

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.С. ТУРГЕНЕВА
ВОЕННО-ВОЗДУШНАЯ АКАДЕМИЯ им. ПРОФЕССОРА Н.Е. ЖУКОВСКОГО И Ю.А. ГАГАРИНА
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ПМТУКТ-2021)**

*Сборник трудов
Всероссийской научной конференции
Воронеж, 14–16 декабря 2021 г.*

Воронеж
2021

УДК 517.94 (95, 97, 62,63), 519.17 (67, 71, 977)
ББК В22
С56

Оргкомитет:

председатель: декан математического факультета, заведующий кафедрой математического моделирования ВГУ, *М.Ш. Бурлуцкая*;
сопредседатель: профессор, заведующий кафедрой управления СПбГУ, *А.П. Жабко*;
заместители председателя: профессор ВГУ, *В.В. Провоторов*; доцент, *А.В. Иванов*,
ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
члены оргкомитета: *С.Г. Тихомиров, В.В. Малыгина, А.А. Парт, О.Р. Балабан*

Программный комитет:

председатель: декан факультета прикладной математики-процессов управления СПбГУ *Л.А. Петросян*; сопредседатели: декан факультета прикладной математики, механики и информатики ВГУ, *А.И. Шашкин*; декан математического факультета, заведующий кафедрой математического моделирования ВГУ, *М.Ш. Бурлуцкая*; заместители председателя: *А.П. Жабко, В.П. Максимов, В.В. Провоторов*; члены программного комитета: *Е.И. Моисеев, А.Ю. Александров, М.А. Артемов, А.П. Афанасьев, Л.Н. Борисоглебская, А.В. Боровских, В.Л. Бурковский, М.Ш. Бурлуцкая, Г.В. Демиденко, С.М. Дзюба, Я.М. Ерусалимский, Е.С. Жуковский, В.Г. Задорожний, И.В. Ильинов, А.В. Иванов, А.М. Камачкин, Н.Ю. Лукоянов, В.В. Малыгина, С.Л. Подвальный, А.А. Рогов, Д.С. Сайко, А.П. Хромов, А.Д. Чернышов, В.А. Юрко*

С56 **Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2021)** : сборник трудов Всероссийской научной конференции, Воронеж, 14–16 декабря 2021 г. / под ред. В.В. Провоторова. – Воронеж : Воронежский государственный педагогический университет, 2021. – 232 с.

ISBN 978-5-00044-850-2

В сборнике представлены статьи по материалам докладов и лекций, включенных в программу Всероссийской научной конференции ПМТУКТ-2021. Тематика охватывает широкий спектр проблем прикладной математики, теории управления, дифференциальных игр, качественных методов математического моделирования в различных разделах естествознания (биология, медицина, химия), другие разделы современной прикладной математики (в том числе экономического характера). Представлены приближенные методы исследования математических моделей, компьютерные технологии в процессах управления, а также современные компьютерные технологии создания программных продуктов.

ISBN

© Воронежский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Московский государственный университет, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
© Воронежский государственный педагогический университет, редакционно-издательская обработка, 2021

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ ВОЕННОГО ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ

Одной из задач программирования, относящихся к нелинейному типу, является задача выбора оптимального маршрута. Для их решения могут быть использованы различные математические методы. Чаще всего, подобные задачи, решают методом условного экстремума – это весьма эффективный и достаточно простой прием, который подробно рассматривается в курсе математического анализа в высших военных заведениях. Будем рассматривать общую постановку маршрутной задачи.

Моторизированная колонна или единичное транспортное средство перемещается из пункта базирования в пункт назначения, обозначим их условно пункт А и пункт В, соответственно. При перемещении моторизированной колонны возможно использовать различные маршруты, каждый из которых состоит из линейных участков n_i , протяженность участков и скорость движения по ним обозначим l_i , и v_i соответственно. Требуется рассчитать маршрут, на прохождение которого будет затрачено минимальное количество времени. В дальнейшем будем называть такой маршрут оптимальным.

Составим целевую функцию, как сумму временных отрезков, затраченных на прохождение каждого участка l_i :

$$T = \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{v_i}, \quad (1)$$

а необходимость преодоления расстояния от А до В позволяет нам выписать ограничивающую функцию $L = \sum_{i=1}^n l_i$.

Дадим более конкретную постановку и решение маршрутной задачи на следующем примере.

Передовой отряд танкового соединения стороны А, действуя в оперативной глубине противника и имея задачу захватить переправу на реке Р, к 10.00 12.06 вышел головой колонны к высоте 220.0. Противник (сторона В) выдвигает к переправе силы до мотопехотной бригады. Голова колонны противника в 9.50 находилась в населенном пункте N. Рельеф местности и территории, занятые противниками показаны на рисунке 1.

Колонны могут двигаться, как по бездорожью, так и по дорогам, скорости, соответственно, $v_1 = 15$ км/ч и $v_2 = 30$ км/ч. Производя расчеты, исследуем возможность передового отряда по упреждению противника в ходе к переправе на реке Р, и дадим предписания командиру отряда для выбора оптимального маршрута от высоты 220.0 до переправы на реке Р.

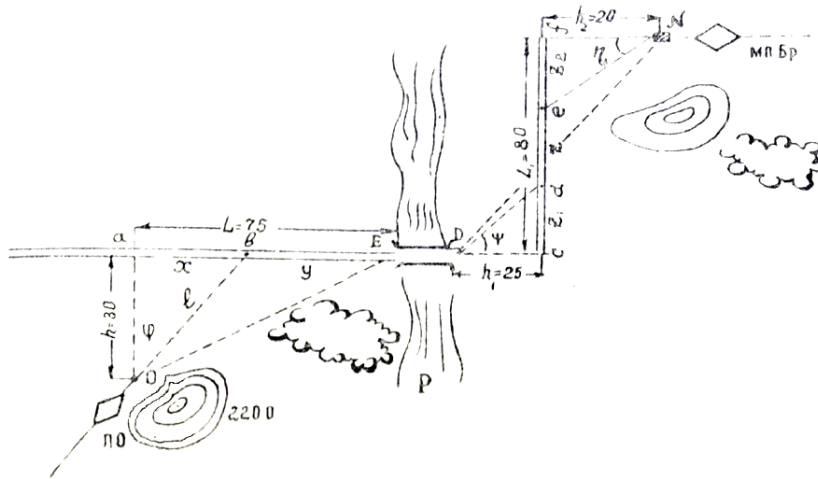


Рис. 1 – План местности

Проведем оптимизацию маршрута ПО. Оптимизировать маршрут для стороны А равносильно необходимости выбора направления движения φ из точки o в точку b (с точки зрения координатной плоскости это выбор координаты X), при этом суммарное время, требуемое для перемещения отряда до переправы, было бы сведено к минимуму. Опираясь на рисунок, можно видеть, что маршрут состоит из двух линейных участков пути, а следовательно, имеем два временных интервала: время t_1 движения отряда вне дороги на расстояние $l=ob$ и время t_2 движения по дороге на расстояние y . Таким образом, $T=t_1+t_2$. Но

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1}, \quad t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{y}{v_2}, \quad (2)$$

ПОЭТОМУ

$$T = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{y}{v_2}. \quad (3)$$

Нелинейная функция T является целевой и зависит от двух переменных, которые связаны друг с другом соотношением $L=x+y$, оно является линейным ограничением для переменных x и y . Применяя метод условного экстремума, найдем решение задачи относительно x и y , а так же, искомые участки оптимального маршрута

$$x_0 = \frac{v_1 h}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}, \quad y_0 = L - \frac{v_1 h}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \quad (4)$$

Получим три варианта маршрута движения, по которым возможно перемещение от точки O до E : $I_A(o, a, E)$, $II_A(o, b, E)$ для оптимального φ_0 и $III_A(o, E)$. Учитывая данные задачи по длине участков и возможным скоростям

движения по этим маршрутам, приходим к следующим результатам: $t_{AI}=4,5$ ч; $t_{AII}=4,23$ ч; $t_{AIII}=5,39$ ч.

Проведем аналогичные расчеты для мотопехотной бригады. Составляющие маршрута обозначим прямыми N, e, d, D . Оптимизация маршрута означает определение координат z_1, z и z_2 , или что то же самое, углов ψ и η .

Имеем пять возможных вариантов маршрута движения от точки N до D : $I_B(N, f, e, d, D)$, $II_B(N, e, d, D)$, $III_B(N, f, c, d)$, $IV_B(N, e, c, d)$, $I_B(N, D)$ и время для каждого маршрута, соответственно: $t_{B1}=5,43$ ч, $t_{B2}=5,23$ ч, $t_{B3}=5,67$ ч, $t_{B4}=5,49$ ч, $t_{B5}=6,12$ ч.

Анализируя полученные данные, заключаем, что упреждающий выход к переправе можно гарантировать при выборе командиром передового отряда любого из двух первых маршрутов.

Рассмотренная задача может быть положена в основу моделирования аналогичных задач военного содержания, которые возникают в ходе боевых действий или боевой учебы.

Список литературы

1. Ануреев И., Татарченко А. Применение математических методов в военном деле. М.: Воениздат, 1967. 243 с.
2. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 823 с.
3. Основы и применение методов прикладной математики в военном деле: учебник / Военно-воздушная академия; под общей редакцией П.И. Иванова. Монино : Изд. ВВА, 1991. 512 с.

УДК 51-77

Антипова Е.С.,

ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ИДЕОЛОГИЙ С ВНУТРЕННИМИ КОНФЛИКТАМИ

В настоящее время активно развивается математическое моделирование социальных процессов [1, 2].

В работе [3] предложена модель конкурентной борьбы двух непримиримых идеологий, которая приводилась к уравнениям типа Лотки-Вольтерры.

В настоящей работе рассмотрено развитие модели [3] с учетом возникновения внутренних конфликтов в каждой идеологии. Основные допущения модели:

(1) в обществе существуют две конкурирующие, взаимоисключающие идеологии; приверженцы одной идеологии не могут быть одновременно приверженцами второй идеологии;

(2) кроме двух идеологий существует бесконечное множество – континуум, состоящее из людей, не являющихся приверженцами ни одной из существующих идеологий;

(3) люди могут переходить из одной идеологии в другую или в континуум, как под воздействием пропагандистской работы представителей идеологий, так и спонтанно.

Проведенный анализ показывает, что рассматриваемая система описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = ax + \lambda y - bxy - cx^2 + my^2 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = vx + gy - rxy - dy^2 + lx^2 \quad (2)$$

где параметры a, b, g, r, λ, v характеризуют скорости вынужденных (под действием пропаганды) и спонтанных переходов между идеологиями, а также идеологиями и континуумом; параметры c, d, m, l – характеризуют внутренние противоречия, существующие в рассматриваемых идеологиях и приводящие к переходам в конкурирующую идеологию или континуум.

Анализ показывает, что параметры уравнений (1), (2) удовлетворяют условиям

$$\lambda, v, m, l \geq 0, c \geq l, d \geq m \quad (3)$$

при этом параметры a, b, g, r могут принимать любые значения.

Проведено параметрическое исследование системы уравнений (1), (2) и выявлены следующие сценарии развития двух конкурирующих идеологий.

(А) Обе идеологии одновременно сосуществуют (рис.1). В начальный период происходит перераспределение людей между идеологиями и континуумом. С течением времени наблюдается стабилизация числа приверженцев каждой идеологии. Примером такой ситуации служат политические партии, существующие длительное время.

(В) Асимптотическое вымирание обеих идеологий (рис. 1b). С течением времени наблюдается спад числа приверженцев обеих идеологий практически до нуля. Примерами могут служить различные субкультуры – эмо, панки, хиппи, которые вначале являются привлекательными, но с течением времени исчезают.

(С) Одна идеология выживает, и число ее приверженцев стабилизируется с течением времени, а другая – вымирает (рис.1с). Такая ситуация наблюдается в том случае, когда одна из идеологий становится неактуальной и теряет своих приверженцев.

(D) Одна или обе идеологии неограниченно растут за счет континуума (рис. 1d). Здесь предполагается, что континуум неограничен. В противном случае континуум сам будет выступать в виде третьей конкурирующей идеологии. Этот вопрос будет рассмотрен в следующих работах.

Меняя параметры системы (1), (2), получим разные сценарии (А) – (D) развития идеологий. Так, например, было получено, что при определенных фиксированных значениях параметров $b, r, \lambda, v, c, m, d, l$ и значениях параметров a, g : $a \geq -28,5, b > 0$ обе идеологии развиваются по сценарию D, а при $a \leq -20,5, b \leq -1$ идеологии живут по сценарию В. При определенных значениях параметров $a, g, \lambda, v, c, m, d, l$ и значениях параметров $r > 0, b > 0$ получим развитие идеологий по сценарию А. По сценарию С идеологии будут развиваться при условиях:

$$a < 0, g > 0, v > 0, c > 0, d > 0, l > 0, b = \lambda = m = 0,$$

при этом r может принимать любые значения.

Также на развитие каждой идеологии влияет число приверженцев данной идеологии при ее зарождении. Этот вопрос подробно будет рассмотрен в следующих работах.

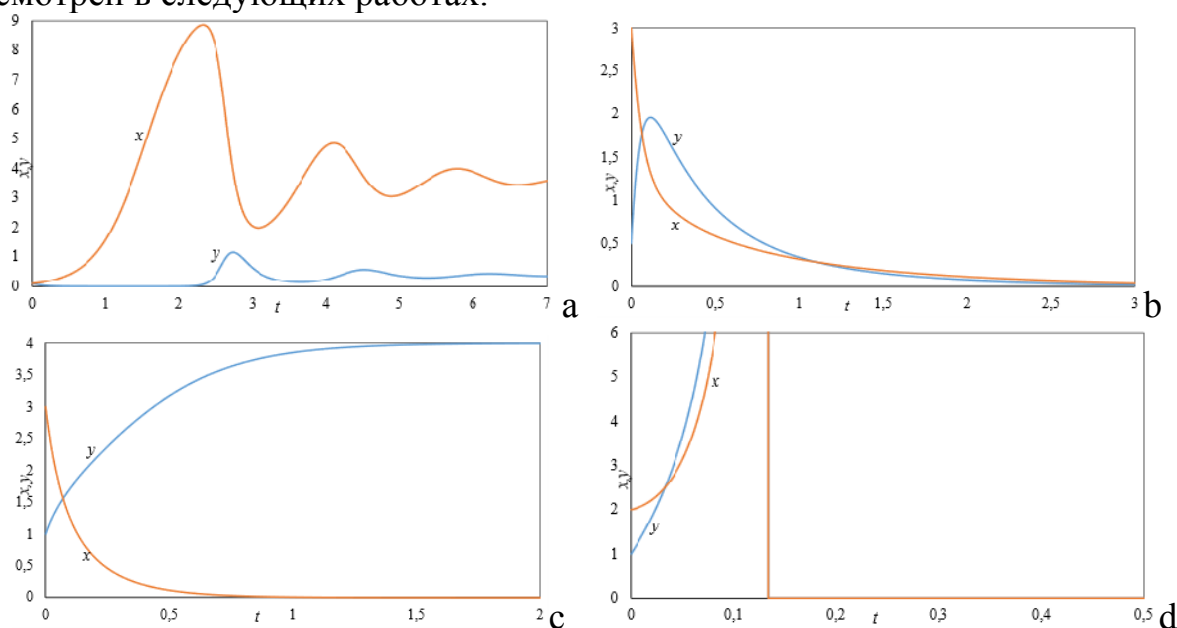


Рис. 1 – Различные сценарии поведения двух конкурирующих идеологий:

- а – сценарий А: $a = 3; g = -7; r = -2; v = 0; b = 5; \lambda = 0; c = 0.3; m = 0; d = 0.7; l = 0;$
 б – сценарий В: $a = -2; g = -5; r = -3; v = 2; b = 3; \lambda = 2; c = 2; m = 1; d = 1.5; l = 3;$
 с – сценарий С: $a = -5; g = 4; r = 1; v = 2; b = 0; \lambda = 0; c = 2; m = 0; d = 1; l = 0.6;$
 д – сценарий D: $a = 7; g = 6; r = -3; v = 7; b = -5; \lambda = 4; c = 6; m = 1; d = 2; l = 3$

Список литературы

1. Цибулин В.Г., Хосаева З.Х. Математическая модель дифференциации общества с социальной напряженностью // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т.11. № 5. С. 999-1012.
2. Москвин В.М., Журавка А.В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий // Бизнес Информ. Экономико-математическое моделирование. 2002. № 5–6. С. 27-34.
3. Антипова Е.С., Закутняя Л.А, Модель конкурентной борьбы двух идеологий // Сборник трудов XXIII Всероссийской студенческой научно-практической конференции нижевартовского государственного университета. 2021. С. 135-142.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Полигармонические уравнения, кроме общетеоретического значения, как пример уравнений инвариантных при ортогональных преобразованиях в трехмерном пространстве имеют и прикладное значения, а именно би-гармоническое уравнение определяет деформацию упругого тела.

Запишем общий вид полигармонического уравнения как

$$\Delta^{(n)}(3)u(x_1, x_2, x_3) = \left(4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)^n u = 0. \quad (1)$$

Здесь использованы комплексные переменные $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ и соответствующие операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (2)$$

Для применения метода параметрических обобщенных степеней (ПОС) введем операторы

$$D_1 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad D_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (3)$$

Эти операторы удовлетворяют всем требованиям, выполнение которых необходимо для применения ПОС[1].

Для обобщенной константы имеем

$$C = (f_1(z) + f_2(\bar{z}))(c_1 + c_2 x_3),$$

где $f_1(z)$, $f_2(\bar{z})$ производные аналитических функций комплексных переменных z , \bar{z} .

Если в качестве правых обратных интегральных операторов взять

$$I_1 = \frac{1}{4} \int_{z_0}^z d\eta_1 \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} d\eta_2 \dots, \quad I_2 = \frac{1}{4} \int_x^x d\eta_1 \int_{x_0} d\eta_2 \dots \quad (4)$$

то обобщенные степени (ОС) можно записать

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p!q! \left[\left(I_1^p f_1(z) + I_1^p f_2(\bar{z}) \right) \left(\frac{c_{20} x_3^{2q}}{(2q)!} + \frac{c_{21} x_3^{2q-1}}{(2q-1)!} \right) \right], \quad (5)$$

Например, если принять

$$f_1(z) = c_{10} \frac{z^l}{l!}, \quad f_2(z) = c_{11} \frac{\bar{z}^k}{k!}, \quad (6)$$

то ОС определены формулами

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = q! \left[c_{10} \frac{z^{p+l} \bar{z}^p}{(p+l)!} + c_{11} \frac{z^p \bar{z}^{p+k}}{(p+k)!} \right] \left(\frac{c_{20} x_3^{2q}}{(2q)!} + \frac{c_{21} x_3^{2q+1}}{(2q+1)!} \right), \quad (7)$$

По построению ясно, что

$$D_1 X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p X_1^{(p-1)} X_2^{(q)} C, \quad D_2 X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = q X_1^{(p)} X_2^{(q-1)} C. \quad (8)$$

Введем операторы

$$D_z = \frac{1}{2}(D_1 + D_2), \quad \bar{D}_z = \frac{1}{2}(D_1 - D_2). \quad (9)$$

Соответствующим симметризованные ПОС определены как

$$\bar{Z}^m Z^n C = (X_1 - X_2)^m (X_1 + X_2)^n C = \sum_{i=0}^{m+n} a_i^{(m,n)} X_1^{(m+n-i)} X_2^{(i)} C. \quad (10)$$

Значения числовых коэффициентов $a_i^{(m,n)}$ и формулы их нахождения можно найти в [1].

Обратим внимание, что левая часть имеет чисто символическое значение, т.к. правая часть определяет все свойства симметризованных обобщенных степеней

$$\begin{aligned} D_z \bar{Z}^m Z^n C &= n \bar{Z}^m Z^{n-1} C, \\ \bar{D}_z Z^m Z^n C &= n \bar{Z}^m Z^{n-1} C, \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (1) в операторах (9) запишем

$$D_z^n u = 0.$$

В символьной форме его решение имеет вид

$$u = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m Z^i \bar{Z}^j C. \quad (12)$$

Чтобы получить решение в переменных z, \bar{z}, x_3 надо подставить в (12) вместо символического обозначения $\bar{Z}^m Z^n C$ выражение $V_{m,n}$ данное в (10) через бинарные степени $X_1^{(p)} X_2^{(q)} C$, а далее заменить их по формулам (7).

Очевидно, после разделения по параметрам получим одновременно четыре решения (1).

Рассмотрены решения, которые являются многочленами в основных переменных z, \bar{z}, x_3 , т.е. при m конечном n и некоторые основные решения в виде рядов при $m \rightarrow p$.

Дана физическая интерпретация построенных базисных решений би-гармонического уравнения как решения простейших краевых задач теории упругости. Приведены многочисленные частные примеры. Указано на возможность обобщения метода для большего числа измерений пространства переменных.

Список литературы

1. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтарами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга. КГУ. 1997.
2. Тимошенко С.П. Теория упругости. П. Наука, 1979.

**РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ**

Целью исследователей последнего десятилетия является математическое моделирование и анализ эволюционных процессов переноса с распределенными параметрами на сети. Сложность описания состоит в наличии мест сочленения линейных фрагментов сети. Проблема относится как к процессу теплопереноса, так и к процессу гидропереноса.

Рассмотрим вначале произвольный связный граф Γ с конечным числом ребер и внутренних узлов; через ξ ниже обозначен произвольный внутренний узел графа. Зафиксируем произвольный внутренний узел ξ и через $R(\xi)$ обозначим множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «от узла ξ ». Функция $u(x,t)$, $(x,t) \in \Gamma \times [0, T]$ ($0 < T < \infty$) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \Gamma_T, \quad (1)$$

$$(u(1,t))_{R(\xi)} = (u(0,t))_{r(\xi)}, \quad \sum_{R(\xi)} \frac{\partial u(1,t)}{dx} = \sum_{r(\xi)} \frac{\partial u(0,t)}{dx}, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

здесь $a(x)$ – коэффициент, характеризующий свойство процесса переноса – коэффициент теплопроводности, диффузии или вязкости переносимой среды. Соотношение (1), (2) назовем уравнением переноса по сетевому носителю (графу Γ) при изменении временной переменной $t \in (0, T)$. Присоединяя к уравнению (1), (2) начальное

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

и граничные

$$u(0,t)_{\partial\Gamma} = 0, \quad u(1,t)_{\partial\Gamma} = 0, \quad t \in (0, T) \quad (4)$$

условия, получаем начально-краевую задачу (1)-(4).

Можно считать, что область Γ_T является цилиндром, на котором определено уравнение (1), (2). При этом соотношения (4) задаются на множестве $\partial\Gamma \times (0, T)$. Функция $u(x,t)$ класса $C^2(\Gamma_T) \cap C(\Gamma \times [0, T])$ является решением краевой задачи (1)-(4) (используются общепринятые

обозначения $C(\Omega)$ и $C^2(\Omega)$ пространств непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций на множестве $\Omega[1, 2]$). Она удовлетворяет уравнению (1), (2) в области Γ_T , начальным условиям (3) при $t = 0$, $x \in \Gamma$ и граничным условиям (4) в области $\partial\Gamma \times (0, T)$.

Теорема. Начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное слабое решение $u(x, t)$, непрерывно зависящее от исходных данных.

Подробное доказательство утверждения приведено в работе [1] (см. также [3]). Нетрудно показать, что слабое решение $u(x, t)$ принадлежит классу $C^2(\Gamma_T) \cap C(\Gamma \times [0, T])$.

Аппроксимация задачи (1)-(4) приводит к разностной схеме вида:

$$\frac{(u_k^{j+1})_\gamma - (u_k^j)_\gamma}{\tau} = (a_k)_\gamma \frac{(u_{k-1}^j)_\gamma - 2(u_k^j)_\gamma + (u_{k+1}^j)_\gamma}{h^2}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$(u_n^{j+1})_{\gamma \subset R(\xi)} = (u_0^{j+1})_{\gamma \subset r(\xi)},$$

$$\sum_{\gamma \subset R(\xi)} ((u_n^{j+1})_\gamma - (u_{n-1}^{j+1})_\gamma) = \sum_{\gamma \subset r(\xi)} ((u_1^{j+1})_\gamma - (u_0^{j+1})_\gamma),$$

$$u_k^0 = \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma \in \partial\Gamma} = (u_1^{j+1})_{\gamma \in \partial\Gamma} = 0.$$

Здесь индексом k пронумерованы узловые точки деления ребер, индексом j – узловые точки деления отрезка $[0, 1]$, символом $(\cdot)_\gamma$ обозначены значения сужений $u(x, t)_\gamma$, $a(x)_\gamma$ функций $u(x, t)$, $a(x)$ на соответствующее ребро γ графа.

Представлены аппроксимации математических моделей сетеподобных эволюционных процессов переноса, описываемых дифференциальными системами с распределенными параметрами на произвольной сети. Используется явная схема при аппроксимации. Результаты работы могут быть использованы в задачах оптимального управления.

Список литературы

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1977: 456.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014; 10(6): 29-35.
3. Балабан О.Р. Аппроксимация эволюционных дифференциальных систем с распределенными параметрами на сети и метод моментов. Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019; 7(3). Доступно по: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2019/09/Balaban_3_19_1.pdf. DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.040 (дата обращения: 29.05.2020).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ СИСТЕМА В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ НА ГРАФЕ ФУНКЦИЙ

Введем следующие понятия и обозначения [1, с. 9]: Γ – ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ , параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 – объединение всех ребер графа Γ , не содержащих конечных точек. Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество гладких функций $u(x)$ с компактным носителем в Γ_0 , удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$$

в каждом узле $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер γ , соответственно ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », числа 1 и 0 определены в соответствии с параметризацией ребер $\gamma \in R(\xi)$ и $\gamma \in r(\xi)$ графа) и $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$. Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W_0^1(a, \Gamma)$.

В пространстве $W_0^1(a, \Gamma)$ рассматривается дифференциально-разностная система уравнений вида

$$\frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

с начальным

$$y(0) = \varphi(x), \quad (2)$$

и краевыми

$$y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

условиями, где $y(k) := y(x; k)$, $f(k) := f(x; k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(k) \in L_2(\Gamma)$ и $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \beta$, $x \in \Gamma_0$.

Определение. Слабым решением дифференциально-разностной системы (1) – (3) называется совокупность функций $y(k) \in W_0^1(a; \Gamma)$, ($k = 1, 2, \dots, M$), каждая из которых удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Gamma} y(k)_t v(x) dx + \ell(y(k), v) = \int_{\Gamma} f_\tau(k) v(x) dx,$$

являющееся тождеством при произвольной функции $v(x)$ из пространства $W_0^1(a, \Gamma)$, здесь $y(k)_t = \frac{1}{\tau}[y(k) - y(k-1)]$.

Замечание. Из определения 4 следует, что для каждого фиксированного k ($k = 1, 2, \dots, M$) соотношения (1) – (3) – краевая задача в пространстве $W_0^1(a, \Gamma)$ для эллиптического уравнения (1) относительно $y(k)$.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия $0 < a_*$, $a(x)$, a^* , $|b(x)|$, β , $x \in \Gamma_0$, и пусть $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(k) \in L_2(\Gamma)$ ($k = 1, 2, \dots, M$). Решение системы (1) – (3) при достаточно малых τ однозначно определяются как элементы пространства $W_0^1(a; \Gamma)$.*

Доказательство. Здесь используется анализ фредгольмовой разрешимости краевых задач с переменной, изменяющейся на графе [1, с. 105-109].

При $k = 1$ получаем однозначную разрешимость относительно $y(1)$ краевой задачи $\Delta y(1) = -\frac{1}{\tau}y(1) + f_\tau(1) + \frac{1}{\tau}y(0)$, $y(0) = \varphi(x)$,

для $\tau < \tau_0$ при достаточно малом положительном τ_0 . Это же утверждение имеет место и при любом $k = 2, 3, \dots, M$, учитывая определение функций $y(2)$, $y(3)$, ..., $y(M)$ по рекуррентному соотношению

$$\Delta y(k) = -\frac{1}{\tau}y(k) + f_\tau(k) + \frac{1}{\tau}y(k-1).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Провоторов В.В. Волкова А. С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: «Научная книга», 2014. 203 с.

УДК 681.514

Бурковский В.Л., Сидоренко Е.В., Бочаров В.Ж., Добрынин С.Л.,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Традиционные подходы к управлению производственными объектами обычно рассматривают полностью детерминированную среду, в которой

отсутствует неопределенность. Ситуации, возникающие в процессе работы производственных объектов, в большинстве случаев непредсказуемы по причине воздействия на объекты различных факторов, динамичным изменением внешней среды, нарушениями в системе управления. Кроме того, традиционные подходы используют численные значения параметров системы управления (время выполнения операции, скорость протекания процесса) для представления состояния реальной системы. Эти численные данные являются потенциальным источником несовместимости моделей с физическим объектом, поскольку они могут измениться в момент записи или быть недостаточно известными. Совместимость модели с физическим объектом реализуется определением и моделированием входных данных, которые представляются как неопределенные, неточные или неполные. Неопределенность связана с сомнениями относительно достоверности знаний или с незнанием, истинно ли утверждение или нет. Неточность возникает из-за проблем в формулировке знаний. Неполнота связана с отсутствием знаний или частичными знаниями о некоторых характеристиках системы.

Источники неопределенности в производственных объектах можно разделить на три категории: естественная изменчивость производственных процессов, информационная неопределенность из-за неадекватных, некачественных, отсутствующих или ошибочных данных и неопределенность, вызванная моделированием, предположениями и приближениями [1].

Учет каждого рода неопределенностей при управлении производственными объектами является сложной задачей. Требования по оптимизации производства эволюционировали от обычных традиционных критериев эффективности, описанных в терминах статической оптимальности, к новым критериям эффективности, описанных в терминах реактивности, адаптируемости и робастности. В связи с чем возникает потребность классификации интеллектуальных подходов управления в условиях неопределенности.

Структурная схема классификации охватывает новые виды интеллектуальных подходов управления производственными объектами в условиях неопределенности, такие как проактивный и реактивный. Она разработана независимо от предметных областей и прикладных проблем и может применяться к различным видам производственных объектов (управление робототехническими комплексами, технологическими процессами аддитивного производства, распределенными объектами регионального энергоснабжения атомной электростанции).

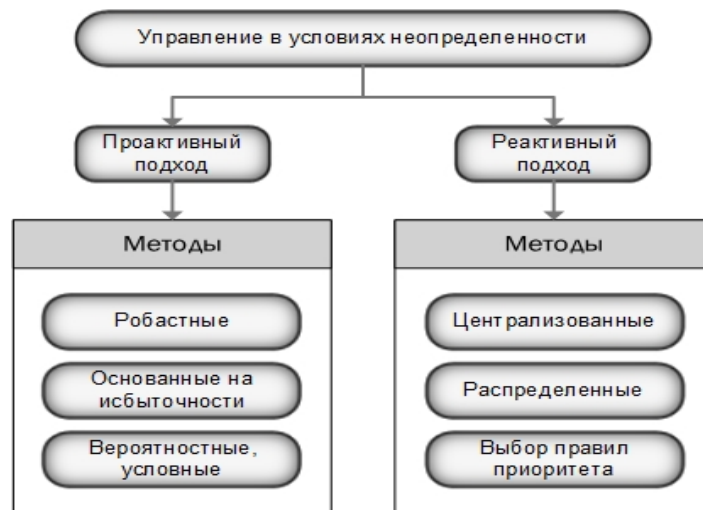


Рис. 1 – Структурная схема классификации интеллектуальных подходов управления в условиях неопределенности

Проактивный (упреждающий) подход является важным инструментом управления данными для предотвращения ожидаемых неизбежных нарушений в системе управления во время ее работы. Данный подход фокусируется на построении прогнозных моделей, которые предсказуемо удовлетворяют требованиям производительности объектов в динамической среде [2]. Проактивный подход обычно использует избыточность (временную или ориентированную на ресурсы), вероятностные и условные методы (происходит разработка нескольких возможных вариантов управляющих воздействий, между которыми можно адаптивно переключаться). Принимая во внимание, что события в реальном времени, в производственном процессе, обычно носят стохастический характер, основная проблема проактивного подхода – определение моделей предсказуемости и их результатов.

Реактивный подход используется в сильно возмущенных средах, где неопределенности имеют случайный характер. В такой среде автономное планирование управляющих воздействий становится практически невозможным, и все решения принимаются в режиме реального времени. В этом контексте предусматривается централизованный или распределенный процесс принятия решений. В централизованных методах используются системы экспертного планирования: например, с использованием метаправил (для выбора правил о правилах, которые будут применяться), построенных на основе экспертных знаний. Идея централизованного метода заключается в том, чтобы идентифицировать и динамически обновлять состояния и вероятности перехода, которые используются экспертной системой для решения проблемы планирования и управления в реальном времени. Распределенные методы широко используются для реактивного планирования в условиях неопределенности, в основном с использованием многоагентных систем. Многоагентные системы подходят для разработки гибкого и

надежного распределенного управления, но производительность такой системы сильно зависит от механизма координации [3]. Как в централизованных, так и в распределенных методах одним из важных вопросов является статический или динамический выбор правил приоритета. В общем случае, правила приоритета меняются в зависимости от исследуемой целевой функции (например, минимизация или задержка). Их можно разделить на две группы: статические правила и динамические правила. Статические правила не зависят от времени и являются функцией данных, связанных с задачами или ресурсами. Динамические правила зависят от времени и от реального состояния системы.

Большое число систем управления производственными объектами связаны с контролем качества или параметров производственного процесса. Преимущество подхода байесовской сети (БС) заключается в том, что он позволяет проводить несколько исследований параметров системы, таких как анализ чувствительности, уменьшение размерности, распределение ресурсов, калибровка модели объекта и прямое распространение неопределенности, путем объединения гетерогенной информации [4].

Байесовская сеть – это графовая вероятностная модель, состоящая из узлов и дуг, где узлы представляют переменные в системе, а дуги представляют собой условные распределения вероятностей между узлами. Математически байесовская сеть представляет собой совместное распределение вероятностей набора переменных $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, представленных как

$$Pr_B(X) = \prod_{i=1}^n Pr_B(X_i | \Pi_{X_i}) \quad (1)$$

где Π_{X_i} – набор родительских узлов X_i , а $Pr_B(X_i | \Pi_{X_i})$ представляет условное распределение вероятностей X_i с учетом его родительских узлов. Если у X_i нет родительских узлов, то $Pr_B(X_i | \Pi_{X_i})$ представляет частное распределение вероятностей X_i .

На рисунке 2 представлена байесовская сеть, которая представляет совместное распределение вероятностей трех случайных величин А, В, С.

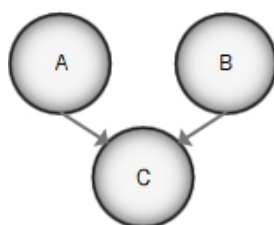


Рис. 2 – Байесовская сеть с тремя переменными

Совместное распределение вероятностей может быть представлено как

$$Pr_B(A, B, C) = Pr(A)Pr(B)Pr(C|A, B) \quad (2)$$

Поскольку A , B не имеют родительских узлов, для них используются частные распределения вероятностей вместо условных. БС допускает два типа анализа: прямой и обратный. Прямой анализ включает вычисление неопределенности в C с учетом неопределенности в корневых узлах (узлах без родительских узлов) – A и B . В качестве обратного анализа широко распространена калибровка модели, которая включает обновление предельных распределений A и B при появлении новых данных в переменной C .

В случае, когда доступны только данные по переменной B , параметрические или непараметрические распределения вероятностей могут соответствовать имеющимся данным. Используя распределение вероятности соответствия, можно провести дальнейший анализ, прямой или обратный.

Условное распределение вероятностей, связанное с $P(C|A, B)$ можно интерпретировать как стохастическую модель, связывающую переменные A , B и C . Наличие ошибок модели приводит к неопределенности распределений условных вероятностей. Такие анализы, как проверка модели, могут выполняться для количественной оценки ошибок модели, а пересмотренная модель после учета всех ошибок может использоваться в качестве условного распределения вероятностей в байесовской сети. Таким образом, результаты неопределенности данных и модели могут быть интегрированы в байесовскую сеть.

Аддитивное производство (АП) – это процесс создания объектов на основе данных трехмерной модели, как правило, слой за слоем (готовое изделие формируется путем сложения материала). Благодаря послойному изготовлению АП позволяет создавать объекты сложной геометрической формы с минимальным расходом материала, такого как пластмассы, полимеры и металлы [5]. Одним из основных препятствий для широкого применения технологий АП является различие в качестве изготавливаемых деталей. В технологических процессах АП существуют различные источники, которые вызывают изменчивость качества продукции из-за распространения и агрегации неопределенности, тем самым препятствуя повторному производству продукции с постоянным качеством.

Процедуры диагностики параметров технологических процессов в АП и качества деталей с использованием БС состоят из моделирования структуры БС, моделирования параметров БС, вывода БС, идентификации неисправностей, а также валидации и верификации. На рисунке 3 представлена структурная схема диагностики неисправностей в АП на основе БС. Модель диагностики неисправностей на основе БС включает в себя пять этапов:

(1) структурная модель БС может быть создана с использованием причинно-следственной связи, алгоритмов сопоставления или метода структурного обучения;

(2) параметрическая модель БС может быть создана с помощью экспертного выявления неисправностей и параметрического обучения;

(3) точные или приближенные алгоритмы могут быть выполнены для вывода данных БС;

(4) системные сбои могут быть идентифицированы непосредственно с использованием апостериорной вероятности или различных правил идентификации сбоев;

(5) валидацию и верификацию модели можно проводить с помощью различных методов, таких как анализ чувствительности, анализ конфликтов, моделирование и экспериментальные исследования. Если результаты диагностики неудовлетворительны, один или несколько из первых четырех этапов пересматриваются или заменяются конкретным используемым методом до получения удовлетворительных результатов диагностики.



Рис. 3 – Структурная схема диагностики неисправностей в АП на основе БС

Робототехнический комплекс (РТК) – это совокупность робототехнических устройств, объединенных в единую систему, работающую по определенной программе, которая может изменяться в процессе работы. Различных реализаций систем управления РТК существует большое количество, но наиболее совершенны из них системы с обратной связью.

На управляющие воздействия в системах управления РТК действует большое количество возмущающих факторов, которые и ведут к появлению в системе неопределенности. Такими возмущающими факторами, например для мобильной робототехники, могут быть электромагнитные помехи; перепады температуры; колебания влажности, влияющие на цепи тактирования; радиоактивное излучение, вибрация и т.д. Таким образом можно утверждать, что производительность систем управления РТК зависит от устойчивости системы управления и ее нечувствительности к возмущениям. При этом нельзя заблуждаться в том, что полное игнорирование неопределенностей увеличивает устойчивость системы.

Применение БС в робототехнике позволяет значительно повысить самостоятельность системы управления РТК в принятии решений. Например, для реализации функций автоматической работы: движение по пересеченной местности мобильного РТК или алгоритмы горизонтирования для роботов с большим количеством степеней свободы исполнительных механизмов, подвижность которых ограничена внешней средой.

Кроме применения БС в робототехнике зачастую стоит вопрос машинного зрения, которое применяется в сложных РТК для точного позиционирования объектов манипулирования и адекватной оценки окружающего пространства. БС – это механизм работы с вероятностью, что в данном случае малоприменимо. Достаточно часто для работы с техническим зрением применяют фасетные нейронные сети, которые позволяют значительно упростить процесс распознавания визуальных образов.

Искусственная нейронная сеть (ИНС, НС) – это математическая модель построенное по образу и подобию организации связи биологических нейронов. При этом система самообучаема.

Искусственный нейрон – предназначен для проведения простых вычислений и передачи далее по сети. Данные нейроны можно разделить на основные типы: входной, скрытый и выходной. Совокупность нейронов сходных по назначению называют слоем. Искусственные нейроны обладают двумя основными параметрами, а именно выходными и выходными данными.

Синапс – это связь между нейронами в НС. Синапсы обладают весом, который изменяет входные данные при передаче между нейронами. При этом данные по синапсам передаются от нейронов, обладающих большим весом. Благодаря весам данные на входы попадают от нейронов с большим весом.

Состояние нейрона можно определить формулой

$$S = \sum_{i=1}^n x_i \cdot w_i, \quad (3)$$

где n – число входов нейрона, x_i – значение i -го входа нейрона, w_i – вес i -го синапса.

Значение аксона нейрона определяется формулой

$$Y = f(S), \quad (4)$$

где f – функция активации. Функция активации предназначена для нормализации данных. Наиболее распространенные функции активации: линейные, сигмоид и гиперболический тангенс.

Чаще всего используется функция активации сигмоид, имеющий диапазон значений от 0 до 1. Функция активации сигмоид:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax}} \quad (5)$$

Для значений в диапазоне от -1 до 1 используется функция активации гиперболический тангенс:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad (6)$$

Обычно в нейронных сетях связи между нейронами задаются с помощью весов (чисел), но вместо весов можно использовать вероятности, рассчитываемые по формуле Байеса. Таким образом мы получаем байесовскую нейронную сеть (БНС). Системы, построенные на основе БНС имеют ряд крупных достоинств в применении к РТК:

- с помощью БНС система управления может работать с неизвестными значениями переменных за счет определения зависимостей между переменными;

- БНС позволяют системам управления проводить прогностический анализ;

- с помощью БНС система управления может совместить закономерности, получаемые из данных от датчиков и систем технического зрения, а также заранее заданные в систему управления;

- системы управления с БНС более устойчивы к шуму данных и избыточному усложнению модели – переподгонки.

В остальном БНС мало чем отличаются от обычных НС. Что позволяет строить системы управления РТК на основе БНС, так же, как и на основе НС. Как пример применения БНС рассмотрим систему управления РТК РОИН РТП-М.

Аварии, случающиеся на объектах нефтегазовой промышленности, представляют огромную угрозу для жизни и здоровья людей, наносят непоправимый вред окружающей среде и приносят огромные убытки. Возможность ликвидации в минимальные сроки и с минимальным участием людей позволит уменьшить негативные последствия, описанные выше и что еще важнее уменьшить риск для здоровья и жизни людей. Для решения этой проблемы компанией АО МГК «Интехрос» был разработан робототехнический комплекс РТП-М. Данный робототехнический комплекс позволяет осуществить дистанционное наведение запорно-устьевой сборки на фонтанирующее устье скважины при ликвидации горящих газовых и нефтяных фонтанов (основные негативные факторы: высокая температура, большие концентрации взрывоопасных летучих соединений, открытое пламя и т.д.). Контроль за выполнением технологических операций осуществляется за счет взрывозащищенных камер.

Робототехнический комплекс РТП-М оснащен системой управления позволяющей осуществлять дистанционное управление по радиоканалу на дальности до 1000 метров в условиях прямой видимости. При этом оператору робототехнического комплекса доступны различные режимы работы системы управления для осуществления различных технологических операций.

Система управления РОИН РТП-М разработана с применением БСНС. Система управления позволяет РТК локализовать аварии с минимально возможным участием человека. Разработанный РТК и система управления ориентированы на применение при ликвидации аварий на объектах нефтегазовой промышленности. Например: для тушения и ликвидации газовых фонтанов, разбора завалов в районе аварии и устранения других последствий.

Частичный контроль и выполнение технологических операций перенесены с оператора на систему управления, для повышения как общей надежности функционирования РТК, так и скорости выполнения операций. В-первую очередь автоматизация работы РТК позволяет избежать негативных последствий при потере связи по радиоканалу между робототехническим комплексом и пунктом дистанционного управления оператора. Каждая технологическая операция передается под управления своей БСНС. Таким образом одни и те же исполнительные механизмы могут быть доступны для системы управления независимо от текущей технологической операции. Совокупность БСНС технологических операций образует слои общей нейронной сети нейроконтроллера. При таком подходе от оператор робототехнического комплекса требуется лишь обозначать какую операцию необходимо выполнить, а затем контролировать ее выполнение, корректируя управляющие воздействия при необходимости. Сформирована структурная схема системы управления: каждый слой отвечает за свою технологическую операцию, после суммирования управляющих воздействий от слоев нейронной сети данные передаются в основную систему управления, от которой управляющее воздействие передается на объект управления. Оператор РТК при этом осуществляет контроль системы управления.

Данная система управления устанавливается на робототехнический комплекс РТП-М, после чего проводится цикл обучения слоев БСНС. Затем проводятся сравнительные испытания нейросетевого управления и штатной системы управления для качественного и количественного анализа изменения эффективности работы робототехнического комплекса.

Функционирование и развитие глобальных и региональных энергосистем во многом зависит от способности системы прогнозировать нагрузку на энергосеть. Чем точнее и раньше по времени произведен прогноз, тем проще маневрировать генерирующими мощностями для сглаживания пиков наибольшей и наименьшей нагрузки.

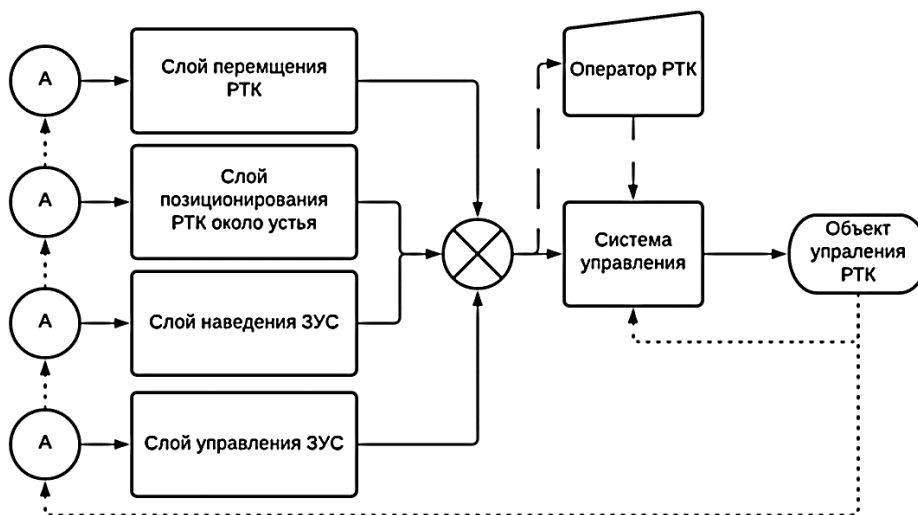


Рис. 4 – Структурная схема системы управления

Существует большое количество факторов, влияющие на нагрузку энерго сети: дневные колебания потребления, погодные условия, состояние энергосети и т.д. Широко применяемый термин «метод прогнозирования» используют как для простейших расчетов, так и для процедур многошаговых экспертных опросов, кроме того, как способ практического и теоретического действия [10]. Именно эти факторы и определяют достоверность прогнозирования.

В качестве меры борьбы с неопределенностью в прогнозировании нагрузки энергосетей можно использовать БНС, динамически изменяя количество входных параметров у нейронов, то есть меняя структуру нейронной сети по мере необходимости.

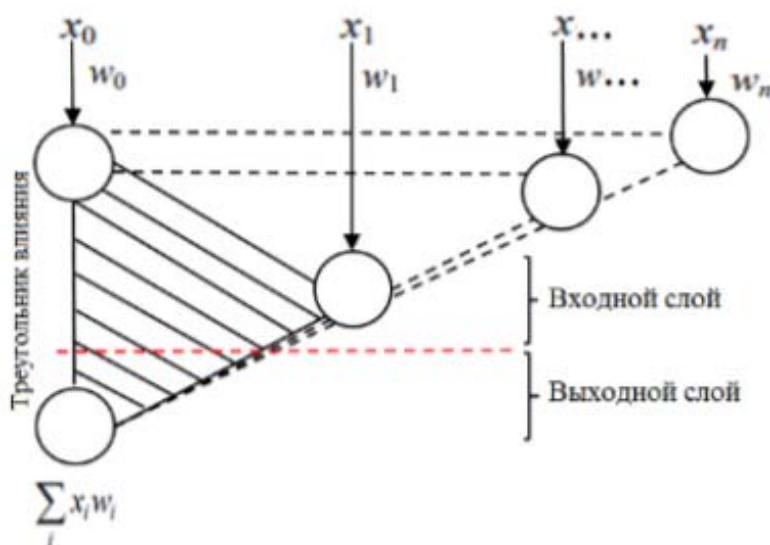


Рис. 5 – Структурная схема БНС энергосети

В данной БСНС рассматривается не только как суммирующая функция. Так как конкретный нейрон не всегда задействован в накоплении данных функцией активации рационально выбрать гиперболический тангенс. Таким образом нейрон принимает следующие диапазоны значений:

1) значение от $[-1; 0]$, от $[0; +1]$ и 0 – это суммарные накопленные данные и БСНС ведет себя как обычная классическая нейронная сеть;

2) значение нейрона от $[+1; +\infty]$ – требуется добавление еще одного нейрона, изменение структурной схемы сети и определения новых весовых значений вероятностей БСНС. Добавление нейрона нормализует сеть и приводит ее к 1 состоянию;

3) значение нейрона от $[-\infty; -1]$ требует уже исключения нейрона из БСНС, так он дает избыточные данные, которые мешают работе сети.

Математическое описание нейрона может быть представлено следующим образом [11]:

$$f(x) = n \cdot \tanh(x \cdot n) \quad (7)$$

Входные данные БСНС делятся на [11]: параметры качества энергоснабжения, параметры функционирования (потребления) абонента, параметры аварийных случаев (погодные условия) или особых требований абонентов к качеству электроэнергии. Параметры обратной связи абонента (своевременная оплата, присутствие на месте в случае аварийной ситуации, реакция на перебои с обслуживанием) и др.

Число входных нейронов и нейронов внутренних слоев динамическое и меняется в процессе функционирования БСНС, количество выходных слоев неизменно. Часть выходных нейронов имеют дополнительные связи с нейронами первого слоя [11].

Применение БСНС позволяет решить проблему прогнозирования нагрузки на энергосети наиболее рациональным способом.

В рамках данной статьи рассмотрены теоретические основы интеллектуализации управления наиболее востребованными в настоящее время производственными объектами, функционирующими в условиях неопределенности.

Источники неопределенности в производственных объектах можно разделить на три категории: естественная изменчивость производственных процессов, информационная неопределенность из-за неадекватных, некачественных, отсутствующих или ошибочных данных и неопределенность, вызванная моделированием, предположениями и приближениями.

Учет каждого рода неопределенностей при управлении производственными объектами является сложной задачей. Требования по оптимизации производства эволюционировали от обычных традиционных критериев эффективности, описанных в терминах статической оптимальности, к новым критериям эффективности, описанных в терминах реактивности, адаптируемости и робастности. В связи с чем возникает потребность классификации интеллектуальных подходов управления в условиях неопределенности.

Отражены подходы к интеллектуальному управлению: проактивный – построение прогнозных моделей, которые предсказуемо удовлетворяют требованиям производительности объектов в динамической среде; реактивный подход используется в сильно возмущенных средах, где неопределенности имеют случайный характер. В такой среде автономное планирование управляющих воздействий становится практически невозможным, и все решения принимаются в режиме реального времени.

Освещены вопросы теоретического описания байесовских сетей и их применение в системах управления различными производственными объектами: аддитивным производством, РТК и энергосистемами.

Список литературы

1. Li Z., Ierapetritou M. Process scheduling under uncertainty: Review and challenges //Computers & Chemical Engineering. 2008. Т. 32. №. 4-5. С. 715-727.
2. Liebrecht C. et al. Multi-criteria evaluation of manufacturing systems 4.0 under uncertainty //Procedia CIRP. 2017. Т. 63. С. 224-229.
3. Yong B. X., Brintrup A. Multi agent system for machine learning under uncertainty in cyber physical manufacturing system //International Workshop on Service Orientation in Holonic and Multi-Agent Manufacturing. Springer, Cham, 2019. С. 244-257.
4. Nannapaneni S. et al. Online monitoring and control of a cyber-physical manufacturing process under uncertainty //Journal of intelligent manufacturing. 2021. Т. 32. №. 5. С. 1289-1304.
5. Добрынин С. Л., Бурковский В. Л. Проблематика управления аддитивным производством на основе технологий промышленного интернета вещей // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2021. Т. 17. №. 2. С. 7-13.
6. Bocharov V. et al. Analysis of Resource Availability of Production Enterprise Based on Fuzzy Neural Network //Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics" Zavalishin's Readings". Springer, Singapore. С. 459-467.
7. Бочаров В.Ж., Бурковский В.Л. Управление робототехническим комплексом в экстремальных условиях функционирования на основе нечетких нейронных сетей // Вестник ВГТУ. 2016. №6.
8. Бочаров В.Ж., Бурковский В.Л. Система нейроуправления на основе 3d-сети в условиях робототехнического комплекса специального назначения // Вестник ВГТУ. 2017. №3.
9. Бочаров В.Ж., Бурковский В.Л. Система управления модульного типа и 3d нейросетевой регулятор мощности для роин ртс р-300/04 // Энерго- и ресурсосбережение – XXI век.: материалы XVIII международной научно-практической конференции (8 – 10 декабря 2020 г., г. Орёл).
10. Ведерников А.С. Планирование режимов работы электроэнергетических систем / А.С.Ведерников и др. // Самара: Самар.гос.техн.ун-т. 2016.193 с.

11. О. Б. Урумбаева, Т. А. Шалаев, О. М. Шиккульская. Концепция интеллектуального управления энергосетью // Инженерностроительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурностроительный университет. Астрахань: ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2020. № 3 (33). С. 69–74.

УДК 519.23

*Бучина Д.А., Гончарова А.Б.,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПСЕВДОРАНДОМИЗАЦИИ (PROPENSITYSCOREMATCHING)

Статистический метод псевдорандомизации (propensityscorematching) был предложен Рубином и Розенбаумом в 1983 г. для устранения систематических ошибок в обсервационных исследованиях. [1] Несмотря на это, активное развитие метод получает лишь в последнее десятилетие, и в данный момент наиболее успешно применяется в области доказательной медицины, использующей данные клинических исследований. PSM позволяет рассчитать вероятность попадания каждого наблюдения в основную или контрольную группу на основании набора его характеристик. Таким образом компенсируется неравномерное распределение характеристик, присущее обсервационным исследованиям, а также учитывается возможная ошибка при оценке различий между группами. В результате предоставляется возможность подобрать пары идентичных пациентов из двух разных групп и оценить влияние возможных действующих факторов. Данное сопоставление чрезвычайно полезно для оценки событий, рандомизация которых нецелесообразна, а также для ретроспективных наблюдательных исследований.

Для propensityscorematching не существует общепринятых рекомендаций по выбору модели, отбору характеристик, методах балансировки и расчета воздействия.[2] В работе предложен следующий алгоритм:

1. Построение модели. Согласно парадигмы PSM отбираются характеристики с учетом теоретического представления о связи этих характеристик как с фактором, так и с исходом исследования. Однако в анализ не должны включаться характеристики, точно прогнозирующие отношение объекта к основной или контрольной группе. Каждый столбец со значениями характеристик нормируется по максимальному значению.

2. Расчет условных вероятностей. Для расчета условных вероятностей применяется логистическая регрессия. Зачастую логит модель ис-

пользуется для решения задач классификации, однако при применении метода псевдорандомизации наибольший интерес представляет не только предсказание класса, а вес, с которым рассматриваемый признак участвует в предсказании.

3. Балансировка. Применяется метод сопоставления ближайшего соседа, т.е. для каждого наблюдения из основной группы подбирается наиболее близкое по значению вероятности наблюдение из контрольной группы. Алгоритм является «жадным» и разделяет всю сложную задачу сопоставления на более мелкие части, определяя для каждого наблюдения лучший вариант. [3]Рекомендуется рассматривать пары, попадающие в зону перекреста значений вероятностей, поскольку это позволит оценить вклад изучаемого фактора.

4. Проверка качества баланса. После подбора пар проверяется согласованность групп по всем характеристикам. Для этого используются графические методы: приводятся графики ковариантного баланса (рис. 1) и распределительного баланса между группами (рис. 2) до и после подбора пар. Также выполняется расчет коэффициента Каппы Коэна. Данная мера считается надежной и учитывает возможность случайных совпадений.

5. Оценка эффективности. После подбора пар необходимо оценить эффективность каждого из методов лечения. Для этого проводится попарный анализ на основании PSM: вычисляются основные и вспомогательные характеристики для каждого метода лечения, строятся ROC-кривые.

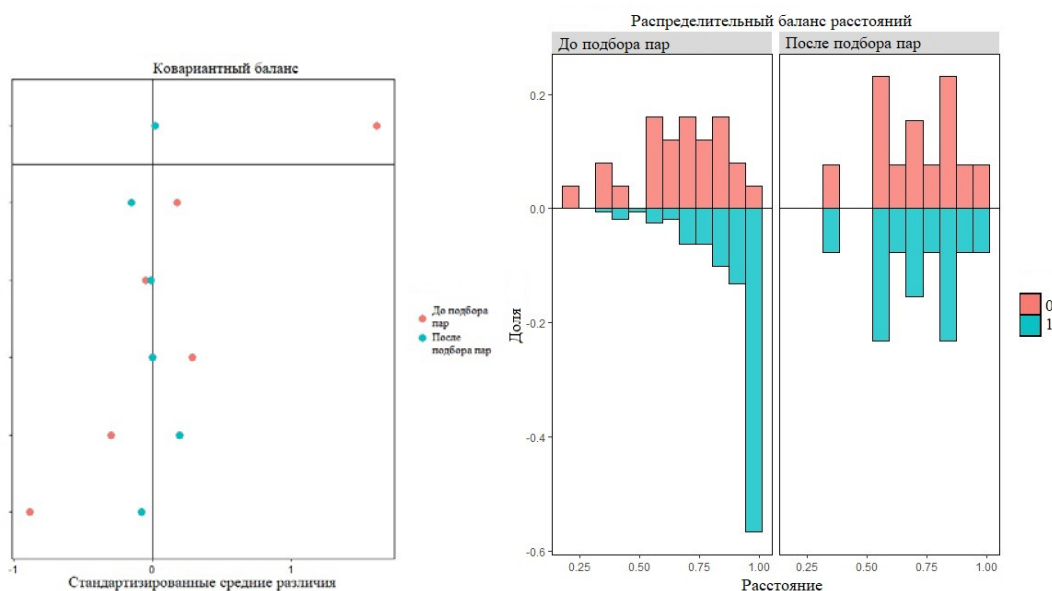


Рис. 1 – График ковариантного баланса Рис. 2 – График распределительного баланса

Список литературы

1. Rosenbaum P., Rubin D. The central role of the propensity score in observational studies for casual effects // *Biometrika*. 1983. P. 41–55.
2. Е.А. Бусько, А.Б. Гончарова, Д.А. Бучина, А.С. Натопкина. Использование статистического метода псевдорандомизации в сравнительной

оценке диагностической эффективности методов медицинской визуализации на примере магнитно-резонансной томографии и контрастно-усиленного ультразвукового исследования // Опухоли женской репродуктивной системы, 2021, т. 17, № 3, с. 37-43.

