ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

существует по крайней мере три пути получения оптимального решения:

а) согласно принципу недостаточного основания Лапласа искать решение из условия максимизации суммы локальных критериев

$$\sum_{i=1}^{r} \text{æ}_i \quad ; \tag{6}$$

б) можно воспользоваться принципом справедливого компромисса, согласно которому оптимальное решение находится из условия максимизации произведения.

$$\prod_{i=1}^{r} \text{æ}_i \, . \tag{7}$$

Этот принцип имеет достаточно ясную логическую основу [2] и может с успехом применяться при выборе оптимальных решений, когда набор глобальных состояний среды принадлежит I_4;

в) наконец, можно считать, что оптимальным решением является то, которое дает наилучшее чебышевское равномерное приближение, т.е. φ_{k_0} выбирается так, чтобы

$$\min_i \text{æ}_i(\varphi_{k_0}) \geqslant \min_i \text{æ}_i(\varphi_k), \tag{8}$$

где

$$\varphi_k \in \Phi_э .$$

Л и т е р а т у р а

1. Трухаев Р.И. Методы исследования процессов принятия решений в условиях неопределенности. Л., ВМОЛУА. 1972.

2. Борисов В.И. Проблемы векторной оптимизации. - В кн.: Исследование операций. М., "Наука", 1972.

О НАХОЖДЕНИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МИНИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В.Д. Ногин

Ленинградский государственный университет

Задачу выбора оптимального решения, исходя из условия максимума математического ожидания, можно представить в следующем виде: найти все точки $x_0 \in X$, $X \subset E^n$, доставляющие максимум линейной целевой функции (p, x), т.е. найти множество $\{x_0 \in X \mid x_0 \to \max_X (p, x)\}$. Здесь запись (p, x) означает скалярное произведение вектора

$$p, \; p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \; p_i \geqslant 0, \; p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1,$$

который называют вектором распределения вероятностей состояний среды, на вектор $x \in E^n$, называемый решением. Сформулированную выше задачу называют непрерывной, подразумевая под этим, что множество допустимых решений X, вообще говоря, имеет мощность континуума. Дискретной эта задача будет в том случае, если множество X конечно. В дискретной задаче матрицу, составленную из всех векторов множества X, называют оценочным функционалом, или матрицей эффективностей.

Когда вектор p известен, то неопределенности при выборе оптимальных решений нет и задача принятия оптимальных решений становится задачей математического программирования. Неопределенность возникает в том случае, если известно только то, что p принадлежит некоторому множеству Q, причем Q имеет более одного элемента и является подмножеством множества всех возможных распределений:

$$\Delta = \{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid p_i \geqslant 0, \; p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \}.$$

В случае полной неопределенности $Q \equiv \Delta$.

В работах [1], [2] имеется большое количество критериев, при помощи которых рекомендуется выбирать то или иное решение в зависимости от степени и характера незнания вектора p. Суть многих из этих критериев фактически заключается в том, что с их помощью выбирается некоторое распределение p_0 из множества Q, и, таким образом, задача выбора решений в условиях неопределенности сводится к задаче математического программирования для линейной целевой функции (p_0, x). Такие критерии носят субъективный характер и часто бывают взаимно противоречивы, поскольку можно считать истинным распределением состояний среды распределение $p_0 \in Q$; но так как Q содержит по крайней мере два элемента, то на самом деле возможна реализация другого распределения p_1 из Q, и оптимальные решения, соответствующие истинному распределению p_1, могут не совпадать с найденными оптимальными решениями в предположении, что p_0 – истинное.

Работа посвящена вопросам нахождения минимального множества оптимальных решений Ψ, соответствующего имеющемуся в задаче уровню неопределенности:

$$\Psi = \bigcup_{p \in Q} \Psi(p),$$

где $\Psi(p) = \{x_0 \in X \mid x_0 \to \max\limits_{x}(p, x)\}$. Множество Ψ – минимальное в том смысле, что если из него удалить хотя бы одну точку, то найдется такое распределение $p' \in Q$, что $\Psi(p') \not\subset \Psi$; и наоборот, для любого $p \in Q$ выполняется $\Psi(p) \subset \Psi$. Как будет показано ниже, в определенных случаях множество Ψ совпадает с множеством оптимальных по Слейтору точек для непрерывной задачи и с множеством сильно оптимальных по Слейтору точек для дискретной задачи. Посредством этого устанавливается некоторая связь задачи выбора решений в условиях неопределенности с задачей векторной оптимизации.

