УДК 519.859

ЭВОЛЮЦИЯ ПРИНЦИПА ЭДЖВОРТА-ПАРЕТО

Ногин В.Д., Волкова Н.А.

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики-процессов управления
Университетский пр-т, 35, Петродворец, г.Санкт-Петербург, Россия, 198504
e-mail: *NOGHIN@MAIL.INFOS.RU*

Abstract

Evolution of the Edgeworth-Pareto principle, which is well-known in decision making, from its naive version of the nineteen centure to the most general axiomatic one in terms of choice function is presented.

Введение

Английским экономистом Френсисом Эджвортом в 1881г. была предложена геометрическая интерпретация модели экономики чистого обмена с двумя участниками, которая впоследствии получила наименование «ящик Эджворта». Рассуждения, использованные автором при анализе указанной модели в случае двух критериев, по существу опирались на понятие, которое в настоящее время известно как «оптимальность по Парето». Последнее наименование связано с именем итальянского экономиста и социолога Вильфредо парето, который ввел его для общего случая нескольких критериев в начале XX века. Напомним, что Парето-оптимальным называют такое состояние экономики, которое не может быть улучшено ни одним из участников без ухудшения состояния по крайней мере какого-то одного другого участника. Парето-оптимальные состояния составляют множество (оптимумов) Парето. Заметим, что сам Парето определял данное понятие лишь в локальном смысле.

Понятие оптимума Парето оказалось чрезвычайно полезным и плодотворным. Огромное число исследователей придают ему исключительное значение. В настоящее время принцип Эджворта-Парето является фундаментальным инструментом при решении задач многокритериального выбора самого различного характера. Его использование многими исследователями часто воспринимается настолько очевидным и естественным, что, на их взгляд, не требует никакого обоснования или специальной аргументации. Они, по существу, утверждают, что наилучший выбор всегда следует искать в пределах множества парето. такой подход можно назвать «наивным» принципом Эджворта-Парето. Именно им пользовались и продолжают пользоваться тысячи исследователей, не подозревая, что для некоторых из них наилучший выбор, возможно, следует искать не только во множестве Парето, но и за его пределами.

Со временем выяснилось, что данный принцип не является универсальным: существуют задачи, в которых он «не работает». В этой связи возникла настоятельная необходимость провести четкую границу, которая отделила бы задачи выбора, в которых его использование является обоснованным, от тех задач, где наилучшим необязательно является решение, оптимальное по Парето. Другими словами, возникла потребность от «наивного» принципа Эджворта-Парето перейти к «аксиоматическому», подобно тому, как это произошло с теорией множеств в начале XX века.

Первая попытка аксиоматизации принципа Эджворта-Парето для простейшего случая числовых критериев была предпринята в [2], [3]. Для этого понадобилось обычную задачу многокритериальной оптимизации, содержащую множество возможных решений и векторный критерий, дополнить строгим отношением предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Со временем класс задач, для которых применение этого принципа является обоснованным, постепенно расширялся. Сначала он был распространен [4] на задачи с нечетким отношением предпочтения ЛПР. Затем его обобщенная версия [5] была получена для критериев, значения которых не обязательно являются числовыми. Далее выяснилось [6], что наиболее удобную форму принцип Эджворта-Парето принимает в терминах функций выбора [1]. В настоящее время его самая общая версия относится к нечетким задачам многокритериального выбора и формулируется она в терминах нечеткой функции выбора [7].

Цель данной работы — указать необходимые аксиомы, которые позволяют обосновать и с единых позиций проследить последовательные этапы расширения области применимости знаменитого принципа, а также представить соответствующие его варианты вместе с доказательствами.

1. Простейший вариант принципа Эджворта-Парето

Рассмотрим задачу (модель) многокритериального выбора $\langle X, f, \succ_X \rangle$, содержащую следующие объекты:

X — множество возможных решений, из которого следует осуществлять выбор;

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)(m \geqq 2)$ векторный критерий, определенный на множестве X и принимающий числовые значения в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^m$;

$\succ_X$ — асимметричное бинарное отношение строгого предпочтения, заданное на X; запись $x_1 \succ_X x_2$ для $x_1, x_2 \in X$ означает, что решение x_1 для ЛПР предпочтительнее решения x_2.