3. ZHAO QY, Luo JC, Su Y, Zhang YJ, Tu GW, Luo Z. Propensity score matching with R: conventional methods and new features // Ann Transl Med 2021; 9(9):812.

УДК 917.039

Василенко П.М., Баталова С.А.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

ОЦЕНКИ НОРМ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАФЕ

Предварительно введем следующие понятия и обозначения [1, с. 9]: Γ – ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами \mathcal{V} , параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 – объединение всех ребер графа Γ , не содержащих концевых точек. Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество гладких функций $u(x)$ с компактным носителем в Γ_0 , удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$$

в каждом узле $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер \mathcal{V} , соответственно ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », числа 1 и 0 определены в соответствии с параметризацией ребер $\gamma \in R(\xi)$ и $\gamma \in r(\xi)$ графа) и $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$. Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W_0^1(a, \Gamma)$.

В пространстве $W_0^1(a, \Gamma)$ рассматривается дифференциально-разностная система уравнений вида

$$\frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

с начальным

$$y(0) = \varphi(x), \quad (2)$$

и краевыми

$$y(k)|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

условиями, где $y(k) := y(x; k)$, $f(k) := f(x; k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(k) \in L_2(\Gamma)$ и $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \beta$, $x \in \Gamma_0$.

Определение. Слабым решением дифференциально-разностной системы (1)–(3) называется совокупность функций $y(k) \in W_0^1(a; \Gamma)$, ($k = 1, 2, \dots, M$), каждая из которых удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Gamma} y(k)_t v(x) dx + \ell(y(k), v) = \int_{\Gamma} f_{\tau}(k) v(x) dx,$$

являющееся тождеством при произвольной функции $v(x)$ из пространства

$$W_0^1(a, \Gamma), \quad \text{здесь } y(k)_t = \frac{1}{\tau} [y(k) - y(k-1)].$$

Замечание. Из определения следует, что для каждого фиксированного k ($k = 1, 2, \dots, M$) соотношения (25)–(27) – краевая задача в пространстве $W_0^1(a, \Gamma)$ для эллиптического уравнения (25) относительно $y(k)$.

Теорема. Предположим, что выполнены условия $0 < a_*$, $a(x)$, a^* и $|b(x)|$, β , $x \in \Gamma_0$. Если $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$, тогда для функций $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, имеют место следующие оценки, не зависящие от τ :

$$P y(k) P_{2, \Gamma} \leq e^{4\beta T} (P \varphi P_{2, \Gamma} + 2P f(k) P_{2, 1, \Gamma}) \quad (4)$$

$$P y(m) P_{2, \Gamma}^2 + 2a_* \tau \sum_{k=1}^m P \frac{dy(k)}{dx} P^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m P y(k)_t P_{2, \Gamma}^2 \leq C (P \varphi P_{2, \Gamma}^2 + P f(m) P_{2, 1, \Gamma}^2), \quad (5)$$

где через $P \cdot P_{2, \Gamma}$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$,

$P f(k) P_{2, 1, \Gamma} = \tau \sum_{k=1}^m P f(k) P_{2, \Gamma}$, постоянная C не зависит от τ .

Отметим, что доказательство оценок (4), (5) основано на представленном в работе [1, с. 180] методе, берущим свое начало от метода полу-дискретизации Е. Роте [2]. С использованием этих оценок устанавливаются условия разрешимости дифференциальной системы, соответствующей (1) – (3).

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: «Наука», 1973. 407 с.
2. Rothe E. Wärmeleitungsgleichungen mit nichtconstanten koeffizienten. Math. Ann. 104 (1931). С. 340-362.

КАМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НОВООБРАЗОВАНИЯ

В структуре заболеваемости населения России злокачественными заболеваниями рак легких составляет около 10% всех злокачественных заболеваний, а в локализации заболеваний мужчин первое место с 20% от всех онкологических заболеваний. Лечение заболевания осуществляется хирургическим методом, который дополняется лучевой терапией и лекарственным лечением.

Естественная история рака начинается от первой клетки постоянно делящейся, порождая себе подобных. Постепенно происходит объединение делящихся клеток в крупные ядра [1]. По мере роста ядер от них отделяются делящиеся клетки с последующим их объединением в новые ядра. Делящиеся клетки постепенно занимают все функциональное пространство, вытесняя тем самым «нормальные» клетки. Скорость размножения делящихся клеток зависит от конкретного организма. Размер ядер в плоскоклеточном раке определяется множеством факторов [2, 3].

В математической модели рака легкого учитываются два типа клеток: делящиеся и нормальные [4, 5]. Размножение клеток происходит в функциональном пространстве, размер которого определяется размером образующегося ядра, и считается единичным. Размножение делящихся клеток сопровождается вытеснением ими нормальных клеток. Делящиеся клетки оказывают на нормальные клетки ингибирующее влияние. Делящиеся клетки мигрируют и начинают образовывать новое ядро. Миграция начинается после достижения ядром достаточной для начала миграции зрелости.

Пусть u - концентрация делящихся клеток в функциональном пространстве, а v - концентрация нормальных клеток. Математическая модель роста раковых клеток представлена системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \mu_u u_1 (1 - u_1 - v_1) - c_1 u_1, \\ \frac{dv_1}{dt} &= \mu_v v_1 (1 - u_1 - v_1) - \gamma u_1 v_1 \\ \frac{du_k}{dt} &= \mu_u u_k (1 - u_k - v_k) - c_{k-1} v_k + c_k v_{k-1}, \\ \frac{dv_k}{dt} &= \mu_v v_k (1 - u_k - v_k) - \gamma u_k v_k, \quad (k = 2, 3, \dots, n)\end{aligned}$$

с начальными условиями при $t = 0$:

$$u_1 = u_1^0, u_k = 0, (k = 2, 3, \dots, n),$$

$$v_k = 1 (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

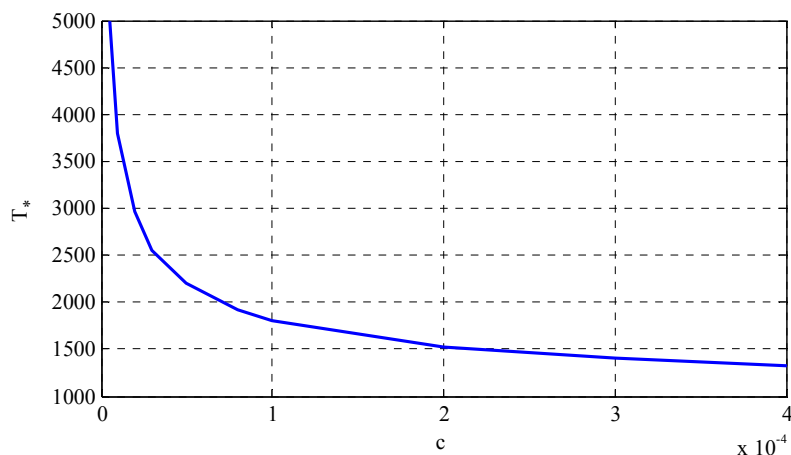
В этой системе уравнений u_k - концентрация делящихся клеток в функциональном пространстве k -го ядра, а v_k - концентрация нормальных клеток, c_k - скорость миграции делящихся клеток из k -го ядра в зону роста $k+1$ ядра, μ_u и μ_v удельные скорости роста делящихся и нормальных клеток. Считается, что делящиеся клетки размножаются быстрее, чем нормальные ($\mu_u > \mu_v$). Слагаемое $\gamma u_k v_k$ отражает скорость подавления активности нормальных клеток делящимися. Делящиеся клетки в начальный момент времени возникают в функциональном пространстве первого ядра в малом количестве: $u_1^0 \ll 1$.

Скорости миграций c_k задаются следующим образом:

$c_k = 0$, если $u_k < u_*$ и $c_k = c$, если $u_k \geq u_*$, при этом считается, что $u_* < 1$.

Численное решение задачи Коши для системы уравнений решается с применением численных методов в математическом пакете MatLab.

Скорость заполнения ядер зависит от скорости миграции клеток. На рисунке показана зависимость времени «открытия» канала миграции T^* в третьем «ядре» от параметра c для значений $u_* = 0.3$, $\mu_u = 1$, $\mu_v = 1$, $\gamma = 0.1$. По данным [1] скорость роста опухоли лежит в диапазоне от 0.0001 до 0.0015 см в день. Если рассматривать, что начало роста четвертого «ядра» соответствует началу метастазирования, то по оценкам, следующим из модели, это может произойти через 2-3 года.



Рисунок

Список литературы

1. Довгальук А.З. Рак легкого: пособие для врачей. СПб.: СпецЛит, 2008. 207 с.
2. Гончарова А.Б., Колпак Е.П. Математическое моделирование лечения новообразования методом иммунотерапии // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. 2021. № 1. С. 74-78.
3. Тонеева Д.В., Гончарова А.Б., Сергеева Е.И. Алгоритм построения экспертной системы диагностики заболеваний на основе дифференциально-диагностических признаков // Технические науки - от теории к практике. 2016. № 11 (59). С. 37-43.
4. Гончарова А.Б., Сергеева Е.И. Построение системы поддержки принятия решений в медицине // Интеграция наук. 2019. № 1 (24). С. 272-274.
5. Kolpak E.P., Abuzyarova R.T., Kabrits S.A. Leukosis mathematical model // Asian Journal of Pharmaceutics. 2018. Т. 12. № 1. С. S340-S345.

УДК 621.396

*Дмитриев С.А., Чумаков Е.А., Дмитриев Н.С.,
ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА РАДИОСВЯЗИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДАЛЬНЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН ДКМ ДИАПАЗОНА

Дальнее распространение радиоволн декаметрового диапазона происходит за счет отражения от ионосферы. Данный тип волны способен распространяться на расстояние, не превышающее десятков километров. Однако для организации радиосвязи широкое применение нашли волны типа ДКМ для обеспечения связи между пунктами наземного и воздушного базирования. Но для этого используются радиостанции малой и большой мощности [1].

Радиоволны декаметрового диапазона распространяются на большие расстояния пространственной радиоволной путем отражения от ионосферы и поверхности Земли (способ скачковый). Расстояние скачка – это расстояние по поверхности Земли от передатчика до точки прихода отраженного сигнала при однократном отражении от ионосферы и зависит от высоты отражающего слоя, рабочей частоты и диаграммы направленности в вертикальной плоскости и меняется в зависимости от времени года и активности Солнца.

К преимуществам данного типа связи следует отнести:

- оперативность установления прямой связи на большие расстояния;
- простоту организации связи с подвижными объектами;
- возможность обеспечения связи через большие труднодоступные пространства (зоны повышенного заражения);
- труднопроходимые участки местности;
- высокая мобильность средств декаметровый радиосвязи;
- довольная простая восстанавливаемость связи в случае нарушения (как в результате воздействия случайных, так и преднамеренных помех);
- низкая стоимость одного канала на километр дальности связи.

Особое значение приобретает декаметровая радиосвязь при организации и проведении аварийно-спасательных работ, координации действий различных организаций и служб в районах стихийных бедствий. К недостаткам ДКМ связи можно отнести:

- резкая изменчивость затухания сигналов на трассах радиосвязи;
- различный характер замираний сигналов;
- зависимость качества связи от времени суток, года и состояния ионосферы.

Основные факторы, влияющие на качество связи.

- солнечная активность и связанная с ней магнитная активность Земли;
- возможность отражения радиоволн от различных слоев ионосферы, если рабочие частоты близки к критическим частотам этих слоев;
- сезонные, месячные колебания значений критических частот и связанных с ними других параметров;
- суточные изменения максимально применимых частот, оптимальных рабочих частот, наименьших применимых частот;
- замирания сигнала передатчика в точке приема, связанные с многолучевостью распространения радиоволн;
- внезапные изменения состояния ионосферы, приводящие к поглощению радиоволн, диффузности;
- зависимость уровня принимаемого сигнала в точке приема от уровня помех от других РЭС, работающих на этих же частотах из-за многоскачкового распространения радиоволн;
- зависимость уровня принимаемого сигнала в точке приема от уровня промышленных помех.

Выше перечисленные факторы и обстоятельства подчеркивают актуальность оценки и контроля параметров ионосферы и на основе знаний этих параметров и закономерностей распространения радиоволн проведение прогнозирования [2].

Пространственные радиоволны на значительные расстояния в широтном направлении распространяются, как правило, в неоднородной по степени ионизации среде, и происходит это из-за того, что одна часть пути

может проходить через освещенную часть земного шара, а другая находится в тени. Особенно неустойчива связь во время сумерек. И тогда для обеспечения надежной радиосвязи приходится применять несколько рабочих частот или вести радиосвязь через дополнительные пункты управления, разнесенные территориально [3].

Особенностью является то, что далеко не везде в приполярных широтах имеются современные линии проводной связи. Так, например, применение спутниковых средств ограничено тем, что для геостационарных ретрансляторов в этих широтах требуемая мощность передатчика чрезмерно высока, отсутствует прямая видимость со спутниками на геостационарной орбите, а ретрансляторы на эллиптических орбитах имеют ограниченный ресурс, а радиорелейные и тропосферные средства требуют применения большого количества ретрансляторов. Декаметровая связь позволяет организовать радиосвязь из неподготовленных в отношении связи районов на практически неограниченное расстояние, но пропускная способность декаметровых радиолиний весьма ограничена. В соответствии с вышеизложенным перспективным направлением развития сети связи в Арктической зоне Российской Федерации является комплексное применение всех видов радиосвязи, в том числе и коротковолновой радиосвязи. Среди особенностей распространения декаметровых радиоволн в этих широтах можно выделить наличие более выраженного проявления ионосферных возмущений, наличие явления поглощения полярной шапки, наличие поглощения в зоне полярных сияний, наличие ионосферных бурь.

ДКМ радиосвязь является важной составляющей общей системы связи, обеспечивающей боевые действия авиации. Наиболее важно использования ДКМВ радиосвязи в Арктической зоне определяет необходимость передачи различного рода информации на значительные расстояния, как правило, более 600–800 км. С учетом жесткого ограничения на возможность применения ретрансляционных пунктов в других диапазонах рабочих частот в условиях Севера и определенную уязвимость спутниковой системы связи, роль ДКМВ радиосвязи с ее высокой мобильностью, небольшим расходом сил и средств при организации радиосетей и радионаправлений значительно повышается.

Для построения системы ДКМВ радиосвязи Арктической зоны предлагается использовать ВРП, расположенные в умеренных широтах (в пределах 52-56о с.ш.).

В связи с высоким уровнем возмущений использование ДКМВ диапазона в условиях северных широт из-за неустойчивого состояния ионосферы приводит к серьезным проблемам. И приводит всё это к необходимости повышения мощности передающих устройств или использования ретрансляционных пунктов в умеренных широтах и, как следствие, к дополнительным проблемам в вопросах электромагнитной совместимости.

Список литературы

1 Березовский В.А., Дулькейт И.В., Савицкий О.К. Современная декаметровая радиосвязь. М.: Радиотехника, 2011, 441 с.

2 Головин О.В., Простов С.П. Системы и устройства коротковолновой радиосвязи. Под ред. Профессора О.В. Головина. М.: Горячая линия – Телеком, 1996, 480 с.

3 Забавников В.Н., Каберов С.Р., Дмитриев С.А. Работа на средствах связи. Работа радиостанции Р-161-А2М в различных режимах. Учебное пособие. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016, 144 с.

УДК 004.853, 65.011.56

Добрынин С.Л., Бурковский В.Л.,

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ АДДИТИВНЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ

Аддитивное производство (АП) – это процесс создания объектов на основе данных трехмерной модели, как правило, слой за слоем, в отличие от субтрактивного производства, где применяются методы механической обработки, такие как обработка резаньем. Благодаря послойному изготовлению АП позволяет создавать объекты сложной геометрической формы с минимальным расходом материала, такого как пластмассы, полимеры и металлы.

Для печати прототипов деталей или конечных изделий были разработаны различные технологии, такие как моделирование методом наплавления (FDM), лазерная стереолитография (SLA), изготовление объектов с использованием ламинирования (LOM), селективное лазерное плавление (SLM), селективное лазерное спекание (SLS), электронно-лучевая плавка (EBM) [1].

Несмотря на быстрый рост и перспективы в области АП, достижение стабильного качества деталей и надежности процессов остается проблемой. Создание изделия в любой технологии АП является сложным многоэтапным процессом, который включает в себя пять основных шагов: проектирование, планирование процесса, процесс 3D-печати, пост-обработка, а также контроль качества. Для изготовления качественной детали необходимо контролируемое и точное выполнение каждого из этих шагов.

В некотором смысле АП является той производственной областью, в которой много данных, но мало знаний. Извлечение знаний из большого количества доступных данных является сложным и длительным процес-

сом. Несмотря на достижения в области обработки информации и увеличения количества данных из жизненного цикла АП, существует ограниченное научное понимание, позволяющее охарактеризовать взаимовлияние материалов, геометрии, протекания процессов, их свойств и производительности. Для обработки больших данных необходимы современные вычислительные и аналитические инструменты. Новые разработки в области машинного обучения (англ. machine learning, ML) показывают большой потенциал для преобразования выходных данных процессов АП в ценные знания [2].

На рис. 1 представлен жизненный цикл изготовления готового изделия от проектирования к готовому продукту на основе потребностей в поддержке принятия решений и возможностей ML.



Рис. 1 – Жизненный цикл изготовления готового изделия

Проектирование 3D-модели – важная часть процесса изготовления изделия, которая требует всестороннего понимания возможностей и ограничений технологий 3D-печати. Оптимальное проектирование модели с помощью системы автоматизированного проектирования (САПР) не только обеспечит возможность ее печати, но и уменьшит количество вспомогательного материала. Однако процесс проектирования обычно итеративен и требует много времени. Управляя входными данными по определенным правилам ML способно оптимизировать процесс проектирования 3D-модели.

Оптимизация процесса 3D-печати часто выполняется при разработке новых материалов или новых технологических конфигураций. Оптимизация процессов АП может быть выполнена для получения определенных

характеристик деталей, напечатанных на 3D-принтере, путем изменения параметров процесса. База данных взаимосвязей процесс-структурасвойства (ПСС) для определенного процесса АП и материалов позволит правильно выбрать параметры на основе доступной информации в базе данных. Взаимосвязь ПСС часто усложняется из-за большой размерности параметров процесса, что затрудняет установку определяющей математической формулы. Из-за сложной природы процессов алгоритмы ML используются для определения отношений ПСС для многих технологий АП.

Одной из наиболее приоритетных областей приложений ML в АП является мониторинг и управление технологическими процессами 3D-печати в режиме реального времени. Технологии мониторинга быстро развиваются и включают в себя все больше различных датчиков таких как высокоскоростные оптические камеры, термопары, пирометры, фотодетекторы и акселерометры. Тем не менее, управление процессами АП в реальном времени все еще находится на начальной стадии, несмотря на большое количество гетерогенных данных, полученных с датчиков, до сих пор неясно, какие данные наиболее значимы для реализации управляющих воздействий. Так же не существует методов «слияния данных», необходимых для комплексного понимания протекания процессов. Существуют методы ML, необходимые для анализа этих данных; но они только недавно нашли свое применение в контексте АП [3].

Используя данные, получаемые в режиме реального времени для характеристики текущего состояния детали в сочетании с априорными знаниями о детали и процессе, можно предсказать состояние конечной детали. Использование ML для улучшения управления процессами АП в режиме реального времени имеет значительную потенциальную выгоду – задачи пост-процессного контроля могут быть значительно уменьшены. Переноса часть пост-процессной проверки на более высокий уровень, как часть производственного процесса, потенциальные дефекты в готовых деталях могут быть обнаружены заранее. Это экономит время проверки; а также материалы в случае выявления предельных отклонений.

Облачная платформа является неотъемлемой частью территориально-распределенного АП в рамках концепции Индустрии 4.0. Это модель вычислений на основе сервера, которая состоит как из аппаратных, так и программных ресурсов. Она обеспечивает совместное использование технологического оборудования и иных ресурсов в общедоступном репозитории, включая 3D-модели и услуги печати.

Список литературы

1. Добрынин, С.Л. Проблематика управления аддитивным производством на основе технологий промышленного Интернета вещей // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2021. Т. 17. № 2. С. 7-13.

2. Baumann, F.W., Sekulla, A., Hassler, M., Himpel, B., & Pfeil, M. (2018). Trends of machine learning in additive manufacturing. *International Journal of Rapid Manufacturing*, 7(4), 310.

3. Добрынин, С.Л. Контроль над технологическими процессами аддитивного производства в режиме реального времени на основе промышленного стандарта MTConnect // *Автоматизация в промышленности*. 2021. № 3. С. 39–44.

УДК 539.3

Евстафьева И.А.,

*ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

ОЦЕНКА СРОКА СЛУЖБЫ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБЫ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕЙ ЗАТУХАЮЩЕЙ МЕХАНОХИМИЧЕСКОЙ КОРРОЗИИ

Влияние агрессивных сред может значительно уменьшить долговечность используемых в современном строительстве материалов, при этом увеличив нагрузку на всю конструкцию, что, в свою очередь, может привести к масштабным экономическим потерям. В источниках [2-5, 8] рассмотрены задачи о цилиндрических и сферических элементах, подверженных механохимической коррозии, в отличие от них в данной работе при определении скорости механохимической коррозии применяется распределение Вейбулла. Данное решение применимо только в случае равномерной коррозии, поскольку локальная коррозия вызывает концентрацию напряжений в своей окрестности [6, 7].

Рассматривается задача о долговечности тонкостенной трубы под действием внутреннего P_r и внешнего давления P_R в условиях затухающей внешней механохимической коррозии. В представленной работе учитывается влияние различных температур на внутренней и внешней поверхностях: T_r и T_R соответственно.

Скорость коррозии задана в виде[1]:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0; \quad v_R = -\frac{dR}{dt} = f(\sigma_R, T_R)g_R(t).$$

Здесь

$$g_R(t) = d_R^\infty \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma\right]; \quad f(\sigma_R, T_R) = \begin{cases} 1 + k_R \sigma_R, & T_R \leq T_R^{th} \\ (1 + k_R \sigma_R) \exp(\beta_R [T_R - T_R^{th}]), & T_R \geq T_R^{th} \end{cases}$$

где d_R^∞ , γ , θ , k_R , β_R – экспериментально определяемые параметры; T_R^{th} – пороговое значение температуры; σ_R – максимальное нормальное напряжение на внешней поверхности трубы. Для определения долговечности трубы используется критерий достижения остаточной толщины.

На рис. 1 показана картина изменения толщины трубы во времени с учетом (штрихпунктирная линия) и без учета (штриховая линия) механохимического эффекта в случае, когда температура окружающей трубы больше (рис. 1.а) и меньше (рис. 1.б) порогового значения $T_R^{th} = 20$. Черная линия соответствует предельно допустимой толщине h^* .

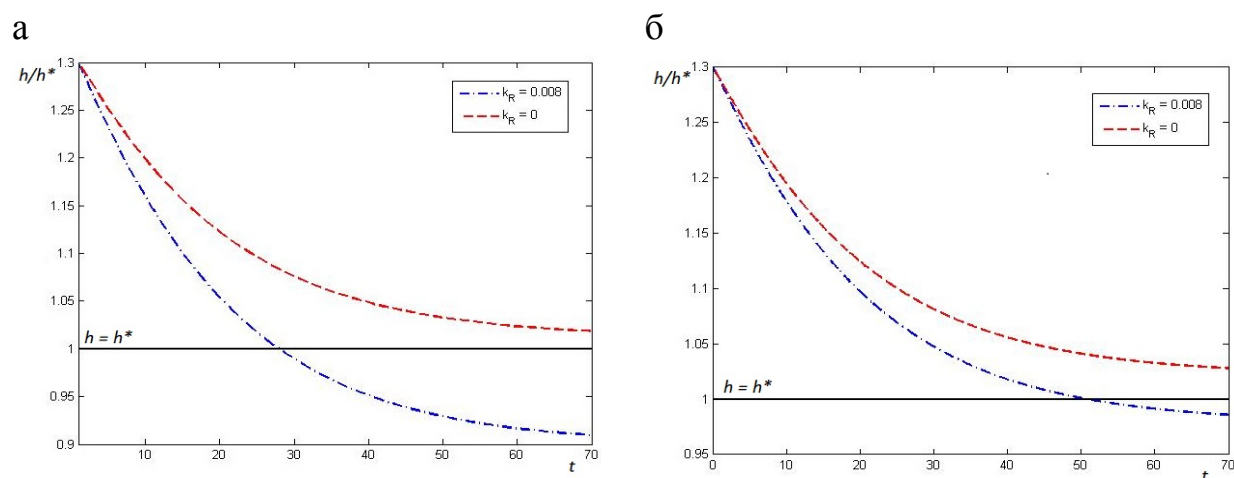


Рис. 1. – (а) Изменение толщины трубы $T_R > T_R^{th}$;
(б) Изменение толщины трубы $T_R < T_R^{th}$

Как можно заметить, в случае, если механические напряжения не учитываются при определении долговечности трубы, расчеты могут показать, что коррозия успеет затухнуть до момента достижения допустимой остаточной толщины, означая неограниченный срок службы трубы, что, в действительности, не будет верным и может привести к серьезным авариям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00100).

Список литературы

1. Долинский В.М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии // Химическое и нефтяное машиностроение. 1967. №2. С. 9-10.
2. Пронина Ю.Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. С. 55-63.
3. Пронина Ю.Г. Механохимическая коррозия полого цилиндра из идеального упруго-пластического материала под действием постоянного

давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. 2006. № 3. С. 121-130.

4. Пронина Ю.Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 129-135.

5. Пронина Ю.Г. Равномерная механохимическая коррозия полой сферы из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. 2009. № 1. С. 113-122.

6. Пронина Ю.Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 104-114.

7. Пронина Ю.Г. Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 3. С. 118-128.

8. Седова О.С., Пронина Ю.Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 33-44.

УДК 621.59

*Ерин О.Л., Досмурзаев А.К., Алиев Д.С., Кузнецов С.А.,
ФГКВООУ ВО ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина» МО РФ, г. Воронеж*

МОДЕЛЬ ПРОТИВОТОЧНОГО ТЕПЛООБМЕННИКА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В противоточных теплообменниках (например, типа «труба в трубе», кожухотрубчатых) записывают модели с распределенными параметрами [1] в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Однако интегрирование таких уравнений представляет определенные трудности. В случае если

$$\Delta t_{\delta} / \Delta t_{\mu} < 2,$$

где Δt_{δ} и Δt_{μ} – соответственно большая и меньшая разности температур теплоносителей на входе и на выходе из теплообменника, то возможно ис-

пользование модели с сосредоточенными параметрами. Это означает, что для практических целей можно производить линейризацию кривых изменения температур рабочих сред. При этом изменение температуры по длине аппарата представим линейным законом, а среднюю температуру первичного и вторичного теплоносителей определим как среднюю арифметическую величину

$$\bar{t}_1 = (t_1^\circ + t_1^\infty) / 2;$$

$$\bar{t}_2 = (t_2^\circ + t_2^\infty) / 2.$$

Тогда средняя разность температур (движущая сила теплообмена) выразится равенством

$$\Delta t = (\bar{t}_1 - \bar{t}_2).$$

В результате такой линейризации кривых изменения температур по длине аппарата параметры $t_1, t_2, t_{ст}, \Delta t$ будут изменяться только во времени (координата длины исключается), и математическая модель может быть записана в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим противоточный теплообменник (рисунок 1)

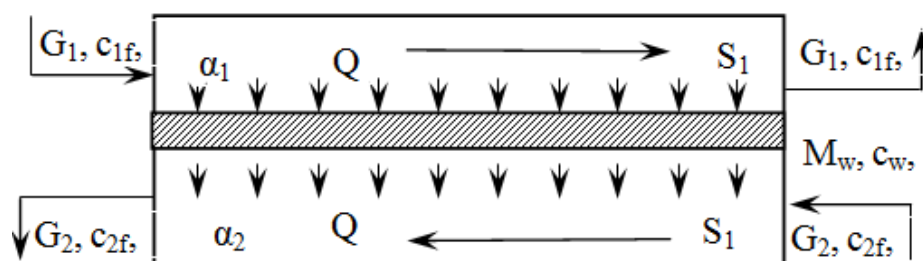


Рис. 1 – Расчетная схема противоточного теплообменника

Уравнение теплового баланса для теплоносителей имеют вид:

$$dQ_1 = G_1 c_{1f} (t_1^\circ - t_1^\infty) dt ; \quad (1)$$

$$dQ_2 = G_2 c_{2f} (t_2^\infty - t_2^\circ) dt . \quad (2)$$

Уравнение теплоотдачи:

$$dQ_1 = \alpha_1 S_1 (\bar{t}_1 - \bar{t}_w) dt ; \quad (3)$$

$$dQ_2 = \alpha_2 S_2 (\bar{t}_w - \bar{t}_2) dt . \quad (4)$$

Уравнение переходного режима (динамическая характеристика):

$$dQ_1 - dQ_2 = M_w c_w dt_w . \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что при теплообмене в неустановившемся потоке, когда $dQ_1 \neq dQ_2$, часть тепла аккумулируется стенкой в любой момент времени переходного режима.

Таким образом, исходная математическая модель имеет вид:

$$\frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} = \alpha_1 S_1 \left[\frac{t_1^\circ + t_1^\infty(\tau)}{2} - t_w(\tau) \right]; \quad (6)$$

$$\frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} = \alpha_2 S_2 \left[t_w(\tau) - \frac{t_2^\circ + t_2^\infty(\tau)}{2} \right]; \quad (7)$$

$$\frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} = G_1 c_{1f} [t_1^\circ - t_1^\infty(\tau)]; \quad (8)$$

$$\frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} = G_2 c_{2f} [t_2^\infty(\tau) - t_2^\circ]; \quad (9)$$

$$\frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} - \frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} = M_w c_w \frac{dt_w(\tau)}{d\tau}(\tau); \quad (10)$$

$$t_1^\infty(0) = t_1^\circ; \quad (11)$$

$$t_2^\infty(0) = t_2^\circ; \quad (12)$$

$$t_w(0) = t_w^\circ, \quad (13)$$

где α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи со стороны 1-го и 2-го теплоносителей; S_1, S_2 – площади теплопередачи со стороны 1-го и 2-го теплоносителей; G_1, G_2 – массовые расходы 1-го и 2-го теплоносителей; C_{1f}, C_{2f} – массовые теплоемкости 1-го и 2-го теплоносителей; M_w, c_w – масса и теплоемкость теплопередающей поверхности; t_1°, t_2° – начальные температуры 1-го и 2-го теплоносителей; $t_1^\infty(\tau), t_2^\infty(\tau)$ – текущие температуры 1-го и 2-го теплоносителей на выходе из теплообменника; $t_w(\tau)$ – текущая температура теплопередающей стенки; τ – время.

Запишем систему уравнений (6) – (13) в безразмерном виде:

$$\frac{dq_1(\theta)}{d\theta} = Nu_1 \left[\frac{1}{2} T_1^\infty(\theta) - T_w(\theta) + \frac{1}{2} \right]; \quad (14)$$

$$\frac{dq_2(\theta)}{d\theta} = ANu_2 \left[T_w(\theta) - \frac{1}{2} T_2^\infty(\theta) \right]; \quad (15)$$

$$\frac{dq_1(\theta)}{d\theta} = \xi_1 Re_1 Pr_1 [1 - T_1^\infty(\theta)]; \quad (16)$$

$$\frac{dq_2(\theta)}{d\theta} = A\xi_2 Re_2 Pr_2 T_2^\infty(\theta); \quad (17)$$

$$\frac{dq_1(\theta)}{d\theta} - \frac{dq_2(\theta)}{d\theta} = \frac{dT_w(\theta)}{d\theta}; \quad (18)$$

$$T_1^\infty(0) = 1; \quad (19)$$

$$T_2^\infty(0) = 0; \quad (20)$$

$$T_w(0) = T_w^\circ, \quad (21)$$

где $\theta = S_1 \lambda_1 \tau / (M_w c_w d_1)$; $T_{1,2}^\infty(\theta) = t_{1,2}^\infty(\tau) - t_2^\circ / (t_1^\circ - t_2^\circ)$;
 $T_w(\theta) = [t_w(\tau) - t_2] / (t_1^\circ - t_2^\circ)$; $T_w^\circ = (t_w^\circ - t_2^\circ) / (t_1^\circ - t_2^\circ)$; $A = S_2 \lambda_2 d_1 / S_1 \lambda_1 d_2$;
 $\xi_{1,2} = K_s^{(1,2)} / (2\pi l)$; $Nu_{1,2} = \alpha_{1,2} d_{1,2} / \lambda_{1,2}$ – числа Нуссельта;
 $Re_{1,2} = v_{1,2} d_{1,2} / \nu_{1,2}$ – числа Рейнольдса; $Pr_{1,2} = \nu_{1,2} / a_{1,2}$ – числа Прандтля;
 λ_1, λ_2 – теплопроводности теплоносителей; d_1, d_2 – гидравлические диаметры со стороны 1-го и 2-го теплоносителей; $K_s^{(1,2)}$ – коэффициент формы проходных сечений со стороны 1-го и 2-го теплоносителей; $v_{1,2}$ – скорости теплоносителей; $\nu_{1,2}, a_{1,2}$ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности теплоносителей; l – характерный размер теплопередающей поверхности.

Использование модели с сосредоточенными параметрами позволит производить линеаризацию кривых изменения температур рабочих сред в противоточном теплообменнике.

Список литературы

1. Кэйс В.М. Конвективный тепло- и массообмен. М.: Энергия, 1972. 448 с.

УДК 519.71

Жабко Н.А., Жабко И.А., Лепихин Т.А.,
 ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
 г. Санкт-Петербург

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ДВИЖУЩЕГО ОБЪЕКТА С ПРИМЕНЕНИЕМ КВАТЕРНИОНОВ

Рассматривается задача описания математической модели движения подвижного объекта. Известно, что при составлении уравнений движения твердых тел применяются различные способы параметризации. В основном известными являются направляющие косинусы [1], метод углов Эйле-

ра, параметры Родрига – Гамильтона, параметры Кейли – Клейна. Остановимся здесь подробнее на применении именно параметризации Родрига – Гамильтона, представляющие собой компоненты кватернионов [2].

Существенной особенностью кватернионов является их невырожденность [3] при любом положении твердого тела в отличие, например, от углов Эйлера. Эти параметры характеризуют задание положения твердого тела с помощью плоского вращения. Конечное вращение твердого тела всегда оставляет одну ось неподвижной в пространстве. В итоге вектор конечного поворота является инвариантом произвольного перемещения тела. Таким образом, путем определенного выбора оси вращения можно свести поступательное движение в плоскости вращения к нулю. Ось вращения становится центром вращения, и перемещение объекта становится частью винтового движения. Кроме того, с помощью кватернионов удобно записывать уравнения движения подвижного объекта.

Рассмотрим преобразование, представляющее собой три последовательных поворота на углы ϕ, θ, ψ , то угловая скорость каждого вращения направлена по оси поворота и равна $\dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$. Тогда для углов Эйлера имеем следующие зависимости угловой скорости вращения твердого тела:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\psi} \cos \phi + \dot{\theta} \sin \psi \sin \phi, \\ \Omega_2 &= \dot{\psi} \sin \phi - \dot{\theta} \sin \psi \cos \phi, \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_1 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_2 &= -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \phi.\end{aligned}\tag{1}$$

Выражая угловые скорости каждого вращения $\dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \Omega_1 \cos \phi + \Omega_2 \sin \phi, \\ \dot{\theta} &= \Omega_1 \frac{\sin \phi}{\sin \psi} - \Omega_2 \frac{\cos \phi}{\sin \psi},\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \Omega_3 - \Omega_1 \sin \phi \operatorname{ctg} \psi + \Omega_2 \cos \phi \operatorname{ctg} \psi, \\ \dot{\psi} &= \omega_1 \cos \theta - \omega_2 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega_3 - \omega_1 \sin \theta \operatorname{ctg} \psi - \omega_2 \cos \theta \operatorname{ctg} \psi, \\ \dot{\phi} &= \omega_1 \frac{\sin \theta}{\sin \psi} + \omega_2 \frac{\cos \theta}{\sin \psi}.\end{aligned}\tag{3}$$

Очевидно, что полученные уравнения (2), (3) вырождаются при $\psi = \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

В кватернионах аналогичное уравнение имеет вид:

$$\omega = 2(q_0\dot{q}_0 + q_0\dot{q} - \dot{q}_0q + q \cdot \dot{q} - q \times \dot{q}) \quad (4)$$

При этом, исходя из формы представления кватернионов [2], можно записать в следующем виде:

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad q = \xi \sin \frac{\theta}{2}, \quad \dot{q}_0 = -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \dot{q} = \dot{\xi} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{\dot{\theta}}{2} \xi \cos \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Тогда выражение для угловой скорости принимает вид (6):

$$\omega = \dot{\theta}\xi + \dot{\xi} \sin \theta + \dot{\xi} \times \xi (1 - \cos \theta). \quad (6)$$

Решая уравнение (6) относительно производных с учетом выражений для компонентов кватернионов [2], получаем выражение:

$$-\dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2} + \dot{\theta}\xi \cos \frac{\theta}{2} + 2\dot{\xi} \sin \frac{\theta}{2} = \omega \cos \frac{\theta}{2} - \omega \cdot \xi \sin \frac{\theta}{2} + \xi \times \omega \sin \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

Исключая из равенства (7) скалярную часть, а также, поделив на $\sin \frac{\theta}{2}$, что допустимо, поскольку углы $\theta = 0, 2\pi$ не рассматриваются по понятным причинам, получим окончательное выражение:

$$2\dot{\xi} = \left[\xi \times (\omega \times \xi) \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \xi \times \omega \quad (8)$$

В выражении (8) нет вырождающихся элементов, что свидетельствует о некотором удобстве использования указанной технологии.

Рассмотрим подробнее выражения для кинематических уравнений вращательного движения. Пусть имеется кватернион с компонентами, являющимися параметрами Родрига – Гамильтона в следующем виде: $Q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \xi \sin \frac{\theta}{2} \right)$, где θ, ξ являются углом и осью вращения соответственно.

Предположим, что задано линейное ортогональное преобразование вектора x в вектор x' при помощи матрицы Q :

$$x' = Qx$$

Тогда единичный кватернион Q , определяющий операцию вращения вектора x к вектору x' может быть представлен в следующей форме:

$$x' = Q \circ x \circ Q^{-1}$$

В этом случае справедливо выражение:

$$Q = \begin{pmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{pmatrix}$$

Пусть заданы углы Эйлера (ϕ, ψ, θ) , соответствующие трем последовательным поворотам относительно координатных осей. Тогда справедлива следующая связь компонент кватерниона, задающего вращение, с углами Эйлера:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\phi+\theta}{2}, \\
q_1 &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\phi-\theta}{2}, \\
q_2 &= \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\phi-\theta}{2}, \\
q_3 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\phi+\theta}{2}.
\end{aligned}
\tag{9}$$

Кроме того необходимо привести кинематические уравнения связей вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, выраженным в подвижной системе координат с кватернионом, характеризующим угловое положение тела:

$$\begin{aligned}
2\dot{q}_0 &= -\omega_1 q_1 - \omega_2 q_2 - \omega_3 q_3, \\
2\dot{q}_1 &= \omega_1 q_0 + \omega_3 q_2 - \omega_2 q_3, \\
2\dot{q}_2 &= \omega_2 q_0 + \omega_1 q_3 - \omega_3 q_1, \\
2\dot{q}_3 &= \omega_3 q_0 + \omega_2 q_1 - \omega_1 q_2
\end{aligned}
\tag{10}$$

Таким образом, математическая модель произвольного летательного аппарата может быть описана системой уравнений (9), (10). При применении к конкретным типам подвижных объектов, необходимо учитывать дополнительные параметры и силы, воздействующие на динамику исследуемых объектов. В частности, при моделировании летательных аппаратов необходимо учитывать моменты инерции, возникающие по причине силы тяги, а также гироскопические моменты.

Список литературы

1. Бабаджанянц Л.К., Пупышев Ю.А., Пупышева Ю.Ю. Классическая механика. Учебное пособие. Изд. 2-е, исправленное и дополненное. СПб: 2013, 259 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Наука, М. 1973, 320 с.
3. Ang M.H., Tourassis V.D. Singularities of Euler and roll-pitch-yaw representations. //Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on. 1987, No 3, pp. 317-324.

УДК 664.1.037

Зайцева М.А., Арапов Д.В.,

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет
инженерных технологий», г. Воронеж*

НЕЙРОСЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ СУХИХ ВЕЩЕСТВ В САХАРНЫХ РАСТВОРАХ

Сахар используется и как готовый продукт для населения, и как сырье для пищевой промышленности. Изготавливается сахар-песок путем изоба-

рической испарительной и политермической кристаллизации с последующим центрифугированием утфеля и отделением сахарных кристаллов от раствора. Изобарическая испарительная кристаллизация реализуется в вакуум-аппаратах, в основном периодического действия, путем выпаривания воды из чистого или поликомпонентного сахарного раствора при постоянном давлении. Важнейшей задачей в процессе выпаривания является автоматический контроль за концентрацией сухих веществ в растворе и определение момента времени окончания процесса упаривания. До настоящего времени эта задача окончательно не решена. В этой связи работа актуальна, так как посвящена автоматическому контролю концентрации сухих веществ в упариваемом растворе с помощью температурной депрессии, реализованному посредством нейронной сети, где выявляется связь между температурной депрессией и концентрацией сухих веществ. Температурная депрессия определяется автоматически по разности температуры кипения сахарного раствора и чистой воды при одинаковом абсолютном давлении между кипящими жидкостями – чистым или поликомпонентным сахарным раствором и дистиллированной водой. Количественному определению, физическому и химическому обоснованию, математическому описанию температурной депрессии посвящены работы [1-3], где предложены высокоточные формулы для определения температурной депрессии в чистых и поликомпонентных растворах сахарозы, полученные на основе уравнения Антуана по расчету давления паров чистой воды. Однако, попытка использования известных зависимостей для расчета концентрации сухих веществ в поликомпонентных растворах по известной температурной депрессии [1,2] оказалась неудачной в связи с относительно большими погрешностями моделирования (до 5-7% отн.). Поэтому, целью данного исследования является разработка на основе экспериментальных данных нейросетевой модели, способной с высокой точностью прогнозировать концентрацию сухих веществ в чистом и поликомпонентном растворе сахарозы по измеренной температурной депрессии.

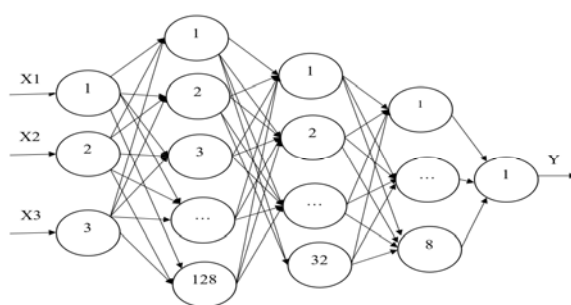


Рис. 1 – Используемая модель многослойного персептрона

Для построения нейросетевой математической модели был выбран пятислойный персептрон (рис. 1), состоящий из входного, трех скрытых сло-

ев и выходного слоя. Входной слой состоит из 3-х нейронов, первый скрытый слой имеет 128 нейронов, второй – 32 нейрона, третий – 8 нейронов, выходной слой состоит из 1-го нейрона. На вход сети подаются значения температуры кипения чистой воды, чистоты сахарного раствора и температурной депрессии. На выходе сети получаем значения концентрации сухих веществ в кипящем сахарном растворе. Обучение сети заняло примерно 4 часа, средняя относительная ошибка моделирования равна 0,17%. При обучении сети каждый параметр X_1 , X_2 , X_3 подается на вход персептрона, обрабатывается в четырех внутренних слоях его структуры, затем рассчитывается выходной сигнал сети Y , который сравнивается с соответствующим значением целевого вектора, представляющего собой требуемое значение концентрации сухих веществ. Далее рассчитывается ошибка моделирования и реализуется изменение весовых коэффициентов связей внутри персептрона. Векторы обучающего множества предъявляются последовательно, вычисляются ошибки моделирования и реализуется подстройка весов связей для каждого вектора. Процесс обучения идет до тех пор, пока ошибка по всему обучающему массиву не достигнет требуемого значения. Обучение нейронной сети осуществляли с применением алгоритма ADAM на основе 964 экспериментальных данных.

На рисунке 2 показано рабочее окно программы «Расчет концентрации сухих веществ в сахарном растворе».

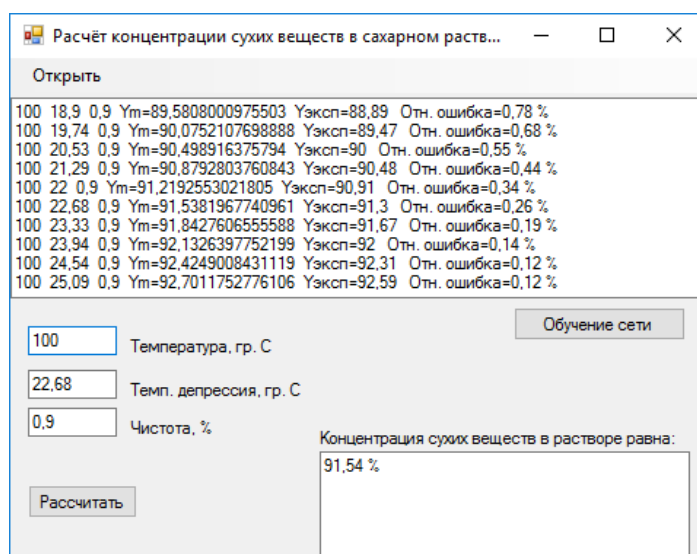


Рис. 2 – Рабочее окно программы

Таким образом, разработано программное обеспечение (ПО), которое позволяет определить концентрацию сухих веществ в зависимости от температуры промышленного сахарного раствора, его чистоты и температурной депрессии. Данное ПО может быть использовано в сахарной промышленности при уваривании сахарного уфеля в вакуум-аппаратах. Для вне-

дрения в промышленное производство необходимо организовать автоматическое измерение температурной депрессии, температуры раствора и его чистоты. После адаптации модели к промышленному производству, она может быть использована для прогнозирования содержания сухих веществ в упариваемом утфеле в вакуум-аппаратах.

Список литературы

1. Арапов, Д.В. Проблемно-ориентированные системы управления базовыми производствами в пищевой и химической индустрии; 05.13.06. Автореферат ... дисс. д-ра тех. наук (05.13.06) –Воронеж, 2019.-40 с.
2. Петров, С.М. Уравнения для расчета на ЭВМ физико-химических свойств водных растворов сахарозы/ С.М. Петров, Д.В. Арапов, В.А. Курицын // Сахар. – 2014. – №4. – С.44-53.
3. Арапов Д.В. Вероятностное моделирование удельной массовой скорости роста сахарных кристаллов / Д.В. Арапов, В.А. Курицын, С.М. Петров, Н.М. Подгорнова, М.А. Зайцева // Техника и технология пищевых производств. – 2021. – Т. 51. – № 1. – С. 39-52.

УДК 517.958; 519.771

Зубова С.П., Раецкая Е.В.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф.Морозова», г. Воронеж

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассматривается динамическая система

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B \frac{\partial x}{\partial s} + Cx(t, s) + Du(t, s), \quad (1)$$

где $x(t, s) \in R^n$, $u(t, s) \in R^m$; B, C, D – матрицы соответствующих размеров, D – необратимая матрица; $t \in [0, T]$, $s \in [0, s_0]$.

Система (1) называется полностью управляемой, если существует управление $u(t, s)$, под воздействием которого состояние $x(t, s)$ системы переводится за произвольно заданное время T из любого начального состояния $\alpha(s)$ в любое заданное конечное состояние $\beta(s)$ [1]. Задача управления состоит в построении $u(t, s)$ такого, что решение $x(t, s)$ системы (1) с этим $u(t, s)$ обладает свойством

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad x(T, s) = \beta(s). \quad (2)$$

Доказывается

Теорема. Если $\text{rank}(DBD) = n$, то система (1) полностью управляемая.

Для доказательства соответствующие $u(t, s)$ и $x(t, s)$ строятся следующим образом. Используется свойство отображения D :

$$R^m = \text{Coim } D \oplus \text{Ker } D, \quad R^n = \text{Im } D \oplus \text{Coker } D, \quad (3)$$

где $\text{Ker } D$ – ядро D , $\text{Im } D$ – образ, $\text{Coker } D$ – дефектное подпространство, $\text{Coim } D$ – прямое дополнение к $\text{Ker } D$ в R^m . Через P и Q обозначаются проекторы на $\text{Ker } D$ и $\text{Coker } D$ соответственно, отвечающие разложению (3). Через D^- обозначено полуобратное к D отображение: $D^- = \tilde{D}^{-1}(I - Q)$, где $\tilde{D} = D|_{\text{Coim } D}$, I – тождественное отображение в соответствующем пространстве. В силу свойства (3) уравнение (1) эквивалентно системе

$$\frac{\partial Qx}{\partial t} = QB \frac{\partial x}{\partial s} + QCx(t, s), \quad (4)$$

$$u(t, s) = D^- \left(\frac{\partial x}{\partial t} - B \frac{\partial x}{\partial s} - Cx(t, s) \right) + z(t, s), \quad \forall z(t, s) \in \text{Ker } D. \quad (5)$$

С помощью обозначений $Qx = x_1$, $(I - Q)x = y$, $QBQ = B_1$, $QD(I - Q) = D_1$, $QCQ = C_1$,

$QC(I - Q) = C_1^1$ уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = B_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + C_1 x_1(t, s) + D_1 \frac{\partial y}{\partial s} + C_1^1 y(t, s). \quad (6)$$

Известно [2,3], что условие $\text{rank}(DBD) = n$ эквивалентно сюръективности D_1 , то есть $\text{Coker } D_1 = \{0\}$, тогда из (6) следует:

$$\frac{\partial y}{\partial s} + D_1^- y(t, s) = D_1^- \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} - B_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} - C_1 x_1(t, s) \right) + z_1(t, s), \quad \forall z_1(t, s) \in \text{Ker } D_1. \quad (7)$$

$$x_1(0, s) = Q\alpha(s), \quad x_1(T, s) = Q\beta(s), \quad \left. \frac{\partial x_1}{\partial t} \right|_{t=0} = QB \frac{\partial \alpha}{\partial s} + QC\alpha(s), \quad \left. \frac{\partial x_1}{\partial t} \right|_{t=T} = QB \frac{\partial \beta}{\partial s} + QC\beta(s),$$

В качестве $x_1(t, s)$ можно взять любую функцию из $\text{Ker } D_1$, удовлетворяющую условиям, полученным из (2) и (4). Решение $y_1(t, s)$ уравнения (7) с фиксированным $x_1(t, s)$ и условиями

$$y(0, s) = (I - Q)\alpha(s), \quad y(T, s) = (I - Q)\beta(s)$$

существует и не единственно. Далее строится $x(t, s) = x_1(t, s) + y(t, s)$ и, наконец, по формуле (5) определяется $u(t, s)$.

Это программное управление, рассчитываемое до начала динамического процесса. При практическом решении задачи управления (1), (2) следует привести динамическую систему к состоянию

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad x(t, 0) = \gamma(t), \quad (8)$$

где $\gamma(t)$ следует получить из построенного $x(t, s)$ при $s = 0$, и затем установить рассчитанное управление $u(t, s)$. В силу единственности решения уравнения (1) с фиксированной вектор-функцией $u(t, s)$ и условиями (8) состояние системы $x(t, s)$ перейдет за время T именно в состояние $\beta(s)$.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968.
2. Zubova S.P, Raetskaya E.V. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Automation and Remote Control. 2017. V. 78(7). Springer New York. P. 1189-1202.
3. Zubova S.P, Raetskaya E.V. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives // Mathematical Methods in the Applied Sciences, AIMS, New York. V. 44. N.15. P. 11998-12009.

УДК 51-72

Иванков О.Е.,

ФИЦ «Единая геофизическая служба» РАН, г. Воронеж
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГЛОБАЛЬНОЙ СЕЙСМИЧНОСТИ ЗЕМЛИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ежегодно на Земле происходит до десяти тысячи землетрясений, которые случаются в основном в шовных зонах (рис. 1). Землетрясения – важная составная часть окружающей нас среды, и ни один район земного шара нельзя считать полностью от них избавленным.

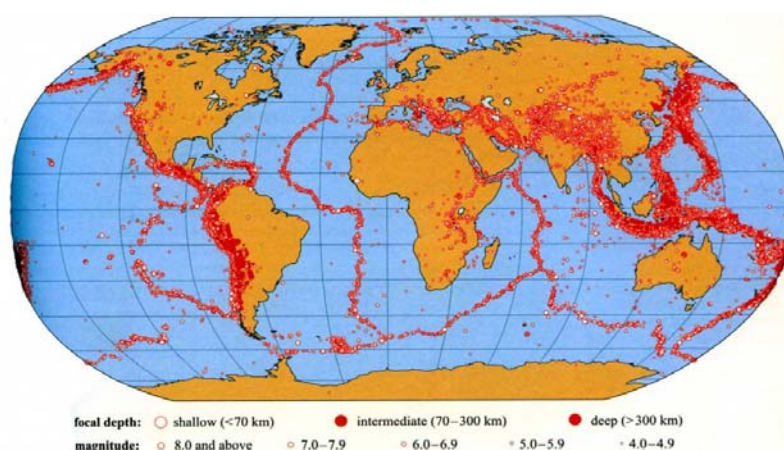


Рис. 1 – Карта сейсмичности Земли

На уровень сейсмической активности оказывают влияние: структурно-геодинамические процессы, процессы, происходящие внутри Земли (физико-химические превращения, изменение структуры химических соединений и др.), изменения скорости вращения Земли, процессы, происходящие в околоземном пространстве (солнечная активность, лунно-солнечные приливы и др.), а также уровень осадков, климат и др.

Всего на планете два больших сейсмических пояса (Тихоокеанский и Средиземноморско-Трансазиатский) и несколько второстепенных, в пределах которых ежегодно происходят несколько тысяч землетрясений. Существующие сети сейсмических станций разных стран регистрируют, как правило, землетрясения с различной степенью разрешающей способности, зависящей от количества станций в сети. В основном уверенная регистрация землетрясений с $M \geq 4.0$.

Воронежской сетью сейсмических станций (Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук» и Воронежского государственного университета) ежегодно регистрируют порядка трёх тысяч землетрясений происходящих в активных поясах Земли. Очаги 90% из них находятся на глубине до 50 километров, и примерно 10% на глубинах больше 50 км.

На рис. 2 представлены записи крупнейших землетрясений, произошедших за последние 10 лет, и зарегистрированных Воронежской сетью сейсмических станций. Первое (рис. 2а), произошло в Японии и имело очень большой сейсмический эффект. Второе (рис. 2б), в Охотском море, имело сейсмический характер на территории Воронежской области 3 балла.

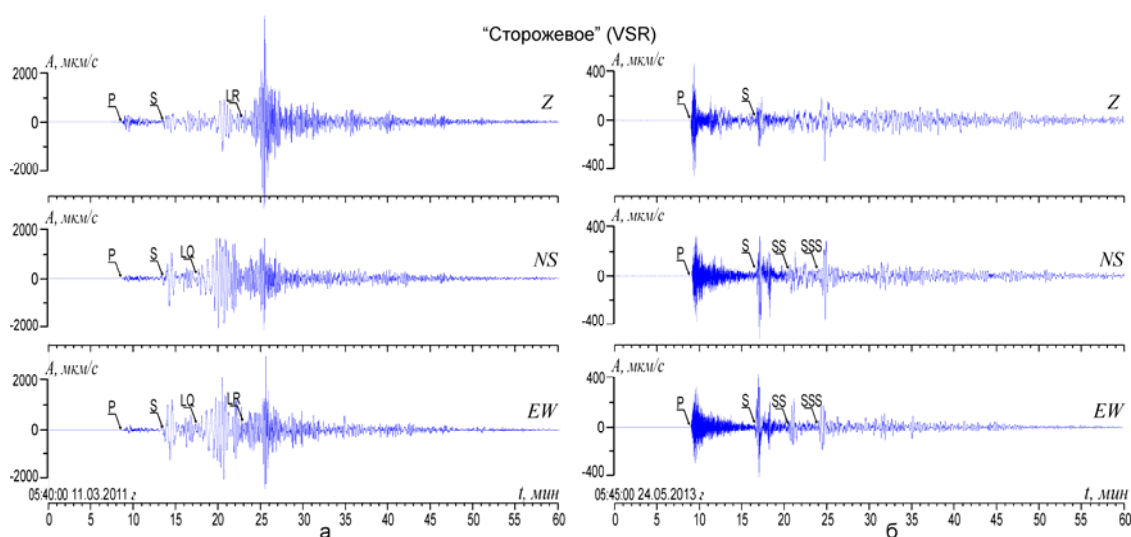


Рис. 2 – Волновая форма удаленного землетрясения зарегистрированного Воронежской сетью сейсмических станций, а – Фукусима – магнитудой 7,3, б – Глубокофокусное (600 км) Охотоморское землетрясение – магнитудой 8,3.

В настоящее время все еще не разработана методика прогноза землетрясений. Исследования в этом направлении продолжаются, выясняются взаимосвязи между процессами, происходящими внутри Земли (землетрясения) и в околоземном пространстве. Получены некоторые результаты, которые в определенных геологических условиях позволяют оценить вероятность. Однако проблема далека от решения, интерес представляет исследование на основе математического моделирования сейсмической активности Земли, выявление периодов активизации сейсмических процессов на разных глубинных уровнях (коровых и глубокофокусных) и их связи с процессами, происходящими в околоземном пространстве.

Список литературы

1. Никонорова О.А. Математическая модель и программный комплекс для определения периодов повышенной сейсмической опасности // АВТОРЕФЕРАТ диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Самара – 2010.

2. Магницкий В.А. Внутреннее строение и физика Земли // Науч. совет Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Изд. Выдающихся ученых», институт физики земли им. О.Ю. Шмидта РАН. – М.: Наука, 2006.

УДК 517.977.56

Иванов А.В., Балабан О.Р.,

ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПОТОКА В СИСТЕМАХ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

При транспортировке вязкой среды по гидросети процесс переноса теплоты наблюдается в виде нагрева (охлаждения) гидросистемы. Это означает что необходимо учитывать неизотермическую составляющую при анализе гидродинамического процесса. Область изменения или область, которая описывает течение жидкости или смеси воздуха с жидкостью интересна на примере труб.

