



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

ТРУДЫ СЕМИНАРА  
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2015–2016 гг.



ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
2017

ББК 22.25  
Т78

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),  
канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Архипова* (отв. секретарь) (СПбГУ),  
PhD, ass.prof. *Е. И. Атрощенко* (Университет Чили, Сантьяго),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),  
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (СПбГУ),  
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (ВГУ, Беларусь),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП),  
д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Университет Ольборга, Дания),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик* (СПбГУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
математико-механического факультета  
С.-Петербургского государственного университета*

Т78

**Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2015–2016 гг. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2017. — 151 с.  
ISSN 2218-7421**

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов. Книга предназначена для исследователей, специализирующихся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды.

ISSN 2218-7421

ББК 22.25

© С.-Петербургский  
государственный  
университет, 2017

Спонсор издания — Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы "МАВИС"

# РОБОТ ПРОТИВ АСТЕРОИДА

Смольников Б. А.

Обсуждаются перспективы создания космического буксира для транспортировки тех астероидов, которые могут представлять опасность для Земли. Этой проблеме в последние годы уделяется все большее внимание как в технической литературе, так и в СМИ, кинофильмах, в общественных дискуссиях и диспутах. Несмотря на большое количество публикаций, трактующих различные схемы борьбы с астероидной опасностью, до сих пор не выявилась наиболее целесообразная схема, пригодная для конкретной технической реализации. Поэтому целью настоящей работы является некоторый компромиссный вариант, не требующий непосредственного участия человека в проводимых технологических операциях и использующий лучистую энергию Солнца. Этот вариант основан на схеме гарпунного захвата астероида и последующей буксировки его на безопасную орбиту путем использования электрореактивного двигателя с малой тягой или посредством солнечного паруса. В обоих вариантах центральным элементом движительной системы буксира является круговая пленочная мембрана с зеркальным покрытием радиусом в несколько километров. Эта мембрана может служить как грандиозным солнечным парусом, так и батареей солнечных элементов для запитывания электрореактивных двигателей. Чтобы придать этой мембране необходимую изгибную жесткость, она на внешнем краю крепится к торообразному ободу, внутри которого находится сверхпроводящий токовый контур, создающий электромагнитный распор токового кольца, а вместе с ним и всей мембраны. В центре мембраны находится астеробуксир, от которого к кольцевому тору тянутся нитевые спицы, образующие несущую конструкцию и скрепляющие ее в единый диск, подобный велосипедному колесу. На периферии этого диска располагаются электрореактивные двигатели системы ориентации.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема астероидной опасности в последние годы привлекает все более широкое внимание ученых и инженеров в разных странах мира [1]. Объясняется это тем, что в результате резко возросшего объема различных программ исследования ближнего и дальнего

---

Доклад на семинаре 8 апреля 2014 г.  
© Смольников Б. А., 2017

космоса было обнаружено немалое количество астероидов, чьи орбиты могут со временем приближаться или даже пересекаться с орбитой Земли. И хотя при этом выявилась вполне ожидаемая закономерность, гласящая, что чем астероид крупнее по своим размерам и массе, тем меньше вероятность его близкого сближения с Землей или с земной орбитой, общий уровень оценок астероидной опасности по данным этих исследований стал постепенно увеличиваться. Естественно, что стал нарастать и круг теоретических исследований, посвященных активному противодействию этой опасности средствами современной науки, техники и технологии. В основном эти работы разделились на два русла – взрывное разрушение астероида или изменение его орбиты. Первый путь фактически не решает поставленную задачу, т.к. вместо одного, пусть даже очень массивного астероида возникает целое облако менее массивных фрагментов, причем центр масс этого облака будет следовать по прежней, опасной для Земли орбите. Поэтому второй путь представляется более перспективным, хотя и требует разработки и использования значительно более сложной и гибкой техники и технологии. В существующей литературе этому пути уделено довольно большое внимание, хотя предлагаемые при этом решения, как правило, выглядят крайне малопривлекательными [2, 3, 4].

## 2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ АСТЕРОИДА

В качестве главного препятствия здесь выступает собственное вращение астероида вокруг своего центра масс, что мешает его буксировке посредством длинного троса, а также затрудняет функционирование установленных на поверхности астероида тяговых реактивных двигателей (их тягу необходимо непрерывно изменять для создания постоянно направленного вектора силы). При этом упускается из виду, что все астероиды (как, впрочем, и почти все прочие небесные тела) совершают не произвольное собственное вращение, а вращение перманентное, т.е. вращение вокруг одной оси, сохраняющей постоянное направление как в теле астероида, так и в инерциальном пространстве. Этот режим собственного вращения

обусловлен тем хорошо известным в механике фактом, что любое свободно вращающееся твердое тело под действием внутренних сил объемного трения с течением времени стремится перейти в режим перманентного вращения с постоянной угловой скоростью вокруг своей главной центральной оси с максимальным моментом инерции. Именно такое вращение обладает минимальным уровнем кинетической энергии при ненулевом моменте количества движения и поэтому оно обладает вековой устойчивостью. Из этого следует, что на поверхности астероида всегда имеются два неподвижных полюса, т.е. две точки, которые не вращаются вокруг перманентной оси. Именно эти точки (или их продолжение вдоль перманентной оси) могут стать точками крепления буксировочного троса (разумеется, посредством использования в них шарнира Гука) для создания тяговой силы постоянного направления. Из этого свойства полюсов астероида вытекает следующая несложная схема организации тросовой буксировки опасного астероида в любом направлении.

### 3. ПРЕДЛАГАЕМАЯ СХЕМА ОРГАНИЗАЦИИ БУКСИРОВКИ

В целом, предлагаемая схема выглядит следующим образом. Тяговый астеробуксир, предназначенный для перевода астероида с его начальной орбиты, опасно приближающейся к земной гелиоцентрической орбите, на другую, более удаленную орбиту, обладающую более высоким перигелием, приблизившись к астероиду, должен оптически исследовать режим его собственного вращения и определить расположение полюсов на его поверхности. После этого делается выбор полюса, наиболее удобного для его технологического использования. Далее буксир приближается к выбранному полюсу и производит в него выстрел реактивным “гарпуном”, стремясь к тому, чтобы ось гарпуна была сонаправлена с перманентной осью вращения астероида. Если выстрел прошел удачно, так что гарпун плотно вошел в грунт поверхности астероида, и при этом шарнир Гука на оси “гарпуна” допускает свободное вращение буксировочного троса вокруг перманентной оси, то буксир удаляется на некоторое расстояние и включает свою тягу, натягивая трос с силой  $P$  в нужном направлении и переходя ко второй фазе операции – опе-

рации перевода астероида на новую орбиту (рис. 1). Однако здесь возникает важный вопрос о том, как будет влиять действие буксирной тяги  $P$  на вращательное движение астероида и не случится ли здесь “наматывания” троса на астероид.

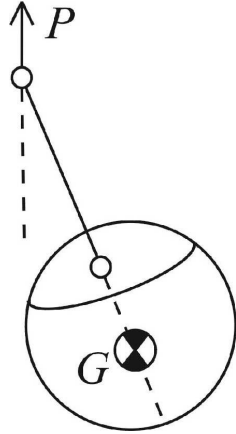


Рис. 1. Однополюсная буксировка.

Чтобы убедиться в том, что этого не произойдет, допустим гипотетически, что астероид обладает осесимметричным эллипсоидом инерции, причем его ось симметрии и является осью перманентного вращения до того момента времени, когда начала действовать буксирная тяга. Эта сила, очевидно, создаст некоторый момент сил инерции корпуса астероида относительно его центра масс  $G$ , стремящийся повернуть ось его собственного вращения. А эта ситуация оказывается в точности аналогичной поведению быстровращающегося волчка, ось вращения которого соприкоснулась с опорной поверхностью в поле сил тяжести. При мягком соприкосновении ось волчка, как известно из теории гироскопов, начнет прецессировать вокруг линии действия опорной реакции, так что вращение астероида в поле возникших сил инерции будет воспроизводить движение гироскопического маятника в поле сил тяжести. Общий характер такого движения хорошо известен – это лагранжева прецессия, па-

раметры которой определяются величиной силы  $P$ , скоростью перманентного вращения  $\omega$  и углом нутации  $\theta$ . При мягком нарастании силы  $P$  лагранжева прецессия будет регулярной, при которой угол  $\theta$  и скорость прецессии будут постоянными. Если же сила  $P$  возникает скачкообразно, то наряду с прецессией появятся и нутационные колебания оси симметрии астероида.

Если бы астероид представлял собой абсолютно твердое тело, то описанный режим лагранжевой прецессии с примесью нутационных колебаний продолжался бы сколь угодно долго. Однако под действием поля переменных относительных ускорений (т.н. мета-ускорений) во всем объеме астероида “заработает” механизм внутреннего (объемного) трения, преобразующий механическую энергию нанокосебаний отдельных молекул и атомов в тепловую энергию инфракрасного излучения. Макроскопическим следствием этого процесса станет постепенное снижение уровня кинетической энергии лагранжева движения при сохранении его кинетического момента. Используя математическую модель колебаний маятника Лагранжа [5], нетрудно показать, что, в конце концов, этот диссипативный эволюционный процесс закончится переходом астероида в новый режим перманентного вращения, перманентной осью которого станет тяговый трос, т.е. вектор силы  $P$ , под действием которой и начнется постепенный переход астероида на новую гелиоцентрическую орбиту.

Обращаясь теперь к общему случаю, когда тело астероида не обладает никакой симметрией (ни динамической, ни геометрической), можем отметить, что первая стадия операции – “загарпунивание” – проводится абсолютно так же, как и в случае его симметрии. Однако как только астеробуксир натянет трос с силой  $P$ , астероид перейдет из режима перманентного вращения в режим типа общего вращения тяжелого твердого тела, отдаленно напоминающий режим движения в случае Лагранжа. А далее начинается эволюционный переход этого двойного вращения в режим перманентного вращения вокруг оси тягового троса. Подробное описание этого вращения (задачи Штауде-Млодзеевского) дается, например, в книге [5].

В обоих рассмотренных случаях тяговая сила  $P$  выполняет две функции — она увеличивает кинетическую энергию поступатель-



ного движения астероида и вместе с тем разворачивает в нужном направлении ось его постоянного вращения, на что, разумеется, затрачивается дополнительная энергия двигателя астеробуксира. Этого перерасхода энергии можно избежать, если вместо однополюсной буксировки астероида (при которой тяговый трос крепится лишь на одном полюсе астероида), прибегнуть к его двухполюсной буксировке. В этом случае используются два троса, шарнирно закрепляемые на обоих полюсах, а затем на достаточном удалении от центра астероида сцепляются друг с другом и крепятся далее к корпусу астеробуксира (рис. 2).

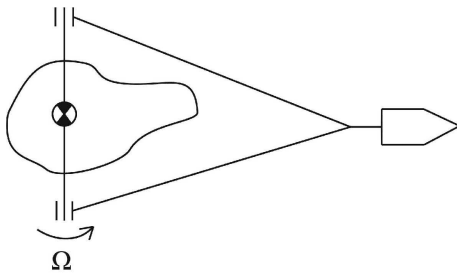


Рис. 2. Двухполюсная буксировка.

В этой схеме нет необходимости поворачивать в пространстве постоянную ось астероида, так что весь процесс буксировки будет происходить в одном чисто постоянном режиме вращения без возникновения эволюционных переходных процессов. Недостатком же двухполюсного режима является удвоение операций установки мачт и тросов на полюсах.

Что касается этих установочных операций, то они состоят из сравнительно простых элементов, допускающих их полную автоматизацию без использования прямого участия человека (кроме супервизорного телеконтроля и управления). Это позволяет сделать весь астеробуксир полностью безэкипажным космическим роботом, пригодным для многократного использования.

#### 4. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТЯГОВОГО УСИЛИЯ

После выхода тросовой связки двух тел (буксир и астероид) на штатный режим буксировки возникает естественный вопрос о создании необходимой силы тяги  $P$ , действующей на протяжении недель, месяцев и даже лет, в зависимости от массы астероида и требуемого приращения его импульса  $\Delta K = \int_0^T P dt$ .

Здесь возникают всего лишь два варианта. Первый из них – это использование на астеробуксире реактивных двигателей малой тяги, второй же вариант – это использование т.н. “солнечного паруса”. Рассмотрим их по порядку. Ясно, что термохимические реактивные двигатели (РД), развивающие высокую тягу (от сотен кг до десятков тонн) непригодны для астеробуксира по причине их невысокого ресурса суммарного импульса  $\Delta K$ . Значительно большим ресурсом обладают двигатели малой тяги, среди которых наиболее перспективными оказались электрореактивные двигатели (ЭРД) [6]. Их активной разработкой и испытаниями занимаются в настоящее время многие лаборатории и университеты мира, так что в ближайшие годы и десятилетия ЭРД вполне могут стать основным инструментом для решения задач орбитального и межорбитального маневрирования. Источником энергообеспечения для этих двигателей могут служить либо бортовые ядерные реакторы, либо панели солнечных батарей. Однако в последнем случае возникает новая проблема – проблема разворачивания и обслуживания в космическом пространстве огромных площадей мягких и гибких поверхностей, поглощающих или отражающих потоки солнечных лучей. Эта же проблема возникает и во втором варианте создания малой тяги, основанном на использовании солнечного паруса. Как показывают оценочные расчеты, площадь таких поверхностей должна измеряться сотнями и тысячами квадратных метров (для установки панелей солнечных батарей) и десятками или сотнями квадратных километров (при использовании их в качестве солнечных парусов). Совершенно очевидно, что управление раскрытием, положением и ориентацией таких поверхностей, обладающих практически нулевой изгибной жесткостью, является совершенно невыполнимой задачей для современного технического инструментария. А разработка и применение такого инструмента-

рия совершенно необходимы для реального освоения и использования околоземного космического пространства. Фактически это означает “перенос” целой научно-технической дисциплины “строительная механика” в условия вакуума, невесомости и мегамасштабных габаритов отдельных элементов строительной технологии. В частности, при сборке и монтаже крупногабаритных элементов в безопорном пространстве невозможно добиться приемлемой изгибной жесткости как всей конструкции, так и ее отдельных элементов, используя только механические силовые свойства балок, пластин, поверхностей. В некоторых конструкциях можно использовать пневматические (надувные) элементы, создающие распорные усилия. Однако это многократно утяжеляет конструкцию и к тому же делает ее крайне ненадежной. Поэтому представляется целесообразным для создания крупногабаритных жесткостных элементов воспользоваться схемой т.н. “электромагнитного распора”. Суть этой схемы состоит в том, что если взять круговой металлический контур и пропустить по нему постоянный электрический ток, то за счет взаимного электромагнитного отталкивания токовых элементов, расположенных на противоположных концах каждого диаметра кольца, возникает распределенная по всему кольцу распирающая его сила, величина которой зависит как от величины протекающего тока, так и от радиуса самого кольца. Эта распорная сила, очевидно, увеличивает жесткость кольца, так что если натянуть на контур этого кольца некоторую мембрану (пленку), то оно приобретет определенную жесткость, и его можно перемещать и поворачивать как довольно твердое тело. И этот эффект вполне можно использовать в космической строительной механике для придания изгибной жесткости большим плоским поверхностям, каковыми и являются солнечные батареи и паруса.

Конструктивно это токовое кольцо целесообразно заключить внутрь мягкой торообразной оболочки, распираемой газовым наполнителем и имеющей зеркально отражающее покрытие для защиты кольца от перегрева солнечным излучением. В этих условиях кольцо может быть сверхпроводящим и потреблять минимум электроэнергии, несмотря на величину протекающего тока. Тем самым вся конструкция тягового модуля оказывается совершенно автономной и способной функционировать месяцы и даже годы (рис. 3).

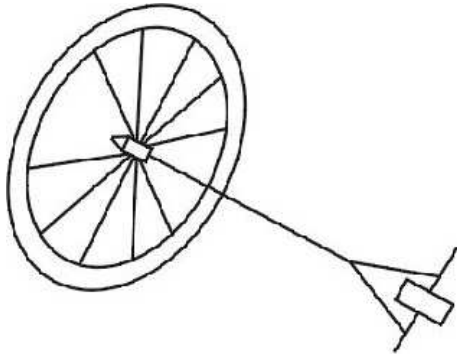


Рис. 3. Общий вид буксира с мембраной.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе сказанного можно предложить следующую схему конструкции крупногабаритного солнечного паруса с круговым распорным кольцом. Само кольца представляет собой круговой тор, внутри которого проходит сверхпроводящий проводник, способный пропускать ток в сотни и тысячи ампер. Для изоляции проводника от нагрева его солнечными лучами поверхность тора является зеркальной (как внутри, так и снаружи). К этому опорному торовому кольцу крепится зеркальная рабочая поверхность паруса, часть которой может быть покрыта солнечными элементами, питающими внутренний сверхпроводник. Конкретные параметры такого паруса (его радиус, величину тока в сверхпроводнике и пр.) следует выбирать исходя из массы астероида и требуемой продолжительности его буксировки. Так как эта продолжительность может измеряться месяцами и даже годами, наличие экипажа на астеробуксире крайне нежелательно. Поэтому все перечисленные операции могут быть автоматизированы, т.е. выполняться в режиме супервизорного управления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштэн В.А. Метеоры, метеориты, метеороиды. — М.: изд-во "Наука",

1987. – 173 с.
2. Багров А.В. Создание системы космической защиты от астероидов и метеоритов. — Научный журнал “Колонизация космоса”. 2013. Т.№5. С. 1–7.
  3. Izzo D., Olympio J., Yam C.H. Asteroid Deflection Theory: fundamentals of orbital mechanics and optimal control, 1st IAA Planetary Defense Conference, 2009.
  4. 2006 Near-Earth Object Survey and Deflection Study. December 28, 2006. NASA HQ, PA&E.
  5. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела. — СПб: изд-во СПбГУ. — 532 с.
  6. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой: Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением. — М.: изд-во “Машиностроение”, 1987. — 208 с.

# ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКИХ ТЕЛ С КОНТУРАМИ, БЛИЗКИМИ К КРУГОВЫМ

Г.В. БУНИН, Г.А. КУТЕЕВА

В работе изучается потенциальное обтекание твердого тела, по форме близкого к круговому цилиндру радиуса  $R = 1$ , потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданными давлением и скоростью на бесконечности ( $p_\infty$  и  $V_\infty$  соответственно) и плотностью  $\rho$ . При помощи вариационного принципа конформных отображений в общем случае получен комплексный потенциал обтекания контуров, близких к круговым, совпадающий с потенциалом М.А. Лаврентьева. Проведено сравнение результатов с классическим решением задачи обтекания кругового цилиндра и с частным случаем поставленной задачи. Вычислен главный вектор сил, действующий на тело, и главный момент, если главный вектор сил равен нулю.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье применяется вариационный принцип конформных отображений М.А. Лаврентьева к задачам плоской гидромеханики обтекания конкретных тел. В классических учебниках ([1],[2],[3]) по гидродинамике приводятся точные решения обтекания некоторых плоских тел с использованием конформных отображений. Начиная с 1930-х годов развиваются приближенные методы конформных отображений, например, в работах Л. Канторовича, В. Крылова, Т. Теодорсена и других [4], [5], [6], [7]. Одним из приближенных методов является метод М.А. Лаврентьева (вариационный принцип конформных отображений [8]). Используя метод конформных отображений и вариационный принцип, сформулированный Линделефом ([10], стр. 582), можно перенести эти результаты на деформированные тела, близкие к каноническим.

Вариационный принцип конформных отображений обсуждается в литературе, включая современную ([11],[12],[13]). В работах [14], [15], [16] вариационный метод М.А. Лаврентьева применяется к задаче гидроупругости, а именно, к задаче плоского обтекания

потенциальным потоком оболочки близкой к круговой (в [14], [15]) или эллиптической (в [16]). В данной работе приводятся приближенные аналитические формулы для комплексного потенциала при обтекании жестких контуров вида

$$r = 1 + \varepsilon \sum_n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Здесь  $(r, \vartheta)$  — полярные координаты,  $a_n, b_n$  — вещественные постоянные,  $\varepsilon$  — малый параметр ( $|\varepsilon| < 1$ ). В качестве конкретных видов контуров, для которых даны также приближенные формулы давления, взяты  $r = 1 + a \cos \vartheta$ ,  $r = 1 + a \cos(2\vartheta)$ ,  $r = 1 + a(\cos(2\vartheta) + k \cos(4\vartheta))$ . Приводятся вычисления для обтекания подобных контуров с циркуляцией.

## 2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Рассмотрим бесконечно длинное твердое тело, близкое по форме к цилиндрическому, обтекаемое идеальной несжимаемой жидкостью. Выясним характер обтекания тела жидкостью и получим давление на тело.

### 2.1. Вычисление конформного отображения

Рассматривается плоская задача обтекания произвольного контура, близкого к круговому, идеальной несжимаемой жидкостью. Примем круговой контур за недеформированную область  $D$  с границей  $C$  в комплексной плоскости  $z = x + iy$ . Уравнение границы деформированного контура  $\tilde{C}$  в плоскости в полярных координатах  $(r, \vartheta)$  будет иметь вид

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + \delta(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi, \quad (1)$$

где  $\delta(\vartheta)$  — дважды дифференцируемая гладкая функция, такая, что  $|\delta(\vartheta)| < \varepsilon$ ,  $|\delta'(\vartheta)| < \varepsilon$ ,  $|\delta''(\vartheta)| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — малое число. Конформное отображение деформированной области на единичный круг вычисляется в [8] исходя из вариационного принципа конформных отображений, извещного также как принцип Линделефа. Этот принцип

утверждает, что, если рассматривать отображения на единичный круг областей, содержащих фиксированную точку  $z_0$ , то при вдавливании внутрь границы области: 1) все линии уровня сжимаются; 2) растяжение в точке  $z_0$  увеличивается; 3) растяжение в точках границы, оставшихся неподвижными, уменьшается; 4) в точках наибольшей деформации растяжение увеличивается более чем в  $1/\lambda$  раз, где  $\lambda$  — наибольшая деформация контура. Конформное отображение деформированной области на единичный круг имеет вид [8]:

$$f(z, \tilde{C}) = z \left( 1 + \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right). \quad (2)$$

Предполагается, что отклонение границы контура от окружности  $\delta(\vartheta)$  задано с помощью тригонометрического ряда:

$$\delta(\vartheta) = \varepsilon (a_0 + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + \dots), \quad (3)$$

Если считать, что контур симметричен как относительно оси  $OX$ , так и относительно оси  $OY$ , то в разложении (3) останутся только слагаемые при косинусах четных дуг. Как известно, [8]

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = z^n$$

для  $|z| < 1$ . Полученная формула подтверждается вычислениями в Maple 2016. Выражение для конформного отображения деформированной области на единичный круг преобразуется к виду

$$f(z, \tilde{C}) \approx \varepsilon z (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots). \quad (4)$$

В [8] также указано, что выкладки верны и для отображения внешности деформированной области на внешность круга, которое определяется по формуле

$$F(z) = \frac{1}{f(1/z)}. \quad (5)$$

Подставим (4) в (5), раскладывая в ряд Тейлора по  $\varepsilon$  и оставляя линейные члены по  $\varepsilon$  члены:

$$F(z, \tilde{C}) = z - \varepsilon \left( \frac{a_2}{z} + \frac{a_4}{z^3} + \dots \right). \quad (6)$$



Получили простое выражение для конформного отображения внешности деформированного контура на внешность круга.

## 2.2. Вычисление комплексного потенциала и давления на контуре

Комплексный потенциал  $w(x, y)$  — одна из основных характеристик потока, с помощью которой определяются потенциал скоростей  $\varphi(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y)$  и функция тока  $\psi(x, y) = \operatorname{Im} w(x, y)$ . Линиями тока называются кривые  $\psi(x, y) = \operatorname{const}$ , вдоль которых движутся частицы жидкости. Пусть известно конформное отображение области вне данного контура на внешность круга  $F(z)$ . Тогда комплексный потенциал обтекания контура  $w(z)$  будет равен [1],[2],[3]

$$w(z) = K\bar{V}_\infty F(z) + \frac{KV_\infty R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z), \quad (7)$$

где  $K = \frac{1}{F'(z)_\infty}$ ,  $V_\infty$  — скорость потока на бесконечности,  $R$  — радиус кругового цилиндра,  $\Gamma$  — циркуляция. Используя формулу (7) и конформное отображение (6), можем записать комплексный потенциал обтекания контура с границей в форме (3) (раскладывая в ряд Тейлора по малому параметру  $\varepsilon$  и оставив линейные члены), приняв во внимание, что  $\lim_{z \rightarrow \infty} F'(z) = 1$ :

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \left[ \bar{V}_\infty \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_{2n}}{z^{2n-1}} \right) - V_\infty \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_{2n}}{z^{2n+1}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_{2n}}{z^{2n}} \right) \right] \varepsilon. \quad (8)$$

Для контура  $r(\vartheta) = 1 + a \cos 2\vartheta$  комплексный потенциал запишется в следующем виде:

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \left( -\frac{\bar{V}_\infty}{z} + \frac{V_\infty}{z^3} - \frac{\Gamma}{2\pi i z^2} \right) a. \quad (9)$$

Далее считаем, что  $V_\infty = \bar{V}_\infty$  (т.е. поток направлен вдоль оси  $OX$ ), и  $\Gamma = 0$ . Тогда комплексный потенциал (9) примет вид:

$$w(z) = V_\infty \left( z + \frac{1}{z} \right) + V_\infty a \left( -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \right). \quad (10)$$

Для вычисления возмущенного давления  $\tilde{p}(r, \vartheta)$  будем пользоваться интегралом Бернулли, который можно записать в форме

$$\tilde{p}(r, \vartheta) = p_\infty + \frac{\rho}{2} \left( V_\infty^2 - \left( \tilde{V}(r, \vartheta) \right)^2 \right). \quad (11)$$

Квадрат скорости возмущенного потока  $\left( \tilde{V}(r, \vartheta) \right)^2$  найдем с помощью формулы [1]

$$\left( \tilde{V}(r, \vartheta) \right)^2 = \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \vartheta} \right)^2, \quad (12)$$

где  $\tilde{\varphi}$  – потенциал скоростей потока.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА КОНТУРАХ, ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ТОКА

Вычислим давление и безразмерный коэффициент давления на контурах вида  $\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a \cos 2\vartheta$  и  $\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta)$ .

