УДК 519.8

ЛОГИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПА ЭДЖВОРТА-ПАРЕТО[1)]

© 2002 г. В.Д. Ногин

195251 С.-Петербург, ул. Политехническая, 29, СПбГТУ

e-mail: noghin@mail.infos.ru

Рассматривается введенная автором ранее задача многокритериального выбора, включающая множество возможных решений, векторный критерий и бинарное отношение предпочтения лица, принимающего решение. Впервые формулируется ряд аксиом, на основе которых доказывается, что в определенном достаточно широком классе задач многокритериального выбора применение принципа Эджворта-Парето является логически обоснованным.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с XIX века, при решении различного рода многокритериальных задач оптимизации (чаще всего экономического содержания) применяется так называемый принцип Эджворта-Парето (или принцип Парето), согласно которому наилучший выбор следует производить среди элементов множества парето-оптимальных (эффективных, неулучшаемых) решений. Этот принцип многими исследователями воспринимался и до сих пор воспринимается как очевидный. Однако, практика показывает, что в некоторых случаях наилучшее решение не обязательно является парето-оптимальным, что дает основание определенным авторам[2)] в общих терминах остро ставить вопрос о «неразумности» принципа Эджворта-Парето.

Интуитивно очевидно, что этот принцип действительно не может безукоризненно «работать» во всех без исключения задачах с несколькими критериями. На этот счет уже имеется достаточное количество практических примеров. В связи с этим, принципиально важно понять, в каких именно задачах его применение заведомо является обоснованным. Выяснив это, затем можно попытаться описать и класс задач, при решении которых применение этого принципа сомнительно или же вообще не допустимо.

В данной работе рассматривается задача многокритериального выбора, введенная ранее автором в [1], которая вместе с множеством возможных решений содержит векторный критерий, а также отношение предпочтения лица, принимающего решение. В терминах этой задачи впервые строго формулируется принцип Эджворта–Парето и приводится ряд аксиом, принятие которых автоматически обеспечивает справедливость этого принципа в достаточно широком классе задач многокритериального выбора. За пределами описанного класса применение принципа Эджворта–Парето сопряжено с риском выбрать далеко не самое лучшее решение. Кроме того, здесь попутно раскрывается смысл и значение множества недоминируемых решений в теории принятия решений.

2. ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Пусть X обозначает (произвольное) *множество возможных решений*, содержащее по крайней мере два элемента. Как известно, выбор решений состоит в указании среди всех

---

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 01-01-00342).

2) Здесь имеются в виду жаркие споры, разгоревшиеся в феврале 2001 г. среди участников электронного дискуссионного листа MCRIT-L@listserv.uga.edu по обсуждаемому в данной работе вопросу.

возможных такого решения, которое объявляется выбранным (наилучшим, или оптимальным), хотя в некоторых случаях происходит выбор не одного, а целого набора решений, составляющих определенное подмножество множества возможных решений.

Обозначим *множество выбранных* (оптимальных) *решений* через $\operatorname{Sel} X$. Оно представляет собой решение задачи выбора и им может оказаться любое подмножество множества возможных решений. Иными словами, решить задачу выбора – означает найти множество $\operatorname{Sel} X$, $\operatorname{Sel} X \subset X$. Это множество, как указано выше, нередко состоит из одного элемента, хотя в некоторых задачах оно может оказаться пустым или же содержать бесконечное число элементов. Процесс выбора невозможен без наличия того, кто осуществляет этот выбор, преследуя свои собственные цели. Человека (или целый коллектив, подчиненный достижению определенной цели), который производит выбор и несет полную ответственность за его последствия, называют лицом, принимающим решение (ЛПР).

Обычно выбранным является такое возможное решение, которое наиболее полно удовлетворяет стремлениям, интересам и целям ЛПР. Желание ЛПР достичь определенной цели нередко удается в математических терминах выразить в виде максимизации (или минимизации) некоторой числовой функции, заданной на множестве X. Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу с несколькими функциями подобного типа.

Пусть имеется m $(m \geqq 2)$ числовых функций $f_1,..., f_m$, определенных на множестве X. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции называют критериями оптимальности, целевыми функциями и т.п. Они образуют *векторный критерий*

$$f = (f_1,..., f_m), \tag{2.1}$$

который принимает значения в m-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^m$. Это пространство называют критериальным пространством или пространством оценок, а всякое значение $f(x) = (f_1(x),..., f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ векторного критерия f при определенном решении $x \in X$ именуют (возможной) векторной оценкой решения x. Все векторные оценки образуют множество возможных оценок

$$Y = f(X) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}.$$

Задачу выбора, содержащую множество возможных решений X и векторный критерий f, обычно называют *многокритериальной задачей*. Изучению свойств таких задач посвящена многочисленная литература (см., например, [2]–[4]).

