ДВА КРИТЕРИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Орехов А. В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация,

A_V_Orehov@mail.ru

Главное требование, предъявляемое к любой конструкции, состоит в том, чтобы она обладала прочностью, жесткостью и устойчивостью. Расчеты этих параметров основаны на экспериментальных данных и допущениях, принятых в рамках сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости. Результаты экспериментов, как правило, являются таблично заданными функциями, аналитический вид задания которых в большинстве случаев неизвестен. До тех пор, пока деформации и нагрузки связанны линейно, упомянутые выше допущения основываются на обобщенном законе Гука, но, когда связь между деформацией и нагрузкой становиться нелинейной ситуация существенно усложняется, а свойства конструкции приобретают новое качество, не всегда позитивное.

Например, растрескивание и разрушение конструкций из упругопластических материалов непосредственно связанно с развитием пластической деформации. Если рассмотреть зависимость длины пластической зоны, от действующего напряжения, то легко заметить изменение вида её возрастания, которое сначала является линейным, а потом становится параболическим (рис. 1) [1]. Увеличение раскрытия в вершине трещины в зависимости от растягивающего напряжения, также описывается переходом от линейного к нелинейному возрастанию (рис. 2) [1].

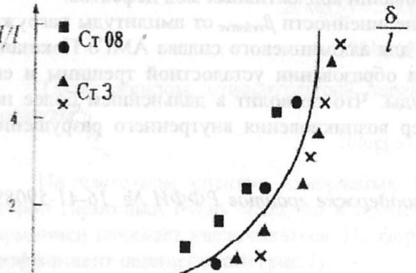

Рис. 1

Рис. 2

Аналогичные изменения параметров напряженно-деформируемого состояния наблюдаются: при продольно-поперечном изгибе балок, когда продольная сила приближается к своему критическому значению и прогибы начинают интенсивно расти [2], при начале пластической деформации для SD-материалов (рис. 3) [3, 4], при циклическом разрушении за счет роста трещин [5, 6], при продольной деформации железобетонных изделий (рис. 4) [7] и т. п.

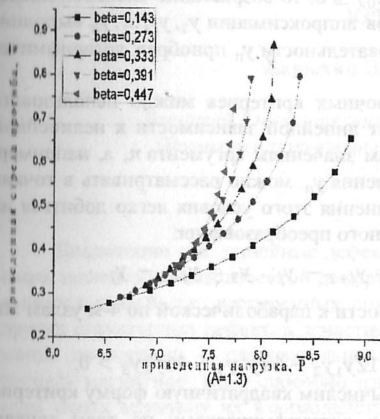

Рис. 3

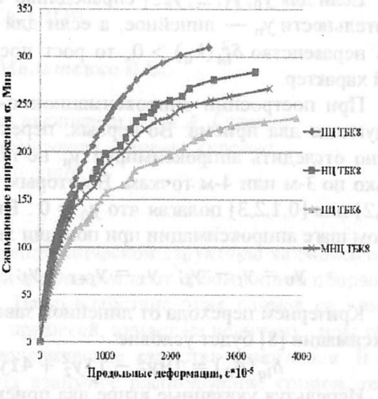

Рис. 4

В этой связи практический интерес представляет получение аналитических критериев, позволяющих определить момент, когда изменение таблично заданной величины, аналитический вид которой неизвестен, переходит от линейного типа к нелинейному.

Рассмотрим аппроксимационно-оценочные критерии, — $\delta_{lq}^2(k_0)$ и $\delta_{ln}^2(k_0)$, предназначенные для определения точки, в которой вид возрастания монотонной последовательности y_n числовых параметров твердого тела, характеризующих его напряженно-деформируемое состояние, изменяется с линейного на параболический или логарифмический. Эти критерии основаны на сравнении квадратичных погрешностей аппроксимации в классе линейных функций — $f(x) = ax + b$, в классе неполных многочленов второй степени (без линейного члена) — $f(x) = cx^2 + d$ и в классе логарифмических функций — $f(x) = g\ln(x+1) + h$.

Под квадратичной погрешностью аппроксимации для функции $f(x)$ будем понимать сумму квадратов разностей значений последовательности y_n в узлах аппроксимации $y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}$ и функции $f(x)$ при соответствующем значении аргумента $\delta_f^2 = \sum_{i=0}^{k-1} (f(i) - y_i)^2$.

Функция $f(x)$ из класса X аппроксимирует точки $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ по методу наименьших квадратов если справедливо: $\delta_f^2 = \min_{f\in X} \sum_{i=0}^{k-1} (f(i) - y_i)^2$.