#### 3.1. Вычисление давления на контуре $r = 1 + a \cos 2\vartheta$ .

Рассмотрим частный случай формы обтекаемого контура в виде  $\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a \cos 2\vartheta$ , где  $a = \varepsilon a_2$ ,  $a_2$  - коэффициент из формулы (3). Учитывая комплексный потенциал обтекания данного контура (9), можем записать потенциал скоростей в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}(r, \vartheta) = \operatorname{Re} w = \frac{V_\infty (r^4 + 4a \cos^2 \vartheta - ar^2 + r^2 - 3a) \cos \vartheta}{r^3}. \quad (13)$$

Далее, вычисляем квадрат скорости возмущенного потока на контуре с помощью формул (12), (13), раскладываем в ряд Тейлора по малому параметру  $a$  и отбрасываем нелинейную часть. Полагаем  $r = 1 + a \cos 2\vartheta$ , и получаем следующее выражение для квадрата скорости на границе тела:

$$\left( \tilde{V}(\vartheta) \right)^2 = 4V_\infty^2 \sin^2 \vartheta (8a \cos^2 \vartheta - 2a + 1). \quad (14)$$

Отсюда можно получить формулу для вычисления давления на контуре:

$$\tilde{p}(\vartheta) = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \vartheta (8a \cos^2 \vartheta - 2a + 1)). \quad (15)$$

Для удобства исследования перейдем к безразмерному давлению (введем безразмерный коэффициент давления):

$$p = \frac{\tilde{p} - p_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2}. \quad (16)$$

Понизив степень тригонометрических функций, придем к следующему выражению для безразмерного коэффициента давления:

$$p_1(\vartheta) = -1 + 4a \cos(4\vartheta) - 4a \cos(2\vartheta) + 2 \cos(2\vartheta). \quad (17)$$

Выражение безразмерного коэффициента давления для кругового цилиндра может быть представлено в виде [3]:

$$p_0(\vartheta) = 2 \cos 2\vartheta - 1, \quad (18)$$

что соответствует формуле (17) при  $a = 0$ . Вычисляя функцию тока по формулам (8),(10),  $\psi = \text{Im } w$ ,  $\psi(x, y) = \text{const}$ , строим картину обтекания нашего контура в пакете MATLAB (рис. 1). По формулам (17) ( $a=0.1$ ) и (18) строим графики безразмерного коэффициента давления на контуре  $r(\theta) = 1 + 0.1 \cos 2\theta$  и на круговом цилиндре (см. рис. 2). В [3] приведены экспериментально полученные кривые безразмерного коэффициента давления на круговом контуре в двух случаях (в зависимости от условий эксперимента) (рис. 3). Здесь теоретическая кривая построена по формуле (18). В диапазоне  $\theta = [0.. \pi/2]$  мы видим качественное совпадение кривых коэффициента давления при обтекании контура  $r = 1 + 0.1 \cos 2\theta$  (см. рис. 3) и кривой II, полученной экспериментально при обтекании кругового контура.

### 3.2. Обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$

Рассмотрим уравнение границы в виде

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta), \quad (19)$$

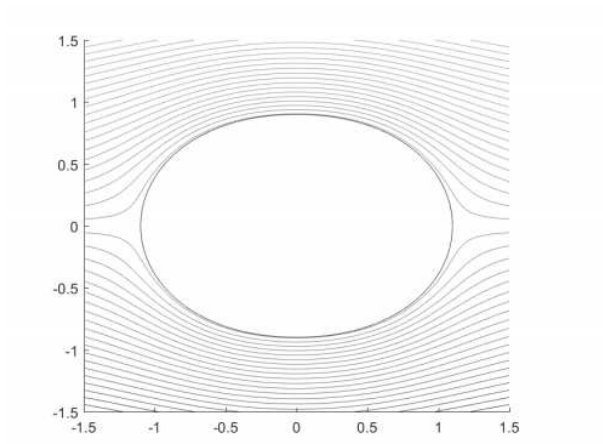


Рис. 1. Картина обтекания контура  $r(\vartheta) = 1 + 0.1 \cos 2\vartheta$ .

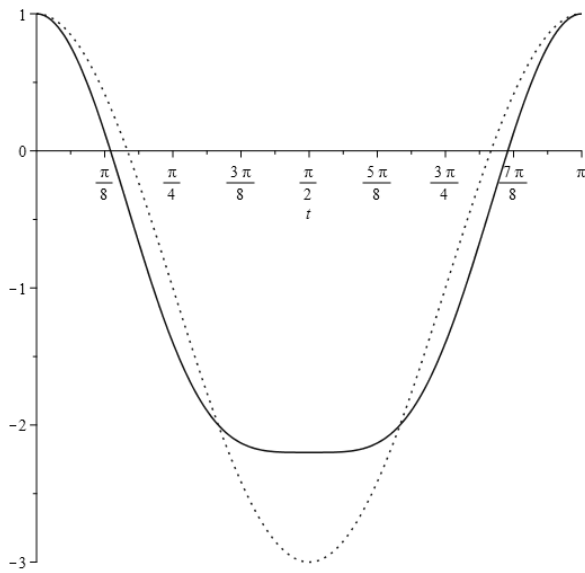


Рис. 2. Распределение давления на контуре  $r(\vartheta) = 1 + 0.1 \cos 2\vartheta$  и на круговом контуре.

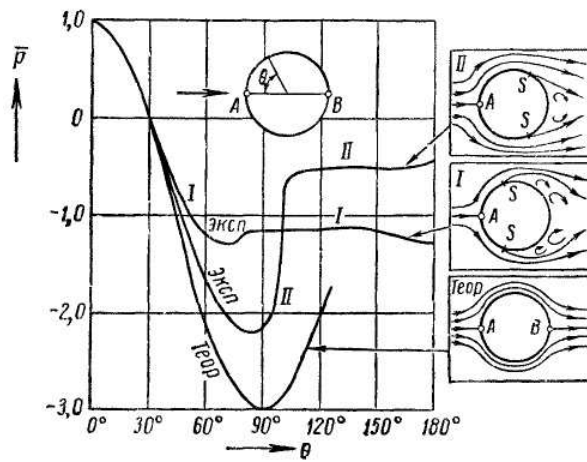


Рис. 3. Безразмерное давление на круговом контуре: теоретическая кривая и кривые, полученные экспериментально (взято из [3]).

где  $a = \varepsilon a_2$ ,  $k = a_4/a_2$ ,  $\varepsilon$ ;  $a_2, a_4$ , - коэффициенты из формулы (3). Для такой границы выражение (6) для конформного отображения внешности деформированного контура на внешность круга будет выглядеть так:

$$F_2(z, \tilde{C}) \approx z - \left( \frac{1}{z} + \frac{k}{z^3} \right) a. \quad (20)$$

По формулам (8),  $\varphi(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y)$ , вычисляем потенциал скоростей потока, далее по формуле (12) - зависимость квадрата скорости потока на контуре от угла и, наконец, можно вычислить безразмерный коэффициент давления по формуле (16):

$$\tilde{p}_2 = ak(8 \cos 6\vartheta - 12 \cos 4\vartheta + 4 \cos 2\vartheta) + 4a(\cos 4\vartheta - \cos 2\vartheta) + 2 \cos 2\vartheta - 1. \quad (21)$$

По формуле (21) построили безразмерный коэффициент давления в двух случаях формы обтекаемого тела: первый случай (C1)  $a=0, k=0$  (обтекание кругового цилиндра); второй случай (C2)  $a=0.1, k=1$ . Графики приведены на рис. 4. Для второго случая (C2)

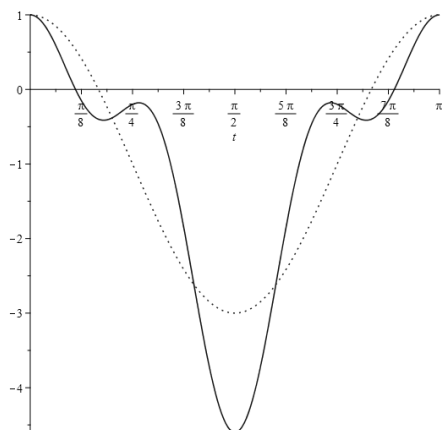


Рис. 4. Графики давления: пунктиром — круговой цилиндр; сплошной линией —  $a = 0.1, k = 1$ .

приведена картина обтекания на рис. 1 на вклейке, полученная с помощью пакета MATLAB. На рис. 2 на вклейке приведено распределение коэффициента давления в диапазоне угла  $\theta = [0.. \pi]$ .

#### 4. ОБТЕКАНИЕ КОНТУРА ВИДА $r = 1 + a \cos \theta$ .

Рассмотрим еще один частный случай этой задачи, который был решен в [17] путем решения краевой задачи уравнения Лапласа для потенциала скоростей. Постановка задачи: требуется рассчитать двумерное потенциальное течение вокруг цилиндра с границей, уравнение которой в полярной системе координат записывается как

$$r = a(1 + \varepsilon \cos \vartheta).$$

Скорость на бесконечности равна  $V_\infty$ . Потенциал скоростей  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad r > a(1 + \varepsilon \cos \vartheta) \tag{22}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{n} \nabla \varphi = 0, \quad r = a(1 + \varepsilon \cos \vartheta), \quad \varphi \sim V_\infty r \cos \vartheta + o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Потенциал скоростей получен в ходе решения краевой задачи уравнения Лапласа путем сдвига краевых условий на недеформированный контур (с использованием метода малого параметра) в [17]. С учетом наших обозначений, потенциал скоростей имеет вид:

$$\varphi(r, \vartheta) = V_\infty \left( r \cos \vartheta + \frac{\cos \vartheta}{r} \right) + \varepsilon V_\infty \frac{\cos 2\vartheta}{r^2} + O(\varepsilon^2) \quad (24)$$

С помощью вариационного принципа конформных отображений получаем

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{V_\infty (r^3 \cos \vartheta + r \cos \vartheta)}{r^2} + \frac{V_\infty (2 \cos^2 \vartheta - r^2 - 1)}{r^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (25)$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\varphi(r, \vartheta) = V_\infty \left( r \cos \vartheta + \frac{\cos \vartheta}{r} \right) + \varepsilon V_\infty \left( \frac{\cos 2\vartheta}{r^2} - 1 \right) + O(\varepsilon^2) \quad (26)$$

Как можно увидеть, решения идентичны, за исключением члена  $\varepsilon V_\infty$ . Известно, что потенциал скоростей определяется с точностью до константы, следовательно, можно считать, что решения совпадают.

## 5. ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КОНТУРА ВИДА $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$ , ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ.

### 5.1. Вычисление циркуляции

Рассмотрим обтекание контура

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta), \quad k = 0.5, \quad a = 0.1. \quad (27)$$

с циркуляцией  $\Gamma$ . Из формулы (8) имеем комплексный потенциал обтекания нашего контура:

$$w_2(z) = -\frac{V(-z^6 + (a-1)z^4 + a(k-1)z^2 - ak)}{z^5}. \quad (28)$$

Конформное отображение внешности этого контура на внешность круга будет записываться в виде:

$$F_2(z, \tilde{C}) = z - a\left(\frac{1}{z} + \frac{k}{z^3}\right). \quad (29)$$

Для получения циркуляции  $\Gamma$  пользовались следующими соображениями.

1) Чтобы изучать задачу циркуляционного обтекания, необходимо задать либо значение циркуляции, либо точку схода [8]. Формула, связывающая циркуляцию и точку схода, приведена в [8] и имеет вид

$$\Gamma = 4\pi R V_\infty \sin \phi'_1. \quad (30)$$

$\phi'_1$  - аргумент точки схода  $\zeta^* = F_2(z^*, \tilde{C})$ .

2) При циркуляционном обтекании произвольного контура точка схода находится как образ точки схода на круговом цилиндре [8].

Зададим на круговом контуре точку схода  $z^* = e^{i\phi_1}$  с аргументом  $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$ . Эта точка при конформном отображении (29) перейдет в точку  $\zeta^* = F_2(z^*, \tilde{C})$  с аргументом  $\phi'_1$ , которую и будем использовать для определения циркуляции (рис. 2 на вклейке).

Можно заметить, что при отображении аргумент точки схода на рассматриваемом контуре немного увеличивается по сравнению с аргументом точки схода на круговом контуре, то есть при циркуляционном обтекании контура (27) точка схода потока ближе к  $\pi/2$ , чем при обтекании кругового контура. Вычислив  $\phi'_1$ , можем вычислить и циркуляцию:

$$\phi'_1 = 0.89 \text{ rad}, \quad \Gamma = 9.767 \text{ m}^2/\text{c}$$



### 5.2. Главный вектор сил, парадокс Д'Аламбера

Для того, чтобы выяснить, какая подъемная сила действует на наше тело в процессе обтекания, необходимо вычислить главный вектор сил, действующих на тело. Сделать это можно двумя эквивалентными способами [1]. Первый — это посчитать контурный интеграл произведения давления на нормаль:

$$\mathbf{F} = \oint_C p \mathbf{n} dC. \quad (31)$$

Второй — вычислить контурный интеграл от квадрата производной комплексного потенциала:

$$\bar{P} = P_x - iP_y = \frac{\rho i}{2} \oint_C (w'(z))^2 dz. \quad (32)$$

Формула (32) известна как первая формула Чаплыгина — Блазиуса.

Воспользуемся вторым способом. Для вычисления контурного интеграла воспользуемся известной теоремой Коши о вычетах:

$$\oint_C f(t) dt = 2\pi i \sum \text{res}(f(t), a_k).$$

Например, для комплексного потенциала обтекания контура

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta)$$

подынтегральная функция будет выглядеть следующим образом:

$$(w'(z))^2 = \frac{R(z)}{z^3(-z^4 + az^2 + ak)\pi}, \quad (33)$$

где  $R(z)$  - некоторая функция, не имеющая особенностей. Заметим, что подынтегральная функция имеет особые точки только внутри контура (это верно для всех контуров, рассматриваемых нами). Следовательно, нужно посчитать вычет в бесконечности:

$$\text{res}((w'(z))^2, \infty) = -\frac{i\Gamma V_\infty}{\pi} \quad (34)$$

Стоит отметить, что и пакет Mathematica 10.3, и Maple 2016 такой вычет считают с ошибкой. Это было установлено, когда в качестве комплексного потенциала подставили комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра, для которого подъемная сила точно известна. Чтобы получить верный ответ, необходимо разложить функцию в ряд Лорана и найти коэффициент при  $z^{-1}$ .

В итоге, подставляя найденный вычет в исходное выражение для давления, и переходя к комплексно-сопряженному, получаем:

$$P = -i\rho V_\infty \Gamma, \quad (35)$$

что соответствует известной теореме Жуковского. Как следствие, получаем подтверждение парадокса Д'Аламбера для исследуемых контуров: при бесциркуляционном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью тело не испытывает сопротивления и подъемной силы. С помощью второй формулы Чаплыгина — Блазиуса можно вычислить момент, действующий на тело в случае бесциркуляционного обтекания относительно начала координат:

$$L = Re \left[ -\frac{\rho}{2} \oint_C z (w'(z))^2 dz \right].$$

Для контуров, симметричных относительно мнимой оси, момент равен нулю.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью вариационного принципа конформных отображений (метода М.А. Лаврентьева) найдены приближенные аналитические выражения комплексного потенциала скоростей при потенциальном поперечном обтекании бесконечных цилиндров произвольного поперечного сечения, мало отличающихся от кругового. Описано, как на основе комплексного потенциала строится потенциал скоростей и функция тока, линии тока, давление в потоке и на контуре (на основе интеграла Бернулли). Для нескольких конкретных сечений (например, вида  $r = 1 + \varepsilon a_2 \cos 2\theta$ ,  $r = 1 + \varepsilon a_1 \cos \theta$ ,  $r = 1 + \varepsilon(a_2 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta)$ ), здесь  $a_i$  — постоянные,  $\varepsilon$  — малый

параметр) проведены вычисления, построены графики давления на контуре, вычислен главный вектор и главный момент относительно центра тела. В основном, решения задач приведены для бесциркуляционного потока; в последней части работы приведены вычисления и графики обтекания заданного контура для потока с циркуляцией.

Правильность полученных результатов подтверждается следующими соображениями.

1. При уменьшении малого параметра в выражении для формы контура приходим к предельному случаю — обтеканию кругового бесконечного цилиндра. Формулы для вычисления потенциала скоростей, функций тока, давления на круговом контуре даны во многих учебниках, например [1],[2],[3]. Выражения, полученные в предельном случае нашей работы (например, в формулах (8),(14)), совпадают с выражениями из учебников для кругового контура.

2. В работе представлен случай для формы контура в виде  $r = 1 + a \cos \theta$ . Для этого случая приведено выражение для потенциала скоростей двумя разными методами. Первый метод представлен в [17], второй метод — метод, разбираемый в нашей работе, т.е. метод М.А. Лаврентьева (вариационный принцип коформных отображений). Эти два выражения для потенциала скоростей совпадают с точностью до постоянной.

3. В работе вычислен главный вектор сил при циркуляционном обтекании цилиндра с сечением вида  $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$ , ( $a$  — малый параметр,  $k$  — постоянная) — формула (30). Это выражение соответствует известной формуле Жуковского. Для бесциркуляционного обтекания получаем главный вектор сил, равный нулю (парадокс Д'Аламбера).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л. Издательство Ленинградского университета. 1978
2. Розе Н.В., Кибель И.А., Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Часть I. М.: Физматгиз, 1963
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Л. 1950
4. Голузин Г., Канторович Л., Крылов В. и др. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. Л.-М. ОНТИ 1937, 128 с.

5. Канторович Л. В. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение // Известия Академии наук СССР. Отделение математических и естественных наук. 1933. 9 с.
6. Theodorsen T. Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape. NACA Report, No 411. 1931. 14 p.
7. Лаврентьев М.А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики М.-Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во техн.-теорет лит., 1946. – 159 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Л.: Наука. 1973
9. Lavrent'ev M. A. Variational Methods for Boundary Value Problems: for Systems of Elliptic Equations. — Reprint. — USA: Dover Publications, 2006. — 160 p. — ISBN 0486450783, 978-0486450780.
10. Hazewinkel, M. Encyclopaedia of Mathematics: Volume 3 Heaps and Semi-Heaps — Moments, Method of (in Probability Theory), Springer US.2013 url="https://books.google.ru/books?id=xdoFCAAAQBAJ
11. Peter J. Oliver. Complex Analysis and Conformal Mapping. University of Minnesota. 2015
12. Rabinovich B.I., Tyurin Y.V. Numerical Conformal Mapping in Two-Dimensional Hydrodynamics, Moscow: Space Research Institute Russian Academy of Science. 2000
13. Kuhnau R. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Volume 2. Elsevier. 2005
14. Ершов Б.А., Кутеева Г.А. Применение вариационного принципа конформных отображений в решении одной плоской динамической задачи гидроупругости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1, вып. 4 (N 22). 1999. С. 83-88
15. Кутеева Г.А. Вариационный принцип конформных отображений в задаче гидроупругости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1, вып. 2 (N 8). 1999. С. 65-69
16. Кутеева Г.А., Трюхало А.С. Вариационный принцип конформных отображений в задаче об обтекании эллиптической цилиндрической оболочки потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1, вып. 4. 2005. С. 92-97
17. Howison S. Practical Applied Mathematics: Modelling, Analysis, Approximation, OSIAM: Oxford University. 2004

**МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ  
ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОТКОЛЬНОМУ  
РАЗРУШЕНИЮ, ОСНОВАННАЯ НА КРИТЕРИИ  
ИНКУБАЦИОННОГО ВРЕМЕНИ.  
ВРЕМЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ РАЗРУШЕНИЯ**

Н.В.МИХАЙЛОВА

Проведен анализ данных динамических испытаний по откольному разрушению двух партий образцов из стали 30ХН4М. При обработке данных использовалось решение одномерной волновой задачи в упругой постановке. Проведено исследование эффекта задержки разрушения. С помощью структурно-временного критерия определены прочностные параметры материала, и построена скоростная кривая прочности. Выявлено, что различные партии образцов с одинаковыми химическими составами, обладают различными предельными напряжениями.

## **1. ВВЕДЕНИЕ**

Поведение материала под воздействием высокоскоростных интенсивных нагрузений изучается на протяжении долгого времени. Одна из целей данных исследований – это определение прочностных параметров материала при таких динамических воздействиях.

Основная методика изучения динамического растяжения основана на явлении откольного разрушения. Уже проведено множество исследований и испытаний, посвященных данной теме [1-3,7,8].

Рассмотрение волновых процессов для откольной задачи позволяет найти импульс напряжений, приводящий к разрушению [1,2]. Тем не менее, довольно часто можно встретить работы, в которых авторы используют решение волной задачи в упрощенной форме. Оно позволяет определить только предельное значение напряжений для заданной скорости нагружения образца. И по аналогии со статическими представлениями о разрушении, такую величину напря-

---

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 17-01-00618, 16-51-53077, 16-01-00638.

Доклад на семинаре 10 ноября 2015 г.

© Н.В.Михайлова, 2017

жений называют динамической прочностью материала. Но данный подход верен только для определенных ударных импульсов.

Иногда разрушение происходит в момент, когда напряжение в сечении откола после достижения им максимума начинает уменьшаться. Это явление называется задержкой разрушения. Импульсы, соответствующие такому виду разрушения, называют пороговыми. Их интенсивность соответствует минимальным нагружающим воздействиям, при которых наступает разрушение образца. Задержка разрушения фиксировалась в экспериментах различных авторов, например, [1,3]. Однако подробного обсуждения этого явления сделано не было. В [3] такую ситуацию назвали квазистационарным режимом разрушения и предложили в этом случае связывать прочность со временем действия растягивающих напряжений в сечении откола (как это делалось в [1]).

Структурно-временной критерий основывается на статической прочности материала и его инкубационном времени. Данные величины являются прочностными параметрами материала, которые не зависят от условий эксперимента и могут быть применены для различных видов нагружений. Более того, данный подход уже показал свою эффективность при определении условий возникновения различных переходных процессов, таких, как хрупкое разрушение [4], электропробой [5], кавитация [6] в жидкости.

## 2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ.

При откольном разрушении ударный импульс создаёт сжимающую волну в стержне, которая, отражаясь от его свободной поверхности, меняет знак и становится растягивающей. Поскольку прочность материалов при растяжении обычно существенно меньше, чем при сжатии, то в некотором сечении образца может произойти разрушение. При пороговых нагрузках оно проявляется в виде микротрещин, а при более интенсивных воздействиях происходит полное отделение от образца части материала, которую называют откольной «тарелочкой». Решение одномерной откольной задачи в упругой постановке представляется в виде суммы сжимающих и растягивающих напряжений, которые с точностью до

множителя совпадают с профилями скоростей свободной поверхности

$$\sigma = \sigma^{inc} + \sigma^{ref} = \frac{1}{2}\rho a V(t + \frac{x}{a}) - \frac{1}{2}\rho a V(t - \frac{x}{a}). \quad (1)$$

Таким образом, данное решение позволяет вычислить временную зависимость напряжений в произвольном сечении стержня

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{2}\rho a \Delta V(x, t), \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $a$  – скорость распространения продольной волны в стержне, а  $\Delta V(x, t)$  – это приращение функции скорости свободной поверхности  $V(x, t)$

$$\Delta V(t) = V(t) - V(t - \frac{2x}{a}). \quad (3)$$

Величина, на которую производится сдвиг, соответствует удвоенному времени прохождения волны от свободной поверхности до рассматриваемого сечения  $x$ .

Кривая скорости свободной поверхности образца  $V(x, t)$  получена экспериментальным путем. Время  $\Delta t = \frac{2x}{a}$  можно найти, измерив толщину откольной тарелочки  $x$ , либо из самого графика  $V(x, t)$  (рис. 1).

