В.Д. НОГИН

ЗАМЕТКИ О МАТЕМАТИКЕ НА РУБЕЖЕ ВЕКОВ*

Математика — одна из самых древних наук. Ее история насчитывает около трех тысячелетий, и каждый век вносил свой особый вклад в развитие математики. Некоторые из них дали начало принципиально новым направлениям, которые потом длительное время привлекали внимание исследователей и практиков, тогда как другие — сопровождались разрешением ранее сформулированных сложных проблем.

Подходит к концу двадцатое столетие и второе тысячелетие с Рождества Христова. Сегодня уже с полным основанием можно подвести итоги уходящего века и попробовать краешком глаза заглянуть в следующее тысячелетие. Какими свершениями знаменателен XX век для математики? Какие новые теории возникли в этом столетии и какие известные проблемы были успешно решены? Как видоизменился облик самой математики и изменился ли он вообще?

Не претендуя на исчерпывающую полноту и абсолютную объективность, попробуем, насколько это окажется возможным, ответить на поставленные вопросы. Забегая вперед, отметим, что уходящий век знаменуется рядом блистательных достижений в математике. Среди них — появление новых важных и интересных направлений и теорий, а также решение некоторых знаменитых проблем, доставшихся в наследство с прошлых времен. Кроме того, в двадцатом веке математика прошла ряд трудных испытаний, сопровождающих ее бурный рост, но благополучно выходит из кризиса с готовностью и впредь оставаться на доброй службе у человечества.

В конце прошлого века благодаря работам немецкого математика Г. Кантора зародилась *теория множеств*, но только в XX веке она прочно встала на ноги и заняла центральное место в математике. Известна попытка группы талантливых французских математиков, объединившихся под псевдонимом Н. Бурбаки, на фундаменте теории множеств построить современный небоскреб математики. Хотя эта попытка и не была доведена до логического завершения (и вряд ли будет доведена из-за непрекращающегося строительства этого небоскреба, уходящего верхними этажами в облака), тем не менее она весьма поучительна и наглядно свидетельствует о той первостепенной роли, которую призвана играть теория множеств на беспредельных пространствах математики.

В начале XX века в теории множеств были открыты так называемые *антиномии*, т. е. противоречия, показавшие, что нельзя произвольным образом объединять объекты в "множества". Так, например, логически противоречивым оказалось понятие *множества всех множеств*. Попытки преодолеть возникшие трудности были предприняты на пути превращения теории множеств в аксиоматическую науку наподобие геометрии. Впервые это было выполнено в работе немецкого математика Э. Цермело в 1908 году, а позже система аксиом Цермело была усовершенствована израильским математиком А. Френкелем. В настоящее время *система аксиом Цермело — Френкеля* — наиболее часто используемая специалистами по теории множеств. Эта система аксиом не допускает к рассмотрению множество, которое содержит **все** множества, и тем самым является надежным основанием для построения многих важных математических теорий.

Проблему обеспечения непротиворечивости аксиоматически построенной теории множеств выдвинул и пытался решить ярчайший представитель немецкой математической школы Д. Гильберт. Его основная мысль состояла в полной формализации аксиоматической теории множеств, трактовке ее как некоторой формальной системы. Цель, поставленная Д. Гильбертом, оказалась недостижимой, что было доказано австрийским математиком К. Гёделем в 1931 году. Однако большой интерес представляет введенный Д. Гильбертом новый раздел математики — *метаматематика*, часть *конструктивной математики*.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 98-01-00622).

В математическом мире широко известны *23 проблемы Гильберта*, сформулированные им в 1900 году. Вокруг этих проблем на протяжении всего века были сосредоточены творческие усилия многих математиков различных школ и направлений. Подавляющее большинство из этих проблем к настоящему времени "закрыты", т. е. получили либо положительное, либо отрицательное решение. В частности, алгоритмическую неразрешимость 10-й проблемы Гильберта в 1970 году установил талантливый представитель ленинградской школы математиков Ю.В. Матиясевич. Развитие идей, связанных с содержанием поставленных Д. Гильбертом проблем, составило значительную часть математики нашего столетия.

