Таблица 2. Значения критического параметра λ
при наличии одностороних ограничений на перемещения (15) и при некоторых граничных условиях.

τ	1	1	1	0	2	3	5
σ	3	2	1	1	1	1	1
“1111“	2.933	4.196	6.575	9.371	4.239	3.113	2.025
“2211“	2.599	3.756	6.211	8.025	4.228	3.104	2.019
“2222“	1.448	2.087	3.528	4.489	2.425	1.786	1.163

Таблица 3. Значения критического параметра λ
без односторонних ограничений на перемещения

τ	1	1	1	0	2	3	5
σ	3	2	1	1	1	1	1
“1111“	2.235	3.147	5.016	7.129	3.353	2.479	1.618
“2211“	2.210	3.115	4.976	7.031	3.338	2.472	51.615
“2222“	1.268	1.802	2.932	4.000	1.994	1.483	0.973

Если решать приведенные здесь задачи в нелинейной постановке, то они сводятся к построению неявных функций, определяемых негладкими уравнениями. Методы исследования таких задач можно найти в [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рапопорт Л.Б., “Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе“ *ПММ*, Т.50. Вып. 4. 674–679, (1986).

[2] Тарасов В.Н., *Методы оптимизации в исследовании конструктивно нелинейных задач механики упругих систем*, Коми научный центр УрО РАН, (2013).

[3] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М., *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Наука, (1990).

On the MATLAB Finite Element Modelling of an Elastic Plane with a Hole under Tension

Чжао Ш., Пронина Ю.Г.

zhaoshixiang@yandex.ru, y.pronina@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

О конечно-элементной аппроксимации растянутой упругой плоскости с отверстием в пакете MatLab

Наличие несплошностей в элементах конструкций приводит к концентрации упругих напряжений в их окрестности [2, 3] и, соответственно, к снижению ресурса прочности изделия. В качестве концентраторов напряжений могут выступать как отверстия, предусмотренные технологически, так и дефекты, появившиеся в процессе изготовления или эксплуатации. Для оценки напряжений в окрестности отверстий, находящихся на достаточном удалении от внешней границы тела, удобно исследовать напряженно-деформированное состояние бесконечного тела с отверстием соответствующей формы. Это позволяет упростить задачу без существенной потери точности решения вблизи дефекта. В двумерной постановке построен ряд аналитических и численно-аналитических решений задач о бесконечной плоскости с отверстиями различных очертаний. Особые успехи в этой области были достигнуты благодаря трудам Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили, работавших в свое время в Петербургском университете и внедривших методы теории функций комплексной переменной в теорию упругости, чем значительно упростили решение плоских задач. На кафедре ВММДТ эти методы продолжают использоваться авторами [3, 5] и их учениками.

Однако, несмотря на полученные многочисленные аналитические результаты, остается актуальным численный расчет напряженного состояния в окрестности дефектов, в частности, в задачах с заранее неизвестными переменными границами. Подобные задачи возникают, например, при моделировании поведения элементов конструкций, эксплуатируемых в условиях механохимической коррозии [6]. Именно для решения таких задач — в плоской постановке — и проводится настоящее исследование, с целью подбора оптимальных вычислительных параметров для дальнейших расчетов.

При разбиении двумерной области, занятой телом, на конечные элементы гладкая граница аппроксимируется ломаной, состоящей из конечного числа прямолинейных отрезков. Выбору оптимального числа элементов для замены гладкой криволинейной границы надо уделять должное внимание, так как здесь необходимо прийти к компромиссу между различными конкурирующими процессами, вызываемыми уменьшением шага сетки: снижением погрешности аппроксимации гладкой границы и накоплением погрешностей округлений с ростом числа элементов (помимо существенного возрастания временных затрат).

