ИК

СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

КИЕВ - 1977

5. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., "Наука", 1973.

6. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач. -УМН, т. XXX, вып. 3/183/, 1975, с. 4-55.

СВЯЗЬ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ С ЗАДАЧЕЙ МНОГОЦЕЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В.Д.Ногин

В статье рассматривается задача выбора решений в условиях неопределенности, когда эффективность решения оценивается величиной математического ожидания. Вводится понятие байесовского множества потенциально оптимальных решений (БМПОР). Показано, что в определенных случаях это множество совпадает с множеством решений задачи многоцелевой оптимизации специального вида. Используя установленную связь обеих задач, формулируются утверждения, с помощью которых можно строить БМПОР.

Пусть природа имеет n возможных состояний, причем вероятность реализации i-го состояния есть p_i, т.е. на конечном множестве состояний природы задано вероятностное распределение (вектор) $P \in \Delta$, где $\Delta = \{P \in E^n | p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$.

Множество $\mathcal{D}$ допустимых решений x отождествим с подмножеством евклидова пространства E^n.

Когда распределение вероятностей состояний природы при большой серии выборов решений не меняется, эффективность решения разумно оценивать величиной математического ожидания

$$(P, x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Если распределение P известно, то неопределенности нет и задача выбора решений становится задачей оптимизации: среди элементов $x \in \mathcal{D}$ найти те, на которых линейная форма (P, x) достигает максимума. Задача собственно теории решений состоит в выборе решений при отсутствии полных и точных сведений о распределении P. Отклонения от полноты и точности разнообразны. Одной из возможных ситуаций незнания является случай, когда, кроме того, что

$$P \in Q \cap \Delta, \quad card(Q \cap \Delta) \geq 2,$$

где $Q \subset E^n$, другой информации нет. В случае полной неопределенности $Q \cap \Delta \equiv \Delta$.

При наличии неопределенности трудно обоснованно выбрать решение [1], однако представляется вполне разумным стремление наиболее полно использовать имеющуюся информацию для исключения из допустимого множества тех решений, которые в данной задаче заведомо не могут быть оптимальными. В результате такого исключения множество $\mathcal{D}$ "сужается" до множества в определенном плане потенциально оптимальных решений. Подобное "сужение" в некоторых задачах может привести к сравнительно узкому классу решений, выбор среди которых становится более или менее обоснованным.

Перейдем к строгому определению. Будем называть байесовским множеством потенциально оптимальных решений (БМПОР) множество

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{P \in Q \cap \Delta} \{x^\circ \in \mathcal{D} | (P, x^\circ) = \max_{x \in \mathcal{D}} (P, x)\}.$$

Множество $\mathcal{Y}$ является минимальным в том смысле, что если из него удалить хотя бы одно решение x^o, то найдется такое распределение P^o состояний природы, что именно на решении x^o достигнет максимума математическое ожидание (P^o, x^o), причем именно распределение P^o может оказаться истинным.

В связи с этим практический интерес представляет вопрос численного нахождения всего множества $\mathcal{Y}$. Очевидно, когда множество $Q \cap \Delta$ конечно, то принципиальных трудностей при отыскании БМПОР $\mathcal{Y}$ не возникает. Однако, когда $Q \cap \Delta$ – бесконечное множество, перебор в принципе не возможен и требуются другие методы. В статье рассматривается второй случай.

Предположим, что Q – многогранное множество вида

$$Q = \{P \,|\, (a^j, P) \geq b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $a^j \in E^n$, $b_j \in E^1$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Ясно, что $Q \cap \Delta$ – многогранник, поэтому его можно представить в виде выпуклой оболочки конечного числа точек, т. е. в виде

$$Q \cap \Delta = co\{c^1, c^2, \ldots, c^m\},$$

причем $c^j \in Q \cap \Delta$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует, что любой вектор $P \in Q \cap \Delta$

представим в виде $P = \sum_j \mu_j c^j$, где

$$\mu \in M = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \,|\, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1\}.$$

