Интегрально-оценочные критерии для границ применения закона Гука

Орехов А.В.
a_v_orehov@mail.ru
Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Российская Федерация, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Ключевые слова: упругая деформация, пластическая деформация, закон Гука.

Основной целью изучения свойств материалов при воздействии на них внешних сил является установление связи между напряжениями и деформациями. На первом этапе такого воздействия происходит упругая деформация. В этом случае, согласно закону Гука, существует линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Если изучается зависимость величины нагрузки как функция от деформации, то переход от упругого состояния к пластическому характеризуется изменением вида возрастания нагрузки от линейного к логарифмическому, например, [1, 2]. Если же нагрузка является аргументом, а деформация рассматривается как функция от неё, то переход от упругого состояния к пластическому характеризуется изменением вида возрастания деформации от линейного к параболическому или экспоненциальному, например, [3, 4]. Результаты теоретического исследования или численного моделирования упругих свойств различных материалов могут быть представлены либо в виде таблиц, либо в виде непрерывных функций. В этой связи практический интерес представляет получение аналитических критериев, позволяющих определить момент, когда характер монотонного возрастания некоторой величины переходит от линейного к нелинейному типу. Для аналитического исследования табличных данных можно использовать аппроксимационно-оценочные критерии [5]–[7]. Рассмотрим возможное решение этой задачи для непрерывного случая.

Не умаляя общности, будем рассматривать непрерывные и неубывающие функции $y = f(x)$ на отрезке $[0,\, b]$. Класс таких функций будем обозначать прописной латинской буквой M, т. е. $f(x) \in M[0,\, b]$.

Изучим проблему классификации $f(x) \in M[0,\, b]$ по характеру их возрастания на отрезке $[0,\, b]$. Выберем четыре эталонные функции для такой классификации: линейную — $\varphi_1(x) = ax$, степенную — $\varphi_2(x) = cx^2$, логарифмическую — $\varphi_3(x) = g\ln(1 + x)$, показательную — $\varphi_4(x) = k(\mathbf{e}^x - 1)$.

Все эти функции в точке 0 равны нулю. Любую функцию $\widetilde{f}(x) \in M[0,\, b]$ при помощи преобразования $f(x) = \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)$ можно изменить так, чтобы и она удовлетворяла условию $f(0) = 0$. Целью заявленной выше классификации будет определение характера возрастания $f(x) \in M[0,\, b]$.

Прежде чем определить критерий такой классификации, заметим, что интегральной характеристикой скорости является пройденный путь. Поэтому естественно заметить, что если на некотором множестве сравниваются две различные скорости, то в качестве меры их различия может быть выбрана разница пройденного пути.

Исходя из этого, определим критерий сравнения скорости изменения двух функций $f(x),\, g(x) \in M[0,\, b]$ как интеграл

$$S(b) = \int\limits_0^b \left(f(t) - g(t)\right)^2 dt.$$

Геометрический смысл этого критерия состоит в том, что $S(b)$ оценивает площадь плоской области, ограниченной непрерывными неубывающими кривыми $f(x)$ и $g(x)$.

Введем обозначение $S_i = \int\limits_0^b \left(f(t) - \varphi_i(t)\right)^2 dt$, и по определению, будем считать, что непрерывная неубывающая функция $f(x)$ «почти линейно» возрастает на отрезке $[0,\, b]$, если справедливо неравенство: $S_1 < S_i$, где $i \in \{2,\, 3,\, 4\}$, в противном случае, изменение $f(x)$ будем считать нелинейным.

Неопределенные коэффициенты a, c, g, k, должны удовлетворять условию: $f(b) = \varphi_i(b)$. Тогда:

$$a = \frac{f(b)}{b},\; c = \frac{f(b)}{b^2},\; g = \frac{f(b)}{\ln(1 + b)},\; k = \frac{f(b)}{\mathbf{e}^b - 1}.$$

Если $f(x)$ описывает связь между напряжениями и деформациями, то для определения границ применения закона Гука можно сравнить эту монотонно возрастающую функцию с эталонными $\varphi_1(x)$ и $\varphi_i(x)$, где натуральный индекс

$i \in \{2, 3, 4\}$. Вычислим два интеграла с переменными верхними пределами:

$$I_1(x) = \int_0^x (f(t) - \varphi_1(t))^2 \, dt, \qquad I_2(x) = \int_0^x (f(t) - \varphi_i(t))^2 \, dt.$$

Решением уравнения:

$$I_1(x) - I_2(x) = 0$$

относительно неизвестной x будет «критическая точка» b, в которой «почти линейное» возрастание $f(x)$ изменяется на нелинейное. То есть, левее точки b для расчёта прочности, жёсткости и устойчивости можно использовать модели, основанные на парадигме закона Гука, а справа от b закон Гука становится неприменимым.

Литература

[1] Schneider S., Schneider S.G., Silva H.M., Moura Neto C. and et al. Study of the non-linear stress-strain behavior in Ti-Nb-Zr alloys. Mat. Res. [online]. 2005, vol.8, n.4, pp.435–438. ISSN 1516-1439. http://dx.doi.org/10.1590/S1516-14392005000400013.

[2] Schneider S. G., Nunes C. A., Rogero S. O., Higa O. Z., Bressianil J. C. Mechanical properties and cytotoxic evaluation of the Ti-3Nb-13Zr alloy. Biomechanica. 2000. vol. 8(1), pp. 84–87

[3] Павилайнен Г. В., Юшин Р. Ю. Анализ учёта упругой трансверсальной изотропи и пластической анизотропи при изгибе круглых пластин. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2011. Вып. 1. С. 122-131.

[4] Pavilaynen G. V., Yushin R. U. An approximate solution of elastic-plastic problem of circular strength different (SD) plates. // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics: Abstracts of the International Conference. Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov. St.Petersburg, VVM Publ. 2017. pp. 207–209.

[5] Orekhov A.V. Criterion for estimation of stress-deformed state of SD-materials. // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. P. 070028. doi:10.1063/1.5034703

[6] Орехов А.В. Аппроксимационно-оценочные критерии напряженно-деформируемого состояния твердого тела. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 230–242. doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.304

[7] Orekhov A.V. Statistical criteria for the limits of application of Hooke's law // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 391–401. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.404