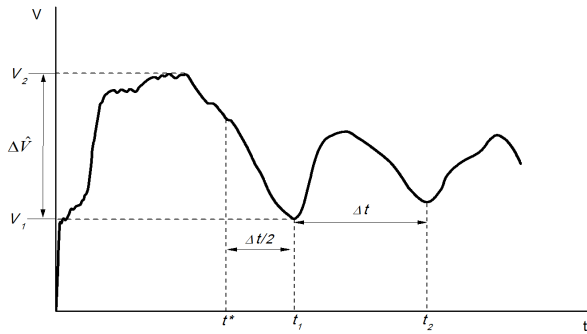


Рис. 1. Зависимость скорости свободной поверхности от времени.

Информация о разрушении на приборы приходит спустя время, за которое волна проходит вдоль откольной тарелочки. Соответственно, время разрушения  $t^* = t_1 - \frac{\Delta t}{2}$ , а толщину откольного слоя можно оценить как  $\frac{a\Delta t}{2}$ .

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ЭФФЕКТ ЗАДЕРЖКИ РАЗРУШЕНИЯ

В экспериментах по откольному разрушению использовались образцы из стали 30ХН4М. Обработка полученных данных проводилась с использованием решения волновой задачи (2). Профиль напряжений в сечении откола построен со сдвигом во времени  $\frac{\Delta t}{2}$ .

Временной профиль напряжений для запороговых высокоинтенсивных нагружений характеризует разрушение, которое можно описать с помощью квазистатического похода. Образец разрушается на максимальных значениях растягивающих напряжений (рис. 2). Следствием такого поведения материала стало использование исследователями [7,8] упрощенного решения откольной задачи (4)

$$\sigma_{st} = \frac{1}{2} \rho a \Delta \hat{V}, \quad (4)$$

где  $\Delta \hat{V} = V_2 - V_1$  (рис. 1).

Величину  $\sigma_{st}$  принимают за динамическую прочность материала. Ее значения действительно соответствуют предельным значениям напряжений. Основываясь на данном результате, упрощенное решение используют всегда вне зависимости от интенсивности нагружающих импульсов. Но такой подход не всегда приводит к верным результатам.

В случае пороговых нагружений разрушение происходит с задержкой, через некоторое время после достижения напряжением в сечении откола максимума (рис. 3). Такой эффект получен для образцов №19, №22 и №25 (табл. 1). В случае скорости ударника равной  $V_0 = 350 \text{ m/s}$  при толщине откольного слоя  $x^* = 1,8 \text{ mm}$  максимальная величина растягивающего напряжения достигает значения  $\sigma_{max} = 3890 \text{ MPa}$ , но образец разрушается при  $\sigma^* = 3700 \text{ MPa}$ . Время задержки разрушения составляет  $\tilde{t} = 100 \text{ ns}$ .



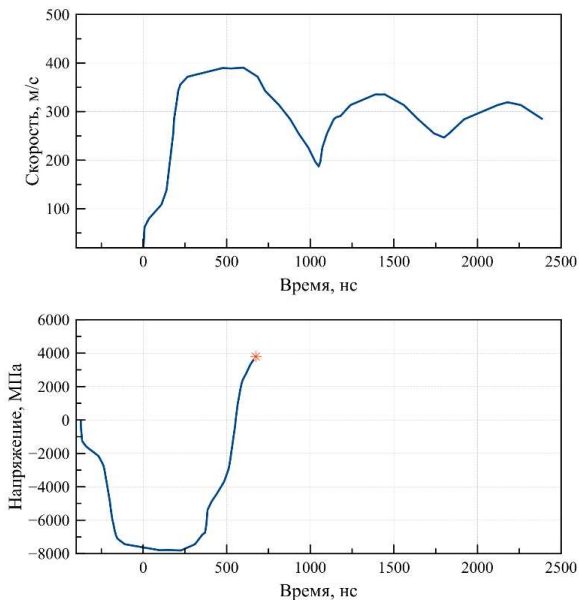


Рис. 2. Временные зависимости для запороговых нагрузений скорости свободной поверхности (сверху) и профиль напряжений в сечении откола (снизу).

Таким образом, основное положение статической теории прочности о том, что при достижении напряжением критической величины материал разрушается, не согласуется с приведёнными выше экспериментальными данными. Следовательно, при анализе результатов динамических испытаний не всегда можно пользоваться квазистатическими представлениями о прочности.

#### 4. КРИТЕРИЙ ИНКУБАЦИОННОГО ВРЕМЕНИ

Применение структурно-временного подхода при кратковременных воздействиях позволяет объяснить многие наблюдаемые в опытах эффекты, в частности увеличение прочности, ее стабилизацию

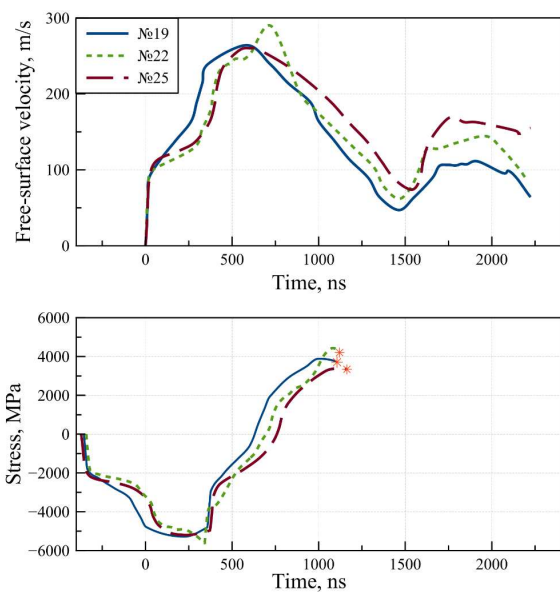


Рис. 3. Временные зависимости для пороговых нагрузений скорости свободной поверхности (сверху) и напряжения в сечении откола (снизу).

и качественно описать характер зоны разрушения [9-11]. Для материала без заданных макроскопических дефектов критерий имеет форму (см., например, [10])

$$\int_{t-\tau}^t \sigma(s, x) ds < \sigma_c \tau, \quad (5)$$

где  $\sigma(s, x)$  – напряжение в сечении  $\tilde{x}$  в момент  $\tilde{s}$ ,  $\sigma_c \tau$  – статическая прочность материала, а  $\tau$  – инкубационное (структурное) время разрушения. Таким образом, чтобы произошло разрушение в данном сечении, нужно накопить величину импульса не меньше чем  $\sigma_c \tau$ . Параметры  $\sigma_c$  и  $\tau$  являются константами материала и не зависят от геометрии исследуемого материала и от формы и продолжитель-

Таблица 1.

№	$V_0, m/s$	$x^*, mm$	$\sigma_{max}, MPa$	$\sigma^*, MPa$	$t, ns$
365	404,2	1,9	3790		-
366	346,7	2,0	3260		-
371	349	1,8	3360		-
19	350	1,8	3890	3700	100
22	365	1,8	4430	4200	40
25	365	1,9	3400	3340	40

ности воздействия. Так же они образуют систему определяющих параметров разрушения.

Экспериментальные данные по откольному разрушения позволяют найти время разрушения  $\tilde{t}^*$  и построить профиль напряжений до данного момента времени. Тогда критерий превращается в равенство (6), из которого можно найти величину инкубационного времени  $\tau$

$$\int_{t^*-\tau}^{t^*} \sigma(s, x) ds = \sigma_c \tau. \quad (6)$$

Инкубационное время для материала рассчитывалось с использованием динамической кривой. Такая зависимость  $\sigma(\dot{\sigma})$  выстраивалась интерполированием точек, полученных в результате эксперимента. Поскольку напряжения на этапе растяжения ведут себя линейным образом, то можно представить их в виде прямой  $\sigma(t) = \dot{\sigma}tH(t)$ , из уравнения которой легко находится  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ . Тогда критерий можно переписать следующим образом

$$\int_{t^*-\tau}^{t^*} \dot{\sigma}t'H(t') dt' = \sigma_c \tau. \quad (7)$$

Из получившегося равенства инкубационное время находится как

$$\tau = \begin{cases} 2(t^* - \frac{\sigma_c}{\dot{\sigma}}) & \frac{2\sigma_c}{t^*\dot{\sigma}} > 1; \\ \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma_c} t^{*2} & \frac{2\sigma_c}{t^*\dot{\sigma}} \leq 1. \end{cases}$$

Испытуемая сталь имела одинаковый химический состав, но изготавливалась двумя различными способами, что повлияло на ее

прочностные характеристики. Соответственно результаты экспериментов разделились на две серии точек  $S_1$  и  $S_2$ . Для каждой серии с использованием динамической кривой методом наименьших квадратов получено инкубационное время  $\tau_1 = 204ns$  и  $\tau_2 = 442ns$  (рис. 4).

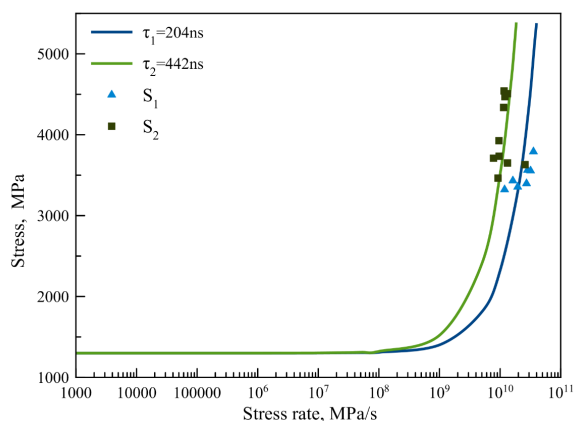


Рис. 4. Скоростная зависимость предельных напряжений, полученных для  $\tau_1 = 204ns$  и  $\tau_2 = 442ns$ , и зависимость  $\sigma(\dot{\sigma})$  для экспериментальных точек. Статическая прочность  $\sigma_c = 1300MPa$ .

Также проведены расчеты инкубационного времени для каждого эксперимента в отдельности с применением критерия (6). В табл. 2 представлены результаты данных вычислений. Видно, что время, полученное с помощью динамических кривых, действительно является приближением для всех экспериментальных точек. Таким образом, оно может быть взято за инкубационное время для исследуемого материала.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обработка экспериментальных данных по откольному разруше-

Таблица 2.

Первая серия образцов ( $\tau_1 = 204ns$ )			Вторая серия образцов ( $\tau_2 = 442ns$ )		
$\tau, ns$	$\dot{\sigma}, MPa/s$	$\sigma^*, MPa$	$\tau, ns$	$\dot{\sigma}, MPa/s$	$\sigma^*, MPa$
230	1,95E+10	3360	600	7,78E+09	3710
300	1,62E+10	3430	200	2,58E+10	3630
400	1,19E+10	3320	570	1,20E+10	4470
190	2,83E+10	3560	480	1,32E+10	4500
170	3,18E+10	3560	560	9,58E+09	3930
170	3,55E+10	3790	500	9,63E+09	3730

нию позволяет выявить эффект задержки разрушения, который противоречит с общепринятой методикой нахождения динамической прочности материала. Следовательно, не совсем корректно применять квазистатический подход для всех типов нагружений. Таким образом, его использование возможно только для определенных форм ударных импульсов.

Структурно-временной критерий хорошо согласуется с эффектом задержки разрушения. Более того, с помощью критерия найдены прочностные параметры исследуемого материала. Они, как показывает экспериментальная обработка данных, действительно оказываются константами материала и не зависят от скорости нагружения образца.

Опираясь на полученные результаты, можно сделать следующий вывод. Для изучения прочностных свойств материала предпочтительнее воздействовать на него пороговыми импульсами. В таком случае успевают проявляться временные эффекты, свойственные только для динамического режима разрушения. Если же нагружать образец высокоинтенсивными запороговыми воздействиями, то материал вследствие большой скорости нагружения не успеет проявить свойственные ему эффекты и разрушение будет происходить по квазистатическому сценарию, то есть при достижении напряжениями некоторых предельных значений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Златин Н.А., Пугачёв Г.С., Мочалов С.М., Брагов А.М. Временная зависимость прочности металлов при долговечностях микросекундного диапазона // ФТТ. 1975. т. 17. №9. -С. 2599-2602

2. Broberg, K. Cracks and Fracture – Cambridge University Press; 1999 Cambridge
3. Батани Д., Вовченко В.И., Канель Г.И., Кильпио А.В., Красюк И.К., Ломоносов И.В., Пашинин П.П., Семенов А.Ю., Фортов В.Е., Шашков Е.В. Механические свойства вещества при больших скоростях деформирования, вызванного действием лазерной ударной волны // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 328–331.
4. Y.V. Petrov. Structural-temporal approach to modeling of fracture dynamics in brittle media// In: Rock Dynamics and Applications – State of the Art /J.Zhao and J.Li (eds)/ 2013. Taylor and Francis Group, London. P.101-110.
5. Ю.В. Петров. Структурно-временной критерий импульсной электрической прочности // Доклады акад наук. 2014, V.454, No.3. С.289-292
6. Груздков А.А., Волков Г.А., Петров Ю.В. Критерий инкубационного времени и акустическая прочность морской воды// Акустический журнал, 2007, т. 53, № 2, с. 149-152
7. Dalton D.A. et. al. // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104. P. 013 526
8. Liqiang Lin, Xiaowei Zeng // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 142. P. 50–63
9. Петров Ю.В., Уткин А.А. О зависимости динамической прочности от скорости нагружения // ФХММ. № 2. 1989. С. 38-42
10. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А. Об анализе откола с позиций структурной механики разрушения //ДАН СССР. Т.313 № 2. 1990. С.276-279
11. Петров Ю.В., Смирнов И.В., Уткин А.А. Эффекты скоростной зависимости прочности в наносекундном диапазоне длительностей воздействия //МТТ. 2010. 45. № 3. С. 200-210

# МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМОРФНЫХ И КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ ИЗ СПЛАВА TiNiCu

А.М.КШУМАНЕВ, В.Ю.СЛЕСАРЕНКО

В работе изучены некоторые свойства тонких аморфных лент из сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  при их растяжении при различных температурах. Исследована зависимость механических свойств кристаллизованного сплава, обладающего эффектом памяти формы, от условий кристаллизации как в аустенитном, так и в мартенситном состояниях.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сплавы с памятью формы относятся к классу так называемых “интеллектуальных” материалов, которые способны варьировать свои свойства в ответ на изменение внешних факторов. В случае сплавов с памятью формы в качестве подобных факторов выступают температура и внешние нагрузки. Способность находиться в двух различных состояниях: высокотемпературном (аустенитном) и низкотемпературном (мартенситном) приводит к тому, что сплавы с памятью формы демонстрируют необычные деформационные эффекты (эффекты памяти формы), связанные с переходом из одного состояния в другое при изменении температуры или напряжённого состояния. За счёт подобных эффектов сплавы с памятью формы, одним из наиболее ярких представителей которых является никелид титана (TiNi), привлекают внимание исследователей не только с точки зрения фундаментальной науки, но и с точки зрения практических применений. Согласно последним отчётам, прогнозируется увеличение рынка сплавов с памятью формы на 15% за последующие пять лет.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14-12-00138), а также при использовании ресурсов РЦ ТКМИ СПбГУ.

Доклад на семинаре 17 ноября 2015 г.

© А.М.Кшуманев, В.Ю.Слесаренко, 2017

Известно, что сплавы с памятью формы, а в частности и сплавы на основе никелида титана, способны испытывать мартенситные превращения только в кристаллическом состоянии. Это не является существенной проблемой, поскольку основные методы получения подобных сплавов приводят непосредственно к формированию кристаллического материала. Однако в то же самое время для ряда сплавов на основе никелида титана существует возможность их получения в изначально аморфном состоянии с помощью методик быстрой закалки из расплава. Поскольку аморфный двухкомпонентный сплав никеля и титана не удаётся получить за счет такого метода, часть атомов никеля заменяют на атомы меди, тем самым формируя аморфную быстозакалённую ленту с химическим составом  $Ti_{50}Ni_xCu_{50-x}$ . Как уже упоминалось, полученная в аморфном состоянии лента не способна демонстрировать эффекты памяти формы, однако у металлических стёкол есть ряд преимуществ перед кристаллическими сплавами того же химического состава, такие как, например, более высокая прочность или лучшая коррозионная стойкость. Вместе с тем, металлические стёкла отличаются крайне низкой способностью деформироваться пластически, в связи с чем разрушение в них происходит катастрофически и по хрупкому закону. В то же самое время известно, что механическое поведение аморфных материалов очень сильно зависит от температуры. Повышение температуры может привести к изменению механизмов деформирования металлических стёкол и не только изменить упругие модули материала, но и потенциально привести к улучшению пластичности.

А для того, чтобы полученные аморфные ленты были способны испытывать мартенситные превращения, их необходимо закристаллизовать, нагрев до температуры, превышающей температуру кристаллизации. При этом от температуры нагрева, продолжительности отжига и других параметров кристаллизации могут зависеть как микроструктура сплава, так и его механические свойства. Нагрев до различных температур может вызывать выпадение вторичных фаз, рост зёрен, что, в свою очередь, может оказывать влияние на мартенситные превращения и реализацию эффектов памяти формы в сплаве. В таком случае потенциально можно будет получать кристаллический сплав, демонстрирующий необходимые свой-



ства.

## 2. СПЛАВЫ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Открытие эффектов памяти формы приписывается шведскому физику Густаву Арне Оландеру (Gustav Arne Olander), который в 1932 году наблюдал необычное поведение сплава AuCd, напоминающее поведение резины. Позже в 1951 г. Чанг (Chang) и Рид (Read) объяснили такое поведение переориентацией двойникового мартенсита. В 1948 году советскими учёными-металлургами Курдюмовым и Хандросом был найден сплав на основе меди, который после больших пластических деформаций мог при нагреве восстановить начальную форму, это явление получило название «эффект Курдюмова» (рис. 1) [1].

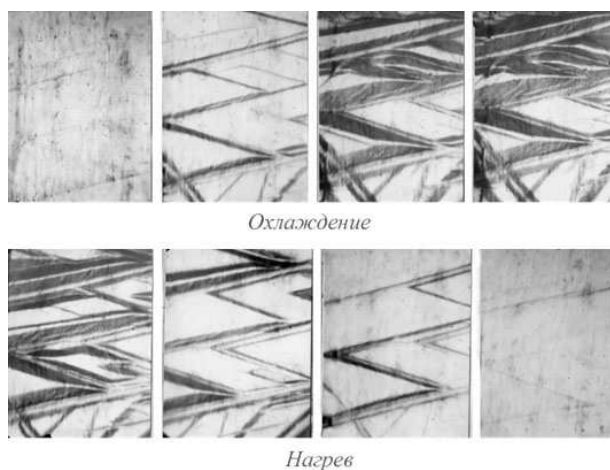


Рис. 1. Прямое и обратное мартенситные превращения. Эффект Курдюмова.

В 1958 году эффект памяти формы был продемонстрирован Чангом и Ридом на Всемирной выставке в Брюсселе на примере сплава из золота и кадмия. Было показано, что материал с эффек-

том памяти формы может совершать работу, циклически поднимая груз [2,3,4].

В 1961 году группа учёных из Морской Артиллерийской лаборатории США случайно обнаружила, что двухкомпонентный сплав  $TiNi$  способен демонстрировать эффект памяти формы, после чего компании и учёные поняли, каким потенциалом обладают эти материалы, и в 1970-х годах появилась первая коммерческая продукция с использованием сплавов с эффектом памяти формы. С того времени и до наших дней ведутся активные исследования и разработки, материалы с эффектом памяти формы нашли своё применение в медицине, авиастроении и космической технике и других отраслях [5].

Известно, что некоторые металлические материалы способны находиться в нескольких состояниях, характеризующихся различной кристаллической решеткой. В работе [6] показаны элементарные ячейки этих состояний для различных сплавов. Материал может переходить из одного состояния в другое при помощи мартенситных превращений – бездиффузионных полиморфных переходов, происходящих в твёрдом теле. Кристаллические решётки вещества до и после превращения неэквивалентны, в чём и заключается принципиальное различие мартенситных реакций и процессов двойникования [7]. Одним из доказательств того, что во время этих процессов в материале нет диффузии, является тот факт, что мартенситные превращения могут происходить при настолько низких температурах, когда вклад диффузии пренебрежимо мал [8].

Мартенситные превращения могут быть вызваны как механическими усилиями, так и изменением температуры кристалла. Если рассматривать мартенситные реакции, способные реализовываться в различных сплавах при изменении температуры, можно разделить их на три типа: термоупругие, взрывные и изотермические. Изотермические превращения происходят с течением времени при постоянной температуре; развиваются с ускорением вначале (по прошествии инкубационного периода) и замедляются в конце превращения. При взрывных реакциях некоторая фаза мартенсита образуется за очень короткий промежуток времени (при постоянной температуре). Термоупругие мартенситные превращения характеризуются плавным и обратимым изменением кристаллов мартен-

сита. При обратной реакции деформация, полученная вследствие такого превращения, восстанавливается тем же путём, т.е. наблюдается эффект памяти формы [9].

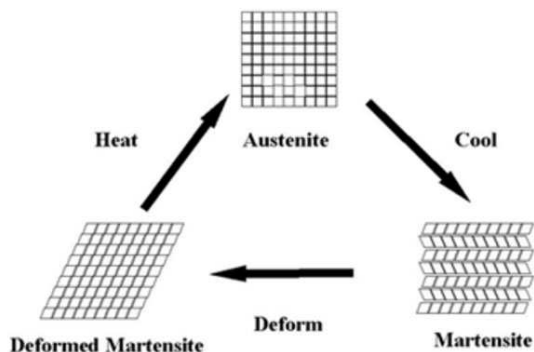


Рис. 2. Схема мартенситных превращений.

Высокотемпературное высокосимметричное состояние сплавов с памятью формы называется аустенитным, в то время как низкотемпературное состояние, в которое переходит сплав с памятью формы при охлаждении, получило название мартенситного (рис. 2).

На рис. 3 представлена типичная фазовая диаграмма прямого (аустенит→мартенсит) и обратного (мартенсит→аустенит) мартенситных превращений. Температурой  $M_s$  называется температура начала прямого превращения, а температурой  $M_f$  – конца прямого превращения. В свою очередь,  $A_s$  и  $A_f$  – температуры начала и конца обратного превращения.

### 3. ЭФФЕКТЫ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Сам по себе эффект памяти формы заключается в том, что при обратном мартенситном превращении материал возвращает фазовую деформацию, накопленную при деформировании в мартенситном состоянии либо при прямом мартенситном превращении. В пер-

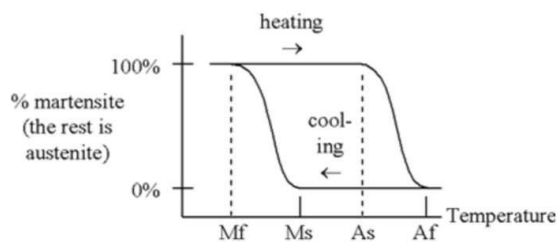


Рис. 3. Фазовая диаграмма термоупругого мартенситного превращения.  $M_s$ ,  $M_f$  – температуры начала и конца прямого превращения,  $A_s$ ,  $A_f$  – температуры начала и конца обратного мартенситного превращения.

вом случае важную роль играет особый механизм деформирования, который реализуется в мартенситном состоянии, называемый переориентацией мартенситных доменов [10]. Несмотря на то, что деформация, накопленная в процессе реализации данного механизма, не возвращается после разгрузки, последующий нагрев деформированного в мартенситном состоянии сплава приводит к восстановлению формы за счёт обратного мартенситного превращения и реализации эффекта памяти формы. Таким образом, если образец, который имеет определенную форму в аустенитном состоянии, продеформировать при температуре, меньшей  $M_f$ , а затем нагреванием перевести его в аустенитное состояние, он восстановит свою исходную форму. Помимо эффекта памяти формы сплавы с памятью формы могут демонстрировать и другие интересные свойства: псевдоупругость, пластичность превращения, генерация реактивных напряжений, обратимая память формы. В основе всех этих эффектов лежат одни и те же механизмы термоупругих мартенситных превращений.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ TiNi

Элементарная ячейка аустенита сплава  $Ti_{50}Ni_{50} - B2$ , объёмно-центрированная кубическая (ОЦК), т.е. можно рассматривать её

как куб, в вершинах которого расположены атомы одного из элементов, а в центре – атом другого элемента. Ячейкой мартенсита в сплавах типа  $TiNiX$  (вместо  $X$  стоит какой-либо металл, например,  $Cu$  или  $Fe$ ) может являться моноклинная ячейка  $B19'$  или орторомбическая  $B19$  (рис. 3 на вклейке).  $B19'$  мартенсит наблюдается в большинстве трёхкомпонентных сплавов на основе никелида титана и в двухкомпонентном  $TiNi$ . В сплавах  $Ti_{50}Ni_{50-x}Cu_x$  тип мартенситного перехода зависит от концентрации меди  $x$ . Так, если доля меди в сплаве меньше 10%, то наблюдается мартенсит со структурой  $B19'$ , если же больше 10%, то мартенсит орторомбический. Также в сплавах с большой концентрацией меди изменяются некоторые свойства эффекта памяти формы, например, сужается петля гистерезиса фазового превращения. В сплаве  $Ti_{50}Ni_{40}Cu_{10}$  при охлаждении прямое превращение проходит в 2 этапа:  $B2 \rightarrow B19' \rightarrow B19$ , причём эти превращения обратимы [11].

