Modeling and control of quadcopter.....	445
<i>Ogurtsova A. S.</i> Clustering Russian news with graph algorithms.....	452
<i>Pavlov I. N.</i> Non-recursive algorithm for the construction of independent circuits.....	458
<i>Pavlov Yu. A.</i> Construction of speech recognition command algorithm.....	462
<i>Penkrat A. O.</i> Stereo vision methods, modification of AD-Census algorithm.....	467
<i>Piskunova A. S.</i> Automatic spam detection for Android smartphones.....	472
<i>Prus E. A.</i> Automatic recommender system for online resources.....	477
<i>Rashchenko D. V., Rashchenko Yu. V.</i> Object detection methods based on characteristic points for the TLD algorithm.....	481

<i>Smirnov V. A.</i> Optimization of calculations in the problem of determining submarine above-water flooding parameters.....	486
<i>Smirnov K. V., Khmel D. S.</i> Visualization of solution of Black–Scholes equation for asian option price	492
<i>Storablevtcev N. V.</i> Analysis of potential acceleration of CFD-computations using OpenCL	496
<i>Stuchenkov A. B., Ulitina I. A.</i> Construction of images using projections and the anatomical atlas	503
<i>Taranova O. V.</i> Comparison of methods of unsupervised learning for hierarchical feature extraction in convolutional neural networks	508
<i>Toskin N. D., Sevostyanov R. A.</i> Recognition of the ballistic projectile trajectory in the remote laboratory	514
<i>Turenko A. A.</i> Comparative analysis of tools for collecting user discussion data in social networks	519
<i>Faustov B. A.</i> Search for similar images	524
<i>Kholod N. G.</i> Two earth surface’s images aligning	529
<i>Tsaplina D. D.</i> Forecasting budget of medical institutions using modern data analysis methods	534
<i>Tsyppushkin A. V.</i> Algorithm of searching crime attributes in text	538
<i>Yurevich V. S.</i> Comparative analysis of the effectiveness of machine learning algorithms (based on Parkinson’s disease)	543
<i>Churikov N.</i> Experience of using machine learning methods in document processing system	548
<i>Zgonnikova I. S.</i> Statistical analysis of dynamical features of human control in virtual stick balancing.....	555
5. Control problems in social and economical systems ...	560
<i>Araslanov A. A.</i> The problem of the equilibrium distribution of resources.....	560
<i>Babshukova E. V.</i> Forecasting per capita income in Saint Petersburg	564
<i>Bakuteyev A. N.</i> Game theory approach to water supply optimization	569
<i>Bikdashva A. M.</i> The berth allocation problem for a container port	576
<i>Boyko A. V.</i> The application of the adaptive method to the optimal allocation of capital investments in the industry.....	581

<i>Bubyakina G. I., Plekhanova T. M.</i> A game-theoretic approach to problem of cost reduction for the transport network of Yakutia	587
<i>Gavrilina A. V.</i> Acceptability of sequence at the car factory	592
<i>Elfimov A. N.</i> Stationary regime for a service system with two streams of requirements	597
<i>Zvyagintseva A. A.</i> Evaluation of synergy in mergers and acquisitions on example of PJSC «Rosneft» and PJSC «Bashneft»	601
<i>Ivanov N. G.</i> Horizon estimation based on the trigonometric Chebyshev polynomial	606
<i>Kamenskaja E. A., Shikhova K. A.</i> The task of distribution of actors on geopolitical projects on the basis of the Gale–Shapley algorithm	611
<i>Kirjanen A. I., Logosha E. S.</i> Influence of capital turnover time on the stability of equilibrium point of two competing firms	617
<i>Kolesova A. A.</i> Algorithms for the investment programs correction	625
<i>Kurnosykh Z. A., Gubar E. A.</i> Modeling of the evolutionary game taking into account the network structure	631
<i>Lapin E. D.</i> The analysis of the behavior of the model of endogenous growth of Lucas by varying parameters	636
<i>Lozkins A.</i> The pricing model in logistic problem	642
<i>Malafeyev O. A., Rylow D. S.</i> Corrupt and legal investments dynamic model	647
<i>Malakhova A. P.</i> On the dynamic stability of optimality principles in a differential game with random duration	652
<i>Nikitina A. A.</i> About statistical analysis methodology of banking risks	657
<i>Reut A. V.</i> Approximation of the optimal schedule of the average income tax rates	662
<i>Rinchinov R. T., Parfenov A. P.</i> The multicriteria problem of production optimal allocation in the network	667
<i>Sinitsyn D. D.</i> The use of the Kataoka model for analyzing the results of the presidential elections in the United States	672
<i>Skovorodina T. V., Gubar E. A.</i> Modelling of epidemic process based on NIMFA model	676
<i>Smirnov D. S.</i> The multi-armed bandit problem with an expert ..	681
<i>Spiridonov D. Yu.</i> Analysis of the socio-economic indicators using methods of applied statistics	686

<i>Staroverova K. Yu.</i> A novel dissimilarity measure for time series clustering	691
<i>Khamzina A. Zh.</i> Excess-based solution concepts in the bankruptcy problem	696
<i>Chugunova A. O., Vlasova T. V.</i> The dynamic stability of modified ant colony optimization for solving pickup and delivery problem	702
<i>Yamschikov S. A., Gulidova A. V.</i> Fuzzy analysis of the middle class of the population of the country	707
Contents	716
Author index	724

