АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МЕТОДЫ многоцелевой оптимизации

ВЛАДИВОСТОК
1982

рии оптимизации. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1977, с. 3-15.

4. Динер И.Я. Районирование множества векторов состояний природы и задача выбора решения. - В кн.: Исследование операций. М.: Наука, 1972, с. 43-62.

5. Шрейдер Ю.Э. Равенство, сходство, порядок. М.:Наука, 1971. 256 с.

В.Д.Ногин

ЭФФЕКТИВНЫЕ И СОБСТВЕННО ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ В МНОГОЦЕЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Понятия эффективного (оптимального по Парето, неулучшаемого) и собственно эффективного решений задачи многоцелевой (многокритериальной, векторной) оптимизации играют основополагающую роль в изучении различных вопросов задачи выбора оптимального решения при наличии нескольких целей. К настоящему времени насчитывается большое число работ, посвященных исследованию тех или иных свойств эффективных и собственно эффективных решений в случае, когда целевая вектор-функция и допустимое множество удовлетворяют определенным требованиям (например, дифференцируемости, выпуклости и т.п.).

В настоящей работе ряд новых необходимых и достаточных условий эффективности и собственной эффективности формулируется при весьма общих предположениях. Из общих необходимых и достаточных условий собственной эффективности как следствие выводится известная теорема А.М. Джоффриона [1] о характеризации собственно эффективных точек в случае выпуклого допустимого множества и вогнутой целевой вектор-функции. С помощью этих условий также дается новая формулировка собственно эффективного решения, которая имеет ясный геометрический смысл и из которой предельным переходом получается формулировка эффективного решения. Отмечается некоторый недостаток известного определения собственно эффективного решения и в связи с этим предлагается понятие подлинно эффективного решения. Устанавливается связь подлинно эффективных решений с собственно эффективными решениями. В последнем параграфе исследуются некоторые топологические свойства множества эффективных решений. Как следствие полученных результатов выводится известная теорема Эрроу-Баранкина-Блекуэлла [2].

I. Обозначения

Будем считать, что целевая вектор-функция $f(\cdot)=(f_1(\cdot),\ldots,f_m(\cdot))$ задана на подмножестве D конечномерного евклидова пространства E^n. Через I обозначим множество индексов $\{1,2,\ldots,m\}$. Введем следующие бинарные отношения для m-мерных векторов a, b:

$$a \geqq b \Longleftrightarrow a_i \geqq b_i\,,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$a > b \Longleftrightarrow a_i > b_i\,,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

$$a \geq b \Longleftrightarrow a \geqq b,\quad a \neq b,$$

$$a \ngeq b \Longleftrightarrow b \ngeq a.$$

Последнее отношение не является транзитивным; очевидно, $a \ngeq b$ тогда и только тогда, когда $a=b$ либо когда существует $i \in I$ такой, что $a_i > b_i$.

Пусть $a, b \in E^m$ и $A \subset E^m$. Будем употреблять следующие обозначения: (a,b) – скалярное произведение векторов a, b; $\|a\|$ – евклидова норма вектора a; $conv A$ – выпуклая оболочка множества A; $B_\sigma(a)$ – замкнутый шар радиуса $\sigma > 0$ с центром в точке a.

2. Эффективность

Для определенности будем рассматривать задачу максимизации. Согласно общеизвестному определению, решение (точка) $x^0 \in D$ называется эффективным (эффективной) относительно вектор-функции f на множестве D, если не существует $x \in D$, для которого $f(x) \geq f(x^0)$.

Лемма I [3]. Соотношение $a \ngeq b$ для векторов $a, b \in E^m$ имеет место тогда и только тогда, когда существует вектор $\mu \in M$, где

$$M=\{\mu \in E^m \mid \mu > 0_m, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\}, \tag{1}$$

такой, что $(\mu, a) \geqq (\mu, b)$.

Доказательство [I]. Необходимость. Пусть $a \ngeq b$. Если $a=b$, то утверждение леммы справедливо для любого μ

I Приводимое здесь доказательство принадлежит В.В.Подиновскому.