## 5. КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ И АМОРФНОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Все твёрдые тела можно разделить на кристаллические и аморфные. Кристаллические тела – такие твёрдые тела, атомная структура которых может быть получена трансляцией в пространстве элементарной ячейки. Говорят, что они имеют строго упорядоченную, повторяющуюся в пространстве структуру – кристаллическую решетку. Аморфные тела, в отличие от кристаллических, не имеют периодической пространственной структуры, то есть молекулы или атомы расположены в них относительно случайным образом. Некоторые материалы могут переходить из одного состояния в другое, при этом процесс перехода от аморфного состояния к кристаллическому называется кристаллизацией, а обратный – аморфизацией вещества.

К методам получения аморфных сплавов можно отнести осаждение газообразного металла, быструю закалку из расплава, нарушение кристаллической структуры твёрдого металла за счет облучения и интенсивные пластические деформации (ИПД).

Быстрая закалка из расплава может проводиться по-разному:

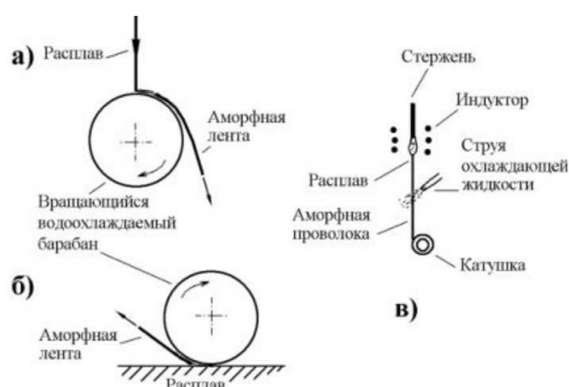


Рис. 4. Схемы установок для проведения быстрой закалки из расплава: (а) охлаждение струи жидкого металла на поверхности вращающегося барабана; (б) прокатка расплава между холодными поверхностями; (в) охлаждение струи расплава жидкостью.

охлаждением струи жидкого металла на поверхности вращающегося барабана (внутренней или внешней), прокаткой расплава между холодными валами или охлаждением струи расплава жидкостью (рис. 4). Расплав, полученный в индукционной печи, подаётся через сопло под давлением нейтрального газа. При выходе из сопла он соприкасается с охлаждаемым барабаном и затвердевает [12]. Для получения однородного аморфного вещества необходимо обеспечить быстрое охлаждение всего объёма. Подобными методами можно получить лишь ленты, толщина которых не превосходит некоторого значения, иначе внутренние слои материала не успеют быстро охладиться и, как следствие, сплав частично кристаллизуется. В работе [13] отмечено, что именно эти методы являются самыми распространёнными методами получения аморфных сплавов и такие материалы выделяют в отдельный класс аморфных материалов, называемый металлическими стёклами. Однако для получения аморфного состояния необходимо соблюдать некоторые требования: материал должен охлаждаться со скоростью, не меньшей критической ско-

рости охлаждения, подробнее о которой будет рассказано ниже. А она, в свою очередь, напрямую зависит от количества компонентов в сплаве: чем больше компонентов, тем ниже критическая скорость охлаждения и, таким образом, тем легче получить аморфный материал.

Как правило, прочность кристаллических веществ выше, чем у аморфных, из-за наличия более сильных связей, однако некоторые металлические стёкла имеют очень большую прочность [13]. Так как в аморфных телах атомы и молекулы имеют хаотичное расположение, то все свойства, зависящие от выбора направления в веществе, (механическая прочность, коэффициент термического расширения и др.) одинаковы по всем направлениям, т.е. наблюдается изотропия. Монокристаллические тела, напротив, анизотропны: свойства по направлениям векторов трансляции, вообще говоря, отличаются от свойств в случайно выбранных направлениях. Однако поликристаллические тела (т.е. состоящие из множества мелких разориентированных монокристаллов – большинство материалов в природе), как и аморфные, изотропны из-за хаотичной разориентировки зёрен. Как уже было сказано выше, для получения аморфного вещества нужно поддерживать скорость охлаждения выше критической скорости охлаждения. При этом процесс получения металлического стекла можно условно разделить на несколько стадий: при достижении температуры плавления  $T_m$  расплав перейдёт в состояние переохлаждённой жидкости, которая превратится в твёрдое аморфное состояние при достижении температуры стеклования  $T_g$ , которая зависит от скорости охлаждения и способа получения стекла (рис. 5). На самом же деле нет чётких температурных границ этих стадий, существует лишь некий интервал, в пределах которого жидкость становится металлическим стеклом.

Если же скорость охлаждения будет недостаточной, то при температуре  $T_m$  вещество кристаллизуется, при этом резко уменьшится его удельный объём (т.е. увеличится плотность). При дальнейшем охлаждении удельный объём вещества будет незначительно уменьшаться, это связано с обычным механизмом температурного расширения.

Нагрев металлического стекла до высоких температур приводит

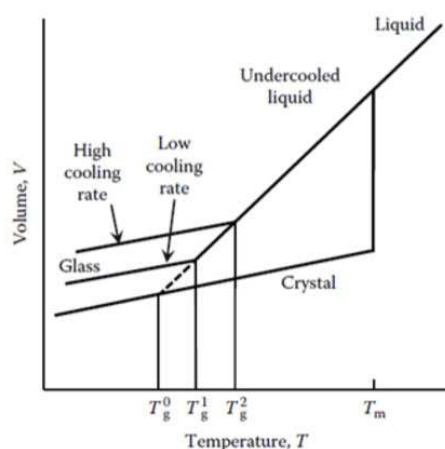


Рис. 5. Диаграмма зависимости удельного объёма от температуры при кристаллизации и стекловании [13].

к реализации процесса кристаллизации. Рассмотрим данный процесс подробнее. В начале кристаллизации кристаллы вещества беспрепятственно растут, сохраняя свою правильную (обычно, близкую к сферической) форму. Со временем они встречаются друг с другом, не позволяя продолжать дальнейший рост без искажения формы. Правильная форма кристаллов исчезает, они становятся зёрнами. Размеры зёрен зависят от множества факторов, таких как температура жидкого металла, способа и скорости охлаждения и др (рис. 6).

## 6. ОБЪЕКТЫ И МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В исследованиях использовались тонкие аморфные ленты шириной 1.6 мм и толщиной 35 мкм из сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$ . Исходные образцы были получены быстрой закалкой из расплава, то есть охлаждением расплава с помощью жидкости или барабана(-ов).



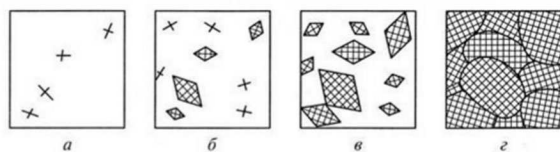


Рис. 6. Схема кристаллизации вещества: (а) начало образования кристаллов; (б), (в) рост кристаллов; (г) искажение формы кристаллов, образование зёрен.

Был выбран трехкомпонентный сплав, а не двухкомпонентный сплав  $TiNi$ , т.к. для получения аморфного вещества необходимо охлаждать его со скоростью, большей либо равной критической скорости охлаждения, которая уменьшается с увеличением количества компонентов в сплаве (см. выше). В случае  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  эта скорость равна примерно  $10^6$  К, тогда как для сплава  $Ti_{50}Ni_{50}$  достичь критической скорости при охлаждении пока не удалось, и аморфный  $TiNi$  вынуждены получать другими методами [13].

Согласно полученным с помощью дифференциальной сканирующей калориметрии данным, температура окончания кристаллизации изучаемого сплава составляет  $465^{\circ}C$  при нагреве с постоянной скоростью  $20^{\circ}C/мин$ .

Ленту разрезали на части длиной по 35 мм каждая. Для исследования были изготовлены захваты (рис. 7) таким образом, чтобы после закрепления в них образцов рабочая длина составляла порядка 8 мм.

Далее часть лент исследовали на растяжение в аморфном состоянии при разной температуре, чтобы выяснить температурную зависимость их свойств. Другая серия экспериментов проводилась на лентах, которые сначала были подвергнуты отжигу в печи Nabertherm N40E, тем самым переведены в кристаллическое состояние. Нагрев проводился со скоростью  $5^{\circ}C/мин$  от комнатной температуры до температур  $470, 500, 550, 600$  и  $650^{\circ}C$  – температур выше температуры кристаллизации, а затем конечная температура поддерживалась в течение одного часа. Испытания на растяжение проводились при комнатной температуре или при температуре

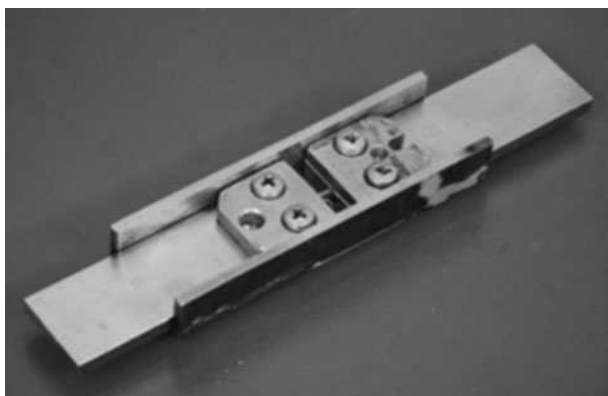


Рис. 7. Захват для образцов для проведения испытаний на растяжение.

90°, поддерживаемой в термокамере. Некоторые испытания проводились без разгрузки, однако другие проводились с разгрузкой для разделения упругой и неупругой деформации.

## 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ ИСХОДНО АМОРФНЫХ ЛЕНТ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Как было упомянуто выше, механические свойства множества кристаллических и аморфных материалов могут зависеть от температуры окружающей среды. Для проверки этой гипотезы для сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  были проведены эксперименты на растяжение аморфной ленты при различных температурах.

Первой серией экспериментов было растяжение образцов при комнатной температуре (20°C). Было проведено несколько испытаний, поскольку механическое поведение аморфных сплавов, испытываемых на растяжение, может зависеть от ряда факторов, таких как, например, состояние поверхности образца. Для каждого конкретного образца были получены значения модуля Юнга, найдено его среднее значение и погрешность (в виде стандартного отклонения). Получившееся значение составило  $(41.6 \pm 8.0)$  ГПа. Также

был проведен эксперимент с разгрузкой образца, из результатов которого видно, что аморфные образцы при комнатной температуре деформируются упруго.

Кроме того, для изучения влияния температуры на механическое поведение аморфного сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  была проведена серия экспериментов на растяжение аморфной ленты при различных повышенных температурах: 50, 150, 200, 250°C (рис. 4 на вклейке). Для каждого образца был измерен модуль Юнга, значения приведены в табл. 1.

Таблица 1. Модули Юнга аморфных лент из сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$ , растягиваемых при различных температурах.

Температура, °C	50	150	200	250
Модуль Юнга, ГПа	31.8	28	26.6	25.7

Были проанализированы результаты экспериментов и сделан вывод о том, что для аморфных тонких лент сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  существует зависимость модуля Юнга от температуры окружающей среды; при увеличении температуры значение модуля Юнга уменьшается. Подобное поведение наблюдалось, например, при исследовании сплавов на основе Рц, РсGa [14] и СоCrFeMnNi [15], а также во множестве чистых металлов, сталей и интерметаллидов [15].

## 8. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ ПОСЛЕ ОТЖИГА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

При нагреве аморфных образцов до высоких температур происходит кристаллизация, а кристаллический сплав  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$ , как известно, способен испытывать мартенситные переходы, т.е. механическое поведение и свойства таких образцов должны существенно зависеть от температуры. Чтобы проверить это предположение, были проведены серии экспериментов на растяжение лент при комнатной температуре, когда сплав находится в мартенситном состоянии, и при температуре 90°C, когда сплав находится в высокотемпературной, аустенитной фазе.

Первая серия экспериментов была осуществлена при температу-

ре 20°C (комнатной), в качестве образцов были взяты ленты, отожжённые при температурах 470, 500, 550, 600 и 650°C. Как было упомянуто выше, при этой температуре образцы находятся в мартенситном состоянии. На 2-D-диаграмме (рис. 5 на вклейке) были убраны петли разгрузок, чтобы упростить её восприятие, на 3-D-графике, напротив, присутствует вся история нагружения (рис. 6 на вклейке). Из рисунков видно, что при нагружении в образце накапливается неупругая деформация, которая не возвращается после разгрузки.

Это объясняется тем, что подобное неупругое деформирование происходит путём переориентации мартенсита. Был определён предел переориентации мартенситных кристаллов ( $\sigma_{\text{пм}}$ ) – напряжение, которое соответствует началу пластической деформации, связанной с началом преобразования мартенситных доменов; его значения представлены в табл. 2. Также была посчитана неупругая деформация, накопленная за счёт переориентации мартенсита при полной деформации в 5% ( $\Delta\varepsilon_{\text{пм}}$ ).

Т.к. неупругие деформации на этом этапе происходят именно за счёт переориентации доменов, то эту величину было логично искать как значение деформации, полученное после разгрузки после деформирования до 5%. Однако поскольку некоторые образцы разрушались прежде, чем деформация достигала значения в 5%, то имеются лишь данные для образцов с температурой отжига 470, 500 и 600°C (табл. 2).

**Таблица 2. Значения предела переориентации мартенсита – значения напряжения, соответствующего началу неупругой деформации за счёт переориентации мартенсита, для кристаллических лент из сплава Ti<sub>50</sub>Ni<sub>25</sub>Cu<sub>25</sub>, отожжённых при различных температурах и растягиваемых при температуре 20°C.**

Температура отжига образцов, °C	470	500	550	600	650
Предел переориентации мартенсита $\sigma_{\text{пм}}$ , МПа	20	49	123	132	129
Неупругая деформация $\Delta\varepsilon_{\text{пм}}$ , %	3,3	3,2	—	2,5	—

Из полученных данных видно, что при температурах 470-550°C прослеживается рост предела мартенситной переориентации  $\sigma_{\text{пм}}$  при увеличении температуры отжига. При температурах выше

550°С эта зависимость исчезает и значение стабилизируется. Также видно, что величина неупругой деформации, накопленной за счёт механизма переориентации мартенситных кристаллов, уменьшается с увеличением температуры отжига.

Вычислить модуль Юнга мартенсита в этой серии экспериментов не представилось возможным, поскольку нет достаточно протяжённых линейных участков, при низких температурах отжига переориентация начиналась при малых напряжениях.

Вторая серия экспериментов была проведена на аналогичных образцах, подвергнутых отжигу при температурах 470, 500, 550, 600 и 650°С, но деформирование проводилось при температуре 90°С, при которой кристаллический сплав  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  находится в аустенитном состоянии. На рис. 7 на вклейке представлены диаграммы последнего цикла деформирования образцов  $\sigma_{пм}$  (для облегчения визуального восприятия диаграммы смещены друг относительно друга по горизонтальной оси). На рис. 8 на вклейке представлен 3D-график диаграмм деформирования данных образцов вместе с петлями разгрузок.

Был вычислен модуль Юнга аустенита, данные представлены в табл. 3. Найти модуль Юнга мартенсита снова не удалось, потому что образцы разрушались до того, как происходил выход на линейный участок после фазового превращения  $A \rightarrow M$ . Вместе с тем был определён фазовый предел текучести  $\sigma_{\phi}$  – напряжение, соответствующее началу прямого мартенситного превращения (табл. 3). Другие ключевые точки, соответствующие концу прямого преобразования, а также началу и концу обратного преобразования, выделить не удалось, поскольку образцы разрушаются до того, как на диаграммах деформирования начинают наблюдаться отчётливые петли гистерезиса.

**Таблица 3. Значения модуля Юнга аустенита и фазового предела текучести для кристаллических лент из сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$ , отожжённых при различных температурах и растягиваемых при температуре 90°С.**

Температура отжига образцов, °С	470	500	550	600	650
Модуль Юнга аустенита, ГПа	26.2	29.4	31.9	34.3	31.5
Фазовый предел текучести $\sigma_{\phi}$ , МПа	240	303	356	281	282

Таким образом, можно утверждать, что модуль Юнга растёт при увеличении температуры отжига от 470 до 600°C, а затем его значение падает (при 650°C). Похожим образом себя ведёт и фазовый предел текучести, увеличиваясь при росте температур от 470 до 550°C, а затем уменьшаясь при приближении к 600°C и впоследствии стабилизируясь.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый комплекс экспериментальных исследований механического поведения аморфного и кристаллического сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  позволил установить, что:

- аморфные быстрозакалённые ленты сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  в интервале температур 20-250°C деформируются упруго вплоть до разрушения, при этом модуль Юнга уменьшается с ростом температуры деформирования;

- подвергнутые последующему отжигу при различных температурах кристаллизованные быстрозакалённые ленты сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  в аустенитном состоянии демонстрируют псевдоупругое поведение, при этом фазовый предел текучести зависит от температуры отжига;

- в мартенситном состоянии кристаллические ленты сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  деформируются неупруго за счёт механизма переориентации мартенситных доменов, при этом напряжение, при котором начинается реализация данного механизма, а также величина накопленной деформации зависят от температуры, при которой проводился отжиг кристаллизованных образцов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуляев А.П. Металловедение. М.: Металлургия, 1986. – 544 с.
2. Degeratu S., Rotaru P., Rizescu S., Bizdoacă N.G. Thermal study of a shape memory alloy (SMA) spring actuator designed to insure the motion of a barrier structure // J. Therm. Anal. Calorim. 2013. Vol. 111. P. 1255-1262.
3. Слесаренко В.Ю. Функциональные свойства аморфно-кристаллических сплавов на основе  $TiNi$ . Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук В.Ю. Слесаренко. 2013. – 127 с.

4. Liu Y., Zeliang X. Detwinning in Shape Memory Alloy : Под ред. Reese P.L. // Progress in Smart Materials and Structures. 2007. Vol. 11. P. 29-65.
5. Mohd Jani J., Leary M., Subic A., Gibson M.A. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities // Materials and Design. 2014. Vol. 56. P. 1078-1113.
6. Гюнтер В.Э., Ходоренко В.Н. и др. Никелид титана. Медицинский материал нового поколения. Томск : Изд-во МИЦ, 2006. – 296 с.
7. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. - 216 с.
8. Bhadeshia H. K. D. H., Honeycombe R. Steels: Microstructure and Properties. Elsevier, 2006. – 344 с.
9. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов. М.: Металлургия, 1986. – 480 с.
10. Ооцука К., Симидзу К., Судзуки Ю. Сплавы с эффектом памяти формы: Пер. с яп. Под ред. Х. Фунакубо. М.: Металлургия, 1990. – 224 с.
11. Moberly W.J., Proft J.L., Duerig T.W., Sinclair R. Twinless Martensite in TiNiCu Shape Memory Alloys // Materials Science Forum. 1990. Vol. 56-58. P. 605-610.
12. Солнцев Ю.П., Пряхин Е.И., Пирайнен В.Ю. Специальные материалы в машиностроении. СПб.: Химиздат, 2004. – 640 с.
13. Suryanarayana C., Inoue A. Bulk Metallic Glasses. CRC Press, 2010. – 565 с.
14. Migliori A., Mihut I., Betts J.B., Ramos M., Mielke C., Pantea C., Miller D. Temperature and time-dependence of the elastic moduli of Pu and Pu-Ga alloys // Journal of Alloys and Compounds. 2007. Vol. 444-445. P. 133-137.
15. Laplanche G., Gadaud P., Horst O., Otto F., Eggeler G., George E.P. Temperature dependencies of the elastic moduli and thermal expansion coefficient of an equiatomic, single-phase CoCrFeMnNi high-entropy alloy // Journal of Alloys and Compounds. 2015. Vol. 623. P. 348-353.

# ГМГД МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ФАЗЫ МАГНИТОСФЕРНОЙ СУББУРИ

Р.С.Голубцов

Развитие космических технологий требует возможности предсказывать процессы, протекающие в магнитном поле Земли. Наиболее сильными возмущениями, представляющими особый интерес для исследований, являются магнитосферные суббури. Глобальное МГД моделирование, особенно в тесной координации с многоточечными наблюдениями со спутников, помогает интерпретировать сложную, динамичную, трехмерную конфигурацию плазмы. В данной работе была сделана попытка ГМГД моделирования и анализа процессов, сопутствующих началу суббури, на основе спутниковых данных.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Так как человечество становится все более и более зависимым от космических технологий, очень важно быть в состоянии точно отобразить удаленное геомагнитное поле Земли и предсказать его динамику, используя данные о солнечном ветре. К решению данной проблемы можно подходить с двух сторон: чисто теоретически, решая основные уравнения магнитной гидродинамики, либо используя моделирование геомагнитного поля. По данным спутниковых наблюдений, накопленным за десятилетия наблюдений в магнитосфере, можно составлять глобальные описания.

Наиболее значительные возмущения в земной магнитосфере - магнитосферные суббури. Магнитосферная суббуря – это взрывное высвобождение энергии, поступившей извне и запасенной в хвосте магнитосферы. Попытка выяснить, с чего начинается суббуря – а именно процессы, протекающие во время ее предварительной фа-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-12-00138), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 15 марта 2016 г.

© Р.С.Голубцов, 2017



зы, является одной из важнейших задач МГД моделирования. Анализ результатов измерений в магнитосфере, полученных со спутника, показывает, что процессы, развивающиеся в хвосте магнитосферы, играют центральную роль при нестационарных условиях и обуславливают развитие магнитосферных суббурь [1,2], поэтому целью данной работы является моделирование и анализ событий предварительной фазы суббури, происходящих в хвосте магнитосферы.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Для количественного описания изменений, происходящих во время суббури в магнитосфере Земли, были обработаны данные, полученные из центра ССМС[3]. Глобальное МГД моделирование представляет из себя решение уравнений магнитной гидродинамики, где в качестве граничных условий подставляются параметры солнечного ветра. Было проведено качественное и количественное сравнение результатов моделирования для двух симуляций с различными параметрами.

В данной работе были использованы данные симуляций «CDPS2HiRes victor\_Sergeev\_123014» и «HTPS2HiRes victor\_sergeev\_011115».

## 3. ПАРАМЕТРЫ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА И ММП

В работе были использованы результаты двух симуляций модели LFM [4,5] с различными условиями в солнечном ветре. Уравнения МГД в LFM модели имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot \rho \vec{v}, \\ \frac{\partial \rho \cdot \vec{v}}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + I - P) - \nabla \cdot \left( I - \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{4\pi} \right), \\ \frac{\partial E_p}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left( \vec{v} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \right) \right) - \vec{v} \cdot \nabla \cdot \left( I - \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}\vec{B}}{4\pi} \right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}),$$

$$E_p = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1},$$

где  $v$  - скорость,  $\rho$  - плотность плазмы,  $\gamma$  - скорость звука,  $P$  - давление,  $B$  - магнитное поле. Параметры солнечного ветра были выбраны таким образом, чтобы получить два различных состояния плазменного слоя: 1)  $V_x = -700$  км/с,  $V_y = V_z = 0$ ,  $N = 2$  см<sup>-3</sup>,  $T = 150000$  К - горячий и разреженный плазменный слой (HTPS); 2)  $V_x = -320$  км/с,  $V_y = V_z = 0$ ,  $N = 10$  см<sup>-3</sup>,  $T = 30000$  К - холодный и плотный плазменный слой (CDPS). Эти параметры сохранялись постоянными в течение всей симуляции. Единственным переменным параметром была  $B_z$  компонента ММП (межпланетного магнитного поля) ( $B_x = B_y = 0$ ), которая изменяла свое направление скачкообразно с +3 нТ до -3 нТ в первой симуляции и с +6 нТ до -6 нТ во второй. Важно отметить, что параметры солнечного ветра и ММП выбраны таким образом, что в обеих симуляциях скорость загрузки магнитного потока в магнитосферу одинакова (одинаковая величина электрического поля в солнечном ветре).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

При перевороте  $B_z$  ММП к югу активизируется магнитное пересоединение в лобовой области магнитопаузы, приводящее к переброске магнитного потока с дневной стороны магнитосферы в хвост. При этом происходит накопление энергии в хвосте - предварительная фаза - с последующим высвобождением в ходе развития взрывной фазы суббури. Для того чтобы одновременно проследить за изменением различных параметров магнитосферы во время предварительной фазы, мы использовали результаты двух симуляций с переворотом  $B_z$  компоненты ММП к югу (рис. 9а и рис. 10а на вклейке). Соответствующая МГД конфигурация магнитосферы представлена на рис. 11 на вклейке.

По данным глобального МГД моделирования для магнитосферы с холодным и плотным плазменным слоем и магнитосферы с горячим и разреженным плазменным слоем можно выявить сходства и

различия в поведении основных магнитосферных параметров в периоды предварительной фазы суббури. Здесь мы будем следить за следующими параметрами: изменение потенциала полярной шапки (РСР), изменение магнитного поля в долях хвоста  $B_L$ , изменение толщины плазменного слоя, положение магнитопаузы и внутреннего края токового слоя хвоста, значение локального минимума  $B_Z$  в плазменном слое.