Напомним, что бинарное отношение R, заданное на множестве A, называют *асимметричным*, если для любых $x, y \in A$ из выполнения соотношения xRy следует, что соотношение yRx является ложным.

Возможные решения из X, которые должны быть найдены в результате решения задачи многокритериального выбора, будем именовать выбираемыми решениями. Они образуют множество выбираемых решений, обозначаемое $Sel(X)$. Всякая попытка его строгого определения является малопродуктивной, поскольку у каждого ЛПР это множество - свое собственное и его формирование, как правило, зависит от большого числа самых различных условий и обстоятельств, которые не удается адекватно отразить математически. В таких условиях представляется целесообразным лишь получение некоторой оценки сверху для неизвестного множества $Sel(X)$ при помощи определенных неполных сведений об основных объектах, учавствующих в постановке задачи многокритериального выбора. Это осуществляется на основе принципа Эджворта-Парето; именно он дает возможность сузить область выбора «наилучших» решений пределами множества Парето.

В дальнейшем будем также использовать множество возможных $Y = f(X) \subset \mathbb{R}^m$ и множество выбираемых $Sel(Y) = f(Sel(X))$ векторов. Естественно считать, что на множестве возможных векторов Y задано отношение строгого предпочтения $\succ_Y$, которое согласовано с отношением $\succ_X$ следующим образом:

$$x_1 \succ_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \succ_Y f(x_2) \text{ для всех} x_1 \in \tilde{x_1}, x_2 \in \tilde{x_2}; \tilde{x_1}, \tilde{x_2} \in \tilde{X}$$

где $\tilde{X}$ - совокупность классов эквивалентности, порожденных отношением эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ на множестве X.

Задача многокритериального выбора в терминах векторов $\langle Y, \succ_Y \rangle$ содержит множество возможных векторов Y и отношение строгого предпочтения $\succ_Y$, заданное на Y, а ее решением является множество векторов $Sel(Y)$.

В терминах векторов перечислим определенные «разумные» требования к отношению предпочтения и множеству выбираемых векторов.

Аксиома Парето. *Для двух любых векторов $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих неравенству $y' \geq y''$, выполнено $y' \succ_Y y''$.*

Запись $y' \geq y''$ означает, что каждая компонента первого вектора больше либо равна соответствующей компоненты второго вектора, причем $y' \neq y''$.

Аксиома Парето представляется вполне естественной, если речь идет о стремлении ЛПР получить по возможности большие значения по каждому из критериев.

Аксиома исключения доминируемых векторов. *Для любой пары векторов $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих соотношению $y' \succ_Y y''$, выполнено $y'' \notin Sel(Y)$.*

В соответствии с этой аксиомой всякий вектор, не выбираемый в паре, не должен выбираться и из всего множества Y. В теории выбора известно так называемое обратное условие Кондорсе (см. [1]), которое влечет аксиому исключения доминируемых векторов, но не обратно.

Введем стандартным способом *множество парето-оптимальных векторов*:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}$$

и сформулируем принцип Эджворта-Парето для рассматриваемого класса задач многокритериального выбора.

Теорема 1.*Пусть выполнены аксиома Парето и аксиома исключения доминируемых веекторов. Тогда для любого множества выбираемых векторов $Sel(Y)$ имеет место включение*

$$Sel(Y) \subset P(Y). \tag{1}$$

Доказательство. В случае $Sel(Y) = \emptyset$ включение (1) очевидным образом выполнено. Пусть $Sel(Y) \neq \emptyset$. Из аксиомы исключения вытекает включение $Sel(Y) \subset Ndom(Y)$, где справа записано *множество недоминируемых векторов*:

$$Ndom(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \succ_Y y^*\};$$

это легко проверяется методом от противного. В самом деле, если $y'' \in Sel(Y)$ и $y'' \notin Ndom(Y)$, то найдется $y' \in Y$, для которого $y' \succ_Y y''$. Из последнего соотношения согласно аксиоме исключения вытекает противоречие $y'' \notin Sel(Y)$.