[illegible] для некоторого $j \in I$ выполнено $a_j > b_j$. Определим [illegible] $t = \max\{p, q\} \geqq 0$, где $p=\sum_{i \neq j} |a_i|$, [illegible] $\sum |b_i|$.

[illegible] $t=0$, то $(\mu, a) > (\mu, b)$ для любого $\mu \in M$. [illegible] $t \neq 0$, то пусть $\tau = (a_j - b_j)/2t > 0$.

[illegible] $a_j - b_j = 2t\tau \geqq \tau(p+q)$,

[illegible] $a_j - \tau p \geqq b_j + \tau q$

[illegible] $a_j + \tau \sum_{i \neq j} a_i \geqq b_j + \tau \sum_{i \neq j} b_i$

[illegible] $(\mu, a) \geqq (\mu, b)$ при $\mu_j = 1/(1+\tau)$ и $\mu_i = \tau/1+\tau$ [illegible] $i \neq j$.

[illegible]точность. Если $a \ngeq b$ неверно, т.е. справедли[illegible] $a \geq b$, то, очевидно, $(\mu, a) < (\mu, b)$ для любого $\mu > 0_m$.

[illegible] введенного отношения $\ngeq$ определение эффектив[illegible] можно перефразировать следующим образом: точка x^0 [illegible], если для любого $x \in D$ выполняется соотношение $f(x^0) \ngeq f(x)$. Таким образом, благодаря лемме I прихо[illegible] новой формулировке определения эффективной [illegible].

[illegible] I. Точка $x^0 \in D$ эффективна относительно f [illegible] D тогда и только тогда, когда для данного [illegible] такая вектор-функция $\mu(\cdot)$, что при всех $x \in D$ [illegible] $\mu(x) \in M$ и $(\mu(x), f(x^0)) \geqq (\mu(x), f(x))$.

[illegible] определение требования на вид вектор-функ[illegible] $\mu(\cdot)$, то с помощью определения I можно получить новые [illegible] условия эффективности без каких-либо предположе[illegible] f и D.

[illegible] 2. Если существует конечный набор векторов $\mu^i \in M$, [illegible] такой, что для каждого $x \in D$ найдется свой [illegible] $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, при котором выполняется неравен[illegible]

$$(\mu^i, f(x^0)) \geqq (\mu^i, f(x)), \tag{2}$$

[illegible] x^0 эффективно.

[illegible] можно рассматривать как обобщение того извест[illegible], что максимизация взвешенной суммы критериев

$(\mu, \rho(\cdot))$ с положительным вектором μ всегда приводит к эффективной точке (здесь вектор μ, взвешивающий критерии, один и тот же для всех $x \in D$; в лемме число таких векторов p). Практически применять эту лемму можно, выделяя конечное покрытие $D_1, \dots, D_p$, $\bigcup D_i = D$ так, чтобы для каждого множества D_i нашелся свой, "обслуживающий" это множество вектор μ^i, т.е. чтобы для любого D_i имело место неравенство (2) при каждом $x \in D_i$.

3. Собственная эффективность

Пусть $n=1$, $m=2$, $f_1 = x$, $f_2 = -x^2$, $D = [0, +\infty)$. Нетрудно понять, что для эффективной точки $x=0$ не существует конечного набора векторов из леммы 2. Таким образом, в общем случае условия этой леммы не являются необходимыми условиями эффективности. Однако если ограничиться рассмотрением собственно эффективных точек, то эти условия будут как достаточными, так и необходимыми при $p=m$.

Определение 2 [1]. Эффективная точка x^0 называется собственно эффективной, если найдется такое число $N>0$, что для всех $x \in D$, $i \in I$, для которых $f_i(x) > f_i(x^0)$, и некоторых $j \in I$, для которых $f_j(x) < f_i(x^0)$, имеет место неравенство

$$f_i(x) - f_i(x^0) / f_j(x^0) - f_j(x) \leq N.$$

В примере, приведенном в начале параграфа, точка $x=0$ эффективна, но не является собственно эффективной.

Если множество D содержит конечное число элементов, то каждая эффективная точка – собственно эффективна. Условия, при которых каждая эффективная точка совпадает с собственно эффективной точкой, имеются в работе [4].