Потенциал полярной шапки, характеризующий активность ММП, и магнитное поле в долях хвоста  $B_L$ , отражающее динамику магнитного потока, определяются непосредственно из модели. Параметры, не получаемые непосредственно из модели, определяются следующим образом:

- Толщина плазменного слоя определялась по значению  $z$ , соответствующего резкому спаду (его окончанию) на графике зависимости  $B_{1X}(z)$ ;
- Положение магнитопаузы определялось по смене знака компоненты  $B_{1Z}$ , соответствующей разрыву линий магнитного поля Земли на границе магнитопаузы при взаимодействии магнитного поля с сильным потоком солнечного ветра;
- До внутренней границы токового слоя наблюдается достаточно спокойное магнитное поле, а возникновение токового слоя является следствием большого градиента магнитного поля, следовательно, на внутренней границе токового слоя магнитное поле будет минимальным.

На рисунке 9б на вклейке видно, что после включения южной компоненты ММП происходит поджатие дневной магнитопаузы. Видно, что в течение предварительной фазы в обеих симуляциях подсолнечная точка передвинулась с  $10.2R_E$  до  $9.3R_E$ , что свидетельствует об эрозии магнитопаузы в процессе магнитного пересоединения.

По данным магнитного поля в долях (рис. 9г на вклейке) видно, что загрузка хвоста магнитным потоком начинается с задержкой, составляющей 7 минут для симуляции НТРС и 14 минут для симуляции СДРС. Данная задержка соответствует времени, которое

необходимо для достижения разрывом плоскости  $X = -15R_E$ , в которой произведены наблюдения магнитного поля. Начало закачки энергии из солнечного ветра в магнитосферу так же хорошо видно в резком изменении уровня ионосферной конвекции – величины разности потенциалов поперек полярной шапки (рис. 9в на вклейке). По этим данным мы можем определить начало предварительной фазы  $t=237$  минут для НТПС и  $t=244$  минуты для СДПС. Различия в скоростях солнечного ветра, задаваемых в начальных условиях симуляций, обуславливают задержку загрузки хвоста и начала предварительной фазы.

В течение предварительной фазы в хвосте магнитосферы наблюдаются следующие характерные изменения: рост магнитного поля в долях (рис. 10г на вклейке), увеличение абсолютного значения магнитного поля в локальном минимуме (рис. 10б на вклейке) и его перемещение ближе к Земле (рис. 9в на вклейке) и утоньшение плазменного слоя (рис. 10г на вклейке). Исходя из того, что у нас есть сведения о распределении магнитного поля, можно определить какие изменения происходят с токовым слоем, а также определить его внутреннюю структуру. Величина магнитного поля в долях в течение предварительной фазы увеличивается примерно на треть и для симуляции НТПС все время оказывается примерно на 10% больше, чем для СДПС. Кроме того, для НТПС локальный минимум поля выражен явно сильнее (в 2–3 раза) и находится на  $2–4R_E$  ближе к Земле (рис. 10б, и рис. 10в на вклейке). При этом толщина плазменного слоя для НТПС составляет  $2–4R_E$ , а для СДПС  $4–8R_E$ . Окончанием предварительной фазы является активизация магнитного пересоединения в плазменном слое хвоста магнитосферы (начало взрывной фазы суббури). Момент окончания предварительной фазы суббури можно определить по уменьшению закачки энергии, что видно из графика изменения магнитного поля в долях. Во время активизации магнитного пересоединения происходит резкий сброс магнитного потока хвоста, что можно увидеть по уменьшению величины магнитного поля в долях. По данным поля в долях взрывная фаза суббури начинается для НТПС в  $t = 285$  минут, а для СДПС в  $t = 298$  минут, что подтверждается дополнительным ростом величины ионосферного потенциала за счет включения дополнительного источника магнитосферной конвекции в хвосте.

По полученным данным МГД моделирования, момент окончания предварительной фазы суббури соответствует максимальному сжатию плазменного слоя до  $0.5R_E$  для НТПС и до  $1.5R_E$  для СДПС, близкому расположению локального минимума магнитного поля к Земле (соответственно  $X = -8R_E$  и  $X = -9R_E$ ) и его максимальному абсолютному значению (соответственно  $B_Z = -45$  нТ и  $B_Z = -35$  нТ). Таким образом, полная величина тока, а также толщина и плотность тока достигают экстремальных значений к концу предварительной фазы.

Основываясь на полученных результатах, можно сделать вывод о том, что при одинаковой скорости загрузки магнитосферы магнитным потоком в случае холодного плотного плазменного слоя и горячего разреженного плазменного слоя магнитосфера эволюционирует немного по-разному. Предварительная фаза СДПС оказывается более длительной ( $T_{GR} = 54$  минуты) по сравнению с НТПС ( $T_{GR} = 48$  минут), что вероятно связано и с различием в геометрических размерах плазменного слоя, и с различием в параметрах плазмы в нем.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ ГМГД расчетов предварительной фазы суббури для двух симуляций с разными параметрами плазмы солнечного ветра. Получены количественные сведения об основных изменениях в магнитосфере во время предварительной фазы при величинах электрического поля в солнечном ветре  $V B_s \approx 2$  мВ/м:

1. Эрозия магнитопаузы составляет  $1.3R_E$  за время 60 мин;
2. Усиление ионосферной конвекции от 30 кВ до 120 кВ;
3. Увеличение магнитного поля в долях хвоста на 30%;
4. Утоньшение токового слоя хвоста в 4-8 раз ( $X = -15R_E$ ) и приближение его внутреннего края к Земле с  $X = -11 - 14R_E$  до  $X = -8R_E$ .

Две симуляции с одинаковой скоростью загрузки магнитного потока демонстрируют сходства динамики магнитосферы, различаю-

Таблица 1: Количественное сравнение результатов моделирования

Параметр	НТПС		CDPS	
	до	после	до	после
Движение подсолнечной точки, $R_e$	10.2	9.3	10.2	9.3
Начало предварительной фазы, мин.	237		244	
Окончание предварительной фазы, мин.	285		298	
Длительность предварительной фазы, мин.	54		58	
Толщина плазменного слоя, $R_E$	2-4		4-8	
Максимальное сжатие ПС, $R_E$	0.5		1.5	
Расположение локального минимума $B1_Z$ , $R_E$	-8		-9	
Значение локального минимума $B1_{Z0}$ , нТл	-45		-35	

щиеся временем загрузки:

1. Для высокоскоростного солнечного ветра с горячей плазмой формируется горячий и разреженный плазменный слой. Длительность предварительной фазы  $\Delta t = 48$  минут;
2. Для медленного солнечного ветра с холодной плазмой формируется холодный и плотный плазменный слой, для которого характерна более длительная предварительная фаза  $\Delta t = 54$  минут.

Результаты ГМГД моделирования могут быть использованы в качестве эталона для проверки других моделей. В частности, для данных параметров было проведено также адаптивное моделирование. Предполагается, что зная распределение полей в ГМГД, можно с помощью адаптивных моделей [6] восстановить полную конфигурацию магнитосферы на основе нескольких точечных измерений. На рис. 12 и рис. 13 на вклейке представлено сравнение распределений

$B_{1X}$  и  $B_{1Z}$  компонент магнитного поля в случае ГМГД (рис. 12 на вклейке) и адаптированного (рис. 13 на вклейке) моделирования.

Адаптивная модель АМ03, в данном случае, хорошо описывает ГМГД конфигурацию магнитного поля хвоста магнитосферы в течение предварительной фазы суббури, воспроизводя ключевые элементы конфигурации токового слоя. Сходен как характер распределений, так и величины поля в различных областях сечения. По результатам адаптированного моделирования положение локального максимума тока соответствует  $X = -13R_E$ , что хорошо согласуется с данными ГМГД, а положение внутреннего края токового слоя  $X = -7R_E$ , что на  $2R_E$  ближе, чем в ГМГД.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.А. Сергееву и И.А. Черняеву за помощь в проведении моделирования и предоставленные данные.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б.М. Яновский, Земной магнетизм, Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1953;
2. <http://nuclphys.sinp.msu.ru/magn/index.html>;
3. <http://ccmc.gsfc.nasa.gov/>
4. Chia-Lin Huang et al., Storm-time configuration of the inner magnetosphere: Lyon-Fedder-Mobarry MHD code, Tsyganenko model, and GOES observations, Journal of Geophysical Research, Vol. 111, doi: 10.1029/2006JA011626, 2006.
5. J.G. Lyon, J.A. Fedder, C.M. Mobarry, The Lyon-Fedder-Mobarry (LFM) global MHD magnetospheric simulation code, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, Vol. 66, Iss. 15-16, Oct-Nov 2004
6. M.Kubyshkina et al., Toward adapted time-dependent magnetospheric models: A simple approach based on tuning the standard model, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 114, doi: 10.1029/2008JA013547, 2009

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ЛИСТА ГРАФЕНА С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Я.А.СЕВАСТЬЯНОВ

Методом молекулярной динамики исследуются механические характеристики листов графена с внутренней трещиной, а также с получившейся «квази-трещиной», представляющей собой длинные цепочки вакансий и соответствующих дисклинаций. Исследуется вопрос предпочтительной геометрии берегов новых участков трещин (т.е. новых участков свободных поверхностей трещин, образующихся при росте трещин). По итогам работы обнаружено, что наличие трещины в графене приводит к значительному снижению его прочности (в 3-4 раза).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Графен представляет собой двухмерный углеродный материал, обладающий уникальными механическими свойствами, которые представляют огромный интерес для технологических приложений; см., например, обзоры [1-5]. В частности, как это показано в экспериментальной работе [6], прочность бездефектного графена достигает рекордного значения 130 ГПа. В то же время, реальные листы графена содержат различные топологические дефекты (вакансии, дивакансии, дефекты Стоуна-Уолеса и др.), поэтому влияние дефектов на свойства графена вызывает особый интерес. Цель настоящей работы представляет собой исследование методом молекулярной динамики механических характеристик листов графена, содержащих дефект в виде трещины.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ: МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ.

В представленной работе методом молекулярной динамики было смоделировано растяжение в кресельнообразном (armchair) и зигзагообразном (zigzag) направлениях (в зависимости от ориентации

---

Доклад на семинаре 29 марта 2016 г.

© Я.А.Севастьянов, 2015



его границы по отношению к оси растяжения) листа графена с дефектом в виде трещины. Для моделирования структурной геометрии графена и процесса его механического растяжения применялся пакет молекулярной динамики LAMMPS. Характеристики межатомных связей заданы при помощи парного потенциала AIREBO [7], демонстрирующего наибольшую точность при описании графеновых структур. В «чистом» (бездефектном) листе графена, имеющего размеры  $97 \text{ \AA} \times 96 \text{ \AA}$ , при помощи молекулярного редактора, была вырезана трещина размером  $50 \text{ \AA} \times 5 \text{ \AA}$ . После чего в аналогичном по размеру листе была вырезана подобная трещина размером  $4 \text{ \AA} \times 46 \text{ \AA}$ .

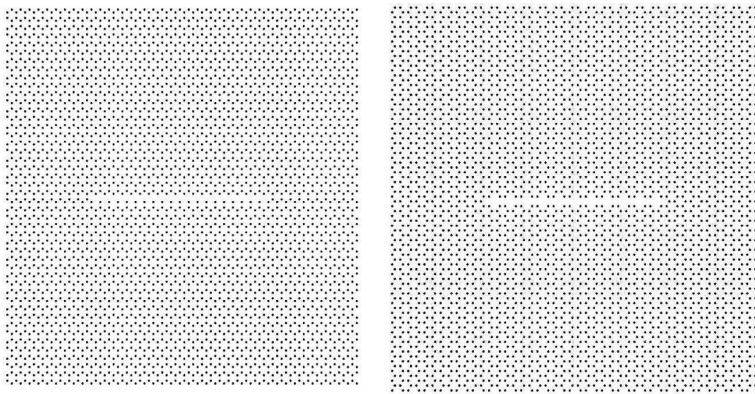


Рис. 1. Две решетки графена с трещиной при помещении в термостат.

Произведена данная операция для того, чтобы получить две симметричные структуры, деформируя которые перпендикулярно направлению трещины, имелась бы возможность сравнить деформацию в кресельнообразном и зигзагообразном направлениях. В качестве граничных условий для расчетной области были использованы периодические граничные условия. Для предварительного приведения системы в стабильное состояние была выполнена минимизация энергии, после чего каждая из структур была подвержена одноосному растяжению со скоростью деформации  $0.002 \text{ ps}^{-1}$ . Перед моментом начала разрушения, для более корректной симу-

ляции, скорость была понижена до  $0.0001 \text{ ps}^{-1}$ . Деформация проводилась при постоянной температуре, поддерживаемой на уровне 300 К. Моделирование температуры осуществлялось посредством NVT симуляции атомов решётки.

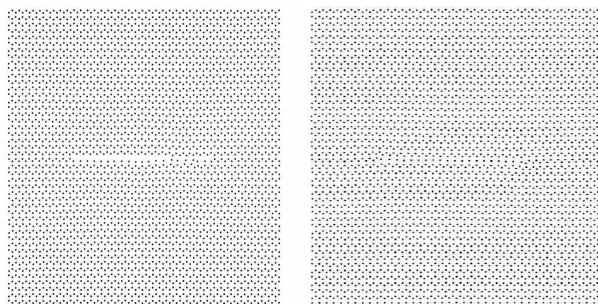


Рис. 2. Формирование квазитрещины.

Оказалось, что при начале температурных колебаний расстояние между атомами сокращается до величины межатомного взаимодействия, и трещина таких размеров вырождается (Рис. 2). Получившаяся «квази-трещина» представляет собой длинные цепочки вакансий и соответствующих дисклинаций. Симметрия у данных двух листов нарушается, поэтому рассмотрим только один случай.

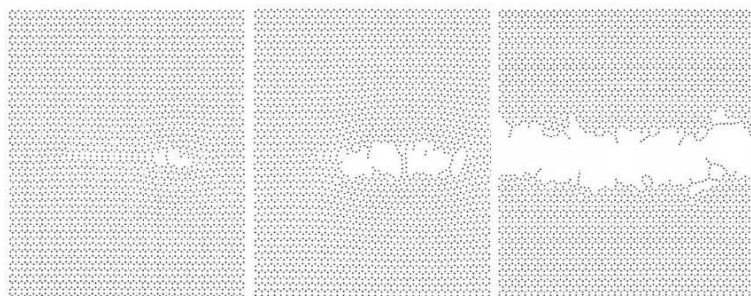


Рис. 3. Разрушение образца.

Сравнивая полученные данные (Рис. 4) с известными результатами показателей механических параметров чистого графена [6], видно, что «квази-трещина» вызывает падение прочности со 100 ГПа до 70 ГПа и падение предельной деформации со 17% до 14%.

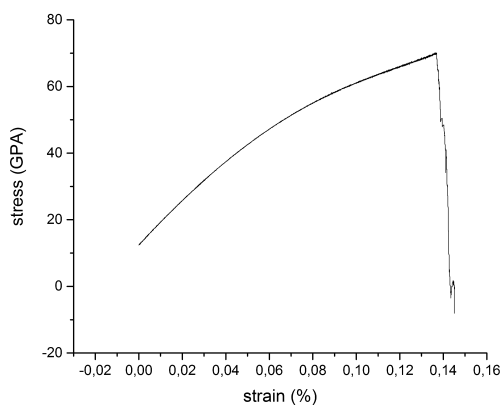


Рис. 4. Полученная зависимость напряжения  $\sigma$  от деформации  $\epsilon$

Трещины в листах графена были увеличены до размеров  $51 \text{ \AA}$   $\times$   $7 \text{ \AA}$  и  $7 \text{ \AA}$   $\times$   $46 \text{ \AA}$  соответственно, опыт был повторен. В этот раз эффекта образования «квази-трещины» не наблюдалось.

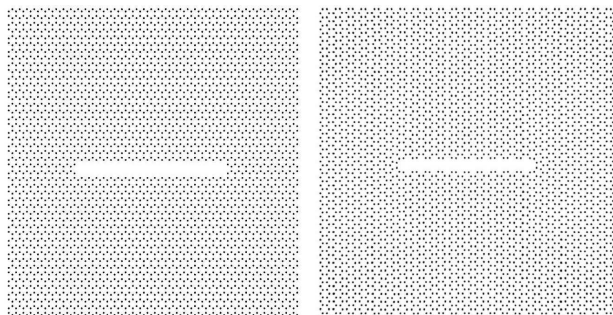


Рис. 5. Образец с трещиной при помещении в термостат

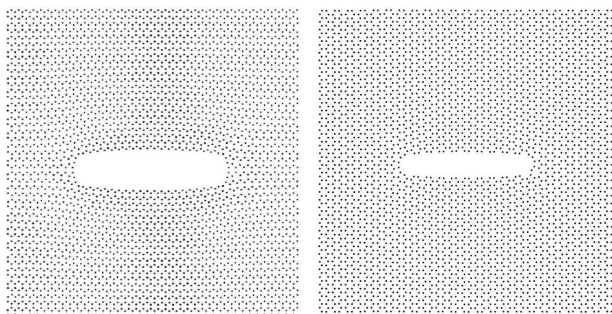


Рис. 6. Разрушение образца с трещиной. Рис. слева - растяжение в кресельнообразном направлении, Рис. справа - в зигзагообразном

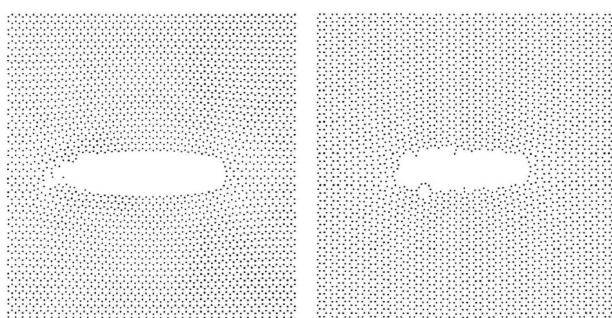


Рис. 7. Разрушение образца с трещиной.

На Рис. 7 видно, что разрушение трещины начинается с её удлинения. Интересно, что трещина развивается в направлении zigzag и в дальнейшем может перейти с одного zigzag-направления на другое, тем самым формируя на микроуровне зигзагообразный путь следования трещины. Это объясняется тем, что трещина удлиняется по пути наименьшего сопротивления. На макроуровне это значит, что трещина в данном образце будет расширяться перпендикулярно нагрузке (что видно на Рис. 9 для armchair-ориентированного графена, у которого направление движения трещины на микроуровне совпадает с таковым на макроуровне). На микроуровне края с ориентацией zigzag имеют меньшую поверхностную энергию, по сравнению с armchair - ориентиро-

ванными. Следовательно, при разрушении в этом направлении, трещина встречает меньшее сопротивление. [8] Зигзагообразный ход движения трещины снимает возникшее противоречие.

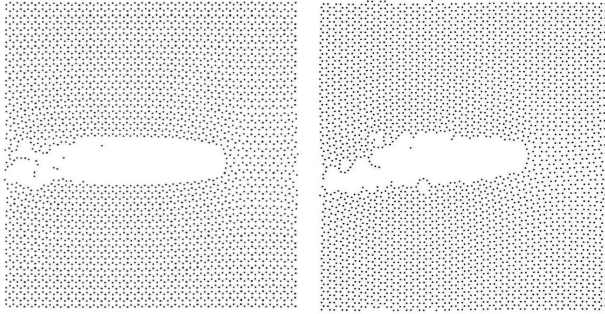


Рис. 8. Разрушение образца с трещиной.

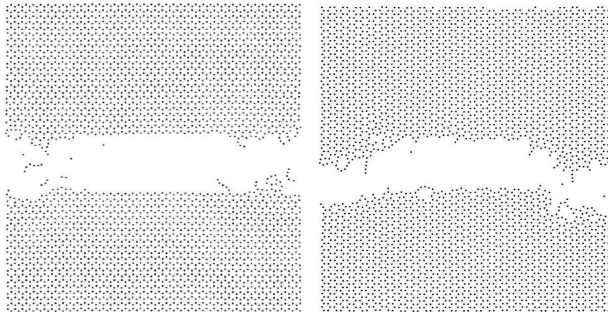


Рис. 9. Разрушение образца с трещиной.

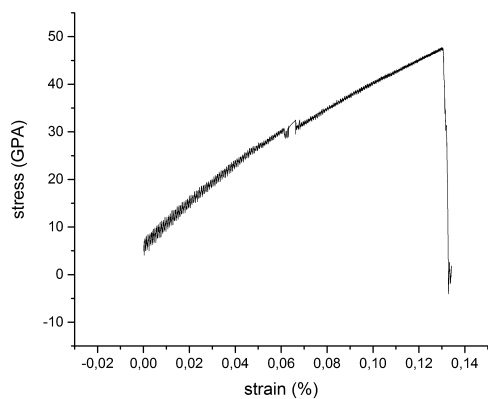
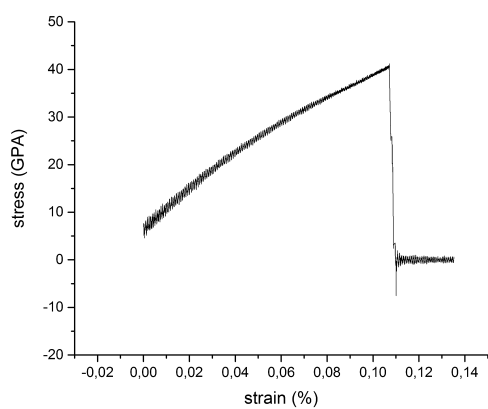


Рис. 10. Полученные зависимости напряжения  $\sigma$  от деформации  $\epsilon$

Результаты (Рис. 10) свидетельствуют о том, что прочность у armchair ориентированного графена с трещиной составляет 42 ГПа, а у zigzag ориентированного 48 ГПа. Предельная деформация равна 10.7% и 13% соответственно.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Проведенное исследование показывает, что листы графена с квазитрещинами при растяжении демонстрируют более высокие показатели предельной прочности и деформации, по сравнению с аналогичными листами графена, содержащими полноценные трещины той же длины. Разрушение листа графена с квазитрещиной начинается с её трансформации в трещину без увеличения длины квазитрещины. После таковой трансформации результирующая трещина начинает удлиняться, т.е. реализуется обычный рост трещины. Разрушение листа графена с трещиной начинается с ее удлинения с последующим лавинообразным развитием, которое ведет к разрушению материала. Пределы прочности и деформации у листа zigzag-ориентированного графена выше соответствующих величин у armchair-ориентированного листа, что качественно согласуется с данными из работы [9]. Листы графена с квазитрещинами и трещинами демонстрируют хрупкое поведение. На межатомном уровне это означает, что эволюция квазитрещин и трещин реализуется посредством разрывов межатомных связей. По проделанной работе нельзя однозначно сказать, какая геометрия для берегов новых участков трещин является предпочтительной. Визуально можно уследить некоторое различие между почти идеально перпендикулярным развитием трещины в armchair-ориентированном листе (Рис. 9, образец слева) и несколько отклоненным в zigzag-ориентированном (Рис. 9, образец справа), наталкивающие на гипотезу о том, что предпочтительным является направление zigzag (что согласуется с теорией, изложенной в [8]). Однако трещина после начала разрушения развивается настолько быстро, что сложно сказать, выходит ли полученный результат за пределы погрешности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A.K. Geim, K.S. Novoselov // Nature Materials 6 (2007) 183.
2. A.K. Geim // Science 324 (2009) 1530
3. A.H. Castro Nero, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim // Reviews of Modern Physics 81 (2009) 109.
4. F. Molitor, J. Guttinger, C. Stampfer, S. Droscher, A. Jacobson, T. Ihn, K.

- 
- Ensslin // Journal of Physics: Condensed Matter 23 (2011) 1
5. I.A. Ovid'ko // Reviews on Advanced Materials Science 34 (2013) 1.
  6. C. Lee, X. Wei, J.W. Kysar, J. Hone // Science 321 (2008) 385.
  7. S.J. Stuart, A.B. Tutein, J.A. Harrison A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions// Journal of chemical physics V. 112 № 14 (2000)
  8. Hanqing Yin, H. Jerry Qi, Feifei Fan, Ting Zhu, Baolin Wang, Yujie Wei Griffith Criterion for Brittle Fracture in Graphene // Nano Lett. 15, 1918-1924 (2015)
  9. С.П. Киселев, Е.В. Жиров Численное моделирования деформирования и разрушения графена при одноосном растяжении методом молекулярной динамики // Физическая механика 15 2 (2012) 69-76



# УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОНСОЛИ

Д.В. ЛАЧУГИН

В статье рассмотрена математическая модель изгиба вертикальной консоли из материала со свойством пластической анизотропии, консоль находится под действием сосредоточенной следящей нагрузки на свободном конце. Пределы текучести при растяжении или сжатии материала балки считаются известными и различными. Основываясь на классической теории изгиба балок и теории идеальной пластичности, задача решается аналитически. Получено дифференциальное уравнение для нахождения кривизны балки. В результате интегрирования получено точное решение для прогиба вертикальной консоли и проведен расчет для материала с эффектом SD (сталь A40X).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи проектирования и строительства требуют создания все более сложных математических моделей конструкций, учитывающих пластические свойства материалов. Основы математической теории пластичности можно найти в работах [1], [2]. В предлагаемой математической модели предлагается учесть зависимость механических характеристик материала от знаков возникающих напряжений и вида напряженного состояния, такие материалы называют разносопротивляющимися или разномодульными [3], в научной литературе иногда используется термин SD-материалы [4], [5].