Выше было отмечено, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) связана с конкретным ЛПР. Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия невозможно обойтись без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит для выражения целей ЛПР.

Предположим, что данные компоненты многокритериальной задачи сформированы, четко описаны и зафиксированы. Опыт показывает, что в терминах векторного критерия f чаще всего не удается выразить всю гамму «пристрастий», «вкусов» и предпочтений данного ЛПР. С помощью этого критерия лишь намечаются определенные локальные цели, которые нередко оказываются взаимно противоречивыми. Эти цели, как правило, одновременно достигнуты быть не могут, и поэтому требуется определенная дополнительная информация для осуществления компромисса. Иначе говоря, если ограничиться лишь указанными выше двумя компонентами – множеством возможных решений и векторным критерием, то задача выбора оказывается в некотором смысле «недоопределенной». Эта «недоопределенность» сказывается затем в слабой логической обоснованности выбора оптимального решения на основе векторного критерия. Многочисленные процедуры выбора (методы построения множества $\operatorname{Sel} X$ или его отдельных элементов), предлагаемые в литературе по принятию решений (см., например, [2]–[4]) и основанные лишь на знании векторного критерия содержат элементы эвристики и не имеют четкого логического обоснования.

Для того чтобы осуществить обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения. Этим элементом может являться отношение предпочтения ЛПР.

Рассмотрим два возможных решения x' и x''. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений оно выбирает первое (отдает предпочтение первому) из них. В этом случае пишут $x' \succ_X x''$. Здесь знак $\succ_X$ означает бинарное *отношение строгого предпочтения*, или, короче, отношение предпочтения ЛПР.

Следует отметить, что не всякие два возможных решения x' и x'' обязательно должны быть связаны соотношением $x' \succ_X x''$ либо соотношением $x'' \succ_X x'$. Иначе говоря, не из любой пары решений ЛПР может сделать окончательный выбор. Вполне могут существовать такие пары, что ЛПР не в состоянии отдать предпочтение какому-то одному решению этой пары, даже если это – пара различных решений. Иначе говоря, отношение предпочтения не обязательно должно быть полным.

Имеется определенная связь между отношением предпочтения ЛПР и множеством выбранных решений, которая может быть выражена в виде следующей эквивалентности

$$x' \succ_X x'' \Leftrightarrow x' \in \operatorname{Sel}\{x', x''\} \text{ и } x'' \notin \operatorname{Sel}\{x', x''\} \qquad (2.2)$$

для $x', x'' \in X$.

Теперь можно окончательно перечислить все основные элементы задачи многокритериального выбора. Постановка *задачи многокритериального выбора* включает следующие объекты: множество возможных решений X, векторный критерий f вида (2.1), определенный на множестве X и отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве X.

Следует заметить, что приведенный список основных компонентов задачи многокритериального выбора при необходимости может быть расширен за счет добавления каких-то новых объектов, с помощью которых удается учитывать интересы, мотивацию и пристрастия ЛПР. Например, несколько более общая, чем в данной работе, модель многокритериального выбора рассматривалась в [1].

3. МНОЖЕСТВО НЕДОМИНИРУЕМЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим задачу многокритериального выбора. Ясно, что отношение предпочтения ЛПР не может быть каким угодно, на него обязательно должны быть наложены какие-то требования. В этом смысле представляется исключительно целесообразным предполагать, по крайней мере, его асимметричность, иначе будет возможен противоречивый случай, когда одновременно каждое из некоторой пары решений будет строго предпочтительнее другого.

Напомним несколько определений, связанных с бинарными отношениями, которые будут использоваться в дальнейшем. Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют *асимметричным*, если для произвольных $a, b \in A$ из выполнения соотношения $a \Re b$ следует, что соотношение $b \Re a$ не выполняется; *иррефлексивным*, если ни для какого $a \in A$ соотношение $a\Re a$ не имеет места; *транзитивным*, если для произвольных $a,b,c \in A$ из выполнения соотношений $a\Re b$ и $b\Re c$ вытекает соотношение $a\Re c$.