Теорема I. Точка $x^0 \in D$ собственно эффективна относительно f на множестве D тогда и только тогда, когда существуют векторы $\mu^i \in M$, $i=1,2,\dots,m$ такие, что для каждого $x \in D$ найдется свой вектор μ^i, при котором выполнено неравенство (2).

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $f(x^0) = 0_m$. Отметим следующий факт, непосредственно вытекающий из определения 2. Эффективная точка x^0 собственно эффективна в том и только том случае, если существует число

[illegible] такое, что для каждого $i \in I$ система неравенств

$$[illegible]\ f_i(x) + N f_j(x) > 0, \quad j = 1,2,\dots,m,\ j \neq i \qquad (3)$$

[illegible] на множестве D.

[illegible]статочность. Согласно лемме 2, точка x^0 эффективна. [illegible] ее собственную эффективность. Возьмем число

$$N = \max\{m \mu_j^i / \mu_k^i\} > 0, \qquad (4)$$

[illegible] берется по всем $i, j, k \in I$. Если точка x^0 [illegible] собственно эффективной, то для этого числа N су[illegible] видно $k \in I$ и точка $x' \in D$ такие, что $f_k(x') > 0$,

$$[illegible] + N f_j(x') > 0, \quad j = 1,2,\dots,m,\ j \neq i. \qquad (5)$$

[illegible] $I_0 = \{j \in I \mid f_j(x') < 0\}$. В силу эффективности [illegible] x^0 выполняется $I_0 \neq \emptyset$. Из (5) имеем

$$m f_k(x') + N \sum_{j \in I_0} f_j(x') > 0. \qquad (6)$$

[illegible] того, по условию теоремы, для данного x' существу[illegible] вектор $\mu^i \in M$ такой, что $(\mu^i, f(x')) \leq 0$, поэтому

$$\mu_k^i f_k(x') + \sum_{j \in I_0} \mu_j^i f_j(x') \leq 0,$$

[illegible], учитывая (4), получаем

$$m f_k(x') + N \sum_{j \in I_0} f_j(x') \leq 0,$$

[illegible] противоречит (6).

[illegible]обходимость. Пусть точка x^0 собственно эффективна, [illegible] существует число $N>0$ такое, что для любого $i \in I$ [illegible] неравенств (3) несовместна на множестве D. Возьмем [illegible]льную точку $x \in D$. Для каждого $i \in I$ выполняется [illegible] ≤ 0, либо $f_i(x) + N f_j(x) \leq 0$ при некото[illegible] $j \neq i$. Просуммировав по $i \in I$ все подобного [illegible] неравенства, получим $N_1 f_1(x) + \dots + N_m f_m(x) \leq 0$,

[illegible] $N_i > 0$ для любого $i \in I$. Отсюда следует неравенст[illegible] при $f(x^0) = 0_m$ и

$$\mu^i = \mu^i = (N_1 / \sum_{i=1}^m N_i, \dots, N_m / \sum_{i=1}^m N_i).$$

Очевидно, $\bar{\mu}^i \in M$. Таким образом, для каждого $x \in D$ существует вектор $\mu^i = \bar{\mu}^i$, при котором имеет место неравенство (2). Причем благодаря конечности множества I число таких векторов, "обслуживающих" множество D, конечно, т.е. существует конечный набор векторов $\{\bar{\mu}^1, \dots, \bar{\mu}^p\} \subset M$, обладающих тем свойством, что для каждого $x \in D$ существует индекс $i \in I$, при котором выполнено (2) (с $\mu^i = \bar{\mu}^i$).

Укажем набор из m векторов, обладающих необходимыми свойствами. Пусть $\varepsilon = \min\limits_{i,j} \bar{\mu}^i_j$. Рассмотрим векторы следующего вида:

$$\mu^i_j = \begin{cases} \varepsilon, & j = 1, 2, \dots, m; \ j \neq i, \\ 1 - (m-1)\varepsilon, & j = i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{7}$$

Очевидно, $\mu^i \in M$, $i = 1, 2, \dots, m$. Нетрудно убедиться в том, что старый набор векторов содержится в выпуклой оболочке нового набора векторов, т.е. $\{\bar{\mu}^1, \dots, \bar{\mu}^p\} \subset conv\{\mu^1, \dots, \mu^m\}$.

