

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТОРЦЕВОЙ ПЛАСТИНОЙ

Филиппов С.Б., д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, s.flippov@spbu.ru

Смирнов А.Л., к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, a.l.smirnov@spbu.ru

Нестерчук Г.А., ассистент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ, g.nesterchuk@spbu.ru

В работе изучаются собственные низкочастотные колебания тонкой цилиндрической оболочки кругового сечения, сопряженной с круглой торцевой пластиной. Такие элементы часто встречаются в реальных конструкциях: цистернах, резервуарах, трубопроводах.



Рис. 1: Реальные конструкции: цилиндрическая оболочка с присоединенной торцевой пластиной.

С помощью численных и асимптотических методов получен спектр частот конструкции. Выделены три типа колебаний. Собственные частоты колебаний первого типа близки к частотам чисто пластиночных колебаний. Собственные частоты второго типа колебания мало отличаются от частот колебаний оболочки. В работе используются два разных асимптотических подхода для приближенного нахождения “пластиночных” и “оболочечных” частот. При приближенном анализе третьего типа собственных колебаний цилиндрическую оболочку можно рассматривать как балку с кольцевым поперечным сечением. Определяется оптимальное соотношение толщин пластины и оболочки, при котором конструкция с заданной массой имеет максимальное значение низшей (фундаментальной) собственной частоты. Асимптотические результаты находятся в хорошем согласии с численными результатами,

полученными с помощью метода конечных элементов.

Численное исследование низших собственных частот колебаний конструкции, состоящей из круговой цилиндрической тонкой оболочки средней длины, жестко заземленной на одном конце и сопряженной с круговой тонкой пластиной на втором, было проведено в конечно-элементном пакете COMSOL и дало следующие результаты. При численном анализе использовались следующие параметры $E = 11 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0.35$, $\rho = 8960$ кг/м³ — соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки и пластины. $h/R = 0.01$, $L/R = 4$ — соответственно относительная толщина оболочки и пластины, и длина оболочки. На рис.2 приведены первые значения безразмерной собственной частоты колебаний $\alpha^4 = \omega^2 \cdot 12\rho(1-\nu^2)R^2/(Eh^2)$, где f и $\omega = 2\pi f$ — соответственно частота и круговая частота колебаний конструкции, а на рис.3 соответствующие формы собственных колебаний. В спектре частот можно выделить три основных серии: “пластиночную”, “оболочечную” и “балочную”.

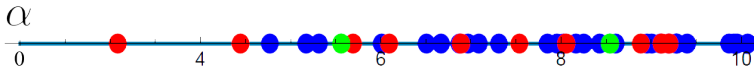


Рис. 2: Безразмерные низшие собственные частоты цилиндрической оболочки с присоединенной торцевой пластиной: “оболочечные” частоты отмечены синим, “пластиночные” — красным, а “балочные” — зеленым цветом.

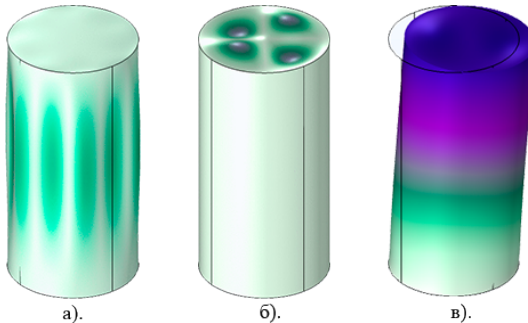


Рис. 3: Формы колебаний: а). “оболочечная”, б). “пластиночная”, в). “балочная”.

Воспользовавшись асимптотической методикой, предложенной в [1, 2] найдем низшие частоты и формы колебаний конструкции.

“Пластиночная” серия частот конструкции соответствует колебани-

ям, при которых основные деформации испытывает круглая пластина, а оболочка почти не деформируется. Уравнение для определения частот и форм колебаний пластины можно записать в виде [3]:

$$\Delta^2 w - \alpha^4 w = 0, \quad \alpha^4 = \omega^2 \cdot \frac{12\rho(1 - \nu^2)R^2}{Eh_p^2},$$

где w — прогиб пластины, h_p — ее безразмерная толщина. При этом в первом приближении на краю будут выполняться условия жесткой заделки: $w = dw/dr = 0$, r — радиальная координата на срединной поверхности пластины. Решения уравнения могут быть найдены через функции Бесселя, а частоты колебаний находятся при решении краевой задачи. Частоты пластины, сопряженной с оболочкой, близки к частотам пластины с жестко заделанным краем и лежат между частотами защемленной и шарнирно опертой пластины. Уже первое асимптотическое приближение дает приемлемые результаты. Во втором приближении уравнение для частотного параметра α имеет вид:

$$J_m(\alpha)I_{m-1}(\alpha) - J_{m-1}(\alpha)I_m(\alpha) - \frac{2\alpha J_m(\alpha)I_m(\alpha)}{1 - \nu - k} = 0,$$

где $J_m(\alpha)$, $I_m(\alpha)$ — функции Бесселя, m — число волн в окружном направлении, а параметр k , описывающий жесткость граничного закрепления, находится при асимптотическом анализе. Относительная погрешность второго приближения по сравнению с результатами численных расчетов в пакете COMSOL не превосходит 2%.