Нетрудно проверить, что любое иррефлексивное и транзитивное отношение является асимметричным.

Рассмотрим два произвольных возможных решения x' и x''. Для них имеет место один и только один из следующих трех случаев:

1) справедливо соотношение $x' \succ_X x''$, а соотношение $x'' \succ_X x'$ не выполняется;
2) справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$, а соотношение $x' \succ_X x''$ не выполняется;
3) не выполняются ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$.

Следует заметить, что четвертый (гипотетически возможный) случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'$ выполняются одновременно, соответствует ситуации, когда ЛПР из пары данных решений, с одной стороны, должно выбрать каждое из них (поскольку каждое из них – «лучше» другого), с другой – оно не должно выбрать ни одно из этих решений (так как любое из них – «хуже» другого). Этот противоречивый случай будет исключен из последующего рассмотрения именно благодаря предположению об асимметричности отношения предпочтения $\succ_X$.

В случае 1) говорят, что решение x' доминирует решение x'' (по отношению $\succ_X$), а само решение x'' называют доминируемым. В случае 2) говорят, что x'' доминирует x'. Если же реализуется случай 3), то говорят, что решения x' и x'' несравнимы по отношению предпочтения. Реализация последнего случая 3) соответствует ситуации, когда ЛПР либо не останавливает свой выбор ни на одном из двух предъявленных решений (т.е. отказывается от выбора из двух предложенных решений), либо ЛПР выбирает оба решения x' и x'' одновременно.

В соответствии с приведенными аргументами сформулируем следующую аксиому.

Аксиома 1. *Отношение предпочтения* $\succ_X$ *асимметрично.*

Как указано выше, решение задачи многокритериального выбора заключается в отыскании множества $\operatorname{Sel} X$. Установим определенный общий принцип произвольного «разумного» выбора в процессе принятия решений.

Для этого вернемся к анализу задачи многокритериального выбора. Пусть для некоторого возможного решения x'' найдется такое возможное решение x', что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$. Тогда решение x'' не может быть выбранным из пары x' и x'' (см. (2.2)). В этом случае представляется вполне естественным считать, что решение x'' не может оказаться выбранным и из всего множества возможных решений X.

Аксиома 2. *Если для некоторой пары решений* $x', x'' \in X$ *выполнено соотношение* $x' \succ_X x''$*, то* $x'' \notin \operatorname{Sel} X$.

Аксиома 2 определенным образом связана с так называемым обратным условием Кондорсе [6]. Это условие записывается в виде импликации

$$x'' \in \operatorname{Sel} X \Rightarrow x'' \in \operatorname{Sel}\{x', x''\} \text{ для всех } x' \in X,$$

где $x'' \in X$. Его эквивалентным образом можно переписать в негативной форме

$$x'' \notin \operatorname{Sel}\{x', x''\} \text{ для некоторого } x' \in X \Rightarrow x'' \notin \operatorname{Sel} X.$$

Из этой записи с учетом эквивалентности (2.2) видно, что выполнение обратного условия Кондорсе влечет справедливость аксиомы 2, но не наоборот.

В соответствии с аксиомой 2 любое доминируемое решение следует исключать из списка решений, претендующих на роль выбранных. Исключение всех доминируемых решений приводит к *множеству недоминируемых решений* (см. [4],[5]):

$$\mathrm{Ndom}\, X = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X \text{, что } x \succ_X x^*\}.$$

В [5] множество недоминируемых решений именовалось множеством оптимальных решений.

Теорема 1. *Принятие аксиом* 1 *и* 2 *гарантирует выполнение включения*

$$\mathrm{Sel}\, X \subset \mathrm{Ndom}\, X \qquad (3.1)$$

для любого непустого множества выбранных решений $\mathrm{Sel}\, X$.

Доказательство. В самом деле, если предположить противное включению (3.1), то для некоторого выбранного решения $x'' \in \mathrm{Sel}\, X$ должно быть выполнено $x'' \notin \mathrm{Ndom}\, X$. По определению множества недоминируемых решений отсюда следует существование такого решения $x' \in X$, что $x' \succ_X x''$. Используя аксиому 2, получаем $x'' \notin \mathrm{Sel}\, X$. Полученное соотношение противоречит начальному предположению о том, что решение x'' принадлежит множеству выбранных решений. Теорема доказана.