Очевидно, если множество Q конечно, то принципиальных трудностей при нахождении множества Ψ не возникает. Однако когда Q – бесконечное множество, перебор в принципе невозможен, и требуются другие методы. Именно этот случай и будем рассматривать ниже, но прежде введем некоторые понятия многоцелевого программирования и докажем несколько вспомогательных результатов.

Точка $x_0 \in X$ называется оптимальной по Слейтору для вектор-функции $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, заданной на множестве X, $X \subset E^n$, если не существует $x \in X$ такого, что

$f_i(x) > f_i(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Когда множество X конечно, будем называть точку $x_0 \in X$ сильно оптимальной по Слейтору, если она оптимальна по Слейтору и если существует вектор λ, среди компонент которого есть компоненты, отличные от нуля, вида

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \; \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \tag{1}$$

причем x_0 находится из условия $\max\limits_{x}(\lambda, F(x))$. Оптимальную по Слейтору точку, для которой не существует указанного λ, будем называть слабо оптимальной по Слейтору. Справедливы следующие утверждения:

А1. Если существует вектор λ вида (1) такой, что x_0 удовлетворяет условию $\max\limits_{x}(\lambda, F(x))$, то точка x_0 оптимальна по Слейтору для $F(x)$ при $x \in X$.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное: существует $x_1 \in X$, такое, что $f_i(x_1) > f_i(x_0)$, $i = 1, \ldots, m$. Умножим эти неравенства на соответствующие λ_i и результаты сложим. Получим неравенство $(\lambda, F(x_1)) > (\lambda, F(x_0))$, которое противоречит условию нашего утверждения.

А2. Пусть множество X выпукло, а функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ вогнуты на нем. Тогда, если точка x_0 оптимальна по Слейтору, существует вектор λ вида (1) такой, что

$$x_0 \to \max_{X}(\lambda, F(x)).$$

<u>Доказательство.</u> Поскольку x_0 оптимальна по Слейтору, система неравенств $f_i(x_0) - f_i(x) < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ не имеет решений на множестве X. По фундаментальному свойству выпуклых функций [3] существует λ вида (1), причем $(\lambda, F(x_0) - F(x)) \geq 0$ или, что то же самое, $(\lambda, F(x_0)) \geq (\lambda, F(x))$ для любого $x \in X$.

Суммируя утверждения А1 и А2, получаем следующее:

А3. Если X – выпуклое множество, функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ вогнуты на нем, то x_0 оптимальна по Слейтору для $F(x)$, $x \in X$ в том и только в том случае, если $x_0 \to \max\limits_{X}(\lambda, F(x))$, где вектор λ имеет вид (1).

А4. Пусть множество X, $X \subset E$ конечно. Для того чтобы точка x_0 была сильно оптимальной по Слейтору для вектор-функции $F(x)$, $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор λ вида (1) такой, что $x_0 \to \max\limits_{X}(\lambda, F(x))$. Достаточность этого утверждения следует из А1, а необходимость очевидна.

Вернемся к задаче нахождения минимального множества оптимальных решений. Рассмотрим случай, когда $Q = P^* \cap \Delta$, где $P^* = \{ p \in E^n \mid AP \geq 0 \}$. Здесь $A = \| a_{ij} \|$ есть матрица $r \times n$. Если все элементы матрицы A суть нули, то $P^* \in E^n$, $Q = \Delta$, что соответствует случаю полной неопределенности. Когда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

получаем простое отношение порядка $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ на компонентах вектора распределения вероятностей состояний среды; при некоторых других значениях a_{ij} можно получить различные частичные отношения порядка [2]. Таким образом, рассматриваемая ситуация носит довольно общий характер и охватывает широкий круг различных градаций неопределенности.