Предположим, что новый набор векторов (7) не обладает необходимыми свойствами, т.е. найдется такая точка $x \in D$, что

$$(\mu^j, f(x)) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{8}$$

Для произвольного $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ в силу включения $\bar{\mu}^i \in conv\{\mu^1, \dots, \mu^m\}$ имеет место представление $\bar{\mu}^i = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \mu^j$ при некоторых $\lambda_j \geqq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\sum \lambda_j = 1$. Поэтому из (8) получаем неравенства

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\mu^j, f(x)) = (\bar{\mu}^i, f(x)) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

которые означают, что и старый набор векторов не обладает необходимыми свойствами. Это противоречит полученным ранее условиям $(\bar{\mu}^i, f(x)) \leqq 0$.

Если множество D состоит из конечного числа элементов, то условия доказанной теоремы являются необходимыми и достаточными условиями эффективности, а не только собственной эффективности.

Напомним, что точка $x^0 \in D$ называется слабоэффективной (оптимальной, по Слейтеру) относительно f на множестве D, если не существует $x \in D$, для которого $f(x) > f(x^0)$.

[illegible] доказательства необходимости теоремы I показывает, [illegible] формулировке этой теоремы векторы $\mu^1, \dots, \mu^m$ всегда [illegible] векторами вида (7). Если кроме этого учесть условие [illegible] точка x^0 слабоэффективна тогда и только тогда, когда [illegible] $x \in D$ существует номер $i \in I$ такой, что $f_i(x^0) \geqq$ [illegible], то придем к следующему утверждению.

[illegible] I. Для того чтобы точка $x^0 \in D$ была собственно [illegible] относительно f на множестве D, необходимо и [illegible], чтобы существовало такое $\varepsilon > 0$, что точка x^0 [illegible] относительно вектор-функции $((\mu^1, f(\cdot)), \dots, (\mu^m, f(\cdot)))$, где векторы μ^i имеют вид (7) на множестве [illegible]

[illegible] это следствие и теорему Ю.Б.Гермейера [5][2], получим

[illegible] 2. Пусть $f(x^0) > 0_m$. Точка $x^0 \in D$ собственно [illegible] относительно f на D тогда и только тогда, [illegible] такое $\varepsilon > 0$, что равенство

$$[\text{illegible}]\ \lambda_i (\mu^i, f(x^0)) = \max_{x \in D} \min_{i \in I} \lambda_i (\mu^i, f(x))$$

[illegible] при некотором $\lambda \in M$.

[illegible] выпуклого допустимого множества и вогнутой целевой [illegible] функции собственно эффективная точк характеризуется [illegible], что для нее существует в точности один вектор μ, [illegible]" все множество допустимых точек. Это положение [illegible] содержание теоремы А.М. Джоффриона [1]. Здесь теорема [illegible] выводится как следствие теоремы I.

[illegible] 3. Пусть множество D выпукло, а вектор-функция f [illegible] и непрерывна на нем. Точка $x^0 \in D$ собственно [illegible] тогда и только тогда, когда существует такой [illegible] $\mu \in M$, что $(\mu, f(x^0)) = \max\limits_{x \in D} (\mu, f(x))$.

[illegible]. Необходимость. Можно считать, что [illegible]. Рассмотрим выпуклое множество

$$P = \{p \in E^m \mid p \leqq f(x), \ x \in D\}. \tag{9}$$

---

[2] [illegible] Ю.Б. Гермейера можно сформулировать так: [illegible] для которой $f(x^0) > 0_m$, слабоэффективна тогда [illegible] тогда, когда при $\lambda \in M$ имеет место равенство $\max\limits_{D} \min\limits_{i} \lambda_i f_i(x) = \min\limits_{i} \lambda_i f_i(x^0)$.