Линеаризованная система Навье-Стокса [1] определяется в сетеподобной области $\Gamma_T = \mathbf{I} \times (0, T)$ $T < \infty$ соотношениями вида:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \nu \Delta Y + \nabla p = f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} Y = 0, \quad (2)$$

Будем считать, что состояние системы (1)-(2) описывается функцией $\bar{Y}(x, t)$, являющейся слабым решением уравнения (1) в области $\Gamma_{t_0, \infty}$ с начальным и краевым условиями:

$$Y|_{t=t_0} = \bar{Y}_0(x), x \in \mathfrak{S}, Y|_{x=\partial\mathfrak{S}_{t_0, \infty}} = 0, \quad (3)$$

функция $Y(x, t) \in V^{1,0}(a, \mathfrak{S}_{t_0, \infty})$ является слабым решением системы (1)-(2) в области $\mathfrak{S}_{t_0, \infty}$ с начальным и краевым условиями:

$$y|_{t=t_0} = Y_0(x), x \in \mathfrak{S}, y|_{x=\partial\mathfrak{S}_{t_0, \infty}} = 0. \quad (4)$$

Состояние $\bar{Y}(x, t)$ системы (1)-(2) назовем невозмущенным, а $Y(x, t)$ – возмущенным; состояния $\bar{Y}(x, t)$, $Y(x, t)$ определены в области $\mathfrak{S}_{t_0, \infty}$, удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиями (3), (4).

Невозмущенное состояние $\bar{Y}(x, t)$ системы (1)-(2) называется слабо устойчивым по Ляпунову, если для любых $t_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при $\|Y_0 - \bar{Y}_0\|_{L_2(\mathfrak{S})} < \delta(t_0, \varepsilon)$ выполняется $\|Y(\cdot, t) - \bar{Y}(\cdot, t)\|_{W^1(a, \mathfrak{S})} < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $Y(x, t)$ – возмущенное состояние системы (1)-(2) [2, 3].

Аналогично определению устойчивости невозмущенного состояния системы (1)-(2) можно ввести определение равномерной, асимптотической и экспоненциальной устойчивости невозмущенного состояния системы (1)-(2) в области $\mathfrak{S}_{t_0, \infty}$.

В силу линейности системы (1)-(2) можно все определения переформулировать для нулевого (тривиального) состояния системы (1)-(2).

При установленных выше предположениях невозмущенное состояние системы (1)-(2) в области $\mathfrak{S}_{t_0, \infty}$ слабо устойчиво.

В силу линейности системы (1)-(2) функция $\theta(x, t) = Y(x, t) - \bar{Y}(x, t)$ является слабым решением начально-краевой задачи для однородной системы (1)-(2), удовлетворяющей начальному и краевому условиям:

$$\theta|_{t=t_0} = \Phi(x), x \in \mathfrak{S}, \theta|_{x=\partial\mathfrak{S}_{t_0, \infty}} = 0, \quad (5)$$

Где $\Phi(x) = Y_0(x) - \bar{Y}_0(x)$.

Рассмотрен линеаризованный аналог классической задачи Навье-Стокса. Был проведен анализ устойчивости программного течения гидравлического потока.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / пер. с фр. Л. Н. Волевича; под ред. О. А. Олейник. М.: Мир, 1972. 587 с.
2. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3–18.
3. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3–14.

УДК 517.977.5

Иванов А.В., Моисеев И.А.,

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург;
«Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича», г. Санкт-Петербург

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕЛЕТА В СЛУЧАЕ ОДНОГО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ КУРСОВОГО УГЛА

В предлагаемой статье рассматривается задача быстродействия для объекта, движение которого описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Часто ее формулируют как дифференциальную игру преследования «шофер-убийца» [1-8]. Позднее, для решения задач подобных рассматриваемой, стали использовать методы теории оптимального управления [9-12].

Далее будем рассматривать траектории движения, описываемого следующей системой

$$\begin{aligned}x &= V \sin \varphi + W_x, \\y &= V \cos \varphi - W_y, \\ \varphi &= \omega u_1, \\ V &= a u_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Управляемый объект переводится из начальной точки $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ в область $(0, 0, \cos \varphi_T = 1, V_0)$, где T – конечный момент времени. Вектор управления $(u_1(t), u_2(t))^*$ кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая огра-

ничениям $|u_1(t) \leq 1, u_2(t) \leq 1|$. Курсовой угол $\varphi(t)$ и скорость объекта $V(t)$ удовлетворяют ограничениям $|\varphi(t)| \leq 2\pi, V(t) \in [V_0, V_0 + a2\pi/\omega]$, угловая скорость ω , ускорение a и возмущения W_x, W_y – положительные неравные нулю постоянные. Отметим, что в данной постановке задачи, в отличие от рассматриваемых ранее, наложены ограничения не только на курсовой угол, но и на конечное значение скорости. Так как в задаче общее количество точек переключения оптимального управления не определено, то будем рассматривать частный случай, когда существует допустимое и удовлетворяющее необходимому условию оптимальности движение с одним переключением курсового угла, причем в точке переключения угла не происходит переключения управления скоростью. В работе [12] для данного случая была сформулирована и доказана теорема.

Теорема. *Теорема. Пусть для движения управляемого объекта, описываемого системой (1), существуют траектории, с одной точкой переключения управления курсовым углом, являющиеся решением поставленной задачи. Тогда эти траектории имеют одну или же три, точки переключения управления скоростью.*

Далее будем использовать следствие данной теоремы. Ниже t_p – момент переключения угла, t_i – моменты переключения скорости.

Следствие. *Для движения управляемого объекта, описываемого системой (1), искомые траектории содержат следующие наборы управлений:*

1. $u_1^0 = +1, t \in [0, t_p], u_1^1 = -1, t \in [t_p, T]$.
 - 1.1. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_p] \cup [t_p, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, T]$.
 - 1.2. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, T]$.
 - 1.3. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T]$.
 - 1.4. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_p] \cup [t_p, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T]$.
2. $u_1^0 = -1, t \in [0, t_p], u_1^1 = +1, t \in [t_p, T]$.
 - 2.1. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_p] \cup [t_p, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, T]$.
 - 2.2. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, T]$.
 - 2.3. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T]$.
 - 2.4. $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_p] \cup [t_p, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T]$.

При дальнейшем рассмотрении возможности существования допустимых траекторий, удовлетворяющих принципу максимума, будем считать, что если $\varphi_0 \in [-2\pi, 0], u_1^0 = +1$ и $\varphi_0 \in [0, 2\pi], u_1^0 = -1$. С учетом этих условий очевидно, что если $u_1^0 = +1$, то угол φ_p может быть как положи-

телен, так и не положителен. Соответственно если $u_1^0 = -1$, то угол φ_p может быть как отрицателен, так и неотрицателен. Таким образом, возможное число траекторий, подлежащих анализу равно шестнадцать. Проверим, так ли это на самом деле. Сначала рассмотрим случаи с одним переключением скорости. Следует заметить, что, так как точка переключения одна и скорости в начальный и конечный момент равны, то $t_1 = T - t_1$ и $t_1 = T/2$. Далее будем пользоваться данным фактом и проинтегрированным на соответствующих интервалах третьим уравнением из (1).

Итак $u_1^0 = +1$. Рассмотрим вариант 1.1: $u_2^0 = +1, t \in [0, t_p] \cup [t_p, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, T]$. В этом случае $\varphi_p > \varphi_1, \varphi_1 \in (\varphi_T, \varphi_p)$. Рассмотрим равенство $2\varphi_p - 2\varphi_1 = \varphi_0 - \varphi_T$. Отметим, что его правая часть в нашем случае всегда положительна. Если $\varphi_p > 0$, то $\varphi_T = 0$ и $\varphi_0 - \varphi_T = \varphi_0 < 0$, т.е. в данном случае движение невозможно. Если $\varphi_p \leq 0$, то $\varphi_T = -2\pi, \varphi_0 + 2\pi > 0$. Движение может иметь место при $\varphi_p \in [-2\pi, 0]$.

Далее рассмотрим вариант 1.2: $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, T]$. В этом случае $\varphi_1 \in (\varphi_0, \varphi_p)$. Искомое равенство имеет вид $2\varphi_p - 2\varphi_1 = \varphi_T - \varphi_0$. Если $\varphi_p > 0, \varphi_T = 0$ то движение возможно. Если же $\varphi_p \leq 0, \varphi_T = -2\pi$, то движения нет. Оно возможно при $\varphi_p \in [0, 2\pi]$.

Теперь разберем варианты $u_1^0 = -1, t \in [0, t_p], u_1^1 = +1, t \in [t_p, T]$. В этом случае $\varphi_0 > 0, \varphi_1 > \varphi_p$. Пусть имеет место вариант 2.1 $u_2^0 = +1, t \in [0, t_p] \cup [t_p, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, T]$. Если $\varphi_p < 0, \varphi_T = 0$. Искомое равенство $2\varphi_p - 2\varphi_1 = \varphi_0 - \varphi_T$. Левая часть равенства отрицательна, правая положительна, т.е. движение не существует. Если $\varphi_p > 0, \varphi_T = 2\pi$, то обе части отрицательны – движение может иметь место при $\varphi_p \in [0, \varphi_0]$.

Для случая 2.2 $u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, T]$, $2\varphi_p - 2\varphi_1 = \varphi_T - \varphi_0$, если $\varphi_p < 0$, то $\varphi_T = 0$, движение возможно. Если $\varphi_p > 0, \varphi_T = 2\pi$ – движения не существует.

Дальнейшая проверка существования искомым траекторий может быть проведена численным методом одномерной минимизации функции $f(\varphi_p) = [x(T)]^2 + [y(T)]^2$ на соответствующем интервале. Если найденный минимум равен нулю, то движение существует. Функция является суммой квадратов значений координат объекта X, Y в конечный момент времени.

Список литературы

1. Isaacs R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica. 1951. P. 1-14.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 384 с.
3. Reeds J.A., Shepp L.A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards// Pacific J. Math. 1990. Vol. 145, № 2. P. 367–393.
4. Пацко В.С., Турова В.Л. Игра "шофер-убийца" и ее модификации. Вестник Удмуртского университета. Вып. 2. Ижевск 2008.С. 105–110.
5. Пацко В.С., Турова В.Л. Игра шофер-убийца: история и современные исследования. Научные доклады / Рос. акад. наук, Урал. отд-ние, Ин-т математики и механики. УрО РАН, Екатеринбург. 2009. 43 с.
6. Двуреченский П.Е. Алгоритмы построения эpsilon-оптимальных стратегий в нелинейных дифференциальных играх на плоскости. Автореферат кандидатской диссертации, МФТИ (государственный университет), Долгопрудный 2013, 24 с.
7. Patsko V.S., Turova V.L. Numerical study of the homicidal chauffeur differential game with the reinforced pursuer // Game Theory and Applications. Vol. 12. N.Y.: Nova Science Publishers. 2007. P. 123–152.
8. Кулешов А.В. Некоторые способы численного решения дифференциальной игры «шофер-убийца». Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 73.
9. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в среде с сопротивлением. Автореферат кандидатской диссертации, Свердловск 1978 (УНЦ АН СССР). 18 с.
10. Моисеев И.А. Исследование свойств оптимального по быстродействию управления нелинейной системы специального вида. Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII международной конференции. Воронеж, 2015. С. 248–251.
11. Гриднев Л.В., Моисеев И.А. Частный случай синтеза траекторий нелинейной системы четвертого порядка, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Процессы управления и устойчивость. Том 3(19). № 1. Труды XLVII международной научной конференции аспирантов и студентов / науч. ред. тома Н.В. Смирнов. СПб.: Издат. Дом Федоровой Г. В., 2016. С. 85–89.
12. Иванов А.В., Моисеев И.А. Частный случай синтеза оптимального управления в задаче перелета. Процессы управления и устойчивость. Том 8(24). № 1. Труды LI международной научной конференции аспирантов и студентов / науч. ред. тома Н. В. Смирнов. СПб.: Издат. Дом Федоровой Г.В., 2021. С. 66–72.

Канищева О.И., Служенко И.Н.,
ВУНЦ ВВС «ВВА имени проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
г. Воронеж

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ МЕТОДОМ САМОЙЛЕНКО-ПЕРОВА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x} = f(t, x(t), \omega(t)), \quad (1)$$

$$\omega(t) = \mathbf{L}[\omega_0, G_l, G_r]x(t), \quad (2)$$

где $t, x(t) \in \mathbb{R}$, \mathbf{L} – оператор обобщенного люфта [1], с направляющими функциями $\omega = G_l(x)$ и $\omega = G_r(x)$. Функции $G_l(x)$ и $G_r(x)$, удовлетворяют условию Липшица с параметром λ и связаны неравенством $G_l(x) \geq G_r(x)$. Функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных и является периодической по переменной t с периодом T ($T \in \mathbb{R}$, $T > 0$):

$$\forall t, x(t) \in \mathbb{R} : f(t, x, \omega) = f(t + T, x, \omega). \quad (3)$$

Найдем T -периодические решения системы (1)-(3), т.е. функции $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые являются решениями рассматриваемой системы (1), (2) и удовлетворяющие условию

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(t) = x(t + T).$$

Пусть известно i -е приближение, которое является решением системы (1)-(3), $x_i(t) = u_i(t) + c_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и T -периодической функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_0^T f(s, x_i(s), \omega_i(s)) ds = 0, \quad \omega_i(t) = \mathbf{L}[\omega_0, G_l, G_r]x_i(t).$$

Приведем описание процесса построения $(i+1)$ -го приближения. Найдем $(i+1)$ -е приближение в следующем виде

$$x_{i+1}(t) = u_{i+1}(t) + c_{i+1}. \quad (4)$$

Функцию $u_{i+1}(t)$ будем искать как периодическое решение дифференциального уравнения

$$\dot{u}(t) = f(t, x_i(t), \omega_i(t)), \quad (5)$$

с нулевым средним значением [2,3]. Это решение существует и может быть записано в виде

$$u_{i+1}(t) = \int_0^T G(t-s) f(s, x_i(s), \omega_i(s)) ds. \quad (6)$$

Для нахождения постоянной c_{i+1} будем рассматривать уравнение

$$\int_0^T f(s, u_{i+1}(s) + c_{i+1}, \omega_{i+1}(s)) ds = 0. \quad (7)$$

Пусть данное уравнение разрешимо и найден один из его корней c_{i+1} . Тогда найдем $(i + 1)$ -е приближение по формуле (4). Заметим, что для таким образом, построенного приближения будет выполняться равенство

$$\int_0^T f(s, x_{i+1}(s), \omega_{i+1}(s)) ds = 0. \quad (8)$$

Спорным моментом является утверждение о существовании корня уравнений (4). Кроме того, желательно работать с однозначными отображениями, и нужно говорить не просто о существовании, а о существовании и единственности корня. Тогда условия применимости метода к поиску периодических решений дифференциального уравнения подразделяются на условия, при которых можно построить последовательность периодических функций по формулам (4)-(8) и на условия сходимости построенной последовательности приближений [4].

Список литературы

1. Красносельский М.А. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.
2. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений // Киев : ВШ, 1976. 180 с.
3. Перов А.И. Об одном методе приближенного нахождения периодических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений // Доклады РАН, 2003. т. 392, № 1. С. 12-16.
4. Семенов М.Е. Метод Самойленко-Перова для построения периодических решений дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Материалы конференции. Воронеж: ВГТА, 2005. С. 205.

УДК 528.8

Каримов С.И.,

*ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

СТРУКТУРНАЯ СТРАТЕГИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДИСТАНЦИОННОГО МОНИТОРИНГА ЗЕМЕЛЬ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Структура городского плана – это взаимное расположение всех архитектурно-планировочных элементов, определяющее формирование города как единого градостроительного элемента.

Потребность в территории для города определяется с учетом расположения и перспективного развития объектов всех видов строительства (городских функций). В зависимости от целей использования городское зонирование может осуществляться по наиболее характерным признакам: местоположению, принадлежности к конкретному пользователю, степени застройки, функциональному назначению и т.д. В зависимости от типа исходных элементов городского плана и характера различают типы использования результатов структурирования: функциональное зонирование; административное зонирование – планировочное зонирование.

Зонирование

Для целей прогнозирования, обеспечивающих рациональную организацию городских территорий, наиболее подходит классификация по функциональному признаку. Функциональное зонирование реализует важнейшие функции жизнедеятельности человека: работу, быт, отдых, движение. Функциональное зонирование призвано решить одну из основных задач градостроительного прогноза - связать функции города с конкретной территорией с ней, определить степень их количественного и качественного взаимного соответствия. Именно на этапе функционального зонирования решается вопрос территориального ресурса города.

Жилой район

Жилая зона предназначена для размещения жилых, общественных зданий и сооружений, в том числе научно-исследовательских институтов и их комплексов, а также отдельных муниципальных и промышленных объектов, не требующих санитарно-защитных зон; для устройства внутригородских коммуникаций, улиц, скверов, парков, скверов, бульваров и других мест общего пользования. К этому типу территории относятся микрорайоны и жилые кварталы, объекты коммунального обслуживания и зеленые насаждения общегородского значения, транспортные зоны и автостоянки.

Производственная площадь

Производственные площади предназначены для размещения промышленных предприятий и связанных с ними объектов, комплексов научно-исследовательских учреждений с их опытными производствами, коммунальных и складских объектов, построек наружного транспорта, загородных и пригородных маршрутов.

Ландшафтно-рекреационная зона

К этому типу территории относятся городские леса, лесопарки, лесозащитные зоны, водоемы, земли сельскохозяйственного назначения и другие земли, которые вместе с парками, садами, скверами и бульварами, расположенными на жилой территории, образуют систему открытых пространств. Вся эта система парков, пляжей и других мест отдыха находится в черте города.

Территории, не входящие в основные зоны, выделяются как прочие (питомники, фермы, кладбища, санузлы, неудобные земли).

Особенности использования территорий

Зонирование территории направлено на обеспечение благоприятной среды для жизни, защиту территорий от неблагоприятного воздействия чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера, предотвращение чрезмерной концентрации населения и производства, загрязнения окружающей природной среды, охрану и использование, в том числе естественное. ландшафты, территории историко-культурных объектов, лесные угодья.

Планировочное зонирование

Планировочное зонирование осуществляется проектными градостроительными институтами при разработке проектов генеральных планов городов и их районов [Yan, Wang, Zhang, 2013]. Такое зонирование необходимо для рационального размещения всех элементов городской застройки, обеспечения наилучших условий проживания населения и формирования выразительного архитектурного облика. При планировке жилой застройки, как правило, выделяют два уровня структурной организации жилого массива: микрорайон и жилой массив.

Заключение

Информация, используемая для целей городского прогнозирования и проектирования, делится на три типа: директивная, основанная на законодательных актах; аналитические, основанные на статистических, плановых, проектных, исследовательских материалах; картографический.

У каждого типа информации есть свое предназначение. Директивная информация обязательна для прогнозирования на любом уровне. Аналитическая информация носит рекомендательный характер, обычно она напрямую не используется, а после дополнительной обработки картографическая информация служит графической основой для чертежей и специальных расчетов.

Список литературы

1. Гришкин В.М., Каримов С.И. Сравнение данных мультиресурсного дистанционного зондирования для вегетационных индексов // *Advanced Information Technologies and Scientific Computing. (PIT 2021)*. 14-с.
2. Гришкин В.М., Каримов С.И. Models and methods of data processing remote sensing / *The American journal of Engineering and technology*. ISSN 2689-0984. Volume 3. 2021.
3. Гришкин В.М., Каримов С.И. Общее описание приема и изучения данных, поступающих через спутник // *Труды III Международной научно-практической конференции, посвященной 90-летию Брянского государственного инженерно-технологического университета «ЦИФРОВОЙ РЕГИОН: ОПЫТ, КОМПЕТЕНЦИИ, ПРОЕКТЫ»* Брянск. 2020. 1044-с.
4. Grishkin V.M., Karimov S.I. Use of satellite imagery and index control to monitor and analyze the agricultural lands of Bukhara region, which is a

УДК 51-77:330.4

Кириченко В.В., Мелякова Е.В.,

*ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Исследования, посвященные вопросам анализа рисков ведения бизнеса, оценки объемов средств на поиск сведений о деятельности конкурентов позволяют получить результаты сразу по двум основным направлениям: выбору оптимальной стратегии поведения; оценка связанных с защитой коммерческих сведений расходов на информационную безопасность. Поскольку базовой детерминантой современного подхода к планированию является выработка решений в условиях асимметрии рыночной информации надо предусмотреть охват дополнительных вариантов стратегий менеджеров для достижения оптимизации прибыли и формирования собственного сегмента потребителей в условиях [1] жесткой конкурентной среды.

Такой анализ в первую очередь востребован в современной России, поскольку причина неопределенности условий принятия управленческих решений не только экономическая, а политическая. Базовыми факторами служат не только условия санкций, но и серьезная конкуренция за товарные ниши, образовавшиеся после ухода западных партнеров. Классическая теория [2] рассматривает неполную информацию построением математической модели и проведением линеаризованных расчетов. Практического смысла в результатах на их основе нет, так как это возможно только в заранее неизвестной окрестности рыночного равновесия. Это, в первую очередь, не позволяет выработать на их базе рекомендации по ведению бизнеса.

В настоящей работе предлагается расширенный вариант матричной игры в котором предусмотрена стратегия выжидания. Это связано с тем, что в России доля партнеров из Юго-Восточной Азии значительно выросла. Поведение данных игроков имеет такой характерный стиль, который позволил, например компаниям из Китая, Южной Кореи занять доминирующее положение во многих сегментах, особенно связанных с наукоемкой продукцией.

Формализация задачи состоит в определении рыночного спроса как функции P [3]. При этом клиринговая цена, в общем случае выражается нелинейной зависимостью $P = P(Q_1, Q_2)$. Далее введем функции затрат

$TC_i(Q_i)$ для предприятия $i = 1, 2$. Ввиду стохастического характера задачи [4] учета асимметрии информации определим λ вероятности. При этом [5] λ_{12} – отражает сведения фирмы 1 о том, что фирма 2 имеет функцию затрат $TC_2^*(Q_2)$, соответственно с вероятностью $1 - \lambda_{12}$ полагает, что конкурент имеет функцию затрат $TC_2^{**}(Q_2)$, причем $TC_2^{**}(Q_2) > TC_2^*(Q_2)$.

Аналогично фирма 2 считает, что на основе имеющейся информации можно предположить с вероятностью λ_{21} , что 1 имеет функцию затрат $TC_1^*(Q_1)$, соответственно с вероятностью $1 - \lambda_{21}$ полагает, что у конкурента функция затрат выражается как $TC_1^{**}(Q_1)$ и также $TC_1^{**}(Q_1) > TC_1^*(Q_1)$. Обозначим Q_{iL} объем производства i – й фирмы при низких (Low) затратах, Q_{ih} объем производства i – й фирмы при высоких (high) затратах. Для прибыли G (gain) имеем:

$$G_{1L} = \lambda_{12} P(Q_{1L}, Q_{2L}) \cdot Q_{1L} + (1 - \lambda_{12}) \cdot P(Q_{1L}, Q_{2h}) \cdot Q_{1L} - TC_1(Q_{1L}) \quad (1)$$

$$G_{2L} = \lambda_{21} P(Q_{1L}, Q_{2L}) \cdot Q_{2L} + (1 - \lambda_{21}) \cdot P(Q_{1h}, Q_{2L}) \cdot Q_{2L} - TC_2(Q_{2L}) \quad (2)$$

Из условия максимальной прибыли, получим решение этой системы уравнений путем приравнивания нулю частных производных:

$$\left(\frac{\partial G_{1L}}{\partial Q_{1L}}, \frac{\partial G_{2L}}{\partial Q_{2L}}, \frac{\partial G_{2h}}{\partial Q_{2h}}, \frac{\partial G_{1h}}{\partial Q_{1h}} \right) = \bar{0}$$

Кроме того проведем проверку отрицательности набора Гессе в точке экстремума. Это напрямую следует из характера убывания функции спроса. В результате получим вектор решения $\bar{Q} = (\bar{Q}_{1L}, \bar{Q}_{2L}, \bar{Q}_{2h}, \bar{Q}_{1h})$ и соответствующие объемы выпусков: $\bar{Q}_1 = \max(\bar{Q}_{1L}, \bar{Q}_{1h})$, $\bar{Q}_2 = \max(\bar{Q}_{2L}, \bar{Q}_{2h})$.

Тогда искомая прибыль производителей рассчитывается [6] по формулам: $\bar{G}_1 = P(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \bar{Q}_1 - TC_1(\bar{Q}_1)$, $\bar{G}_2 = P(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \bar{Q}_2 - TC_2(\bar{Q}_2)$.

Представленные в результате расчета результаты экономически можно представить как ситуацию равновесия по Нэшу. Кроме того определены соответствующие стратегии конкурентов и сегментация рынка. При этом необходимо учитывать [7], что стратегическое взаимодействие реализуется не во всех типах рыночных структур. Такой подход, однако, оправдан и перспективен в современных условиях, поскольку степень глобализации привела к дележу рынка между немногими сетевыми транснациональными игроками.

Список литературы

1. Pilipenko O.V., Borisoglebskaya L.N., Sergeev S.M. Economically Optimal Digital Solutions to Manage Integrated Network Flows // Proceedings

of the 2nd International Scientific conference on New Industrialization: Global, national, regional dimension (SICNI 2018). p. 416-421.

2. Sergeev S.M. Cross-systems method of approach to energy economy higher educational institutions // В сборнике: Economics. Society: Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) Compiling Editor Dr.Sc., Prof. E.Sibirskaya. Yelm, WA, USA, 2015. С. 38-41.

3. Borisoglebskaya L.N., Provotorova E.N., Sergeev S.M. Promotion based on digital interaction algorithm // International Scientific Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering", MIP: Engineering-2019. 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 537 042032.

4. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019". 2019. С. 42025.

5. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М., Лебедева Я.О. Прогнозирование рынка образовательных услуг на базе цифровых технологий // Инновации. 2020. №3 (257) С. 66-70.

6. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М. Кросс-функциональное моделирование процессов взаимодействия коммерческих сетей // Инновации. 2016. № 11 (217). С. 111-116.

7. Borisoglebskaya, L.N., Sergeev, S.M. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university // Journal of Applied Economic Sciences. 2018. Т. 12. № 8. С. 2423-2448.

УДК 681.3.06

Кириченко В.В., Мелякова Е.В.,

*ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

ЦИФРОВЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВЫМ БИЗНЕСОМ

Пандемия COVID-19 стала источником самых масштабных трансформаций в сетевой коммерции.оборот в данном сегменте поделен в сравнимых долях между офлайн и онлайн взаимодействием между поставщиками и потребителями. В мировом бизнесе, завершается этап консолидации [1] предприятий в сетевые структуры. При этом характерной положительной особенностью данного сегмента является тот факт, что россий-

ские торговые сети одними из первых инициируют разработку инноваций, а также внедряют [2] их в повседневную практику. Это позволяет не только поддерживать конкурентное преимущество присутствия на рынке, но и сохранять устойчивость показателей экономической деятельности [3], невзирая на сложный макроэкономический фон. Причин здесь несколько – это с одной стороны наличие необходимого капитала для проведения исследований и закупки новых технологий [4] и оборудования. Также финансовая состоятельность позволяет лоббировать собственные интересы во властных структурах особенно в мегаполисах. Другим преимуществом является наличие развитой инфраструктуры, в том числе информационно-технической [5]. Это резко снижает издержки на тиражирование решений по управлению бизнесом. Сегодня доля коммерческих сетей в общем товарообороте превысила 84%. С другой стороны в масштабах РФ характерно присутствие небольшого числа основных игроков сконцентрировавших основную часть товарооборота. Одновременно наблюдается растущая конкуренция среди сильнейших игроков. Поскольку региональная экспансия торговых сетей в основном завершилась, происходит передел рынка, что видно по уходу части бизнеса ранее влиятельных участников.

Постановка проблемы. Для возможности присутствия на рынке, сетевые коммерческие предприятия вынуждены искать новые стратегии [6] в области менеджмента. Также одновременно следует учитывать воздействие целого ряда неблагоприятных факторов таких, как взаимные санкции с целым рядом ведущих стран мира, регламенты, обусловленные ВТО, политику отечественного импортозамещения.

Направления решения. Решение такой проблемы на современном этапе лежит [7] в значительной степени в освоении современных информационных технологий. Необходимо формализовать в виде математических моделей торговую сеть представив в виде многоуровневой совокупности торговых предприятий, распределительных центров, оптовых баз и складов. Далее необходимо описать информационную надстройку как набор данных о движении логистических потоков перемещения материальных объектов, товаров и грузов, финансовых потоков.

Этапы разработки и внедрения информационных технологий в коммерческих сетях сводятся к трем базовым составляющим.

1. Аппаратное обеспечение, в составе которого кроме набора средств межмашинного (M2M) взаимодействия таких, как машиночитаемая кодировка с использованием Barcode, QRcode (Quick Response code), RFID tags (Radio Frequency Identification), входят системы автоматизации перемещением и обработки товаров (складские роботы, штабелеры, автоматический внутренний транспорт и автоматические сортировочные линии), управляющие серверы, в том числе на облачных платформах и полный набор мобильных средств и сенсоров (геолокация, условия хранения и транспортировки, мобильные рабочие места сотрудников торговых центров и экспедиторов), которое в комплексе создают базовую сеть Hardware.

2. Программные средства, которые позволяют обрабатывать всю информацию как от перечисленных выше аппаратных средств, так и набор экономических показателей деятельности коммерческой сети. Также содержат сведения о плане работы, потребительской активности, а также учитывают деятельность контрагентов, сезонность спроса и требования к отчетности. Полный комплекс такого программного обеспечения в сумме является Software оболочкой принятия решений менеджментом коммерческой сети.

3. Самым трудным этапом на котором базируются программные решения является разработка алгоритмического или экспертно-интеллектуального обеспечения. Именно от качества алгоритмов зависит в первую очередь эффективность работы такой сложной структуры, как коммерческая сеть.

Вывод. Для сохранения возможности присутствия на конкурентном рынке, сетевые коммерческие предприятия должны внедрять современные методы менеджмента, основанные на широком применении цифровых технологий. Для этого необходимо провести целенаправленные исследования как в теоретической области формализации экономических процессов, так и в направлении оснащения торговых подразделений современным оборудованием. Итогом работы над созданием алгоритмического обеспечения является математическая модель с обязательным применением методов поиска оптимальных решений. Критерием оптимальности в структуре управления торговыми сетями служит средневзвешенный функционал учитывающий баланс между издержками и прибыльностью текущей деятельности. При этом конкурентное окружение учитывается в модели, которая опирается на методы исследования стохастических процессов и систем.

Список литературы

1. Pilipenko O.V., Borisoglebskaya L.N., Sergeev S.M. Economically Optimal Digital Solutions to Manage Integrated Network Flows // Proceedings of the 2nd International Scientific conference on New Industrialization: Global, national, regional dimension (SICNI 2018). p. 416-421.

2. Sergeev S.M. Cross-systems method of approach to energy economy higher educational institutions // В сборнике: Economics. Society: Selected Papers of the International Scientific School "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) Compiling Editor Dr.Sc., Prof. E.Sibirskaya. Yelm, WA, USA, 2015. С. 38-41.

3. Borisoglebskaya L.N., Provotorova E. N., Sergeev S. M. Promotion based on digital interaction algorithm//International Scientific Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering", MIP: Engineering-2019. 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 537 042032.

4. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial

networks // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019". 2019. С. 42025.

5. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М., Лебедева Я.О. Прогнозирование рынка образовательных услуг на базе цифровых технологий // Инновации. 2020. №3 (257) С. 66-70.

6. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М. Кросс-функциональное моделирование процессов взаимодействия коммерческих сетей // Инновации. 2016. № 11 (217). С. 111-116.

7. Borisoglebskaya, L.N., Sergeev, S.M. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university // Journal of Applied Economic Sciences. 2018. Т. 12. № 8. С. 2423-2448.

УДК 621.391

Князев А.В., Четвертаков А.Н., Степанов Д.С., Отставнов А.А.,
*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)*

ИНДИКАТОР НАПРЯЖЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННОЙ СЕТИ

Индикаторы сетевого напряжения индивидуального пользования нашли широкое применение в системе линейного контроля и обслуживания промышленного оборудования. Такой прибор просто необходим для обеспечения надежной и безотказной работы бытовой радиоэлектронной аппаратуры, особенно в районах с постоянными колебаниями напряжения сети [1]. Предлагаемый вариант устройства с максимальной индицируемой величиной напряжения 200...400 В может быть легко реализован из доступных радиоэлементов.

Схема индикатора показана на рисунке 1.

Микросхема DD1 работает в своем типовом режиме с шестнадцатью светодиодами, выполняющими роль дискретной шкалы. Напряжение питания для микросхемы формируется цепями прибора непосредственно из напряжения контролируемой сети переменного тока. Напряжение сети ограничивается гасящими резисторами R1 и R3, выпрямляется мостовым выпрямителем на диодах VD1 – VD4 и подается к коллектору транзистора VT1. Напряжение на базе этого транзистора стабилизируется параметрическим стабилизатором на элементах R4, VD5 на уровне 13 В. Для надежной работы формирователя напряжения питания микросхемы транзистор должен иметь допустимое напряжение коллектор – эмиттер не менее 60 В.

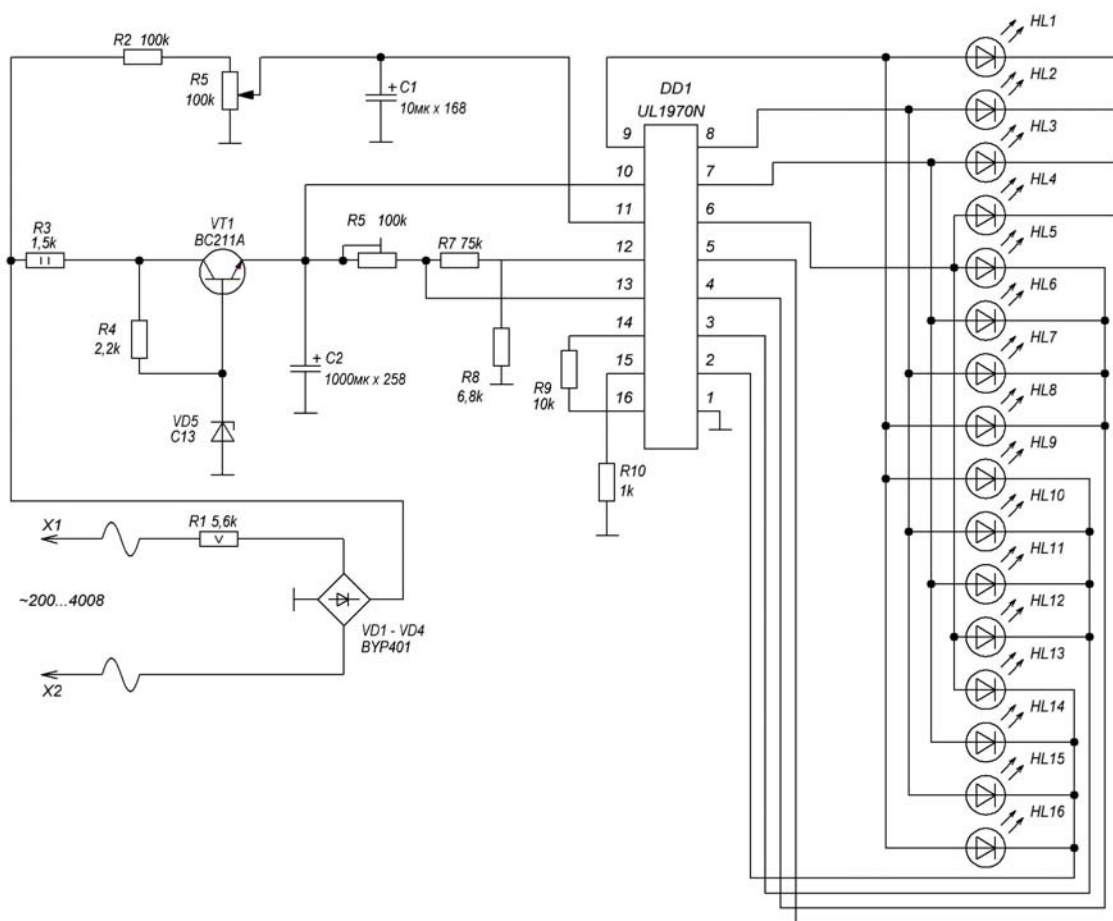


Рис. 1 – Схема индикатора напряжения сети

В цепи эмиттера транзистора VT1 напряжение сглаживается конденсатором C2 и подается к выводу 10 питания микросхемы. Управляющее напряжение микросхемы формируется непосредственно от выпрямительного моста делителем, состоящим из резисторов R2 и R5. При питании устройства от сети переменного тока с указанной на схеме величиной напряжения на выводе 11 микросхемы напряжение не должно превышать +6 В. Скорость перемещения светящейся точки по шкале зависит от емкости конденсатора C1. Яркость свечения светодиодов можно регулировать подбором резистора R10.

Правильно собранное устройство начинает работать сразу. Остается его только откалибровать. При этом питание устройство удобно производить через регулируемый трансформатор или автотрансформатор. Подавая переменное питание 220 В, следует проверить, что на эмиттере транзистора VT1 постоянное напряжение составляет около +13 В. Используемый тип микросхемы удовлетворительно работает в диапазоне питания напряжений 11...18 В, что дает возможность выбора стабилитрона с напряжением стабилизации в указанных пределах. После установки напряжения питания регулированием подстроечного резистора R6 от одного крайнего по-

ложения к другому нужно включить один из светодиодов HL1 – HL3. Это будет свидетельствовать о правильной работе микросхемы.

Резистором R6 установить свечение только светодиода HL1. Регулируемым трансформатором или автотрансформатором повышать напряжение, добиваясь последовательного зажигания светодиодов шкалы. Работа с индикатором может быть более наглядной, если подобрать светодиоды для точек шкалы свыше 220 В с другим цветом свечения.

В некоторых случаях наблюдается повышенный нагрев резисторов R1 и R3. В этом случае необходимо проверить падение напряжения на них и соответствующим выбором сопротивления довести его до необходимого минимума.

Отечественная микросхема, использованная в указанной схеме К1003ПП2. В качестве выпрямительных диодов использованы диоды Д226, Д229Б, Д237Б, КД109Б, КД209Б, при напряжении сети свыше 300 В – МД217, МД218, МД219, КД109В, КД209В. Используемые транзисторы КТ801А, КТ807А или КТ815Г вместо транзистора ВС211А (VT1). Стабилитрон VD5 выбран из следующих: Д814Д, Д815Е, КС213А, КС213Ж, КС515А. Светодиоды или светодиодные сборки – любые с прямым постоянным напряжением не более 3 В. У резисторов R1 и R3 должна быть мощность рассеяния, указанная на схеме, остальные резисторы – 0,25 Вт. Оксидные конденсаторы – любого типа, по габаритам удовлетворяющие требованиям выполняемой конструкции [2].

При работе только от сети 220 В индикатор необходимо эксплуатировать, если шкалу отградуировать так, чтобы номиналу напряжения сети соответствовало свечение светодиода HL3, тогда светодиоды HL1 и HL2 укажут на пониженное значение, а HL4 и до HL16 – на превышение.

Таким образом, использование предложенного индикатора напряжения сети позволит визуально контролировать напряжение питания различных устройств и контрольно-измерительной аппаратуры при их использовании по назначению.

Список литературы

1. Gizegorz M. Wskaznik napiecia sieci // Radioelektronik Audio – HiFi – Video. 1994. №1. S. 26.
2. Нечаев И. Светодиодный индикатор уровня напряжения // Радио. 1994. №6. С. 31.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При решении многих практических задач технического зрения необходимо не только решать задачу анализа объектов на изображениях, но и принимать решение о распознавании объектов. Особенную важность приобретает такая возможность в случаях большого потока видеoinформации, когда человеку затруднительно вести распознавание в силу ограниченных способностей его зрительного аппарата.

В [1] показано, что основой для построения алгоритмов распознавания объектов на изображении может служить канонический вид функции эффективности двумерной дискретной фильтрации.

Для выявления информативных параметров функции эффективности двумерной дискретной фильтрации в общем виде в [1] был проведен анализ, который показал, что на главной диагонали S -матрицы [2], приведенной к каноническому виду, находится функция отношений главных миноров – $\delta(i) = \Delta_i^0 / \Delta_{i-1}^0$.

Рассмотрим значения функции отношений главных миноров $\delta = \delta(i)$ в точках $\delta(2)$ и $\delta(3)$. Так как на главной диагонали S -матрицы находятся единицы [1], следовательно $\delta(1) = \Delta_0^0 = 1$. При этом

$$\delta(2) = \frac{\Delta_2^0}{\Delta_1^0} = \frac{1 - S_{0,-1}^2}{1} = 1 - S_{0,-1}^2, \quad (1)$$

а $\delta(3)$ после несложных математических преобразований примет вид

$$\delta(3) = \frac{\Delta_3^0}{\Delta_2^0} = 1 - \frac{(S_{-1,0} - S_{-1,-1})^2 + 2 \cdot S_{-1,0} \cdot S_{-1,-1} \cdot (1 - S_{0,-1})}{1 - S_{0,-1}^2}. \quad (2)$$

Энергетический спектр связан с автокорреляционной функцией $K(m, n)$ преобразованием Фурье [3]

$$S_{\text{ex}}^3(\phi_x, \phi_y) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_m \sum_n K(m, n) e^{-i(m\phi_x + n\phi_y)}, \quad (3)$$

где m, n – целочисленные переменные, соответствующие номерам пикселей изображения по горизонтали и вертикали соответственно.

После математических преобразований получим

$$S_{k,l} = \frac{I}{E_{\text{ex}}} K(k,l) , \quad (4)$$

т.е. коэффициенты разложения энергетического спектра в двумерный ряд Фурье по косинусам – это нормированные значения функции автокорреляции, совпадающие со значениями коэффициента автокорреляции.

Таким образом, элементами \mathcal{S} -матрицы входного изображения являются коэффициенты автокорреляционной функции входного сигнала. То есть $\delta(2)$ и $\delta(3)$ в (1) и (2) зависят от коэффициентов автокорреляции входного сигнала (изображения) – (4).

Так как $\delta(2)$ зависит от одного коэффициента $S_{0,-1}$ (1), а $\delta(3)$ – от трех коэффициентов $S_{0,-1}$, $S_{-1,0}$ и $S_{-1,-1}$ (2), то целесообразным будет рассмотреть изменение данных коэффициентов в зависимости от размеров элементарных геометрических фигур (объектов).

На рисунке 1 приведены графики изменения значений коэффициентов $S_{0,-1}$, $S_{-1,0}$ и $S_{-1,-1}$ для прямоугольника, в зависимости от их площади в пикселях. При анализе данных графиков было выявлено, что с увеличением площади фигур возрастают значения коэффициентов $S_{0,-1}$, $S_{-1,0}$ и $S_{-1,-1}$, при этом после площади в 10^4 пикселей значения данных коэффициентов увеличиваются незначительно.

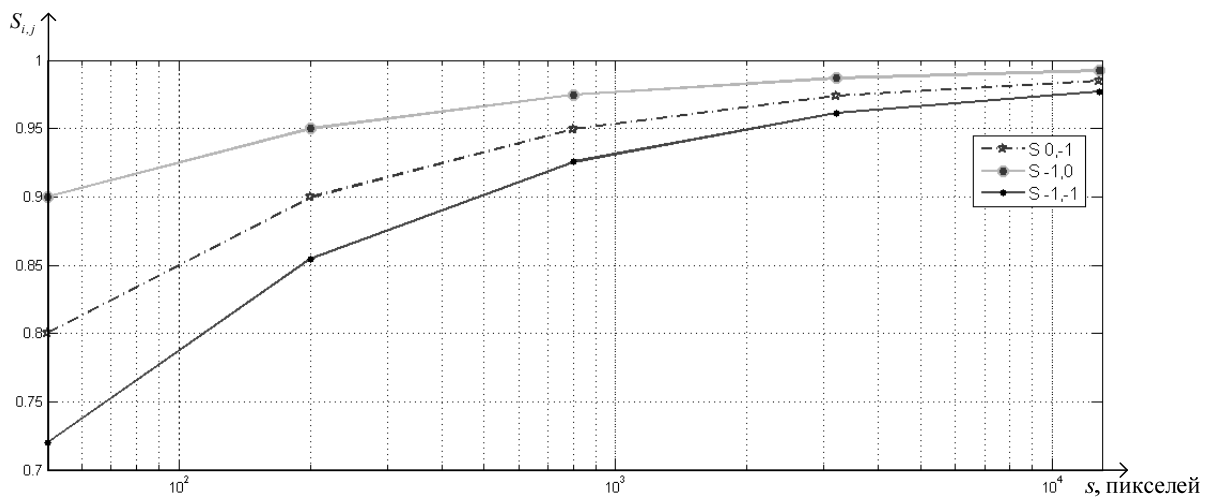


Рис. 1 – Графики изменения значений коэффициентов $S_{0,-1}$, $S_{-1,0}$ и $S_{-1,-1}$ для прямоугольника

Так как практически все объекты на изображениях можно представить в виде простых геометрических фигур, то на основании анализа (сравнения друг с другом) всего лишь трех коэффициентов – $S_{0,-1}$, $S_{-1,0}$ и $S_{-1,-1}$ возможно сделать вывод о геометрической форме объекта.

Таким образом, сравнивая всего лишь три коэффициента S -матрицы ($S_{0,-1}$, $S_{-1,0}$ и $S_{-1,-1}$) можно определить геометрическую форму объекта на изображении и его ориентацию. Также при рассмотрении функции $\delta = \delta(i)$ для различных элементарных геометрических фигур было выявлено, что вид и форма графиков данной функции имеют однозначный характер [1], т.е. не повторяются для других геометрических фигур, а значения $\delta(i)$, зависят только от размеров объекта и его ориентации.

Список литературы

1. Богословский А.В. Каноническая форма функции эффективности двумерной дискретной фильтрации // Радиотехника (Труды Тамбовского ВВАИУРЭ (ВИ), серия: Обработка сигналов и полей). 2009. №1. С. 73-77.
2. Богословский А.В. Эффективность многомерной дискретной фильтрации // Радиотехника. 2008. №4. С.11-16.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: пер с англ. / У. Прэтт; под ред. Д.С. Лебедева. – М.: Мир, 1982. – 781с.

УДК 004.912

Кодиров Э.С.,

*ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

МОДУЛЬ OWLREADY2 ДЛЯ ОНТОЛОГИИ КАК ВАЖНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ В PYTHON

Owlready2 - это модуль для программирования, ориентированного на онтологию, на Python 3. Он может управлять онтологиями и графами знаний и включает в себя оптимизированное хранилище квадроциклов RDF / OWL. Owlready был создан Жан-Батистом Лами в исследовательской лаборатории LIMICS. Он может загружать онтологии OWL 2.0 как объекты Python, изменять их, сохранять и выполнять рассуждения через Hermit (в комплекте). Owlready2 обеспечивает прозрачный доступ к онтологиям OWL (в отличие от обычного API на основе Java).[1]

Owlready2 поддерживает quadstore RDF в оптимизированной базе данных (SQLite3), либо в памяти, либо на диске (см. Мирь). Он обеспечивает высокоуровневый доступ к классам и объектам онтологии (также известный как онтологически ориентированное программирование) [2]. Классы и Individuals загружаются динамически из quadstore по мере необходимости, кэшируются в памяти и уничтожаются, когда больше не нужны. Owlready2 может:

1. Импорт онтологий в формате RDF / XML, OWL / XML или NTriples.

2. Управляет классами онтологии, экземплярами и аннотациями, как если бы они были объектами Python.

3. Добавить методы Python в классы онтологий.

Что можно сделать с Owlready? Чтобы загрузить онтологию из локального репозитория или из интернета:

```
>>>fromowlready2import *
>>>onto_path.append("/path/to/your/local/ontology/repository")
>>>onto =
get_ontology("http://www.lesfleursdunormal.fr/static/_downloads/pizza_onto.owl")
>>>onto.load()
```

Создание новых классов в онтологии, возможно смешивание конструкций OWL и методов Python:

```
>>>classNonVegetarianPizza(onto.Pizza):equivalent_to=[onto.Pizza&(onto.has_topping.some(onto.MeatTopping)|onto.has_topping.some(onto.FishTopping))]
defeat(self):print("Beurk! I'm vegetarian!")
```

Новую пустую онтологию можно получить с помощью функции `get_ontology()`; он принимает единственный параметр - IRI онтологии. IRI - это своего рода URL-адрес; [3] IRI используются в качестве идентификатора онтологий.

Если онтология уже была создана для того же IRI, она будет возвращена. Некоторые онтологии используют символ # в IRI, чтобы отделить имя онтологии от имени сущностей, в то время как другие используют /. По умолчанию Owlready2 использует #, если вы хотите использовать /, IRI должен заканчиваться на /[4]. Примеры:

```
>>> onto = get_ontology ("http://test.org/onto.owl") # =>
http://test.org/onto.owl#entity
>>> onto = get_ontology ("http://test.org/onto") # =>
http://test.org/onto#entity
>>> onto = get_ontology ("http://test.org/onto/") #
=>http://test.org/onto/entity
```

Онтология имеет следующие атрибуты:

`.base_iri`: базовый IRI для онтологии

`.imported_ontologies`: список импортированных онтологий (см. ниже) и следующие методы:

`.classes()`: возвращает генератор для классов, определенных в онтологии (см. «Классы и индивиды (экземпляры)»).

`.individuals()`: возвращает генератор для индивидов (или экземпляров), определенных в онтологии (см. Классы и индивиды (экземпляры))

`.object_properties()`: возвращает генератор для ObjectProperties, определенных в онтологии (см. Свойства)

.data_properties (): возвращает генератор для свойств данных, определенных в онтологии (см. Свойства)

Многие методы возвращают генератор. Генераторы позволяют перебирать значения без создания списка, что может улучшить производительность. Однако они часто не очень удобны при изучении онтологии:

```
>>>on.classes ()
```

```
<объект-генератор _GraphManager.classes в 0x7f854a677728>
```

Owllready предоставляет следующие операторы между классами (обычные классы, но также конструкции и ограничения классов):

‘&’: Оператор И (пересечение). Например: Class1 &Class2. Также можно написать: And ([Class1, Class2])

‘|’: Или оператор (объединение). Например: Class1 | Класс2. Также можно написать: Или ([Class1, Class2])

Not (): оператор Not (отрицание или дополнение). Например: Not (Class1)

Классы, используемые с логическими операторами, могут быть обычными классами (унаследованными от Thing), ограничениями или другими логическими операторами.

Пересечения, объединения и дополнения могут быть изменены на месте с помощью атрибутов.Classes (пересечения и объединения) или Class (дополнение).

Одна из конструкций

В онтологиях оператор «One Of» используется для определения класса по расширению, то есть путем перечисления его экземпляров, а не путем определения его свойств.

Связывание модуля Python с онтологией OWL

Можно связать модуль Python с онтологией OWL. Когда Owllready2 загружает онтологию, он автоматически импортирует модуль Python. Это делается с помощью аннотации «python_module», которая должна быть установлена в самой онтологии.

Список литературы

1. Gruber TR. Toward principles for the design of ontologies used for knowledge sharing. Int J Hum-Comput Stud. 1995; 43(5-6). doi:[10.1006/ijhc.1995.1081](https://doi.org/10.1006/ijhc.1995.1081).

2. Гуарино Н. Формальная онтология и информационные системы. В кн.: Материалы 1-й Международной конференции по формальным онтологиям в информационных системах. Амстердам: IOS Press: 1998. Стр. 3-15.

3. Хоррокс И. Синтаксис и семантика плоского формата файла ОВО и сопоставление с языком веб-онтологии OWL. Технический отчет. Манчестерский университет: 2007. <http://www.cs.man.ac.uk/~хоррокс/-обо/>. Дата обращения 12 октября 2017 года.

4. Хорридж М., Беххофер С. Arijowl: Arijava для онтологий owl. Веб-сайт Semant. 2011; 2(1):11-21.

ИМПУЛЬСНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В настоящее время дифференциальные, функционально-дифференциальные и операторные уравнения и включения с каузальными операторами находят широкое применение в различных прикладных задачах. Понятие каузального (или вольтеррового по А.Н. Тихонову [1]) оператора возникло в тридцатые годы прошлого века. Вопросы существования решений уравнений и включений с каузальными операторами различных типов, свойства этих решений изучались многими авторами (см., например, [2-6] и др. Изучению дифференциальных уравнений и включений с импульсными воздействиями на решение посвящены работы [7-11]).

Пусть E – сепарабельное банахово пространство. Зафиксируем $T > 0$, для заданных точек $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < T$ и $h > 0$ будем обозначать через $PC([-h, T]; E)$ пространство кусочно-непрерывных функций $y: [-h, T] \rightarrow E$, которые непрерывны при $t \in [-h, T] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, непрерывны слева при $t = t_k$, $k = 1, \dots, m$ и имеют конечный правый предел $y(t_k^+)$, $k = 1, \dots, m$. Оно будет являться банаховым с нормой равномерной сходимости $\|y\|_{PC} := \sup_{-h \leq t \leq T} \|y\|_E$. Точно также определим пространство $PC([0, T]; E)$.

Рассмотрим вопрос существования решения полулинейного функционально-дифференциального включения

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y_t), \quad t \in [0, T] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}, \quad (1)$$

решения которого испытывают импульсные воздействия

$$y(t_k^+) = y(t_k) + I_k(y(t_k)), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

и удовлетворяют условию

$$y(\tau) + g(\tilde{y})(\tau) = \psi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \quad (3)$$

где $\psi \in C([-h, 0]; E)$ – заданная функция.

На операторы входящие в условие задачи наложим следующие условия.

Пусть $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ – замкнутый линейный оператор, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At} .

Пусть для многозначного оператора $F: [0, T] \times C \rightarrow K\nu(E)$ выполнено (см., например, [9-11]):

(F1) для любого $c \in C$ мультифункция $F(\cdot, c) : [0, T] \rightarrow K\nu(E)$ допускает измеримое сечение;

(F2) для п.в. $t \in [0, T]$. мультиотображение $F(t, \cdot) : C \rightarrow K\nu(E)$ пн.св.;

(F3) существует функция $\alpha \in L_+^1(0, T)$ такая, что для всех $c \in C$ $\|F(t, c)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|c\|_{PC})$ для п.в. $t \in [0, T]$;

(F4) существует функция $k(\cdot) \in L_+^1(0, T)$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Delta \subset PC([-h, T]; E)$ выполнено $\chi_E(F(t, \Delta)) \leq k(t) \sup_{-h \leq s \leq t} \chi_E(\Delta(s))$ п.в. $t \in [0, T]$.

Из условий (F1)-(F3) следует, что многозначный суперпозиционный оператор $P_F : PC([-h, T]; E) \rightarrow P(L^1([0, T]; E))$, определяемый как $P_F(y) = \{f \in L^1([0, T]; E) : f(t) \in F(t, y_t)\}$, п.в. $t \in [0, T]$ корректно определен (см., [9-11]), является каузальным и удовлетворяет условиям (Q1)-(Q3) (см. [4-5]).

Пусть для импульсных отображений $I_k : E \rightarrow E$, $k = 1, 2, \dots, m$, выполнено:

(I1) каждое отображение I_k вполне непрерывно;

(I2) существуют $b_k > 0$ такие, что для любого $x \in E$ справедливо $\|I_k\| \leq b_k$.

Пусть для отображения $g : PC([-h, T], E) \rightarrow C([-h, 0]; E)$ будет верно:

(g1) отображение g вполне непрерывно;

(g2) $g(u)(0) = 0$ для всех $u \in PC([-h, T], E)$;

(g3) существует $K > 0$ такое, что $\|g(u)\|_C \leq K$ для каждого $u \in PC([-h, T], E)$.

Определение. Интегральным решением задачи (1)-(3) назовем функцию $y \in PC([-h, T], E)$, которая на отрезке $[-h, 0]$ удовлетворяет условию (3) и на отрезке $[0, T]$ имеет вид

$$y(t) = e^{At}\psi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds + \sum_{0 < t_k < t} e^{A(t-t_k)} I_k y(t_k), \text{ где } f \in P_F(y).$$

Обозначим $L : L^1([0, T]; E) \rightarrow C([0, T]; E)$ оператор Коши, который определяется как (см. [11]):

$$Lf(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Введем многозначный оператор $G : PC([-h, T]; E) \rightarrow C([0, T]; E)$, который определим следующим образом как $G(y) = L \circ P_F(y)$.

Из свойств суперпозиционного оператора P_F и свойств оператора Коши следует, мультиоператор G является п.с.в. мультиотображением с выпуклыми компактными значениями.

Пусть D – множество функций $u \in PC([0, T]; E)$, для которых выполнено $u(0) = \psi(0)$. Из условий (g1)-(g3) следует, что D является выпуклым замкнутым подмножеством пространства $PC([0, T]; E)$. Для функции $u \in D$ обозначим $y[u] \in PC([-h, T]; E)$ функцию, определяемую равенством

$$y[u] = \begin{cases} \psi(t) - g(u)(t), & t \in [-h, 0], \\ u(t), & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Тогда отображение $o: D \rightarrow PC([-h, T]; E)$, которое зададим следующим образом $o(u) = y[u]$ является непрерывным.

Введем в рассмотрение мультиоператор $\Gamma: D \rightarrow D$ следующего вида $\Gamma(u) = j(u) + G(u)$, где первый оператор зададим как $j(u) = e^{At}\psi(0) + \sum_{0 < t_k < t} e^{A(t-t_k)} I_k u(t_k)$, $t \in [0, T]$, а второй $G(u) = G(y[u])$.

Очевидно, что если $u \in D$ является неподвижной точкой многозначного оператора Γ , то функция $y = y[u] \in PC([-h, T]; E)$ будет являться интегральным решением задачи (1)-(3).

Из свойств операторов, входящих в отображение j следует, что оно является непрерывным и верно равенство $G(u) = G(o(u))$.

Воспользовавшись свойствами непрерывности композиции и суммы многозначных отображений (см., например, [9], Теоремы 1.3.11 и 1.3.19) и утверждением Теоремы 1 заключаем, что многозначный оператор Γ имеет выпуклые компактные значения и полунепрерывен сверху.

Проверим, что мультиоператор Γ будет являться уплотняющим относительно некоторой меры некомпактности в пространстве $PC([-h, T]; E)$.