Подобно тому, как ствол дерева порождает, поддерживает и питает многочисленные плодоносящие ветви, так теория множеств дала жизнь таким фундаментальным дисциплинам, как *теория функций вещественной переменной, общая алгебра, общая топология* и современный *функциональный анализ.*

Рука об руку с теорией множеств развивалась и крепла *математическая логика.* Первые работы в этой области, принадлежащие британским математикам Дж. Булю и О. де Моргану, появились в середине прошлого века, но именно начало XX века и первая его половина характеризуется интенсивным становлением математической логики как одного из фундаментальных разделов математики. Современный вид математическая логика приобрела благодаря мощным усилиям уже упоминавшихся Д. Гильберта и К. Гёделя, а также англичанина А. Тьюринга, советского математика П.С. Новикова, американца П. Коэна и др.

В настоящее время практически ни один инженер и экономист не может при проектировании или прогнозировании обойтись без понятий и методов *теории вероятностей*, представляющей собой формализованный взгляд на природу случайных явлений нашего мира. Хотя возникновение теоретико-вероятностных представлений восходит к работам начала семнадцатого века швейцарского ученого Я. Бернулли, только в тридцатые годы нашего столетия советский математик А.Н. Колмогоров заложил прочные аксиоматические основы этой теории, находящей многочисленные приложения в самых различных сферах человеческой деятельности. На базе теории вероятностей возникли *теория случайных процессов* и *теория массового обслуживания*, окрепла и приобрела современный вид *математическая статистика.*

В предшествующие века математика считалась прежде всего величайшим творением человеческого разума, предназначенным для исследования Природы. В XX веке некоторые крупные математики пришли к выводу, что заниматься решением проблем, так или иначе связанных с реальным миром, совершенно необязательно. Широкий размах математических и естественнонаучных исследований не позволял им одинаково свободно чувствовать себя и в математике, и в естественных науках. В этой ситуации некоторые из них решили ограничить сферу своих интересов рамками так называемой "чистой" математики. По этому поводу признанный специалист по математической физике Дж. Синж в 1944 году заметил: "Итак, окончен бал. Сколько радости было, пока он длился!.. Природа по-прежнему продолжает подбрасывать глубокие проблемы, но они уже не доходят до математиков. В ожидании противника они сидят в своей башне из слоновой кости, вооруженные до зубов, но противник так и не появляется. Природа не ставит перед математиками четко сформулированных проблем. Добыть ясно поставленную задачу можно, лишь вооружившись киркой и лопатой, и тот, кто боится испачкать руки, никогда сколько-нибудь стоящей задачи не найдет".

Известный популяризатор математики М. Клайн один из разделов своей замечательной книги "Математика. Утрата определенности" так и назвал: "Математика в изоляции". Он пишет: «Талейран заметил однажды, что идеалист не может долго оставаться идеалистом, если он не реалист, и реалист не может долго оставаться реалистом, если он не идеалист. Применительно к математике высказывание Талейрана можно истолковать так, что реальные проблемы необходимо идеализировать и изучать абстрактно, но деятельность идеалиста, игнорирующего реальность, не жизнеспособна. Математика должна прочно стоять на земле и уходить головой в облака. Подлинную, живую, содержательную математику рождает сочетание абстракции и конкретных проблем. Математики могут воспарять в облака абстрактного мышления, но, подобно птицам, за пищей должны возвращаться на землю. Чистую математику можно сравнить с тортом, подаваемым на десерт. Он приятен на вкус и даже способен в какой-то мере насытить нас, но организм не может существовать только на тортах — без "мяса и картошки" реальных проблем, составляющих основу его питания».

Последнее слово в споре между "чистыми" и "нечистыми" математиками принадлежит самой действительности. А она такова, что в XX веке прочно утвердился термин *прикладная математика*, в вузах появилась соответствующая специальность, а в последней трети нашего столетия при крупных университетах были открыты факультеты прикладной математики, которые до сих пор продолжают активно готовить специалистов, пользующихся спросом в различных областях науки и техники. В частности, впервые в СССР такой факультет был создан в Ленинградском университете в 1969 году под руководством известного специалиста в области теории устойчивости и теории управления В.И. Зубова.