В соответствии с этим получим

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{P \in co\{c^1, \ldots, c^m\}} \{x^o \in \mathcal{D} \,|\, x^o \to \max_{\mathcal{D}} (P, x)\} =$$
$$= \bigcup_{\mu \in M} \{x^o \in \mathcal{D} \,|\, x^o \to \max_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{m} \mu_j (c^j, x)\}. \quad (1)$$

Напомним некоторые сведения из теории многоцелевой оптимизации. Пусть на множестве $\mathcal{D} \subset E^n$ задана вектор-функция $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Точка $x^o \in \mathcal{D}$ оптимальна по Слейтеру (ОС) относительно вектор-функции F на множестве $\mathcal{D}$, если не существует такого $x \in \mathcal{D}$, что $f_i(x) > f_i(x^o)$, $i = 1, 2, \ldots m$.

Лемма 1. Пусть множество $\mathcal{D}$ выпукло, а вектор-функция $F(x)$ вогнута. Точка $x^o \in \mathcal{D}$ ОС относительно F на $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда существует $\mu \in M$, для которого

$$(\mu, F(x^o)) = \max_{\mathcal{D}} (\mu, F(x)). \quad (2)$$

Если множество $\mathcal{D}$ конечно, то ОС точку x^o будем называть сильно оптимальной по Слейтеру (СОС), если найдется $\mu \in M$, такой, что выполнено соотношение (2). Нетрудно установить истинность следующего утверждения.

Лемма 2. Когда множество $\mathcal{D}$ конечно, точка x^o СОС относительно F на $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, если существует $\mu \in M$, для которого справедливо соотношение (2).

Вернемся к вопросу нахождения БМПОР $\mathcal{Y}$. Из приведенных лемм и равенства (1) вытекает следующая

Теорема. Пусть множество $\mathcal{D}$ выпукло, а Q многогранно. Существует линейная вектор-функция $C(x) = ((c^1, x), \ldots, (c^m, x))$, множество ОС точек относительно которой на $\mathcal{D}$ совпадает с множеством $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{D}$ – конечное множество, то $\mathcal{Y}$ совпадает с множеством СОС точек относительно некоторой линейной вектор-функции $C(x)$ на $\mathcal{D}$.

Эта теорема устанавливает связь задачи нахождения БМПОР с задачей многоцелевой оптимизации линейной вектор-функции $C(x)$ на множестве $\mathcal{D}$. В связи с этим дальнейшее изложение вопросов нахождения множества $\mathcal{Y}$ ведется на языке теории многоцелевой оптимизации.

Будем считать, что $b_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом Q – многогранный конус. Обозначим через N выпуклый конус, порожденный элементами $c^1, c^2, \ldots, c^m$ из (1). Очевидно, $N = Q \cap E^n_+$, где $E^n_+ = \{P / P_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть $Q \cap \Delta \neq \emptyset$. Конус N^*, сопряженный конусу N, есть n-мерный, не совпадающий с E^n, конус, причем порождается он элементами $e^1, e^2, \ldots, e^n, a^1, a^2, \ldots, a^k$, где e^i – вектор с n компонентами, среди которых лишь i-я отлична от нуля и равна единице.

Очевидно, точка x^0 ОС относительно $C(x)$ на множестве $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда система линейных неравенств $(c^j, x - x^0) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, не имеет решений на $\mathcal{D}$, другими словами, когда

$$int\,(N^* + x^0) \cap \mathcal{D} = \emptyset. \tag{3}$$

Согласно лемме 3, получим

$$int\,(N^* + x^0) = \{y + x^0 / \ y = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i + \sum_{i=n+1}^{n+k} \omega_i a^{i-n}, \quad \omega_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+k\}.$$

Учитывая это соотношение, из (3) получим

Утверждение 1. Точка $x^0 \in \mathcal{D}$ ОС относительно $C(x)$ на множестве $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$x^0 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i + \sum_{i=n+1}^{n+k} \omega_i a^{i-n} = x$$

ни при каком $x \in \mathcal{D}$ не имеет положительных решений ω_i.