В представленной работе исследуется конечно-элементная аппроксимация упругой плоскости с эллиптическим отверстием, подверженной одноосному растяжению, в пакете MATLAB [1]. В качестве “первичной” расчетной модели рассматривается квадратная пластина с центральным отверстием в условиях плоского напряженного состояния. Контур отверстия задается как N-угольник с вершинами, лежащими на эллипсе требуемых размеров, оси которого, обозначенные через $2a$ и $2b$, параллельны сторонам квадрата. Задание вершин многоугольника ($x_n = a\cos\theta_n$, $y_n = b\sin\theta_n$) производится с равным шагом $2\pi/N$ по параметру θ. Это приводит к неравным длинам сторон многоугольника и удачному сгущению сетки в окрестности вершин эллипса с большой кривизной. Помимо выбора числа N точек разбиения контура отверстия на прямолинейные участки стоит задача выбора размера пластины, позволяющего избежать краевого эффекта от действия ее внешней границы. Длина D внешних прямолинейных сторон пластины выбирается равной $D = 2M\max\{a, b\}$, где число M (целое) подлежит определению. Первые расчеты при различных сочетаниях N и M показали, что на "точности" вычислений сказывается выбор и других параметров сетки, что также подлежит исследованию. Естественно, что при увеличении чисел N и M напряжения в окрестности N-угольного отверстия в пластине $D \times D$, с математической точки зрения, должны стремиться к напряжениям в окрестности эллиптического отверстия в неограниченной плоскости. Поскольку известно точное аналитическое решение последней задачи, то точность аппроксимации при выборе различных расчетных параметров легко оценить сопоставлением полученных численных результатов с известным замкнутым решением.

Аналитические решения задач о бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием при одноосном растяжении интенсивности q были найдены Н. И. Мусхелишвили с помощью конформного отображения. В частности, в вершинах эллипса максимальные (по абсолютной величине) главные напряжения определяются формулами

$$\sigma^a = 2q\ a/b + q, \quad \sigma^b = -q.$$

Здесь σ^b — напряжение в вершинах, расположенных на оси, вдоль которой направлена растягивающая нагрузка, σ^a — напряжение в вершинах на оси, перпендикулярной к направлению действующих усилий.

Для решения краевых задач для уравнений в частных производных в двумерных областях методом конечных элементов (МКЭ) в MATLAB предназначен PDE Toolbox [1]. Несмотря на наличие в данном Toolbox приложения pdetool с графическим интерфейсом пользователя, не требующим глубокого понимания МКЭ, справиться с поставленной задачей только с помощью указанного приложения не представляется возможным [4]. Поэтому необходимо написание собственной программы (с использованием встроенных функций PDE Toolbox).

Ввиду наличия двух осей симметрии в исследуемой "первичной" модели (как в ее геометрии, так и в заданных граничных условиях) целесообразно производить расчеты только для четверти заданной области. Во-первых, это упрощает построение геометрии, так как вместо композиции двух примитивов (“квадрат $D \times D$ минус N-угольник”) можно построить только один многоугольник с $N/4 + 3$ вершинами. Во-вторых, существенно сокращается количество конечных элементов. Поэтому в качестве окончательной расчетной модели используется именно такой многоугольник. Граничные условия на двух его сторонах, соответствующих внутренним осям симметрии “первичной” модели задаются исходя из условий симметрии задачи: нормальные перемещения на указанных участках равны нулю, в то время как ограничений на другие компоненты не налагается. Стороны многоугольника, соответствующие контуру выреза, и одна из “внешних” сторон (параллельная направлению действия усилий) свободны от нагрузки, т.е. все компоненты напряжения на них равны нулю. На второй “внешней” стороне задаются нормальные напряжения интенсивности q и нулевые касательные усилия. Таким образом, получили смешанную краевую задачу.

В качестве первого приближения для оценки погрешности аппроксимации проводились расчеты относительной погрешности (по сравнению с имеющимся точным решением задачи о плоскости с эллиптическим отверстием) в вершинах эллипса / многоугольника с различными соотношениями полуосей и при различных значениях N и M. В качестве иллюстрации приведена таблица относительных погрешностей (округленных до первой значащей цифры, в процентах) для кругового отверстия. Значения в скобках указаны для “первичной” модели — квадратной плоскости с центральным отверстием — для тех случаев, когда они отличаются от значений, полученных для ее четверти (числа без скобок).

С точки зрения механики деформируемого тела, числа, стоящие в первых строках таблицы и соответствующие значениям M от 3 до 10, называть погрешностью не совсем правомерно, так как они, вообще говоря, соответствуют совсем другой задаче: о конечной пластине с отверстием, в которой, как известно, концентрация напряжений тем больше, чем меньше расстояние от кромки отверстия до внешней границы пластины (отнесенное к размерам отверстия). Поэтому указанные строки таблицы скорее характеризуют то, на сколько процентов (с точностью до первой значащей цифры) возрастает максимальное напряжение при приближении к внешней границе тела.