Пусть $t_{m+1} = T$ и $\Omega \subset PC([0, T]; E)$ произвольное множество, для которого обозначим через $\Omega_1 = \{y|_{[0, t_1]}: y \in \Omega\}$ и $\Omega_i = \{z \in C([t_{i-1}, t_i]): z(t_{i-1}) = y^-(t_{i-1}), z(t) = y(t), t_{i-1} < t < t_i, y \in \Omega\}$, $2 \leq i \leq m+1$.

Очевидно, что относительная компактность множества Ω равносильна относительной компактности всех множеств Ω_i , $1 \leq i \leq m+1$.

Пусть Ω является ограниченным множеством пространства $PC([0, T]; E)$. Обозначим $\text{mod}_{PC}(\Omega) = \max_{1 \leq i \leq m+1} \text{mod}_C(\Omega_i)$. Определим модуль послойной некомпактности в пространстве $PC([0, T]; E)$ как

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \chi_E(\Omega(t)), \text{ где для } L > 0 \text{ выполнено } q = \sup_{t \in [0, T]} \{2D \int_0^t e^{-L(t-s)} k(s) ds\} < 1.$$

Определим на ограниченных подмножествах $\Omega \subset PC([0, T]; E)$ меру-некомпактности η_{PC} как пару значений $\eta_{PC}(\Omega) = (\gamma(\Omega), \text{mod}_{PC}(\Omega))$.

Введенная мера некомпактности будет обладать свойствами монотонности, несингулярности и алгебраической полуаддитивности. Из теоремы Арцела-Асколи также вытекает, что она будет являться правильной.

Из условий (g1)-(g3), (I1)-(I2) и теоремы Арцела-Асколи следует, что оператор j будет вполне непрерывным.

Из Теорем 4.2. и 4.3. [5] следует, что мультиоператор G является η_{PC} -уплотняющим.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (F1)-(F4), (I1)-(I2), (g1)-(g3). Тогда множество интегральных решений задачи (1)-(3) непусто и компактно.

Аналогично, применяя Теорему 4.5.[5], получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (F1), (F2), (F4), (I1), (g1), (g2) и условия

(F3') найдется последовательность функций $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1_+(0, T)$ такая, что

$$\sup_{\|c\|_{PC} \leq n} \|F(t, c)\|_E \leq \zeta_n(t) \text{ для п.в. } t \in [0, T] \text{ и } \inf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\zeta_n\|_{L^1} = 0;$$

$$(I2') \lim_{\|x\|_E \rightarrow \infty} \frac{\|I_k(x)\|_E}{\|x\|_E} = 0, \quad k = 1, \dots, m;$$

$$(g3') \lim_{\|u\|_{PC} \rightarrow +\infty} \frac{\|g(u)\|_C}{\|u\|_{PC}} = 0.$$

Тогда задача (1)-(3) имеет интегральное решение.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. ун-та. 1938, Секц. А Вып. 8, Т. 1, 1-25.

2. Corduneanu C. Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16. TaylorandFrancis, London, 2002.

3. Булгаков А.И., Григоренко А.А., Пансенко Е.А. Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами // Известия Ин-таматем. и информ. УдГУ, 2012, Вып. 1(39), 17-20.

4. Кулманакова М.М., Ульянова Е.Л. О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127 С. 293-315.

5. Кулманакова М.М., Обуховский В.В., Ульянова Е.Л. О нелокальной задаче Коши для полулинейного дифференциального включения с кау-

зальным оператором в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2021. № 1 С. 92-109.

6. Obukhovskii V., Zecca P. On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces // Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 8, P. 2765-2777.

7. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. Evolution fractional differential problems with impulses and nonlocal conditions // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 13 (2020), no. 7, 1899--1919.

8. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J-C. Existence and approximation of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential inclusions // Fixed Point Theory Appl. 2019, Paper No. 2, 21 pp.

9. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2е изд., М.: ЛИБРОКОМ, 2011.

10. Arutyunov A.V., Obukhovskii V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics, De Gruyter Graduate. De Gruyter, Berlin, 2017.

11. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.

УДК 532.582.7

Купцов В.С., Катрахова А.А.,

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ МАЛОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА ГАЗА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Пусть основной (невозмущенный) поток удовлетворяет линеаризованным уравнениям Навье-Стокса [1]:

$$\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x_i}; \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

где x_i – декартовы координаты, u_i^0 – компоненты вектора скорости, p^0 – давление жидкости, ρ – плотность жидкости, μ – коэффициент динамической вязкости.

Решение системы уравнений (1) (невозмущенного потока) можно получить, если разложения поля скоростей представить с помощью гармонических функций

Тогда решение можно записать в виде: $u_i^0 = u_i + u_i^*$, где

$$u_i(x_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left[\frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) \frac{\partial}{\partial x_j} (x_s x_j \dots x_k) + m \frac{\partial^m \chi}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) (\delta_{i\beta} x_\alpha - \delta_{i\alpha} x_\beta) x_t \dots x_k \right],$$

где суммирование ведется по одинаковым символам, $\delta_{i\beta}$ - тензор Кронекера,

$$\alpha \neq \beta \neq i, \quad j + \dots + k = m, \quad t + \dots + k = m - 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha}.$$

$$u_i^*(x_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu m!} \frac{\partial^m p^0}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) \left[\frac{r^2}{2(2m+1)} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \dots x_k) + \frac{mr^{2m+3}}{(m+1)(2m+1)(2m+3)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j \dots x_k}{r^{2m+1}} \right) \right],$$

Внесем малую сферу в невозмущенный поток. Причем прямоугольная система координат x_i связана со сферой неподвижным образом, а центр сферы совпадает с началом координат x_i .

Пусть скорости $v_i(x_j) = v_i^1 + v_i^2 + \dots$ (возмущенного потока) удовлетворяют системе уравнений (1).

Граничные условия для скорости:

$$v_i n_i|_{r=a} = 0; \quad e_{ij} t_j n_i|_{r=a} = 0, \quad v_i|_{\lambda \rightarrow \infty} = u_i^0 \quad (2)$$

где t_j - координаты вектора касательного к сфере, n_i - координаты вектора нормального к сфере,

$$e_{ij} = 0,5 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j.$$

Решение будем искать в виде:

$$v_i^1(x_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{c_m a^{2m+1}}{r^{2m+3}} x_s x_j \dots x_k \right) + \frac{m k_m a^{2m+1}}{r^{2m+1}} x_s x_j \frac{\partial^m \chi}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) (\delta_{i\beta} x_\alpha - \delta_{i\alpha} x_\beta) x_t \dots x_k \right],$$

$$v_i^2(x_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m a^{2m+1}}{\mu m!} \frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) \left[\frac{r^2}{2(2m+3)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_s x_j \dots x_k}{r^{2m+3}} \right) + \frac{(m+2)r^{-(2m+1)}}{(m+1)(2m+1)(2m+3)} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_s x_j \dots x_k) \right],$$

$$p1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_m a^{2m+3}}{m! r^{2m+3}} \frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \dots \partial y_k}(\bar{q}) x_s x_j \dots x_k,$$

где c_m, k_m, d_m - неизвестные константы, определяемые из уравнений (2).

Авторами здесь они не приведены в силу их громозкости.

Точность решения задачи для компонент вектора скоростей имеет по-

рядок $\left(\frac{a}{L} \right)^3$ [4], где L - расстояние от центра эллипсоида до особенностей основного потока, a - максимальная длина полуосей эллипсоида.

Список литературы

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М: Наука, 1970. Т.2. 568 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

3. Катрахова А.А. О существовании и единственности классического решения смешанной задачи гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя // Вестник Тамбовского государственного университета, 2009. Т.14, вып. 6. С. 1342-1360.

4. Купцов В.С. О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости // Сборник статей по механике сплошных сред. Труды НИИМа. Воронеж: ВГУ. 1976, вып. 18. С. 27-33.

УДК 654.164

Куцов С.В., Аникин А.А., Красавин В.А., Невгод Л.С., Алтаев А.С.,
ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и А.Ю. Гагарина», г. Воронеж;
Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы

РАЗРАБОТКА АНАЛОГОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИМУЛЯТОРОВ РАБОТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Разработка радиотехнического устройства представляет собой решение комплекса конструктивных и схемотехнических вопросов. В зависимости от качества выбора рациональной схемы и правильности расчета режимов работы её элементов зависит конструкция усилителя, его технологичность, стабильность во времени и при изменении условий эксплуатации, что особенно важно при проектировании средств военной связи. Так как основные требования к радиотехническим устройствам бывают диаметрально противоположны, проектировщик ищет оптимальный вариант, который максимально отвечал бы всем заданным требованиям. Особые требования обычно указываются в техническом задании дополнительно. Следовательно, задача синтеза аналоговых электронных усилителей должна предполагать наличие нескольких вариантов, из которых в соответствии с требованиями технического задания обоснованно выбирается наиболее предпочтительный [1, 2].

Средства компьютерного проектирования радиотехнических устройств в том числе предназначены в помощь обучающимся (и преподавателям) технических учебных заведений для изучения раздела курса физики «Электричество» и дисциплин «Схемотехника», «Устройства приема и преобразования сигналов» и т.д. Они дополняют классическую схему обучения, состоящую из приобретения необходимых компетенций: усвоения теоретического материала, практического освоения научно-теоретических положений изучаемой дисциплины, овладения техникой экспериментальных исследований и анализа полученных результатов, привития навыков

работы с лабораторным оборудованием, контрольно-измерительными приборами и вычислительной техникой.

Большинство средств программного обеспечения такого класса представляет собой электронный конструктор, позволяющий моделировать и имитировать на экране монитора процессы сборки электрических схем, исследовать особенности их работы, проводить измерения электрических величин так, как это делается в реальном физическом эксперименте.

С помощью симуляторов работы электрических схем можно изучать:

- законы протекания токов – закон Ома для участка цепи и закон Ома для полной цепи;
- законы последовательного и параллельного соединения проводников, конденсаторов и катушек;
- зависимость сопротивления проводников от удельного сопротивления его материала, длины и поперечного сечения;
- принципы использования предохранителей в электронных схемах;
- законы выделения тепловой энергии в электронагревательных и осветительных приборах, принципы согласования источников тока с нагрузкой;
- принципы проведения измерений тока и напряжения в электронных схемах с помощью современных измерительных приборов (мультиметра, двухканального осциллографа);
- виды переменного тока на отдельных участках схемы и сдвиг фаз между током и напряжением в цепях переменного тока;
- изучать проявление емкостного и индуктивного сопротивлений в цепях переменного тока, их зависимость от частоты генератора переменного тока и номиналов деталей;
- изучать выделение мощности в цепях переменного тока.

В современных средствах автоматизированного проектирования радиотехнических устройств одной из главных особенностей является максимально возможная имитация реального физического процесса [3]. Для этой цели могут быть использованы следующие подходы:

- изображения деталей и измерительных приборов в программном конструкторе приводятся не схематически, а в «реальном» виде, с максимальной детализацией;
- при превышении номинальной мощности электрического тока, протекающего через радиодеталь, последняя «сгорает» с визуализацией вспышки и приобретает расплавленный или почерневший вид;
- лампочка и электронагревательный прибор при номинальной мощности начинают светиться и «перегорают», если мощность, рассеиваемая на них, превышает рабочее значение;
- при превышении рабочего напряжения на конденсаторе, он также «выходит из строя», что сопровождается соответствующими визуальными эффектами;

– при превышении номинального рабочего тока через предохранитель, он «перегорает»;

– большинство операций и их результаты сопровождаются звуковыми эффектами.

Это делается для наглядного представления последствий допущенных ошибок, учит разбираться в причинах того или иного неудачного эксперимента и вырабатывает необходимые навыки предварительного анализа схемы.

Для пользования современными программными симуляторами работы электрических схем, как правило, достаточно начальных навыков работы в системе Windows.

В большинстве программ-конструкторов можно использовать стандартные детали: резистор, предохранитель, конденсатор, катушка индуктивности и т.д.

Активные приборы (транзисторы и лампы) подбираются отдельно и их параметры вносятся в диалоговом окне. В профессиональных программах есть базы данных с марками и характеристиками активных приборов, а также имеется возможность вносить новые марки с характеристиками из других источников.

Отдельно можно пользоваться контрольно-измерительными приборами: мультиметром, осциллографом и т.д.

При разработке современных радиоэлектронных устройств применение средств автоматизированного проектирования является необходимым условием. Знание и умение пользоваться симуляторами работы электрических схем дает массу положительных эффектов при изучении дисциплин «Схемотехника», «Устройства приема и преобразования сигналов» и других. Использование средств автоматизированного проектирования при выполнении курсового и дипломного проектирования позволяет обучающимся более глубоко разобраться в теме.

Список литературы

1. Павлов В.Н. Схемотехника аналоговых электронных устройств: учебник для вузов. М.: Горячая линия-Телеком, 2001. 320 с.

2. Делик В.М. Схемотехника аналоговых электронных устройств: учебник. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. 289 с.

3. Четыре симулятора работы электрических схем на русском [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://izobreteniya.net/simulyator-raboty-elektricheskikh-shem-na-russkom/>, свободный (дата обращения 03.09.2021).

**О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ
ОБОБЩЁННОГО СФЕРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА**

При использовании метода Фурье для решения в модельных областях краевых и начально-краевых задач, содержащих эллиптический дифференциальный оператор

$$Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k}{z} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad k > 0,$$

приходится иметь дело с задачами на собственные значения для сингулярного дифференциального оператора

$$\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

который мы назовём [1] обобщённым сферическим оператором Лапласа. Такие спектральные задачи для $\Delta_{\theta\varphi}$ возникают в случаях, когда оператор A рассматривается в таких областях, как полушар $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$, четверть шара $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$, $x > 0$, или в части того же полушара с удалённой из него конической областью, границей которой является часть конуса $x \operatorname{tg} \omega = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\omega \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Переходя в таких задачах к сферическим координатам по формулам

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi, \\ r &\geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

приходим к оператору $\Delta_{\theta\varphi}$.

Спектральные задачи для этого оператора будем рассматривать в квадрате $\Pi = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ и в прямоугольнике $\Pi_\omega = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \omega, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ при фиксированном $\omega \in (0, \pi)$.

В квадрате Π задача имеет вид

$$-\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \mu \Phi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (1)$$

$$|\Phi| \leq C(\mu), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (3)$$

где $C(\mu)$ – верхняя грань для модуля функции Φ , зависящая от μ .

В прямоугольнике Π_ω задача будет иметь вид

$$-\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \mu \Phi, \quad 0 < \theta < \omega, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (4)$$

$$\Phi(\omega, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (5)$$

$$|\Phi| \leq C(\mu), \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \omega, \quad (7)$$

где $C(\mu)$ – верхняя грань для $|\Phi|$ на прямоугольнике Π_ω .

Интегрированием по частям по мере $d\mu = (\sin \theta)^{k+1} (\sin \varphi)^k d\theta d\varphi$ по Π или Π_ω легко убедиться, что задача (1)-(3) может иметь нетривиальные решения только при $\mu \geq 0$, а задача (4)-(7) – только при $\mu > 0$.

Задачу (1)-(3) будем решать методом разделения переменных, полагая $\Phi(\theta, \varphi) = P(\varphi)Q(\theta)$. В результате такого разделения переменных получаем следующие краевые задачи для определения функций $P(\varphi)$ и $Q(\theta)$:

$$-P'' - k \operatorname{ctg} \varphi P' = \nu P, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad (8)$$

$$P'(0) = P'(\pi) = 0, \quad (9)$$

$$Q'' + (k+1) \operatorname{ctg} \theta Q' + \left(\mu - \frac{\nu}{\sin^2 \theta}\right) Q = 0, \quad (10)$$

$$0 < \theta < \pi,$$

$$|Q| \leq C(\mu, \nu), \quad (11)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi,$$

где $C(\mu, \nu)$ – верхняя грань для $|Q|$ на отрезке $[0, \pi]$.

Везде далее считаем, что параметр $k > 1$ и не является нечётным числом.

Решение задачи (8)-(9) известно. При выполнении условия $k > 1$ в [2] показано, что эта задача имеет нетривиальные решения только при значениях $\nu = \nu_n = n(n+k)$, $n = 0, 1, \dots$, при этом соответствующие функции $P(\varphi) = P_n(\varphi)$ с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$P_n(\varphi) = (\sin \varphi)^{(1-k)/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Символом $P_q^s(\cos \varphi)$ в формуле (12) обозначена функция Лежандра первого рода, определённая на разрезе, от аргумента $\cos \varphi$ [3].

Рассмотрим теперь задачу (10)-(11) при фиксированном $\nu = \nu_n$, $n = 0, 1, \dots$.

Сделаем замену переменной $t = \cos \theta$, $-1 < t < 1$, и положив $Q(\theta) = Q(\arccos t) = S(t)$, получим для $S(t)$ краевую задачу

$$(1-t^2)S'' - (k+2)tS' + \left(\mu - \frac{V_n}{1-t^2}\right)S = 0,$$

$$-1 < t < 1,$$

$$|S| \leq C(\mu, \nu),$$

$$-1 \leq t \leq 1.$$

Вводя теперь новую функцию по формуле $S(t) = (1-t^2)^{-k/4}T(t)$ и представляя параметр μ в виде $\mu = \alpha(\alpha + k + 1)$, $\alpha \geq 0$, получим, что функция $T(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$(1-t^2)T'' - 2tT' + \left(\left(\alpha + \frac{k}{2}\right)\left(\alpha + \frac{k}{2} + 1\right) - \frac{(n+k/2)^2}{1-t^2}\right)T = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) есть уравнение для присоединённых функций Лежандра [3]. Его общее решение ищем в виде

$$T(t) = C_1 P_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t) + C_2 Q_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t), \quad (14)$$

где $P_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t)$, $Q_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t)$ – функции Лежандра первого и второго рода, соответственно, определённые на разрезе, линейно независимые на $(-1,1)$, $\alpha \geq 0$, C_1, C_2 – произвольные постоянные. Учитывая соотношение между функциями $Q(\theta)$ и $T(t)$, получаем, что общее решение уравнения (10) имеет вид

$$Q(\theta) = C_1 (\sin \theta)^{-k/2} P_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(\cos \theta) + C_2 (\sin \theta)^{-k/2} Q_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(\cos \theta), \quad (15)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Учитывая асимптотики функций Лежандра из представления (15) при $\theta \rightarrow 0$ и нечётность k , получаем, что

$$Q(\theta) = C_1 (\sin \theta)^{-k/2} P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta), \quad (16)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Параметр α определим из условия ограниченности функции $Q(\theta)$ в окрестности точки $\theta = \pi$. В результате найдём, что $\alpha = \alpha_{n,p} = n + p$, $p = 0, 1, \dots$. Поэтому функции $Q(\theta) = Q_{n,p}(\theta)$ с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$Q_{n,p}(\theta) = (\sin \theta)^{-k/2} P_{n+p+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta), \quad (17)$$

а соответствующие этим функциям собственные значения определяются формулой

$$\mu = \mu_{n,p} = (n+p)(n+p+k+1), \quad (18)$$

$$p = 0, 1, \dots$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Собственные функции задачи (1)-(3) определяются формулой

$$\Phi_{n,p}(\theta) = C_{n,p} P_n(\varphi) Q_{n,p}(\theta), \quad (19)$$

$$n, p = 0, 1, \dots,$$

где функции $P_n(\varphi)$ и $Q_{n,p}(\theta)$ определяются формулами (12) и (17), соответственно, постоянные $C_{n,p} \neq 0$. Соответствующие собственные значения даются формулой (18).

Спектральная задача (4)-(7) решается аналогично. Только значения параметра $\alpha > 0$ находятся как положительные решения уравнения $P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(\cos \omega) = 0$. Пусть $\alpha =$

$= \alpha_{n,p}$, $p = 1, 2, \dots$ – все его положительные решения, занумерованные, для определённости, в порядке возрастания [4]. Тогда все собственные значения задачи (4)-(7) положительны и определяются формулой

$$\mu_{n,p} = \alpha_{n,p}(\alpha_{n,p} + k + 1),$$

$$n = 0, 1, \dots, p = 1, 2, \dots,$$

а соответствующие собственные функции даются формулой (19), в которой функции $Q_{n,p}(\theta)$ следует заменить на

$$(\sin \theta)^{-k/2} P_{\alpha_{n,p}+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta).$$

Выделим случай $\omega = \pi / 2$. В этом случае уравнение для нахождения параметров α принимает вид $P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(0) = 0$. Поскольку для любых S и Q справедливо соотношение [3]

$$P_q^s(0) = \frac{2^s \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-s-q)/2) \Gamma(1+(q-s)/2)},$$

то уравнение для определения α принимает вид

$$\frac{2^{-n-k/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma((1+n-\alpha)/2) \Gamma(1+(\alpha+n+k)/2)} = 0.$$

Из последнего уравнения получаем, что $(1+n-\alpha)/2 = -p$, $p = 0, 1, \dots$, так что

$$\alpha = \alpha_{n,p} = n + 2p + 1, \quad n, p = 0, 1, \dots$$

Поэтому в случае $\omega = \pi / 2$ собственные значения задачи (4)-(7) имеют вид

$$\mu_{n,p} = (n + 2p + 1)(n + 2p + k + 2),$$

а соответствующие им собственные функции определяются формулой (19), в которой функции $Q_{n,p}(\theta)$ следует заменить на

$$(\sin \theta)^{-k/2} P_{n+2p+1+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta),$$

$$n, p = 0, 1, \dots$$

Собственные функции $\Phi_{n,p}(\theta, \varphi)$ для $\varphi = 0, \varphi = \pi, \theta = 0$ и $\theta = \pi$ (в случае квадрата Π) доопределяются по непрерывности.

Список литературы

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. 808 с.
2. Ларин А.А., Кириллов В.П. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов X международной конференции «ПМТУКТ-2017» /под ред. И.Л. Батаронова, А.П. Жабко, В.В. Провоторова. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2017. С. 221–225.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1973. 296 с.
4. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952. 476 с.

УДК 517.95

Ларин А.А., Казюлин И.А.,

ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, РАССМАТРИВАЕМОГО В МОДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, z > 0\}$ – часть шара с центром в точке $O(0,0,0)$ радиуса $R_0 > 0$, расположенная в полупространстве $z > 0$ пространства E^3 . Обозначим через Γ^+ часть границы области $B(R_0)$, являющуюся полусферой, так что $\Gamma^+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2, z \geq 0\}$, и пусть Γ^0 – оставшаяся часть границы $\partial B(R_0)$.

Чертой сверху над символом, обозначающим множество в E^3 , будем обозначать замыкание этого множества в E^3 , так что $\overline{B(R_0)} = B(R_0) \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0$.

В замкнутом полушаре $\overline{B(R_0)}$ рассмотрим задачу на собственные значения вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{E}{r^2} u = \lambda u, \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in B(R_0),$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{\Gamma^0 \setminus O} = 0, \quad (2)$$

где k и E – вещественные числа, $k > 0$, $E \geq 0$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Решения задачи (1) – (2) ищутся в классе функций $C^2(B(R_0)) \cap C^1(B(R_0) \cup (\Gamma^0 \setminus O)) \cap C(\overline{B(R_0)})$.

Нетрудно видеть, что все собственные значения λ этой задачи положительны. Цель работы – найти эти собственные значения, выписать в явном виде отвечающие им собственные функции и выяснить характер их поведения при $r \rightarrow 0$.

Переходя в изучаемой задаче к сферическим координатам по формулам

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

и полагая

$$v(r, \theta, \varphi) = u(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi),$$

придём к следующей краевой задаче для функции $v(r, \theta, \varphi)$ в параллелепипеде $\Pi = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k+2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - E v + \lambda r^2 v \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$v(R_0, \theta, \varphi) = 0, \quad (4)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \theta, \pi) = 0, \quad (5)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Следуя [1, 2], задачу (3)-(5) будем решать методом разделения переменных. Разделяя переменные по формуле $v(r, \theta, \varphi) = R(r)\Phi(\theta, \varphi)$, получим соответствующие спектральные задачи для функций $\Phi(\theta, \varphi)$ и $R(r)$.

Для нахождения функций $\Phi(\theta, \varphi)$ получим задачу Штурма-Лиувилля вида

$$\begin{aligned}
-\Delta_{\theta\varphi} \Phi &= \mu \Phi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi, \\
|\Phi| &\leq C(\mu), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \\
\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \pi,
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + k \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right),$$

$C(\mu)$ – верхняя грань для модуля функции Φ , зависящая от μ .

Для определения соответствующих каждому фиксированному μ радиальных составляющих $R(r)$ получим краевую задачу вида

$$\begin{aligned}
R'' + \frac{k+2}{r} R' + \left(\lambda - \frac{E+\mu}{r^2} \right) R &= 0, \quad r > 0, \\
R(R_0) &= 0, \\
R &\in C[0, \infty).
\end{aligned} \tag{7}$$

Спектральная задача (6) также решается методом разделения переменных.

Везде далее будем считать, что параметр $k > 1$ и не является нечётным числом. При наложенных на k ограничениях решения задачи (6) определяются следующими соотношениями.

Её собственные значения даются двухиндексной последовательностью

$$\begin{aligned}
\mu_{n,p} &= (n+p)(n+p+k+1) \geq 0, \\
n, p &= 0, 1, \dots,
\end{aligned} \tag{8}$$

а соответствующие собственные функции с точностью до постоянного множителя записываются в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_{n,p}(\theta, \varphi) &= (\sin \varphi)^{(1-k)/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \varphi) (\sin \theta)^{-k/2} P_{n+p+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta) = \Phi_n^{(1)}(\varphi) \Phi_{n,p}^{(2)}(\theta), \\
n, p &= 0, 1, \dots.
\end{aligned} \tag{9}$$

Символом вида $P_\nu^s(\cos \tau)$ в формуле (9) обозначена функция Лежандра первого рода, определённая на разрезе, от аргумента $\cos \tau$ [3, с. 144]. Можно показать, что каждая функция $\Phi_{n,p}(\theta, \varphi)$ является произведением некоторых алгебраических многочленов $\Phi_n^{(1)}(\varphi)$ и $\Phi_{n,p}^{(2)}(\theta)$ от аргументов $\cos \varphi$ и $\cos \theta$, соответственно [4].

Рассмотрим теперь задачу (7) с найденными $\mu = \mu_{n,p}$.

Введением новой функции по формуле $R(r) = \bar{R}(r)r^{-(k+1)/2}$ уравнение краевой задачи (7) приводится к виду

$$\overline{R}'' + \frac{1}{r} \overline{R}' + \left(\lambda - \frac{E + (n + p + (k + 1) / 2)^2}{r^2} \right) \overline{R} = 0. \quad (10)$$

Переходя в уравнении (10) при фиксированном λ к новой переменной $z = \sqrt{\lambda} r$ и полагая $\overline{R}(r) = \overline{R}(z / \sqrt{\lambda}) = Y(z)$, получим, что функция $Y(z)$ является решением уравнения Бесселя порядка

$$q = q(n, p) = \sqrt{E + (n + p + (k + 1) / 2)^2} : \\ Y''(z) + \frac{1}{z} Y'(z) + \left(1 - \frac{q^2}{z^2} \right) Y(z) = 0. \quad (11)$$

Учитывая поведение функции $\overline{R}(r)$ при $r \rightarrow 0$, получаем, что решение $Y(z)$ уравнения (11) имеет с точностью до постоянного множителя вид $Y(z) = J_{q(n, p)}(z)$, где $J_{q(n, p)}(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка $q(n, p)$. Принимая во внимание соотношение между функциями $Y(z)$ и $R(r)$, получаем, что с точностью до постоянного множителя функция $R(r)$ записывается в виде

$$R(r) = R_{n, p}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{q(n, p)}(\sqrt{\lambda} r), \quad n, p = 0, 1, \dots$$

Учитывая краевое условие $R_{n, p}(R_0) = 0$, находим собственные значения λ исходной задачи:

$$\lambda = \lambda_{n, p, m} = \left(\frac{\beta_{q(n, p), m}}{R_0} \right)^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n, p = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где $\beta_{q(n, p), m}$ – m – й положительный корень уравнения $J_{q(n, p)}(\beta) = 0$.

Таким образом, радиальные составляющие решений $v(r, \theta, \varphi)$ с точностью до числового множителя записываются в виде

$$R_{n, p}(r) = R_{n, p, m}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{q(n, p)}\left(\frac{\beta_{q(n, p), m}}{R_0} r\right), \quad (13)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad n, p = 0, 1, \dots$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Собственные значения задачи (1) – (3) определяются равенством (12), а отвечающие им собственные функции в сферической системе координат имеют вид

$$u_{n, p, m}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) = C_{n, p, m} R_{n, p, m}(r) \Phi_{n, p}(\theta, \varphi), \quad (14)$$

где $C_{n, p, m}$ – произвольные ненулевые постоянные, а функции $R_{n, p, m}(r)$ и $\Phi_{n, p}(\theta, \varphi)$ определяются формулами (13) и (9), соответственно,

$$n, p = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Проведём качественный анализ найденных собственных функций (14). Заметим, что для функций Бесселя первого рода $J_q(t)$ при $t \rightarrow 0$ справедливо соотношение $J_q(t) \approx \frac{t^q}{2^q \Gamma(1+q)}$, $q > 0, t > 0$, где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера от аргумента α [5, с.172]. Положим

$$\varepsilon(n, p) = \sqrt{E + (n + p + (k + 1) / 2)^2} - (k + 1) / 2.$$

Поскольку $\varepsilon(n, p) > 0$ при любых n и p , то произвольная собственная функция $u_{n,p,m}(x, y, z)$ обращается в ноль в точке $O(0, 0, 0)$, причём при $r \rightarrow 0$ представляет собой величину $O(r^{\varepsilon(n,p)})$. При этом показатель $\varepsilon(n, p)$ тем больше, чем больше параметр E . Отметим ещё, что в предельном случае, когда $E = 0$, собственные функции вида $u_{0,0,m}(x, y, z)$ в точке $O(0, 0, 0)$ в ноль не обращаются.

Рассмотрим теперь аналогичную спектральную задачу для того же оператора с теми же краевыми условиями в четверти шара, т.е. в области

$$B_1(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, z > 0, x > 0\}.$$

В этом случае переменная θ в задаче (3)-(5) изменяется в пределах от 0 до $\pi / 2$. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля вида (6) определяются двухиндексной последовательностью $\mu_{n,p} = (n + 2p + 1)(n + 2p + k + 2)$, $n, p = 0, 1, \dots$, а соответствующие собственные функции с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$\Phi_{n,p}(\theta, \varphi) = (\sin \varphi)^{(1-k)/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \varphi) (\sin \theta)^{-k/2} P_{n+2p+1+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta), \quad (15)$$

$$n, p = 0, 1, \dots$$

Радиальные составляющие решения задачи (3)-(5) с точностью до постоянного множителя будут определяться равенством

$$R_{n,p}(r) = R_{n,p,m}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{s(n,p)}\left(\frac{\beta_{s(n,p),m}}{R_0} r\right), \quad (16)$$

в котором $s(n, p) = \sqrt{E + (n + 2p + (k + 3) / 2)^2}$, а $\beta_{s(n,p),m}$ – m -й положительный корень уравнения $J_{s(n,p)}(\beta) = 0$.

Таким образом, в случае четверти шара собственные значения задачи вида (1)-(3) определяются соотношением

$$\lambda_{n,p,m} = \left(\frac{\beta_{s(n,p),m}}{R_0}\right)^2, \quad m = 1, 2, \dots, n, p = 0, 1, \dots,$$

а соответствующие им собственные функции в сферической системе координат имеют вид

$$u_{n,p,m}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi) = C_{n,p,m} R_{n,p,m}(r) \Phi_{n,p}(\theta, \varphi), \quad (17)$$

где $C_{n,p,m}$ – произвольные ненулевые постоянные, а функции $R_{n,p,m}(r)$ и $\Phi_{n,p}(\theta, \varphi)$ определяются формулами (16) и (15), соответственно,
 $n, p = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots$.

Список литературы

1. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
2. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.2. М.: ИЛ, 1961. 556 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. 296 с.
4. Ларин А.А., Кириллов В.П. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом// Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов X международной конференции «ПМТУКТ-2017» /под ред. И.Л. Батаронова, А.П. Жабко, В.В. Провоторова. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2017. С. 221–225.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963. 358 с.

УДК 519.711.3

Майорова С.П., Трибунских О.А.,

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

*ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр ВВС
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

ПЕРЕХОД ОТ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим инженерную сеть как систему с распределенными параметрами. Инженерные сети рассматриваются не самостоятельно, а в комплексе с происходящим в них процессами, которые описываются дифференциальными уравнениями. Уравнения описывают изменения давления p и расхода G как функций от времени и координаты. Таким образом, математическая модель инженерной сети, представляет собой краевую задачу

на геометрическом графе (см. [1],[2]) и имеет следующий вид. На графе \mathcal{G} задана система дифференциальных уравнений вида

$$-S \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial t} + 2bG, \quad -S \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial G}{\partial x} \quad (1)$$

при каждом фиксированном t решение этой системы удовлетворяет во внутренних вершинах условиям согласования

$$p_1(a) = p_2(a) = \dots = p_d(a), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{d(a)} G_i^{(a)} = 0. \quad (3)$$

В концевых вершинах $b_i, i = 1, m$ заданы граничные условия

$$p(b_i, t) = p_i(t), \quad i = 1, k, \quad G(b_i, t) = G_i(t) \quad i = k+1, m. \quad (4)$$

Начальные условия на \mathcal{G} в момент времени $t=0$ будут иметь вид

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad G(x, 0) = G_0(x) \quad (5)$$

Функция $p(x)$ должна быть дифференцируема и удовлетворять условиям согласования (2) во внутренних вершинах. Функция $G(x)$ тоже должна быть дифференцируема и удовлетворять условиям согласования (3). Кроме того

$$p_0(b_i) = p_i(0), \quad i = 1, k \quad \text{и} \quad G_0(b_i) = G_i(0), \quad i = k+1, m.$$

Найдем решение этой краевой задачи. Для этого используем метод разделения переменных (метод Фурье) для краевой задачи на графе. Перейдем от задачи для системы дифференциальных уравнений (1)–(5) к задаче для уравнения второго порядка, заданного на графе.

Лемма 1. Распределение давления $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2b}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6)$$

Доказательство. Продифференцируем первое уравнение системы (1) по x , а второе по t . Получим уравнения вида

$$-S \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} + 2b \frac{\partial G}{\partial x}, \quad -S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial G}{\partial x \partial t}.$$

Исключим из первого уравнения G и разделим на S . Получим уравнение требуемого вида.

Преобразуем условия согласования во внутренних вершинах.

Лемма 2. В каждой внутренней вершине a графа \mathcal{G} давление $p(x)$ удовлетворяет условиям вида

$$p_1(a,t) = p_2(a,t) = \dots = p_d(a,t) , \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{d(a)} S_i \frac{\partial p(a,t)}{\partial x} = 0 . \quad (8)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что из условия (3) следует условие (8). Запишем (3) в виде $\sum_{i=1}^{d(a)} \lim_{x \rightarrow a} G(x,t) = 0$.

Продифференцируем правую и левую часть по t . Получим

$$\sum_{i=1}^{d(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = 0 .$$

Отметим, что мы здесь поменяли местами предельный переход и дифференцирование. Выразим $\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}$ из уравнения (1). Получим

$$\text{чим} \quad \sum_{i=1}^{d(a)} \lim_{x \rightarrow a} \left(-S_i \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - 2bG(x,t) \right) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{d(a)} \left(-S_i \frac{\partial p(a,t)}{\partial x} \right) - 2b \sum_{i=1}^{d(a)} G(a,t) = 0 , \quad \text{а}$$

так как вторая сумма равна нулю, то получим, что $\sum_{i=1}^{d(a)} \left(-S_i \frac{\partial p(a,t)}{\partial x} \right) = 0$.

Преобразуем краевые условия.

Лемма 3. Давление $p(x)$ удовлетворяет краевым условиям вида

$$p(b_i, t) = p_i(t) , \quad i = 1, k , \quad \frac{\partial p(b_i, t)}{\partial x} = p_i^*(t) \quad (9)$$

где $p_i^* = -\frac{1}{S_i} (G_i'(t) - 2bG_i(t))$ при $i = k+1, m$.

Доказательство. Продифференцируем по t условие для расходов. По-

лучим $\lim_{x \rightarrow b_i} \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = \frac{d G(t)}{d t}$, а после подстановки

$$\lim_{x \rightarrow b_i} \left(-S \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + 2bG(x,t) \right) = \frac{d G}{d t} .$$

В результате получим

$$\frac{\partial p(b_i, t)}{\partial x} = -\frac{1}{S_i} (G_i'(t) - 2bG_i(t)) .$$

Преобразуем начальные условия.

Лемма 4. В начальный момент времени $t=0$ давление $p(x)$ удовлетворяет условиям

$$p(x, 0) = p_0(x) . \quad (10)$$

$$\frac{d p(x,0)}{d t} = p_0^*(x) , \text{ где } p_0^*(x) = -\frac{c^2}{S} \frac{d G_0(x)}{d x}$$

Доказательство. Продифференцируем по x начальное условие для рас-

ходов $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \frac{d G_0(x)}{d x}$ и заменим $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$. Получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S}{c^2} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{d G_0(x)}{d x} . \quad \text{Следовательно } \frac{d p(x,0)}{d t} = p_0^*(x) , \quad \text{где}$$

$$p_0^*(x) = -\frac{c^2}{S} \frac{d G_0(x)}{d x} .$$

Из лемм 1-4 получено следующее утверждение.

Теорема 7. Давление $p(x,t)$ удовлетворяет задаче (6)-(10) .

Таким образом, для давления p мы получили задачу вида (6)-(10). Для расхода можно получить аналогичную задачу для дифференциального уравнения второго порядка, заданного на геометрическом графе.

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.
2. Завгородний М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 446-456.

УДК 517.929

Максимов В.П.,

ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный
исследовательский университет», г. Пермь

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается интерполяционная краевая задача

$$Lx = f, x(t_k) = a_k, k = 0, 1, \dots, m, t \in [0, T], \quad (1)$$

где $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ – фиксированная система точек из $[0, T]$, $t_0 = 0, t_m = T$. Предполагается, что задача Коши $Lx = f, x(0) = a_0$ однозначно разрешима при любых f и a_0 и имеет место известное представление решения $x(t) = X(t)a_0 + \int_0^t C(t,s)f(s)ds$ [1]. В случае, когда правая часть f стеснена покомпонентными двусторонними ограничениями $a_i \leq f_i(t) \leq b_i, i = 1, \dots, n, t \in [0, T]$, возникает задача описания достижимых значений a_k , – таких, что найдется допустимая функция f , при которой решение задачи Коши $Lx = f, x(0) = a_0$, принимает заданные значения a_k в точках t_k . В основе предлагаемых условий разрешимости задачи (1) лежат внутренние оценки множества достижимых значений a_k , основанные на решении серии задач линейного программирования, которые строятся с использованием упомянутого представления решений. Детали построения таких задач можно найти в [2, 3]. Дается описание алгоритма, приводящего к условиям разрешимости в виде покомпонентных интервалов для значений a_k . Приводится иллюстрирующий пример.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. Максимов В.П. К оценке значений линейных функционалов на решениях систем с последействием // Вестник российских университетов. Математика. Т. 25. № 131. С. 274-283.
3. Maksimov V.P. Conditional optimal control in enclosing solutions to boundary value problems with an uncertainty // Functional Differential Equations. 2020. V.27. No. 3-4. P. 95-101.

УДК 519.854.2

Медведев С.Н.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА С ЧЕРЕДОВАНИЕМ С ЕДИНЫМ МЕСТОМ СБОРА

Введение

Постановка, различные математические модели и алгоритмы решения задачи маршрутизации транспорта (ЗМТ) с чередованием и единым местом сбора представлены в работах [1-3].

Суть задачи заключается в поиске минимального суммарного маршрута среди объектов двух типов для мобильных средств, начинающих свой маршрут из единого места сбора. Один тип объектов допускает только одно посещение объекта (тип А), другой – неограниченное количество посещений (тип В). Предположим также, что от места сбора необходимо поехать к объекту типа А, а вернуться в место сбора возможно только из объекта типа В. Это требование может быть обусловлено практической интерпретацией задачи. Схематично сама задача и один из возможных маршрутов представлены на рисунке 1.

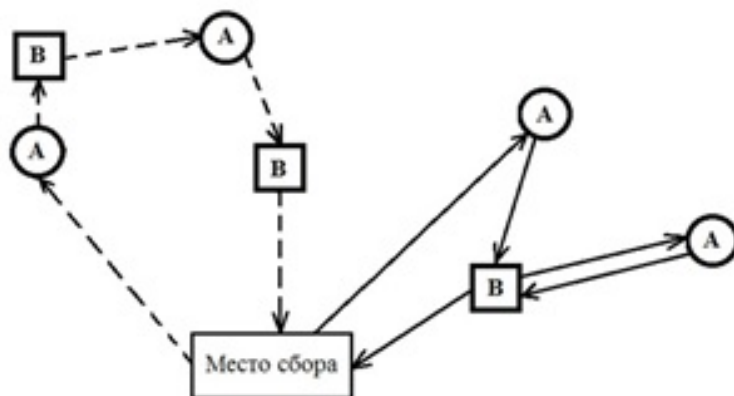


Рис. 1 – ЗМТ с чередованием и единым местом сбора

В качестве места сбора введем пару фиктивных объектов типа А и типа В, с порядком обхода «А – В».

Пусть n – количество объектов типа А ($i = 1, \dots, m$), m – количество объектов типа В ($j = 1, \dots, n$), $(c_{ij}^1)_{(m+1) \times (n+1)}$, $(c_{ji}^2)_{(n+1) \times (m+1)}$ – матрицы затрат, необходимых для перемещения от каждого объекта типа В (в том числе фиктивного) до каждого объекта типа А (в том числе фиктивного), и наоборот соответственно. Исходя из того, как введена точка сбора, получим, что $c_{00}^1 = \infty$, $c_{00}^2 = 0$. Заметим, что в общем случае $c_{ij}^1 \neq c_{ji}^2$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Оптимальный маршрут

Пусть матрицы $(c_{ij}^1)_{(m+1) \times (n+1)}$, $(c_{ji}^2)_{(n+1) \times (m+1)}$ задают расстояния. Покажем, что в этом случае оптимальным решением данной задачи, то есть оптимальным суммарным маршрутом, будет маршрут только одного мобильного средства, который начинает и заканчивает свой маршрут в точке сбора и посещает все объекты типа А (рисунок 2).

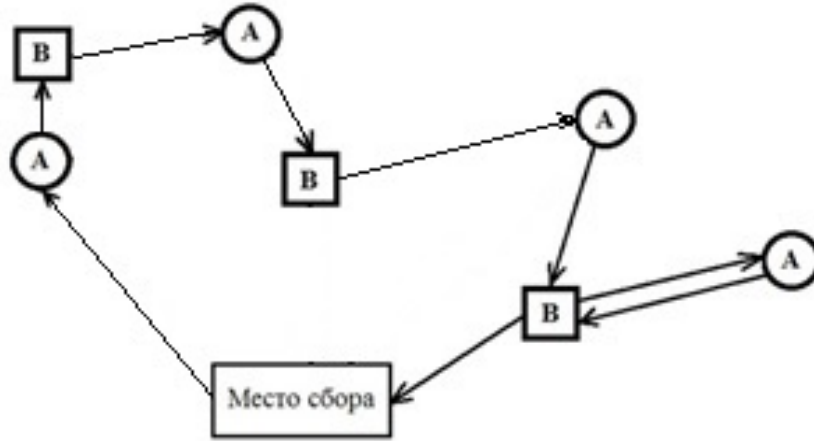


Рис. 2 – Оптимальный маршрут

Рассмотрим следующие маршруты:

$$L^* : (i_0 = 0) \rightarrow j_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_{k-1} \rightarrow i_{k-1} \rightarrow j^* \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow (j_0 = 0) \rightarrow (i_0 = 0),$$

$$\bar{L} : (i_0 = 0) \rightarrow j_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_{k-1} \rightarrow i_{k-1} \rightarrow j_0 \rightarrow i_0 \rightarrow j_s \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow (j_0 = 0) \rightarrow (i_0 = 0),$$

$$\hat{L} : (i_0 = 0) \rightarrow j_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_{k-1} \rightarrow i_{k-1} \rightarrow j_s \rightarrow \dots \rightarrow j_n \rightarrow i_n \rightarrow (j_0 = 0) \rightarrow (i_0 = 0).$$

L^* – лучший из всех маршрутов вида

$$(i_0 = 0) \rightarrow j_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_{k-1} \rightarrow i_{k-1} \rightarrow j_k \rightarrow \dots \rightarrow j_n \rightarrow i_n \rightarrow (j_0 = 0) \rightarrow (i_0 = 0),$$

в которых место сбора встречается один раз.

\bar{L} – лучший из всех маршрутов вида

$$(i_0 = 0) \rightarrow j_1 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow j_{k-1} \rightarrow i_{k-1} \rightarrow (j_0 = 0) \rightarrow (i_0 = 0) \rightarrow j_s \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow (j_0 = 0) \rightarrow (i_0 = 0),$$

в которых место сбора встречается два раза.

\hat{L} – маршрут, полученный из маршрута \bar{L} , в котором напрямую соединены i_{k-1} и j_s и «отброшено» второе посещение места сбора. То есть маршрут \hat{L} является маршрутом, в котором место сбора встречается один раз, и тогда верно неравенство

$$L^* \leq \hat{L}. \quad (1)$$

Заметим, что во всех этих маршрутах номера $j_k \in \{1, \dots, n\}$, $k = 1, \dots, n$ уникальны, а номера $i_k \in \{1, \dots, m\}$, $k = 1, \dots, n$ повторяются, а индексы обозначают порядковые номера объектов типа В в маршруте. То есть $j_p \neq j_q$ при $p \neq q$, а i_p может быть равен i_q при $p \neq q$. Например, $i_5 = i_7 = 3$ означает, что третий объект типа В встречается в маршруте на пятом и седьмом местах.

Распишем подробнее длины \bar{L} и \hat{L} двух представленных маршрутов.

$$\bar{L} = \sum_{l=1}^{k-1} (c_{i_{l-1}j_l}^1 + c_{j_l i_l}^2) + c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{j_0 i_0}^2 + c_{i_0 j_s}^1 + c_{j_s i_k}^2 + \sum_{l=k+1}^n (c_{i_{l-1}j_l}^1 + c_{j_l i_l}^2) + c_{i_n j_0}^1 + c_{j_0 i_0}^2,$$

$$\hat{L} = \sum_{l=1}^{k-1} (c_{i_{l-1}j_l}^1 + c_{j_l i_l}^2) + c_{i_{k-1}j_s}^1 + c_{j_s i_k}^2 + \sum_{l=k+1}^n (c_{i_{l-1}j_l}^1 + c_{j_l i_l}^2) + c_{i_n j_0}^1 + c_{j_0 i_0}^2.$$

Рассмотрим их разность

$$\hat{L} - \bar{L} = c_{i_{k-1}j_s}^1 - (c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{j_0 i_0}^2 + c_{i_0 j_s}^1) = c_{i_{k-1}j_s}^1 - (c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{00}^2 + c_{i_0 j_s}^1) = c_{i_{k-1}j_s}^1 - (c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{i_0 j_s}^1).$$

С учетом того, что $c_{00}^2 = 0$, получим

$$\hat{L} - \bar{L} = c_{i_{k-1}j_s}^1 - (c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{i_0 j_s}^1).$$

Рассмотрим объекты i_{k-1} , i_0 , j_0 и j_s . С учетом того, что пара i_0 и j_0 образует один объект – точку сбора, то эти объекты образуют треугольник (рисунок 3).

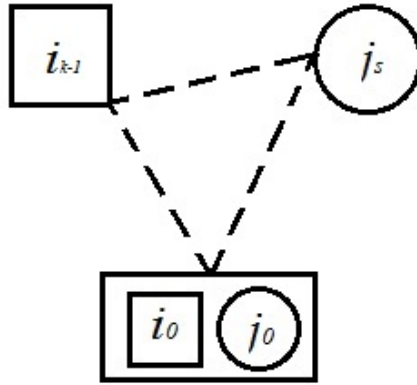


Рис. 3 – Название

Таким образом, по неравенству треугольника получим

$$c_{i_{k-1}j_s}^1 \leq c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{i_0 j_s}^1,$$

тогда

$$\hat{L} - \bar{L} = c_{i_{k-1}j_s}^1 - (c_{i_{k-1}j_0}^1 + c_{i_0 j_s}^1) \leq 0,$$

то есть

$$\hat{L} \leq \bar{L}.$$

С учетом (1) получим

$$L^* \leq \hat{L} \leq \bar{L}. \quad (2)$$

Таким образом, получается, что в задаче маршрутизации транспорта с единым местом сбора с чередованием объектов в случае, когда матрицы затрат задают расстояния между объектами, оптимальным является маршрут, в котором место сбора встречается только один раз.

Заметим, что равенство в (2) возможно в том случае, когда путь от i_{k-1} к J_s проходит через место сбора, что в реальных задачах практически невозможно.

Список литературы

1. Medvedev S. The vehicle routing problem for several agents among the objects of two types / S. Medvedev, A. Sorokina, O. Medvedeva // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). Samara. 2019. pp. 535-540.

2. Медведев С. Н. Математическая модель и алгоритм решения задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием и единым местом сбора // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т., 2021. № 1. С. 21-32. DOI: <https://doi.org/10.17308/sait.2021.1/3368>.

3. Медведев С.Н. Модель и жадный алгоритм решения задачи маршрутизации с чередованием объектов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. XII междунар. конф. «ПМТУКТ-2019». Воронеж : ВГУИТ, 2019. С. 220-224.

УДК 519.177

*Межуев А.М., Родионов Д.В., Шамаев Е.И., Шиндин А.Р.,
ФГКВОУ ВО ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина» МО РФ, г. Воронеж*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ СТРУКТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

Структурные характеристики цифровых систем связи (ЦСС) во многом определяют, обеспечиваемую ими эффективность и надежность функционирования [1]. При традиционном подходе к структурному анализу ЦСС большинство топологических характеристик вычисляется достаточно сложно, при этом в зависимости от конкретного вида системы и ее назначения могут иметь различную физическую интерпретацию. Ситуация усугубляется многократно, если дело касается структур высокой степени сложности, а также в случае мобильных и быстро изменяющихся структур [2, 3]. Поэтому в данной работе для определения основных структурных характеристик ЦСС, предлагается использование спектральной теории графов (спектральный анализ графовых моделей).

© Межуев А.М., Родионов Д.В., Шамаев Е.И., Шиндин А.Р., 2021

Рассмотренные в статье структурные характеристики позволяют достаточно полно охарактеризовать и проанализировать структурное построение ЦСС любой конфигурации и степени сложности. Для их исследования общепринято использовать геометрические графовые модели ЦСС, которые являются наиболее распространенными в теории топологии, а также в практических приложениях. Однако обеспечить на их основе точное решение задач анализа и синтеза ЦСС с требуемыми структурными характеристиками для реальных структур ЦСС высокой сложности оказывается затруднительным [3, 4]. В этой связи получение строгого математического описания основных структурных характеристик для анализа и синтеза топологических моделей на основе спектральной теории графов, является важной задачей, имеющей большое практическое значение.

Основными топологическими характеристиками ЦСС являются: структурная сложность, адаптируемость и диаметр структуры, структурная связность, надежность и живучесть системы.

В качестве исходных данных для структурного анализа и синтеза ЦСС используются: количество УК ($B_{УК}$) и КС (M); базовая структурная модель ЦСС в виде графа G и ее матрица смежности A ; требования к структурным характеристикам ЦСС (критерии синтеза). Для модели ЦСС будем использовать неориентированные графы без кратных ребер и петель (мультиграфы). При этом минимальное число ребер связного графа, применяемого в качестве структурной модели ЦСС равно $M_{min} = B_{УК} - I$ [5, 6]. В таблице 1 показано аналитическое описание представленных выше характеристик структурными параметрами, определенными с использованием спектральной теорией графов.

Представление модели структуры ЦСС

1. Характеристический многочлен матрицы A : $P_G(\lambda) = |A_G|$, где $A_G = \lambda I - A$ – характеристическая матрица графа G (I – единичная матрица).

2. Обыкновенный спектр графа: $Sp(G) = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{B_{УК}}]$ – корни характеристического уравнения $P_G(\lambda) = 0$ (по теореме Гамильтона-Кэли), где λ_i – собственные значения матрицы A .

3. Система собственных векторов $x_1, x_2, \dots, x_{B_{УК}}$ [5]: $A = X \cdot \Lambda \cdot X^{-1}$, где X – матрица, состоящая из столбцов собственных векторов, Λ – диагональная матрица, состоящая из λ_i спектра $Sp(G)$.

4. Характеристический многочлен матрицы Кирхгофа $C = D - A$ (где D – матрица валентностей вершин (УК) графа G): $C_G(\lambda) = |C_G|$, где $C_G = \lambda I - C$.

5. С-спектр: $Sp_C(G) = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{B_{YK}}]_C$ – корни характеристического уравнения $C_G(\lambda) = 0$.

Структурная сложность и надежность системы

1. Число остовных деревьев [6, 7]: $t(G) = \frac{1}{B_{YK}} (-1)^{B_{YK}-1} c_{B_{YK}-1} = \frac{1}{B_{YK}} \prod_{i=1}^{B_{YK}-1} (\lambda_i)_C$,

где $c_{B_{YK}-1}$ – коэффициент $C_G(\lambda)$, λ_i – собственные значения спектра $Sp_C(G)$.

2. Соотношение между числом УК и КС $L = M - B_{YK}$.

Адаптируемость структуры

1. Итерационные алгоритмы преобразования базовых топологий ЦСС (например, посредством переключений Зайделя или метода Сунада [6, 7]) по структурным критериям ($t(G)$, $a(G)$, \bar{d} , N_k , $h(G)$ и т.д.)

2. Нахождение коспектральных структур $Sp(G_1) = Sp(G_2)$.

Диаметр структуры

1. Количество различных собственных значений обыкновенного спектра m [3]: $d \leq m - 1$.

2. Обобщенный структурный показатель [4 – 6]: $ОСП = \bar{d} / M = 0,75 d / M$, где $0,5d \leq \bar{d} \leq d$ – средний диаметр

Структурная связность и надежность системы

1. k -связность структуры ЦСС [3]: $a(G) = (\lambda_{B_{YK}-1})_C$, а для полностью связанных структур $a(G) = \lambda_1 = r$.

2. Индекс (степень регулярности) графа [3,5,6]: $r = \bar{f} = \frac{1}{B_{YK}} \sum_{i=1}^{B_{YK}} \lambda_i^2$

3. Неравенство Чигера [7] (наличие «узкого горла») $0,5(r - \lambda_2) \leq h(G) \leq \sqrt{2r(r - \lambda_2)}$, где $h(G)$ – константа Чигера, λ_2 – второе собственное значение спектра $Sp(G)$.

Живучесть системы

1. Число внутренней устойчивости: $\alpha(G) \leq p_0 + \min(p_-, p_+)$, где p_0, p_-, p_+ – количество собственных значений обыкновенного спектра $Sp(G)$, равных нулю, меньших или больших нуля, соответственно;

2. Число маршрутов длины k : $N_k = \sum_{v=1}^{B_{VK}} X_v \lambda_v^k$, где $X_v = \sum_{i=1}^{B_{VK}} x_{iv}$ – собственные векторы матрицы A .

Критерии синтеза структурно устойчивой ЦСС

$t(G) \rightarrow \max$, $d \rightarrow \min$, $ОСП \rightarrow \min$, $a(G) \rightarrow \max$, $r, \bar{f} \rightarrow \max$,
 $h(G) \rightarrow \max$, $\alpha(G) \rightarrow \min$, $N_k \rightarrow \max$.

При рассмотрении свойства адаптируемости структуры ЦСС спектральный подход является единственным эффективным средством получения графовых моделей высокой устойчивости в условиях воздействия дестабилизирующих факторов и изменяющихся условий. Обеспечение требуемых топологических параметров осуществляется по отдельным итерационным алгоритмам на основе спектрального анализа графов для различных вариантов базовых структур с применением критериев синтеза [3, 5–7]. При этом на каждой итерации алгоритмов осуществляется нахождение коспектральных графовых моделей ЦСС с целью получения альтернативных вариантов максимальной структурной устойчивости и формирования базы данных резервных топологий ЦСС при решении задач адаптации.

Аналитическое моделирование в среде Maple 15 показало реализуемость и подтвердило достоверность результатов, получаемых с использованием спектральной теории графов при исследованиях структурных характеристик и параметров ЦСС. По результатам многочисленных исследований особый интерес с точки зрения обеспечения структурной связности и устойчивости представляют регулярные топологии [1, 3, 4]. Поэтому в процессе синтеза базовой структуры ЦСС и ее коррекции необходимо ориентироваться на преобразования, приводящие к получению регулярных топологий.

Список литературы

1. Макаренко, С.И. Описательная модель сети связи специального назначения // Системы управления, связи и безопасности. 2017. №2. С. 113–164.
2. Боговик, А.В. Эффективность систем военной связи и методы ее оценки. С.-Пб.: ВАС, 2006. 183 с.
3. Кононов, Ю.М. Автоматизация управления и связь в ВМФ. С.-Пб.: Элмор, 2001. 508 с.
4. Назаров, А.Н. Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения. Красноярск: Изд-во Поликом, 2010. 389 с.

5. Андреев, А.М. Многопроцессорные вычислительные системы: Теоретический анализ, математические модели и применение: учеб. пособие. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. 334 с.

6. Цветкович, Д. Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наукова думка, 1984. 384 с.

7. Butler, S. Spectral graph theory // in Handbook of Linear Algebra, 2nd edition, ed. L. Hogben, CRC Press, 2017. 1904 p.

УДК 621.396

Милохин А.В., Дмитриев С.А.,

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

УСТАНОВКА ДЛЯ ОЦЕНКИ НАПРАВЛЕННЫХ СВОЙСТВ АНТЕНН АПЕРТУРНОГО ТИПА

Установка формирует одно рабочее место для четырех курсантов и обеспечивает проведение серии экспериментов учебного лабораторного практикума антенной тематики.

Рабочее место условно состоит из трех частей:

1. Передающая часть, состоящая из автоматизированного поворотного устройства, блока генераторной секции и излучающей рупорной антенны.

2. Приемная часть, состоящая из автоматизированного поворотного устройства, блока детекторной секции и приемной антенны.

3. Рабочая станция - персональный компьютер со специализированной управляющей программой, обеспечивающий дистанционное управление, сбор, обработку и визуализацию экспериментальных данных.