Включение (3.1) показывает, что для широкого класса задач (а именно для тех задач, для которых справедливы аксиомы 1 и 2) выбор оптимальных решений происходит только среди недоминируемых решений. При этом выбранным может оказаться любое непустое подмножество множества недоминируемых решений.

4. МНОЖЕСТВО ПАРЕТО

В постановке задачи многокритериального выбора имеется векторный критерий $f = (f_1, ..., f_m)$. Каждая компонента f_i векторного критерия характеризует определенную цель ЛПР, а стремление достичь этой цели в математических терминах нередко выражается в виде условия максимизации (или минимизации) функции f_i на множестве X .

Необходимо отметить, что в некоторых задачах могут встретиться критерии, которые не обязательно следует максимизировать (или минимизировать). Например, иногда требуется получить некоторое среднее значение критерия или «удержать» его в определенных заданных пределах, и т.п. В таких случаях более гибким инструментом являются не критерии f_i , а («частные») отношения предпочтения $\succ_i$ (см. [1]). Однако, как показано, например, в [7], во многих важных с практической точки зрения случаях (т.е. при некоторых достаточно «разумных» требованиях к $\succ_i$ и X) существует числовая функция полезности u_i, адекватно описывающая данное частное отношение предпочтения: для $x', x'' \in X$ имеет место эквивалентность $x' \succ_i x'' \Leftrightarrow u_i(x') > u_i(x'')$. Эти результаты показывают, что многие задачи, в которых изначально не требуется максимизации (или минимизации) критериев, могут быть, по крайней мере теоретически, сведены к подобного рода экстремальным задачам. Здесь следует заметить, что последующее изложение может быть распространено на более общий случай «частных» отношений, однако это не является предметом данной работы.

В соответствии со сказанным будем считать, что *ЛПР заинтересовано в получении по возможности бо́льших значений каждой компоненты* f_i *векторного критерия* f.

Придадим этому высказыванию более строгую форму. С этой целью обозначим символом $\succ_Y$ бинарное отношение, заданное на множестве оценок $Y = f(X)$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, и индуцированное отношением предпочтения $\succ_X$ по правилу

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \qquad \text{для } x', x'' \in X .$$

Благодаря аксиоме 1 отношение $\succ_Y$ является асимметричным.

Через Y_i обозначим образ функции f_i, т.е. $Y_i = f_i(X)$, для всех $i = 1,2,...,m$. Введем декартово произведение

$$\hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_m \subset \mathbb{R}^m$$

и сформулируем следующее допущение.

Аксиома 3. *Существует продолжение* $\succ$ *на множество* $\hat{Y}$ *отношения* $\succ_Y$, *причем это продолжение* $\succ$ *является иррефлексивным и транзитивным отношением*.

Замечание. Выполнение аксиомы 3 влечет справедливость аксиомы 1. Поэтому принятие аксиомы 3 избавляет от необходимости в дальнейшем упоминать аксиому 1.

Смысл аксиомы 3 заключается в определенном «расширении» возможностей ЛПР сравнивать между собой оценки критериального пространства.

Будем говорить, что *критерий* f_i *согласован с отношением предпочтения* $\succ$, если для любых $y', y'' \in \hat{Y}$ из выполнения соотношений

$$y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, .., y'_m), \; y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m), \; y'_i > y''_i$$

следует $y' \succ y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения как раз и означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности бо́льших значений этого критерия.

Аксиома 4. *Каждый из критериев* $f_1, ..., f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$.

Напомним формулировку аксиомы Парето (см. [2],[5]). При этом заметим, что в книге [2] при формулировании аксиомы Парето использовалось нестрогое (т.е. рефлексивное) отношение предпочтения ЛПР.

Аксиома Парето. *Для всех решений* $x', x'' \in X$, *для которых верно неравенство* $f(x') \geq f(x'')$, *выполняется соотношение* $x' \succ_X x''$.

Здесь запись $f(x') \geq f(x'')$ означает справедливость покомпонентных неравенств $f_i(x') \geqq f_i(x'')$ для всех $i = 1,2,...,m$, причем $f(x') \neq f(x'')$. Иначе говоря, в этом случае все компоненты вектора $f(x')$ не меньше соответствующих компонент вектора $f(x'')$, причем по крайней мере какая-то одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

Теорема 2. *Выполнение аксиом* 3 *и* 4 *влечет выполнение аксиомы Парето*.