Квадратичные погрешности линейной, неполной параболической и логарифмической аппроксимаций для k узлов определяются как: $\delta_l^2(k_0) = \sum_{i=0}^{k-1} (a \cdot i + b - y_i)^2$, $\delta_q^2(k_0) = \sum_{i=0}^{k-1} (c \cdot i^2 + d - y_i)^2$ и $\delta_n^2(k_0) = \sum_{i=0}^{k-1} (g \cdot \ln(i+1) + h - y_i)^2$

Параболический аппроксимационно-оценочный критерий имеет вид:

$$\delta_{lq}^2(k_0) = \delta_l^2(k_0) - \delta_q^2(k_0).$$

Если для узлов $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ выполняется неравенство $\delta_{lq}^2(k_0) \leq 0$, то возрастание y_n будет «почти линейным», а если для $y_1, y_2, \dots, y_k$ знак неравенства изменяется на обратный $\delta_{lq}^2(k_0) > 0$, то можно сказать, что возрастание числовой последовательности y_n стало параболическим.

Логарифмический аппроксимационно-оценочный критерий имеет вид:

$$\delta_{ln}^2(k_0) = \delta_l^2(k_0) - \delta_n^2(k_0).$$

Если для $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ справедливо $\delta_{ln}^2(k_0) \le 0$, то возрастание числовой последовательности y_n — линейное, а если для узлов аппроксимации $y_1, y_2, \dots, y_k$ выполнилось неравенство $\delta_{ln}^2(k_0) > 0$, то рост последовательности y_n приобрел логарифмический характер.

При построении аппроксимационно-оценочных критериев можно использовать следующие два приёма. Во-первых, переход от линейной зависимости к нелинейной можно отследить аппроксимируя y_n не по всем значениям аргумента n, а, например, только по 3-м или 4-м точкам. Во-вторых, значения y_n можно рассматривать в точках {0,1,2} или {0,1,2,3} полагая что $y_0 = 0$. Выполнения этого условия легко добиться на любом шаге аппроксимации при помощи линейного преобразования:

$$y_0 = y_j - y_j;\ \ y_1 = y_{j+1} - y_j;\ \ y_2 = y_{j+2} - y_j;\ \ y_3 = y_{j+3} - y_j.$$

Критерием перехода от линейной зависимости к параболической по 4-м узлам аппроксимации [8] будет условие:

$$\delta_{lq}^2(4_0) = 19y_1^2 - 11y_2^2 + 41y_3^2 + 12y_1y_2 - 64y_1y_3 - 46y_2y_3 > 0.$$

Используя указанные выше два приёма вычислим квадратичную форму критерия $\delta_{ln}^2(3_0)$ перехода от линейного возрастания к логарифмическому по трем точкам {0,1,2}.

$$\delta_{ln}^2(3_0) = -0.448y_1^2 + 1.081y_1y_2 - 0.555y_2^2.$$

Список литературы

1. Пестриков В.М., Морозов Е.М., Механика разрушения твердых тел. — СПб.: Профессия, 2002. — 320 с.
2. Терегулов И.Г., Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1964. — 472 с.
3. Павилайнен Г.В., Юшин Р.Ю., Анализ учета упругой трансверсальной изотропии и пластической анизотропии при изгибе круглых пластин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, Механика, Астрономия. 2011. №1. С. 122-131.
4. Павилайнен Г.В., Математическое моделирование упруго-пластического изгиба балки, материал которой обладает эффектом SD. В сборнике: Труды семинара "Компьютерные методы в механике сплошной среды" 2014-2015 гг. Издательство СПбГУ. 2015. Санкт-Петербург, С. 49-62.
5. Вансович К.А., Модель роста усталостных поверхностных трещин за цикл «нагрузка-разгрузка» // Омский научный вестник, 2017. № 3(153). С. 49-53.
6. Тихомиров В.М., Рост трещины при знакопеременном цикле нагружения // Прикладная механика и техническая физика, 2008. Т. 49. № 5(291). С. 190-198.
7. Резван И.В., Маилян Д.Р., Резван А.В., Построение диаграммы «напряжения-деформации» бетона в условиях пассивного бокового обжатия. // Инженерный вестник Дона. 2012. Т. 22. № 4-1 (22). С. 156.
8. Орехов А.В., Критерий оценки напряженно-деформируемого состояния SD-материалов. В сборнике: Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения». Тезисы докладов. Издательство СПбГУ. Санкт-Петербург. 2018. С. 221-222.