В состав установки входят следующие экспериментальные антенны:

– передающая антенна в виде пирамидального рупора с прямоугольным волноводным фидером;

– приемная Е – секториальная антенна с углом раскрыва меньшим оптимального;

– приемная Е – секториальная антенна с углом раскрыва равным оптимальному;

– приемная Е – секториальная антенна с углом раскрыва большим оптимального;

– приемная Н – секториальная антенна с углом раскрыва меньшим оптимального;

– приемная Н – секториальная антенна с углом раскрыва равным оптимальному;

– приемная Н – секториальная антенна с углом раскрыва большим оптимального;

– зеркальная параболическая антенна.

Отличительной особенностью лабораторной установки является ее возможность работы в двух режимах: «Автономное управление» и «Внешнее управление».

В автономном режиме управление поворотными устройствами, режимами генераторной и детекторной секций осуществляются вручную с помощью соответствующих органов управления, установленных на передних панелях передающей и приемной части установки, при этом все необходимые параметры выводятся на индикаторы. Данный режим удобен для проведения учебных занятий с привлечением бригады из 4-6 курсантов, когда каждый из них может «в живую» участвовать в процессе настройки и измерения параметров антенн. Однако следует учесть, что близко расположенные к антеннам и перемещающиеся в лаборатории люди будут неизбежно искажать картину электромагнитного поля, что снижает точность экспериментальных исследований [1].

В режиме внешнего управления с удаленного компьютера осуществляется дистанционное управление передающей и приемной частью установки, сбор и обработка экспериментальных данных. В этом случае не требуется близко приближаться к лабораторной установке, что повышает точность измерений, но несколько снижает наглядность эксперимента.

Одним из важных моментов, определяющих точность дальнейших измерений, является выбор местоположения антенн в лаборатории [2]. При этом следует учитывать что:

1. Расстояние между приемной и передающей антенны должно быть не менее 5 метров (дальняя зона).

2. Антенны должны находится на прямой видимости, т. е. между ними не должно быть каких-либо загромождающих предметов.

3. Антенны должны находится на расстоянии не менее 2 м от протяженных металлических предметов (металлических стеллажей, шкафов, стенов и т.п.).

4. Антенны должны располагаться на расстоянии не менее 2 м от стен лаборатории и на высоте не менее 2 м от пола.

5. Во время измерения следует ограничить перемещение курсантов по лаборатории: поскольку человек, с электродинамической точки зрения, обладает конечной проводимостью, то его перемещение может исказить интерференционную картину поля в лаборатории.

Не соблюдение указанных условий может привести к сильным погрешностям измерения диаграмм направленности и поляризационных характеристик антенн. Необходимо помнить, что точные измерения характеристик антенн возможно только в специальной «безэховой» камере, стены и потолок которой покрыты материалами, поглощающими электромагнитные волны, что исключает нежелательную интерференцию поля. В условиях реальной учебной лаборатории нельзя полностью устранить отраже-

ние электромагнитных волн от оборудования и стен лаборатории, поэтому к выбору местоположения антенн в лаборатории необходимо подходить со всей ответственностью.

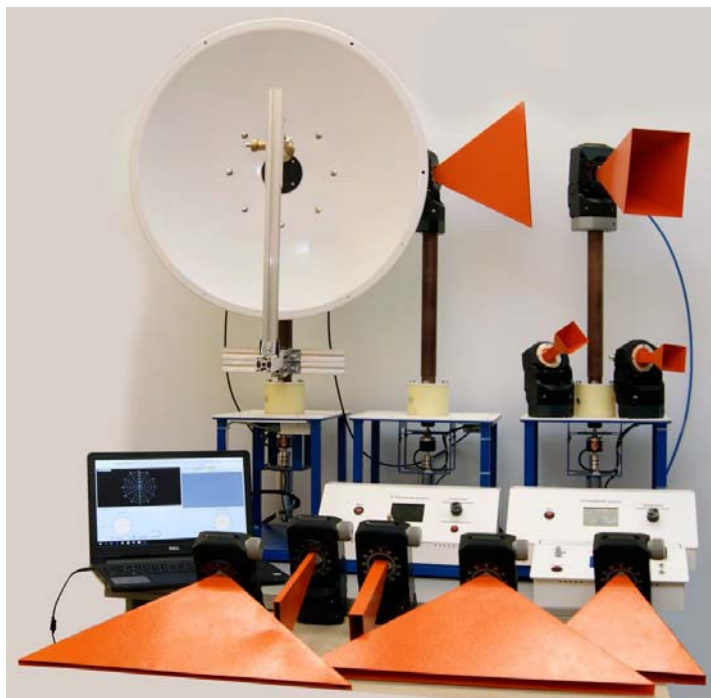


Рис. 1 – Внешний вид лабораторной установки

Список литературы

1. Устройства СВЧ и антенны / под ред. Д.И. Воскресенского. Изд. 2-е доп. и перераб. – М.: Радиотехника, 2006. – 376 с.
2. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ: Учеб. для радиотехнических спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1988. – 432 с.

УДК 51 – 72

Мохова В.В.,

*ФИЦ «Единая геофизическая служба» РАН, г. Воронеж,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж*

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЛИТОСФЕРЫ ЗЕМЛИ И ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В геологическом плане территорией исследований является Воронежский кристаллический массив (ВКМ) – один из крупнейших сегментов

Восточно-Европейской платформы. Геологическое строение земной коры региона свидетельствует о значительной латеральной неоднородности и существенной вертикальной расслоенности [1].

Среда является сложной, неоднородной даже в пределах одного региона, т.к. изменяются структура, состав пород и их физические свойства.

Основные понятия определения сложности среды – ее однородность и неоднородность. Если две точки в среде не различаются по физическим свойствам, то среда называется однородной, иначе среда называется неоднородной.

Оценка однородности или неоднородности среды может определяться с помощью длины волны. Считается, если размер неоднородности меньше либо равен десятой части длины волны, то можно считать, что среда однородна. Очевидно, что если мы будем бесконечно уменьшать объем среды, то среда станет однородной. В реальности же все среды являются неоднородными. [2].

Неоднородность среды влияет на распространение сейсмических волн в ней.

В абсолютно упругой однородной и изотропной среде, в области, где отсутствуют внешние силы воздействия на среду, распространение упругих (сейсмических) волн описывается линейным дифференциальным уравнением динамического равновесия Ламэ [2]:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{grad div } \bar{u} + \frac{\mu}{\rho} \text{rot rot } \bar{u} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (1),$$

где $\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$ – вектор смещения частиц среды под действием проходящей волны, изменяющейся во времени t и пространстве x, y, z ; λ и μ – постоянные Ламэ, определяемые упругими свойствами среды; ρ – плотность среды. Константы λ и μ можно выразить через упругие параметры среды – модуль Юнга (E) и коэффициент Пуассона σ :

$$\lambda = E \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \mu = E \frac{1}{2(1 + \sigma)}.$$

Модуль Юнга характеризует сопротивление упругого вещества растягивающей (сжимающей) силе. В горных породах модуль Юнга может существенно различаться.

Коэффициент Пуассона характеризует соотношение между относительным поперечным сжатием (растяжением) и относительным продольным удлинением (сокращением) объемного элемента вещества, изменяется в пределах от 0 до 0.5 [3]:

Как следует из выше изложенного, уравнение (1) описывает распространение сейсмических волн в «идеальных» условиях, в абсолютно упругой однородной и изотропной среде, где отсутствует внешнее воздействие. Но в действительности, применить данную модель к фактическим сейсмиче-

ским событиям не представляется возможным, т.к. среда, в которой распространяются упругие волны (земная кора, мантия), не является однородной.

Следовательно, в дальнейшем, на примере Воронежского кристаллического массива, необходимо рассмотреть возможности моделирования сейсмических волновых процессов разной природы (телесеismicкие землетрясения, промышленные взрывы, локальные землетрясения).

Список литературы

1. Литосфера Воронежского кристаллического массива по геофизическим и петрофизическим данным // гл. ред. Н.М. Чернышов. – Воронеж: Научная книга, 2012.– 330 с

2. Ермаков А.П. Введение в сейсморазведку. Москва. Геологический факультет МГУ им. Ломоносова. 78 с.

3. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. Сейсморазведка: учебник для вузов. Тверь: Издательство АИС, 2006. 744 с.

УДК 519.837

Мухсинов Е.М.,

*Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд, Таджикистан*

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим квазилинейную дифференциальную игру дробного порядка α ,

$$m - 1 < \alpha < m, m = 1, 2, \dots, \\ D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + f(u(t), v(t), t), \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n, t \geq 0, A$ – квадратная матрица порядка n , отображение $f(\cdot, \cdot, \cdot): R^p \times R^q \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ непрерывно по (u, v) и измеримо по t , $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^p$ – измеримое управление преследования, $v(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^q$ – измеримое управление убегания, которые удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2, \text{ где } \rho, \sigma > 0,$$

а D_t^α – дробная производная Капуто порядка α от функции $x(t)$ т.е.

$$D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-1-\alpha} x^{(m)}(s) ds, \alpha > 0 \text{ и } m = [\alpha] + 1,$$

Для игры (1) начальные условия задаются равенствами

$$\left. \frac{d^t x(t)}{dt^t} \right|_{t=0+} = x_t^0, t = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

а терминальное множество, где заканчивается игра, задается линейным подпространством $M \subset R^n$. Далее полагаем, что локально интегрируемое отображение $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ такое, что для любых допустимых управлений $u(\cdot), v(\cdot)$ задача (1) с начальными условиями (2) имеет решение [1, с.260]

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i E_{1/\alpha}(At^\alpha; t+1)x_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(t-s)^\alpha; \alpha) f(u(s), v(s), s) ds,$$

где $E_{1/\alpha}(At^\alpha; \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}$ — обобщенная функция Миттаг-Леффлера, $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ — гамма функция.

Пусть M^\perp — ортогональное дополнение к M в R^n , π — оператор ортогонального проектирования из R^n на M^\perp . Ясно, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда $\pi x = 0$.

Для дифференциальной игры (1) с начальным условием $x^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$ исследуем разрешимость задачи преследования [2, с.308].

Справедлива следующая

Теорема. Допустим, что:

1) существуют непрерывно зависящий от $t \geq 0$ линейный оператор $L(t): R^q \rightarrow R^p$ и локально интегрируемое отображение $g: R^p \rightarrow R^n$ такие, что при всех $T \geq 0, t \in [0, T]$ имеет место равенство

$$\pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) g = -\pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) f(u(s), v(s), s);$$

2) $\rho \geq \lambda(t), t \geq 0$, где

$$\lambda^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2 \right\};$$

3) начальная точка x^0 и число $T = T(x^0)$ такие, что имеет место включение

$$\pi \sum_{i=0}^{m-1} T^i E_{1/\alpha}(AT^\alpha; i+1)x_i^0 \in \left\{ \int_0^T \pi(T-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A(T-s)^\alpha; \alpha) g(p(s)) ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq (\rho - \lambda(t))^2 \right\}$$

Тогда в игре (1) из начальной точки x^0 возможно преследование за время T .

Замечание. Аналогичная задача исследуется в [3, с.124] для дифференциальной игры нейтрального типа.

Список литературы

1. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011.Т.17. №2. С.256-270.
2. Понтягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980.т.112 (154). №3.С.307-331.
3. Y.M. Mukhsinov, A Quasilinear Differential Game of Neutral Type with Integral Constraints in a Hilbert Space // International Conference Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis, Dolgoprudniy, Russia. 2021. P.124.

УДК 517.958

Парт А.А., Бачурин М.С.,

ФГКВООУ ВПО Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В СЕТЕВИДНЫХ АНТЕННЫХ

Современные комплексы радиосвязи имеют в своём составе множество различных антенн, большинство из них имеет сетевидную структуру. Тут можно выделить две категории: антенны жесткой конструкции и антенны, приёмным элементом которых является кабель. Антенны жесткой конструкции, такие как логопериодическая, зеркальная, не подвергаются колебательным процессам с большой амплитудой колебаний. На их поверхности возникают лишь мелкие вибрации, которые не влияют на параметры антенн, отвечающие за приём или передачу сигнала. Совсем наоборот дело обстоит с антеннами, приёмным элементом которых является кабель. Примером таких антенн являются V-образная, диполи различной длины. Размеры приёмного полотна таких антенн достигают 40 метров. Устанавливаются они, соответственно, с небольшой стрелой провисания, так как обеспечить должное натяжения при таких размерах кабеля невозможно. Исходя из этого возникает проблема – при воздействии на приёмный элемент потоков ветра большой силы будут возникать колебания такой амплитуды и формы, что изменятся передающие характеристики антенны. Моделирование подобных процессов позволит исследовать степень искажения сигнала и разработать методы устранения подобных колебательных воздействий.

В статье используются обозначения и определения, принятые в работах [1, 2].

Будем считать, что функции, рассматриваемые ниже, удовлетворяют условиям согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (1)$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$.

Рассмотрим аппроксимацию начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа с распределенными параметрами на ориентированном ограниченном графе:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\left(\alpha u(x,t) + a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

здесь $\alpha = const$, $\phi(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ имеют место предположения

$$0 \leq a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Разобьем ребра \mathcal{V} графа Γ на частичные интервалы длиной h . Будем считать, что точки разбиения kh ($k \in \square$) содержат внутренние узлы $\xi \in J(\Gamma)$. Множество точек $\{kh\}$ назовем сеткой графа Γ и обозначим Γ^h . Аналогично вводится разбиение на частичные интервалы длиной τ области изменения временной переменной t . Для сеточных функций $u^{h,\tau}$, соответствующих функциям $u(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \in [0, T]$ введем разностные отношения (правое и левое соответственно):

$$\Delta_x u^{h,\tau} = \frac{1}{h} (u(x+h,t) - u(x,t)); \quad \nabla_x u^{h,\tau} = \frac{1}{h} (u(x,t) - u(x-h,t)).$$

Разностным аналогом второй частной производной $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ по пространственной переменной является

$$\nabla_x \Delta_x u^{h,\tau} = \frac{1}{h^2} (u(x+h,t) + u(x-h,t) - 2u(x,t)).$$

Аналогично определяются отношения $\Delta_t u^{h,\tau}$, $\nabla_t u^{h,\tau}$, $\nabla_t \Delta_t u^{h,\tau}$. Построим разностную схему для задачи (2)-(4).

$$\nabla_t \Delta_t u^{h,\tau} - \nabla_x (a^h \Delta_x u^{h,\tau}) + b^h u^{h,\tau} = f^{h,\tau}, \quad (7)$$

$$u^{h,0} = \phi^h, \quad \Delta_t u^{h,0} = \psi^h, \quad (8)$$

$$(\alpha u^{h,\tau} + a^h \Delta_x u^{h,\tau}) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Разностные отношения (7) должны выполняться на слоях $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) в точках сетки Γ^h ; равенства (8) выполняются для $k = \overline{1, N}$;

равенство (9) – в точках Γ^h . Сеточная функция $a^h = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} a(x) dx$, анало-

гично строятся сеточные функции b^h , ϕ^h , ψ^h . Сеточная функция $f^{h,\tau}$ строится по заданной функции f в соответствии с соотношением

$$f^{h,\tau} = \frac{1}{h\tau} \int_x^{x+h} \int_t^{t+\tau} f(x,t) dx dt.$$

Кроме того, должны быть выполнены разностные соотношения

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} (a^h \nabla_x u^{h,\tau})_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} (a^h \Delta_x u^{h,\tau})_\gamma, \quad (10)$$

аппроксимирующие условия согласования (1) во всех внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$ графа Γ .

Для каждого слоя $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) разностная схема (7)-(10) является однозначно разрешимой системой алгебраических уравнений, ее решение есть сеточная функция $u^{h,\tau}$.

Разностная схема (7)-(10) устойчива и последовательность сеточных функций $u^{h,\tau}$ сходится к обобщенному решению $u(x,t)$ начально-краевой задачи (2)-(4). Доказательство этих фактов приведены в [3, стр. 123-129].

Список литературы

1. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории

управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. 2014. С. 282-286.

3. Провоторов В.В., Махинова О.А. Краевые уравнения с распределенными параметрами на графах. Воронеж: Научная книга, 2013. 133 с.

4. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

5. Сергеев С.М. Математическое моделирование сети торговых предприятий // Вестник Воронежского государственного технического университета 2012. Т. 8 № 1. С. 66-71.

УДК 517.958

Парт А.А., Черноротов П.О.,

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АНТЕННЫХ СИСТЕМАХ

В работе моделируются процессы периодического характера, возникающие в системах сетеподобного типа. Использование класса суммируемых функций позволяет значительно повысить точность расчетов.

Развитие техники не стоит на месте, происходит совершенствование технологий, программные комплексы и мощные ЭВМ позволяют в разы увеличить точность расчетов, это позволяет повысить качество моделирования, открываются возможности для разработки моделей огромного количества прикладных задач. Использование в моделировании новых классов математических объектов, позволяет учитывать особые характеристики изучаемых.

Правильно составленная математическая модель, учитывает не только особенности конструкций системы и процессы физического характера, протекающие в рассматриваемом объекте, но может учесть и многие специфические качества задачи. Модели, описывающие периодические процессы в сложных современных конструкциях, таких, например, как антенные системы, должны удовлетворять всем вышеперечисленным требованиям. Как правило, системы, в которых возникают волновые процессы, представляют собой сеть трубок или проводов, а следовательно, наиболее точно описать такую конструкцию возможно с использованием графов.

Разработанная нами математическая модель, использует интегрируемые (суммируемые) функции, именно они позволяют наиболее

полно учесть всю специфику изучаемого процесса. Таким образом мы изучаем процесс периодического характера, возникающий в системе сетеподобного типа, описываемой при помощи графов.

Нами были использованы обозначения, принятые в трудах [1, 2].

На рассматриваемые функции, накладываются условия согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (1)$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$.

Рассматриваемый процесс описывается начально-краевой задачей для уравнения гиперболического типа с параметрами, распределенными на графе, который ограничен и имеет ориентацию:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\left(\alpha u(x,t) + a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

здесь $\alpha = const$, $\phi(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ выполняются условия

$$0 \leq a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (5)$$

Опираясь на определение слабого решения в классе $W_2^1(\Gamma_T)$, согласно которому функция $u(x,t) \in W_2^1(a, \Gamma_T)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Gamma_T} \left(-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)u(x,t)\eta(x,t) \right) dxdt + \int_{\partial \Gamma_T} \alpha u(x,t)\eta(x,t) dxdt = \int_{\Gamma} \psi(x)\eta(x,0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t) dxdt, \quad (6)$$

$$\forall \eta(x,t) \in W_2^1(a, \Gamma_T), \eta(x,T) = 0,$$

нами доказан факт существования слабого решения в классе $W_2^1(\Gamma_T)$ и получена оценка его нормы.

Список литературы

1. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.

2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // В

сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. 2014. С. 282-286.

3. Провоторов В.В., Махинова О.А. Краевые уравнения с распределенными параметрами на графах. Воронеж: Научная книга, 2013. 133 с.

4. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

5. Сергеев С.М. Математическое моделирование сети торговых предприятий // Вестник Воронежского государственного технического университета 2012. Т. 8 № 1. С. 66-71.

6. Парт А.А. Слабая разрешимость многомерной начально-краевой задачи с распределенными параметрами в сетеподобной области // Системы управления и информационные технологии, №4(70), 2017. С. 19-23.

УДК 539.3

Пегливанова М.М., Пронина Ю.Г.,

*ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
г. Санкт-Петербург*

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРОЗИОННОГО ИЗНОСА ПЛАСТИНЫ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Многие металлы и сплавы обладают так называемым SD-эффектом или пластической анизотропией, т.е. имеют различные пределы текучести при растяжении и сжатии. При изгибе пластины, обладающей такими свойствами, происходит смещение ее нейтральной плоскости в сторону сжатых волокон, если предел текучести на сжатие превосходит предел текучести на растяжение. Задачи об изгибе балок с пластической анизотропией подробно рассмотрены в работах Г.В. Павилайнен (см. например, [1]). В данной работе исследуется задача об оценке долговечности пластины при чистом изгибе в условиях равномерной коррозии. При этом пластина изготовлена из материала, у которого предел текучести на сжатие выше предела текучести на растяжение, что имеет место для большинства металлов. Скорости коррозии материалов зависят не только от химического состава взаимодействующих сред, но также от многих других факторов.

В некоторых случаях скорости коррозии могут ускоряться за счет повышения механических напряжений в теле. Общая коррозия материала, скорость которой зависит от механических напряжений, называется механохимической коррозией. Различные задачи о механохимической коррозии элементов трубопроводов были рассмотрены в работах [3-6,9]. Задачи об изгибе балок и пластин с учетом коррозии рассматривались в [2]. Однако эффект пластической анизотропии в них не учитывался.

На данном этапе работы исследуется задача о долговечности пластины с известными в каждый момент времени скоростями равномерной затухающей коррозии. Рассматривается металлическая пластина, толщина которой в начальный момент времени равна h_0 , находящаяся в условиях чистого изгиба под действием изгибающего момента M . Материал пластины считается идеальным упругопластическим, но предел текучести на сжатие (σ_c) в d раз выше предела текучести на растяжение (σ_t). Скорости коррозии с обеих сторон пластины считаем известными и в общем случае различными:

$$V_1 = v_{10} \exp(-bt), \quad V_2 = v_{20} \exp(-bt).$$

Здесь b – коэффициент затухания коррозии, v_{10} и v_{20} – скорости коррозии на поверхностях пластины в начальный момент времени.

Требуется определить время перехода пластины в пластическое состояние по всей толщине.

В общем случае (если пластина в начальный момент времени находится полностью в упругом состоянии) процесс перехода пластины в пластическое состояние при уменьшении ее толщины можно разделить на три стадии: (I) стадия чисто упругого изгиба (длится до момента достижения предела текучести на растягиваемой поверхности); (II) стадия односторонней пластичности (длится до момента достижения предела текучести на сжимаемой поверхности); (III) стадия двусторонней пластичности (длится до момента перехода пластины в пластическое состояние по всей толщине). При этом на второй и третьей стадиях происходит смещение нейтральной плоскости пластины в сторону сжатых волокон. На каждой стадии задача сводится к совместному решению уравнений равновесия (для главного вектора и главного момента сил) и уравнения коррозионной кинетики. Заметим, что при развитии локальной коррозии полученное решение перестает быть справедливым, так как локальные повреждения вызывают концентрацию напряжений в их окрестности [7,8].

Показано, что при увеличении разницы между пределами текучести на растяжение и сжатие долговечность пластины увеличивается. При увеличении коэффициента затухания коррозии долговечность также растет; при достаточно высоких показателях b коррозия может полностью остановиться до достижения предельного состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00100).

Список литературы

1. Павилайнен Г.В. Математическая модель задачи изгиба пластически анизотропной балки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. Т. 2(60). 2015. Вып. 4. С. 633–638.

2. Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. Изд-во Саратов. ун-та. 1987. 288 с.

3. Пронина Ю.Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. № 3. С. 55-63.

4. Пронина Ю.Г. Механохимическая коррозия полого цилиндра из идеального упруго-пластического материала под действием постоянного давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. 2006. № 3. С. 121-130.

5. Пронина Ю.Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии // Проблемы прочности и пластичности. 2009. № 71. С. 129-135.

6. Пронина Ю.Г. Равномерная механохимическая коррозия полой сферы из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия. 2009. № 1. С. 113-122.

7. Пронина Ю.Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 104-114.

8. Пронина Ю.Г. Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 3. С. 118-128.

9. Седова О.С., Пронина Ю.Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 2. С. 33-44.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Математическая модель Вольтерра видов, борющихся за пищу, постепенно стала трактоваться как модель конкуренции. В модели Вольтерра и в разработанных на ее основе обобщенных моделях [1], учитывающих межвидовую и внутривидовую конкуренции, не учитывается ресурс, потребляемый обеими популяциями. В [2, 3] предложена модель конкуренции, в которой учитываются оба типа конкуренции и трофический ресурс, на котором происходит конкуренция:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} &= N_i \mu_i \left(1 - N_i / K_i - F_i(S, N_1, N_2, \dots, N_n) \right) \\ \frac{dS}{dt} &= \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \gamma \sum_{i=1}^n F_i(S, N_1, N_2, \dots, N_n) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где N_i - численность i -ой популяции, S - количество трофического ресурса, параметр K_i характеризует внутривидовую конкуренцию (предполагается, что $K_i < \infty$), функции F_i - межвидовую конкуренцию, γ - параметра, характеризующий скорость потребления ресурса всеми популяциями совместно. Положительно определенная непрерывная функция F_i должна удовлетворять условиям: $F_i(0, N_1, N_2, \dots, N_n) = 0$ и $\lim_{S \rightarrow \infty} F_i(S, N_1, N_2, \dots, N_n) < const$. То есть в отсутствие трофического ресурса конкуренции не наблюдается и численность популяции описывается логистическим уравнением. Второе условие означает, что количество трофического ресурса при больших его количествах должно оказывать на конкуренцию незначительное влияние. В начальный момент времени считается, что $N_i = N_i^0$, $S = K$. Если ресурс не восполняется (при $\mu_s = 0$), то исчерпание ресурса можно рассматривать как сезонность конкуренции [4], или как уход в экологическую нишу [5].

В отсутствие ресурса система уравнений (1) будет иметь устойчивую стационарную точку $N_i = K_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В силу непрерывной зависимости правых частей системы уравнений (1) от своих аргументов при малых значениях S система уравнений должна иметь устойчивую стационарную

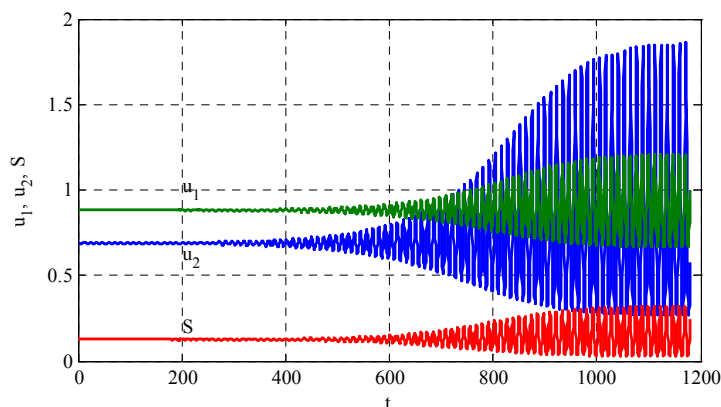
точку, в которой $N_i > 0$. При больших значениях S , при таких, что $F_i(S, N_1, N_2, N_i = 0, \dots, N_n) > 1$, i -я популяция может погибнуть.

Одной из моделей конкуренции двух популяций, у которых внутривидовая и межвидовая конкуренция на трофическом ресурсе начинаются с запаздыванием, представляет задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \mu_1 u_1 \left(1 - u_1 u_1(t-\tau) - \gamma_1 \frac{S}{b_1 + S} u_1(t-\tau) u_2(t-\tau) \right), \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu_2 u_2 \left(1 - u_2 u_2(t-\tau) - \gamma_2 \frac{S}{b_2 + S} u_1(t-\tau) u_2(t-\tau) \right), \\ \frac{dS}{dt} &= \mu_s S \left(1 - \frac{S}{K_s} \right) - \gamma \left(\frac{S u_1}{b_1 + S} + \frac{S u_2}{b_2 + S} \right) u_1(t-\tau) u_2(t-\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

В модели (2), в отличие от модели (1), предполагается, что на межвидовую и внутривидовую конкуренции оказывают влияние состояния популяций, в которых они находились в момент времени $t - \tau$.

При малых временах запаздывания эта система уравнений будет иметь устойчивую стационарную точку, при достаточно больших значениях τ решение будет неограниченно возрастать [6]. Начиная с некоторого значения $\tau = \tau_*$ в системе возникают колебания. На рисунке отражено изменений функций $N_1(t)$, $N_2(t)$ и $S(t)$ для случая $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 1.1$, $\mu_s = 1$, $\gamma_1 = 0.9$, $\gamma_2 = 1.4$, $b_1 = 0.15$, $b_2 = 0.25$, $\gamma = 1$, $S_0 = 0.5$. Стационарная точка $(0.689, 0.881, 0.12)$ при $\tau = 0$ устойчивая, а при $\tau = 2.3$ становится неустойчивой – в системе возникают колебания.



Рисунок

Список литературы

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 368 с.

2. Горыня Е.В., Колпак Е.П. Математические модели конкуренции на трофическом ресурсе *Международный научно-исследовательский журнал*. 2019. № 4-1 (82). С. 14-22.

3. Kolpak E.P., Gorynya E.V. Mathematical model of operational competition *International Journal of Engineering and Technology(UAE)*. 2018. Т. 7. № 3. С. 85-91.

4. Горыня Е.В., Колпак Е.П. Математическая модель "сезонной" конкуренции В сборнике: *Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016) Сборник трудов IX международной конференции*. 2016. С. 98-101.

5. Токарева И.О., Гончарова А.Б., Сергеева Е.И. Муравьиный алгоритм для полной и неполной постановок задачи // *Естественные и математические науки в современном мире*. 2017. № 1 (48). С. 30-35.

6. Александров А.Ю., Воробьева А.А., Колпак Е.П. О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. № 2. С. 72-88.

УДК 57.1

*Пермякова М.А., Полина С.Г., Кузина И.А.,
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург*

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ ЖЕНЩИН

Демографическая политика России до 2025 года нацелена на рост рождаемости, а также сохранение и укрепление здоровья населения. Рождаемость определяется физическими возможностями женщины, в первую очередь ее здоровьем. В стране на сегодняшний день есть ряд заболеваний, число больных которыми на тысячу жителей женского населения постоянно растет. Как следует из анализа статистических данных [1], к ним относятся онкологические заболевания [2], болезни, передающиеся преимущественно половым путем, болезни репродуктивной системы женщин.

Заболеваемость женщин сказывается и на заболеваемости детей. За последние 20 лет число больных детей увеличилось почти в два раза, к врачу один ребенок в возрасте до 14 лет обращается два раза в год. Общая заболеваемость детей в возрасте 0-14 лет растет на 4% в год. Заболеваемость детей на первом году жизни составляет около 3 раз в год. При этом от общего числа детей, рождающимися живыми, около 40% рождаются больными.

Заболевания, передающиеся половым путем, приводят к заболеваниям и последствиям, приводящим к бесплодию. Венерические заболевания несут особую опасность, вызывая риск невынашивания, патологию плода, выкидыши на разных сроках беременности, преждевременные роды, риск передачи заболевания от больной матери ребенку.

Заболеваемость репродуктивной системы женщин: осложнения беременности, родов и после родового периода, расстройства менструаций. Темпы роста этих заболеваний составляют 5-10% в год на 100 000 женского населения. У 70% рожениц есть болезни, осложняющие роды. Все болезни, связанные с родами, вызывают врожденные аномалии у детей; 10% детей рождаются раньше физиологических сроков, 35% детей рождаются больными.

Наиболее опасными среди онкологических заболеваний у женщин – опухоли молочной железы [3], которые составляют около 20% от всех онкологических заболеваний у женщин. Число больных стоящих на учете растет по экспоненциальной зависимости [4], число заболевших по линейной зависимости (рисунок).

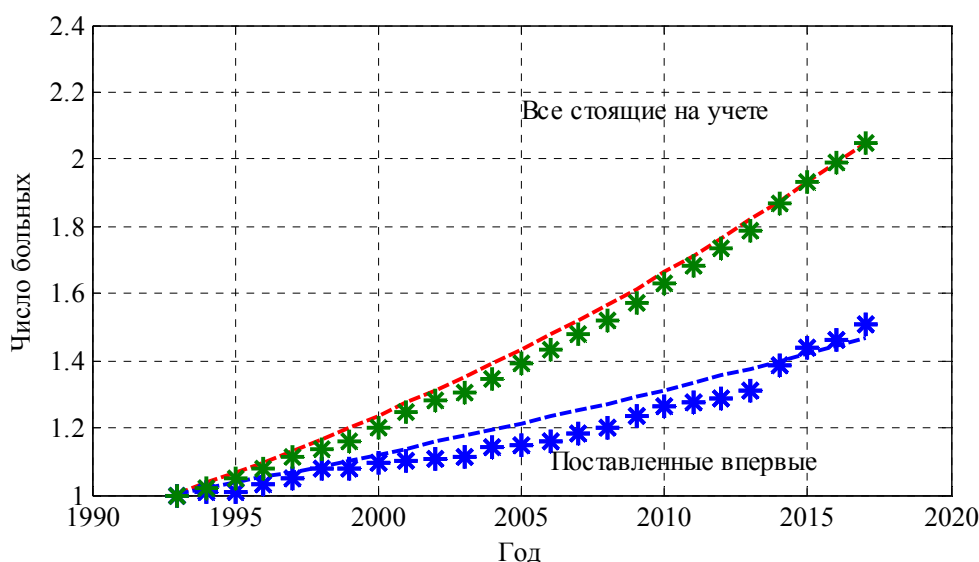


Рис. – Динамика заболеваемости женщин

В возрастной структуре больных женщин, в зависимости от локализации заболевания, 50-70% относится к женщинам трудоспособного возраста. Возрастная структура заболеваемости описывается нормальным распределением. Объяснение этого факта: заболевание происходит от множества случайных причин. Причины конкретных заболеваний на сегодняшний день установить не удастся. При существующих темпах роста заболеваемости женщин к 2030 году около 5% женщин страны будут иметь хронические заболевания репродуктивной системы, если не будут предприняты меры по выяснению причин их возникновения, по разработке методов профилактики и лечения заболеваний.

Список литературы

1. Российский статистический ежегодник. 2018: Стат.сб./Росстат. Р76 М., 2018 694 с.
2. Тонеева Д.В., Гончарова А.Б., Сергеева Е.И. Алгоритм построения экспертной системы диагностики заболеваний на основе дифференциально-диагностических признаков // Технические науки – от теории к практике. 2016. № 11 (59). С. 37-43.
3. Бусько Е.А., Гончарова А.Б., Рожкова Н.И., Семиглазов В.В., Шишова А.С., Жильцова Е.К., Зиновьев Г.В., Белобородова К.А., Криворотько П.В. Модель системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы // Вопросы онкологии. 2020. Т. 66. № 6. С. 653-658.
4. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Расулова М.М., Абрамова А.В. Математическое моделирование лечения онкологического заболевания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 4. С. 437-446.

УДК 57.1

Полина С.Г., Кузина И.А., Колпак Е.П.,
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКНЕ

Акне представляет собой длительное состояние кожи, возникающее, когда отмершие клетки кожи и кожное сало закупоривают волосяные фолликулы. Секрет остаётся и накапливается в волосяном фолликуле, сальной железе и образуются благоприятные условия для размножения бактерий [1]. В результате на поверхности кожи возникают папулы и пустулы, содержащие гной. Лечение акне осуществляется непосредственным воздействием на бактерии медикаментозными препаратами.

В модели распространения папул и пустул предполагается, что размножение бактерий в фолликуле происходит в режиме дискретного времени с временным интервалом τ . Пораженными могут оказаться n фолликул. Переселение бактерий от фолликула к фолликулу происходит случайным образом. Количество бактерий W_k^i в i -ом фолликуле на каждом временном интервале $(k\tau, (k+1)\tau)$ изменяется на величину $(k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n)$

$$W_k^i - W_{k-1}^i = \tau \mu^i W_{k-1}^i \left(1 - W_k^i / K^i\right) - \tau D W_k^i - \delta^i W_k^i + \delta^j W_k^j \quad (1)$$

где μ^i - параметр, K^i - максимальное количество бактерий, которое может находиться в i -ом фолликуле, D - количество лекарственных препаратов, δ^i - доля бактерий, переселяющихся из i -ого фолликула в один из $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ фолликулов, δ^j - доля бактерий, переселяющихся из j -ого фолликула в фолликул i . Переселение бактерий происходит в том случае, если их количество в фолликуле превысит заданное пороговое значение $\gamma < K^i$. Дискретные промежутки времени соответствует значению $\tau = 1$ день. Параметр $\mu = 0.2$ 1/день оценивается по данным клинических исследований [2]. К системе уравнений (1) добавляются начальные условия:

$$W_0^i = \varepsilon \quad (\varepsilon \ll K^i), W_0^j = 0 \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n).$$

На рис. 1 отражено изменение числа пустул (как решение системы уравнений (1)) во времени при расчетном инкубационном периоде созревания одной пустулы в 10 дней. Время появления новой пустулы на первой стадии заболевания - 2-4 дня, а со временем может появляться ежедневно несколько пустул.

Имитационное моделирование распределения «больных» по времени наступления стадий заболевания [3, 4] осуществлялось случайным выбором параметров $\mu^i \in [0.2, 0.3]$. Распределение по времени наступления третьей стадии заболевания (образование 20 пустул) для 30 000 «пациентов» приведено на рис. 2.

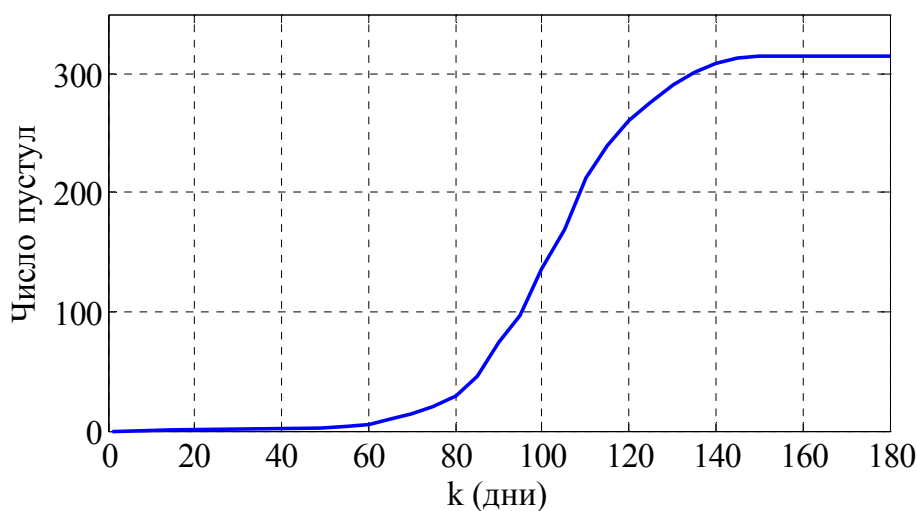


Рис. 1

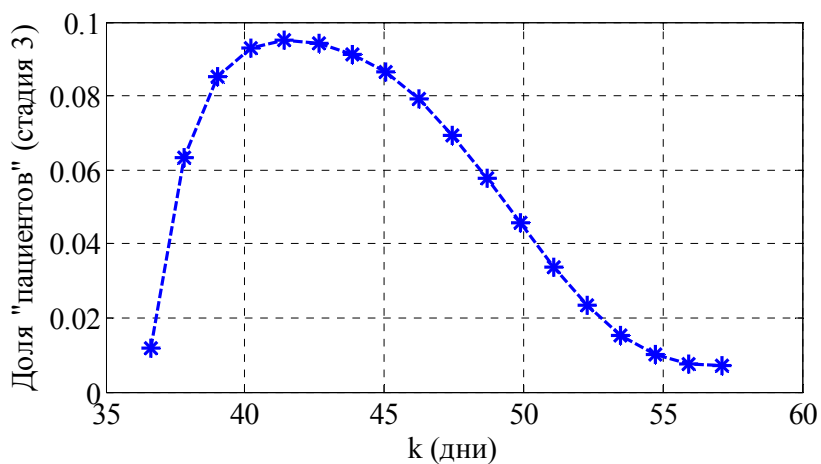


Рис. 2

Список литературы

1. Самцов А.В. Акне и акнеформные дерматозы. М.: Из-во Фармтека. 2014. 352.
2. Гончарова А.Б., Мазова А.В., Колпак Е.П. Математическая модель акне // Международный научно-исследовательский журнал. 2021. № 6-1 (108). С. 12-17.
3. Тонеева Д.В., Гончарова А.Б., Сергеева Е.И. Алгоритм построения экспертной системы диагностики заболеваний на основе дифференциально-диагностических признаков // Технические науки - от теории к практике. 2016. № 11 (59). С. 37-43.
4. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Первичный анализ данных для построения системы поддержки принятия решений // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 250-254

УДК 517.929

Провоторов В.В., Жабко А.П.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж;

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,

г. Санкт-Петербург

L_2 -УСТОЙЧИВОСТЬ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ С НОСИТЕЛЯМИ В СЕТЕПЛОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Представлены пути обобщения анализа дифференциально-разностной системы в пространстве функций с носителем на ограниченном графе на

аналогичные системы в соболевских пространствах функций с компактным носителем в сетеподобной области $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Сетеподобная ограниченная область с границей $\partial\mathfrak{S}$ состоит из областей \mathfrak{S}_k с границами $\partial\mathfrak{S}_k$ ($k = \overline{1, N}$), попарно соединенных в M узловых

местах ω_j ($j = \overline{1, M}$, $1 \leq M \leq N - 1$): $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} \cup \hat{\omega}$, где $\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^N \mathfrak{S}_k$, $\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$,

$\mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset$ ($k \neq l$), $\omega_j \cap \omega_i = \emptyset$ ($j \neq i$), $\mathfrak{S}_k \cap \omega_j = \emptyset \quad \forall k, j$. Области

\mathfrak{S}_k в узловых местах ω_j для каждого фиксированного j ($j = \overline{1, M}$) имеют общие границы в виде поверхности примыкания S_j ($\text{meas } S_j > 0$),

которая разделяет примыкающие к ней $1 + m_j$ области \mathfrak{S}_{k_0} и \mathfrak{S}_{k_s}

($s = \overline{1, m_j}$): $S_j = \bigcup_{s=1}^{m_j} S_{js}$ ($\text{meas } S_{js} > 0$), причем $S_j \subset \partial\mathfrak{S}_{k_0}$, $S_{js} \subset \partial\mathfrak{S}_{k_s}$

($s = \overline{1, m_j}$). Таким образом, ω_j определяется поверхностью примыкания

S_j , для которой S_{js} также поверхность примыкания \mathfrak{S}_{k_s} к \mathfrak{S}_{k_0}

($s = \overline{1, m_j}$); $\partial\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^N \partial\mathfrak{S}_k \setminus \bigcup_{j=1}^M S_j$ --- граница области \mathfrak{S} . Структура области \mathfrak{S}

аналогична геометрическому графу-дереву. Везде ниже считаем, что S_j и

S_{js} являются гладкими поверхностями, области \mathfrak{S}_k - звездные

относительно некоторого шара, своего для каждой \mathfrak{S}_k . Применительно к

сетеподобной области \mathfrak{S} пространства $L_2(\mathfrak{S})$, $W_2^1(\mathfrak{S})$ принимают вид

$L_2(\mathfrak{S}) = \prod_{k=1}^N L_2(\mathfrak{S}_k)$, $W_2^1(\mathfrak{S}) = \prod_{k=1}^N W_2^1(\mathfrak{S}_k)$, соответственно скалярные произведе-

ния и нормы:

$$(u, v)_{\mathfrak{S}} = \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k} u(x)v(x)dx, \quad \text{Pu P}_{\mathfrak{S}} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k} u^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$$(u, v)_{\mathfrak{S}}^1 = \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k} \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\kappa}} \right) dx, \quad \text{Pu P}_{\mathfrak{S}}^1 = \left(\sum_{k=1}^N (u, u)_{\mathfrak{S}_k}^1 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

Обозначим через $C(\overline{\mathfrak{S}})$ совокупность непрерывных в $\overline{\mathfrak{S}}$ функций $u(x)$, через $C^1(\overline{\mathfrak{S}_k})$ ($k = \overline{1, N}$) совокупности функций из $C(\overline{\mathfrak{S}})$, для которых при каждом фиксированном k в $\overline{\mathfrak{S}_k}$ существуют непрерывные

производные $u_{x_1}(x), u_{x_2}(x), \dots, u_{x_n}(x)$ и через $C^1(\bar{\mathfrak{S}}) = \prod_{k=1}^N C^1(\bar{\mathfrak{S}}_k)$ совокупность функций со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами (1) и (2), соответственно. Пусть $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{S})$ – множество функций $u(x) \in C^1(\bar{\mathfrak{S}})$, для которых: 1) имеют место условия примыкания

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial n_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \frac{\partial u(x)_{S_{ji}}}{\partial n_{ji}} ds = 0, \quad x \in S_{ji}, i = \overline{1, m_j}, \quad (3)$$

на поверхностях S_j, S_{ji} ($i = \overline{1, m_j}$) всех узловых мест $\omega_j, j = \overline{1, M}$, 2) $u(x)$ имеют компактный носитель в области \mathfrak{S} , т.е. $u(x)|_{\partial\mathfrak{S}} = 0$. В соотношениях (3) $a(x) \in L_2(\mathfrak{S})$ и $a(x)_{S_j}, u(x)_{S_j}, a(x)_{S_{ji}}, u(x)_{S_{ji}}$ – сужения функций $a(x), u(x)$ на S_j и S_{ji} , векторы n_j и n_{ji} – внешние нормали к S_j и S_{ji} , соответственно, $i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, M}$. Пространством $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ назовем замыкание множества $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{S})$ в норме $W_2^1(\mathfrak{S})$.

Рассмотрим дифференциально-разностную систему уравнений

$$u(k)_t + \Lambda u(k) = f(k), \quad u(0) = \varphi(x), \quad u(1) = \psi(x) = \varphi(x) + \tau[\Lambda\varphi(x) + f(1)], \quad (4)$$

где $\Lambda u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) + b(x)u(x)$, $u(k)_t = \frac{3}{2\tau}[u(k) - u(k-1)] - \frac{1}{2\tau}[u(k-1) - u(k-2)]$.

Определение 1. Слабым решением дифференциально-разностной системы (4) называются функции $u(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, ($k = 2, \dots, M$), удовлетворяющие интегральному тождеству $\int_{\Gamma} u(k)_t \nu(x) dx + \ell(u(k), \nu(x)) = \int_{\Gamma} f(k) \nu(x) dx \quad \forall \nu(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Определение 2. Дифференциально-разностная система (5), (6) L_2 -устойчива по начальным данным $\varphi(x), \psi(x)$ и правой части $f(k)$, если при любом $\tau \leq \tau_0$ выполняется неравенство $Pu(k)P_{\square} \leq R_1 P\varphi P + R_2 P\psi P + R_3 P f P_{2,1}$, где через $Pu(k)P_{\square}$ обозначена норма пространства $L_2(\mathfrak{S})$ или $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, $P f P_{2,1} = \tau \sum_{k=1}^N P f(k) P_{\mathfrak{S}}$, положительные постоянные R_1, R_2 и R_3 не зависят от τ .

Теорема. При выполнении условий $0 < a_* \leq a(x) \leq a^* < \infty$, $|b(x)| \leq \beta < \infty$, $x \in \mathfrak{S}$, $\varphi(x) \in L_2(\mathfrak{S})$ и при $\tau \leq \tau_0 < 0,5 / \rho$ дифференциально-разностная система (4) L_2 -устойчива по начальным данным и правой части.

УДК 517.977.56

Провоторова Е.Н.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НА ГРАФЕ

Пусть Γ – связный ограниченный замкнутый ориентированный граф с ребрами γ_k (каждое ребро параметризовано отрезком $[0,1]$). Обозначим через $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ множество граничных ζ_k и внутренних ξ_k ребер, соответственно. Для каждого узла $\xi \in J(\Gamma)$ графа введем множества: $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер ориентированных «от узла ξ » [1].

В области $\bar{\Gamma}_T = \Gamma \times [0, T]$ ($T < \infty$) рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial y(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial y(0,t)_\gamma}{\partial x}, \quad (2)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$y|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

здесь $a(x)$, $b(x)$ – измеримые ограниченные на Γ функции: $0 < \alpha_0 \leq a(x) \leq \alpha^0$, $|b(x)| \leq \beta$; $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x,t) \in L_1(\Gamma_T)$ с нормой

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T \left(\int_\Gamma u^2(x,t) dx \right)^{1/2} dt.$$

Обозначим через $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ пространство функций $u(x,t)$ из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную также из $L_2(\Gamma_T)$, $Pu P_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} = (\int_{\Gamma_T} (u^2 + u_x^2) dx dt)^{1/2}$. Пусть далее $V_2(\Gamma_T)$ – множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму, определяемую соотношением $Pu P_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}$, и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$. Введем множество $\Omega_0(\Gamma_T)$ функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) как функции из $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ (пространство $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ определяется как замыкание непрерывных на Γ и гладких на каждом ребре $\gamma \subset \Gamma$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям $\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma u'(1)_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma u'(0)_\gamma$ и $u|_{\partial\Gamma} = 0$. Замыкание $\Omega_0(\Gamma_T)$ в норме $V_2(\Gamma_T)$ обозначим через $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Для системы (1)–(4) рассмотрим задачу оптимального управления. Пусть $U = L_2(\Gamma_T)$ и $B: U \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ – линейный непрерывный оператор, причем очевидно $Bv \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ для любого $v \in U$ [2]. И пусть U_δ – выпуклое замкнутое подмножество $U = L_2(\Gamma_T)$ и y_* – заданный элемент пространства $L_2(\Gamma)$.

Задача оптимального в смысле быстрогодействия управления системой (1), (2) **состоит в определении** $\tau_* = \inf \tau$. Элемент $v_* \in U_\delta$, соответствующий τ_* назовем оптимальным управлением по быстродействию.

Теорема. Пусть U_δ ограничено. Тогда существует оптимальное в смысле быстрогодействия управление $v_* \in U_\delta$.

Список литературы

1. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. Vestnik of Saint Peterburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 428-441. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.409>.
2. Даугавет В.А., Яковлев П.В. Среднеквадратическая аппроксимация прямоугольной матрицы матрицами меньшего ранга // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1989, том 29, номер 10, 1466–1479.

МОДЕЛИРОВАНИЕ Cu L_3 -СПЕКТРОВ БЛИЖНЕЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ КРАЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ПОГЛОЩЕНИЯ МОНООКСИДА МЕДИ

Оксид меди (II) обладает стабильностью и повышенными функциональными свойствами, что обуславливает значительный интерес исследователей к этому соединению [1-3]. Монооксид меди имеет моноклинную сингонию кристаллической решётки и относится к пространственной группе $C2/c$ [4].

В данной работе представлены результаты теоретического исследования XANES (X-ray absorption near edge spectroscopy) Cu L_3 -спектров соединения CuO в сравнении с экспериментальными данными [5].

Расчет электронной структуры исследуемого соединения проводился методом линейаризованных присоединенных плоских волн (ЛППВ) в программном пакете Wien2k [6] с использованием обобщенного градиентного приближения (GGA) для обменно-корреляционной энергии. Величины параметров $R_{mt} * k_{max}$ (где R_{mt} – наименьший из радиусов muffin-tin сфер, k_{max} – максимально возможное значение величины вектора в k -пространстве) и l_{max} (максимальное значение квантового числа l при разложении базисной функции внутри атомной сферы по сферическим гармоникам) были взяты равными 7 и 10, соответственно. Коэффициент смешивания электронных плотностей в процедуре самоогласования был взят равным 0.2.

Считается, что XANES-спектры для более качественного соответствия результатов расчета экспериментальным данным лучше вычислять с учетом возбужденных состояний. Для большинства материалов с этой целью создается суперъячейка, объем которой в несколько раз больше объема элементарной ячейки [7, 8]. Она используется при моделировании структуры, которая содержит точечный дефект, в данном случае, атом с остовой дыркой. Создание остовой дырки происходит следующим образом: для выбранного атома, спектр которого нужно рассчитать, удаляется один остовой электрон, который добавляется в зону проводимости для сохранения электронейтральности.

В данной работе Cu L_3 XANES спектры в CuO были рассчитаны шестью способами:

- 1) элементарная ячейка, атом Cu в основном состоянии;
- 2) элементарная ячейка, атом Cu в основном состоянии, потенциал mBJ [6];

- 3) элементарная ячейка, атом Cu содержит половину дырки на основном 2p-уровне;
- 4) элементарная ячейка, атом Cu содержит целую дырку на основном 2p-уровне;
- 5) суперъячейка, атом Cu содержит половину дырки на основном 2p-уровне;
- 6) суперъячейка, атом Cu содержит целую дырку на основном 2p-уровне.

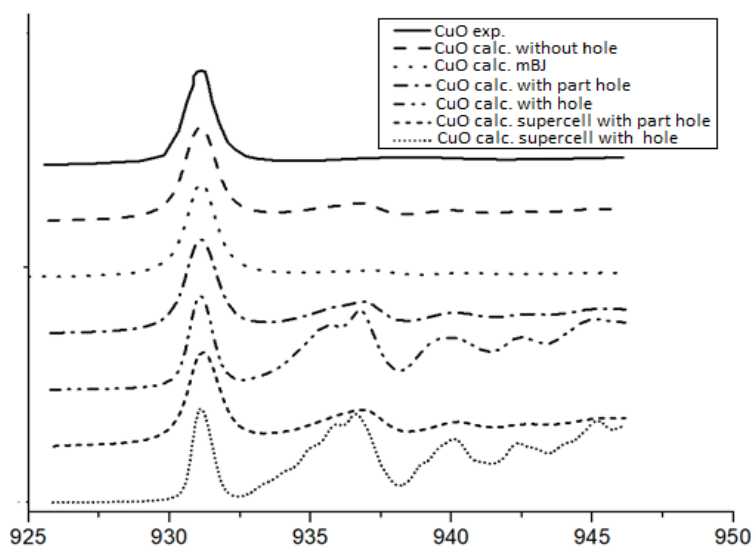


Рис. 1 – Экспериментальный [5] и теоретические XANES Cu L_3 -спектры в монооксиде меди

На рис. 1 представлены экспериментальный [5] и теоретически рассчитанные XANES Cu L_3 -спектры в монооксиде меди в шести вариантах моделирования.

Величина уширения спектрометра S во всех способах моделирования была взята 0.4 эВ, а значение уширения, связанного с конечным временем жизни основного состояния $\gamma_0 - 1.0$ эВ.

Из рисунка видно, что Cu L_3 -спектр имеет один ярко выраженный максимум при энергии 931 эВ. Этот максимум проявился во всех расчета. Но в спектрах, которые были рассчитаны для атома меди с целой основной дыркой и в случае использования элементарной ячейки, и в случае суперъячейки, при энергии 937 эВ также наблюдается значительный рост интенсивности, отсутствующий в экспериментальном спектре. В целом эти два спектра хуже согласуются с экспериментальным, чем все остальные.

В спектрах, полученных остальными способами моделирования, этот пик незначителен. И все спектры, за исключением указанных двух выше, дают хорошее согласие с данными работы [5].

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования России в рамках соглашения N 075-15-2021-1351.

Список литературы

1. Tran T.H., Nguyen V.T. Copper Oxide Nanomaterials Prepared by Solution Methods, Some Properties, and Potential Applications: A Brief Review // International Scholarly Research Notices. 2014. Vol. 5. P. 1–14.
2. Dhineshbabu N.R., Rajendran V., Nithyavathy N., Vetumperumal R. Study of structural and optical properties of cupric oxide nanoparticles // Applied Nanoscience. 2016. Vol. 6, No. 6. P. 933-939.
3. Jareeze A.H. Optical Properties, Structure, and Morphology of CuO Grown by Thermal Oxidation of Cu thin film on Glass Substrate // Journal of Kufa. 2014. Vol. 6, No. 1. P. 36-41.
4. Ruiz E., Alvarez S., Alemany P., Evarestov R. A. Electronic structure and properties of Cu₂O // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. P. 7189.
5. Wang Y., Lany S., Ghanbaja J., Fagot-Revurat Y., Chen Y. P., Soldera F., Horwat D., Mücklich F., Pierson J. F. Electronic structures of Cu₂O, Cu₄O₃, and CuO: A joint experimental and theoretical study // Phys. Rev. B. 2016. V. 94. P. 245418.
6. Schwarz K., Blaha P., Madsen G.K.H. Electronic structure calculations of solids using the WIEN2k package for material sciences // Comput. Phys. Commun. 2002. T. 147. № 1–2. С. 71–76.
7. Manyakin M.D., Kurganskii S.I., Dubrovskii O.I., Chuvenkova O.A., Domashevskaya E.P., Ryabtsev S.V., Ovsyannikov R., Parinova E.V., Sivakov V., Turishchev S.Yu. Electronic and atomic structure studies of tin oxide layers using X-ray absorption near edge structure spectroscopy data modelling // Materials Science in Semiconductor Processing. 2019. V. 99. P. 28–33.
8. Potudanskii G.P., Kurganskii S.I., Domashevskaya E.P. Oscillating fine structure of x-ray absorption and atomic structure of metallic layers in a magnetic multilayer nanostructure (Co₄₅Fe₄₅Zr₁₀/SiO₂)_n // Materials Research Express. 2019. V. 6, №. 11. P. 1150g9.

УДК 517.958; 519.771

Раецкий К.А.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНТРОЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ И УСЛОВИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Рассматривается полностью управляемая динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; A, B – матрицы соответствующих размеров, B – необратимая матрица; $t \in [t_0, t_k]$. Исследуется возможность существования такой вектор-функции управления $u(t)$, при наличии которой в системе (1) траектория, состояние $x(t)$ системы удовлетворяет условиям

$$x(t_i) = a_i, \quad (2)$$

$$u(t_i) = b_i, \quad (3)$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k, \quad \forall a_i \in R^n, \quad \forall b_i \in R^m, \quad i = \overline{0, k}.$$

Функции $x(t)$ и $u(t)$ ищутся в виде

$$x(t) = e^{at} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} \frac{a_j}{(t+c)^j}, \quad u(t) = e^{at} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} \frac{b_j}{(t+c)^j}. \quad (4)$$

Здесь a и c – скалярные параметры, меняя которые можно подобрать траекторию движения системы более подходящую в конкретной практической задаче.

Выражения (4) подставляются в уравнение (1). В полученном соотношении приравняются коэффициенты при одинаковых степенях функции $\frac{1}{t+c}$. В результате получается система соотношений, из которой коэффициенты a_j выражаются через b_j и формируется одно из уравнений для нахождения коэффициентов b_j :

$$\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{1}{(r-j-1)!} (A-aI)^{r-j-1} B b_{r-j} = 0. \quad (5)$$

Условия (2) и (3) дают еще уравнения для определения b_j :

$$e^{at_i} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{b_j}{(t+c)^j} = u_i, \quad (6)$$

$$\text{и } \sum_{j=0}^{r-2} \frac{1}{(t_i+c)^{r-j-2}} \sum_{m=0}^j (-1)^{j+1} \frac{(r-m-j-2)!}{(r-m-1)!} (A-aI)^{j-m} B b_{r-m} = (t_i+c) e^{-at_i} x_i, \quad (7)$$

$i = 0, 1, \dots, k$. Устанавливается необходимое количество слагаемых в (4): $r = (p+2)(k+1) + 1$, где параметр p определяется из условия Калмана [1]

$$\text{rank} (B \ AB \ \dots \ A^q B) = n, \quad q \leq n-1,$$

и $p = \min q$. Из системы (5), (6) и (7) находятся коэффициенты b_j , затем определяются коэффициенты a_j .