Целые разделы классической математики приобрели ярко выраженную практическую направленность и нашли успешное применение при решении ряда сложных практических проблем. Прежде всего это относится к *теории экстремальных задач* (*теории оптимизации*), берущей свое начало с античных времен. В XX веке появился ее новый раздел — *математическое программирование*, включающий *линейное, выпуклое, дискретное, динамическое и стохастическое программирование*. Знаменитый *симплекс-метод* решения канонической задачи линейного программирования во многих индустриальных странах помог справиться с рядом важных экономических проблем.

К теории экстремальных задач вплотную примыкает активно развивающаяся в последние три десятилетия *теория принятия оптимальных решений*, используемая во многих областях науки, техники и экономики.

Из недр *теории динамических систем*, появление которой обязано гению А. Пуанкаре и трудам выдающегося русского математика А.М. Ляпунова, на стыке с теорией экстремальных задач возникла *теория* (*оптимального*) *управления*, применение которой позволило человечеству совершить выход за пределы земного пространства, благополучно достичь Луны и приступить к непосредственному исследованию других планет Солнечной системы. Важнейшим инструментом решения различных задач оптимального управления по праву является знаменитый *принцип максимума*, сформулированный крупным советским математиком Л.С. Понтрягиным.

Сравнительно недавно своеобразное продолжение и развитие теория экстремальных задач получила в *теории особенностей* (*теории катастроф*), связанной с именами американца Х. Уитни, француза Р. Тома и отечественного математика В.И. Арнольда.

В дополнение к классическому математическому анализу в XX веке появился *выпуклый анализ*, основания которого были заложены в начале нашего века Г. Минковским, который в 1907–1908 годах дал геометрическую интерпретацию кинематики специальной теории относительности, введя так называемое *пространство Минковского*. Ему же принадлежит известная *теорема об отделимости выпуклых множеств*, являющаяся основным рабочим инструментом при исследовании, например, теоретических вопросов математического программирования как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах.

Еще один вид анализа — *нестандартный анализ*, основные идеи которого восходят к немецкому ученому XVII–XVIII веков Г. Лейбницу, обрел свое право на существование и привлекает внимание многих математиков и преподавателей математики в самое последнее время.

С начала XX века "носилась в воздухе" идея создания математической теории конфликта (*теории игр*). Систематическое изложение математической теории игр появилось в сороковые годы; принадлежит оно известному американскому математику Дж. фон Нейману и экономисту О. Моргенштерну. К настоящему времени теория игр заметно разрослась и представляет собой специальный раздел математики, предметом которого является изучение определенных математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях. Ее результаты находят применение при исследовании различных экономических и социальных явлений общества.

Более трехсот пятидесяти лет пытливый человеческий ум бился над доказательством знаменитой *великой теоремы Ферма*, утверждающей, что *уравнение* $x^n + y^n = z^n$ *не имеет целых положительных решений* x, y, z *при* $n > 2$. И только совсем недавно, в последнем десятилетии XX века, завершающими усилиями англичан А. Уайлса и Р. Тейлора удалось окончательно с ней справиться.

Еще одна знаменитая проблема рухнула под натиском современных математиков в конце нашего столетия. Речь идет о *проблеме четырех красок*, первые сведения о которой относятся к середине прошлого века. Эта проблема формулируется следующим образом: *действительно ли достаточно красок лишь четырех цветов для раскрашивания произвольной карты на плоскости таким образом, чтобы каждая страна была окрашена и при этом никакие две соседние страны не получили один и тот же цвет*? Интересно, что для положительного решения проблемы четырех красок американцами К. Аппелем и В. Хакеном во второй половине семидесятых годов был использован принципиально новый, неизвестный до XX века способ доказательства — *машинный*, когда компьютер последовательно "просматривает" огромное число различных случаев, выполняя в каждом случае проверку определенных условий. Первый вариант "доказательства" потребовал 1200 часов машинного времени, тогда как человеку на подобный “просмотр” не хватило бы всей его жизни.