Рассмотрим далее случай конечного множества $\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{D} = \{x^1, x^2, \ldots, x^\ell\}$. Множество $\mathcal{Y}$, согласно теореме, совпадает с множеством СОС точек. Поэтому, если, например, с помощью утверждения 1 найдено множество ОС точек, то из него следует выделить СОС точки. Однако можно пытаться сразу из множества $\mathcal{D}$ выделить СОС точку. Этому способствуют следующие утверждения.

Утверждение 2. Пусть $dim\,\mathcal{D} = n$ и существуют числа $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\sum_i \lambda_i = 1$, $s \leq \ell$, такие, что

$$x^0 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^{k_i}, \tag{4}$$

причем $\{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_s}\} = \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и $dim\,\mathcal{D}_0 = n$. Тогда решение x_0 может быть разве лишь ОС точкой.

Доказательство. Равенство (4) означает, что x^0 – внутренняя точка n-мерного многогранника $co\,\mathcal{D}_0$. Поскольку линейная функция достигает максимума только на границе, то не существует $\mu \in M$, такого, что

$$x^0 \rightarrow \max_{co\,\mathcal{D}_0} \sum_{i=1}^{m} \mu_i (c^i, x).$$

Отсюда следует, что не существует $\mu \in M$, для которого

$$x^0 \rightarrow \max_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{m} \mu_i (c^i, x).$$

Утверждение 3. Пусть $x^0 \in \mathcal{D}$ и $x^0_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если точка x^0 СОС и существуют числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, такие, что

$$x^0 = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x^i,$$

то $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \geq 1$.

Доказательство. Из условия и леммы 2 следует существование $\mu \in M$, для которого неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_j c^j, x^0\Big) = (c^0, x^0) \geq (c^0, x^i) = \Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_j c^j, x^i\Big)$$

выполнено при всех $i = 1, 2, \ldots \ell$. Умножая каждое неравенство на соответствующее λ_i и складывая, получим

$$\Big(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i\Big) \cdot (c^0, x^0) \geq \Big(c^0, \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i x^i\Big) = (c^0, x^0).$$

Разделив обе части этого неравенства на положительное число (c^0, x^0), приходим к требуемому соотношению.

Нижеследующие результаты помогают из множества ОС точек выделить СОС точки.

Утверждение 4. Пусть $\mathcal{D}_0$ – множество ОС точек относительно $C(x)$ на $\mathcal{D}$. Если

$$co\mathcal{D}_0 \cap int(N^* + x^0) = \emptyset, \qquad (5)$$

то ОС точка x^0 будет СОС точкой.

Доказательство. Согласно теореме 11.3 [2], из (5) вытекает существование гиперплоскости $(\alpha, x - x^0) = 0$, $\alpha \neq 0$, разделяющей множества $co\mathcal{D}_0$ и $N^* + x^0$. Поскольку $(\alpha, x - x^0) \geq 0$ для любого $x \in (N^* + x^0)$, то $\alpha \in N^{**} = N$. Из $\alpha \in N$ следует представление

$$\alpha = \sum_i \mu_i c^i, \ \mu_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \sum_i \mu_i \neq 0.$$

Таким образом, неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\sum_i \mu_i} (c^i, x^0) \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\sum_i \mu_i} (c^i, x) \qquad (6)$$

справедливо для любого $x \in co\mathcal{D}_0$. Ясно, что для каждой неоптимальной по Слейтеру точки $x' \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ найдется ОС точка x, такая, что $(c^i, x) > (c^i, x')$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Используя неравенство (6) и лемму 2, получим необходимый результат.