Доказательство. Пусть неравенство $f(x') \geq f(x'')$ выполняется для произвольно выбранных $x', x'' \in X$. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что здесь строгие неравенства $f_k(x') > f_k(x'')$ имеют место для всех индексов $k = 1,2,...,l$ при некотором

$l \in \{1,2,...,m\}$. Для всех последующих индексов k, $k > l$ (при условии, что такие найдутся, т.е. при $l < m$), будем предполагать выполненными соответствующие равенства.

Используя согласованность первых l критериев, из указанных выше строгих неравенств получаем

$$(f_1(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')),$$
$$(f_1(x''), f_2(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x''), f_3(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(f_1(x''),..., f_{l-1}(x''), f_l(x'),..., f_m(x')) \succ (f_1(x''),..., f_l(x''), f_{l+1}(x'),..., f_m(x')).$$

Отсюда на основании транзитивности отношения $\succ$ следует

$$(f_1(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ (f_1(x''),..., f_l(x''), f_{l+1}(x'),..., f_m(x')). \tag{4.1}$$

Благодаря сделанному в начале доказательства предположению имеют место равенства $f_k(x') = f_k(x'')$, $k = l+1,...,m$. Поэтому соотношение (4.1) влечет

$$f(x') = (f_1(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ_Y (f_1(x''),..., f_l(x''),..., f_m(x'')) = f(x''),$$

откуда, в свою очередь, по определению отношения $\succ_Y$, вытекает требуемое соотношение $x' \succ_X x''$. Теорема 2 доказана.

Напомним (см., например, [2]), что *множество парето-оптимальных решений* обозначается через $P_f(X)$ и определяется равенством

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X \text{, что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

5. ПРИНЦИП ЭДЖВОРТА-ПАРЕТО

Теорема 3. *Пусть выполнены аксиомы* 2, 3 *и* 4. *Тогда для любого непустого множества выбранных решений* $\operatorname{Sel} X$ *имеют место включения*

$$\operatorname{Sel} X \subset \operatorname{Ndom} X \subset P_f(X). \tag{4.2}$$

Доказательство. На основании теоремы 1 и замечания к аксиоме 3 справедливо левое включение (4.2). Поэтому для завершения доказательства остается проверить выполнение правого включения (4.2).

Пусть, напротив, для некоторого $x'' \in \operatorname{Ndom} X$ выполнено $x'' \notin P_f(X)$. Тогда по определению множества парето-оптимальных решений существует такое решение $x' \in X$, что $f(x') \geq f(x'')$. На основании теоремы 2 справедлива аксиома Парето. Поэтому последнее неравенство в силу аксиомы Парето влечет соотношение $x' \succ x''$, которое не совместимо с начальным предположением $x'' \in \operatorname{Ndom} X$. Теорема 3 доказана.

Включения (4.2) составляют содержание *принципа Эджворта–Парето* и раскрывают смысл и значение множества парето-оптимальных решений для теории принятия решений: *в достаточно широком классе многокритериальных задач* (а именно, в тех задачах, в которых одновременно справедливы аксиомы 2, 3 и 4) *любой выбор осуществляется только среди парето-оптимальных решений*.

Анализ доказательств приведенных выше утверждений показывает, что если хотя бы одна из аксиом 2, 3, или 4 не выполняется, то выбираемое решение не обязано быть парето-оптимальным. Тем самым, все возможные задачи многокритериального выбора при помощи указанных аксиом делятся на два класса. Для задач первого класса (когда одновременно выполнены все три аксиомы 2, 3, и 4) окончательный выбор следует производить только в пределах множества Парето (т.е. для таких задач принцип Эджворта–Парето «работает»). Второй класс характеризуется тем, что выбранными («наилучшими») могут оказаться те решения, которые парето-оптимальными не являются. Следовательно, для решения задач второго класса применение принципа Эджворта–Парето может оказаться рискованным или же вообще недопустимым.

Сказанное подтверждает следующий результат.

Теорема 4. *Если хотя бы одна из аксиом* 2, 3 *или* 4 *не выполняется, то принцип Эджворта–Парето может нарушаться*.

Доказательство. Для доказательства достаточно привести три примера, подтверждающие справедливость утверждения теоремы.