Аналогично, рассуждая от противного, легко установить, что аксиома Парето влечет включение $Ndom(Y) \subset P(Y)$, которое вместе с $Sel(Y) \subset Ndom(Y)$ приводит к требуемому результату □

В соответствие с теоремой 1, если ЛПР в процессе выбора ведет себя в определенном смысле «разумно» (т.е. его поведение подчиняется аксиоме Парето и аксиоме исключения доминируемых векторов), то для такого ЛПР независимо от вида и структуры множества возможных векторов окончательный выбор необходимо осуществлять в пределах множества Парето. Поскольку отказ от хотя бы одной из двух аксиом, участвующих в теореме 1, может (см. [2]) приводить к нарушению включения (1), в случае, когда поведение ЛПР не «укладывается» в рамки указанных аксиом, наилучший для данного ЛПР вектор может оказаться за пределами множества Парето. В соответствии со сказанным теорема 1 осуществлет разбиение множества всех возможных задач многокритериального выбора на два класса: в одном из них принцип Эджворта-Парето «работает» и выбираемый вектор обязательно должен быть парето-оптимальным, тогда как для всех остальных задач это положение может нарушаться.

Аксиома 1. *Для отношения $\succ_Y$ существует иррефлексивное и транзитивное продолжжнение $\succ$ на декартово произведение $\hat{Y} = f_1(X) \times f_2(X) \times \ldots \times f_m(X)$.*

Фиксируем отношение $\succ$. Указанное продолжение может оказаться неединственным, однако это не повлияет на справедливость формулируемого далее следствия 1. Заметим, что в соответствии с аксиомой 1, отношение $\succ_Y$ является сужением отношения $\succ$ на Y и обладает свойствами иррефлексивности и транзитивности.

Напомним [2], что критерий $y_i = f_i(x)$ называют *согласованным с отношением предпочтение* $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in Y$, таких, что

$$y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), y'' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m),$$

$y'_i > y''_i$, верно $y' \succ y''$.

Аксиома 2. *Каждый из критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.*

В [2], [3] установлено, что аксиомы 1 и 2 влекут аксиому парето. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Пусть выполнены аксиомы 1-2. ДЛя любого множества выбираемых векторов $Sel(Y)$ имеет место включение (1).*

2. Обобщенный принцип Эджворта-Парето

В этом разделе принцип Эджворта-Парето распространяется на класс задач, в которых участвующие в задаче выбора критерии не обязательно принимают числовые значения, а могут измеряться, например, в шкалах порядка или каких-то иных шкалах.

Рассмотрим задачу многокритериального выбора

$$\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_m, \succ_1, \succ_2, \dots, \succ_m, Y, \succ_Y \rangle,$$

где

Y_i - шкала i-го критерия (абстрактное множество), $i = 1, 2, \dots, m$;

$\succ_i$ - иррефлексивное,транзитивное и слабосвязное бинарное отношение, заданное на множестве Y_i, $i = 1, 2, \dots, m$;

Y - множество возможныхвариантов, из которого осуществляется выбор $Y \subset \hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$;

$\succ$ - ассиметричное бинарное отношение строгого предпочтения ЛПР, определенное на Y.

Решением этой задачи многокритериального выбора является множество выбираемых вариантов, обозначаемое $Sel(Y)$.

Напомним, что бинарное отношение R, заданное на множестве A, называют

иррефлексивным, если xRx не имеет места ни для какого $x \in A$;

транзитивным, если для любых$x, y, z \in A$ из xRy и yRz следует xRz;

слабосвязным, если для любых $x, y \in A$, выполнено xRy, либо yRx.