“Оболочечная“ серия частот мало отличается от частот колебаний цилиндрической оболочки толщины h_s . Круглая пластина выполняет роль шарнирного опирания в случае малой толщины ($h_p \approx h_s$) и “почти жесткой” заделки в случае большой толщины ($h_p \approx 10h_s$). Решение задачи о колебаниях может быть найдено в виде суммы основного полубезмоментного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев оболочки [1]. Для низших собственных частот колебаний цилиндрической оболочки справедлива следующая асимптотическая формула [4]:

$$\omega^2 = \alpha^4 \frac{D}{\rho h_s R^4}, \quad \alpha^4 = \varkappa^4 12(1 - \nu^2)/m^4/l^4/h^2 + m^4, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Здесь $n = 1$ — число волн в осевом направлении, а $\varkappa = 3.927$ для граничных условий “заделка-шарнирное опирание” и $\varkappa = 4.73$ — для условий “заделка-заделка”. Первая собственная частота достигается при m близком к

$$m_0^4 = \frac{\sqrt{12(1 - \nu^2)}\varkappa^2}{h_s l^2},$$

в частности, $m_0 = 4.2$ для рассматриваемой оболочки при $h_s = h_p$. При соединенная пластина делает граничное условие чуть более жестким, чем шарнирное опирание. Однако с ростом волнового числа m влияние пластины на оболочечные частоты быстро убывает: от 8% при $m = 2$ до долей процента. Для фиксированного m влияние пластины незначительно растет с ростом n . Асимптотическая формула дает хорошую оценку для частот при $m \geq m_0$.

“Балочная” серия частот близка к частотам колебаний балки кольцевого сечения с грузом на конце. При достаточно больших длинах оболочки $l > 8$ абсолютная погрешность асимптотического решения составляет не более 5%.

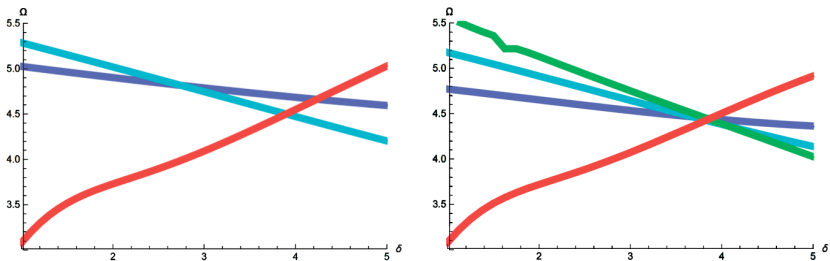


Рис. 4: Зависимость частотного параметра низших собственных частот от толщины пластины при сохранении общей массы конструкции. Слева — аналитические результаты, справа — результаты, полученные МКЭ. “Пластинчатая” частота — красная линия, “оболочечная” частота для $m = 4$ — синяя линия и для $m = 5$ — голубая линия, “балочная” частота — зеленая линия.

Задача об оптимизации параметров конструкции с заданной массой подразумевает нахождение оптимального соотношения толщины пластины и толщины оболочки, соответствующее максимальному значению первой собственной частоты. На рис. 4 приведены зависимости низших частот для всех типов колебаний при линейном изменении толщин пластины и оболочки при сохранении массы конструкции, т.е. при условии $h_s = (1 + (1 - \delta)/2/l)h = \delta_s h$. Максимум нижней огибающей кривых достигается при оптимальном значении толщин.

Асимптотические результаты хорошо согласуются с численными результатами, полученными с помощью МКЭ.

Список литературы

- [1] Filippov, S.B.: Optimal Design of Stiffened Cylindrical Shells Based on an Asymptotic Approach. In: Technische Mechanik, Band. 24, Heft 3–4, 221–230, (2004)
- [2] Filippov, S.B.: Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates. In: Analysis of Shells, Plates, and Beams. A State of the Art Report, Springer's Series Advanced Structured Materials, **123**, 123–140, (2020)
- [3] *Leissa A.W.* Vibration of plates. Washington DC, US Government Printing Office, 1969.
- [4] Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979.