Так как точке x^0 собственно эффективна, то, согласно теореме I, существуют положительные векторы $\mu^1,\dots,\mu^m$ такие, что

$$P\cap int\{p\,|\,(\mu^i,p)\geqq 0,\ i=1,2,\dots,m\}=\emptyset. \qquad (10)$$

В самом деле, если найдется элемент p этого пересечения, то

$$p\leqq f(x),\ x\in D,\ (\mu^i,p)>0,\ i=1,2,\dots,m,$$

откуда следуют неравенства

$$(\mu^i,f(x))>0=(\mu^i,f(x^0)),\ i=1,2,\dots,m,$$

противоречащие (2).

В условиях (10) по теореме II.3 [6] множество P и множество, стоящее в фигурных скобках, можно отделить гиперплоскостью, проходящей через начало координат, т.е. существует нулевой вектор μ такой, что $(\mu,p)\leqq 0$ для всех $p\in P$,

$\mu=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mu^i$ для некоторых $\lambda_i\geqq 0,\ i=1,2,\dots,m$. Из неравенства следует требуемое соотношение $(\mu,f(x))\leqq 0$ для всех $x\in D$, а из равенства вытекает $\mu>0_m$. Очевидно, можно считать, что сумма компонент вектора μ есть единица.

Достаточность сразу вытекает из теоремы I при $\mu^i=\mu$, $i=1,2,\dots,m$.

Теорема I позволяет также переформулировать определение собственно эффективной точки так, что оно становится геометрически наглядным, причем в этом новом определении становится отчетливо видна связь понятий собственной эффективности и эффективности.

Введем полиэдральный конус

$$\Lambda_\varepsilon=\{z\in E^m\,|\,(\mu^i,z)\geqq 0,\ i=1,2,\dots,m\}.$$

Здесь векторы μ^i имеют вид (7) и $0<\varepsilon<1/m-1$ (условия на ε необходимы для обеспечения включения $\mu^i\in M$) . Нетрудно проверить, что при уменьшении ε конус Λ_ε "сужается", т.е. если $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, то $\Lambda_{\varepsilon_2}\subset\Lambda_{\varepsilon_1}$, причем

$[\Lambda_{\varepsilon_2}\setminus 0_m]\subset int\Lambda_{\varepsilon_1}$. В пределе при $\varepsilon\to 0$ конус

[illegible] будет представлять собой неотрицательный ортант пространства E^m .

Определение 3. Точка $x^0\in D$ собственно эффективна тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon>0$, при котором

$$[f(D)-f(x^0)]\cap\Lambda_\varepsilon=0_m . \qquad (11)$$

[illegible] $f(D)$ – множество образов вектор-функции f , а [illegible] $f(x^0)$ есть транслянт множества образов на вектор – [illegible].

В этом определении хорошо видна связь собственно эффективной и эффективной, поскольку в пределе при $\varepsilon\to 0$ равенство (11) будет определять эффективную точку.

Проверим эквивалентность определения 3 и первоначального определения 2 собственно эффективной точки, данного Джоффрионом [1]. Если точка x^0 собственно эффективна по определению 2, то, согласно следствию I, существует $\varepsilon>0$, при котором система неравенств

$$(\mu^i,f(x)-f(x^0))>0,\ i=1,2,\dots,m, \qquad (12)$$

[illegible] μ^i вида (7) не имеет решений на множестве D , т.е.

$[f(D)-f(x^0)]\cap int\Lambda_\varepsilon=\emptyset$. Тогда для $\varepsilon'<\varepsilon$ будет [illegible] равенство (11) (при $\varepsilon=\varepsilon'$). Обратно, пусть точка [illegible] собственно эффективна по определению 3. Тогда система неравенств (12) несовместна на множестве D , откуда, согласно следствию I, вытекает собственная эффективность точки [illegible] в соответствии с определением 2 .

4. Подлинная эффективность

[illegible] введение собственно эффективной точки обосновывается [illegible] тем, что некоторые эффективные точки в определенном смысле [illegible], поэтому исключение их из рассмотрения представляется [illegible] разумным. Например (см. [1]), если $n=1$, $m=2$, [illegible] , $f_2=-x^3$, $D=[0,+\infty]$, то эффективная [illegible] $x=0$ аномальна в том смысле, что при переходе от [illegible] в достаточно близкую к ней точку $x=\delta$ (число [illegible] δ мало) будет получено увеличение второго порядка малости по критерию f_1 за счет уменьшения третьего (более высокого) порядка малости по критерию f_2 . Однако определение собственно эффективной точки устроено так, что в некоторых задачах исключаются и такие эффективные точки, которые трудно назвать аномальными.