В рассматриваемом случае принцип Эджворта-Парето в форме включения (1) сохраняет свою силу, если множество Парето ввести равенством

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \rhd y^*\} \tag{2}$$

причем

$$y' \rhd y'' \iff [(y'_i \succ_i y''_i \text{ или } y'_i = y''_i \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, m] \text{ и } y' \neq y'',$$

где $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m), y'' = (y''_1, y''_2, \ldots, y''_m)$. При этом аксиома исключения не изменяется, а аксиому Парето следует переписать в следующем виде.

Обобщенная аксиома Парето. *Для любых двух векторов $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих соотношению $y' \rhd y''$, выполнено $y' \succ_Y y''$.*

Заметим, что в частном случае, когда каждое из множеств Y_i является числоым, а всякое отношение $\succ_i$ совпадает с отношением «больше» $>$ для чисел (которое иррефлексивно, транзитивно и слабосвязно), все сформулированные в данном разделе положения совпадают с соответствующими высказываниями предыдущего раздела.

3. Нечеткий обобщенный принцип Эджворта-Парето

Напомним (см., например, [8]), что *нечеткое множество* X на множестве A определяется функцией принадлежности $\lambda(\cdot)$, заданной на A и принимающей значения в отрезке [0,1], тогда как *нечеткое отношение* на множестве A определяется функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$, заданной на A и также принимающей значения из [0,1]. *Суппорт* нечеткого множества X определяется равенством $supp(X) = \{x \in X \mid \lambda(x) > 0\}$. Нечеткое отношение μ *асимметрично*, если из $\mu(x, y) > 0$ всегда следует $\mu(x, x) = 0$ для всех $x, y \in A$.

Покажем, каким образом принцип Эджворта-Парето может быть сформулирован для задач многокритериального выбора с нечетким отношением предпочтения.

Пусть имеется задача нечеткого многокритериального выбора

$$\langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_m, Y, \mu_{\hat{Y}}(\cdot, \cdot)\rangle,$$

содержащая

Y_i – шкалу i-го критерия (четкое множество), $i = 1, 2, \ldots, m$;

$\succ_i$ – иррефлексивное, транзитивное и слабосвязное бинарное отношение, заданное на множестве Y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$;

Y – четкое множество возможных вариантов, $Y \subset \hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$;

$\mu_{\hat{Y}}(\cdot, \cdot)$ – функцию принадлежности асимметричного нечеткого отношения строгого предпочтения, заданную на $\hat{Y}$.

Результатом решения даннной задачи является нечеткое множество выбираемых вариантов с функцией принадлежности $\lambda_Y^S(\cdot)$, заданной на Y.

Нечеткая аксиома Парето. *Для любых двух вариантов $y', y'' \in Y$, связанных соотношением $y' \rhd y''$, всегда имеет место равенство $\mu_Y^S(y', y'') = 1$.*

Нечеткая аксиома исключения. *Для всякой пары вариантов $y', y'' \in Y$, для которых выполнено $\mu_Y^S(y', y'') = \mu^* \in [0, 1]$, справедливо неравенство $\lambda_Y^S \leqq 1 - \mu^*$.*

Функцию принадлежности (характеристическую функцию) множества Парето определим равенством

$$\lambda_Y^S = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in P(Y); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $P(Y)$ вида (2), а *функцию принадлежности нечеткого множества недоминируемых вариантов* равенством (см. [8])

$$\lambda_Y^N(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \mu_{\hat{Y}}(z, y) \qquad \forall y \in Y$$

Тогда нечеткий обощенный принцип Эджворта-Парето может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *В условиях выполнения нечетких аксиом Парето и аксиомы исключения для любого нечеткого множества выбираемых варинтов с функцией принадлежности $\lambda_Y^S(\cdot)$ справедливо неравенство*

$$\lambda_Y^S(y) \leqq \lambda_Y^P(y) \qquad \forall y \in Y \tag{3}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное нечеткое множество выбираемых вариантов с функцией принадлежности $\lambda_Y^S(\cdot)$.