Таким образом, под относительной погрешностью здесь понимается формальная погрешность аппроксимации решения задачи о бесконечной пластине с гладким эллиптическим отверстием с помощью нашей негладкой расчетной модели. Согласно некоторым рекомендациям, концентрацию напряжений стоит учитывать на расстоянии вплоть до трех–пяти

M \ N	64	128	256	512	1024
3	90	90	90	90	90
4	50	50	50	50	50
5	30	30	30	30	30
6	20	20	20	20	20
7	10	10	10	10	10
8	(10) 9	10	10	10	10
9	(7) 8	(8) 9	8	8	8
10	5	(6) 9	6	6	6
20	0.4	(1) 2	(1) 2	(1) 2	(1) 2
30	(0.3) 0.6	(0.1) 0.4	(0.2) 0.5	(0.5) 0.2	0.5
40	(0.4) 1	(0.1) 0.2	(0.2) 0.1	(0.1) 0.2	(0.2) 0.05
50	(0.3) 1	(0.1) 0.5	(0.1) 0.2	(0.2) 0.7	(0.03) 0.7
60	(0.9) 2	0.4	(0.4) 0.2	(0.1) 0.2	(0.4) 0.2
70	1	(0.6) 0.2	(0.5) 0.2	(0.2) 0.1	(0.2) 0.1
80	(0.7) 1	(0.6) 0.2	(0.3) 0.1	(0.2) 0.1	(0.2) 0.1
90	1	(0.4) 0.2	(0.2) 0.3	(0.3) 0.08	(0.2) 0.08
100	1	(0.2) 0.4	0.2	(0.3) 0.4	(0.4) 0.2

Таблица 1. Относительная погрешность в процентах

характерных размеров отверстия от его кромки. Из таблицы можно увидеть, что эффект от взаимодействия внешней и внутренней границ для $M = 10$ не превышает 10%. Для эллиптических отверстий с различными соотношениями полуосей зона распространения этого эффекта может варьироваться. Интересно, что в данном примере при $N = 64$ и $M = 20$ погрешность становится менее 1%, но с увеличением либо N, либо M немного возрастает (вследствие увеличения объема вычислений). Подобная картина наблюдается и для других отверстий. Заметим, что для целей дальнейших исследований выбор N меньшим 64 не целесообразен. Погрешность вычислений также чувствительна к выбору параметров сетки Hmax, Hgrad и других.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №16-08-00890.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н., *MATLAB 7*, СПб.: БХВ-Петербург, (2010).

[2] Гасратова Н.А., Шамина В.А., “Решение в напряжениях линейной осесимметричной задачи для сферы и упругого пространства со сферической по-

лостью", *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия.*, No. 2, 122–128 (2008).

[3] Греков М.А., "Математика и механика внутренних и поверхностных дефектов", *Процессы управления и устойчивость*, 3, No. 1, 19–44 (2016).

[4] Колпак Е.П., *Вычисления в MATLAB*, Казань: ООО "Бук" (2016).

[5] Пронина Ю.Г., "Краевая дислокация и сосредоточенная сила в упругой полуплоскости с отверстиями и краевыми вырезами", *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия.*, No. 4, 120–124 (2012).

[6] Седова О.С., Пронина Ю.Г., "О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов", *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.*, No. 2, 33–44 (2016).

On the Coupled Orbit-Attitude Control Motion of a Celestial Body in the Neighborhood of the Collinear Libration Point L1 of the Sun–Earth System

Шиманчук Д.В.

d.shimanchuk@spbu.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Об управляемом поступательно-вращательном движении небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации L1 системы Солнце–Земля

В рамках задачи двух тел было показано, что в случае, когда кинетическая энергия вращения небесного тела достаточно мала по сравнению с работой внешних сил, то движение небесного тела при определенном выборе его начальной ориентации будет носить либрационный характер – небесное тело будет колебаться около некоторого устойчивого положения относительного равновесия [1]. Определение таких положений равновесия и исследование движения в их окрестности являются актуальными задачами и представляют важное значение для решения проблем стабилизации и ориентации небесных тел при помощи моментов внешних сил.

При совместном рассмотрении поступательного и вращательного движения небесного тела вращательное движение относительно центра масс существенно зависит от положения центра масс в космическом пространстве, но с другой стороны ориентация небесного тела может оказать влияние на поступательное перемещение. Например, ориентацией солнечного