Множество Q по определению полиэдрально, а значит, конечнопорожденно. Поскольку множество Δ ограничено, то и множество Q ограничено. Поэтому Q является выпуклой оболочкой некоторых элементов $b_1, b_2, \dots, b_m$ из Q: $Q = co\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Далее, любая точка p из $co\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ представима в виде $p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$, где $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

В силу вышесказанного имеем

$$Y = \bigcup_{p \in co\{b_1,\dots,b_m\}} Y(p) = \bigcup_{p \in co\{b_1,\dots,b_m\}} \{ x_0 \in X \mid x_0 \to \max_X (p, x) \} =$$

$$= \{ x_0 \in X \mid x_0 \to \max_X \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, x \Big), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \} =$$

$$= \{ x_0 \in X \mid x_0 \to \max_X \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i, x), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \}.$$

Таким образом, в непрерывном случае (согласно А3) множество Y есть множество оптимальных по Слейтору точек для линейной вектор-функции $((b_1,x),(b_2,x),\dots,(b_m,x))$, заданной на выпуклом мно-

жестве X, а в дискретном случае в силу А4 оно совпадает с множеством сильно оптимальных по Слейтору точек для той же вектор-функции, определенной на конечном множестве X. Далее рассмотрение ограничивается дискретным случаем.

Обозначим через K выпуклый конус, порожденный множеством Q:

$$K = \{ x \in E^n \mid x = \lambda y, \lambda \geq 0, y \in P^* \cap \Delta \},$$

а через K^* и K^Δ – выпуклые конусы, порожденные множествами P^* и Δ соответственно.

А5. Пусть $Q \neq \emptyset$, где через $\emptyset$ обозначено пустое множество. Конус $\mathcal{D}(K)$, двойственный конусу K, есть n-мерный, не совпадающий со всем пространством E^n конус, причем порождается он выпуклой оболочкой элементов $e_1, e_2, \dots, e_n, a_1, a_2, \dots, a_r$, где $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, а e_i – вектор с n компонентами, среди которых лишь i-я отличная от нуля и равна единице, а остальные равны нулю.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего заметим, что конусы K^* и K^Δ в силу определения множеств P^* и Δ, замкнуты. Кроме того, очевидно, $K = K^* \cap K^\Delta$. Согласно следствию 31.4 из [4], конус, двойственный пересечению конусов K^* и K^Δ, является выпуклой оболочкой двойственных конусов $\mathcal{D}(K^*)$ и $\mathcal{D}(K^\Delta)$. Конус K^Δ есть конус с образующими $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n$; двойственный к нему совпадает с ним самим. $\mathcal{D}(K^*)$ – это конус, порожденный множеством $co\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Далее выпуклая оболочка конуса с образующими $e_1, e_2, \dots, e_n$ и конуса, порожденного множеством $co\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, совпадает с конусом, порожденным множеством

$co\{e_1, e_2, \dots, e_n, a_1, a_2, \dots, a_r\}$, т.е.

$$\mathcal{D}(K) = \{ x \in E^n \mid x \in \lambda y, \lambda \geq 0, y \in co\{e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_r\} \}.$$

При этом n-мерность конуса $\mathcal{D}(K)$ следует из того, что конус K – острый (см. [5], с.114). А поскольку $Q \neq \emptyset$, конус K имеет размерность, большую нуля, а значит, в силу того же следствия из [5], $\mathcal{D}(K)$ не совпадает со всем пространством E^n. Утверждение доказано полностью.