Сначала докажем неравенство

$$\lambda_Y^S(y) \leqq \lambda_Y^N(y) \qquad \forall y \in Y \tag{4}$$

Благодаря нечеткой аксиоме исключения имеет место неравенство $\lambda_Y^S(y) \leqq 1 - \mu_Y(z, y)$ для всех $y \in Y$. Переходя в правой части этого неравенства к точной нижней грани по $z \in Y$, получим требуемое

$$\lambda_Y^S(y) \leqq \inf_{z \in Y} (1 - \mu_Y(z, y)) = 1 - \sup_{z \in Y} \mu_Y(z, y) = \lambda_Y^N(y) \qquad \forall y \in Y$$

Теперь установим неравенство

$$\lambda_Y^N(y) \leqq \lambda_Y^P(y) \qquad \forall y \in Y \tag{5}$$

Если предположить противное, т.е. что для некоторого $y \in Y$ выполнено $\lambda_Y^N(y) > \lambda_Y^P(y)$, то, очевидно, $\lambda_Y^N(y) > 0$ и $y \notin P(Y)$. В таком случае существует вариант $y' \in Y$, для которого верно соотношение $y' \rhd y$. Отсюда благодаря нечеткой аксиоме Парето получаем $\mu_Y^S(y', y) = 1$ и, в соответствии с определением нечеткого множества недоминируемых вариантов, приходим к противоречию $\lambda_Y^N(y) = 0$, которое доказывает (5).

Из неравенств (4)– (5) вытекает неравенство (3) $\square$

Теорема 2 может быть распространена (см. [4]) на случай нечеткого множества Y; мы этим здесь заниматься не будем.

4. Принцип Эджворта-Парето в терминах функции выбора

Рассмотрим задачу многокритериального выбора

$$\langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_m, C\rangle,$$

где C – функция выбора.Подобно тому, как это было сделано ранее, введем множество $\hat{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$.

Напомним [1], что однозначное отображение $C : Æ \to 2^{\hat{Y}}$ называют *функцией выбора*, если $Æ \subset 2^{\hat{Y}} \backslash \{\emptyset\}$ – некоторый набор непустых подмножеств множества $\hat{Y}$ и для любого $A \in Æ$, выполняется включение $C(A) \subset A$. В том случае, когда $C(A) = \{\emptyset\}$ для некорого A, говорят об «отказе от выбора» из множества A. Ниже считается, что совокупность Æ заведомо содержит все одно- и некоторые двухэлементные подмножества множества A.

Множество возможных вариантов Y, из которого осуществляется выбор и которое будем предполагать непустым, определиим равенством

$$Y = \{y \in Y \mid C(\{y\}) = \{y\}\}.$$

В таком случае всякий вариант, который не выбирается при предъявлении его в виде одноэлементного множества, не может быть выбран и из любого более широкого множества, включающего данный вариант. При этом будем считать, что $Y \in Æ$. Тем самым, определено множество $C(Y) \subset Y$, которое представляет собой решение рассматриваемой здесь задачи многокритериального выбора.

Следует отметить, что множество Y не обязательно вводить указанным выше способом; в таком случае его следует изначально включить в число основных заданных объектов рассматриваемой задачи наряду с $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_m, C$.

Обобщенная аксиома Парето в терминах функции выбора. *Для любых двух вариантов $y', y'' \in Y$, связанных соотношением $y' \rhd y''$, всегда имеет место равенство $C(\{y', y''\}) = \{y'\}$.*

Аксиома исключения в терминах функции выбора. *Для любой пары вариантов $y', y'' \in Y$, таких, что $C(\{y', y''\}) = \{y'\}$, выполняется $y'' \notin C(Y)$.*

Множество недоминируемых вариантов здесь определим равенством

$$N\,dom(Y) = \{y^* | \text{ не существует такого } y \in Y, y \neq y^*, \text{ что } C(\{y, y^*\}) = \{y\}\}.$$

Теорема 3. *Для любой функции выбора $C(\cdot)$, подчиненной сформулированным выше вум аксиомам в терминах функции выбора, справедливо включение*

$$C(Y) \subset P(Y), \tag{6}$$

где множество Парето $P(Y)$ определено равенством (2).