Построение предполагаемой математической модели изгиба балок заключается в принятии ряда положений, в том числе гипотезы плоских сечений, одноосности нагружения, схемы идеальной пластичности. Для задач изгиба в упругой стадии и при изотропном упруго-пластическом изгибе эти допущения позволяют построить

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00523), а также при использовании ресурсов РЦ ВЦ СПбГУ.

Доклад на семинаре 12 мая 2015 г.

© Д.В. Лачугин, 2017

точные решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и совместности деформаций [6]. Некоторые результаты для таких балок получены в [7], [8]. В случае, когда точных решений построить не удастся, математические задачи теории пластичности и нелинейной упругости можно рассматривать численно [9], [10] или асимптотическими методами.

Результаты исследований прочности стержневых и балочных конструкций из особых конструкционных материалов открывают новые возможности для проектирования и возведения крупных сооружений при одновременном обеспечении их высокой надежности в условиях эксплуатации. К примеру, конструкционные решения при проектировании буровых платформ для шельфовой добычи углеводородов, увеличение мощности и размеров сооружений в судостроении, повышение параметров рабочих давлений и внешних воздействий, в том числе и ледовой нагрузки, существенно сказывается на стоимости таких конструкций и их эффективности при использовании в неблагоприятных климатических условиях. Особо остро ставится вопрос о критериях длительной механической работоспособности, прочности и надежности при работе в упруго-пластической стадии нагружения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматриваем упруго-пластический изгиб вертикальной балки, заделанной на нижнем конце. На верхнем конце действует сосредоточенная следящая нагрузка  $P$ . Материал консоли обладает свойством разнопрочности при растяжении и сжатии. Расчет проводится до момента образования в консоли пластического шарнира в месте жесткой заделки. Для описания эффекта пластической анизотропии материала при растяжении и сжатии вводим безразмерный параметр  $d$  как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца  $\sigma_s$  к пределу текучести при растяжении  $\sigma_t$ . Далее предполагаем, что  $d \geq 1$ , что характерно для многих видов сталей и металлических сплавов. У вертикальной балки предполагается прямоугольное сечение с размерами  $2h$  на  $b$ , длина балки  $L$ . Деформацией сдвига в поперечном сечении при изгибе пренебрегаем. Для

исследования влияния веса балки на процесс упруго-пластического изгиба введем модифицированный параметр, а именно

$$\bar{d} = \frac{\sigma_s - \gamma L}{\sigma_t + \gamma L},$$

где  $\gamma$  – удельный вес материала балки. Допущение об идеальной пластичности эквивалентно допущению о том, что коэффициент Пуассона  $\nu$  в пластических областях равен 0.5, а в упругих областях он ниже этого значения, чаще всего  $\nu = 0.3$ , следовательно при переходе через линию раздела упругой и пластической области для некоторых составляющих тензора напряжений может нарушаться требование непрерывности, но если рассматривается одноосное нагружение, то имеется одна основная составляющая тензора напряжений, а остальные не влияют на величину изгибающего момента в сечении. Как известно, при поперечном изгибе гипотеза плоских сечений не включает в себя никаких предположений о свойствах материала, из которого изготовлен брус.

Процесс появления и развития пластических зон в вертикальной балке схематически показан на рис. 1.

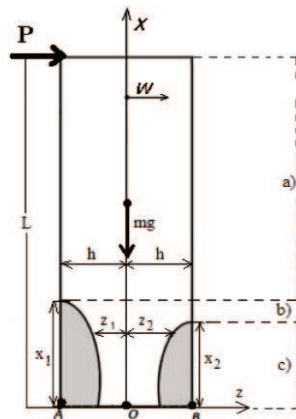


Рис. 1. Схема изгиба вертикальной балки силой  $P$ .

В рассматриваемом случае материал балки таков, что пластиче-

ские области в зоне растягивающих нагрузок формируются ранее, чем в области сжимающих. При упругом изгибе предполагается, что растяжение и сжатие происходит с одинаковым модулем упругости. На рис. 1 области балки, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы. Из-за нарушения симметрии необходимо сделать некоторые замечания по поводу выбора системы координат. Предположение о наличии пластической анизотропии материала при растяжении и сжатии материала балки приводит к нарушению симметрии при развитии пластических деформаций, следовательно, имеет место смещение нейтральной оси по сравнению со средней геометрической. Поэтому выберем начало координат в центре балки на нейтральной оси, направление осей указано на рис. 1, а для вычисления отклонения нейтральной оси от средней геометрической введем функцию  $z_0(x)$  и две новые функции  $z_1(x)$ ,  $z_2(x)$ , которые будут характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической части балки в областях растяжения и сжатия. А также введем длины пластических зон  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем, индекс 1 будет характеризовать величины в области растяжения балки, а индекс 2 — в области сжатия.

Фиксируем три случая различных НДС в сечении балки: упругий случай при  $x_1 < x < L$  (рис. 2.a), случай с одной пластической зоной в области растяжения при  $x_2 < x < x_1$  (рис. 2.b) и случай с двумя несимметричными пластическими зонами в области растяжения и в области сжатия при  $0 < x < x_2$  (рис. 2.c).

Ось балки, напряжение в котором равно нулю, будет называться нейтральной осью. Для обеспечения равновесия в каждом сечении, площади фигур на эпюре напряжений (рис. 2) слева и справа от нейтральной линии должны быть равны, следовательно, при учете эффекта SD происходит смещение нейтральной оси от геометрической центральной оси. При предположении что предел текучести при растяжении ниже, чем при сжатии на рис. 2 нейтральная ось смещается вправо относительно средней геометрической оси.

Введем следующие обозначения:  $M_t$  — общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуется первая зона пластичности при растяжении,  $M_*$  — общий момент относительно нейтральной оси, при котором образуются вторая зона пластичности.  $M_k$  — общий момент относительно нейтральной оси, при котором в ниж-

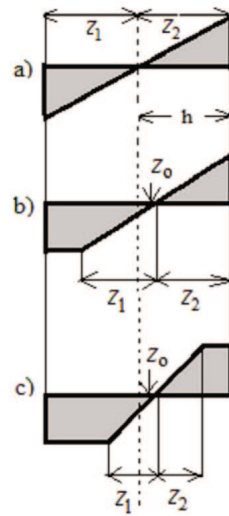


Рис. 2. Схема распределения напряжений в сечении вертикальной балки.

нем защемленном сечении балки пластические зоны смыкаются, образуя пластический шарнир. Формулы для расчета моментов приведены в [7] и имеют вид

$$M_t = \frac{2}{3}bh^2\sigma_t, \quad M_* = \frac{3\bar{d}-1}{\bar{d}+1}M_t, \quad M_k = \frac{2bh^2\bar{d}\sigma_t}{\bar{d}+1}. \quad (1)$$

$M = M_t$  при  $x = x_1$ ,  $M = M_*$  при  $x = x_2$ . Если  $z_1 = z_2 = 0$ , то  $M = M_k$  (см. рис. 1.) Если задача рассматривается без учета веса, то в приведенных формулах надо заменить  $\bar{d}$  на  $d$ .

На основе выполнения требования равновесия запишем внутренний момент в любом сечении  $x$

$$M = b(\sigma_t - L\gamma) \left( \frac{(h+z_0)^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + b(\sigma_s + L\gamma) \left( \frac{(h-z_0)^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + bE\kappa \left( \frac{z_1^3}{3} + \frac{z_2^3}{3} \right). \quad (2)$$

В этом соотношении введено обозначение кривизны балки  $\kappa$  и  $E$

– модуль Юнга. Первое слагаемое соответствует моменту в пластической зоне при растяжении, второе – моменту в пластической зоне при сжатии, а третье слагаемое определяет момент в упругой части балки. Нетрудно видеть, что все моменты, введенные выше, а именно  $M_t$ ,  $M_*$ ,  $M_k$  могут быть получены из общего выражения для момента.

В табл. 1 приведены результаты расчета критического момента при учете веса балки и без учета веса. Размерность  $M_k$  указана МПа · м<sup>3</sup> для стали А40Х с удельным весом  $\gamma = 78$  МПа/м.

Таблица 1. Влияние веса балки на величину момента  $M_k$

	$d$	1.0	1.1	1.2	1.3
$\gamma = 0$	$M_k$	1.520	1.592	1.658	1.718
$\gamma = 78$	$M_k$	1.518	1.591	1.657	1.717

На основании табл. 1 можно сделать вывод о незначительном влиянии дополнительного изгибающего момента, связанного с весом. Результаты различаются менее, чем на 0,1 %. Следовательно, учет веса незначительно влияет на результат расчета. В дальнейшем его рассматривать не будем. Также отметим, что учет веса конструкции, дает некоторый запас прочности.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБА БАЛКИ

Изгибающий момент внешних сил равен

$$M = P(L - x) + 2wbh(L - x)\gamma. \quad (3)$$

Приравниваем выражения для внутреннего и внешнего момента. Получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно прогиба  $w$ . Это уравнение будет иметь различный вид для каждого случая  $a, b$  и  $c$  (см рис.2). Выразим в каждом из них кривизну  $\kappa$  и запишем

$$\kappa = \frac{M}{EI}, \quad x_1 \leq x \leq L$$

$$\kappa = \left( \frac{2M_t}{M_k(d+1)\bar{d}^{-1} - M} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t - (L-x)\gamma}{Eh}, \quad x_2 \leq x \leq x_1$$

$$\kappa = \left( \frac{2M_t}{M_k(d+1)\bar{d}^{-1} - M} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \bar{d})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sigma_t - (L-x)\gamma}{4Eh}, \quad 0 \leq x \leq x_2.$$

Воспользуемся известным соотношением между кривизной  $\kappa$  и прогибом  $w$

$$\kappa = \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (4)$$

тогда в окончательном виде дифференциальные уравнения имеют вид, характерный для известных уравнений Эйлера вида

$$\frac{d^2w}{dx^2} + a(x)w + b(x) = 0,$$

где  $a(x)$ ,  $b(x)$  – гладкие функции. Уравнения такого вида решаются с помощью специальных функций, аналогичных специальным функциям Бесселя, а именно, с помощью функций Эйри.

Поскольку выше было выяснено незначительное влияние веса, то далее задачу будем рассматривать без его учета. В этом случае дифференциальные уравнения упрощаются и допускают прямое интегрирование в аналитических функциях.

Запишем упрощенные дифференциальные уравнения, которые будем решать для каждого интервала по  $x$ , начиная с области заделки, а затем объединим все решения (“склеим”) в одно решение для всей длины балки, используя условие гладкости и единственности прогиба.

При  $0 \leq x \leq x_2$  имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left( \frac{2M_t}{M_k(d+1)d^{-1} - P(L-x)} \right)^{\frac{1}{2}} (1+d)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sigma_t}{4Eh}.$$

При  $x_2 \leq x \leq x_1$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left( \frac{2M_t}{M_k(d+1)d^{-1} - P(L-x)} \right)^2 \cdot \frac{\sigma_t}{Eh}.$$

Наконец, для упругой верхней части балки имеем  $x_1 \leq x \leq L$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{P(L-x)}{EI}.$$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДЛЯ СТАЛИ МАРКИ А40Х

Переходим непосредственно к расчетам. Расчеты проведены в пакете Maple 18.0. Для расчета использовались следующие данные для стали марки А40Х  $\gamma = 78$  МПа/м,  $L = 10$  м,  $h = 0.1$  м,  $b = 0.2$  м,  $E = 212$  ГПа,  $\sigma_t = 760$  МПа.

Проиллюстрируем решение первого из трех дифференциальных уравнений, приведенных выше, при двух значениях нагрузок  $P_1 = 130000$  Н,  $P_2 = 150000$  Н причем таких, для которых в балке реализуется наличие двух пластических зон. На рис. 3 показана та часть балки, в которой имеются пластические зоны. Анализ рисунка показывает рост длины пластической области в зоне растяжения при росте нагрузки и рост прогиба с увеличением нагрузки. Одновременно увеличивается кривизна балки вблизи заделки.

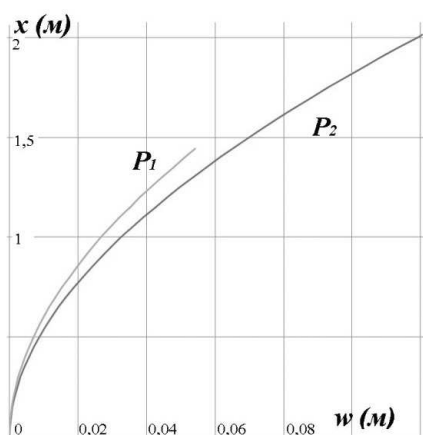


Рис. 3. Прогиб упруго-пластической части балки вблизи заделки.

На рис. 14 на вклейке приведено полное решение задачи, т.е. решение всех трех дифференциальных уравнений и “склейка” решений. Области с разным количеством пластических зон изображены различным цветом. Расчет проведен для двух значений сосредоточенной силы на свободном конце балки  $P_1 = 130000$  Н,  $P_2 =$



150000Н. Сравнение графиков показывает увеличение прогиба с ростом нагрузки и удлинение пластических областей.

## 5. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Построенная математическая модель позволяет изучить напряженно-деформированное состояние балки прямоугольной формы из сложного по физическим свойствам материала. Метод нахождения кривизны для разных состояний балки можно использовать при изгибе горизонтальных консолей из SD-материалов.

Оценка влияния веса показала незначительное уменьшение критического момента появления пластического шарнира. Таким образом, влиянием дополнительного изгибающего момента можно пренебречь и сильно облегчить решение задачи.

Одновременно остается вопрос о влиянии веса на поперечные напряжения в нижней части балки, т.е. вблизи заделки. Учет этих напряжений может существенно изменить напряженное состояние балки, а значит и изменить порядок появления и развития пластических областей. Возникает необходимость дополнительного исследования о границах применимости одномерной модели при изгибе. Этот вопрос должен быть решен в последующей научной деятельности автора.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука. 1982. 567 с.
3. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов. М.,Тула: РААСН. ТулГУ, 2007. 160 с.
4. Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Kuna M., Biermann H. Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load ratios // Engineering Fracture Mechanics. Vol. 78, 2011. P. 1684–1695.
5. Рыбакина О. Г. Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. // Вестн. Ленингр. ун-та. Исследования по упругости и пластичности. 1982. №14. С. 132–142.
6. Ravilaynen G.V. Elasto-Plastic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes. Amer.Math.Soc.,Providence, R.I.,1993,

pp.227–233.

7. *Павилайнен Г.В.* К вопросу упруго-пластического деформирования конструкций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 70–75.
8. *Лачугин Д.В.* Упруго-пластический изгиб разнопрочной вертикальной консоли под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце. // Российско-китайский научный журнал “Содружество” раздел Физико-математические науки. 2016. № 2(2). С. 32-35.
9. *Pavilaunen G.V.* Elastic-plastic deformations of a beam with the SD-effect. AIP Conf. Proc. 2014 ICNAAM, Rhodes, Greece.
10. *Pavilaunen G.V., Naumova N.V.* Elastic-plastic deformations of SD-beams. In Proceedings VII Polyachov's Reading, Saint-Petersburg, 2015. Book of Abstract I, p.239.

## **РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК**

### **ТЕРМОУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ И ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ В ФОРМЕ НАКЛАДОК И ПЛАСТИН**

А.К. Кузин

Доклад на семинаре 22 сентября 2015 г.

Рассматривается проблема оценки прочности границы между накладкой и основанием. Напряженно-деформированное состояние окрестности входящего угла на краю границы накладка/основание описывается асимптотическими формулами с неизвестными коэффициентами интенсивности.

В рамках этого подхода исследована прочность крепления бериллиевой облицовки макета первой стенки термоядерного реактора Токамак при воздействии стационарного теплового потока. Полученные результаты качественно соответствуют результатам известных экспериментов.

Также построена двумерная модель тонкой упругой накладки с заданной аппроксимацией перемещений по толщине. Напряжения на контуре границы накладка/основание в рамках этой модели конечны, но возникают контурные силы, что позволяет сформулировать критерий прочности в терминах контурных сил.

На основании известных экспериментальных данных вычислены предельные нагрузки для лабораторного образца соединения внахлестку в зависимости от длины перекрытия. Расчеты с использованием асимптотических формул входящего угла и модели упругой тонкой накладки дают близкие результаты.

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРОВ ВЕТРОЭЛЕКТРОСТАНЦИИ**

К.А. Орехов

Доклад на семинаре 6 октября 2015 г.

Рассматривается задача о построении системы уравнений, моделирующих работу синхронных генераторов ВЭС, описанная в 1970 г. в статье Ф.Ф. Родюкова и В.Е. Пасынкова «Математическое моделирование работы ветроэлектростанции». В исследовании были представлены полные математические модели ВЭС с СГ при работе параллельно с цепью бесконечной мощности и при работе на симметричную активно-индуктивную нагрузку. В 2013 году в монографии Родюкова Ф.Ф. «Четыре шага вперед в теории электромагнитного поля и в электромеханике», была получена новая, не противоречивая система уравнений синхронного двигателя.

В докладе эти уравнения используются при построении модели ВЭС и исследовании системы на устойчивость.

**Влияние концевых шайб  
на обтекание прямоугольной пластины**

Р.В. Шмигирилов

Доклад на семинаре 20 октября 2015 г.

Влияние концевых шайб на обтекание прямоугольной пластины исследуется экспериментально. Для двух пластин с концевыми шайбами и без шайб найдены коэффициент лобового сопротивления, коэффициент донного давления и размер рециркуляционной зоны.

**Устойчивость кольцевой пластины  
при растяжении сосредоточенными силами**

А.С. Соловьев

Доклад на семинаре 15 декабря 2015 г.

В работе рассматривается устойчивость плоской формы равновесия тонкой упругой кольцевой пластины, растянутой двумя сосредоточенными силами, приложенными к внешней стороне кольца в радиальном направлении. С помощью метода Рунге задача об определении величины критической силы была сведена к линейной проблеме обобщенных собственных значений. Коэффициенты полученной линейной системы были найдены символично. Были вычислены критическая сила и форма потери устойчивости при различных значениях параметров системы.

**Определения равновесного состава  
ионизированного одноатомного газа**

Н.И. Забелина

Доклад на семинаре 16 февраля 2016 г.

В работе рассматривается метод расчета равновесного состава термически ионизированного одноатомного газа. Газ считается сильно разреженным. Представленный метод позволяет свести задачу определения равновесного состава газа к решению одного алгебраического уравнения. Получена температурная зависимость равновесных атомов, ионов и электронов в ионизированном водороде.

**Влияние размеров образца и структуры  
технического алюминия АД1 на результаты испытаний  
при квазистатическом растяжении**

Н.В. Татарина

Доклад на семинаре 1 марта 2016 г.

Проведено исследование физико-механических параметров и диаграмм напряжение/деформация при растяжении технического алюминия АД1 с различным размером зерна, а также изучено влияние размеров образца на результаты растяжения.

**Механическое поведение и эффекты памяти формы  
в сплавах Ni-Fe-Ga**

А.Р. Газизуллина

Доклад на семинаре 22 марта 2016 г.

Проведен обзор литературы по теме «Функциональные свойства монокристаллов сплава Ni-Fe-Ga с памятью формы». Исследованы мартенситные превращения, эффекты памяти формы и обратимой памяти формы в монокристаллах сплава Ni-Fe-Ga при нагревании и охлаждении предварительно деформированного сплава. Выявлено, что в монокристаллах при охлаждении и нагревании реализуется  $L2_1 \leftrightarrow 10(14)M$  мартенситное превращение. Установлено влияние предварительной деформации на эффекты памяти формы. Показано, что при увеличении предварительной деформации величина эффекта памяти формы возрастает, а величина эффекта обратимой памяти формы нелинейно зависит от предварительной деформации.

**Математическое моделирование  
межпозвоночного диска**

А.Е. Лапшин

Доклад на семинаре 5 апреля 2016 г.

Работа посвящена моделированию механического поведения межпозвоночного диска. Структура диска считается пористой, используемая в работе модель учитывает диффузию жидкости через стенки пор. В работе представлен алгоритм расчета процесса диффузии и графики изменения давления в зависимости от времени и коэффициентов диффузии и упругости стенок.

**Моделирование аэродинамики  
в воздушно-центровежном классификаторе**

О.В. Браун

Доклад на семинаре 12 апреля 2016 г.

В работе исследуется действие аэродинамических сил в воздушно-центробежном классификаторе. Представлены решения, полученные различными способами, и результаты распределения параметров в классификаторе. Работа выполнялась в Томском Государственном Университете под руководством д-ра физ.-мат. наук А.В. Шваба.

#### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ**

И.В. АЛЕКСЕЕВ

Доклад на семинаре 19 апреля 2016 г.

Расчет структуры ударной волны с учетом последних исследований кафедры Гидроаэромеханики СПбГУ. Расчет производился для атомарного аргона и для молекулярного азота. В дальнейшем будут рассмотрены смеси газов в различных приближениях (поуровневое и многотемпературное).

#### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ТРОСА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ЗЕМЛИ**

А.О. КОВАЛЕВ

Доклад на семинаре 26 апреля 2016 г.

На основе уравнения Лагранжа второго рода построена математическая модель, учитывающая взаимодействие проводящего троса с магнитным полем Земли, и предложен закон управления силой тока, обеспечивающий увод нефункционирующего объекта с орбиты. С помощью разработанной модели проведена серия численных экспериментов, в ходе которой установлено, что при увеличении длины троса и силы тока время увода нефункционирующего космического объекта с орбиты уменьшается.

#### **ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВАЛОК С УЧЕТОМ ВЕСА**

М.Е. НАМАЗОВ

Доклад на семинаре 12 мая 2016 г.

Работа посвящена задаче математического моделирования горизонтальных стержневых конструкций из материалов со сложными физическими свойствами, которые применяются при проектировании вертолетных площадок на высотных зданиях. Вертикальная нагрузка  $P$  моделирует воздействие летательного аппарата на горизонтальную балку. Материал горизонтальной балки имеет различие между пределами текучести при растяжении и сжатии. Рассматривается задача для горизонтальной консоли. Задача осложняется отсутствием

симметрии в развитии пластических зон и влиянием веса балки. Результаты расчета показывают влияние веса и эффекта SD и совпадают с ранее полученными другими авторами результатами решения задачи по методу МКЭ. Отмечено существенное возрастание прочности при увеличении эффекта SD.

## ХРОНИКА

### 28-й СЕМИНАР СЕВЕРНЫХ СТРАН ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

22–23 октября 2015 г. в Таллине (Эстония) прошел 28-й семинар Северных стран по вычислительной механике. Организатором семинара являлась Северная ассоциация вычислительной механики (NoACM, <http://www.noacm.org/>), представляющая интересы Международной ассоциации вычислительной механики (IACM). Первый подобный ежегодный семинар прошел в 1988 г. в Гётеборге (Швеция). В семинаре традиционно участвуют представители стран Северной Европы: Дании, Финляндии, Исландии, Норвегии, Швеции и Прибалтики (Эстония, Латвия и Литва).

Семинар проводился на базе Таллинского университета технологий (Tallinn University of Technology) при поддержке Nordic Association for Computational Mechanics (NoACM) и был посвящен вопросам, связанным с развитием вычислительных методов и их использованию для решения широкого класса задач механики. Председателем оргкомитета был Аркадий Березовский (Arkadi Berезovskii). С пленарными докладами выступили:

Prof. Niels Leergaard Pedersen (Technical University of Denmark)  
Prof. Rami Korhonen (University of Eastern Finland) Prof. Leif Rune Hellevik (Norwegian University of Science and Technology) Prof. Yuri Bazilevs (University of California, San Diego) Prof. Tarmo Soomere (Tallinn University of Technology) Prof. Jan Nordström (Linköping University)

На секциях семинара выступили постоянные участники семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”: проф. С.М. Бауэр, проф. С.П. Помыткин, доц. А.Л. Смирнов и аспирантка С.В. Каштанова с докладами:

на секции Solid mechanics

Andrei L. Smirnov, Alexandr V. Lebedev “Effect of the Shape of a Thin Plate with Cut-outs on Natural Frequencies”

Svetlana M. Bauer, Ksenia A. Minina, Eva B. Voronkova “Buckling of Axisymmetric Equilibrium States of Annular and Circular Plates



under Normal Pressure”

Stanislava V. Kashtanova “Stability of Infinite Plate with Circular Elastic Inclusion”

на секции Plasticity

Yulij I. Kadashevich, Sergey P. Pomytkin. “Modeling of the Tertiary Creep in Framework of Inelastic Endochronic Theory”.

Научный уровень докладов был очень высоким, атмосфера на семинаре — творческой и дружественной, чему способствовали комфортные условия для общения, равноправие участников, отсутствие барьеров для обмена мнениями, обсуждение актуальных задач и перспективы партнерства по итогам конференции.