Конус K является конусом с образующими $b_1, b_2, \dots, b_m$, и $\mathcal{D}(K) = \{ x \in E^n \mid (b_i, x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \}$. Очевидно, точка $x_0 \in X$ оптимальна по Слейтору для линейной вектор-функции

$((b_1,x),(b_2,x),\dots,(b_m,x))$ в том, и только в том, случае, когда система неравенств $(b_i, x_0 - x) < 0$, $i=1,2,\dots,m$ не имеет решений на множестве X. Последнее выполняется тогда, и только тогда, когда ни одна точка множества X не принадлежит внутренности конуса $\mathcal{D}(K)+x_0$, где

$$\mathcal{D}(K)+x_0 = \{(x+x_0)\in E^n \mid x\in \mathcal{D}(K)\}.$$

При $A\equiv 0$, т.е. в случае полной неопределенности, оптимальность по Слейтору решения x_0 из X проверяется следующим образом. Решение x_0 оптимально по Слейтору тогда, и только тогда, когда среди точек множества X не существует точки x, такой, что $x_0 - x < 0$.

Пусть среди элементов матрицы A имеются отличные от нуля и, кроме того, система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i + \sum_{i=n+1}^{n+2} y_i a_{i-n} = 0 \qquad (2)$$

не имеет ненулевых неотрицательных решений (последнее означает, что конус $\mathcal{D}(K)$ – острый). Прежде всего удалим из системы векторов $e_1, e_2,\dots,e_n, a_1, a_2,\dots,a_n$, линейно зависимые от остальных. Размерность конуса $\mathcal{D}(K)$ равна n, поэтому останется n линейно независимых векторов, которые обозначим через $C_1, C_2,\dots,C_n$. Теперь, если система уравнений

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i c_i = x$$

для некоторых x из множества X имеет строго положительные решения, то x_0 не является оптимальной по Слейтору, поскольку точка x будет принадлежать внутренности конуса $\mathcal{D}(K)+x_0$ (в противном случае точка x_0 оптимальна по Слейтору).

Если система (2) имеет нулевые неотрицательные решения, то конус $\mathcal{D}(K)$ не будет острым, и проверка на оптимальность по Слейтору усложняется. Здесь на этом случае останавливаться не будем.

Нас интересует множество точек, сильно оптимальных по Слейтору, поэтому если найдено множество оптимальных по Слейтору точек, то из него надо удалить точки, слабо оптимальные по Слейтору. Однако можно, не находя множества оптимальных по Слейтору точек, пытаться сразу из множества допустимых решений X выделить сильно оптимальные по Слейтору. Этому способствуют следующие утверждения.

А6. Пусть $X=\{x_0, x_1,\dots,x_\ell\}$, $X\subset E^n$ и ранг множества X равен n. Пусть, кроме того, $b_i\in E^n$, $i=1,2,\dots,m$. Если су-

ществуют такие числа μ_i $(i=1,2,\dots,p)$, $\mu_i>0$, $\sum_{i=1}^{p}\mu_i = 1$, $p\le \ell$, что $x_0=\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_{k_i}$, где $\{x_{k_1}, x_{k_2},\dots,x_{k_p}\} = X_0$, $X_0\subset X$ и ранг множества X равен n, то x_0 может быть лишь оптимальной по Слейтору точкой для вектор-функции

$$((b_1,x),(b_2,x),\dots,(b_m,x)),\ x\in X.$$

<u>Доказательство.</u> Условия $x_0=\sum_{i=1}^{p}\mu_i x_{k_i}$, $\mu_i>0$, $\sum_{i=1}^{p}\mu_i=1$ означают, что x_0 является внутренней точкой n-мерного многогранника $co\{X_0\}$. Поскольку линейная функция достигает максимума только на границе n-мерного многогранника, то не существует

$$\lambda_i,\ i=1,2,\dots,m,\ \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1,$$

таких, что $x_0 \to \max\limits_{co\{X_0\}}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i x\right)$. Докажем, что если $x_0\to\max\limits_{X_0}(p,x)$, где $p\in E^n$, то $x_0\to\max\limits_{co\{X_0\}}(p,x)$.