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию выбора $C(\cdot)$, удовлетворяющую указанным аксиомам. Если $C(Y) = \{\emptyset\}$, то включение (6) выполнено.

Пусть $C(Y) \neq \{\emptyset\}$. Сначала установим справедливость включения

$$C(Y) \subset Ndom(Y). \tag{7}$$

С этой целью предположим противное: существует вариант $y'' \in C(Y)$, для которого верно $y'' \notin Ndom(Y)$. Тогда по определению множества недоминируемых вариантов найдется такой вариант $y' \in Y$, что $y'' \neq y'$ и $C(\{y', y''\}) = \{y'\}$. Благодаря аксиоме исключения в терминах функции выбора последнее равенство влечет $y'' \notin C(Y)$. Это противоречит начальному допущению $y'' \in C(Y)$. Включение (7) доказано.

Для завершения доказательства теоремы остается проверить включение $Ndom(Y) \subset P(Y)$. Вновь предположим противное: $y \in Ndom(Y)$ и $y \notin P(Y)$. Отсюда по определению множества парето-оптимальных вариантов следует, что найдется такой вариант $y' \in Y$, для которого верно соотношение $y' \rhd y$. На основании обобщенной аксиомы Парето в терминах функции выбора из последнего соотношения вытекает равенство $C(\{y, y'\}) = \{y'\}$, причем $y \neq y'$. Следовательно, $y \notin Ndom(Y)$. Полученное не совместимо с начальным предположением $y \in Ndom(Y)$ $\square$

5. Принцип Эджворта-Парето в терминах нечеткой функции выбора

Рассмотрим задачу нечеткого многокритериального выбора, содержащую абстрактные четкие множества $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ и иррефлексивные, транзитивные и слабосвязные отношения $\succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_m$, которые имеют тот же смысл,что и ранее.

Нечеткой функцией выбора будем называть однозначное отображение $\check{C}$, заданное на некотором множестве Æ непустых пожмножеств множества $\hat{Y}$ и сопоставляющее каждому множеству $A \in$ Æ определенное нечеткое множество $\check{C}(A)$ с функцией принадлежности $\lambda_A(\cdot)$, обладающей свойством

$$\lambda_A(y) \in [0,1] \quad \forall y \in A; \qquad \lambda_A(y) = 0 \quad \forall y \in \hat{Y} \backslash A.$$

Будем считать, что совокупность Æ заведомо содержит все одно- и некоторые двухэлементные подмножества множества A. Введем четкое множество, определяемое равенством

$$Y = \{y \in Y | \, \lambda_{\{y\}}(y) > 0\}.$$

Его составляют варианты, которые при предъявлении их в виде одноэлементных множеств могут оказаться выбранными с какой-то положительной степенью принадлежности. Тогда как для любого $y \in \hat{Y} \backslash Y$ выполнено $\lambda_{\{y\}}(y) = 0$.

Будем считать, что непустое множество Y принадлежит совокупности Æ. Тем самым, определено нечеткое множество $\check{C}(Y)$ с функцией принадлежности $\lambda_Y(\cdot)$, которое представляет собой решение рассматриваемой в этом разделе нечеткой задачи многокритериального выбора.

Обобщенная аксиома Парето в терминах нечеткой функции выбора. *Для любых двух вариантов $y', y'' \in Y$, связаннных соотношением $y' \rhd y''$, имеет место равенство $\lambda_{\{y',y''\}}(y'') = 0$.*

Обобщенная аксиома исключения в терминах нечеткой функции выбора. *Для любой пары вариантов $y', y'' \in Y$, $y' \neq y''$, таких, что $\lambda_{\{y',y''\}}(y'') = 0$, выполняется равенство $\lambda_Y(y'') = 0$.*

Теорема 4. *Для любой нечеткой функции выбора, подчиненной сформулированным выше двум аксиомам, справедливо равенство*

$$\lambda_Y(y) = 0 \qquad \forall y \in Y \backslash P(Y), \tag{8}$$

где множество Парето $P(Y)$ определено формулой (2).