Доказывается, что выполнения условия Калмана достаточно для решения поставленной задачи.

Решение такой задачи актуально, например, при моделировании траектории движения материальной точки под действием реактивной силы [1] при условии прохождения траектории через контрольные точки (t_i, x_i) и мягкой посадки в конечной точке.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968.
2. Zubova S.P., Raetskiy K.A. Modeling the trajectory of motion of a linear dynamic system with multi-point conditions // Mathematical Biosciences and Engineering. 2021. Т. 18, V. 6. P. 7861-7876.
3. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 1. С. 65-80.

УДК 519.233.5

Разуваев В.А.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ COVID-19 И ВВОДИМЫХ ОГРАНИЧИТЕЛЬНЫХ МЕР

Целью данной работы является вычисление коэффициентов корреляции Спирмена между заболеваемостью COVID-19 и вводимыми ограничительными мерами при помощи табличного процессора Excel, а также построение выводов на основе полученных данных.

В качестве исходных данных, возьмем статистику по заболеваемости COVID-19 за каждый месяц, начиная с марта 2019 года по май 2021 года. Для удобства вычислений будем использовать не ежедневный прирост, а суммировать суточный прирост, с целью формирования статистики прироста за месяц. В качестве исследуемых стран, возьмем статистику в ряде стран: Россия, Германия, Чехия, Англия, Швейцария, США, Индия, Израиль, Австралия, Турция.

Затем, воспользуемся данными по мерам ограничений, вводимых в данных странах. Будем классифицировать имеющиеся данные следующим образом:

0 – Ограничения отсутствуют

1 – Ограничения носят рекомендательный характер, ношение масок требуется в некоторых общественных местах

2 – Запрет на покидание дома, кроме необходимых поездок и посещения магазинов, необходимо ношение масок во всех общественных местах

3 – Полный запрет покидать дома (локдаун)

Теперь, когда все подготовительные работы завершены, можно приступить к вычислению ранговых коэффициентов корреляции Спирмена между числом заболевших и ограничительными мерами.

Выдвигаем нулевую гипотезу H_0 : коэффициент корреляции статистически не значим (случайно отличается от нуля); альтернативную гипотезу H_1 : коэффициент корреляции статистически значим (не случайно отличается от нуля).

Перед тем как считать непосредственно сам коэффициент Спирмена, необходимо проранжировать анализируемые значения, а также найти квадраты разности рангов этих коэффициентов.

В обоих сопоставляемых ранговых рядах присутствуют группы одинаковых рангов, перед подсчетом коэффициента ранговой корреляции необходимо внести поправки на одинаковые ранги T_a и T_b , $T_a = 0$, т.к не имеют одинаковых рангов, T_b вычислим по формуле:

$$\frac{\sum(b^3 - b)}{12}$$

Для нахождения коэффициента корреляции Спирмена, воспользуемся формулой:

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2 + T_a + T_b}{n(n^2 - 1)}$$

Далее проведем проверку значимости коэффициента корреляции, для этого воспользуемся t-критерием Стьюдента:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

И, наконец, находим t-критическое при уровне значимости $\alpha = 0,01$.

На основании полученных данных принимаем гипотезу:

1) если $t_r \geq t_{крит}$, то отвергают нулевую гипотезу H_0 , то есть при выбранном уровне значимости делают вывод о статистической значимости коэффициента ранговой корреляции.

2) если $t_r < t_{крит}$, принимают нулевую гипотезу H_0 , то есть при выбранном уровне значимости делают вывод о статистической значимости коэффициента ранговой корреляции.

На основании полученных данных можно сделать вывод, что вводимые ограничительные меры не влияют на распространение COVID-19 в большинстве стран, и слабо влияют всего лишь в Германии и Швейцарии.

Стоит отметить, что в связи с расхождением с общепринятыми фактами, модель требует дальнейшего изучения и доработки.

Корреляция ограничительных мер и числа заболевших										
	Россия	Германия	Англия	Чехия	США	Израиль	Индия	Швейцария	Австралия	Турция
n(число значений)	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
Коэффициент корреляции Спирмена:	-0,14	0,72917	0,58095	0,521	0,1	0,37872	-0,0565	0,6800595	0,33006	0,1731
t-критерий	0,5116	3,84175	2,57348	2,202	0,38	1,4754	0,20421	3,3444266	1,260696	0,6336
Степени свободы k	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
t критическое при уровне значимости 0,01	3,0123	3,01228	3,01228	3,012	3,01	3,01228	3,01228	3,0122758	3,012276	3,0123
Принимаемая гипотеза	H0	H1	H0	H0	H0	H0	H0	H1	H0	H0

Рис. 1 – Таблица полученных результатов

Список литературы

1. Фёрстер Э., Рёнц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. Руководство для экономистов. // Перевод с немецкого и предисловие В.М. Ивановой, М.: "Финансы и статистика", 1983 г. – 304 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов // В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
3. Max Roser, Hannah Ritchie and Esteban Ortiz-Ospina (2020) – "Coronavirus Disease (COVID-19) – Statistics and Research". (Макс Розер, Ханна Ричи и Эстебан Орtiz-Оспина (2020 г.) - «Коронавирусное заболевание (COVID-19) - статистика и исследования». Опубликовано онлайн на веб-сайте [OurWorldInData.org](https://ourworldindata.org/coronavirus). По данным веб-сайта: <https://ourworldindata.org/coronavirus> [онлайн-ресурс].

УДК 517.956

Ратыни А.К.,

ФГБОУ ВО «Ивановский государственный химико-технологический университет», г. Иваново

К ТЕОРИИ ПЕРВОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. III

В этой части статьи продолжена начатая в [1,2] нумерация формул и предложений, использованы принятые там обозначения. Кроме них здесь потребуются новые, приводимые ниже.

$r(T)$ – спектральный радиус линейного оператора T , непрерывно действующего в пространстве $C(e)$, где $e \subset R^n$ – компакт. Для $e \subset S$ обозначаем $e_{(0)} = \{x \in e : \beta(x) < 1\}$, $e_{(1)} = \{x \in e :$

$\beta(x) = 1\}$, $e_{(2)} = \{x \in e : \beta(x) > 1\}$. И еще два обозначения (для подпространств пространств 4), 6) из [2]). Пусть $e' \subset e \subset S$, $\bar{e}' = e' \neq S$.
8) $\overset{0}{H}_\mu(S, e, e') = \{z(x) \in H_\mu(S, e) : z(x) = 0 \text{ при } x \in e'\}$. Ясно, что :

$$\overset{0}{H}_\mu(S, S, e') = \overset{0}{H}_\mu(S, e'); \quad \overset{0}{H}_\mu(S, e, \emptyset) = H_\mu(S, e); \quad \overset{0}{H}_\mu(S, e, e) = \overset{0}{H}_\mu(S, e) \text{ при } e \neq S.$$

$$9) \overset{0}{H}_\mu^{2+\alpha}(D, e, e') = \{z(x) \in H_\mu^{2+\alpha}(D, e) : z(x) = 0 \text{ при } x \in e'\}.$$

Основным результатом предлагаемой части статьи является теорема 3 – одно из следствий

теоремы 2 о связи разрешимости краевой задачи (1), (2) с разрешимостью сужения уравнения (2) с S на некоторое множество $\tau \subset S : \sigma\tau \subset \tau, \tau \neq \emptyset$. Если такого множества нет, т.е. из совместного выполнения включений $\tau \subset S, \sigma\tau \subset \tau$ следует $\tau = \emptyset$ (а это, в силу пп. в), д) леммы 6, равносильно тому, что $\Theta = \Omega = \emptyset$), то задача (1), (2) фредгольмова в пространстве $C^{2+\alpha}(D)$; последнее утверждение верно и тогда, когда $\Theta \neq \emptyset, r(A_\Theta) < 1$ (см. [3]). Таким образом, целесообразно использовать теоремы 1 и 2, если аттрактор $\Theta \neq \emptyset, r(A_\Theta) \geq 1$. Кстати, напомним, что если $\Theta \neq \emptyset$, то и $\Omega \neq \emptyset$ (см. п. е) леммы 6) и, как нетрудно показать, используя формулу Гельфанда, $r(A_\Theta) = r(A_\Omega)$.

Теорема 3. Пусть $\Theta = \bigcup_{i=1}^k \{x^{(i)}\}, \partial\Theta = \{x^{(i)} = x^{(j)}, x^{(i)} \neq x^{(j)} (i \neq j)\}; \Theta_{(1)} = \bigcup_{i=1}^k \{x^{(i)}\}:$

$1 \leq k \leq l$. Пусть существуют функция $v_\Theta(x) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ и числа $a_0 \in (0, 1), \mu \in (0, 1), h_i > 0$

($i = 5, 6, 7$) такие, что: $\beta \in H_\mu(S, \Theta_{(1)})$;

$$h_5 \rho^\mu(x, \Theta) \leq v_\Theta(x) \leq h_6 \rho^\mu(x, \Theta) \quad (x \in S); \quad |\sigma x - \sigma y| \leq h_7 |x - y| \quad (x \in S, y \in \Theta); \quad (26)$$

$$a_0 v_\Theta(x) - (A v_\Theta)(x) \geq 0 \quad (x \in S), \quad v_\Theta(x) \geq 0 \quad (x \in D), \quad (L v_\Theta)(x) \leq 0 \quad (x \in D). \quad (27)$$

Тогда справедливо следующее. 1) Для любых

$f \in C^\alpha(D), \psi \in \overset{0}{H}_\mu(S, \Theta, \Theta_{(1)})$ задача (1), (2) имеет единственное решение

$u^\Theta(x) \in \overset{0}{H}_\mu^{2+\alpha}(D, \Theta, \Theta_{(1)})$, при этом верна оценка (M_3 – некоторая постоянная, не зависящая от f, ψ): $\|u^\Theta\|_{H_\mu^{2+\alpha}(D, \Theta)} \leq M_3 (\|f\|_{C^\alpha(D)} + \|\psi\|_{H_\mu(S, \Theta)})$.

2) Существует k решений $u_j(x) \in H_\mu^{2+\alpha}(D, \Theta)$ однородной задачи

$$(Lu)(x) = 0 \quad (x \in D), \quad (Bu)(x) = 0 \quad (x \in S) \quad (28)$$

таких, что: а) $u_j(x^{(i)}) = \delta_i^j$ ($i=1, \dots, l; j=1, \dots, k$), где δ_i^j – символ Кронекера; б) любое решение $\tilde{u}(x) \in H_\mu^{2+\alpha}(D, \Theta)$ задачи (28) представимо в виде (здесь γ_j – числа)

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^k \gamma_j u_j(x); \quad (29)$$

в) если $\Theta_{(2)} = \emptyset$, то $u_j(x) > 0$ ($x \in D, j=1, \dots, k$), а равенство (29) верно для любого решения $\tilde{u}(x) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ задачи (28).

Эта теорема существенно дополняет теорему 2 из [4] и может быть обобщена на случай, когда

Θ есть объединение конечного числа периодических точек σ .

Доказательство теоремы 3 в значительной мере повторяет построения, которые использовались для обоснования теоремы 2 в [4]. Остановимся на одном из новых моментов доказательства теоремы 3, связанном с тем, что здесь, в отличие от [4], не предполагается выполнение равенства $\beta(x) \equiv 1$.

Лемма 8. Пусть выполнены: условия теоремы 1 (в том числе пропущенное в (3) неравенство

$v_\tau(x) \geq 0$ ($x \in D$)); первое неравенство в (18) и первое неравенство в (19) с $\mu \in (0, 1)$; включение

$\beta \in H_\mu(S, \tau)$. Пусть существует функция $w_\tau(x)$ такая, что:

$$w_\tau \in H_\mu(\tau), w_\tau(x) > 0 (x \in \tau), (B_\tau w_\tau)(x) \geq 0 (x \in \tau), \text{ и } \partial(B_\tau w_\tau)(x) \equiv w_\tau(x) - (A_\tau w_\tau)(x). \quad (30)$$

Тогда найдутся функция $V(x) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ и число $h_0 > 0$ такие, что:

$$V(x) > 0 (x \in \bar{D}), (LV)(x) \leq 0 (x \in D), \quad (31)$$

$$(BV)(x) \geq h_0 \rho^\mu(x, \tau) (x \in S). \quad (32)$$

Доказательство. Так как \mathcal{T} – компакт, то из первых двух соотношений в (30) следует существование $\varphi_0(x) \in H_\mu(S)$:

$$\varphi_0(x) = w_\tau(x) (x \in \tau), \varphi_0(x) > 0 (x \in S). \quad (33)$$

Отсюда, из результатов [5] (с. 138, 139) и леммы 2 из [3] следует существование функции $\Phi_0(x)$:

$$\Phi_0(x) \in H_\mu(\bar{D}) \cap C^{2+\alpha}(D), \Phi_0(x) > 0 (x \in \bar{D}), (L\Phi_0)(x) = 0 (x \in D), \Phi_0(x) = \varphi_0(x) (x \in S). \quad (34)$$

Из включений $\beta \in H_\mu(S, \tau)$, $\Phi_0 \in H_\mu(\bar{D})$ и первого неравенства в (18) стандартными построениями

выводим $(A\Phi_0)(x) \equiv \beta(x)\Phi_0(\sigma x) \in H_\mu(S, \tau)$, а следовательно, $(B\Phi_0)(x) \in H_\mu(S, \tau)$. Последнее означает существование числа $h_8 > 0$ такого, что

$$|(B\Phi_0)(x) - (B\Phi_0)(y)| \leq h_8 |x - y|^\mu \quad (x \in S, y \in \tau). \quad (35)$$

Покажем, что

$$(B\Phi_0)(x) \geq -h_8 \rho^\mu(x, \tau) \quad (x \in S). \quad (36)$$

Пусть $x' \in \tau$. Тогда, в силу соотношений (34) и (33), $\Phi_0(x') = \varphi_0(x') = w_\tau(x')$. Отсюда и (30) имеем

$$(B\Phi_0)(x') = (B_\tau w_\tau)(x') \geq 0 = -h_8 \rho^\mu(x', \tau). \quad (37)$$

Пусть $x'' \in S \setminus \tau$. Тогда найдется $y'' \in \tau: \rho(x'', \tau) = |x'' - y''|$. Из (37) (положив там $x' = y''$) имеем $(B\Phi_0)(y'') \geq 0$. Отсюда и (35) выводим $(B\Phi_0)(x'') \geq (B\Phi_0)(y'') - h_8 \rho^\mu(x'', \tau) \geq -h_8 \rho^\mu(x'', \tau)$, что вместе с (37) приводит к (36).

Выберем число ε_0 (a_0 см. в (4), h_3 – в (19), h_8 – в (35)):

$$0 < \varepsilon_0 < (1 - a_0)h_3/h_8. \quad (38)$$

Покажем, что всем требованиям леммы 8 удовлетворяет функция

$$V(x) \equiv v_\tau(x) + \varepsilon_0 \Phi_0(x). \quad (39)$$

Действительно, из указанной выше гладкости v_τ (см. теорему 1) и Φ_0 (см. (34)) следует, что $V \in$

$\in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Из (34), (38), (39) и неравенства $v_\tau(x) \geq 0$ ($x \in D$) вытекает $V(x) > 0$ ($x \in \overline{D}$); а привлекая (4), (34) и (39), получим $(LV)(x) = (Lv_\tau)(x) \leq 0$ ($x \in D$). Таким образом, (31) установлено.

Перейдем к доказательству (32). Используя (36), первые неравенства в (4) и в (19), получим

$$\begin{aligned} (BV)(x) &= a_0 v_\tau(x) - \beta(x)v_\tau(\sigma x) + (1 - a_0)v_\tau(x) + \varepsilon_0(B\Phi_0)(x) \geq (1 - a_0)h_3 \rho^\mu(x, \tau) - \varepsilon_0 h_8 \rho^\mu(x, \tau) = \\ &= h_0 \rho^\mu(x, \tau) \quad (x \in S), \quad \text{где } h_0 = (1 - a_0)h_3 - \varepsilon_0 h_8, \quad \text{причем, в силу (38),} \\ &h_0 > 0. \end{aligned}$$

Замечание 2. При выполнении условий леммы 8 $r(A_\Omega) \leq 1$. Это следует из теоремы 5.5 монографии [6] и неравенств (см. (31),(32)): $(B_\Omega V_\Omega)(x) \equiv V_\Omega(x) - (A_\Omega V_\Omega)(x) \geq 0$, $V_\Omega(x) > 0$ ($x \in \Omega$), где $V_\Omega(x)$ – сужение V на Ω (очевидно, $V_\Omega \in C(\Omega)$).

Замечание 3. 1^0 . Пусть $\beta \in H_\mu(\tau)$, $\mu \in (0,1]$, а для σ выполнено первое неравенство в (18) при $x \in \tau, y \in \tau$. Тогда, как нетрудно показать, существование функции W_τ , удовлетворяющей (30), равносильно существованию функции $\beta_0 \in H_\mu(\tau)$ такой, что: а) $\beta_0(x) \geq \beta(x)$ ($x \in \tau$); б) уравнение

$$\eta(x) - (A_{0\tau}\eta)(x) = 0 \quad (x \in \tau), \text{ где } (A_{0\tau}\eta)(x) \equiv \beta_0(x)\eta(\sigma x), \quad (40)$$

имеет решение $w_{0\tau} \in H_\mu(\tau) : w_{0\tau}(x) > 0$ ($x \in \tau$).

2^0 . При указанной в п. 1^0 гладкости σ и β_0 линейный оператор $A_{0\tau}$, очевидно, непрерывно действует в $C(\tau)$ и в $H_\mu(\tau)$. Согласно п. 1^0 $w_{0\tau}$ является положительной собственной функцией $A_{0\tau}$, отвечающей собственному значению 1. Отсюда и из теорем 5.4, 5.5 в [6] следует, что $r(A_{0\tau}) = 1$ (т.к. конус неотрицательных функций в $C(\tau)$ телесен и нормален). Но из упомянутых предложений в общем случае не вытекает, что $r_H(A_{0\tau}) = 1$, поскольку конус неотрицательных функций в $H_\mu(\tau)$ не является нормальным (здесь $r_H(A_{0\tau})$ – спектральный радиус $A_{0\tau}$ как оператора, действующего в $H_\mu(\tau)$). Если же $r_H(A_{0\tau})$ – собственное значение $A_{0\tau}$, то последнее равенство, как легко убедиться, справедливо.

Список литературы

1. Ратыни А.К. К теории первой нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения. I // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Сборник трудов XI Международной научной конференции. Воронеж: Научная книга, 2018. С. 224–227.
2. Ратыни А.К. К теории первой нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения. I // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Сборник трудов XII Международной научной конференции. Воронеж: ВГУИТ, 2019. С. 278–282.
3. Ратыни А.К. О разрешимости первой нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 844–854.
4. Ратыни А.К. О классической разрешимости одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения. I // Известия вузов. Математика. 1994. № 11. С. 59–66.
5. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

6. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

УДК 378.147

Сергеева И.В.,

Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Академия машиностроения имени Ж.Я. Котина», г. Санкт-Петербург

ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Серьезные изменения произошли во всех сегментах образовательного процесса. Это прежде всего вызвано проникновением цифровых платформ дистанционного образования. Появились технологии обучения направленные на достижение результатов в области софт скиллс и хард скиллс. При этом необходимо с одной стороны овладеть профессиональными компетенциями, знаниями в классическом понимании. С другой, требования технического прогресса, инновационных методик подразумевают проникновение последних достижений науки во все отрасли человеческой деятельности. Наблюдаемый нами процесс проникновения информационных технологий в образовательную среду отражает происходящие в глобальном масштабе сдвиги как в оснащении современных людей средствами коммуникации, так и в способе получения знаний. Как обратная связь при этом возникает необходимость изменения не только структуры учебных планов, но и масштабное сочетание дисциплин. Акцент требований учащихся при этом переносится именно на компетенции, связанные с владением все расширяющимися возможностями компьютеров для решения профессиональных задач по самым различным дисциплинам и направлениям обучения.

Если на сегодняшний день чаще всего звучит понятие кластера конвергентных технологий или NBIC [1], то интересы конкретных студентов все же напрямую связаны с освоением текущего материала с применением современных решений, как из области изучаемых предметов, так и методов подачи. Выбирая направления учебы, студент желает получить деструктивные компетенции, которые в дальнейшем будут формировать его конкурентные преимущества на рынке труда. Не стоит забывать, что если, например, объектом будущей деятельности выбирается наука, карьера исследователя, то преобладающим будет вклад релевантности применяемых в процессе образования технологий современному уровню, что в полном смысле слова принципиально.

© Сергеева И.В., 2021

Катализатором данных процессов стало в первую очередь проникновение высокоскоростных сетей Интернет не только в крупных центрах России, но и охват большинства территории страны. Кроме того, отметим активное развитие беспроводного доступа к ресурсам Интернета, в том числе сетей LTE (Long-Term Evolution) стандарта и необходимый уровень насыщенности разнообразными средствами вычислительной техники, в том числе для построения сетей.

Все это, вместе с доступностью специализированных пакетов программ, подготовкой достаточного количества специалистов по компьютерным технологиям послужило базисом для конвергенции дисциплин. Успехи развития дистанционного обучения, формирование баз знаний, информационных ресурсов, мультимедийных образовательных программ зависит от умения преподавателей объединить в рамках одной образовательной дисциплины возможности современных компьютерных технологий таких, как облачные сервисы, офисные приложения со специализированными кроссплатформенными решениями и электронными учебными материалами по конкретной дисциплине.

Такой подход позволит интенсифицировать создание разветвленной, устойчивой учебной инфраструктуры, причем не только в рамках одного учебного заведения. Существенно упростится процесс тиражирования инновационных знаний, доступнее станет современный уровень образовательных услуг.

Из NBIC драйвером развития выступает информационно-коммуникационная технология как наиболее развитая. В сегодняшнем образовательном процессе именно она в основном чаще всего предоставляет инструменты для развития других. Тут следует обратить внимание, например, на широко используемую возможность проведения компьютерного моделирования как всевозможных ситуаций, так и различных процессов [2]. Как конкретный пример мультидисциплинарной конвергенции в образовании можно рассматривать преподавание такой классической дисциплины как физика.

В процессе реализации планов по совершенствованию методов [3] преподавания, необходимо учитывать нормативные документы, в частности распоряжение от 17 декабря 2010 г. №2299-р утвержденное В.В.Путиным. В его содержательной части, полное название которой звучит: «О плане перехода федеральных органов исполнительной власти и федеральных бюджетных учреждений на использование свободного программного обеспечения», регламентируется принцип миграции от имеющихся операционных систем с закрытым кодом. Это обуславливается, в первую очередь, интересами развития и стратегической безопасности страны, а также борьбой с пиратством.

Поскольку во многих учебных заведениях все еще не приступили к масштабному освоению свободного программного обеспечения (ПО), то

необходимо реально представлять как экономический эффект [4] от его распространения в системе учреждений образования [5], так и широкие дополнительные возможности [6] ухода от проприетарного ПО. Отметим при этом следующие принципиальные моменты, связанные с открытым ПО:

1. Возможность полного контроля над информационными потоками
2. Стабильность работы операционной системы и простая установка версий
3. Дружественный интерфейс, понятный на любом уровне учебного процесса
4. Поддержка большинства основных протоколов, стандартов и форматов
5. Необходимые офисные приложения и сетевые инструменты
6. Невосприимчивость к вирусам, особенно актуальная в учебных учреждениях.

Отметим, что современный подход к образовательной практике имеет тенденцию к сетевым технологиям [7], развитию дистанционных методик. Важно уметь оценить основные показатели такой миграции на свободное ПО не только в рамках отдельного образовательного учреждения, но и в сетевом масштабе. Это позволит гармонично сочетать в образовательных программах овладение базовыми знаниями и компетенциями, пользуясь самыми современными информационными технологиями, причем в рамках конкретной дисциплины учебного плана. Такой метод, несомненно, обогатит основные профессиональные компетенции будущего выпускника. Отдельного внимания при этом потребует вопрос отражения экономических вопросов как неразрывно связанных с любым сегментом человеческой деятельности, причем именно владение широкими возможностями компьютерных технологий позволяет дидактически аффилировать важные для специалистов указанные контрапункты.

Дальнейшим развитием данного направления является переход на платформы облачных технологий. Прежде всего, сюда относятся сервисы SaaS (software as a service), DaaS (desktop as a service), IaaS (infrastructure as a service), PaaS (platform as a service). Они включают в себя средства для следующей ступени взаимодействия в образовательном процессе. Данные экономических расчетов в системе опережающих показателей показывают большое значение перехода на современные методики.

Список литературы

1. Pilipenko O.V., Borisoglebskaya L.N., Sergeev S.M. Economically Optimal Digital Solutions to Manage Integrated Network Flows // Proceedings of the 2nd International Scientific conference on New Industrialization: Global, national, regional dimension (SICNI 2018). p. 416-421.
2. Sergeev S.M. Cross-systems method of approach to energy economy higher educational institutions // В сборнике: Economics. Society: Selected Pa-

pers of the International Scientific School "Paradigma" (Summer-2015, Varna, Bulgaria) Compiling Editor Dr.Sc., Prof. E.Sibirskaya. Yelm, WA, USA, 2015. С. 38-41.

3. Borisoglebskaya L.N., Provotorova E. N., Sergeev S. M. Promotion based on digital interaction algorithm//International Scientific Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering", MIP: Engineering-2019. 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 537 042032.

4. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019". 2019. С. 42025.

5. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М., Лебедева Я.О. Прогнозирование рынка образовательных услуг на базе цифровых технологий // Инновации. 2020. №3 (257) С. 66-70.

6. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М. Кросс-функциональное моделирование процессов взаимодействия коммерческих сетей // Инновации. 2016. № 11 (217). С. 111-116.

7. Borisoglebskaya, L.N., Sergeev, S.M. Model of assessment of the degree of interest in business interaction with the university // Journal of Applied Economic Sciences. 2018. Т. 12. № 8. С. 2423-2448.

УДК 517.28

Словеснов Д.А., Парт А.А.,

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

КОМБИНИРОВАННАЯ СТРАТЕГИЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПРЕВОСХОДСТВА

Для авиационного подразделения, ведущего воздушный бой с превосходящим противником, ввод резервных самолетов является едва ли не единственным способом завоевания боевого превосходства и достижения победы, но для группировки сухопутных войск стратегия резерва не является единственно возможной. Достижение требуемого превосходства в силах может быть реализовано и другими способами, а именно: чистой стратегией авиационного удара и смешанной стратегией резерва и удара.

Применение стратегии резерва связано с увеличением численности группировки своих войск, в предположении неизменности численности группировки противника. Как правило, она требует большого ресурса сил,

которые в условиях современной войны трудно сосредоточить и выдвинуть в заданный район в абсолютной скрытности. Использование стратегии авиационного удара приводит к ослаблению исходной группировки противника на величину ущерба, наносимого группой ударных самолетов, при сохранении исходной численности сухопутной группировки своих войск.

Современная ударная авиация обладает мощным поражающим потенциалом, способным наносить ущерб, приводящий к заметному ослаблению боевой способности объекта удара. Совместное применение стратегии резерва и стратегии авиационного удара образует комбинированную стратегию достижения требуемого превосходства в силах. Реализация комбинированной стратегии сопровождается разрешением ряда частных задач, важнейшей из которых является задача научного обоснования ресурса резервных сил n_A и ресурса ударной авиации $n_{y.a.}$.

Боевая техника, находящаяся на вооружении современных армий, является сложным и дорогостоящим оружием. На этом фоне особенно актуальной становится задача на завоевание превосходства не вообще, не любой ценой, а на основе минимальных затрат своего боевого ресурса. Оптимизация ресурса сил в математическом смысле сводится к постановке и решению задачи на минимизацию линейной функции $N_A = n_A + n_{y.a.}$, выражающей суммарный ресурс, необходимый для изменения соотношения сил с некоторой начальной величины $K_{нач}$ до некоторого требуемого значения $K_{mp} > K_{нач}$. Нетрудно видеть, что требуемый коэффициент боевого превосходства при смешанной стратегии его достижения определяется выражением

$$K_{mp} = \frac{m_B(\tau_1) + n_A}{m_B(\tau_1) - \Delta m_B} \gamma, \quad (1)$$

где $m_A(\tau_1)$ и $m_B(\tau_1)$ – сохранившиеся численности группировок на момент τ_1 , выбранный стороной А для изменения боевого превосходства в свою пользу; n_A и Δm_B – потребные величины резерва и ущерба для скачкообразного изменения коэффициента боевого превосходства с

$$K = K_{нач} = \frac{m_A(\tau_1)}{m_B(\tau_1)} \gamma \quad \text{до} \quad K = K_{mp} = \frac{m_A(\tau_1) + n_A}{m_B(\tau_1) - \Delta m_B} \gamma, \quad (2)$$

где γ – радикал качественного превосходства оружия.

Используя метод условного экстремума для функциональной зависимости, связывающей коэффициент боевого превосходства с величиной резерва n_A и нарядом самолетов $n_{y.a.}$, найдем требуемые коэффициенты:

$$n_A = m_B(\tau_1) \left(\frac{1}{P_{ПВ} \omega_A} - \frac{K_{нач}}{\gamma} \right); \quad n_{y.a} = \frac{m_B(\tau_1)}{P_{ПВ} \omega_A} \ln \frac{K_{mp} P_{ПВ} \omega_A}{\gamma}, \quad (3)$$

где $P_{ПВ}$ – вероятность преодоления ПВО наземных объектов удара, а ω_A – поражающий потенциал ударного самолета.

Формулы (3) дают ответ не только на поставленный вопрос, но и формулируют рекомендации относительно того, какую из трех стратегий в данных условиях целесообразно применять.

Чем больше K_{mp} , тем больше потребный наряд ударных самолетов и меньше потребный состав резерва. Нарращивание коэффициента боевого превосходства имеет место, как правило, в наступательном бою (сражении). В наступательном бою стороны А группировка противника более чувствительна на авиационный удар. Из этого следует, что в наступательном бою наращивание боевого превосходства целесообразно осуществлять в основном за счет использования последовательности авиационных ударов, соединенных с ударами огневых средств поражения сухопутных войск.

Список литературы

1. Основы и применение методов прикладной математики в военном деле: учебник / Военно-воздушная академия; под общей редакцией П.И. Иванова. Монино : Изд. ВВА, 1991. 512 с.
2. Ануреев И., Татарченко А. Применение математических методов в военном деле. М.: Воениздат, 1967. 243 с.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 823 с.

УДК.551.5:001.891.57

Соловьев А.В.,

*ФГКВООУ ВПО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» Министерства обороны Российской Федерации,
г. Воронеж*

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ ТЕНДЕНЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН С УЧЕТОМ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

Для решения задачи по повышению точности прогнозирования данных метеорологических величин с заблаговременностью до 3 часов было

предложено использовать модель линейной тенденции с учетом дисконтирования. В основу данной модели положены теория временных рядов и метод аналитического сглаживания [1-4].

В ходе проводимого исследования была рассмотрена схема процедуры прогнозирования метеорологической величины. При построении модели линейной тенденции с учетом дисконтирования был использован временной ряд $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Для осуществления процедуры прогнозирования с заблаговременностью P сроков использовалось l последовательных наблюдений (далее лаг). По данным последовательных наблюдений $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ формировалась выборка u_1, u_2, \dots, u_k , при $k < n$. При этом индекс k равнялся номеру периода времени, соответствующего текущему моменту. В прогнозе метеорологической величины на срок $(k + p)$ использовались данные фактических наблюдений во временном интервале от $(k - l + 1)$ до k . Для процедуры прогнозирования были установлены граничные условия:

- на первоначальном этапе индекс k равен длине лага l .
- при дальнейшем прогнозировании индекс k растет при фиксированном значении l .

На каждом последующем сроке наблюдений производилось вычисление прогностического значения метеорологической величины на период P . При этом если полученный результат достигал критического значения метеорологической величины, то выполнялся расчет времени наступления данного события.

Схема прогнозирования метеорологической величины приведена на рис. 1.

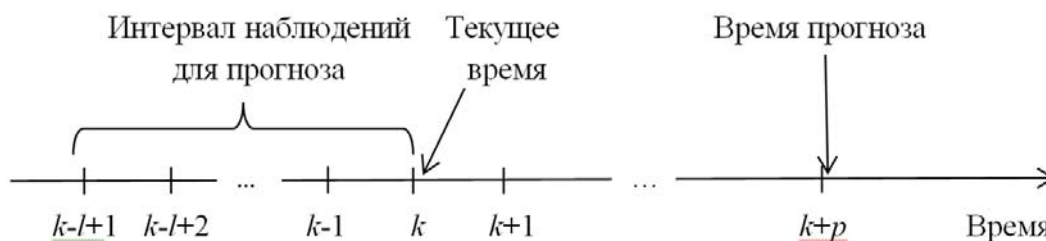


Рис. 1 – Схема прогнозирования метеорологической величины

В основу схемы прогнозирования была положена модель линейной тенденции с учетом дисконтирования (1). В процессе формирования данной модели были использованы методы регрессионного анализа.

$$u(k+p) = \frac{\left(\sum_{j=k-l+1}^k j \cdot u_j\right) - \left(k - \frac{l-1}{2}\right) \left(\sum_{j=k-l+1}^k u_j\right)}{l^3 - l} (12p + 6l - 6) + \frac{1}{l} \sum_{j=k-l+1}^k u_j, \quad (1)$$

где $u(k+p)$ – прогностическое значение метеорологической величины (результативный признак), J – переменная, отвечающая за номер проводимого наблюдения (аналог весового коэффициента), u_j – это значение метеорологической величины, соответствующий J -му сроку наблюдения.

Для построения интервальной оценки исследуемой метеорологической величины были использованы средняя квадратическая ошибка и средняя ошибка прогноза [1, 2].

Выражение для определения границ доверительного интервала прогнозируемой метеорологической величины представлено в следующем виде:

$$\left(\frac{\left(\sum_{j=k-l+1}^k j \cdot u_j\right) - \left(k - \frac{l-1}{2}\right) \left(\sum_{j=k-l+1}^k u_j\right)}{l^3 - l} (12p + 6l - 6) + \frac{1}{l} \sum_{j=k-l+1}^k u_j - \sigma_k t_{1-\alpha/2} (l-2) \sqrt{1 + \frac{1}{l} + 12 \frac{((l-1)/2 + p)^2}{l^3 - l}}; \right. \\ \left. \frac{\left(\sum_{j=k-l+1}^k j \cdot u_j\right) - \left(k - \frac{l-1}{2}\right) \left(\sum_{j=k-l+1}^k u_j\right)}{l^3 - l} (12p + 6l - 6) + \frac{1}{l} \sum_{j=k-l+1}^k u_j + \sigma_k t_{1-\alpha/2} (l-2) \sqrt{1 + \frac{1}{l} + 12 \frac{((l-1)/2 + p)^2}{l^3 - l}} \right), \quad (2)$$

где σ_k – средняя квадратическая ошибка прогноза, $t_{1-\alpha/2}$ – обратное распределения Стьюдента при уровне значимости α и с числом степеней свободы, равным m .

Для проверки надежности представленной модели прогнозирования, методом имитационного моделирования были проведены вычислительные эксперименты. При достижении минимальных значений погрешности прогноза процесс адаптации модели (1) к новому направлению тенденции считался завершённым. В ходе вычислительных экспериментов варьировались параметры l и p .

Опытным путем было установлено что, минимально допустимый лаг равен 12 срокам, при котором значения общей оправдываемости и абсолютная ошибка для периодов прогнозирования от 1 до 3 часов достигли наилучших результатов.

Список литературы

1. Садовникова Н.А. Анализ временных рядов и прогнозирование / Н.А. Садовникова, Р.А. Шмойлова. М.: МФПУ Синергия, 2016. 152 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для СПО. Люберцы: Юрайт, 2016. 479 с.

3. Балдин К.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. М.: Дашков и К, 2016. 472 с.

4. Шилова З. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. Киров: Изд-во ВГГУ, 2015. 158 с.

УДК 621.396

*Стуров Д.Л., Межуев А.М., Родионов Д.В., Локтионов В.М.,
ФГКВОУ ВО ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина» МО РФ, г. Воронеж*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЕТИ СВЯЗИ

При функционировании различных сетей связи (СС) с коммутацией пакетов актуальной и практически значимой является задача оценки информационной эффективности при изменении входного трафика. Для решения данной задачи используются многочисленные подходы с использованием различных показателей эффективности информационного обмена такие как: многокритериальные, вероятностные, векторные, вероятностно-временные. В работе [1] отмечены недостатки данных показателей и определены достоинства применения обобщенного показателя – коэффициента полезного действия (КПД) передачи информации [2], отражающего степень близости СС к ее потенциальным возможностям по передаче и хранению информации. Также в результате дальнейших исследований были введены ряд локальных показателей информационной эффективности: полоса пропускания СС [3], определяющая область высокой информационной эффективности сети, и тангенс угла полосовой эффективности СС [4], характеризующий скорость изменения КПД при изменении входного трафика (устойчивость СС к изменениям входного трафика). Для аналитического решения задачи оценивания СС пакетной коммутацией с использованием обобщенного и локальных показателей был применен подход, основанный на тензорной методологии [1], который не позволяет получить строгое аналитическое описание функции информационной эффективности СС. В данной работе для решения данной задачи предлагается использовать классический подход с использованием теории систем массового обслуживания (СМО).

При описании моделей СС с различными структурами, состоящих из совокупности узлов коммутации (УК) и каналов связи (КС) используется теория графов. Для построения топологии СС на основе СМО будем ис-

пользовать неориентированные графы (двунаправленные КС) без кратных ребер (один канал обслуживания в направлении емкостью одна единица информации (бит, пакет, ячейка, кадр)) и петель (передача потока информации только по направлениям), т.е. структура СС представляет собой связный мультиграф G , состоящий из совокупности вершин (УК) и ребер (КС). Введены ограничения по емкости очереди (моделирующее ограничение объема памяти буферных запоминающих устройств, применяемых в СС), количеству обслуживающих каналов (моделирующее процесс передачи одной единицы информации по КС в направлении, т.е. использование одноканальной СС) и скорости передачи информации (в связи с ограничением по пропускной способности КС). При моделировании входного потока в модели СС примем классический Пуассоновский закон распределения с интенсивностью γ , а время обслуживания единицы информации – экспоненциальное с интенсивностью C .

В связи с этим в качестве исходных данных для модели СС будет использована модель сети массового обслуживания (СеМО), состоящая из СМО $M/M/1/Q$ с параметрами: количество вершин X , количество ребер Y , граф $G(X, Y)$ (структура СС), количество СМО $W=2Y$, интенсивность входного потока γ_i для каждого i -го УК ($i \in [1...X]$), для каждой k -й СМО ($k \in [1...W]$): емкость очереди Q_k и интенсивность обслуживания канала C_k . На рисунке 1 представлен пример функциональной модели СС в виде СеМО (б) с звездообразной структурой (а), состоящей из X УК.

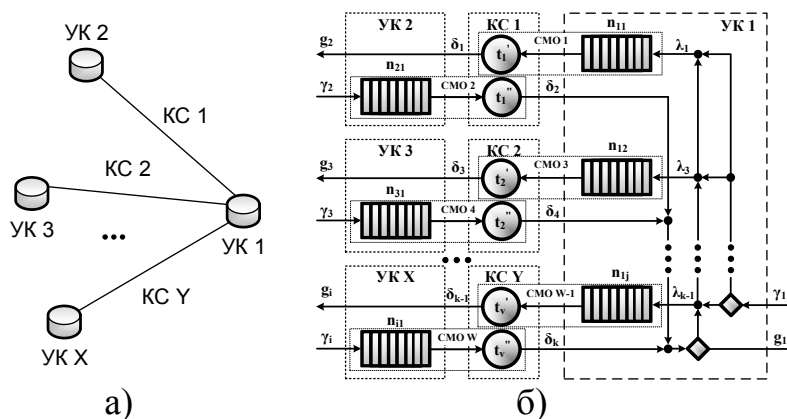


Рис. 1 – Модель СеМО с звездообразной структурой

Для построения функции информационной эффективности – зависимости КПД передачи информации от интенсивности входного потока $\eta(\gamma)$ рассчитываются значения: реальной $P_{реал}$ кибернетической мощности СеМО, определяемой произведением текущей емкости СеМО на ее текущую производительность в зависимости от значения интенсивности входного потока γ , и полной $P_{полн}$ кибернетической мощности СеМО, вы-

числяемой как произведение суммарных емкостей всех СМО на сумму интенсивностей обслуживания всех СМО. На основе исходных данных определяется полная кибернетическая мощность СеМО (для СМО типа М/М/1/Q):

$$P_{полн} = \sum_{k=1}^W N_k \cdot \sum_{k=1}^W C_k, \quad (1)$$

где $N_k = Q_k + T_k$ – емкость k -й СМО ($k \in [1..W]$, W – количество СМО), Q_k – емкость очереди k -й СМО, T_k – емкость канала обслуживания k -й СМО (равная одной единице информации для СМО (М/М/1/Q), C_k – интенсивность обслуживания канала k -й СМО (пропускная способность однонаправленного КС).

Реальная кибернетическая мощность СеМО (М/М/1/Q) будет определяться выражением:

$$P_{реал}(\gamma) = N(\gamma) \cdot G(\gamma) = \left(\sum_{i=1}^X \sum_{j=1}^Z n_{ij}(\gamma) + \sum_{v=1}^Y t_v(\gamma) \right) \cdot \sum_{i=1}^X g_i(\gamma), \quad (2)$$

где $N(\gamma)$ – текущая емкость СеМО, $G(\gamma)$ – текущая производительность СеМО, $n_{ij}(\gamma)$ – текущая емкость очереди i -го УК в j -ом направлении ($i \in [1..X]$, причем $j \in [1..Z]$, где Z – количество соседних УК), $t_v(\gamma) = t'_v(\gamma) + t''_v(\gamma)$ – суммарная текущая емкость v -го КС ($v \in [1..Y]$), как сумма двух однонаправленных КС, $g_i(\gamma)$ – производительность i -го УК (см. рисунок 1).

Причем функции для емкости очереди $n(\gamma)$, емкости канала обслуживания $t(\gamma)$ и производительности $\delta(\gamma)$ для СМО М/М/1/Q описываются следующими выражениями:

$$n(\gamma) = \rho(\gamma) \cdot P_0(\gamma) \cdot (1 - \rho^Q(\gamma) \cdot [1 + Q \cdot (1 - \rho(\gamma))]) / (1 - \rho(\gamma))^2, \quad (3)$$

$$t(\gamma) = (\rho(\gamma) - \rho^{Q+1}(\gamma)) / (1 - \rho^{Q+1}(\gamma)), \quad (4)$$

$$\delta(\gamma) = \gamma \cdot (1 - P_B(\gamma)) - C \cdot P_B(\gamma), \quad (5)$$

где $\rho(\gamma) = \gamma / C$ – коэффициент использования СМО, $P_B(\gamma) = \rho^Q(\gamma) \cdot P_0(\gamma)$ – вероятность блокировки СМО (полная очередь и занятость канала), $P_0(\gamma) = (1 - \rho(\gamma)) / (1 - \rho^{Q+1}(\gamma))$ – вероятность того, что СМО пуста (пустая очередь и свободный канал).

С учетом формулы представленной в [2] функция информационной эффективности СеМО будет определяться следующим образом:

$$\eta(\gamma) = 100\% \cdot P_{реал}(\gamma) / P_{полн}. \quad (6)$$

Получение функций (2) и, соответственно, (6) осуществляется путем последовательных вычислений их текущих значений для конкретных значений интенсивностей входного потока γ_i (для $\forall \gamma_i \neq 0 \neq C$) через интервал $\Delta\gamma$ равный минимальному приращению входного потока (на одну единицу информации в секунду). Для определения степени близости физической структуры СеМО к ее предельным возможностям по передаче и хранению информации примем ограничение о разделении входного потока γ_i и производительности δ_k в равных долях для каждого УК, имеющего более одного соседнего УК с целью формирования межсетевых потоков λ_k , который является входным потоком для очереди СМО, входящих в его состав, и производительности i -го УК g_i .

Таким образом, строгое аналитическое описание обобщенного показателя и функции информационной эффективности СС с использованием теории СМО позволит определить потенциальные физические возможности различных сетей связи с пакетной коммутацией каналов и локальные показатели эффективности, с использованием которых возможна классификация СС с различными структурами по обеспечению информационного обмена.

Список литературы

1. Межуев А.М. Тензорные методы оценки информационной эффективности цифровых радиосетей (монография). Тамбов: ТВВАИУРЭ, 2009. – 184 с.
2. Пат. RU № 2477928, H04L29/00, 20.03.2013. Бюл. №8.
3. Пат. RU № 2571917, H04L29/00, 27.12.2015. Бюл. №36.
4. Пат. RU № 2685030, H04L29/00, 16.04.2019. Бюл. №11.

УДК 517.9

Ткачева С.А., Савченко Г.Б.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений вида

$$D_{\alpha,t}\bar{u} - B(-iD_x)\bar{u} = \bar{f}(t,x), \quad 0 \leq t \leq 1, x \in R^m. \quad (1)$$

Комплекснозначная вектор-функция $\bar{u} = \bar{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ удовлетворяет граничному условию

$$\bar{u}(0, x) = \bar{u}(1, x), \quad (2)$$

здесь $D_{\alpha, t} = \sqrt{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\alpha(t)}$ – дифференциальный оператор, содержащий «весовые» производные по переменной $t \in [0, 1]$, $\alpha(t)$ достаточно гладкая на $[0, 1]$ функция, обращающаяся в нуль при $t = +0$: $\alpha(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t \in [0, 1]$; $B(-iD_x)$ – дифференциальный оператор по $x \in R^m$, $\bar{f}(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_n(x, t))$ – заданная комплекснозначная вектор-функция, определенная в слое $(0 \leq t \leq 1, x \in R^m)$. Символ оператора $B(-iD_x)$ – это матрица

$$B(s) = \begin{pmatrix} b_{11}(s) & \dots & b_{1n}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(s) & \dots & b_{nn}(s) \end{pmatrix},$$

элементы которой $b_{i,j}(s) = \sum b_v^{i,j} s^v$ – полиномы с постоянными коэффициентами, где $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ – мультииндекс; $|v| = v_1 + v_2 + \dots + v_m$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

На гладких функциях $\bar{u}(t, x) \in L_2$ зададим оператор G_α по формулам (см. [1])

$$G_\alpha[\bar{u}](\tau, x) = \sqrt{\alpha(t)} \bar{u}(t, x) \Big|_{t=\tau} = \bar{v}(\tau, x),$$

здесь $t = t(\tau)$, функция, обратная функции

$$\tau = \tau(t) = \int_t^1 \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < \tau < \gamma, \quad \gamma = \int_0^1 \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} < \infty.$$

Теорема. Пусть существует постоянная $\delta > 0$, что

$$|1 - \exp(\gamma A(s))| \geq \delta, \quad \delta > 0$$

при любом $s \in R^m$. Тогда задача (1)-(2) разрешима при любой правой части $\bar{f}(t, x) \in L_2([0, 1] \times R^m)$ и справедливо неравенство

$$\int_0^1 \|\bar{u}(t, x)\|_{L_2(R^m)}^2 dt \leq c \int_0^1 \|\bar{f}(t, x)\|_{L_2(R^m)}^2 dt,$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $s \in R^m$.

Список литературы

1. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // Итоги науки и техники ВИНТИ. М., 1985. Т. 23. С. 125-218.

2. Савченко Г.Б. Исследование корректной разрешимости некоторой граничной задачи. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. С. 287-288.

УДК 517.977.56

Тран З.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМИ АНАЛОГАМИ НА ГРАФЕ

Постановка задачи

Пусть задан Γ – граф-звезда с узлом ξ и имеющий ребра γ_k ($k = \overline{1, m}$): $\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \gamma_k$. Ориентация ребра γ_1 определяется направлением “к узлу ξ ”, ребер γ_k ($k = \overline{2, m}$) – “от узла ξ ”; ребро γ_1 параметризовано отрезком $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, а каждое ребро γ_k ($k = \overline{2, m}$) – отрезком $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; узлу ξ ставится в соответствие параметр $\frac{\pi}{2}$.

Обозначим через $u(x, t)$ функцию распределения температуры в области $\Gamma \times [0, T]$ изменения переменных x, t , где T – фиксированная положительная постоянная. Процесс распределения тепла описывается уравнением:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right), \quad x, t \in \Gamma \times (0, T), \quad (1)$$

во внутренней части каждого ребра и соотношениями в узле ξ (условия согласования)

$$u \left(\frac{\pi}{2}, t \right)_{\gamma_1} = u \left(\frac{\pi}{2}, t \right)_{\gamma_k} \quad (k = \overline{2, m}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \gamma_1} = \sum_{k=2}^m \alpha_k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2} \in \gamma_k} \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

Опишем тепловые характеристики системы (1) с условиями согласования (2), (3). Уравнение (1) моделирует классический закон Фурье переноса тепла по непрерывному континууму (внутренних частях ребер), функция $a(x)$, $x \in \Gamma$, описывает теплопроводящие свойства материала

фрагментов (ребер) области $\Gamma \times [0, T]$; первые соотношения (2) условий согласования (2), (3) являются естественным предположением температурного равенства во внутреннем узле, второе соотношение (3) условий согласования (2), (3) устанавливает потоковые тепловые связи во внутреннем узле: тепловые потоки удовлетворяют балансным условиям (обобщенное балансное условие Кирхгофа) с коэффициентами α_k , зависящими от теплопроводящих свойств каждого ребра.

Присоединяя к соотношениям (1) – (3) начальное

$$u(x, 0)_{\gamma_k} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = \overline{1, m}, \quad (4)$$

и граничные условия:

$$u(0, t)_{\gamma_1} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$u(\pi, t)_{\gamma_k} = 0, \quad (k = \overline{2, m}), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

получаем начально-краевую задачу (1) – (6), определяющую математическую модель процесса переноса тепла по сетевому носителю Γ .

Замечание 1. Для упрощения приводимых ниже математических преобразований используются однородные краевые условия Дирихле (5), (6), то есть краевые условия первого рода, переход к условиям второго и третьего рода не представляет трудностей [1].

Аппроксимация дифференциальных операторов задачи (1)–(6) и разностная схема

Построим разностную схему – разностный (сеточный) аналог граничной задачи (1) –(6), подобно тому, как строятся разностные схемы в классических случаях.

Область $\Gamma \times [0, T] = \{(x, t) \in \gamma_k \times [0, T], k = \overline{1, m}\}$ изменения переменных x, t заменим дискретным множеством точек, которое назовем сеточным множеством (или сеткой), соответствующей области $\Gamma \times [0, T]$:

$$\Gamma_T^h = \left\{ (x_i^k, t_j), \quad x_i^k \in \gamma_k, \quad i = \overline{0, N}; \quad j = \overline{0, M}; \quad k = \overline{1, 2, \dots, m} \right\},$$

где $x_i^1 = ih, \quad x_i^k = \frac{\pi}{2} + ih, \quad h = \frac{\pi}{2N}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{2, m}; \quad t_j = j\tau, \quad \tau = \frac{T}{M}, \quad j = \overline{0, M}$.

Все функции в исходной граничной задаче (1) – (6) заменим сеточными функциями, определенными в узлах сетки Γ_T^h . Сеточную функцию, соответствующую функции $u(x, t)$, обозначим через $(u_i^j)_k = u_k(ih, j\tau), \quad i = \overline{0, N}; \quad j = \overline{0, M}; \quad k = \overline{1, 2, \dots, m}$. Аналогично строится сеточная функция, соответствующие функциям $\varphi(x), a(x)$, которую обозначим следующим образом: $(\varphi_i^j)_k = \varphi_k(ih, j\tau), \quad (a_i)_k = a^k(ih)$.

Производные $\frac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x,t)_{\gamma_k}}{\partial x} \right)$ в исходной граничной задаче (1) – (6) заменим разностными отношениями вида

$$\frac{(u_i^{j+1})_k - (u_i^j)_k}{\tau}, \frac{(a_{i+1})_k \frac{(u_{i+1}^{j+1})_k - (u_i^{j+1})_k}{h} - (a_i)_k \frac{(u_i^{j+1})_k - (u_{i-1}^{j+1})_k}{h}}{h}$$

Для задачи (1) – (6) получим конечно-разностный аналог на сетке Γ_T^h :

$$\frac{(u_i^{j+1})_k - (u_i^j)_k}{\tau} = \frac{(a_{i+1})_k \frac{(u_{i+1}^{j+1})_k - (u_i^{j+1})_k}{h} - (a_i)_k \frac{(u_i^{j+1})_k - (u_{i-1}^{j+1})_k}{h}}{h} \quad (7)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M-1; k = \overline{1, m})$$

$$(u_N^{j+1})_1 = (u_0^{j+1})_k, (j = 0, 1, \dots, M-1; k = \overline{2, m}) \quad (8)$$

$$\frac{(u_N^{j+1})_1 - (u_{N-1}^{j+1})_1}{h} = \sum_{k=2}^m \alpha_k \frac{(u_1^{j+1})_k - (u_0^{j+1})_k}{h}, (j = 0, 1, \dots, M-1; k = \overline{2, m}) \quad (9)$$

$$(u_i^0)_k = (\varphi_i^0)_k, (i = 0, 1, \dots, N; k = \overline{1, m}) \quad (10)$$

$$(u_0^{j+1})_1 = 0, (j = 0, 1, \dots, M-1), \quad (11)$$

$$(u_N^{j+1})_k = 0, (j = 0, 1, \dots, M-1; k = \overline{2, m}) \quad (12)$$

Здесь разностное уравнение (8), (9) будет аппроксимировать условия согласования (2), (3) с погрешностью $O(h)$. Таким образом, погрешность аппроксимации начально-краевой задачи будет равна $O(\tau + h)$. При этом погрешность аппроксимации во внутренних точках ребер равна $O(\tau + h^2)$, погрешность аппроксимации в узле равна $O(\tau + h)$, а аппроксимация в граничных узлах – точная[1].

Список литературы

1. Гран З., Провоторов В.В. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети. Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021;9(3). Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1019> DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012

*Урывская Т.Ю., Пузанков В.И., Лукибанов А.А.,
Черноусов А.А., Данилов Д.Д.,
Военный Учебно-Научный Центр Военно-Воздушных Сил
«Военно-Воздушная Академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

АНАЛОГИ ПРОПРИЕТАРНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ.

Одним из компонентов современной информационно-образовательной среды вузов является компьютерное оборудование и программное обеспечение, которое на нем работает. В соответствии с федеральными государственными стандартами "Организация должна быть обеспечена необходимым набором лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства (состав определяется в рабочих программах дисциплин (модулей) и при необходимости подлежит обновлению). Следовательно, качество обучения студентов зависит от того, насколько укомплектована образовательная организация этими компонентами.

Проведенный в этом направлении анализ показал, что наиболее популярными проприетарными математическими системами являются MathCad и Matlab, а их ближайшими аналогами – SMathStudio, Maxima и Scilab, GNU Octave соответственно.

В качестве наиболее значимых критериев при выборе конкретного программного решения среди СПО были выбраны следующие [1-3]:

- максимальное сходство ЛСС с программными продуктами по функциональности и способности решать как можно больше задач для субъекта (пользователя);
- взаимная совместимость программных продуктов;
- способность работать под управлением различных операционных систем (кроссплатформенность), в частности операционных систем семейства Linux;
- статус проекта (год выпуска первого программного обеспечения, регулярность обновления программного обеспечения и т.д.);
- надежность расчетов.

MathCad- это математическая система, относящаяся к классу CAS система компьютерной алгебры). Это программное обеспечение для выполнения, анализа и обмена наиболее важными инженерными расчетами. Оно используется для математических расчетов, символьных преобразований и построения графиков. Можно создавать электронные книги (e-Books).

Maxima – это бесплатная система компьютерной алгебры, написанная на языке CommonLisp. Программа специализируется на символьных вычислениях и позволяет решать практически все типовые задачи, относящиеся к различным разделам математики.

SMath Studio – это бесплатная математическая программа, написанная на C#, с графическим редактором и полной поддержкой единиц измерения. Он имеет стандартный набор операций и функций для вычисления математических выражений и построения графиков. Он имеет встроенный менеджер расширений, который позволяет получить доступ к различным официальным и сторонним расширениям. Реализована возможность открывать и сохранять файлы Mathcad.

MatLab – это язык высокого уровня и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и их визуализации и является основой семейства продуктов американской компании MathWorks. Возможности MATLAB позволяют анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели, приложения и решать широкий спектр научных и прикладных задач в таких областях, как: моделирование объектов и разработка систем управления, измерение и тестирование сигналов, проектирование систем связи, финансовое моделирование, обработка сигналов и изображений, вычислительная биология и другие. Ядро MATLAB позволяет работать с матрицами вещественных, сложных и аналитических типов данных, а также со структурами данных и таблицами поиска самым простым способом.

Основными особенностями программы являются:

1. Большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных и удобные инструменты для разработки алгоритмов, включая алгоритмы высокого уровня, использующие концепции объектно-ориентированного программирования.
2. Интерактивная среда для разработки кода, управления данными и файлами.
3. Функции для линейной алгебры, статистики, решения дифференциальных уравнений, анализа Фурье и т.д..
4. Встроенные средства разработки пользовательского интерфейса для создания конечных приложений в MATLAB.
5. Инструменты для интеграции с C/C++, наследование кода, технология ActiveX.
6. Возможность создания специальных наборов инструментов для решения определенного класса задач, расширяющих функциональность программы[4].

SciLab – программное обеспечение с открытым исходным кодом для численных расчетов. Как и MATLAB, он включает сотни математических функций и имеет схожий язык программирования. Пакет включает утилиту для преобразования документов Matlab в Scilab.

Scilab основан на численных методах (анализ данных, разработка алгоритмов и моделей). Доступные методы включают: интерполяцию и регрессию, дифференцирование и интегрирование, линейные системы уравнений, анализ Фурье, обыкновенные дифференциальные уравнения, матричное исчисление (определение собственных значений и сингулярностей) и другие.

Scilab предоставляет функции построения графиков для визуализации, аннотирования и экспорта данных и предлагает множество способов создания и настройки различных типов графиков и диаграмм: линии, круговые диаграммы, гистограммы, поверхности и т.д. Она позволяет экспортировать графики в различные форматы: PNG, PPM, EMF, EPS, FIG, PDF и SVG [9]. Scilab может быть расширен за счет внешних программ и модулей, написанных на различных языках программирования.