В случае полной неопределенности представляет интерес следующее

Утверждение 5. Пусть $\mathcal{D}_0$ – множество ОС точек. Для того чтобы точка $x^0 \in \mathcal{D}_0$ была СОС точкой относительно линейной вектор-функции $((e^1, x), (e^2, x), \ldots, (e^n, x))$ на множестве $\mathcal{D}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$co\mathcal{D}_0 \cap int(E^n_+ + x^0) = \emptyset.$$

Доказательство. Достаточность вытекает из утверждения 4 и равенства $(E^n_+)^* = E^n_+$. Из условия $x^0 \in \mathcal{D}_0$ следует существование чисел $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, таких, что

$$x^0 \to \max_{\mathcal{D}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^i, x\Big).$$

Отсюда вытекает

$$x^0 \to \max_{co\mathcal{D}_0} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^i, x\Big).$$

Очевидно, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^i \in (E_+^n)^*$,

поэтому, $\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^i, x\right) \geq 0$ для любого $x \in E_+^n$ или

$$x^0 \to \min_{E_+^n + x^0} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^i, x\right).$$

Таким образом, гиперплоскость $\left(\sum_i \mu_i e^i, x - x^0\right) = 0$ собственно разделяет множества $co\mathcal{D}_0$ и $E_+^n + x^0$.

Согласно теореме 11.3 [2], внутренность конуса $E_+^n + x^0$ не пересекается с относительной внутренностью множества $co\mathcal{D}_0$, а значит, и с самим множеством $co\mathcal{D}_0$.

Пример. Пусть $\mathcal{D} = \{x^1, x^2, \ldots, x^6\}$,

$$x^1 = \binom{2}{1},\ x^2 = \binom{2}{2},\ x^3 = \binom{2}{3},\ x^4 = \binom{3}{1},\ x^5 = \binom{4}{1},\ x^6 = \binom{1}{2},$$

и $Q \cap \Delta = \Delta$, т.е. имеет место случай полной неопределенности. Для построения множества ОС решений применим утверждение 1. Рассмотрим решение x^6. Так как система

$$x_1^6 + \omega_1 = x_1^3, \quad x_2^6 + \omega_2 = x_2^3$$

разрешима в положительных числах ω_1, ω_2, то решение x^6 не является ОС решением. Возьмем решение x^5. Составим систему

$$x_1^5 + \omega_1 = x_1, \quad x_2^5 + \omega_2 = x_2.$$

Легко убедиться, что эта система не имеет положительных решений ни для каких $x_i = x_i^j$, $i = 1,2$; $j = 1,2,3,4$. Это означает, что x^5 есть ОС решение. Аналогично можно установить ОС решений x^1, x^2, x^3, x^4.

Теперь из пяти полученных ОС решений выделим СОС решения. Воспользуемся утверждением 3. Очевидно, система

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_1^5 = x_1^1,$$
$$\lambda_1 \cdot x_2^3 + \lambda_2 \cdot x_2^5 = x_2^1$$

разрешима, причем $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$. Это говорит о том, что решение x^1 не является СОС решением. Подобным образом проверяется, что решения x^2, x^4 также не являются СОС решениями. Остались два решения – x^3, x^5. Применим результат утверждения 5. Можно проверить, что система

$$\lambda_1 \cdot x_1^1 + \lambda_2 \cdot x_1^2 + \lambda_3 \cdot x_1^3 + \lambda_4 \cdot x_1^4 + \lambda_5 \cdot x_1^5 = x_1^5 + \alpha_1,$$
$$\lambda_1 \cdot x_2^1 + \lambda_2 \cdot x_2^2 + \lambda_3 \cdot x_2^3 + \lambda_4 \cdot x_2^4 + \lambda_5 \cdot x_2^5 = x_2^5 + \alpha_2$$

не имеет решений вида $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,5$, $\sum_i \lambda_i = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Следовательно, решение x^5 есть СОС решение. Аналогично проверяется, что x^3 – также СОС решение.

Таким образом, БМПОР в нашей задаче состоит из двух решений – x^3, x^5.

В заключение отметим следующее. В нашем примере тот факт, что решения x^3, x^5 являются СОС решениями, можно установить проще, чем это было сделано выше, опираясь непосредственно на определение СОС точки. Например, решение x^3 является СОС решением благодаря неравенствам:

$$0 \cdot x_1^3 + 1 \cdot x_2^3 \geq 0 \cdot x_1^i + 1 \cdot x_2^i, \qquad i = 1,2,\ldots,6.$$

Литература

1. Льюс Р.Д., Райфа Х.Игры и решения. М., ИЛ, 1961. 642 с.

2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., "Мир", 1973. 470 с.