Доказательство. Зафиксируем произвольную нечеткую функцию выбора, удовлетворяющую указанным аксиомам и имеющую функцию принадлежности $\lambda_A(\cdot)$.

Сначала установим равенство

$$\lambda_Y(y) = 0 \qquad \forall y \in Y \backslash Ndom(Y). \tag{9}$$

С этой целью предположим противное: найдется вариант $y \in Y \backslash Ndom(Y)$, для которого верно $\lambda_Y(y) > 0$. По определению множества недоминируемых вариантов существует $y' \in supp(Y)$, такой, что $y' \neq y$ и $\lambda_{\{y,y'\}}(y) = 0$. Благодаря обобщенной аксиоме исключения в терминах нечеткой функции выбора последнее равенство влечет $\lambda_Y(y) = 0$. Это противоречит начальному допущению $\lambda_Y(y) > 0$. Тем самым, равенство (9) установлено.

Теперь докажем равенство (7). Пусть, напротив, $\lambda_Y(y) > 0$ для некоторого $y \in Y \backslash P(Y)$. Отсюда в силу $y \notin P(Y)$ следует, что найдется такой вариант $y' \in Y$, для которого верно соотношение $y' \rhd y$. На основании обобщенной аксиомыПарето в терминах нечеткой функции выбора из последнего соотношения вытекает равенство $\lambda_{\{y,y'\}}(y) = 0$, причем $y' \neq y$. Следовательно, $y \notin Ndom(Y)$,

а значит согласно (9) приходим к равенству $\lambda_Y(y) = 0$, которое несовместимо с допущением $\lambda_Y(y) > 0$ □

Можно проверить, что нарушение хотя бы одной из двух аксиом, упомянутых в формулировке теоремы 4, может приводить к нарушению равенства (7).

Следует также отметить, что результаты данного раздела могут быть легко переормулированы и для случая, когда множество вариантов Y является нечетким множеством с функцией принадлежности $\eta(y) = \lambda_{\{y\}}(y)$ для всех $y \in \hat{Y}$. В таком случае в формулировках обеих приведенных выше аксиом, теремы 4, а также в определении множества Парето все включения вида $y \in Y$ и $y' \in Y$ т.д. должны быть заменены на $y \in supp(Y)$ и $y' \in supp(Y)$, соответственно.

Заключение

Основным результатом данной статьи является формулировка и обоснование в аксиоматической форме различных вариантов принципа Эджворта-Парето применительно к широкому классу задач многокритериального выбора.

Представляется перспективным применение сформулированных версий указанного принципа в процессе решения возможных прикладных оптимизационных задач с несколькими (в том числе и нечисловыми) критериями из области техники и экономики, содержащих как четкие, так и нечеткие сведения о предпочтениях ЛПР.

Список литературы

1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов. ОСновы теории. М.: Наука, - 1990. - 240с.
2. *Ногин В.Д.* Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2002. Т. 42, № 7. - С. 950-956.
3. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, - 2002 (2005 - 2-е издание, испр. и доп.) - 176 с.
4. *Ногин В.Д.* Принцип Эджворта-Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2003. Т. 43, № 11. - С. 1676-1686.
5. *Ногин В.Д.* Обобщенный принцип Эджворта-Парето и границы его применимости// Экономика и математические методы. - 2005. Т. 41, № 3. - С.128-134.
6. *Ногин В.Д.* Обобщенный принцип Эджворта-Парето в терминах функций выбора// Тр. ИСА РАН «Методы поддержки принятия решений» (под ред. С.В.Емельянова и А.Б.Петровского). М.: Едиторил УРСС. - 2005. С. 43-53.
7. *Ногин В.Д.* Принцип Эджворта-Парето в терминах нечеткой функции выбора// Журнал вычислительной математики и математической физики, - 2006, т.46, № 4,С. 582-591.
8. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, - 1981. - 208 с.