Произвольная точка x выпуклой оболочки $co\{X_0\}$ представима в виде

$$x=\sum_{i=1}^{p}\rho_i x_{k_i}, \qquad (3)$$

причем $\rho_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{p}\rho_i = 1$. Из того, что $x_0\to\max\limits_{X_0}(p,x)$, следуют неравенства $(p,x_0)\ge(p,x_{k_i})$, $i=1,2,\dots,p$. Умножим каждое неравенство на соответствующее $(i=1,2,\dots,p)$ ρ_i, затем сложим их. Получим

$$(p,x_0)\ge\left(p,\sum_{i=1}^{p}\rho_i x_{k_i}\right),$$

или, учитывая (3), $(p,x_0)\ge(p,x)$ для любого $x\in co\{X_0\}$. Таким образом, из того, что не существуют λ_i, $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ $(i=1,2,\dots,m)$, такие, что $x_0 \to \max\limits_{co\{X_0\}} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, x \right)$, в силу только что доказанного факта не существует указанных λ_i, $i = 1, 2, \dots, m$ таких, что $x_0 \to \max\limits_{X_0} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, x \right)$. Из этого вытекает, что точка x_0 не может доставлять максимум линейной форме $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i, x)$ ни при каких λ вида (1) и на более широком множестве X, т.е. точка x_0 не может быть сильно оптимальной по Слейтору.

А7. Пусть нулевые векторы $b_1, b_2, \dots, b_m$ принадлежат пространству E^n и все компоненты вектора $x_0 \in X$ отличны от нуля. Если точка x_0 сильно оптимальна по Слейтору для вектор-функции $((b_1, x), (b_2, x), \dots, (b_m, x))$, заданной на конечном множестве X, и существуют μ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) $(\mu_i \geqslant 0)$ такие, что

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i , \tag{4}$$

где $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, p$, то $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i \geqslant 1$.

<u>Доказательство.</u> Из условия и утверждения А4 следует существование вектора λ вида (1) такого, что

$$x_0 \to \max_{X} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i, x \right). \tag{5}$$

Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ через b_0. Из (5) имеем $(b_0, x_i) \leqslant (b_0, x_0)$, $i = 1, 2, \dots, p$. Умножим каждое неравенство этой системы на соответствующее μ_i и сложим их. Получим

$$\left(b_0, \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i \right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \right) (b_0, x_0) . \tag{6}$$

Так как векторы $b_1, b_2, \dots, b_m$ нулевые, не все λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) равны нулю и компоненты x_0 отличны от нуля, то $(b_0, x_0) > 0$. Разделив обе части неравенства (6) на (b_0, x_0) и учтя (4), получим требуемое соотношение $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i \geqslant 1$.

<u>Замечание.</u> В условиях последнего утверждения требование о несуществовании нулевых компонент вектора x_0 можно заменить на следующее: $x_0 \neq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_m \in \Delta$ и не существует $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого $x_{ij} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, p$ и $x_{ij} \geqslant 0$ для всех i и j. Здесь x_{ij} есть j-я компонента вектора x_i.

Нижеследующие утверждения помогают выделить из множества оптимальных по Слейтору точек сильно оптимальные по Слейтору.

А8. Пусть X_0 есть множество всех оптимальных по Слейтору точек для вектор-функции $((b_1, x), (b_2, x), \dots, (b_m, x))$, $x \in X$, а $\mathcal{D}(K) = \{ x \in E^n \mid (b_i, x) \geqslant 0, \ i = 1, 2, \dots, m \}$.

Если многогранник $co\{X_0\}$ не пересекается с внутренностью n-мерного конуса $\mathcal{D}(K)$, то оптимальная по Слейтору точка x_0 будет сильно оптимальной по Слейтору.

<u>Доказательство.</u> Согласно следствию 30.9 из [4], существует гиперплоскость $(\alpha, x - x_0) = 0$, разделяющая множества $co\{X_0\}$ и $\mathcal{D}(K) + x_0$. Поскольку $(\alpha, x - x_0) \leqslant 0$ для любого $x \in (\mathcal{D}(K) + x_0)$, то по определению двойственного конуса $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(K) + x_0)$, используя известную теорему о том, что для выпуклого замкнутого конуса M выполняется соотношение $\mathcal{D}(\mathcal{D}(M)) = M$ (см. [4]), получаем $\alpha \in (K + x_0)$. Последнее означает, что существуют ($i = 1, 2, \dots, m$) λ_i, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$. Таким образом, неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i} (b_i, x_0) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i} (b_i, x) \tag{7}$$

выполняется для любого x из $co\{X_0\}$, а значит, и для любого $x \in X_0$. Ясно, что для каждой неоптимальной по Слейтору точки $x_k \in X$, в силу конечности множества неоптимальных по Слейтору точек, существует оптимальная по Слейтору точка x_p такая, что $(b_i, x_p) > (b_i, x_k)$, $i = 1, \dots, m$. Это вместе с (7) дает требуемый результат.