Пример. $n=1$, $m=2$, $f_1=x$, $f_2=e^{-x}$, $D=(-\infty,+\infty)$. Здесь, как легко видеть, любая допустимая точка эффективна, а собственно эффективных точек не существует, хотя переход от произвольной эффективной точки в близкую к ней дает увеличение и уменьшение по критериям f_1, f_2 одинакового порядка малости.

В связи с этим представляется разумным "подправить" определение собственно эффективной точки так, чтобы новое определение более точно отражало идею исключения аномальных эффективных точек. Для этого удобно воспользоваться определением 3 собственно эффективной точки.

Определение 4. Точку $x^0 \in D$ будем называть подлинно эффективной, если для любого $\sigma > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $[f(D)-f(x^0)] \cap \Lambda_\varepsilon \cap B_\sigma(0_m) = 0_m$.

Так, в рассмотренном выше примере I все точки являются подлинно эффективными.

Теорема 2. Пусть имеет место одно из следующих двух условий: I) множество $f(D)$ ограничено сверху вектором $\mu \in M$, т.е. существует число v такое, что

$$(\mu, f(x)) \leq v \qquad \text{для всех } x \in D;$$

2) множество D выпукло, а вектор-функция f вогнута и непрерывна на нем. Тогда множества подлинно эффективных и собственно эффективных решений совпадают.

Доказательство. Пусть x^0 – подлинно эффективная точка. Не умаляя общности, будем считать, что $f(x^0)=0_m$.

I. Очевидно, $v \geq 0$. Если $v=0$, то $(\mu, f(x)) \leq (\mu, f(x^0))$ для всех $x \in D$, а значит, согласно теореме I, точка x^0 собственно эффективна. Пусть $v>0$. Возьмем $0<\varepsilon_1<\min_i \mu_i$. Можно убедиться в том, что множество $\Lambda_{\varepsilon_1} \cap \{y \mid (\mu, y) \leq v\}$ ограничено. Поэтому возьмем $\sigma > 0$ такое, чтобы шар $B_\sigma(0_m)$ содержал это множество:

$$B_\sigma(0_m) \supset [\Lambda_{\varepsilon_1} \cap \{y \mid (\mu, y) \leq v\}]. \qquad (13)$$

Поскольку решение x^0 подлинно эффективно, то для этого σ существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $f(D) \cap \Lambda_{\varepsilon_2} \cap B_\sigma(0_m) = 0_m$. Для $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Отсюда, благодаря включениям

$\Lambda_\varepsilon \subset \Lambda_{\varepsilon_1}, \Lambda_{\varepsilon_2}$ и (13), получаем

$$f(D) \cap \{y \mid (\mu, y) \leq v\} \cap \Lambda_\varepsilon \cap B_\sigma(0_m) = f(D) \cap \Lambda_\varepsilon = 0_m.$$

[illegible] означает собственную эффективность решения x^0.

2. Пусть множество D выпукло, а вектор-функция f вогнута [illegible]. Предположим, напротив, что подлинно эффективная точка [illegible] не является собственно эффективной. Согласно определению [illegible] существует последовательность чисел $\varepsilon_k \to +0$ и точек x^k, $k=1,2,\ldots$ такие, что $f(D) \cap \Lambda_{\varepsilon_k} \ni f(x^k) \neq 0_m$. [illegible] $\sup \|f(x^k)\| \leq const$, то последнее соотношение [illegible] противоречить подлинной эффективности x^0. Пусть $\sup \|f(x^k)\| = +\infty$. Поскольку из последовательности $\{\|f(x^k)\|\}$ всегда можно извлечь строго возрастающую подпоследовательность, то будем считать саму последовательность [illegible] возрастающей. Возьмем $\sigma = \|f(x^1)\| > 0$. Очевидно, $x' = \lambda x^0 + (1-\lambda) x^k \in D$ для любого $\lambda \in [0,1]$. Поскольку f непрерывна, то для каждого k существует $\lambda \in (0,1)$ [illegible], что $\|f(x')\| = \sigma$. Вследствие вогнутости f имеем $f(x') \geq (1-\lambda) f(x^k)$. Но $(1-\lambda) f(x^k) \in \Lambda_{\varepsilon_k}$, поэтому $f(x') \in \Lambda_{\varepsilon_k}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ [illegible] указать номер k такой, что для точки $x' \in D$ при некотором $\lambda \in (0,1)$ выполняется