Следующий, 29-й семинар прошел 26–28 октября 2016 г. в Гетеборге (Швеция).

*С.В. Каштанова*

## ОБ АВТОРАХ

**Алексеев Илья Владимирович** — студент 1 курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — численное моделирование ударных волн. Научный руководитель — проф. Е.В. Кустова. E-mail: alekseev1989@gmail.com

**Браун Олег Витальевич** — студент 1 курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — экспериментальная аэродинамика. Научный руководитель — проф. А.Н. Рябинин. E-mail: taredel@mail.ru

**Бунин Георгий Васильевич** — студент 5 курса кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Научные интересы — задачи об обтекании тел идеальной жидкостью. Научный руководитель — доц. Г.А. Кутеева. E-mail: georgeaquila@ya.ru

**Газизуллина Айгуль Рамилевна** — студентка 1 курса магистратуры кафедры физической механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. Научный руководитель — д.ф.-м.н. Н.Н. Реснина. E-mail: aigul-g1993@yandex.ru

**Голубцов Роман Сергеевич** — студент 1 курса магистратуры кафедры физической механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — процессы, происходящие в околозем-

ном пространстве, в частности, различные плазменные эффекты. Научный руководитель — проф. Е.К. Колесников. Руководитель проекта — проф. В.А. Сергеев. E-mail: mc.gamses@mail.ru

**Забелина Наталья Игоревна** — студентка 1 курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — д.ф.-м.н., проф. М.А. Рыдалевская E-mail: znattaly92@yandex.ru

**Каштанова Станислава Викторовна** — аспирантка кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — теория оболочек, устойчивость, наномеханика. Научный руководитель — академик РАН Н.Ф. Морозов, научный консультант — проф. С.М. Бауэр. E-mail: kastasya@yandex.ru

**Ковалев Алексей Олегович** — студент 1 курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — электродинамические тросовые системы. Научный руководитель — проф. А.А. Тихонов. E-mail: covalev93@mail.ru

**Кузин Алексей Константинович** — ассистент кафедры компьютерных технологий в машиностроении Санкт-Петербургского Государственного Политехнического Университета. Область научных интересов — термоупругие деформации, прочность элементов конструкций. Научный руководитель — проф. В.В. Елисеев. E-mail: kuzin\_aleksei@mail.ru

**Кутеева Галина Анатольевна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Научные интересы — задачи об обтекании тел, некоторые задачи небесной механики, история механики. E-mail: g.kuteeva@spbu.ru

**Кшуманев Алексей Михайлович** — студент 1 курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — сплавы с эффектом памяти формы. Научный руководитель — проф. Р.З. Валиев. E-mail: kshumanev.aleksei@gmail.com

**Лапшин Александр Евгеньевич** — студент 1 курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — биомеханика. Научные руководители — проф. И.А. Овидько и доц. Б.Н. Семёнов. E-mail: iskander.nud@mail.ru

**Лачугин Даниил Владимирович** — студент 1 курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — изгиб балок с учетом различных факторов. Научный руководитель — доц. Г.В. Павилайнен. E-mail: daniillachugin@gmail.com

**Михайлова Наталья Валерьевна** — студентка 1 курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — динамическое разрушение твердых тел. Научные руководители — доц. Г.А. Волков, чл.корр. РАН Ю.В. Петров. E-mail: natasha-mikh@yandex.ru

**Намазов Маил Елдар оглы** — студент 1 курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — изгиб балок с учетом различных факторов. Научный руководитель — доц. Г.В. Павилайнен. E-mail: namazov.mail@mail.ru

**Орехов Константин Андреевич** — студент 2 курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — электромеханические системы. Научный руководитель — доц. Ф.Ф. Родюков. E-mail: turboulitka@gmail.com

**Севастьянов Ярослав Александрович** — студент 1 курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — численное моделирование в динамике сплошной среды. Научные руководители — проф. И.А. Овидько и доц. Б.Н. Семёнов. E-mail: jar.sevastyanov@gmail.com

**Слесаренко Вячеслав Юрьевич** — кандидат физико-мате-

матических наук, инженер-исследователь лаборатории перспективных массивных наноматериалов для инновационных инженерных применений Санкт-Петербургского государственного университета.

**Смольников Борис Александрович** — профессор кафедры механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, автор четырех книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов.

**Соловьев Антон Сергеевич** — студент 1 курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Научные руководители — к.ф.-м.н. А.О. Бочкарев, акад. Н.Ф. Морозов. E-mail: icemtel@googlemail.com

**Татарина Наталья Владимировна** — студентка 1 курса магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела. Научный руководитель — к.ф.-м.н. И.В. Смирнов. E-mail: t.natalya.93@gmail.com

**Шмигирилов Родион Васильевич** — студент 1 курса магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — экспериментальная гидродинамика. Научный руководитель — проф. А.Н. Рябинин. E-mail: robin\_fin@mail.ru

#### **УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА, ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2015–2016 гг.**

**Кузин Алексей Константинович** — канд. техн. наук, СПбГТУ, 2015. Научный руководитель — проф. В.В. Елисеев.

---

## SUMMARIES

### *B.A. Smolnikov* **A robot against an asteroid.**

The prospects of creating a space tow for transporting asteroids that may pose a danger to the Earth are discussed. This problem is receiving increasing attention in the recent years in the technical literature, books, mass media, films and in public discussions and disputes. Despite the large number of publications that propose various schemes of fighting the asteroid danger, the most feasible scheme suitable for a particular technical implementation has not been developed yet. Therefore the purpose of this work is to propose a compromise version that does not require direct human intervention in the conducted technological operations and uses the radiant energy of the Sun. This version is based on the scheme of the harpoon asteroid capture and its subsequent towing to a safe orbit through the use of an electro-jet engine or by a solar sail. In both cases the central element of the propulsion system of the tug is a mirror coated circular membrane with a radius of several kilometres. In order to assure the necessary flexural rigidity of this membrane, it is attached to the toroidal rim at the outer edge. The superconducting current loop which creates an electromagnetic thrust of the current ring and of the entire membrane is placed inside this rim. The astero-tow is located at the centre of the membrane. The strand spokes extend from the astero-tow to the ring torus. They form the supporting structure and fasten it in a single disc, similar to a bicycle wheel structure. The electro-jet engines of the orientation system are arranged on the periphery of the disc.

MSC class: 70F16

Keywords: robot, asteroid, astero-tow, harpoon, meta-accelerations, electro-jet engines, solar sail, Hooke's joint, heliocentric orbit, permanent rotation.

### REFERENCES

1. Bronshten V.A. Meteors, meteorites, meteoroids. — Moscow: Nauka, 1987. 173 p. (in Russian).
2. Bagrov A.V. Creation a space defence system against asteroids and

- meteorites. — Scientific journal "The colonization of space". 2013. N 5. P. 1-7. (in Russian).
3. Izzo D., Olympio J., Yam C.H. Asteroid Deflection Theory: fundamentals of orbital mechanics and optimal control, 1st IAA Planetary Defence Conference, 2009.
  4. 2006 Near-Earth Object Survey and Deflection Study. December 28, 2006. NASA HQ, PA&E.
  5. Merkin D.R., Smolnikov B.A. The applied problems of dynamics of rigid body. — Saint-Petersburg: St. Petersburg University, 532 p. (in Russian).
  6. Salmin V.V., Low Thrust Space Flight Optimization: Problems of Combined Trajectory and Angular Motion Control Moscow: Mashinostroenie, 1987. 208 p. (in Russian).

*G.V. Bunin, G.A. Kuteeva* **Potential flow around a cylinder with a contour close to circular.**

In this work, the approximate analytic expressions of complex potential in potential flow around nearly circular cylinder are derived using variational principle of conformal mappings. A way of obtaining velocity potential, stream function, potential function, and pressure in the flow and on the cylinder (using Bernoulli's principle) is described. Numerical calculations are performed (including resultant force and resultant moment relative to the centre of the cylinder) and the pressure is plotted for the certain types of the cross section. The main focus is on the flow without circulation, but the plots for stream lines in a flow with circulation were also obtained. The validity of achieved results is confirmed by the following considerations. 1. The limiting case — flow around a perfectly circular cylinder — is obtained when the small parameter associated with deviation of the cross section of the cylinder from a circle approaches zero. 2. For one type of the cross section two different methods were used to find the velocity potential, and results differ only by an additive constant. 3. The resultant force relative to the centre of the cylinder was derived, and the expression coincides with a lift force formula known from the Kutta–Joukowski theorem.

MSC class: 76M40

Keywords: potential flow, cylinder, variational principle, conformal mapping, circulation, lift force, pressure.

**REFERENCES**

1. Vallander S. V. Lectures on hydromechanics. / Lektsii po gidroaeromekhanike (in Russian). Izdatelstvo LGU 1978
2. Rose N.V., Kibel I.A., Kochin N.E. Theoretical Hydrodynamics (in Russian). Vol. I. M.: Fizmatgiz, 1963
3. Loytsyansky L.G. Fluid and Gas Mechanics. L. 1950
4. Golusin G., Kantorovich L., Krylov V. et al. Conformal Mapping of Simply-connected and Multiply-connected Sets (in Russian) L.-M. ONTI 1937, p.128
5. Kantorovich L.V. Methods of Building a Conformal Mapping (in Russian) 1933. p.9
6. Theodorsen T. Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape. NACA Report, No 411. 1931. 14 p.
7. Lavrentiev M.A. Conformal Mappings with Applications to Some Problems of Mechanics (in Russian), Gostekhizdat, Moscow 1946. p.159
8. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Methods of the theory of functions of a complex variable. L.: Nauka. 1973
9. Lavrent'ev M. A. Variational Methods for Boundary Value Problems: for Systems of Elliptic Equations. Reprint. USA: Dover Publications, 2006. 160 p. ISBN 0486450783, 978-0486450780.
10. Hazewinkel, M. Encyclopaedia of Mathematics: Volume 3 Heaps and Semi-Heaps Moments, Method of (in Probability Theory), Springer US.2013 url="https://books.google.ru/books?id=xdoFCAAAQBAJ
11. Peter J. Oliver. Complex Analysis and Conformal Mapping, University of Minnesota. 2015
12. Rabinovich B.I., Tyurin Y.V. Numerical Conformal Mapping in Two-Dimensional Hydrodynamics, Moscow: Space Research Institute Russian Academy of Science. 2000
13. Kuhnau R. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Volume 2. Elsevier. 2005
14. Ershov B.A., Kuteeva G.A. Application of variational principle of conformal mapping to the solution of a planar dynamic problem of hydroelasticity // Vestn. Spb. Univ. Ser.1, issue 4 (N 22) 1999. p. 83-88
15. Kuteeva G.A. Variational principle of conformal mappings in a hydroelasticity problem // Vestn. Spb. Univ. Ser. 1, issue 2 (N 8). 1999. p. 65-69
16. Kuteeva G.A., Truhalo A.S. The variational principle of conformal mapping in a problem about elliptical cylindrical shell in a flow of ideal incompressible liquid // Vestn. Spb. Univ. Ser.1, iss. 4. 2005. p. 92-97



17. Howison S. Practical Applied Mathematics: Modelling, Analysis, Approximation, OCIAM: Oxford University. 2004

**N. V. Mikhaylova Spall-test data processing based on incubation time criterion. Temporal effects of fracture.** Material behaviour under high-speed intensive loads has been studied for a long time. The main objective of this work is investigation of material strength parameters under such dynamic impact. Spall tests are very common for studying the influence of the dynamic impact on the mechanical behaviour of materials. Techniques for spall fracture allow generating tensile loads with strain rates up to  $10^6 s^{-1}$ . Therefore, the problem of material dynamic strength is discussed in many papers based on such tests. Some authors determine the failure at the moment when the tensile stress exceeds the critical stress value. This failure criterion is analogous to the one for static loads. In this work, it is shown that above criterion does not work for some type of dynamic loads. Dynamic failure is complicated and it cannot be approximated by static results. Therefore, another model is needed. In this paper, the incubation time criterion is applied to spall failure. This criterion is based on two parameters: the static strength and the incubation time. These parameters characterize the material strength and do not depend on the type of loadings. The experimental results for two types of steel are considered. The incubation time is calculated for each of them. The obtained effect of fracture delay reveals incorrect usage of the criterion based on the static process. The structural-temporal approach allows predicting all features typical for fracture caused by the high rate loads.

MSC class: 74R15

Keywords: spall test, dynamic strength, incubation time criterion.

#### REFERENCES

1. N. A. Zlatin, G. S. Pugachev, S. M. Mochalov, and A. M. Bragov, "Time-Dependence of Metals Strength under Longevity of Microsecond During Range," *Fiz. Tverd. Tela* 17 (9), 2599-2602 (1975) [*Sov. Phys. Solid State* (Engl. Transl.)]
2. Broberg, K. *Cracks and Fracture*, Cambridge University Press; 1999 Cambridge

3. Batani D., Vovchenko V.I., Kilpio A.V., Krasnyuk I.K., Pashinin P.P., Semenov A.Yu., Shashkov E.V., Kanel G.I., Lomonosov I.V., Fortov V.E. Mechanical Properties Of A Material At Ultrahigh Strain Rates Induced By A Laser Shock Wave//Doklady Physics, 2003, V.48, б.,- 3, 123-125
4. Y.V. Petrov. Structural-temporal approach to modeling of fracture dynamics in brittle media// In: Rock Dynamics and Applications вЂ“ State of the Art /J.Zhao and J.Li (eds)/ 2013. Taylor and Francis Group, London. P.101-110.
5. Petrov Yu.V. Structural-Time Criterion Of Pulsed Electric Strength //Doklady Physics 2014, V.59, б.,- 1, 56-58
6. Gruzkov A.A, Volkov G.A., Petrov Yu. A. Incubation time criterion and acoustic strength of sea water// Acoustical Physics, 2007, V, 53, б.,- 2, p. 149-152 (Engl. Transl.)
7. Dalton D.A. et. al. // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104. P. 013 526
8. Liqiang Lin, Xiaowei Zeng // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 142. P. 50вЂ“63
9. Petrov Yu.V., Utkin A.A. The dependence of the dynamic strength of the loading rate // FHHM. б.,- 2. 1989. p. 38-42(Engl. Transl.)
10. Morozov N.F., Petrov Yu.V., Utkin A.A. Analyse of An analysis from the point of view structural spalling fracture mechanics //DAN. V.313 б.,- 2. 1990. p.276-279(Engl. Transl.)
11. Petrov Y.V., Smirnov I.V., Utkin A.A. Effects Of Strain-Rate Strength Dependence In Nanosecond Load Duration Range// Mechanics Of Solids, 2010, V.45, б.,- 3. p. 476-484

*A.M. Kshumanev, V.Yu. Slesarenko* **Mechanical properties of amorphous and crystalline TiNiCu thin ribbons.** This work is dedicated to the investigation of mechanical properties of  $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{25}\text{Cu}_{25}$  alloy. Samples were obtained from a thin melt-spun amorphous ribbon. The first objective was to examine dependence of mechanical properties of amorphous specimens on the experiment temperature. The second objective was to obtain crystallized samples and study their mechanical behaviour depending on annealing regimes, therefore a few temperatures above the temperature of crystallization were chosen to prepare crystallized specimens. After carrying out this work a few conclusions can be made. 1. Amorphous melt-spun  $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{25}\text{Cu}_{25}$  ribbons deform elastically until fracture within a temperature range of 20–250°C. Young’s modulus decreases with the increase of deformation temperature. 2. Crystallized melt-spun  $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{25}\text{Cu}_{25}$  ribbons which were subjected to annealing at different temperatures demonstrate pseudo elastic behaviour at the austenite phase. The phase yield

stress depends on the annealing temperature. 3. Crystallized melt-spun  $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{25}\text{Cu}_{25}$  ribbons deform inelastically due to the mechanism of martensite reorientation at the martensite phase. Stress corresponding to the start of inelastic deformation and the value of the accumulated inelastic deformation depends on the annealing temperature.

MSC class: 74-05

Keywords: amorphous alloys, melt-spun ribbons, shape memory alloys, thermal processing, mechanical behaviour.

#### REFERENCES

1. Gulyaev A.P. Metal science. Moscow: Metallurgiya. 1986. 544 p. (In Russian.)
2. Degeratu S., Rotaru P., Rizescu S., Bizdoac N.G. Thermal study of a shape memory alloy (SMA) spring actuator designed to insure the motion of a barrier structure // *J Therm Anal Calorim.* 2013. Vol. 111. P. 1255-1262.
3. Slesarenko V.Yu. Functional properties of amorphous-crystallined TiNi-based alloys // PhD thesis in Physics and Mathematics of V.Yu. Slesarenko. 2013. 127 p. (In Russian.)
4. Liu Y., Zeliang X. Detwinning in Shape Memory Alloy: Ed. by P.L. Reece // *Progress in Smart Materials and Structures.* 2007. Vol. 11. P. 29-65.
5. Mohd Jani J., Leary M., Subic A., Gibson M.A. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities // *Materials and Design.* 2014. Vol. 56. P. 1078-1113.
6. Gunter V.E., Hodorenko V.N. et al. Titanium nickelide. New generation medical material. Tomsk: MIC publishing house. 2006. 296 p. (In Russian.)
7. Likhachev V.A., Kuzmin S.L., Kamentseva Z.P. Shape memory. Leningrad: Leningrad State University publishing house. 1987. 216 p. (In Russian.)
8. Bhadeshia H. K. D. H., Honeycombe R. Steels: Microstructure and Properties. Elsevier. 2006. 344 p.
9. Novikov I.I. Theory of metals heat treatment. Moscow: Metallurgiya. 1986. 480 p. (In Russian.)
10. Otsuka K., Shimizu K., Suzuki Y. Shape memory alloys: Translated from Japanese. Ed. by H. Funakubo. Moscow: Metallurgiya. 1990. 224 p. (In Russian.)
11. Moberly W.J., Proft J.L., Duerig T.W., Sinclair R. Twinless Martensite in TiNiCu Shape Memory Alloys // *Materials Science Forum.* 1990. Vol. 56-58. P. 605-610.
12. Solntsev Yu.P., Pryakhin E.I., Pirainen V.Yu. Special materials in mechanical engineering. St. Petersburg: Himizdat. 2004. 640 p. (In Russian.)

13. Suryanarayana C., Inoue A. *Bulk Metallic Glasses*. CRC Press. 2010. 565 p.
14. Migliori A., Mihut I., Betts J.B., Ramos M., Mielke C., Pantea C., Miller D. Temperature and time-dependence of the elastic moduli of Pu and Pu-Ga alloys // *Journal of Alloys and Compounds*. 2007. Vol. 444-445. P. 133-137.
15. Laplanche G., Gadaud P., Horst O., Otto F., Eggeler G., George E.P. Temperature dependencies of the elastic moduli and thermal expansion coefficient of an equiatomic, single-phase CoCrFeMnNi high-entropy alloy // *Journal of Alloys and Compounds*. 2015. Vol. 623. P. 348-353.

*R.S. Golubtsov* **Adaptive modeling of the MHD substorm.**

Necessity to predict the behaviour of the Earth magnetosphere is beyond doubt due to its strong connection to the development of the space sector. Two approaches can be used to solve this problem: the theoretical approach which includes solution of the MHD equations, or the empirical approach which uses all collected data for the construction of the flexible model which is able to react immediately to the change of parameters. In this work, the theoretical GMHD method is applied to describe the beginning of the magnetospheric substorm at the two diametric conditions and the obtained results are compared with the empirical adaptive simulation. Both approaches show the same behaviour of the components of the magnetic field, and adequately describe the processes, taking place during the preliminary phase of the substorm, i.e. erosion of the magnetopause, strengthening of the ionospheric convection, the increase in the magnetic field in the tail lobes, thinning current layer of the tail and bringing its inner edge closer to the Earth. MSC class: 76W05

Keywords: magnetosphere, magnetospheric substorm, GMHD, adaptive modeling, auroras.

**REFERENCES**

1. B.M. Janowski, the Earth's magnetism, Gos. Ed. of technical and theor. lit-re, 1953
2. <http://nuclphys.sinp.msu.ru/magn/index.html>
3. <http://ccmc.gsfc.nasa.gov/>
4. Chia-Lin Huang et al., Storm-time configuration of the inner magnetosphere: Lyon-Fedder-Mobarry MHD code, Tsyganenko model, and GOES observations, *Journal of Geophysical research*, vol. 111, doi: 10.1029/2006JA011626, 2006

5. J.G. Lyon, J.A. Fedder, C.M. Mobarry, The Lyon–Fedder–Mobarry (LFM) global MHD magnetospheric simulation code, *Journal of Atmospheric and Solar–Terrestrial Physics*, Vol. 66, Iss. 15–16, Oct–Nov 2004
6. M.Kubyshkina et al., Toward adapted time-dependent magnetospheric models: A simple approach based on tuning the standard model, *Journal of Geophysical research*, vol. 114, doi: 10.1029/2008JA013547, 200

*Ya.A. Sevastyanov* **Numerical simulation of deformation and destruction of a graphene sheet with an internal crack.** The paper presents the results of the molecular dynamics (MD) simulations for deformation and destruction of a graphene sheet with a crack and with the emerged «quasi-crack», which is a long chain of vacancies and relevant declinations. The dependence between the stress and strain in the graphene sheet is analyzed. The comparison between the results for the case with deformation along the «armchair» direction and for the case with deformation along the «zigzag» direction is provided. The preferred coasts geometry of the new parts of the crack (i.e. new sections of free-surface cracks formed during the growth of cracks) is studied. As a result of the work it is found that the presence of cracks in graphene leads to a significant reduction in its strength (3-4 times). The study also shows that the graphene sheets with the «quasi-cracks» exhibit higher rates of deformation and ultimate strength as compared with the same graphene sheets containing the full crack of the same length.

MSC class: 82D80

Keywords: graphene, strength, elasticity, crack, fracture, molecular dynamics, numerical simulation.

#### REFERENCES

1. A.K. Geim, K.S. Novoselov. The rise of graphene// *Nature Materials* 6 (2007) 183.
2. A.K. Geim. Graphene: Status and Prospects // *Science* 324 (2009) 1530
3. A.H. Castro Nero, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. The electronic properties of graphene// *Reviews of Modern Physics* 81 (2009) 109.
4. F. Molitor, J. Guttinger, C. Stampfer, S. Droscher, A. Jacobson, T. Ihn, K. Ensslin. Electronic properties of graphene nanostructures// *Journal of Physics: Condensed Matter* 23 (2011) 1

5. I.A. Ovid'ko. Mechanical properties of graphene// *Reviews on Advanced Materials Science* 34 (2013) 1.
6. C. Lee, X. Wei, J.W. Kysar, J. Hone. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene.// *Science* 321 (2008) 385.
7. S.J. Stuart, A.B. Tutein, J.A. Harrison. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions// *Journal of chemical physics* V. 112 N. 14 (2000)
8. Hanqing Yin, H. Jerry Qi, Feifei Fan, Ting Zhu, Baolin Wang, Yujie Wei. Griffith Criterion for Brittle Fracture in Graphene // *Nano Lett.* 15, 1918-1924 (2015)
9. S.P. Kiselev, E.V. Zhironov Molecular dynamics simulation of deformation and fracture of graphene under uniaxial tension// *Physical Mesomechanics*, V. 16 N. 2 pp 125-132 (2013)

*D.V. Lachugin* **Elastic-plastic bending of vertical cantilever.**

In this paper we consider elastic-plastic bending of vertical weight cantilever under the action of concentrated load  $P$ . The beams material is assumed to be plastically anisotropic. When the load  $P$  increases, different elastic-plastic situations in each cross section of the beam are formed. There are three zones: the elastic zone, the zone with one plastic area, the zone with two plastic area. For each elastic-plastic situation different differential equations are used. The general solution is based on the continuity of the cantilever deflection. The problem under consideration belongs to a rare class of non-linear problems, the solution of which may be obtained analytically in the form of simple formulas or numerically. The analytical solution may be used to compare with the numerical (FEM) solution and the experimental results. The solution to this problem is important and instructive. First, the costs of such structures in engineering applications can be estimated by a fairly simple formula. Second, this solution can be used for studies and production of the vertical supports, where the concentrated load can simulate the pressure of the floating ice. It is shown that the weight of the beam has little effect on the elastic-plastic bending.

MSC class:

Keywords: elastic-plastic bending, plastically anisotropy, beam, cantilever.