GNU Octave- это свободная система для математических расчетов, использующая язык высокого уровня, совместимый с MATLAB. Octave предоставляет интерактивный интерфейс командной строки для решения линейных и нелинейных математических задач и других численных экспериментов. Кроме того, Octave можно использовать для пакетной обработки данных. Octave работает с вещественными и комплексными арифметическими скалярами и матрицами, имеет расширения для решения линейных алгебраических задач, нахождения корней систем нелинейных алгебраических уравнений, решения полиномов, решения дифференциальных уравнений, интегрирования систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений первого порядка, интегрирования функций по конечным и бесконечным интервалам.

Список литературы

1. Бобровских А.В. Перспективы использования программного обеспечения в образовательной деятельности курсантов ВУНЦ ВВС «ВВА»// VI Научно-практическая конференция. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2019 г. С. 23-27.

2. Бобровских А.В. Урывская Т.Ю, Алимов А.П. Свободное программное обеспечение. Математические продукты

3. Артомонов И.В. Свободное программное обеспечение: преимущества и недостатки // Известия ИГЭА, 2012. №5. С. 122-125.

4. Фонд Свободного Программного Обеспечения (Free Software Foundation) URL: gnu.org, свободный. Дата обращения: 21.10.2019.

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА
ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЯ ПАЦИЕНТОВ
С СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТЫМИ ЗАБОЛЕВАНИЯМИ**

Успешность лечения сердечно-сосудистых заболеваний во многом определяется своевременностью и точности мониторинга состояния пациентов. В настоящее время основным прибором являются тонометры. Известны приборы для расширенной диагностики, однако они достаточно дорогие и для большинства пациентов недоступны и требуют присутствие высококвалифицированного врача [1]. Данная работа посвящена апробации решений при разработке прототипа прибора для первичной диагностики состояния пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями. Цель исследования – проверить работоспособность основных аппаратных решений.

Разрабатываемый комплекс должен удовлетворять следующим требованиям: использовать широкодоступные компоненты и обладать низкой себестоимостью; быть удобным в использовании и переноске; взаимодействовать с базой данных для сохранения и загрузки данных пользователей.

В основе измерения давления использовался неинвазивный осциллографический метод. Его основой является регистрировании пульсации крупной артерии, как правило плечевой, при ее компрессии или декомпрессии. При декомпрессии артерия сначала сжимается путем повышения давления в манжете до уровня давления, превышающее уровень систолического давления. После этого давление постепенно и равномерно снижается и фиксируются колебания в манжете. Определение артериального давления производится на основе данных осциллограмм, используя различные методы аппроксимации.

Разработанный аппаратный комплекс был создан на основе микроконтроллера Arduino Uno Ваниль [2] и состоит из микроконтроллера Ваниль; датчика давления MPX5050 GP; манжета для тонометра В. Well и ручного нагнетателя с механическим регулятором М1/МХ.

Для уменьшения цены и увеличения доступности на территории РФ вместо оригинальных моделей была выбрана плата Ваниль – программируемый контроллер, являющимся полным аналогом Arduino Uno и построенный на основе микроконтроллера ATmega328P-PU в корпусе DIP-28, а также механический нагнетатель модели М1/МХ.

В измерительную часть был включен аналоговый дифференциальный датчик давления Freescale MPX5050GP. Это легкий и компактный датчик,

предназначенный для работы в сухой среде и обладающий удобным уровнем рабочего давления 0 – 50 кПа, а также открытым входом, совпадающим по диаметру с используемыми в тонометрах резиновыми трубками.

В механической части были использованы компоненты, взятые с цифрового датчика давления V.Well Swiss AG. Они включают в себя веерообразную однотрубную манжету, соединенную с механическим нагнетателем посредством двух резиновых шлангов, соединенных трехсторонним переходником. Это позволяет подключить измерительную часть прибора, не меняя базовую заводскую конфигурацию.

Для реализации решения поставленной задачи была выбрана среда разработки Microsoft Visual Studio и язык программирования C#. Помимо этого, был выбран метод ООП [3]. Для реализации пользовательского интерфейса был выбран интерфейс программирования приложений Windows Forms.

Апробация прототипа прибора показала, что цель работы достигнута и предлагаемое устройство позволяет проводить в ручном режиме действия по измерению артериального давления: компрессию артерии, фиксацию колебаний давления в манжете в режиме реального времени и проводить последующую обработку данных. Для определения артериального давления и других показателей функционирования сердечно-сосудистой системы, автоматизации измерений необходимо проведение дополнительных исследований.

Список литературы

1. Абакунов Н.В. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Математическое моделирование: сборник научных трудов. 2000. №3. С. 106–117.
2. Петин В.Г. Проекты с использованием микроконтроллера Arduino. – Санкт-Петербург: БВХ-Петербург. 2015. 401 с.
3. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Физматлит. 2000 г. 292 с.

УДК 681.3.06

Ускова О.Ф., Шашкин А.И., Каплиева Н.А.,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

ОЛИМПИАДЫ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ ПЕРВОКУРСНИКОВ ВОРОНЕЖСКИХ ВУЗОВ

Факультет прикладной математики, информатики и механики (ПММ), образованный в нашей стране в 1969 году одним из первых факультетов

подобного профиля ежегодно проводит внеаудиторные мероприятия, расширяющие информационно-образовательный процесс и способствующие развитию творческой активности студентов.

В соответствии с приказами Министерства образования и науки наш факультет в течение 10 лет (2002–2011 гг.) был головным вузом организации и проведения Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» [1].

Ежегодно, начиная с 2012 года, факультет ПММ организует соревнования первокурсников вузов города Воронежа по информатике и программированию. До 2020 года олимпиады проходили в два тура: первый в заочном телекоммуникационном режиме, в котором могли принять участие все желающие первокурсники вузов Черноземья, второй – в очном режиме на лабораторной базе факультета ПММ.

В связи с пандемией олимпиада 2020 года проводилась в onlinережиме. Олимпиада 2020 года была проведена при финансовой поддержке DSRCorporation, президент которой Пешков А.В. является выпускником факультета ПММ ВГУ.

В олимпиаде участвовали 105 первокурсников, представляющих вузы: Воронежский государственный университет, Воронежский государственный педагогический университет, Воронежский государственный технический университет, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронежский институт высоких технологий, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил Военно-воздушная академия имени Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина.

Незаменимую роль в организации и проведении олимпиады первокурсников сыграл студенческий оргкомитет олимпиады, в который входят в основном старшекурсники кафедры математического обеспечения ЭВМ факультета ПММ ВГУ: Сырых Александр (председатель оргкомитета), Усков Даниил, Байбародов Серафим, Коток Игорь, Кракова София, Рябых Ирина, Бондаренко Олег.

Работа студенческого оргкомитета включает: разработку программного обеспечения для анкетирования участников олимпиады, мониторинга автоматической обработки электронной почты, разработку тестов к олимпиадным заданиям, анализ решений участников и статистической обработки результатов, индивидуального показа результатов тестирования.

Проводимые олимпиады способствуют повышению интереса первокурсников к учебе, развитию творческой активности.

Глава представительства DataArt в Санкт-Петербурге Завилейский М.С. считает:

«Для начала карьеры IT-профессионала необходимо продемонстрировать талант: участие в олимпиадах, конкурсах, проектах»[2].

Список литературы

1. Горбенко О.Д., Ускова О.Ф., Шашкин А.И. Воронежский государственный университет – базовый вуз Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Проблемы высшего образования. Воронеж, 2012. № 2. С. 51-56.

2. Завилейский М.С. Начало карьеры IT-профессионала // Черноземный альманах научных исследований. Серия «Прикладная математика». Специальный выпуск: Четвертая Всероссийская студенческая олимпиада по информатике. Воронеж, 2006. № 3(4). С. 75-84.

УДК 621.039.566

Ушков М.Е., Бурковский В.Л.,

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж*

СТРУКТУРА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРОМ АЭС

В соответствии с «Общими положениями обеспечения безопасности атомных станций» НП-001-15 к системе информационной поддержки оператора (СИПО) предъявляются требования, согласно которым персонал блочного пункта управления должен быть обеспечен обобщенной информацией о параметрах АЭС, характеризующих состояние функций безопасности [1]. Однако СИПО может предоставить большие функциональные возможности, в том числе по обеспечению операторов необходимой информацией для качественного и безопасного управления технологическим процессом (ТП). СИПО осуществляет анализ информации для последующего предоставления операторам. В рамках анализа существует возможность прогнозирования состояния технологического процесса. Функция прогнозирования способствует поиску наиболее оптимального решения по управлению энергоблоком.

Технологическим объектом управления является энергоблок НВ АЭС мощностью 1200 МВт, функциональная схема которого приведена на рис. 1.

Автоматизированная система управления технологическим процессом (АСУ ТП) позволяет создать связь на основе технических и программных средств между различными объектами, участвующими в технологическом процессе.

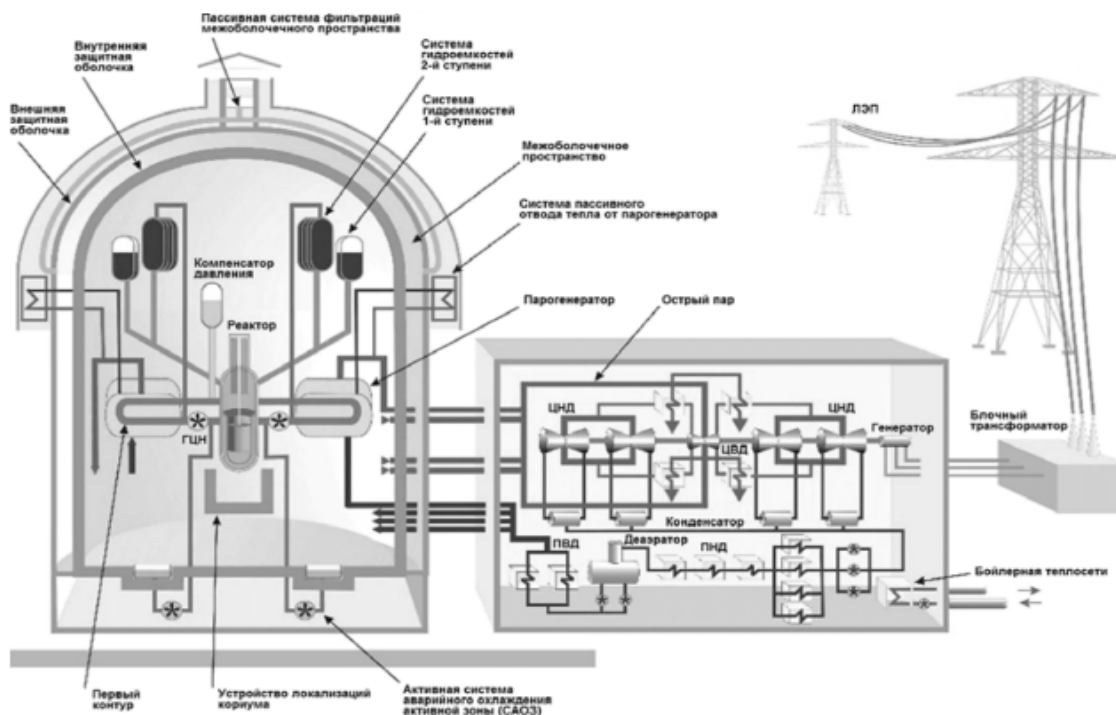


Рис. 1 – Функциональная схема объекта управления

АСУ ТП выполняет функции:

- автоматизированного управления объектами;
- контроля условий протекания ТП;
- автоматического поддержания параметров ТП;
- определения состояния технологических объектов управления;
- предоставления информации операторам при любом состоянии технологического процесса.

Автоматизированная система управления технологическим процессом территориально разделена в зависимости от функциональных особенностей объектов, входящих в её состав. АСУ ТП получает и преобразует примерно 8000 сигналов [2].

Автоматизация технологических объектов АЭС подразумевает наличие квалифицированных специалистов, которые будут обеспечивать качество и безопасность протекания технологического процесса. При этом в процессе принятия решений по выбору команды управления не исключены ошибки, обусловленные человеческим фактором.

Неправильные решения могут обуславливаться:

- большим потоком информации, который вызывает трудности в его анализе даже у специально подготовленного персонала;
- различным психоэмоциональным состоянием персонала, вызванным или нештатной ситуацией (стресс), или рутинной работой (потеря концентрации).

Таким образом, существует необходимость внедрения СИПО во всех режимах эксплуатации. Цель создания СИПО заключается в увеличении

эффективности и безопасности управления технологическим процессом. Система уменьшит нагрузку на персонал, осуществляющий управление энергоблоком.

СИПО должна обеспечивать персонал блочного пункта управления важными данными, которые требуются для управления технологическим процессом, при этом уменьшая информационный поток, обрабатываемый человеком.

СИПО должна быть способна предоставлять информацию в режимах нормальной эксплуатации, в режимах нарушения нормальной эксплуатации, в режимах проектных и запроектных аварий.

СИПО должна обеспечивать предоставление следующих функций:

- обеспечения информирования оператора о состоянии энергоблока путем представления структурированной, оптимизированной и детализированной информации;

- анализа работы технологического оборудования, формирования сигнализации и представления обработанной информации о возникновении разного вида отклонений в работе при эксплуатации с отклонениями;

- определения состояния объектов технологического процесса;

- прогнозирования технологического процесса, предоставления персоналу предложений по оптимальному управлению ТП;

- определения параметров, которые не соответствуют требуемым нормам, выявления причины несоответствия;

- своевременного определения и предоставления предложений по оптимальному способу устранения или уменьшения влияния параметра с выявленным несоответствием на ТП;

- исследования функционирования технологических защит и блокировок;

- наблюдения за операциями, которые выполняет персонал в рамках управления технологическим процессом для предотвращения совершения ошибочных действий;

- оказания помощи персоналу при проведении регламентированных работ [3].

Обобщенная структура СИПО приведена на рис. 3. Данные в СИПО поступают от системы верхнего блочного уровня (СВБУ).

В основу СИПО заложена программная модель энергоблока. Особое внимание стоит уделить функции прогнозирования на базе модели энергоблока, которая должна включать:

- модель нейтронно-физических процессов в активной зоне;

- модель теплогидравлических процессов первого и второго контура энергоблока активной зоны;

- модель электрогенератора и основного электрооборудования энергоблока;

- модели системы контроля и управления.

Модель должна предоставлять возможность исследования процессов при различных режимах эксплуатации.

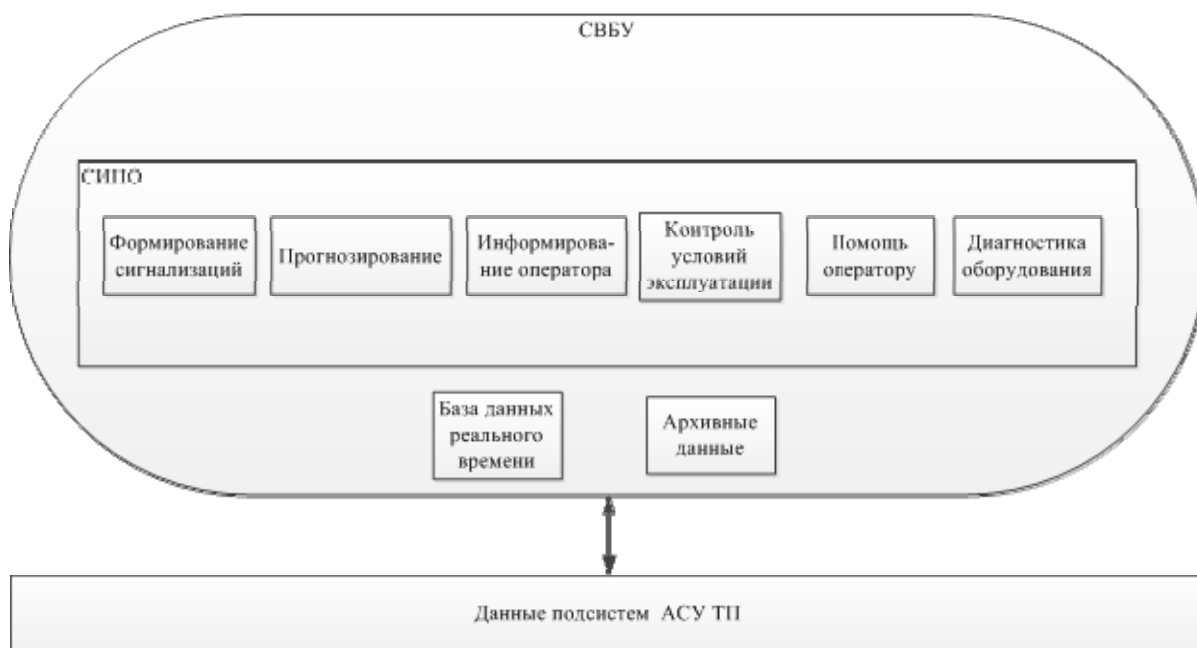


Рис. 2 – Обобщенная структура СИПО

В качестве начальных данных модель энергоблока использует данные, поступающие из АСУ ТП. После обработки начальных данных СИПО предоставляет следующую информацию:

- прогноз изменения состояния ТП, команды управления от персонала при этом не учитываются в течение времени, определяемого глубиной прогноза, которая может составлять от 15 до 30 минут;

- прогноз изменения состояния ТП, при этом учитываются планируемые действия персонала по управлению технологическими объектами.

Описание управляющих воздействий постепенно обновляется в зависимости от текущего этапа вычислений. Для типовой цепочки действий существует возможность применять предварительно разработанный план [4].

Данные, полученные в процессе прогнозирования, должны проверяться на соответствие допустимым значениям. В случае нарушений допустимых значений оператор заметит сигнализацию. Данные, полученные в результате прогноза, могут быть представлены в виде графиков, таблиц, схем.

Функция прогнозирования системы информационной поддержки оператора не может охватить все процессы на производстве. Это обусловлено рядом причин:

- большое количество сценариев протекания технологического процесса, обусловленное различными режимами работы энергоблока;

- программная модель энергоблока не включает всё технологическое оборудование, задействованное на атомной электростанции;

– в модели не используются все технологические параметры, которые учитываются при управлении АЭС.

Увеличение точности прогнозов, а также увеличение количества прогнозируемых процессов объекта управления с большим числом измеряемых параметров и рядом внешних воздействующих факторов, формализованное описание которых отсутствует, является сложной задачей. Однако применение нейронных сетей наряду с программной моделью энергоблока в целях прогнозирования способно приблизить решение этой задачи. Программная модель энергоблока способна предоставить большое количество данных для качественного обучения нейронной сети. В свою очередь нейронная сеть способна выявить зависимости между входными данными и предоставить результат прогнозирования.

Применение нейронной сети на базе нечёткой системы вывода обеспечивает следующие преимущества:

- возможность учёта при прогнозировании параметров, которые отсутствуют в программной модели энергоблока;
- возможность прогнозирования процессов, программное описание которых отсутствует;
- возможность автоматической настройки параметров нейронной сети.

В качестве входных данных для прогнозирования будут использоваться параметры основного технологического оборудования энергоблока, при необходимости также могут использоваться параметры всего оборудования и процессов, измерение которых осуществляется на АЭС.

На выходе нейронной сети формируется прогноз протекания требуемого технологического процесса.

Для каждого конкретного технологического процесса необходима индивидуальная настройка слоев и правил обработки входных данных, однако принципиально структуры нейронных сетей будут сходны друг с другом. При этом имеется возможность автоматического определения правил при обучении. Возможная структура нейронной сети на базе нечёткой системы вывода с двумя входными наборами данных изображена на рис. 3. Структура определяется в процессе обучения.

Нейронная сеть определяет зависимости между данными в процессе обучения. Благодаря различным методам обучения нейронной сети имеется возможность с достаточной точностью прогнозировать протекание технологического процесса. Одной из главных задач при обучении состоит в сборе данных для обучения, а также их подготовка и нормализация. Для решения этой задачи можно использовать как архивные данные системы верхнего блочного уровня, так и данные полученные от программной модели энергоблока. Достоинством обучения нейронной сети с использованием модели является возможность получения данных в различных режимах эксплуатации АЭС.

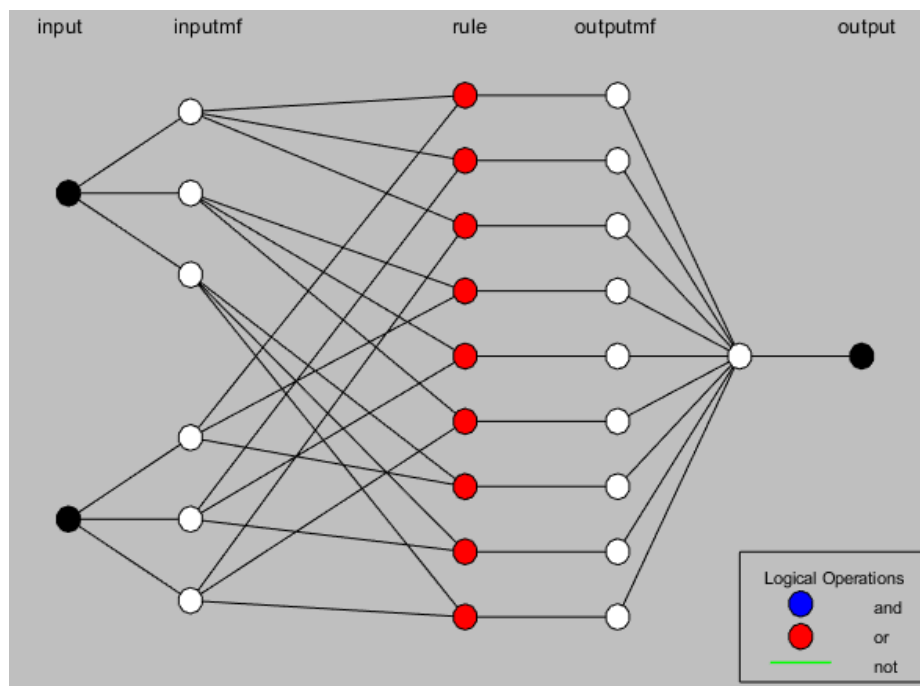


Рис. 3 – Структура нейронной сети на базе нечёткой системы вы-

В данной статье показана роль нейронных сетей при прогнозировании состояния технологического процесса энергоблока в целях увеличения точности прогнозов, а также количества прогнозируемых процессов. Сформулировано предложение об используемой архитектуре нейронной сети, рассмотрены её преимущества.

Список литературы

1. Федеральные нормы и правила в области использования атомной энергии. Общие положения обеспечения безопасности атомных станций. НП-001-15: утверждены приказом Ростехнадзора от 17 декабря 2015 г. № 522. С 27.
2. Асмолов В.Г., Гусев И.Н., Казанский В.Р., Поваров В.П., Стацура Д.Б. Головной блок нового поколения – особенности проекта ВВЭР-1200 // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2017. №3. С. 5-21.
3. Гусев И.Н., Соловьев Б.Л., Поваров В.П., Кужиль А.С., Падун С.П. Использование результатов пусконаладочных работ для создания, настройки и валидации системы интеллектуальной поддержки оператора на блоке № 1 Нововоронежской АЭС-2 // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2017. №3. С. 45-54.
4. Стацура Д.Б., Тучков М.Ю., Поваров П.В., Тихонов А.И., Падун С.П., Воробьев А.П., Майорова М.М. Использование программной модели блока для совершенствования проектных решений и оптимизации управления технологическим процессом // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2020. №4. С. 37-49.

УДК 621.396.677

Харченко В.В., Рудый С.В., Харченко Д.В.,

Шишкин В.В., Воробьев С.С.,

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и А.Ю. Гагарина», г. Воронеж;

Краснодарское высшее военное авиационное училище летчиков,

г. Краснодар

РАСЧЕТ ВЗАИМНОЙ СВЯЗИ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В МНОГОЧАСТОТНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

Совмещение разночастотных антенных решеток (АР) в одной апертуре приводит к существенному пассивному и активному взаимодействию между ними. Первое проявляется в изменении характеристик направленности совмещаемых АР из-за дифракционных явлений на их поверхности. Активное взаимодействие приводит к взаимным перекрестным помехам из-за просачивания энергии одного частотного канала на активные элементы (приемные и передающие) другого частотного канала, ухудшая электромагнитную совместимость (ЭМС) радиосистем. Эффекты взаимосвязи минимальны при развязке совмещаемых антенн по поляризации, однако это не всегда возможно по тактико-техническим требованиям [1]. Так, в самолетных РЛС, располагаемых в носовой части, поляризация радиолокационного канала и канала госопознания вертикальная. В связных системах через искусственные спутники земли (ИСЗ) поляризация круговая в каждом частотном диапазоне и т.д. [1, 2].

В этой связи для оптимизации направленных свойств и других параметров антенных систем необходим учет взаимной связи излучателей в антенной решетке. Этот учет заметно усложняется при использовании в радиотехнических системах многочастотных антенн.

Взаимная наводка антенных решеток конечных размеров с сильно перекрывающимися минимальными сферами быстро определяется путем вычисления общей матрицы трансляции (передачи) между сферическими колебаниями. Эта матрица получается с использованием свойств преобразования сферических и плоских векторных волн. Хотя этот подход менее эффективен, чем классический, основанный на теоремах сложения, он позволяет преодолеть известное ограничение теорем сложения, которое требует непересекающихся минимальных сфер. Для коэффициентов трансляции предусмотрены соотношения симметрии, которые значительно увеличивают скорость вычисления общей матрицы трансляции. Вычисляя подматрицы отражения и передачи обобщенной матрицы рассеяния конечной антенной решетки, можно получить точные результаты для диаграмм направленности антенных решеток по сравнению с известным коммерческим

программным обеспечением или численными собственными данными - волновой метод [3]. Рассматриваемый метод предполагает использование специфических свойств коэффициентов трансляции, которые значительно ускоряют их вычисление. Однако использование структуры конечных массивов подразумевает рассмотрение случая элементов с сильно перекрывающимися минимальными сферами, что является ограничением этого метода.

Список литературы

1. Пономарёв Л.И., Степаненко В.И. Сканирующие многочастотные совмещенные антенные решетки / под ред. Л.И. Пономарёва. – М.: Радиотехника, 2009. 358 с.
2. Харченко В.В., Рудый С.В. Математическая модель многодиапазонной цилиндрической антенны // Антенны, № 3, 2021. С. 31-37.
3. Rubio, R. Gómez-Alcalá Mutual Coupling of Antennas With Overlapping Minimum Spheres Based on the Transformation Between Spherical and Plane Vector Waves. IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 69, no. 4, april 2021.

УДК 62-932.2

Хвостов А.А., Журавлев А.А., Никитченко А.А.,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж;
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора
Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИОННО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМЕШИВАНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕД В ВАЛКОВОМ СМЕСИТЕЛЕ

Одним из базовых процессов пищевой и химической технологий является смешивание вязких сред. Наиболее распространенным методом исследования кинетики смешивания и оценки качества (однородности) получаемой композиции является экспериментально-статистический метод, основанный на анализе распределения трассера, вводимого совместно с компонентами, подлежащими смешиванию [1]. Альтернативой экспериментально-статистическому методу является метод вычислительной гидродинамики, позволяющий не использовать экспериментальные установки [2].

В качестве объекта моделирования рассматривается валковый смеситель, в котором смешивание вязких компонентов осуществляется между

вращающимися навстречу друг другу валками. Гидродинамическое поведение среды в валковом зазоре, зависит от его геометрических размеров, кинематических режимов работы валков, реологических свойств среды и тепловых условий при смешивании. На основании анализа физических процессов, протекающих в валковом зазоре, составлена его геометрическая 2D-модель (рис. 1), задана расчетная область и определены её границы [2].

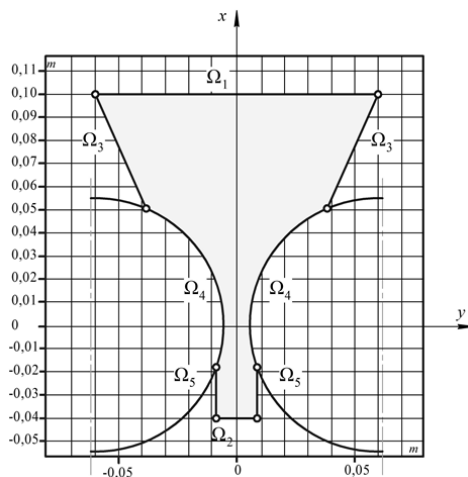


Рис. 1 – Геометрическая 2D-модель валкового зазора:

Ω_1 – область входа; Ω_2 – область выхода; Ω_3 – область контакта среды и стенок приемного бункера; Ω_4 – область контакта среды и валков; Ω_5 – свободная область среды

Нестационарная неизотермическая модель переноса трассера при течении неньютоновской среды в зазоре между вращающимися валками в виде уравнений сохранения массы, импульса, энергии и диффузии имеет вид [2, 3]

$$\begin{cases} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \left[-P \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] + \rho \mathbf{g}; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot k \nabla T + \Phi; \\ \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \nabla \cdot D \nabla C, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – плотность; \mathbf{u} – вектор скорости; P – давление; \mathbf{I} – единичный тензор; μ – динамическая вязкость; t – время; T – температура; \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения; c_p – удельная теплоемкость; k – коэффициент теплопроводности; C – концентрация трассера; D – коэффициент диффузии; Φ – диссипативная функция.

В качестве реологической модели неньютоновской среды использована модель Карро [2, 4], учитывающая зависимость вязкости от температуры:

$$\mu = \mu_{\infty} + \left(A_0 \exp\left(\frac{E}{RT}\right) - \mu_{\infty} \right) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}, \quad (2)$$

где μ_{∞} – наименьшая вязкость предельно разрушенной структуры; λ , m , A_0 – эмпирические коэффициенты; E – энергия активации вязкого течения; R – универсальная газовая постоянная; $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}}$ – скорость сдвига; $\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$ – тензор скорости деформации.

Система уравнений (1) дополнена соответствующими начальными условиями, задающими поля скоростей, давления, температуры и концентрации трассера в начальный момент времени. Граничными условиями: скорость продукта на входе в расчетную область (РО), давление на выходе из РО, условие прилипания на стенках, скорости движения стенки в месте контакта с валками, температура на входе в РО, термоизоляция на остальных границах РО, концентрация трассера на входе в РО и условие массоизоляции на остальных границах РО.

Верификация модели выполнена для валкового смесителя, конструктивные параметры и кинематические режимы работы которого приведены в [2]. В качестве перемешиваемой среды использована помадная масса кондитерского производства, теплофизические и реологические свойства которой представлены в [2, 4]. Проведен вычислительный эксперимент, позволивший в динамике оценить поле концентраций трассера, что характеризует протекание гидродинамических, тепло- и массообменных процессов в валковом смесителе (рис. 2).

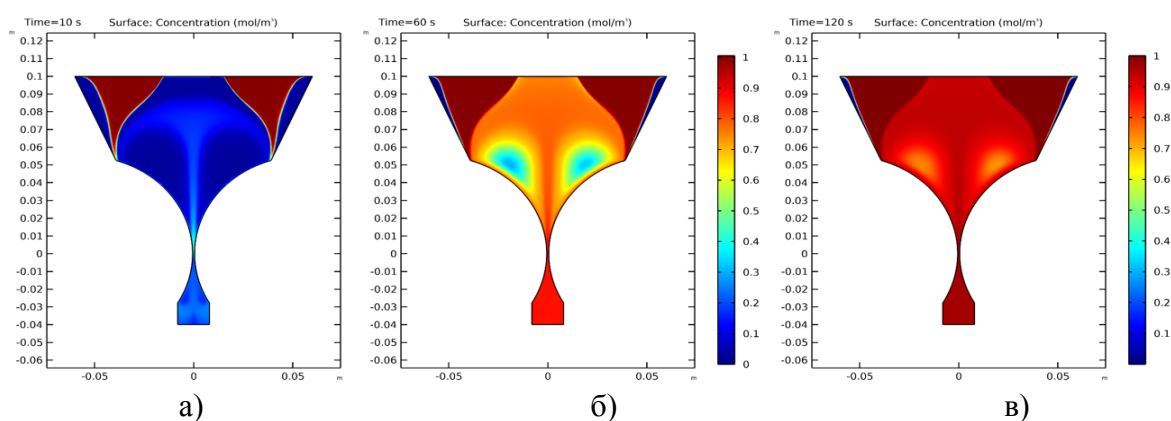


Рис. 2 – Поле концентраций трассера в моменты времени: а) 10 с; б) 60 с; в) 120 с

Проведена оценка влияния конструктивных параметров смесителя, кинематических режимов его работы и реологических свойств перерабатываемой среды на эволюцию концентрационного поля трассера в рабочей

зоне смесителя. Полученные результаты позволяют выбрать рациональные конструктивные параметры смесителя, режимы его работы для достижения заданной однородности распределения компонентов при смешивании.

Список литературы

1. Мелешко В.В. Смешивание вязких жидкостей // *Нелинейная динамика*, 2005, Т.1, №1. С. 69–109.
2. Хвостов А.А. Термогидродинамический анализ работы валковой формирующей машины кондитерского производства на основе CFD-подхода // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2021. № 3 (347). С. 117–130.
3. Остриков А.Н. Диффузионная модель перемешивания сливочно-растительных спредов // *Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий*. 2015. (3). С. 7–12.
4. Хвостов А.А. Параметрическая идентификация реологической модели Карро с использованием регуляризации А.Н. Тихонова на основе CFD-модели // *Техника и технология пищевых производств*. 2021. Т. 51. № 3. С. 615–627.

УДК 519.217

Хвостов А.А., Тихомиров С.Г., Хаустов И.А.,

Иванов А.В., Битюкова Е.А.,

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»,
г. Воронеж;*

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных
технологий», г. Воронеж*

ДИНАМИКА СШИВКИ ПОЛИМЕРА КАК МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

При исследовании процессов вулканизации полимеров одним из методов математического моделирования являются цепи Маркова [1, 2]. Случайным событием в них является совокупность элементарных актов сшивки, а состояниями - фракции молекулярных масс в молекулярно-массовом распределении (ММР). При этом интенсивности переходов из состояния в состояние характеризуют скорость процессов сшивки. Вероятность нахождения в системе макромолекул в определенном состоянии характеризует количество макромолекул соответствующей фракции ММР, а распределение вероятностей характеризует соответственно ММР полимера. В моделях [1, 2] используется цепь Маркова с дискретными состояниями и непрерывным временем для описания процессов деструкции, при этом обратные

© Хвостов А.А., Тихомиров С.Г., Хаустов И.А., Иванов А.В., Битюкова Е.А., 2021

переходы характеризуют возможные реакции сшивки. В качестве переменных состояния используются значения долей макромолекул для всех фракций ММР.

В условиях производства оценка ММР полимера в ходе процесса сшивки затруднена. На практике используются оценки интегральных характеристик ММР (средние молекулярные массы M_w , M_n , коэффициент полидисперсности и т.д.) или их физико-механические косвенные характеристики (динамическая вязкость, вязкость по Муни, энергетические затраты на перемешивание и т.д.) [3]. Для оценки переменных состояния ММР по наблюдаемым переменным энергетических затрат на перемешивание предлагается математическая модель процесса сшивки полимера на основе скрытой марковской цепи. Структура графа состояний представлена на рис. 1. В качестве наблюдаемой переменной выступает непрерывно измеряемая оценка M_w , которая косвенно оценивается по крутящему моменту на валу перемешивающего устройства [3].

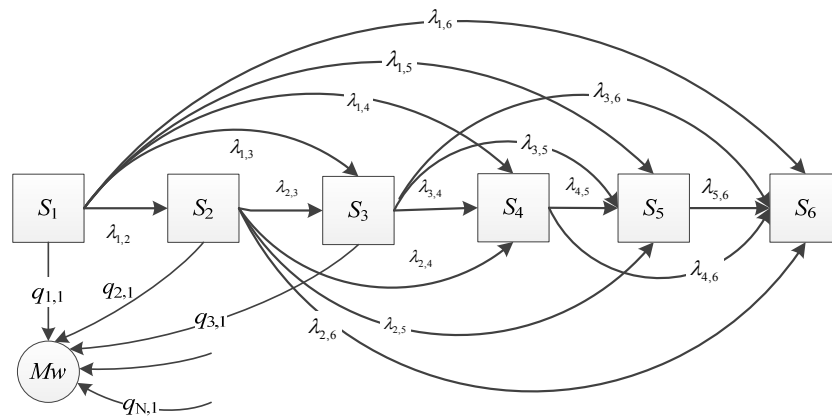


Рис. 1 – Структура графа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \Lambda \mathbf{P}(t), \\ M_w(t) = \frac{\sum_i^N m_i P_i(t)}{\sum_i^N P_i(t)}, \\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

где \mathbf{P} – вектор вероятности нахождения системы в состоянии \mathbf{S} ($P(S_n) = P_n$), \mathbf{P}_0 – вектор вероятности нахождения системы в состоянии \mathbf{S} в момент времени $t=0$, m_i – молекулярная масса, соответствующая

i -ой фракции, Λ – матрица, составленная из элементов λ в соответствии со структурой графа Γ .

Проведенный вычислительный эксперимент показал качественное соответствие с данными натурального эксперимента, заключающегося в сшивке бутилкаучука в течение 120 минут. В качестве наблюдаемой переменной использовался регистрируемый непрерывно крутящий момент на валу перемешивающего устройства. Ошибка расчетов составила порядка 5% в среднем, однако в начале процесса погрешность доходит до 150% (рис. 2), что свидетельствует о необходимости учета в модели изменения интенсивностей переходов в ходе сшивки во времени.

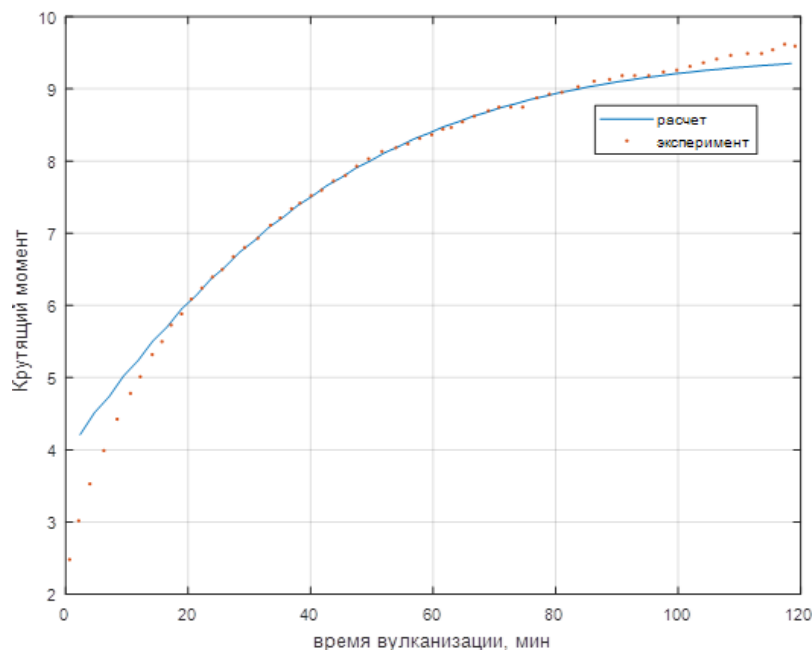


Рис. 2 – Динамика процесса сшивки

Рассмотренный подход к математическому моделированию динамики молекулярно-массового распределения полимера в ходе сшивки с помощью скрытой марковской цепи позволяет использовать существующую структуру скрытой части, отражающую характер процесса структурирования полимера, и при этом осуществлять непрерывную оценку ММР только на основе измеряемых в ходе процесса наблюдаемых переменных.

Список литературы

1. Улитин, Н.В. Методы моделирования кинетики процессов синтеза и молекулярно-массовых характеристик полимеров Казань: Изд-во КНИТУ, 2014. 228 с.
2. Математическая модель изменения фракционного состава полибутиadiens в ходе деструкции в растворе на основе цепей Маркова / А.А. Хвостов, А.В. Иванов, С.Г. Тихомиров, В.И. Ряжских, И.А. Хаустов, В.К. Би-

тюков // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2018. Том: 24 Номер: 1 Год: 2018 С. 67-78.

3. Возможность контроля качественных показателей в процессах растворной полимеризации / В.К. Битюков, С.Г. Тихомиров, А.А. Хвостов // "Каучук и резина", №5, 1998. С. 41-43.

УДК 51-76

Хвостова Е.А., Хвостова М.А., Журавлев А.А., Никитченко А.А.,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет им. Бурденко»,
г. Воронеж;

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж;
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

ЛИНЕЙНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОСТУПЛЕНИЯ ГЛЮКОЗЫ В КРОВЬ

Одними из распространенных моделей динамики поступления глюкозы в кровь являются ступенчатые функции Хэвисайда [1], экспоненциальные [2,3], гауссовы, степенные, алгебраические функции и их комбинации [3].

Основными требованиями к таким моделям являются простота описания, физический смысл параметров модели, адекватность экспериментальным данным, возможность аналитического выражения таких характеристик процесса поступления глюкозы как время наступления максимума концентрации глюкозы, максимальное значение концентрации глюкозы, условная характеристика скорости нарастания и спада концентрации глюкозы, а также суммарное её количество за заданное время или при времени, стремящемся к бесконечности. В [3] отмечено, что существующие модели являются компромиссом между представленными требованиями.

Предлагается математическая модель процесса поступления глюкозы в кровь на основе произведения линейной и экспоненциальной функций. При этом линейная часть отвечает за рост концентрации глюкозы $G(t)$ за счет поступления пищи, а экспоненциальная часть за снижение этого уровня. Таким образом, предлагаемая модель имеет всего два параметра и представлена выражением

$$G(t) = A \cdot t \cdot e^{-bt}, \quad (1)$$

где t – время, A – параметр, характеризующий скорость роста концентрации, b – параметр, характеризующий спад концентрации глюкозы.

Предлагаемая структура модели позволяет аналитически выразить следующие характеристики процесса поступления глюкозы в кровь: общее

количество глюкозы, поступившей в процессе приема пищи (общая гликемическая нагрузка) в виде $\int_0^T G(t)dt = \frac{A(b-1)}{b^2}(1-e^{-bT})$, где T – промежуток времени, в течение которого шло поступление глюкозы, при этом можно оценить общую нагрузку не задаваясь временем поступления как $\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{A(b-1)}{b^2}(1-e^{-bT}) \right] = \frac{A(b-1)}{b^2}$; интенсивность поступления глюкозы в кровь $v_G = \frac{dG(t)}{dt} = Ae^{-bt}(1-bt)$; время, при котором величина концентрации глюкозы достигает своего максимума, рассчитывается из решения уравнения $G'(t) = Ae^{-bt}(1-bt) = 0$ как $t_{\max} = \frac{1}{b}$. Тогда пиковый уровень концентрации глюкозы $G_{\max} = \frac{A}{e \cdot b}$.

Использование линейной комбинации моделей структуры (1) в виде взвешенной суммы (2) позволит имитировать поступление глюкозы с продуктами, обладающими различным гликемическим индексом в рамках одного приёма пищи. При этом весовые коэффициенты α_i отвечают за размер порции, массовую долю глюкозы, поступающую с определенным продуктом (гликемическая нагрузка), а τ_i – время принятия порции i -го продукта относительно стартовой точки отсчёта.

$$G_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i (t - \tau_i) e^{-b_i(t-\tau_i)} \theta(t - \tau_i) \quad (2)$$

где $\theta(t - \tau_i)$ – функция Хэвисайда, i – номер порции, n – количество порций.

Результаты численного эксперимента на основе данных, представленных в таблице 1, показывают картину, характерную для приема пищи, где продукт с высоким гликемическим индексом принимается в конце приема пищи (рис. 1а) и в начале (рис. 1б). Анализ представленных данных иллюстрирует факт, что распределение времени приема продуктов с разным гликемическим индексом оказывает существенное влияние на время наступления и значение максимума концентрации глюкозы, поступающей в кровь с пищей.

Таблица 1

	порция	α_i	A_i	b_i	τ_i	порция	α_i	A_i	b_i	τ_i	
Ри	1	1	10	2	0	Рис 2б	1	1	60	4	0
с	2	1	15	2,5	1		2	1	15	2,5	1
2а	3	1	60	4	1,5		3	1	10	2	1,5

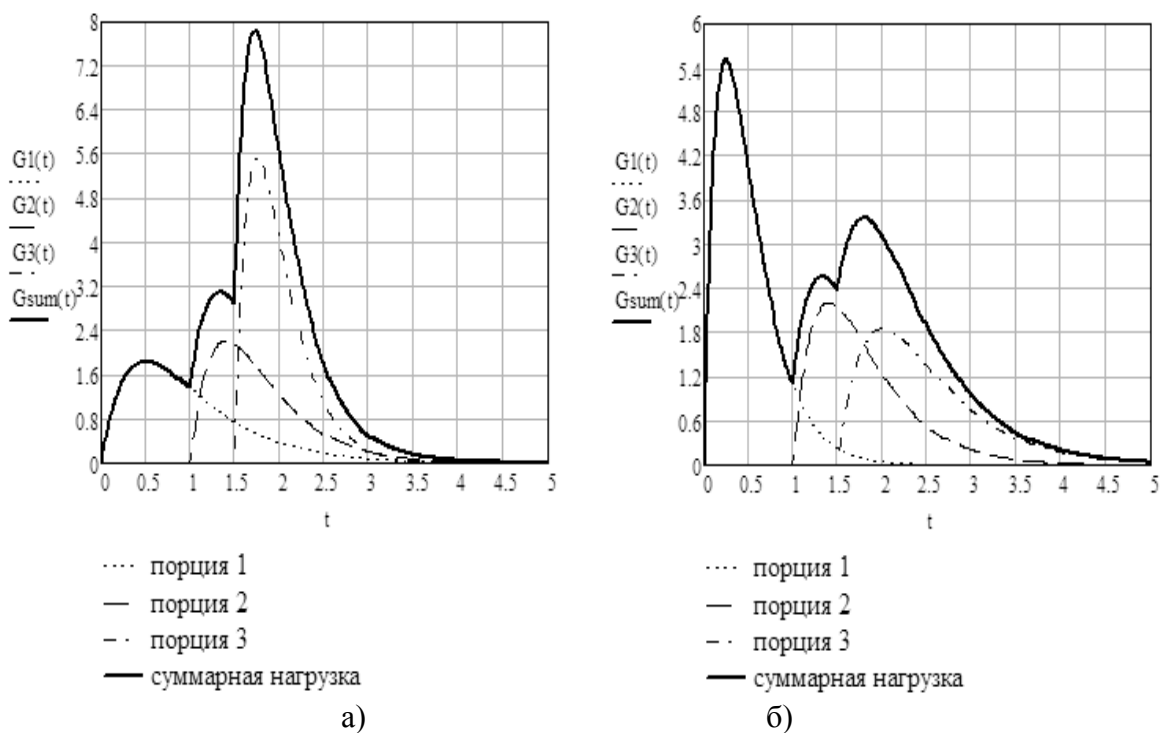


Рис. 1 – Динамика поступления глюкозы в кровь

Представленная модель качественно верно отражает характер изменения концентрации глюкозы в крови. Быстрый рост, переход через точку максимума и затем плавное снижение. Такой характер отражает быстрое начало всасывания в полости рта моносахаридов, а затем более медленное усвоение других сахаров в кишечнике. Позволила аналитически описать основные характеристики процесса, а также более детально описать динамику изменения концентрации глюкозы в процессе принятия пищи за счет учета гликемической нагрузки продуктов и времени их употребления.

Список литературы

1. Bergman, B.N., Ider, Y.Z., Bowden C.R., Cobelli C., Quantitive estimation of insulin sensitivity. American Journal of Physiology, 236 (1979), pp. 667–677.
2. Tolic I.M., Mosekilde E., Sturis J. Modeling the insulin-glucose feedback system: The significance of pulsatile insulin secretion, J. Theor. Biol. 207 (2000) 361–375.
3. KOVÁCS L., Extension of the Bergman Minimal Model for the Glucose-Insulin Interaction, Periodica Polytechnica Ser. El. Eng. VOL. 50, NO. 1–2, PP. 23–32 (2006).

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ
ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ**

Используются обозначения, определение и теорема принятые в работе [1].

Ребра \mathcal{U} графа Γ имеют одинаковую длину и параметризованы отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ – множества граничных узлов графа; Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек; $L_2(\Gamma)$ – банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых сквадратом; $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$. Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество непрерывных во всех внутренних узлах функций $u(x)$ из класса $W_2^1(\Gamma)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}.$$

Здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер \mathcal{U} , соответственно ориентированных к узлу ξ и от узла ξ . Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a, \Gamma)$. При этом, если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a, \Gamma)$.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{1}{\tau} (u(k) - u(k-1)) + \Lambda u(k) = f(k), \quad (1)$$

с начальным и краевым условиями

$$u(0) = \varphi(x), \quad u(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где $\tau > 0$ – действительное число,

$f(k) \in L_2(\Gamma)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $\Lambda u(k) = -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k)$. Коэффициен-

ты $a(x), b(x)$ – фиксированные, измеримые и ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом:

$$0 < a_*, a(x), a^*, |b(x)|, \beta, x \in \Gamma_0.$$

Определение. Слабым решением уравнения (1) с условиями (2) называются функции $u(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = 1, \dots, M$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} [u(k) - u(k-1)] \eta(x) dx + \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{du(k)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + b(x) u(k) \eta(x) \right) dx = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad u(0) = \varphi(x),$$

для любой функции $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$.

Теорема. [3] Для любых $k_0 \in \mathbb{N}$ и любых $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ слабое решение $u(k)$ однозначным образом определено при k_0, k, M , $k_0 < M < \infty$.

Множество ортонормированных собственных функций $\{\phi_i(x)\}$ краевой задачи в пространстве $W_0^1(a, \Gamma) : \Lambda \phi = \lambda \phi$, образует базис в $W_0^1(a, \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$ [3]. Обозначим через $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, – множество собственных значений. Приближенное решение краевой задачи (1), (2) представляется в виде [4]

$$u^N(k) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i + \tau \sum_{n=0}^{k-1} (1 + \tau \lambda_i)^n f_i^{n+1}}{(1 + \tau \lambda_i)^k} \phi_i(x),$$

где

$$f(k) = \sum_{i=1}^N f_i^k \phi_i(x), \quad f_i^k = (f(k), \phi_i(x)), \quad k = 1, \dots, M, \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i \phi_i(x), \quad \varphi_i = (\varphi(x), \phi_i(x)).$$

Для пояснения представленных выше результатов рассмотрим частный случай

Пусть Γ – ориентированный граф с двумя ребрами γ_1, γ_2 и внутренним узлом ξ . Ребро γ_1 ориентировано к узлу ξ , ребра γ_2 ориентированы от узла ξ . Все ребра параметризованы отрезком $[0, 1]$. Рассмотрим краевую задачу (1), (2) при $a(x) = 1$, $b(x) = f(k) = 0$,

$$\frac{1}{\tau} (u(k) - u(k-1)) + \Lambda u(k) = 0, \quad (3)$$

$$u(0) = \varphi(x), \quad u(k)|_{x \in \partial \Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (4)$$

Здесь $\Lambda u(k) = -\frac{d^2 u(k)}{dx^2}$. Начальная функция $\varphi(x) = \begin{cases} \sin \pi x + \pi x, & x \in \gamma_1, \\ \sin \pi x + \pi(1-x), & x \in \gamma_2. \end{cases}$

Краевая задача $\Lambda \phi = \lambda \phi, \phi|_{\partial \Gamma} = 0$,

имеет множество собственных значений $\{\lambda_i\}$ и соответствующие ортонормированные собственные функции $\{\phi_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$. При

$$i = 2j, \lambda_{2j} = \pi^2 j^2, j = 1, 2, \dots, \phi_{2j}(x) = \begin{cases} \sin \pi j(x-1), & x \in \gamma_1, \\ \sin \pi jx, & x \in \gamma_2. \end{cases}$$

Разложим $\varphi(x)$ по базису $\phi_{2j}(x)$, $j = 1, 2, \dots$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$

$$\varphi_{2j} = (\varphi(x), \phi_{2j}(x)) = \int_{\Gamma} \varphi(x) \phi_{2j}(x) dx = 0,$$

$$\text{При } i = 2j-1, \lambda_{2j-1} = \frac{\pi^2 (2j-1)^2}{4}, j = 1, 2, \dots, \phi_{2j-1}(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi j}{2}(x-1), & \gamma_1 \\ \cos \frac{\pi j}{2}x, & \gamma_2 \end{cases}$$

Разложим $\varphi(x)$ по базису $\phi_{2j-1}(x)$, $j = 1, 2, \dots$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$

$$\varphi_{2j-1} = \int_{\Gamma} \varphi(x) \phi_{2j-1}(x) dx = \frac{-32}{\pi(2j-1)^2((2j-1)^2 - 4)}.$$

Расположим собственные значения в порядке возрастания, и перенумеруем их. Получим множество собственных значений $\{\lambda_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Соответственно перенумеруем ортонормированные собственные функции, получим множество $\{\phi_j(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$. Приближенное решение краевой задачи (3), (4) представляется в виде

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k} \phi_j(x).$$

Список литературы

1. Хоанг, В.Н. Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т.7. №.1. С.127-132.
2. Provotorov V.V., Sergeev S.M., Hoang V.N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020. Vol. 16. No 4. P. 402–414.

3. Volkova A.S., Provotorov V.V. Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph // Russian Mathematics. 2014. Vol. 58. No 3. P.1-13.

4. Хоанг, В.Н. Дифференциально-разностное уравнение с распределенными параметрами на графе // Процессы управления и устойчивость. 2021. Т.8. №.1. С.155-160.

5. Ekimov A.V., Zhabko A.P., Yakovlev P.V. The stability of differential-difference equations with proportional time delay // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 316-325.

УДК 517+531.01+531.552

Шамолин М.В.,

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
г. Москва*

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

Одними из основных в работе аспектов являются вопросы относительной структурной устойчивости (относительной грубости) динамических систем, рассматриваемых, не на всем пространстве динамических систем, а лишь на некотором его подпространстве. При этом пространство деформаций систем также не совпадает со всем пространством допустимых деформаций. В частности, рассмотрены системы дифференциальных уравнений, возникающие в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Показана их относительная грубость, а также, при некоторых условиях, относительная негрубость различных степеней. При этом, наряду с качественным, проведено и численное исследование структуры фазовых портретов рассматриваемых систем [1–3].

Ранее определение грубости системы было дано при некотором дополнительном предположении относительно множества рассматриваемых динамических систем. Именно, дополнительно предполагалось, что граница области, в которой рассматривается система, является циклом без контакта для траекторий этой системы, т.е. простой гладкой замкнутой поверхностью, не имеющей контактов (не касающейся траекторий системы). Очевидно, когда кривая является циклом без контакта также и для траекторий всякой системы, достаточно близкой к рассматриваемой. Хотя это предположение сильно ограничивает класс рассматриваемых динамических систем, но при этом смысл понятия грубости системы сохраняется, а

определение грубости значительно проще, чем при общих предположениях относительно границы области.

Для начала исследовалась устойчивость ключевых траекторий или пучков траекторий – тех характеристик, которые и определяют основные топологические особенности глобального фазового портрета системы. В результате проведенного анализа над классом рассматриваемых систем, порожденных несколькими функциональными классами функций, и получены результаты о рождении (а при некоторых условиях исчезновении) устойчивых замкнутых характеристик рассматриваемых систем (ср. [4, 5]).

Список литературы

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.
3. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.
4. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. 1996. № 4. С. 57–69.
5. Шамолин М.В. Автоколебания при моделировании воздействия среды на твердое тело // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Сб. тр. IX междунар. конф. “ПМТУКТ-2016” (Воронеж, 20–26 сентября 2016 г.), ред. И.Л. Батаронов, А.П. Жабко, В.В. Провоторов. Воронеж: «Научная книга», 2016. С. 398–401.

УДК 517.929

Шарейко В.В.,

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет», г. Воронеж

СООТВЕТСТВИЕ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В последние годы большой интерес представляют дифференциальные уравнения дробного порядка благодаря своим приложениям в разделах прикладной математики, физике, инженерии и др.

© Шарейко В.В., 2021

Возникает вопрос, соответствуют ли решения периодической задачи для дифференциального уравнения второго порядка и дифференциального уравнения дробного порядка $1 < q < 2$. Для этого представим решения данных задач.

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка:

$$x''(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0; T], \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad (2)$$

где $f(t)$ – непрерывная функция.

Как известно, для решения такой задачи используется метод вариации Лагранжа:

$$x(t) = c_1(t) \cdot x_1(t) + c_2(t) \cdot x_2(t). \quad (3)$$

Здесь $x_1(t) = e^{\sqrt{\lambda}t}$, а $x_2(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t}$, если используя краевые условия найти $c_1(t)$, $c_2(t)$ и подставить в (3), то мы получим:

$$x(t) = e^{\sqrt{\lambda}t} k_1 + e^{-\sqrt{\lambda}t} k_2 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^t (e^{\sqrt{\lambda}(t-s)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-s)}) f(s) ds. \quad (4)$$

Теперь, снова учитывая краевые условия, мы можем составить систему, решив которую с помощью правила Крамера, можно найти k_1 , k_2 и подставить в (4). Тогда мы получим решение на основе метода функции Грина:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\int_0^T e^{\sqrt{\lambda}(T-s)} f(s) ds}{2\sqrt{\lambda}(1 - e^{\sqrt{\lambda}T})} \cdot e^{\sqrt{\lambda}t} - \frac{\int_0^T e^{-\sqrt{\lambda}(T-s)} f(s) ds}{2\sqrt{\lambda}(1 - e^{-\sqrt{\lambda}T})} \cdot e^{-\sqrt{\lambda}t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^t (e^{\sqrt{\lambda}(t-s)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-s)}) f(s) ds = \\ &= \int_0^T G(t,s) f(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1 - e^{\sqrt{\lambda}T})} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1 - e^{-\sqrt{\lambda}T})} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} (e^{\sqrt{\lambda}(t-s)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-s)}), & 0 \leq s \leq t < T, \\ \frac{e^{\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1 - e^{\sqrt{\lambda}T})} - \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1 - e^{-\sqrt{\lambda}T})}, & 0 \leq t < s < T. \end{cases} \quad (6)$$

Теперь рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка:

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 1 < q < 2, \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \quad (8)$$

где ${}^C D^q$ – дробная производная Капуто, $f(t)$ – непрерывная функция.

Единственным решением задачи (7) - (8) является функция (см. [3]):

$$x(t) = c_1 E_q(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds, \quad (9)$$

где $E_q(\lambda t^q)$, $E_{q,2}(\lambda t^q)$, $E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)$ – функции типа Mittag-Леффлера (см. [1]).