О компьютере — гениальном изобретении XX века — следует поговорить особо. Невозможно переоценить значение этого творения пытливого человеческого разума. Например, известный отечественный математик Н.Н. Моисеев ставит изобретение компьютера в один ряд с такими достижениями человечества, как покорение огня и изобретение паровой машины. Уже первые скороспелые плоды применения компьютеров в различных областях человеческой деятельности, свидетелями которых мы являемся, не могут не произвести неизгладимого впечатления на самого закоренелого скептика. От захватывающих детских компьютерных игр до сложнейших роботов и целых заводов, управляемых электронным мозгом. А гигантские базы данных, доступные пользователю практически из любой точки земного шара благодаря всемирной *сети Интернет*?! Появилось даже специальное словосочетание *виртуальная реальность* для обозначения неизведанного безграничного пространства, которое компьютер распахнул перед изумленным человеком.

Многие ученые, писатели, композиторы, издатели, работники средств массовой информации уже не в состоянии представить свою профессиональную деятельность без компьютера, который стал незаменимым помощником в получении, обработке и хранении информации самого различного характера — от строгих колонок цифр до красочных копий полотен древних и современных мастеров кисти.

Несколько слов хочется сказать и о тесной связи компьютера с математикой. С одной стороны, бурное развитие таких математических разделов, как *теория алгоритмов, теория автоматов* и *теория информации* предопределили появление того устройства, которое впоследствии стали именовать компьютером. С другой стороны, по мере того как это замечательное устройство обретало все большую мощь и развивало свои способности, возникали новые сложные математические проблемы. Они, в свою очередь, стимулировали появление и развитие таких новых разделов математики, как *теория программирования*, а также целой науки *информатики*, тесно связанной с математикой через понятие математической модели, математическую логику и теорию алгоритмов.

Сначала компьютер использовался исключительно для выполнения числовых расчетов (в то время его именовали *электронно-вычислительной машиной* — ЭВМ). После того как в восьмидесятые годы компьютер “освоил” *символьные вычисления*, результатом его применения стал набор произвольных символов, в том числе цифр, функций (обозначаемых буквами того или иного алфавита), а также графических рисунков. Теперь простым нажатием клавиш клавиатуры компьютера с использованием соответствующих математических пакетов (например, таких, как MAPLE V, MATHCAD, MATHEMATICA и др.) можно легко вычислять всевозможные пределы, выполнять операции дифференцирования и интегрирования, оперировать с матрицами, аналитически и численно решать различные (в том числе и дифференциальные) уравнения и системы уравнений многих важных классов, строить графики функций одной и двух переменных и многое другое. Практически любая стандартная задача из курса математики рядового технического вуза может быть решена указанным выше простым способом.

Особую роль в настоящее время приобретает *математическое моделирование*. Находящееся на стыке со многими прикладными науками, это направление стремительно развивается и быстро обогащается новыми методами и подходами к исследованию самых различных явлений реального мира. В следующем веке его ожидает блестящее будущее!

Если в недалеком прошлом математические модели использовались для исследования в основном физико-механических систем, то теперь область их применения существенно расширилась. Объектами математического моделирования стали биологические, экономические, экологические и социальные системы. Появились даже попытки моделировать историю. Компьютер при этом играет немаловажную роль, так как перечисленные системы отличаются необычайно высоким уровнем сложности и “вручную” проводить их изучение не представляется возможным.

С помощью современных мощных компьютеров осуществляются эксперименты планетарного масштаба, например, разыгрываются (в виртуальном пространстве) гигантские военные сражения с применением ядерного оружия или на основе математической модели биосферы строятся прогнозы земного климата, а также демографического развития и научно-технического прогресса.

Нет никаких сомнений в том, что взаимообогащение и взаимная поддержка математики и вычислительной техники продолжатся и далее. Совместно они способны решать сложнейшие интеллектуальные и народнохозяйственные задачи, помогать преодолевать экономические кризисы и обеспечивать дальнейшее устойчивое продвижение человечества к новым неизведанным вершинам на тернистом пути эволюции в следующем тысячелетии.