$$f(D) \cap \Lambda_\varepsilon \cap B_\sigma(0_m) \ni f(x') \neq 0_m,$$

что также противоречит подлинной эффективности x^0.

5. Некоторые свойства множества решений

Для того чтобы упростить доказательства, в этом параграфе вектор-функция f, если специально не оговорено, считается вектор-функцией вида

$$f(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (14)$$

Нижеследующая теорема устанавливает тесную связь множества эффективных точек с множеством собственно эффективных.

Теорема 3. Предположим, что множество D выпукло и замкнуто, существует по крайней мере одна эффективная точка относительно вектор-функции (14) и вектор $\mu > 0_n$ такой, что

$$(\mu, x) \leqq const \qquad \text{для всех} \quad x \in D, \tag{15}$$

тогда множество собственно эффективных точек плотно в множестве эффективных точек.

Доказательство. Пусть точка x^0 эффективна. Не уменьшая общности, будем считать, что $x^0 > 0_n$. Докажем существование последовательности $\{x^k\}$ собственно эффективных точек, сходящейся к x^0.

Введем функции

$$F_i^k(x) = \left(1 - \frac{n-1}{k}\right)x_i + \sum_{j \neq i} \frac{x_j}{k}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = n, n+1, \dots$$

и рассмотрим замкнутые множества

$$\Omega_k = D \cap \{x \mid F_i^k(x - x^0) \geqq 0, \ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Благодаря условию (15) найдется такой номер k_0, что все множества Ω_k, $k \geqq k_0$ компактны. Можно считать, что $k_0 = n$. Функции $\min_i \lambda_i^k F_i^k(\cdot)$, $k = n, n+1, \dots$ непрерывны, где

$$\lambda_i^k = \frac{1}{F_i^k(x^0)} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{F_i^k(x^0)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

поэтому для каждого $k = n, n+1, \dots$ существует такая точка $x^k \in D$, что

$$\min_i \lambda_i^k F_i^k(x^k) \geqq \min_i \lambda_i^k F_i^k(x) \tag{16}$$

для всех $x \in \Omega_k$ (в частности, для $x = x^0$). Если $x \in D \setminus \Omega_k$, то для некоторого i справедливо неравенство $F_i^k(x) < F_i^k(x^0)$. Поэтому $\min_i \lambda_i^k F_i^k(x) < \min_i \lambda_i^k F_i^k(x^0)$. Следовательно, неравенство (16) имеет место для всех $x \in D$. Это, согласно следствию 2, означает собственную эффективность точек x^k, $k = n, n+1, \dots$. Из последовательности $\{x^k\}$ всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность, так как $x^k \in \Omega_n$, $k = n, n+1, \dots$. Поэтому можно считать, что сходится сама эта последовательность: $\lim_{k \to \infty} x^k = \bar{x} \in D$. В силу определения множеств Ω_k, $k = n, n+1, \dots$ произвольную точку из Ω_k (а значит, и точку x^k) надлежащим выбором k можно с любой наперед заданной точностью приблизить к множеству $E_+^n + x^0$, где E_+^n – неотрицательный ортант пространства E^n. Следовательно, $\bar{x} \in (E_+^n + x^0)$, а так как x^0 эффективна, то $\bar{x} = x^0$.