Именной указатель

Авдеева А. С.	304	Гаврилина А. В.	592
Агафонов Ю. О.	11	Ганкевич И. Г.	321, 339
Алферов Г. В.	139	Глазырин А. Г.	351
Арасланов А. А.	560	Глушкова Е. Д.	343
Арзуманян Н. К.	309	Горбунов В. И.	186, 208, 351, 401
Бабшукowa Е. В.	564	Горнак Д. Д.	27
Бакутеев А. Н.	569	Григорян Д. А.	347
Бебяков А. М.	315	Грунина В. Н.	33
Белезеко А. А.	321	Губар Е. А.	631, 676
Бендриковский А. Я.	326	Гулидова А. В.	707
Бикташева А. М.	576	Гусев Д. А.	351
Бойко А. В.	581	Давыденко А. А.	95
Бубякина Г. И.	587	Дворянчикова В. Э.	356
Бузин А. Э.	80	Доманская Т. О.	101
Быкова Д. С.	85	Дремов Л. С.	106
Верхогуров М. С.	332	Дривотин О. И.	113
Винничек Н. Н.	149	Еваева Е. С.	118
Виноградова Е. М.	91, 134, 171 219, 234	Ежова Е. В.	38
Владимирова Л. В.	16	Елаева М. В.	123
Власова Т. В.	702	Елфимов А. Н.	597
Волошин М. В.	22	Ермолаева Н. Н.	85, 128
Гавриков А. А.	339	Ефимов М. Р.	134
		Ефимова П. А.	139

Завадский С. В.	332, 361	Красовская И. К.	406
Зайцева О. О.	367	Красун С. В.	154, 412
Звягинцева А. А.	601	Кривовичев Г. В.	165, 175, 213
Зубаков А. В.	372	Курносых З. А.	631
Иванов Г. Г.	139	Кучумов Р. И.	321
Иванов Н. Г.	606	Лапин Е. Д.	636
Калатурская Э. В.	91	Лебедев Н. А.	160
Калинин В. И.	377	Левина Е. Г.	43
Камалов М. В.	382	Лешихин Т. А.	272, 389, 433, 445
Каменская Е. А.	611	Логоша Е. С.	617
Касенков Н. А.	389	Ложкин А.	642
Каюмова Д. Ш.	261	Малафеев О. А.	647
Кириллова А. А.	266	Малахова А. П.	652
Кириянен А. И.	617	Малых Е. А.	417
Князькин Я. В.	394	Мальков В. М.	101
Кобышева Н. В.	144	Малькова Ю. В.	101, 203, 229
Коваленко Л. А.	401	Марнопольская Е. С.	165
Коврижных Н. А.	149	Мартынов Р. С.	382
Козлов А. А.	154	Маслов А. А.	272
Колесова А. А.	625	Маслова Т. А.	171
Кондратюк А. С.	95	Масловская М. А.	423
Костырко С. А.	256	Матросов А. В.	238
Кравченко Л. А.	412	Мащенкова Ю. Н.	278
Краснопольская Е. В.	389	Мащинский Н. С.	428

Меньшиков М. А.	433	Разуваев С. С.	361
Михеев С. А.	175	Ращенко Д. В.	481
Мишнев М. С.	283	Ращенко Ю. В.	481
Моисеев В. И.	181	Реут А. В.	662
Моисеев О. С.	186, 208	Ринчинов Р. Ц.	667
Найденова М. А.	192	Рылов Д. С.	647
Нечипорук А. А.	445	Саакян А. Т.	219
Никитина А. А.	657	Савва Е. К.	288
Нурисламова Э. Ф.	49	Салимов Т. А.	401
Огурцова А. С.	452	Свешникова С. Ю.	339
Павлов И. Н.	458	Севостьянов Р. А.	514
Павлов Ю. А.	462	Селихова А. В.	223
Парфенов А. П.	667	Семенюк А. Е.	229
Пежиров И. А.	54	Сетина И. А.	16
Пенкрат А. О.	467	Синицын Д. Д.	672
Перегудин С. И.	106, 199	Сковородина Т. В.	676
Перегудина Э. С.	199	Смирнов В. А.	486
Петрухин Р. Р.	203	Смирнов Д. С.	681
Пискунова А. С.	472	Смирнов К. В.	492
Плеханова Т. М.	587	Спиридонов Д. Ю.	686
Поваляев Н. Д.	208	Стариков Д. А.	113
Прохорова Е. А.	213	Старикова А. В.	234
Прус Е. А.	477	Старков В. Н.	95, 223
Пушко Ф. А.	428	Староверова К. Ю.	691

Стегару Д. А.	293	Холодова С. Е.	199
Степенко Н. А.	223	Цаплина Д. Д.	534
Сторублевцев Н. В.	496	Цимфер С. А.	69
Стрельцова А. А.	298	Цыпушкин А. В.	538
Стученков А. Б.	503	Чжао Ш.	251
Суратов В. А.	238	Чугунова А. О.	702
Тамасян Г. Ш.	59, 75	Чумаков А. А.	59
Таранова О. В.	508	Шальгина А. М.	128
Тоскин Н. Д.	514	Шарлай А. С.	245
Туренко А. А.	519	Широбоков М. В.	261
Улитина И. А.	503	Шихова К. А.	611
Фаткина А. И.	321	Шувалов Г. М.	256
Фаустов Б. А.	524	Шульга Г. С.	75
Федоров В. М.	245	Щербинин А. В.	445
Федорова Д. С.	64	Юревич В. С.	543
Хамзина А. Ж.	696	Ямщиков С. А.	412, 707
Хмель Д. С.	492	Churikov N.	548
Холод Н. Г.	529	Zgonnikova I. S.	555

Для заметок

Ежегодное научное издание

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Том 4(20)

Труды 48-й международной научной конференции
аспирантов и студентов

Компьютерная верстка: *М. Н. Смирнов, М. А. Смирнова, Т. Е. Смирнова*
Редакторы текста на английском языке: *А. С. Ерёмин, М. А. Смирнова*

Подписано в печать 20.07.17
Усл. печ. л. 42,4. Тираж 220 экз.

198504, Россия, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35