Пусть $X=\{x_1,x_2\}$, $f=(f_1,f_2)$, $Y=f(X)=\{y^1,y^2\}$, $y^1=f(x_1)=(1,0)$, $y^2=f(x_2)=(0,0)$, $\hat{Y}=Y$. Бинарное отношение $\succ_X$, для которого выполнено соотношение $x_1\succ_X x_2$, а все остальные соотношения $x_2\succ_X x_1$, $x_1\succ_X x_1$, $x_2\succ_X x_2$ не имеют места, является иррефлексивным и транзитивным на множестве X. Этими же свойствами обладает порожденное им на множестве Y отношение $\succ_Y$. Нетрудно проверить, что отношение $\succ$, совпадающее с $\succ_Y$, удовлетворяет аксиомам 3 и 4, причем $P_f(X)=\{x_1\}$. В этом случае для непустого множества выбранных решений $\operatorname{Sel}X=\{x_2\}$ включение $\operatorname{Sel}X\subset P_f(X)$ не имеет места. Причиной этому является нарушение аксиомы 2 для указанного множества выбранных решений. Таким образом, без аксиомы 2 принцип Эджворта–Парето действительно может не выполняться.

Далее пусть $X, f, Y, \hat{Y}, P_f(X)$ такие же, как и выше, но верно соотношение $x_2\succ_X x_1$, а все остальные соотношения $x_1\succ_X x_2$, $x_1\succ_X x_1$, $x_2\succ_X x_2$ не выполняются. В этом случае для множества выбранных решений $\operatorname{Sel}X=\{x_2\}$ аксиома 2 выполнена. Кроме того, отношение $\succ$, совпадающее с $\succ_Y$, подчиняется аксиоме 3. Однако принцип Эджворта–Парето, выражающийся в данном случае в форме включения $\operatorname{Sel}X=\{x_2\}\subset\{x_1\}=P_f(X)$ не имеет места, так как отсутствует согласование критерия f_2 с отношением $\succ$ (т.е. не выполняется аксиома 4).

Перейдем к последнему примеру. С этой целью рассмотрим задачу многокритериального выбора, в которой $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $f=(f_1,f_2)$, $Y=f(X)=\{y^1,y^2,y^3\}$, $y^1=f(x_1)=(0,2)$, $y^2=f(x_2)=(1,1)$, $y^3=f(x_3)=(2,0)$, причем $x_1\succ_X x_2$, $x_2\succ_X x_3$ и $x_3\succ_X x_1$, а все остальные возможные соотношения для указанных трех решений x_1,x_2,x_3 не имеют места. В этом случае отношение $\succ_X$ (равно как и отношение $\succ_Y$) иррефлексивно, но не является транзитивным. Поэтому аксиома 3 здесь не может быть выполнена. Нетрудно понять, что в рассматриваемом случае благодаря аксиоме 2 множество выбранных (равно как и недоминируемых) решений пусто, а значит принцип Эджворта–Парето заведомо не может иметь места. Доказательство теоремы 4 завершено.

Из последней теоремы прямо следует, что принцип Эджворта-Парето не является универсальным, т.е. применимым во всех без исключения задачах многокритериального выбора. Более того, на основе указанных аксиом 2, 3 и 4 (точнее говоря, на основе отрицаний этих аксиом) при желании можно сделать определенный вывод о том, в каких именно задачах этот принцип может «не работать».

В заключение отметим, что включения (4.2) демонстрируют исключительную важность множества недоминируемых решений для теории принятия решений. Оно является своего рода связующим звеном между искомым множеством выбранных решений и множеством Парето. Причем, насколько известно автору, это – единственное такое звено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noghin V.D.* Relative importance of criteria: a quantitative approach// J. Multi-Criteria Dec. Analys. 1997. V. 6.p. 355-363.
2. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
3. *Ларичев О.И*. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
4. *Yu P.L.* Multiple-criteria decision making: concepts, techniques, and extensions. New York: Plenum Press, 1985.
5. *Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И.* Основы теории оптимизации. М.: Высшая школа, 1986.
6. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов. Основы теории. М.: Наука, 1990.
7. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.

Ногин Владимир Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики СПбГТУ, академик МАН ВШ, Соросовский профессор (1999, 2000 гг.)
д.т.: (812) 301-67-60
дом. адрес: 197341, СПб, аллея Котельникова 3-47.
Адрес места работы:
195251, СПб, ул. Политехническая 29, ФМФ, кафедра высшей математики.

LOGICAL JUSTIFICATION OF THE EDGEWORTH-PARETO PRINCIPLE
Vladimir D. Noghin