Замечание. Если множество D выпукло и замкнуто, то предположение о существовании вектора μ, для которого имеет место (15), в теореме 3 становится лишним. В самом деле, это предположение в доказательстве теоремы использовалось лишь для установления ограниченности множеств Ω_k, начиная с некоторого k. Если существует подпоследовательность Ω_ℓ, $\ell = \dots$ неограниченных множеств, то для каждого ℓ в силу выпуклости можно указать точку $x^\ell \in \Omega_\ell$, принадлежащую сфере единичного радиуса с центром в точке x^0. Благодаря компактности сферы последовательность $\{x^\ell\}$ можно считать сходящейся: $\lim_{\ell \to \infty} x^\ell = \bar{x} \in D$. Но $\bar{x} \in (E_+^n + x^0)$, $\bar{x} \neq x^0$, что противоречит эффективности x^0.

Теорема 3 сформулирована для линейной вектор-функции f специального вида. Однако ее можно переформулировать для вектор-функции f общего вида следующим образом: в предположении существования у множества образов $f(D)$, существования эффективной точки и вектора $\mu \in M$, для которого выполняется неравенство $(\mu, f(x)) \leqq const$ для всех $x \in D$, множество собственно эффективных точек плотно в множестве эффективных точек. Имеет место следствие 3.

Следствие 3. Предположим, что множество образов произвольной вектор-функции f замкнуто и ограничено сверху вектором $\mu \in M$. Тогда множество собственно эффективных точек непусто тогда и только тогда, когда непусто множество эффективных точек.

Из следствия 2, теоремы 3 и замечания к этой теореме вытекает следствие 4.

Следствие 4. Пусть множество D выпукло и замкнуто и существует по крайней мере одна эффективная точка относительно линейной вектор-функции (14); тогда множество решений скалярной задачи максимизации $(\mu, x) \to \max_{x \in D}$, $\mu > 0_n$, $\mu \in \dots$ плотно в множестве эффективных решений.

Это следствие есть известная теорема Эрроу-Баранкина-Блекуэлла [2].

Литература

1. Geoffrion A.M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. - J. Math. Anal. and Appl., 1968, v.22, p.618-630.
2. Эрроу К. Дж., Баранкин Е.В. Блекуэлл Д. Допустимые точки выпуклых множеств. - В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961, с. 274-280.
3. Ногин В.Д. Двойственность в многоцелевом программировании. - Ж. вычисл. мат. и мат. физики, 1977, №1, с. 254-258.
4. Ногин В.Д. Взаимосвязь различных видов решений задачи многоцелевого программирования. - Вестн. Ленингр. ун-та, 1977, № 19.
5. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971, 384 с.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 384 с.

1982

Р.И. ТРУХАЕВ

МНОГОЦЕЛЕВЫЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Ситуации принятия многоцелевых решений

1.1. Под многоцелевой ситуацией принятия решений будем [illegible] пару $\{X, f\}$, где $X=\{x_1, \dots, x_m\}$ - множество решений [illegible] управления; $f=\{f_i(x_j)\}_{i=1,\dots,n;\ k=1,\dots,m}$ - вектор оценочных [illegible], определенных на X и принимающих значения из [illegible]. При заданной многоцелевой ситуации принятия решений $\{X, f\}$ [illegible] принятия решений состоит в том, что орган управления y [illegible] выбрать одно решение, оптимальное по принятому органом [illegible] принципу выбора.

[illegible] принятия многоцелевых решений характеризуется [illegible] факторами $\{u, v, w\}$, где u -способ нормализации, [illegible] критерий свертки, w - отношение приоритета.

[illegible] способом нормализации u будем понимать однозначное [illegible] R^n в R^n. Нормализация применяется для смены [illegible] и перехода к сравнимым шкалам в оценочных функциях.

[illegible] отношением приоритета w будем понимать вектор оценок $(w_1, \dots, w_n)$. В некоторых случаях приоритет может быть [illegible] отношением порядка.

[illegible] данной ситуации принятия многоцелевых решений под [illegible] свертки v будем понимать алгоритм такого решения, [illegible] может быть принято в качестве оптимального.

[illegible] критерий свертки представляет собой функцию [illegible] отображающий R^n в R^1.

[illegible] направления исследования проблем принятия многоцелевых решений состоят в разработке выбора основных факторов [illegible] свертки, способов нормализации и учета приоритета [illegible] подходов к вопросам анализа и обоснования выбора [illegible] факторов.