**REFERENCES**

1. *Hill R.* The mathematical theory of plasticity. (Clarendon Press, Oxford, 1953)
2. *Donnel L.H.* Beams, plates and shells (McGraw-Hill, New York, 1976)
3. *Treshvev A.A.* Anisotropy plates and shells of different-strength materials (Tula State Univ., Moscow, 2007) [in Russian].
4. *Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Kuna M., Biermann H.* Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load rations // Engineering Fracture Mechanics. Vol. 78, 2011. P. 1684–1695.
5. *Rybakina O.G.* Anisotropic with SD effect materials yield criterion. Elastic and Plastic Challenge. // Vestnik Leningrad. Univ. (14), 132–142 (1982) [in Russian].
6. *Pavilaynen G.V.* Elasto-Plastic Deformations of Ribbed Plates. CRM Proceedings and Lecture Notes. Amer.Math.Soc., Providence, R.I.,1993, pp.227–233.
7. *Pavilaynen G.V.* The question of Elasto-Plastic Deformations. // Vestnik Leningrad. Univ. Ser. 1./ (14), 132–142 (1982) [in Russian]
8. *Lachugin D.V.* Elastic-plastic bending of vertical SD-cantilever under the action of concentrated load at the free end of the cantilever. // Russian-Chinese scientific journal "Commonwealth", Section "Physical and Mathematical Science", № 2(2), (2016), C. 32–35.
9. *Pavilaynen G.V.* Elastic-plastic deformations of a beam with the SD-effect. AIP Conf. Proc. 2014 ICNAAM, Rhodes, Greece.
10. *Pavilaynen G.V., Naumova N.V.* Elastic-plastic deformations of SD-beams. In Proceedings VII Polyachov's Reading, Saint-Petersburg, 2015. Book of Abstracts I, p.239.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Б.А. Смольников</i> <b>Робот против астероида</b> .....	3
1. Введение .....	3
2. Кинематика вращательных движений астероида .....	4
3. Предлагаемая схема организации буксировки .....	5
4. Обеспечение тягового усилия .....	9
5. Заключение .....	11
<i>Г.В. Бунин, Г.А. Кутеева</i> <b>Потенциальное обтекание плоских тел с контурами, близкими к круговым</b> .....	13
1. Введение .....	13
2. Постановка и решение задачи в общем виде .....	14
2.1. Вычисление конформного отображения .....	14
2.2. Вычисление комплексного потенциала и давления на контуре .....	16
3. Вычисление давления на контурах, построение линий тока .....	17
3.1. Вычисление давления на контуре $r = 1 + a \cos 2\theta$ ..	17
3.2. Обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$ ..	18
4. Обтекание контура вида $r = 1 + a \cos \theta$ .....	21
5. Циркуляционное обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$ , вычисление главного вектора сил .....	22
5.1. Вычисление циркуляции .....	22
5.2. Главный вектор сил, парадокс Д'Аламбера .....	24
6. Заключение .....	25
<i>Н.В. Михайлова</i> <b>Методика обработки результатов экспериментов по откольному разрушению, основанная на критерии инкубационного времени. Временные эффекты разрушения</b> .....	28
1. Введение .....	28
2. Решение одномерной волновой задачи .....	29
3. Анализ результатов обработки экспериментальных данных. Эффект задержки разрушения .....	30
4. Критерий инкубационного времени .....	33
5. Заключение .....	36



<i>А.М. Кшуманев, В.Ю. Слесаренко</i> <b>Механические свойства аморфных и кристаллических лент из сплава TiNiCu</b> .....	38
1. Введение .....	38
2. Сплавы с памятью формы .....	40
3. Эффекты памяти формы .....	42
4. Особенности фазовых превращений сплавов на основе TiNi .....	43
5. Кристаллическое и аморфное состояние материалов ....	44
6. Объекты и методики исследования .....	47
7. Механические испытания исходно аморфных лент при различных температурах .....	49
8. Механические испытания кристаллических лент после отжига при различных температурах .....	50
9. Заключение .....	53
<i>Р.С. Голубцов</i> <b>ГМГД моделирование предварительной фазы магнитосферной суббури</b> .....	55
1. Введение .....	55
2. Моделирование и анализ результатов .....	56
3. Параметры солнечного ветра и ММП .....	56
4. Результаты численного моделирования .....	57
5. Заключение .....	61
<i>Я.А. Севастьянов</i> <b>Численное моделирование процессов деформации и разрушения листа графена с внутренней трещиной</b> .....	63
1. Введение .....	63
2. Исследование: модель и результаты .....	63
3. Заключение .....	70
<i>Д.В. Лачугин</i> <b>Упруго-пластический изгиб разнопрочной консоли</b> .....	72
1. Введение .....	72
2. Постановка задачи и основные соотношения .....	73
3. Решение задачи и определения прогиба балки .....	77
4. Численный расчет для стали марки А40Х .....	79
5. Основные выводы и заключения .....	80
<b>Резюме докладов, не вошедших в сборник</b> .....	82
<b>Хроника</b> .....	86

---

<b>Об авторах</b> .....	88
<b>Summaries</b> .....	92
<b>Рефераты</b> .....	102

## РЕФЕРАТЫ

УДК 523.44

*Б.А. Смольников* **Робот против астероида** // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2015–2016 гг. С. 3–12.

Обсуждаются перспективы создания космического буксира для транспортировки тех астероидов, которые могут представлять опасность для Земли. Этой проблеме в последние годы уделяется все большее внимание как в технической литературе, так и в СМИ, кинофильмах, в общественных дискуссиях и диспутах. Несмотря на большое количество публикаций, трактующих различные схемы борьбы с астероидной опасностью, до сих пор не выявилась наиболее целесообразная схема, пригодная для конкретной технической реализации. Поэтому целью настоящей работы является некоторый компромиссный вариант, не требующий непосредственного участия человека в проводимых технологических операциях и использующий лучистую энергию Солнца. Этот вариант основан на схеме гарпунного захвата астероида и последующей буксировки его на безопасную орбиту путем использования электрореактивного двигателя с малой тягой или посредством солнечного паруса. В обоих вариантах центральным элементом движительной системы буксира является круговая пленочная мембрана с зеркальным покрытием радиусом в несколько километров. Эта мембрана может служить как грандиозным солнечным парусом, так и батареей солнечных элементов для запитывания электрореактивных двигателей. Чтобы придать этой мембране необходимую изгибную жесткость, она на внешнем краю крепится к торообразному ободу, внутри которого находится сверхпроводящий токовый контур, создающий электромагнитный распор токового кольца, а вместе с ним и всей мембраны. В центре мембраны находится астеробуксир, от которого к кольцевому тору тянутся нитевые спицы, образующие несущую конструкцию и скрепляющие ее в единый диск, подобный велосипедному колесу. На периферии этого диска располагаются электрореактивные двигатели системы ориентации.

Ключевые слова: робот, астероид, астеробуксир, загарпунива-

ние, метаускорения, электрореактивный двигатель, солнечный парус, шарнир Гука, гелиоцентрическая орбита, перманентное вращение.

Библиогр. 6 назв. Ил. 3.

УДК 532.5

*Г.В. Бунин, Г.А. Кутеева* **Обтекание плоского тела с ваврируемым контуром потоком идеальной жидкости** // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2015–2016 гг. С. 13–27.

В работе излагаются необходимые сведения о вариационном принципе конформных отображений по работам академика М.А. Лаврентьева (19.11.1900 – 15.10.1980). На основе этого принципа эффективно решаются плоские задачи гидромеханики и гидроупругости.

Представлены некоторые исторические данные. Приведено решение (найден комплексный потенциал и давление на контуре) для задачи плоского обтекания потенциальным потоком жесткого контура близкого к круговому. Формализуется понятие “близости контура к круговому”. Обсуждается применение вариационного принципа конформных отображений к задачам гидроупругости.

Ключевые слова: обтекание цилиндра идеальной жидкостью, вариационный принцип конформных отображений, циркуляция, подъемная сила, давление.

Библиогр. 17 назв. Ил. 6.

УДК 539.42

*Н.В. Михайлова* **Методика обработки результатов экспериментов по откольному разрушению, основанная на критерии инкубационного времени. Временные эффекты разрушения** // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2015–2016 гг. С. 28–37.

Откольное разрушение – один из основных методов изучения экстремальных растягивающих воздействий. Прделанная обработка экспериментальных данных позволяет сделать выводы о поведении материала при различных видах воздействий. С помощью

структурно-временного критерия определены прочностные характеристики исследуемого материала, а также даны объяснения временным эффектам разрушения.

Библиогр. 11 назв. Табл. 2. Ил. 4.

*Ключевые слова:* откольное разрушение, динамическая прочность, критерий инкубационного времени.

УДК 620.172.

*А.М. Кшуманев, Слесаренко В.Ю. Механические свойства аморфных и кристаллических лент из сплава TiNiCu // Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды" 2015–2016 гг. С. 38–54.*

В работе изучены некоторые свойства тонких аморфных лент из сплава  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  при их растяжении при различных температурах. Исследована зависимость механических свойств кристаллизованного сплава, обладающего эффектом памяти формы, от условий кристаллизации как в аустенитном, так и в мартенситном состояниях.

Библиогр. 15 назв. Табл. 3. Ил. 13.

*Ключевые слова:* аморфные сплавы, спиннингование расплава, эффект памяти формы, термообработка, механические свойства.

УДК 550.388.8

*Р.С. Голубцов Адаптивное моделирование предварительной фазы МГД суббури // Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды" 2015–2016 гг. С. 55–62.*

Развитие космических технологий приводит к необходимости изучения магнитосферы Земли, в частности к моделированию ее структуры и динамики. В данной работе представлена попытка анализа и сравнения результатов двух методов моделирования - адаптивного и ГМГД, для изучения предварительной фазы магнитосферной суббури. Было показано хорошее количественное и качественное соответствие обоих методов.

Библиогр. 6 назв. Табл. 1. Ил. 5.

*Ключевые слова:* магнитосфера, магнитосферные суббури, ГМГД, адаптивное моделирование, полярные сияния.

УДК 539.6

*Я.А. Севастьянов* **Численное моделирование процессов деформации и разрушения листа графена с внутренней трещиной** // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2015–2016 гг. С. 63–71.

В работе представлены результаты численного моделирования методом молекулярной динамики деформирования и разрушения графена с трещиной. Получены зависимости величины возникающего в листе графена напряжения от величины деформации. Было проведено сравнение результатов при деформации вдоль направления “седло” и вдоль направления “зигзаг”.

Библиогр. 9 назв. Ил. 10.

*Ключевые слова:* графен, прочность, упругость, трещина, разрушение, метод молекулярной динамики, численное моделирование.

УДК 519.63:539.3

*Д.В. Лачугин* **Упруго-пластический изгиб под действием разнопрочной вертикальной консоли с сосредоточенной нагрузкой на свободном конце** // Труды семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды” 2015–2016 гг. С. 72–81.

В статье рассмотрена математическая модель изгиба вертикальной консоли с эффектом SD, находящейся под действием сосредоточенной следящей нагрузки на свободном конце. Пределы текучести при растяжении или сжатии материала балки считаются известными. Основываясь на классической теории изгиба балок и теории идеальной пластичности, задача решается аналитически. Получено дифференциальное уравнение для нахождения кривизны балки. В результате интегрирования получено точное решение для прогиба вертикальной консоли и проведен расчет для материала с эффектом SD (сталь А40Х).

Библиогр. 10 назв. Табл. 1. Ил. 4.

*Ключевые слова:* упругопластический изгиб, балка, эффект sd.

Научное издание

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

**2015–2016 гг.**

Обложка художника *Е. А. Соловьевой*  
Корректор *Н. В. Ермолаева*  
Компьютерная верстка *А. М. Вейцторт*

Лицензия ИД № 05679 от 24.08.2001

---

Подписано в печать . . . 2017. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл.-печ. л. . . Тираж 123 экз. Заказ №

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11/21.

Тел. (812) 328-96-17; факс (812) 328-44-22.

E-mail: editor@unipress.ru www.unipress.ru

По вопросам реализации обращаться по адресу:

С.-Петербург, В. О., 6-я линия, д. 11/21, к. 21.

Телефоны: 328-77-63, 325-31-76.

E-mail: post@unipress.ru

---

Типография Издательства СПбГУ.  
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.

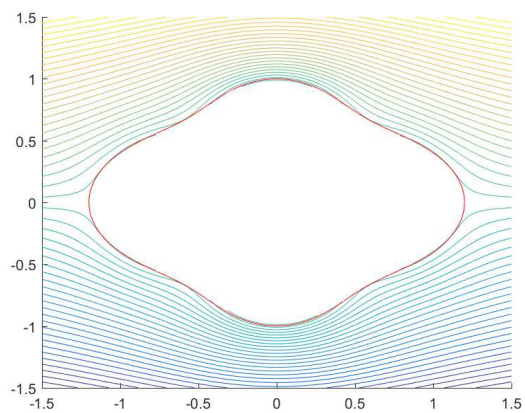


Рис. 1. Обтекание контура  $r(\vartheta) = 1 + 0.1(\cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta)$ . (К статье Г.В. Бунина и Г.А. Кутеевой)

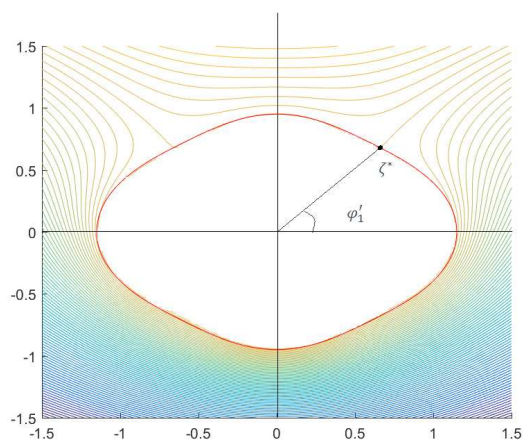


Рис. 2. Картина обтекания с циркуляцией, контур  $r(\vartheta) = 1 + 0.1(\cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta)$ ,  $a = 0.1$ ,  $k = 0.5$ ,  $\Gamma = 9.767$ . "Подъемная сила" будет направлена вниз (против мнимой оси):  $|P| = 9767$  Н. (К статье Г.В. Бунина и Г.А. Кутеевой)



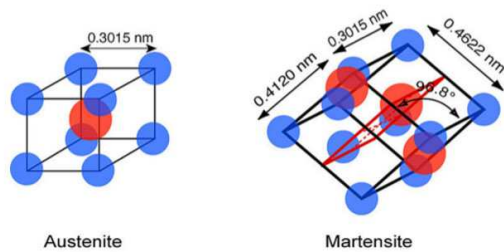


Рис. 3. Кристаллическая решётка аустенитного состояния (слева) и мартенситного состояния (справа) в сплаве TiNi. (К статье А.М. Кшуманева и В.Ю. Слесаренко)

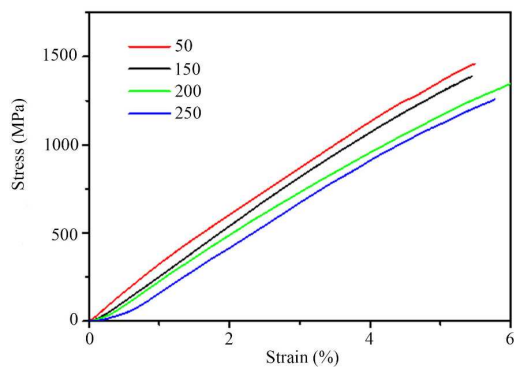


Рис. 4. Диаграмма деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  аморфных образцов  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$  при температурах 50, 150, 200 и 250°C. (К статье А.М. Кшуманева и В.Ю. Слесаренко)

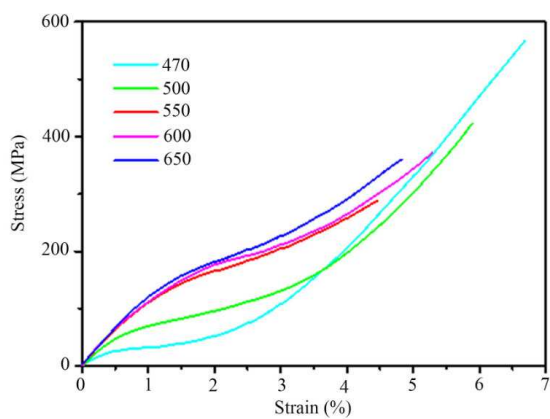


Рис. 5. Диаграмма деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  кристаллических образцов  $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{25}\text{Cu}_{25}$ , отожжённых при температурах 470, 500, 550, 600 и 650°C, при температуре 20°C. (К статье А.М. Кшуманева и В.Ю. Слесаренко)

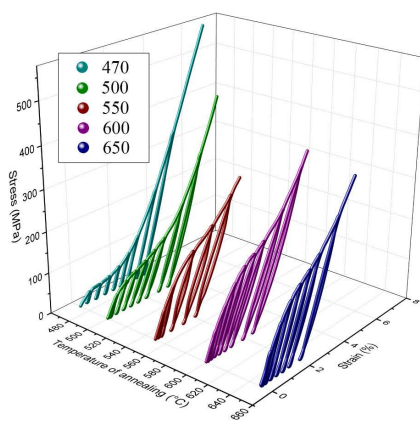


Рис. 6. 3D-диаграмма деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  кристаллических образцов  $\text{Ti}_{50}\text{Ni}_{25}\text{Cu}_{25}$ , отожжённых при температурах 470, 500, 550, 600 и 650°C, при температуре 20°C. (К статье А.М. Кшуманева и В.Ю. Слесаренко)

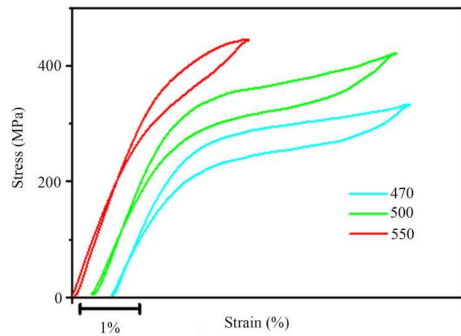


Рис. 7. Диаграмма деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  кристаллических образцов  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$ , отожжённых при температурах 470, 500, 550, 600 и 650°C, при температуре 90°C. Горизонтальная ось относительно, графики сдвинуты по горизонтали. (К статье А.М. Кшуманева и В.Ю. Слесаренко)

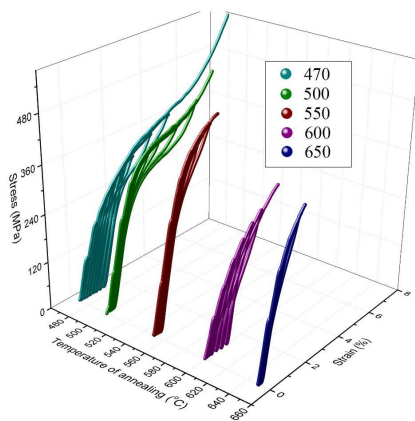


Рис. 8. 3D-диаграмма деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  кристаллических образцов  $Ti_{50}Ni_{25}Cu_{25}$ , отожжённых при температурах 470, 500, 550, 600 и 650°C, при температуре 90°C. (К статье А.М. Кшуманева и В.Ю. Слесаренко)

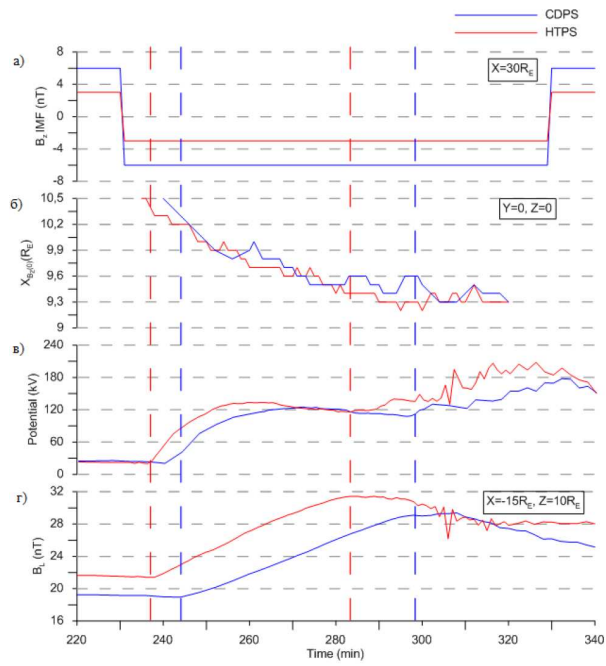


Рис. 9. Сверху вниз: а - компонента  $B_Z$  ММП, б - положение подсолнечной точки магнитопаузы, в - ионосферный потенциал (РСР), г - поле в долях хвоста. (К статье Р.С. Голубцова)

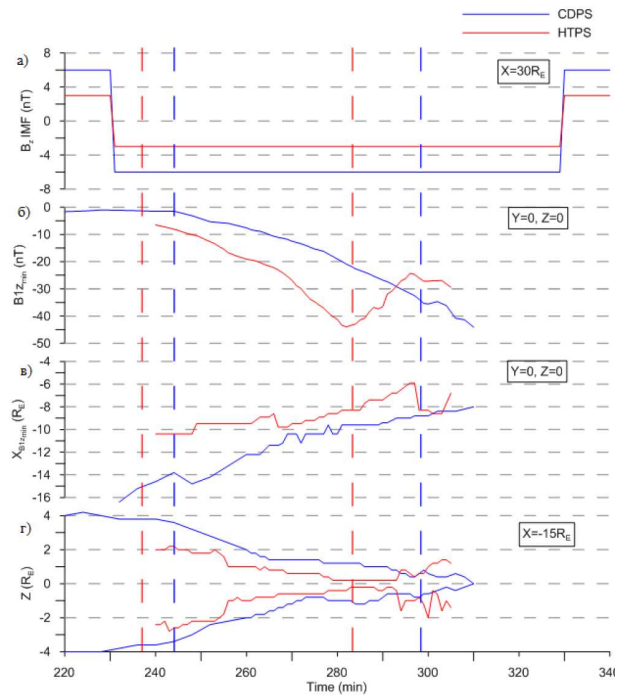


Рис. 10. Сверху вниз: а - компонента  $B_Z$  ММП, б - локальный минимум  $B_Z$  в плазменном слое хвоста на линии Солнце-Земля, в - положение локального минимума  $B_Z$ , г - толщина плазменного слоя. (К статье Р.С. Голубцова)

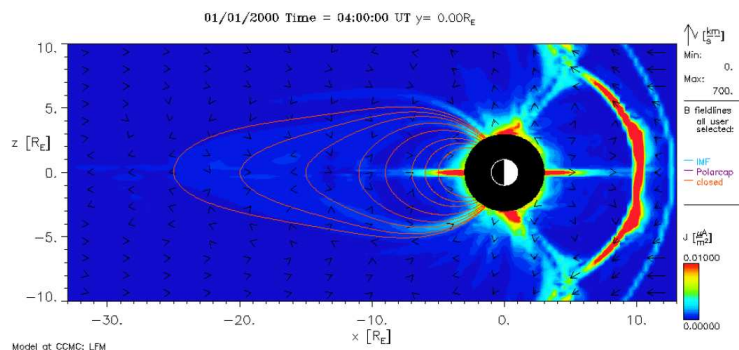


Рис. 11. МГД конфигурация магнитосферы. (К статье Р.С. Голубцова)

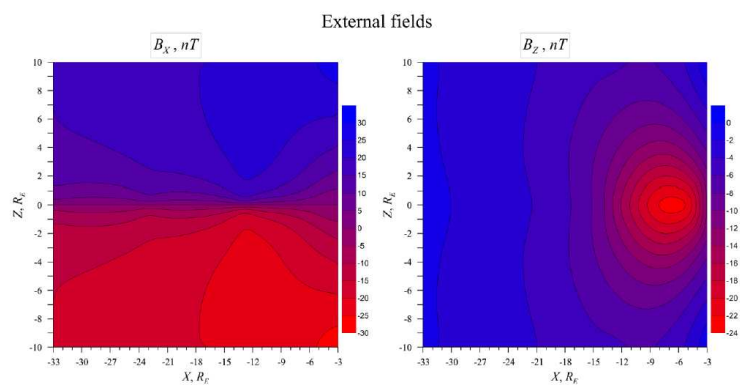


Рис. 12. Распределение  $B_{1X}$  (левая панель) и  $B_{1Z}$  (правая панель) компонент магнитного поля внешних источников в хвосте по данным адаптивной модели;  $t = 270$  минут – предварительная фаза суббури. (К статье Р.С. Голубцова)

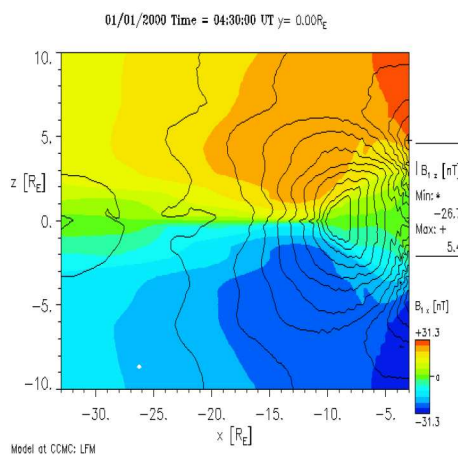


Рис. 13. Распределение  $B_{1x}$  (цветом) и  $B_{1z}$  (контурами) компонент магнитного поля внешних источников в хвосте по данным МГД моделирования;  $t = 270$  минут – предварительная фаза суббури. (К статье Р.С. Голубцова)

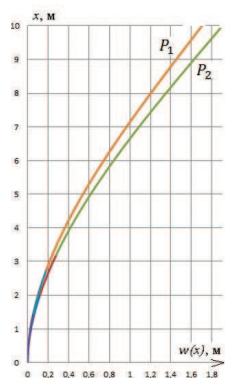


Рис. 14. Изменение прогиба по всей длине балки. (К статье Д.В. Лачугина)