В случае полной неопределенности представляет интерес следующий результат.

A9. Пусть X_0 есть множество всех оптимальных по Слейтору точек для вектор-функции $((e_1, x), \dots, (e_n, x))$, $x \in X$.

Точка $x_0 \in X_0$ сильно оптимальна по Слейтору тогда, и только тогда, когда многогранник $co\{X_0\}$ не пересекается с внутренностью конуса $K^\Delta + x_0$.

Доказательство. Достаточность следует из А8, поэтому остается доказать необходимость. Если точка x_0 принадлежит множеству X_0, то, согласно А4, существуют λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ такие, что $x_0 \to \max_{X} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x\right)$.

Используя факт, полученный в ходе доказательства утверждения А6, имеем $x_0 \to \max_{co\{X_0\}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x\right)$, а значит,

$x_0 \to \max_{co\{X_0\}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x\right)$. Докажем, что $x_0 \to \min_{K^\Delta + x_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x\right)$, или, что то же самое, $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x\right) \geqslant 0$ для всех x из K^Δ.

Точка $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ принадлежит конусу K^Δ. А так как $\mathcal{D}(K^\Delta) = K^\Delta$, то $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \in \mathcal{D}(K^\Delta)$; тогда выполняется неравенство $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x\right) \geqslant 0$ для любого $x \in K^\Delta$.

Таким образом, гиперплоскость $(\lambda, x - x_0) = 0$ собственно разделяет множества $co\{X_0\}$ и $K^\Delta + x_0$. По теореме II.3 из [5] внутренность конуса $K^\Delta + x_0$ не пересекается с внутренностью многогранника $co\{X_0\}$, а значит, не пересекается с самим многогранником.

Л и т е р а т у р а

1. Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения. М., ИЛ, 1961.
2. Трухаев Р.И. Методы исследования процессов принятия решений в условиях неопределенности. Л., ВМОЛУА, 1972.
3. Berge C., Goula-Houri A. Programming, games and transportation networks. New York, 1965.
4. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., "Наука", 1973.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., "Мир", 1973.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭНТРОПИЙНОГО КРИТЕРИЯ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В.В.Хоменюк, М.Б.Чемерис

Институт автоматики и процессов управления ДВНЦ АН СССР,
Дальневосточный государственный университет,
Владивосток

В качестве критерия принятия решений в условиях неопределенности энтропийный критерий был использован Р.И.Трухаевым [1]. Им же указано [2] на возможность использования этого критерия как функционала свертки в задачах векторной оптимизации. Предлагается несколько вариантов применения энтропийного критерия в задачах векторной оптимизации.

I. Формулировка проблемы

Пусть на элементах x из пространства X элементов произвольной природы определены n $(n \geqslant 2)$ оценочных функционалов $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Предполагается, что задано непустое множество $M \subseteq X$ допустимых элементов. Обычно при математической постановке задачи оптимизации определяется функционал свертки векторных оценок $q \in \{R^n \to R^1\}$ и способ нормализации $g \in \{R^n \to R^n\}$.

З а д а ч а I. Найти $x^0 \in M$, для которого выполнено

$$q(\bar{f}(x^0)) = \max_{x \in M} q(\bar{f}(x)),$$

где $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $\bar{f}(x) = g(f(x))$.

Однако в большинстве задач векторной оптимизации однозначное задание функционала свертки и способа нормализации является практически невозможным.

Предположим далее, что определены два множества: множество $Q = \{q_k : k \in K\}$ функционалов свертки и множество $G = \{g_\ell : \ell \in \mathcal{L}\}$