Тогда краевая задача

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 1 < q < 2, \quad (10)$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T) \quad (11)$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) f(s) ds, \quad (12)$$

где функция Грина (см. [2]):

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q) + \\ + \frac{(1 + E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + T^{-1} E_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q) + \\ + (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q), 0 \leq s \leq t < T, \\ \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1 + E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q) + \\ + \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2} E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q) + T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q)(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q), \\ 0 \leq t < s < T. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя в последнее равенство $q=2$, а также используя свойства функции Mittag-Леффлера (см. [1]) и её виды при целочисленных индексах, можно преобразовать выражение (13) к виду функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка вида (6).

Таким образом, решения периодической задачи для дифференциального уравнения второго порядка есть частный случай решения периодической краевой задачи в случае дробного порядка $1 < q < 2$.

Список литературы

1. Gorenflo R., Kilbas A.A., Francesco Mainardi, Sergei V. Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014. 443 p.

2. Kamenskii M., Petrosyan G., Wen C.F. An existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space, J. Nonlinear Var. Anal, 5 (2021), No. 1, pp. 155-177. DOI: 10.23952/jnva.5.2021.1.10

3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2006. 523 p.

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ,
ОПРЕДЕЛЯЕМОГО НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Пусть $L_2[0, 1]$ – гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x, y) = \int_0^1 x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau$. Через $W_2^2[0, 1]$ обозначим пространство Соболева $\{x \in L_2[0, 1] : x' \text{ абсолютно непрерывна, } x'' \in L_2[0, 1]\}$. Рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1],$$

порождаемый интегро-дифференциальным выражением вида

$$(Lx)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int_0^1 K(t, s)x(s)ds,$$

где $K(t, s) = \sum_{i=1}^k p_i(t)q_i(s)$, $p_i, q_i \in L_2[0, 1]$, с областью определения

$$D(L) = \{x \in W_2^2[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$$

и краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$. Такого класса оператор возникает при переходе к сопряженному при исследовании оператора, действующего в $L_2[0, 1]$, задаваемого выражением $(Ly)(t) = -\ddot{y}(t) - \int_0^1 \sum_{i=1}^k p_i(t)q_i(s)y(s)ds$ и нелокальными краевыми условиями:

$$y(0) = \int_0^1 a_0(t)y(t)dt, \quad y(1) = \int_0^1 a_1(t)y(t)dt.$$

Здесь a_0 и a_1 – функции из $L_2[0, 1]$.

Так как собственные значения оператора L и сопряженного ему оператора L^* связаны соотношением $\lambda = \lambda^*$, то для исследования спектра оператора L рассматривается сопряженный ему оператор, который задается дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \quad (1)$$

и краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$.

Методом изучения спектральных свойств данного класса является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-4].

Для исследования спектральных свойств сопряженного оператора (1) представим его в виде $L^*x = Ax - B_1x - B_2x$. Оператор A порождается дифференциальным выражением вида $Ax = -\ddot{x}$, $x \in D(A)$, $D(A) = \{x \in W_2^2[0,1], x(0) = x(1) = 0\}$. Оператор A является самосопряженным оператором с дискретным спектром, собственные значения которого $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in N$, являются простыми, а соответствующие собственные функции $e_n(t) = \sqrt{2}\pi \sin \pi nt$, $n \in N$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$.

Будем считать оператор A невозмущенным оператором, а оператор $B = B_1 + B_2$ – возмущением. Операторы B_1 и B_2 на области определения $D(A)$ задаются соотношениями $(B_1x)(t) = \dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)$, $(B_2x)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, где $x \in D(A)$, $t \in [0,1]$, $a_0, a_1 \in L_2[0,1]$.

Методом подобных операторов получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций исходного оператора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00197.

Список литературы

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж, Изд-во ВГУ. 1987. 165 с.
2. Шелковой А.Н. Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж. 2004. 144 с.
3. Шелковой А.Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями // Вестник факультета прикладной математики и механики. 2016. № 2. С. 226-235.
4. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2018. Т. 21, № 4. С. 18-33.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОНКОЛОГИЧЕСКОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

Рак – тяжелое агрессивное заболевание с высоким уровнем смертности. Являясь злокачественным новообразованием, может бесконтрольно расти, метастазировать из своего первоначального места в другие части тела с фатальными последствиями. Распространенные методы лечения включают хирургию, лучевую терапию, химиотерапию, иммунотерапию или их комбинации [1, 2]. Однако существенный прогресс в уменьшении заболеваемости, значительного увеличения продолжительности жизни после окончания цикла лечения пока не достигнут.

Для описания динамики роста опухолевых клеток и иммунного ответа на их возникновение разрабатываются различные математические модели. Большинство из них основывается на методах обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В разработанной модели [3, 4] вводится три типа клеток: T – делящиеся клетки; E – клетки иммунной системы, уничтожающие делящиеся клетки (эффекторные клетки); I – клетки иммунной системы, стимулирующие активность эффекторных клеток. Взаимодействие этих клеток происходит в «безразмерном» функциональном пространстве единичного размера K_T . Полное заполнение этого пространства делящимися клетками соответствует максимальному размеру «опухоли». Модель взаимодействия трех типов клеток представлена системой трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \mu T \left(1 - \frac{T}{K_T} \right) - \frac{\alpha ET}{g_1 + T}, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta T - \lambda_E E + \frac{\alpha_1 EI}{g_2 + I}, \\ \frac{dI}{dt} &= -\lambda_I I + \frac{\alpha_2 ET}{g_3 + T}, \end{aligned} \tag{1}$$

где μ – удельная скорость роста популяции делящихся клеток; K_T – объем функционального пространства делящихся клеток; β , λ_I , λ_E , g_1 , g_2 , g_3 – параметры, характеризующие скорости изменения $T(t)$, $E(t)$ и $I(t)$. Задача Коши для системы уравнений (1) решается с применением численных методов.

Распределение 3000 условных больных по стадиям заболевания (как результат решения задачи Коши для системы уравнений (1)) в разные моменты времени отражено на рис. 1. Символом «*» отмечен момент времени наступления второй стадии «заболевания». Параметры выбирались случайным образом из диапазонов: $\alpha \in [0.001, 0.002]$, $\beta \in [0.001, 0.002]$, $g_1 \in [0.5, 1.0]$, $\lambda E \in [0.004, 0.010]$, $\mu \in [0.004, 0.008]$.

Распределение «больных» по стадиям в момент времени $t = 1,5$ года, согласно рис. 1, следующее: стадия I – 15%, стадия II – 25%, стадия III – 28%, стадия IV – 32%. В Российской Федерации по данным Популяционного ракового регистра [3] число больных с впервые в жизни установленным диагнозом злокачественного новообразования на I и II стадии заболевания приходится около 50% больных, на III и IV стадии – по 20%. То есть расчетные данные в предположении, что диагноз ставится через 1,5 года после начала заболевания, согласуются с данными ракового регистра [1].

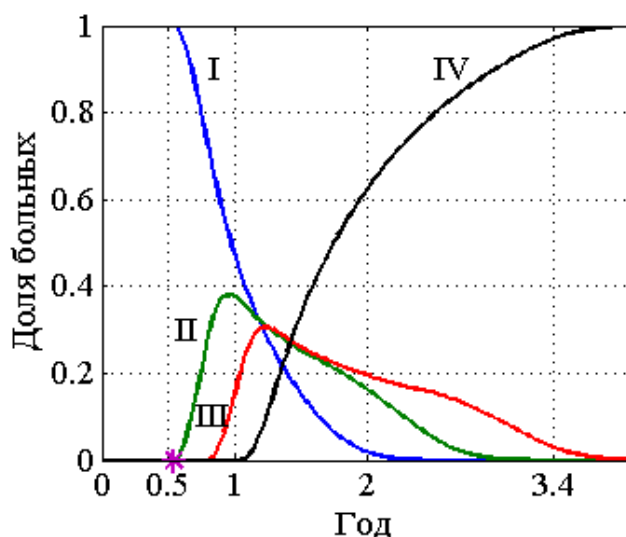


Рис. 1 – Распределение 3000 больных по стадиям заболевания

Список литературы

1. Каприн, А.Д. Состояние онкологической помощи населению России в 2018 году / под ред. А.Д. Каприна, В.В. Старинского, Г.В. Петровой. М. МНИОИ им. П.А. Герцена – филиал ФГБУ «НМИЦ радиологии» Минздрава России, 2019. 236 с.
2. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Расулова М.М., Абрамова А.В. Математическое моделирование лечения онкологического заболевания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 4. С. 437-446.
3. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Расулова М.М., Шмелева А.А. Математическое моделирование онкологического заболевания // Перспективы науки. 2020. № 12 (135). С. 20-26.

4. Гончарова А.Б., Колпак Е.П. Математическое моделирование лечения новообразования методом иммунотерапии // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. 2021. № 1. С. 74-78.

УДК 37.01

Юрьева А.А.,

*Воронежский государственный аграрный университет
им. императора Петра I, г. Воронеж*

О ФОРМИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЛИЧНОСТНОГО АСПЕКТА ОБРАЗОВАНИЯ

Становление, развитие и функционирование гражданского общества не возможны без социализации образования, то есть без решения наиболее важных задач в социокультурной сфере общества. Социализация образования позволяет преодолевать разобщенность, поляризацию взаимосвязанных компонентов культуры: естественнонаучного, технико-технологического и социально-гуманистического. Одной из главных характеристик социализации образования можно считать оптимальное сочетание уровня потенциальных способностей в реализации социально признанных ценностей и собственных творческих сил при решении конкретной учебно-воспитательной, производственной или управленческой задачи. Очевидно и то, что при формировании специалиста любого профиля приоритетным является не столько набор специальных знаний (хотя они крайне важны), сколько глубокая фундаментальная подготовка как "стартовая площадка" и необходимое условие саморазвития личности и профессионала, его творческой самореализации. Образование невозможно без обращения к личности. Дело лишь в том, какую роль играет личность в этом процессе - роль цели или средства. Традиционное образование, преследующее цели функциональной, предметно-вещной образованности человека, использует личность как раз в функции средства, опирается на механизмы мотивации, ценностной ориентировки, смыслопоиска как на своего рода движущие силы достижения заданных извне целей. Развитие же самих этих личностных "механизмов", "функций" совершается в данном случае попутно, в той мере и в тех аспектах, в каких они оказываются необходимыми, востребованными для социальной ориентации индивида. От состояния образовательной системы, ее способности удовлетворять потребности личности и общества в высококачественных образовательных услугах принципиально зависят перспективы общественного развития в мире. Вместе с тем нарастание информационного потока порождает у людей калейдоскопическую («мозаичную»), а не целостную картину мира.

Это приводит человека к утрате возможности осознанно выстраивать траекторию своей личной и профессиональной судьбы с учетом смысло-жизненных ориентиров. Именно поэтому одной из фундаментальных характеристик гуманистического образования становится его способность учить человека адекватно интерпретировать получаемую информацию и создавать благоприятные условия для формирования у него целостной картины мира и понимания своего места в нем. С самой общей точки зрения, образование - это естественное и, может быть, наиболее оптимальное место встречи личности и общества, место продуктивного и взаиморазвивающего разрешения бытийных противоречий между ними. По сути, всякое образование всегда имело, по крайней мере, два стратегических ориентира - на личность (ее духовное становление и развитие базовых способностей) и на общество (его устойчивое развитие и способность к инновационным преобразованиям). Антропологический подход в сфере гуманитарного знания – это в первую очередь ориентация на человеческую реальность во всей ее полноте, во всех ее духовно-душевно-телесных измерениях; это поиск средств и условий становления полного человека; человека – как субъекта собственной жизни, как личности во встрече с другими. Несмотря на кризисность социальной ситуации, в образовании все явственнее обнаруживаются тенденции, позволяющие говорить о переходе этой системы в новое качественное состояние. К таким тенденциям можно было бы отнести постепенный отказ от передачи подрастающему поколению проверенных “истин” и усиления самостоятельной культуросозидающей функции образования, его открытости инновациям, связи с динамично меняющимся социумом, с планетарной экологической ситуацией. Образование все более предстает как сфера конкурирующих концепций, как своего рода “производство образованности”, в котором как и в других производствах, используются современные наукоемкие технологии, информационные продукты, квалифицированные специалисты. Становясь центральным феноменом культуры, образование все более ориентируется на утверждение сущностного личностного начала в человеке.

УДК 532.4, 621.372.413

Щербатов Д.Ю., Урывская Т.Ю.,

*Военный Учебно-Научный Центр Военно-Воздушных Сил
«Военно-Воздушная Академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

ФАЗОВАЯ МАНИПУЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СТАНЦИЙ

С увеличением интенсивности воздушного движения в районе аэродрома существенно повышаются требования, предъявляемые к качеству

© Щербатов Д.Ю., Урывская Т.Ю., 2021

радиолокационного обеспечения, особенно на таком важном этапе полета, каким является посадка. Необходимо отметить, что с ростом количества вторичных радиолокаторов и повышением интенсивности воздушного движения, возможности существующих источников вторичной информации будут ограничивать развитие автоматизированных систем управления воздушным движением (АС УВД). Это обусловлено следующими причинами:

- увеличением потерь запросных сигналов в связи с ростом уровня внутрисистемных помех и перегрузкой ответчиков;
- недостаточной разрешающей способностью и изрезанностью диаграммы направленности антенны (ДНА) запросчика в вертикальной плоскости;
- наложением ответных сигналов;
- недостаточными возможностями информационного обмена по каналу «Борт-земля» и отсутствием канала передачи данных «Земля-борт».

Для решения этой проблемы необходимы различные преобразования как в структуре лиц, обеспечивающих полёты, так и в технике.

В настоящее время в связи с возрастающей загруженностью аэродромов значительно усложнилась задача управления воздушного движения (УВД). Назрела необходимость в быстром и качественном получении вторичной информации о воздушном судне (ВС). Для этих целей предназначен активный режим (АКТ) работы системы посадки. Одним из важнейших устройств, обеспечивающих работу посадочного радиолокатора (ПРЛ) в активном режиме, является шифратор передатчика вторичного канала (ПВК), разрабатываемый в данном проекте.

Основное требование, предъявляемое к шифратору - получение запросного кода со стабильными временными интервалами.

Наилучшим образом этому требованию удовлетворяет шифратор на основе цифровых методов задержки сигнала.

По сравнению с существующими образцами формирователя предлагается использовать:

- современную элементную базу, что позволит уменьшить энергопотребление и увеличить быстродействие устройства;
- другие схемные решения, позволяющие улучшить качество сигнала, уменьшить количество элементов на плате, таким образом, увеличив надёжность и ремонтпригодность схемы;
- усовершенствованную схему выбора режимов, реализующую режим перезапроса при неправильно принятых ответных сигналах.

Все эти улучшения позволяют более эффективно использовать активную радиолокацию при УВД в районе аэродрома.

В течение длительного переходного периода, связанного с внедрением дискретно-адресной системы вторичного радиолокатора (ДАС ВРЛ), наземная аппаратура должна обслуживать самолёты с ответчиками суще-

ствующей системы ВРЛ (УВД/RBS), а адресные ответчики должны отвечать на запросы существующих вторичных радиолокаторов.

Для обеспечения совместимости систем при минимальном усложнении оборудования ДАС ВРЛ использует те же радиочастоты по запросу и ответу, что и средства и системы УВД/RBS, а форматы сигналов запроса ДАС ВРЛ содержат сигналы запроса ответчиков УВД/RBS (общий запрос (рисунок 1)).

В отличие от обычного запроса режима УВД/RBS используется дополнительный импульс Р3 длительностью 1,6 мкс и отстоящий на 2 мкс от импульса Р2. Ответчики существующей системы на такой запрос отвечают обычным образом, в то же время адресные ответчики – сигналом индивидуального опознавания (кодом адреса).

Совместимость адресного ответчика с существующими наземными запросчиками определяется выбором режима работы УВД или RBS в ответчике, при этом в любом из выбранных режимов адресный ответчик способен на запросы общего вида излучить ответный сигнал, содержащий код адреса.

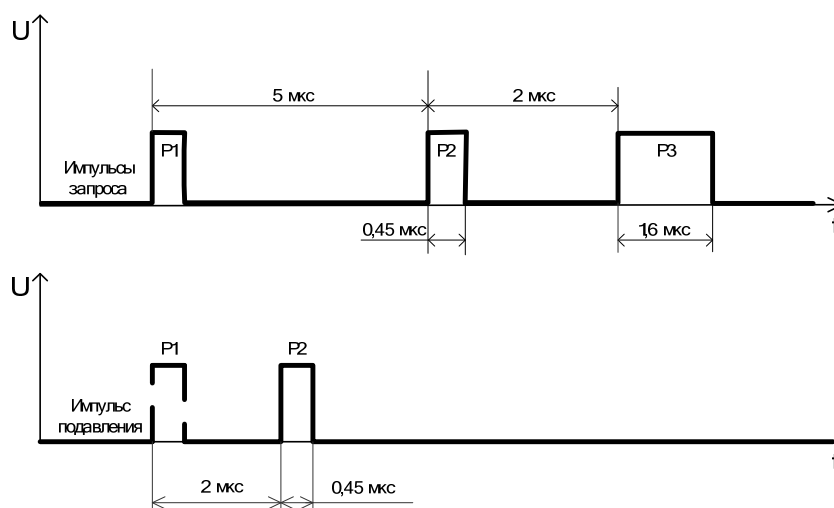


Рис. 1 – Сигнал запроса ответчиков при использовании ДАС

Адресный запрос (рисунок 2) начинается с преамбулы длительностью 3,5 мкс, состоящей из двух импульсов, воспринимаемыми обычными ответчиками как сигнал, излучаемый боковыми лепестками. Эти импульсы аналогичны по форме импульсам, используемым в УВД/RBS, и вызывают запуск этих ответчиков во избежание синхронных помех их произвольного срабатывания на запросы ДАС. За преамбулой следуют информационные разряды Р5 в виде блока данных в 56 бит (16,25 мкс) или 112 бит (30,25 мкс), которые имеют внутреннюю модуляцию, состоящую в опрокидывании фазы несущей на 180° в определённое время (относительная фазовая модуляция). Первое опрокидывание фазы в импульсе Р4 является опорным поворотом синхрофазы.

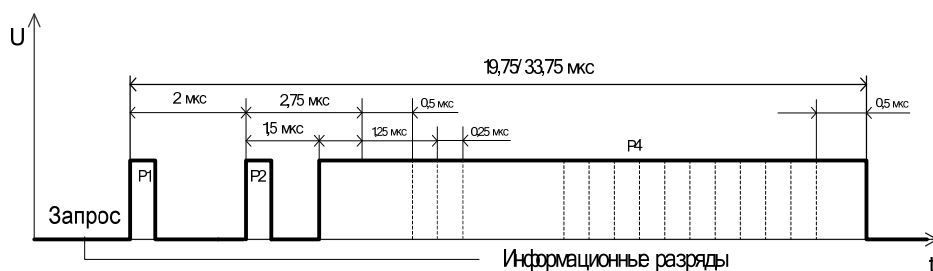


Рис. 2 – Сигнал адресного запроса

Центр каждого следующего опрокидывания фазы в P4 имеет место только через 0,02 мкс (рисунок 2) после поворота синхрофазы. Импульс подавления боковых лепестков P4 в адресных ВРЛ совпадает с началом информационного блока и состоит из двух фазирующих импульсов опорной фазы. Его появление при достаточной амплитуде в месте приёма затеняет опрокидывание синхрофазы P4, в результате чего невозможно декодировать P4.

В результате использования адресных запросчиков вместо существующих вторичных радиолокационных датчиков систем УВД:

- повысится пропускная способность системы;
- появятся высокоэффективные каналы передачи данных “Земля – борт” и “Борт – земля”;
- резко увеличится объём передаваемой информации;
- снизится уровень внутрисистемных помех;
- повысится разрешающая способность системы;
- улучшатся вероятностные и точностные характеристики системы;
- повысится помехоустойчивость каналов запроса и ответа;
- появится возможность создания координатной сети запросчиков, осуществляющий взаимный обмен информацией.

Реализация дополнительных мероприятий, таких как моноимпульсный приём сигналов, активная фазированная антенная решётка (ФАР), использование математических методов обработки информации о положении самолётов в пространстве и использование информации, полученной по линии передачи данных (ЛПД) для решения задачи предупреждения столкновений, а также другие мероприятия позволят повысить тактико-технические характеристики (ТТХ) системы.

Список литературы

1. Справочник офицера воздушно-космической обороны / под.ред. С.К. Бурмистрова. верь: ВА ВКО, 2006. 564с.
2. Тихонов, В.И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

**СООТВЕТСТВИЕ РЕШЕНИЙ АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

На сегодняшний день многие научные явления можно описать моделями с помощью математических инструментов из теории дробного исчисления. В связи с растущим интересом в области дробного исчисления возникает задача проверить, соответствуют ли решения антипериодической задачи для дифференциального уравнения второго порядка и дифференциального уравнения дробного порядка $1 < q < 2$.

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка:

$$x''(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0; T], \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

$$x(0) = -x(T), \quad x'(0) = -x'(T), \quad (2)$$

где $f(t)$ – непрерывная функция.

Как известно, для решения такой задачи используется метод вариации Лагранжа:

$$x(t) = c_1(t) \cdot x_1(t) + c_2(t) \cdot x_2(t). \quad (3)$$

Здесь $x_1(t) = e^{\sqrt{\lambda}t}$, а $x_2(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t}$, если используя краевые условия найти $c_1(t)$, $c_2(t)$ и подставить в (3), то мы получим:

$$x(t) = e^{\sqrt{\lambda}t} k_1 + e^{-\sqrt{\lambda}t} k_2 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^t (e^{\sqrt{\lambda}(t-s)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-s)}) f(s) ds. \quad (4)$$

Теперь, снова учитывая краевые условия, мы можем составить систему, решив которую с помощью правила Крамера, можно найти k_1 , k_2 и подставить в (4). Тогда мы получим решение на основе метода функции Грина:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-\int_0^T e^{\sqrt{\lambda}(T-s)} f(s) ds}{2\sqrt{\lambda}(1+e^{\sqrt{\lambda}T})} \cdot e^{\sqrt{\lambda}t} + \frac{\int_0^T e^{-\sqrt{\lambda}(T-s)} f(s) ds}{2\sqrt{\lambda}(1+e^{-\sqrt{\lambda}T})} \cdot e^{-\sqrt{\lambda}t} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^t (e^{\sqrt{\lambda}(t-s)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-s)}) f(s) ds = \\ &= \int_0^T G(t,s) f(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{-e^{\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1+e^{\sqrt{\lambda}T})} + \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1+e^{-\sqrt{\lambda}T})} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(e^{\sqrt{\lambda}(t-s)} - e^{-\sqrt{\lambda}(t-s)}), & 0 \leq s \leq t < T, \\ \frac{-e^{\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1+e^{\sqrt{\lambda}T})} + \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(T-s)} \cdot e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}(1+e^{-\sqrt{\lambda}T})}, & 0 \leq t < s < T. \end{cases} \quad (6)$$

Теперь рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка:

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 1 < q < 2, \quad \lambda > 0, \quad (7)$$

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \quad (8)$$

где ${}^C D^q$ – дробная производная Капуто, $f(t)$ – непрерывная функция.

Единственным решением задачи (7)–(8) является функция (см. [3]):

$$x(t) = c_1 E_q(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds, \quad (9)$$

где $E_q(\lambda t^q)$, $E_{q,2}(\lambda t^q)$, $E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)$ – функции типа Миттаг-Леффлера (см. [1]).

Тогда краевая задача

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 1 < q < 2, \quad (10)$$

$$x(0) = -x(T), \quad x'(0) = -x'(T) \quad (11)$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^T G(t,s) f(s) ds, \quad (12)$$

где функция Грина (см. [2]):

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{-(1+E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1+E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q) + \\ + \frac{-(1+E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) + T^{-1} E_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1+E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q) + \\ + (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q), & 0 \leq s \leq t < T, \\ \frac{-(1+E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + T E_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1+E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q) + \\ + \frac{-(1+E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2} E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q) + T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q)(T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1+E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q), & 0 \leq t < s < T. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя в последнее равенство $q = 2$, а также используя свойства функции Миттаг-Леффлера (см. [1]) и её виды при целочисленных индексах, можно преобразовать выражение (13) к виду функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка вида (6).

Таким образом, решения антипериодической задачи для дифференциального уравнения второго порядка есть частный случай решения антипериодической краевой задачи в случае дробного порядка $1 < q < 2$.

Список литературы

1. Gorenflo R., Kilbas A.A., Francesco Mainardi, Sergei V. Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014. 443 p.
2. Kamenskii M., Petrosyan G., Wen C.F. An existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space, J. Nonlinear Var. Anal, 5 (2021), No. 1, pp. 155-177. DOI: 10.23952/jnva.5.2021.1.10
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2006. 523 p.

АННОТАЦИИ И СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Акимов Данил Вадимович, Парт Анна Александровна. Оптимизация передвижения военного подразделения.

Ключевые слова: оптимизация, нелинейное программирование, условный экстремум.

В работе рассматривается задача оптимизации выбора маршрута перемещения боевого подразделения, имеющего задачу выйти к указанному рубежу обороны.

Акимов Данил Вадимович, ВУНЦ ВВС «ВВА», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, 2 курс.

Парт Анна Александровна, ВУНЦ ВВС «ВВА», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ст. преподаватель 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств, *e-mail: anna_razinkova@mail.ru.*

Антипова Екатерина Сергеевна. Математическое моделирование конкуренции двух идеологий с внутренними конфликтами.

Ключевые слова: конкурирующие идеологии, внутренние конфликты, конкурентная борьба, математическое моделирование.

В работе построена математическая модель конкурентной борьбы двух идеологий с учетом внутренних конфликтов в каждой из идеологий. Проведены параметрические исследования полученной системы уравнений. Показано, что существуют только четыре различных сценария развития идеологий: (А) одновременное сосуществование двух конкурирующих идеологий, когда число их адептов с течением времени выходит на стационарный уровень; (В) асимптотическое вымирание обеих идеологий; (С) одна из идеологий стабилизируется, а другая асимптотически вымирает; (D) одна или обе идеологии неограниченно увеличивают число сторонников за счет привлечения их из континуума.

Антипова Екатерина Сергеевна, Государственный университет управления, г. Москва, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры математических методов в экономике и управлении, *e-mail: antipovaes@live.ru.*

Афанасенкова Юлия Вячеславовна, Гладышев Ю.А., Лошкарева Елена Анатольевна. Об одном методе построения решений полигармонических уравнений.

Ключевые слова: Полигармонические уравнения, бигармоническое уравнение, обобщенные степени (ОС).

Дана физическая интерпретация построенных базисных решений бигармонического уравнения как решения простейших краевых задач теории упругости. Приведены многочисленные частные примеры. Указано на возможность обобщения метода для большего числа измерений пространства переменных.

Афанасенкова Юлия Вячеславовна, «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского», *e-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru.*

Гладышев Ю.А., «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского», кандидат технических наук, *e-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru.*

Лошкарева Елена Анатольевна, «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского», кандидат технических наук, доцент кафедры Физики и математики, *e-mail: losh-elena@yandex.ru*.

Балабан Олеся Руслановна. Разностная схема эволюционных процессов переноса с распределенными параметрами на произвольной сети.

Ключевые слова: эволюционные процессы переноса на сетях, аппроксимация, разностная схема.

В работе рассматриваются аппроксимации математических моделей сетеподобных эволюционных процессов переноса применительно к дифференциальным системам с распределенными параметрами на произвольной сети. Сложность математического описания состоит в описании мест сочленения линейных фрагментов сети. В технических задачах при транспортировке вязкой среды по гидросети происходит нагрев или охлаждение гидросистемы. Это значит, что при анализе гидродинамического процесса необходимо учитывать неизотермическую составляющую. Поэтому для адекватного математического анализа необходимо математическое описание процесса согласования в узлах сети.

Балабан Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (ППО и УА ВВС), *e-mail: bal-olesya@mail.ru*.

Баталова София Андреевна. Дифференциально-разностная система в классе суммируемых на графе функций.

Ключевые слова: ориентированный граф, дифференциально-разностная система на графе, разрешимость.

Целью настоящего исследования является получение условий разрешимости дифференциально-разностной системы параболического типа в слабой постановке с пространственной переменной, изменяющейся на ориентированном геометрическом графе.

Баталова София Андреевна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, бакалавр математического факультета, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей.

Бурковский Виктор Леонидович, Сидоренко Евгений Васильевич, Бочаров Владимир Жанович, Добрынин Степан Леонидович. Интеллектуализация управления производственными объектами в условиях неопределенности.

Ключевые слова: управление в условиях неопределенности, байесовская сеть, нейронная сеть.

Статья посвящена рассмотрению вопросов интеллектуализации управления производственными объектами в условиях неопределенности. Авторы подчеркивают актуальность выбранной темы исследования. Рассмотрена классифика-

ция подходов интеллектуального управления в условиях неопределенности: проактивный подход и реактивный подход; дано описание особенностей этих подходов. Байесовские сети описываются в контексте управления в условиях неопределенности. На основе байесовских сетей решаются проблемы показаны методы управления процессами аддитивного производства. А использование байесовских нейронных сетей показано в свете рассмотрения проблем управления робототехническими комплексами и региональными энергетическими сетями.

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, заведующий кафедрой электропривода, автоматики и управления в технических системах, *e-mail: bvl@vorstu.ru*.

Сидоренко Евгений Васильевич, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры электропривода, автоматики и управления в технических системах.

Бочаров Владимир Жанович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры электропривода, автоматики и управления в технических системах, *e-mail: dr.bocharoff@yandex.ru*.

Добрынин Степан Леонидович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры электропривода, автоматики и управления в технических системах, *e-mail: dobrynins11994@gmail.com*

Бучина Дарья Андреевна, Гончарова Анастасия Борисовна. *Применение метода псевдорандомизации (propensityscorematching)*.

Ключевые слова: псевдорандомизация, статистический анализ, медицинская статистика, propensityscorematching, statisticalanalysis

Неотъемлемой частью доказательной медицины является статистический анализ данных. Результаты исследований помогают врачу обосновать решение о применении того или иного метода диагностического или лечебного вмешательства. Использование метода PSM позволяет расширить возможности медицинских исследований и проводить сравнение эффективности различных методов диагностики и лечения в случаях, когда рандомизация событий невозможна. В настоящей статье описан предложенный алгоритм псевдорандомизации.

Бучина Дарья Андреевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, магистрант, *e-mail: st086271@student.spbu.ru*.

Гончарова Анастасия Борисовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доцент, *e-mail: a.goncharova@spbu.ru*.

Василенко Полина Максимовна, Баталова София Андреевна. *Оценки норм слабого решения дифференциально-разностной системы на графе*.

Ключевые слова: ориентированный граф, дифференциально-разностная система на графе, оценки норм слабых решений

Целью настоящего исследования является получение условий разрешимости дифференциально-разностной системы параболического типа в слабой постановке с пространственной переменной, изменяющейся на ориентированном геометрическом графе.

Василенко Полина Максимовна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, бакалавр математического факультета, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей.

Баталова София Андреевна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, бакалавр математического факультета, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей.

Гончарова Анастасия Борисовна, Шмелева Анастасия Анатольевна, Колпак Евгений Петрович. Камерная математическая модель новообразования.

Ключевые слова: опухоль, новообразования, математическое моделирование, дифференциальные уравнения,

Разработана математическая модель новообразования, представляющая собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Модель основана на принципе парных взаимодействий различных типов клеток. Учитывается «ядерная» структура опухоли, в которой новообразование ядер происходит при накоплении достаточного количества делящихся клеток опухоли.

Гончарова Анастасия Борисовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики-процессов управления, goncharovaab@yandex.ru.

Шмелева Анастасия Анатольевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, bubblegum14031999@gmail.com.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, petrovich_ptpu@mail.ru.

Дмитриев Сергей Александрович, Чумаков Евгений Алексеевич, Дмитриев Никита Сергеевич. Повышение качества радиосвязи при использовании дальнего распространения радиоволн ДКМ диапазона.

Ключевые слова: радиосвязь, многолучевость, замирания, максимальная применимая частота, ионосферное зондирование

Работа посвящена анализу эффективности функционирования линий декаметрового радиосвязи, выработке рекомендаций по учету влияния состояния ионосферы на распространение радиоволн. Отмечены перспективы использования декаметрового радиосвязи в условиях северных широт, предложены рекомендации учета неустойчивого состояния ионосферы с высоким уровнем возмущений.

Дмитриев Сергей Александрович, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат техниче-

ских наук, доцент, доцент кафедры 123 передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: dsa_tambov@mail.ru*.

Чумаков Евгений Алексеевич, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант четвертого курса факультета авиационных средств связи.

Дмитриев Никита Сергеевич, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант первого курса факультета авиационных средств связи.

Добрынин Степан Леонидович, Бурковский Виктор Леонидович. Интеллектуализация процессов принятия решений в системе управления аддитивным производством.

Ключевые слова: аддитивное производство, система поддержки принятия решений, машинное обучение.

Описаны ключевые шаги создания изделия технологиями АП, включающие в себя проектирование, планирование процесса 3D-печати, пост-обработку и контроль качества. Исследована интеллектуализация процессов принятия решений в аддитивном производстве с помощью машинного обучения. Рассмотрено применение методов машинного обучения в контексте жизненного цикла изготавливаемого изделия.

Добрынин Степан Леонидович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, *e-mail: DobryninSL@gmail.com*.

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электропривода, автоматики и управления в технических системах, *e-mail: BVL@vorstu.ru*.

Евстафьева Ирина Александровна. Оценка срока службы тонкостенной трубы в условиях внешнейзатухающей механохимической коррозии.

Ключевые слова: механохимическая коррозия, долговечность, внешняя односторонняя коррозия

Рассматривается затухающая внешняя механохимическая коррозия тонкостенной трубы под давлением с учетом неравномерного нагрева. Предполагается, что скорость коррозии линейно зависит от максимальных напряжений и экспоненциально от температуры, при этом затухание коррозии происходит в соответствии с распределением Вейбулла. В работе оценивается долговечность трубы.

Евстафьева Ирина Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, *e-mail: i.evstafeva@spbu.ru*.

Ерин Олег Леонидович, Досмурзаев Алмаз Кадырбекович, Алиев Дмитрий Сергеевич, Кузнецов Станислав Александрович. Модель противоточного теплообменника с сосредоточенными параметрами.

Ключевые слова: противоточный теплообменник, разности температур, температуропроводность.

В статье рассматривается модель противоточного теплообменника с сосредоточенными параметрами. В кожухотрубчатых теплообменниках записывают модели с распределенными параметрами в виде дифференциальных уравнений в частных производных. Однако интегрирование таких уравнений представляет определенные трудности.

Ерин Олег Леонидович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (ППО и УА ВВС), *e-mail: ol-er85@mail.ru.*

Досмурзаев Алмаз Кадырбекович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

Алиев Дмитрий Сергеевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (ППО и УА ВВС), *e-mail: ol-er85@mail.ru.*

Кузнецов Станислав Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (ППО и УА ВВС), *e-mail: ol-er85@mail.ru.*

Жабко Наталия Алексеевна, Жабко Иван Алексеевич, Лепихин Тимур Андреевич. О моделировании динамики движущего объекта с применением кватернионов.

Ключевые слова: математическое моделирование, подвижный объект, кватернион

Рассматривается задача математического моделирования подвижного объекта. Описываются особенности формирования модели на основе углов Эйлера, определяются трудности при таком моделировании. Приводится обоснование применения теории кватернионов при моделировании подвижных объектов.

Жабко Наталия Алексеевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедрой компьютерных технологий и систем, *e-mail: ztasha@mail.ru.*

Жабко Иван Алексеевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Лепихин Тимур Андреевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-

математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем, *e-mail: LepikhinTA@gmail.com*.

Зайцева Мария Андреевна, Арапов Денис Владимирович. *Нейросетевое моделирование концентрации сухих веществ в сахарных растворах.*

Ключевые слова: нейросетевая математическая модель, кристаллизация сахара, температурная депрессия.

Важнейшей задачей при производстве сахарного песка является автоматический контроль за концентрацией сухих веществ в растворе и определение момента времени окончания процесса кристаллизации. До настоящего времени эта задача окончательно не решена. В статье рассмотрена нейросетевая математическая модель для расчета концентрации сухих веществ на основе температурной депрессии упариваемого сахарного раствора, погрешность модели составила 0,17%. отн.

Зайцева Мария Андреевна, Воронежский государственный университет инженерных технологий г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры высшей математики и информационных технологий, *e-mail: mariya.konopleva97@yandex.ru*.

Арапов Денис Владимирович, Воронежский государственный университет инженерных технологий г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий, *e-mail: arapovdv@gmail.com*.

Зубова Светлана Петровна, Раецкая Елена Владимировна. *Решение задачи управления для одной динамической системы с частными производными.*

Ключевые слова: динамическая система с частными производными, многогопочечная задача, метод каскадной декомпозиции

Для многомерной системы управления с частными производными решается задача построения вектор-функций управления и состояния для перевода состояния системы из произвольного начального в произвольное конечное состояние за любой заданный промежуток времени. Для построения их в аналитическом виде применяется расщепление исходной системы на две подсистемы. Из одной подсистемы определяется вектор-функция управления после того, как из другой подсистемы находится вектор-функция состояния. Рассматривается случай, когда матрица управляемости Калмана содержит лишь две матрицы.

Зубова Светлана Петровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, *e-mail: spzubova@mail.ru*.

Раецкая Елена Владимировна, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, *e-mail: raetskaya@inbox.ru*.

Иванков Олег Евгеньевич. *Математическое моделирование глобальной сейсмичности Земли.*

Ключевые слова: глобальная сейсмичность, сеть сейсмических станций, математическое моделирование.

Землетрясения – это неотъемлемая часть окружающей нас среды, ежегодно на Земле их происходит около десяти тысяч. На уровень сейсмической активности оказывают влияние множество процессов, поэтому оценка вероятности и прогноз землетрясений крайне сложны, но исследования в данном направлении продолжаются. Как ни печально, но проблема далека от решения, поэтому интерес представляет исследование на основе математического моделирования сейсмической активности Земли, и ее связи с процессами, происходящими в околоземном пространстве.

Иванков Олег Евгеньевич, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант математического факультета, e-mail: ivankov.ol@yandex.ru.

Иванов Алексей Владимирович, Балабан Олеся Руслановна. Вопросы устойчивости течения гидравлического потока в системах технических устройств.

Ключевые слова: система Навье-Стокса, устойчивость, гидродинамические процессы.

В работе вводится новый инструментарий для описания существенно нелинейных уравнений, возникающих при описании движения монофазных сред. С помощью которого можно будет анализировать сложные математические объекты, возникающие при описании гидродинамических процессов в воздухоразделительных установках. Для линеаризованной системы Навье-Стокса рассмотрены достаточно распространенные при описании гидродинамических процессов в воздухоразделительных установках вопросы.

Иванов Алексей Владимирович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, начальник 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (ППО и УА ВВС), e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Балабан Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник 22 отдела научно-исследовательского 2 управления научно-исследовательского научно-исследовательского центра (ППО и УА ВВС), e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Иванов Артемий Валерьевич, Моисеев Игорь Анатольевич. Синтез оптимального по быстрдействию управления в задаче перелета в случае одного переключения курсового угла.

Ключевые слова: оптимальное быстрдействие, оптимальное управление, оптимальная траектория, курсовой угол, игра "шофер-убийца".

В статье рассматривается задача вывода управляемого объекта из заданного начального положения в начало координат с заданными значениями курсового угла и скорости объекта в конечной точке за минимальное время.

Предполагается, что оптимальная траектория движения существует, и для перевода объекта в начало координат из произвольной начальной точки требуется одно переключение управления курсовым углом. На интервалах постоянства управления углом находится максимальное количество точек переключения управления скоростью объекта и условия для их существования.

Иванов Артемий Валерьевич, Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Российская Федерация, студент, *e-mail: st062236@student.spbu.ru*.

Моисеев Игорь Анатольевич, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, С.-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры безопасности информационных систем, *e-mail: mig1256@mail.ru*.

Канищева Олеся Ивановна, Служенко Иван Николаевич. Решение дифференциальных уравнений с нелинейностями методом Самойленко-Перова.

Ключевые слова: гистерезисные нелинейности, дифференциальные уравнения, приближенные методы решения, метод последовательных приближений.

Аннотация. В работе последовательно описывается метод приближенного построения периодических решений дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями.

Канищева Олеся Ивановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, *e-mail: oleka_olesya@mail.ru*.

Служенко Иван Николаевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская федерация, курсант, 2 курс, факультет инженерно-аэродромного обеспечения.

Каримов Сардорилхом угли. Структурная стратегия формирования дистанционного мониторинга земель сельскохозяйственного назначения.

Ключевые слова: Дистанционное зондирование, образование, система, аграрный сектор, регулирование.

Информация, используемая для целей городского прогнозирования и проектирования, делится на три типа: директивная, основанная на законодательных актах; аналитические, основанные на статистических, плановых, проектных, исследовательских материалах; картографический. У каждого типа информации есть свое предназначение. Директивная информация обязательна для прогнозирования на любом уровне. Аналитическая информация носит рекомендательный характер, обычно она напрямую не используется, а после дополнительной обработки картографическая информация служит графической основой для чертежей и специальных расчетов.

Каримов Сардорилхом угли, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант факультет прикладной математики – процессов управления (ПМ-ПУ), *e-mail: st088382@student.spbu.ru*.

Кириченко Виталий Владимирович, Мелякова Евгения Валерьевна. *Задача управления в условиях неполной информации.*

Ключевые слова: управление, экономика, алгоритм, модель, сетевая организация

Исследование посвящено вопросам анализа рисков ведения бизнеса, оценки объемов средств на поиск сведений о деятельности конкурентов, что позволяет получить результаты по основным направлениям выбора оптимальной стратегии поведения. Необходимо предусмотреть охват дополнительных вариантов стратегий менеджеров для достижения оптимизации прибыли и формирования собственного сегмента потребителей.

Кириченко Виталий Владимирович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. Экономический факультет. Магистрант кафедры управления и планирования социально-экономических процессов, *e-mail: vitalywarlock@mail.ru.*

Мелякова Евгения Валерьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. Экономический факультет. Кандидат экономических наук, доцент кафедры управления и планирования социально-экономических процессов, *e-mail: e.melyakova@spbu.ru.*

Кириченко Виталий Владимирович, Мелякова Евгения Валерьевна. *Цифровые алгоритмы управления сетевым бизнесом.*

Ключевые слова: алгоритм, цифровизация, сетевой, бизнес, коммерция

Пандемия стала источником самых масштабных трансформаций в сетевой коммерции. Оборот в данном сегменте поделен в сравнимых долях между офлайн и онлайн взаимодействием между поставщиками и потребителями. Завершается консолидация предприятий в сетевые структуры, что позволяет не только поддерживать конкурентное преимущество присутствия на рынке, но и сохранять устойчивость показателей экономической деятельности.

Кириченко Виталий Владимирович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. Экономический факультет. Магистрант кафедры управления и планирования социально-экономических процессов, *e-mail: vitalywarlock@mail.ru.*

Мелякова Евгения Валерьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. Экономический факультет. Кандидат экономических наук, доцент кафедры управления и планирования социально-экономических процессов, *e-mail: e.melyakova@spbu.ru.*

Князев Александр Васильевич, Четвертаков Андрей Николаевич, Степанов Дмитрий Сергеевич, Отставнов Антон Александрович. *Индикатор напряжения промышленной сети.*

Ключевые слова: радиоэлектронная аппаратура, индикаторы, напряжение сети, напряжение титания

Статья посвящена разработке индикатора напряжения промышленной сети, предназначенного для контроля и обслуживания промышленного оборудования, а также для обеспечения надежной и безотказной работы радиоэлектронной ап-

паратуры, особенно с постоянными колебаниями напряжения питания промышленной сети.

Князев Александр Васильевич, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, начальник факультета.

Четвертаков Андрей Николаевич, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат технических наук, старший преподаватель.

Степанов Дмитрий Сергеевич, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

Отставнов Антон Александрович, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

Князев Александр Васильевич, Четвертаков Андрей Николаевич, Уваров Иван Алексеевич, Абдюшев Илья Растамович. *Применение функции эффективности двумерной дискретной фильтрации для анализа цифровых изображений.*

Ключевые слова: цифровое изображение, двумерная дискретная фильтрация, S-матрица, функция эффективности.

Статья посвящена анализу функции эффективности двумерной дискретной фильтрации, посредством которой возможно осуществлять анализ цифровых изображений, заключающийся в определении геометрической формы объекта и его ориентации на изображении.

Князев Александр Васильевич, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, начальник факультета.

Четвертаков Андрей Николаевич, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат технических наук, старший преподаватель.

Уваров Иван Алексеевич, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

Абдюшев Илья Растамович, ВУНЦ ВВС «ВВА» (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

Кодиров Элмурод Солижон угли. *Модуль OWLREADY2 для онтологии как важные инструменты в PYTHON.*

Ключевые слова: Owlready2, RDF, Python 3, Базе данных SQLite3, IRI онтологии, XML или NTriples.

В этом материале в основном концепция онтологии более четко объясняется и описывается с помощью модуля, используемого в языке программирования. То есть он широко используется для анализа данных в форме обогащения онтологий или вычисления семантического сходства. Совсем недавно онтологии были разработаны на официальном языке, таком как Ontology Web Language (OWL), а классы состоят из набора определенных или ограниченных аксиом.

Кодиров Элмурод Солижон угли, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант математикомеханического факультета, e-mail: st088748@student.spbu.ru.

Кулманакова Марина Михайловна, Парт Анна Александровна. Импульсная задача для функционально-дифференциального включения с запаздыванием.

Ключевые слова: каузальный оператор, импульсное воздействие, полулинейное функционально-дифференциальное включение, мера некомпактности, уплотняющий оператор.

Рассматривается задача существования интегральных решений нелокальной импульсной задачи Коши для функционально-дифференциального включения с запаздыванием.

Кулманакова Марина Михайловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математики ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", г. Воронеж, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru.

Парт Анна Александровна, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ст. преподаватель 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств.

Купцов Валерий Семенович, Катрахова Алла Анатольевна. Решение системы уравнений в частных производных в приложении к задаче об обтекании малого сферического пузырька газа неоднородным потоком вязкой несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: уравнение Навье – Стокса, малая сфера, стационарный неоднородный поток, вязкая несжимаемая жидкость.

В настоящей работе вычислено поле скоростей обтекания сферического пузырька газа в неоднородном стационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Для нахождения решения данной задачи использовались гармонические сферические функции. С помощью комбинации этих функций было найдено решение линеаризованных уравнений Навье – Стокса. Основной (невозмущенный) поток считался известным и его гидродинамические параметры были записаны в виде разложений по гармоническим функциям. Ввиду сложности задачи, не представляется возможным совершенно точно вычислить гидродинамические параметры возмущенного потока. Поэтому при решении задачи рассматривались линеаризованные уравнения Навье-Стокса, при этом учитывались члены до третьей аппроксимации. Получена оценка точности решения задачи.

Купцов Валерий Семенович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМФММ, e-mail: Vckuptsov@rambler.ru.

Катрахова Алла Анатольевна, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМФММ, e-mail: Vckuptsov@rambler.ru.

Куцов Сергей Владимирович, Аникин Артём Александрович, Красавин Вадим Алексеевич, Невгод Леонид Сергеевич, Алтаев Альжан Сагымбекулы. Разработка аналоговых электронных усилителей с применением симуляторов работы электрических схем.

Ключевые слова: средства автоматизированного проектирования, компьютерное моделирование процесса, симулятор электрических схем, электронные усилители, схемотехника

В работе рассмотрены компьютерные средства, применяемые при проектировании электрических схем аналоговых электронных усилителей. Проектирование радиотехнического устройства представляет собой сложную задачу, состоящую из комплекса математических, конструктивных и схемотехнических вопросов, решение которых невозможно без использования современной вычислительной техники и специализированного программного обеспечения. Современные компьютерные программы построены на принципах автоматизированного проектирования и включают в себя базу стандартных радиоэлементов, моделируют физические процессы, протекающие в радиотехническом устройстве, а так же дают возможность применить собственные знания при построении электрических схем, и указывают на ошибки.

Куцов Сергей Владимирович, ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и А.Ю. Гагарина» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: KutsovSV@bk.ru.*

Ларин Александр Александрович, Андриков Константин Игоревич. *О собственных числах и собственных функциях обобщённого сферического оператора Лапласа.*

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, сингулярные эллиптические уравнения, присоединённые функции Лежандра.

В статье изучаются задачи на собственные значения для сингулярного дифференциального оператора вида

$$\Delta_{\theta\varphi} \Phi = \partial^2 \Phi / \partial \theta^2 + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \partial \Phi / \partial \theta + \sin^{-2} \theta (\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2 + k \operatorname{ctg} \varphi \times$$

$\times \partial \Phi / \partial \varphi)$, естественным образом возникающего при переходе к сферическим координатам в краевых и начально-краевых задачах с B -эллиптическим оператором $Au = = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 + k \partial u / (z \partial z)$, $k > 0$. В рассматриваемых задачах найдены собственные функции и отвечающие им собственные значения.

Ларин Александр Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, *e-mail: DOHIOREV@yandex.ru.*

Андриков Константин Игоревич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

Ларин Александр Александрович, Казюлин Илья Андреевич. *Спектральная задача для сингулярного эллиптического оператора, рассматриваемого в модельной области.*

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, сингулярные эллиптические уравнения, функция Лежандра.

В статье исследуются задачи на собственные значения в полушаре $B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, z > 0\}$ и четверти шара $B_1(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, z > 0, x > 0\}$ для сингулярного эллиптического оператора второго порядка, содержащего по переменной Z дифференциальный оператор Бесселя $B_z = \partial^2 / \partial z^2 + k \partial / (z \partial z)$, $k > 0$. В обоих случаях найдены в явном виде собственные значения и собственные функции рассматриваемых задач.

Ларин Александр Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, *e-mail*: DOHIORV@yandex.ru.

Казюлин Илья Андреевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж), Российская Федерация, курсант.

Майорова Светлана Павловна, Трибунских Олег Александрович. Переход от системы уравнений первого порядка к краевой задачи на геометрическом графе для уравнения второго порядка.

Ключевые слова: инженерная сеть, система дифференциальных уравнений, геометрический граф, краевая задача на графе.

В докладе доказана возможность перехода от системы дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих процесс изменения давлений и расходов в инженерной сети, к дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных, которое задано на геометрическом графе. Этот переход можно осуществить как для уравнения описывающего изменение давления, так и для уравнения задающего изменение расхода.

Майорова Светлана Павловна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, *e-mail*: sptomajorova@yandex.ru.

Трибунских Олег Александрович, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры математики, *e-mail*: toa_vrn@mail.ru.

Максимов Владимир Петрович. Об условиях разрешимости интерполяционной краевой задачи для линейных систем с последствием.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения с последствием, многоточечная краевая задача, условия разрешимости

Рассматривается линейная краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений интерполяционными краевыми условиями. Предлагается подход к получению условий разрешимости при двусторонних ограничениях относительно компонент правой части системы. Подход позволяет

получать условия в виде двусторонних неравенств относительно значений траектории в заданной системе точек основного промежутка. Приводится иллюстрирующий пример.

Максимов Владимир Петрович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, *e-mail: maksimov@econ.psu.ru*.

Медведев Сергей Николаевич. Об оптимальном решении задачи маршрутизации транспорта с чередованием с единым местом сбора.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта, оптимальное решение.

В статье рассматривается оптимальный маршрут задачи маршрутизации транспорта с чередованием объектов и единым местом сбора. Показывается, что в случае, когда затраты на перемещение заданы как расстояния, оптимальным решением задачи является маршрут одного мобильного объекта.

Медведев Сергей Николаевич, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий, *e-mail: s_n_medvedev@mail.ru*.

Межуев Александр Михайлович, Родионов Денис Владимирович, Шамаев Евгений Игоревич, Шиндин Артем Романович. Использование спектральной теории графов для расчета основных структурных параметров цифровой системы связи.

Ключевые слова: спектральная теория графов, структурные параметры, топологические характеристики, структурная устойчивость, цифровая система связи.

В работе представлен новый подход к строгому математическому описанию и определению основных структурных параметров и характеристик цифровых систем связи на основе применения математического аппарата спектральной теории графов.

Межуев Александр Михайлович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: multitenzor@mail.ru*.

Родионов Денис Владимирович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), *e-mail: doc_82@bk.ru*.

Шамаев Евгений Игоревич, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант факультета авиационных средств связи, *e-mail: shamaev99@list.ru*.

Шиндин Артем Романович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант факультета авиационных средств связи, *e-mail: friman.morgam@gmail.com*.

Милохин Александр Витальевич, Дмитриев Сергей Александрович.
Установка для оценки направленных свойств антенн апертурного типа.

Ключевые слова: диаграмма направленности, рупорная антенна, электромагнитное поле

Установка формирует одно рабочее место, предназначенное для проведения исследования направленных свойств антенн апертурного типа, в том числе зеркальной антенны и рупорных антенн с различными углами раскрытия.

Милохин Александр Витальевич, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант четвертого курса факультета авиационных средств связи.

Дмитриев Сергей Александрович, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры 123 передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: dsa_tambov@mail.ru.*

Мохова Виктория Вадимовна. ***Некоторые особенности литосферы земли и возможности моделирования волновых процессов в неоднородной среде.***

Ключевые слова: моделирование процессов, нелинейные процессы, неоднородность.

В тезисах дана краткая характеристика однородной и неоднородной среды. Рассмотрено уравнение волнового поля в абсолютно упругой однородной и изотропной среде, в области, где отсутствуют внешние силы воздействия на среду. Применить данную модель к Воронежскому кристаллическому массиву не представляется возможным, т.к. среда не является однородной. Делается предположение о возможном моделировании волновых процессов в неоднородной среде, на примере Воронежского кристаллического массива.

Мохова Виктория Вадимовна, Единая геофизическая служба РАН, г. Воронеж, инженер-исследователь; Воронежский государственный университет, г. Воронеж, аспирант математического факультета, *viktorijaperevoznikova1997@gmail.com*

Мухсинов Едгор Мирзоевич. ***Задача преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка с интегральными ограничениями.***

Ключевые слова: задача преследования, дифференциальная игра с интегральными ограничениями, дробная производная Капуто .

Аннотация. Рассматривается разрешимость задачи преследования для квазилинейной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка в смысле Капуто. Найдены множество начальных положений, из которых возможно завершение преследования.

Мухсинов Едгор Мирзоевич, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, г. Худжанд, Республика Таджикистан, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания, *e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com.*

Парт Анна Александровна, Бачурин Максим Сергеевич. Моделирование процессов в сетевидных антеннах.

Ключевые слова: граф, гиперболическое уравнение, начально-краевая задача, слабое решение.

Построена устойчивая разностная схема для гиперболической начально-краевой задачи третьего типа с распределенными параметрами на сети. Учтены особенности, порождаемые структурой графа (наличие узлов).

Парт Анна Александровна, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ст. преподаватель 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств, *e-mail: anna_razinkova@mail.ru.*

Бачурин Максим Сергеевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

Парт Анна Александровна, Черноротов Павел Олегович. Нестационарные процессы в антенных системах.

Ключевые слова: граф, гиперболическое уравнение, начально-краевая задача, слабое решение.

В работе моделируются процессы периодического характера, возникающие в системах сетевого типа. Использование класса суммируемых функций позволяет значительно повысить точность вычислений.

Парт Анна Александровна, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ст. преподаватель 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств, *e-mail: anna_razinkova@mail.ru.*

Черноротов Павел Олегович, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, 2 курс.

Пегливанова Мария Михайловна, Пронина Юлия Григорьевна. Моделирование коррозионного износа пластины из материала с пластической анизотропией при чистом изгибе.

Ключевые слова: чистый изгиб, пластическая анизотропия, коррозия, долговечность.

Рассматривается равномерная коррозия металлической пластины, находящейся в условиях чистого изгиба. Материал пластины считается идеальным упругопластическим, но предел текучести на сжатие превышает предел текучести на растяжение. Скорости коррозии с обеих сторон пластины считаем известными, в общем случае различными и отражающими возможное затухание коррозионного процесса по экспоненциальному закону с отрицательным показателем. Определяется время перехода пластины в состояние пластичности по всей толщине.

Пегливанова Мария Михайловна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, *e-mail: st067846@student.spbu.ru.*

Пронина Юлия Григорьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, *e-mail: y.pronina@spbu.ru*.

Пермякова Мария Александровна, Колпак Евгений Петрович, Виль Мария Юрьевна. Математическая модель конкуренции с запаздыванием.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, популяция, конкуренция, трофический ресурс.

Разработана математическая модель интерференционной конкуренции популяций на трофическом ресурсе при наличии у каждой популяции внутривидовой конкуренции. Модель представлена задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В модели учитывается возможное устойчивое совместное существование популяций при малых количествах ресурса, гибель нескольких популяций при больших объемах ресурса. Предложена оригинальная модель двух конкурирующих популяций, учитывающая влияние запаздывания конкуренции.

Пермякова Мария Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *st076336@student.spbu.ru*.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, *petrovich_ptpu@mail.ru*.

Виль Мария Юрьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *st054723@student.spbu.ru*.

Пермякова Мария Александровна, Полина Софья Геннадьевна, Кузина Инга Александровна. Статистическое оценивание заболеваемости женщин.

Ключевые слова: опухоль, молочная железа, заболеваемость детей, репродуктивная система

Проводится анализ статистических данных по заболеваемости женщин и детей. Выделены наиболее опасные локализации: репродуктивная система, онкологические заболевания. Дана оценка темпов роста числа больных детей, числа больных женщин и прогноз числа больных женщин на 2030 год. Отмечено, что заболеваемость определяется множеством причин, а не единственной причиной для конкретного заболевания.

Пермякова Мария Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *st076336@student.spbu.ru*.

Полина Софья Геннадьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *sonya_polina@mail.ru*.

Кузина Инга Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *st086479@student.spbu.ru*.

Полина Софья Геннадьевна, Кузина Инга Александровна, Колпак Евгений Петрович. Математическая модель акне.

Ключевые слова: последовательность, заболевание, случайность, бактерии, размножение.

Разработана математическая модель заболевания кожи – акне, учитывающая особенности возникновения, созревания и распространения пустул. Процесс роста популяции бактерий описывается системой уравнений с дискретным временем. Статистико-вероятностный подход применен в модели распределения условных больных по времени наступления стадий заболевания. Параметры модели определяются исходя из клинических данных.

Полина Софья Геннадьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *sonya_polina@mail.ru*.

Кузина Инга Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *st086479@student.spbu.ru*.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, *petrovich_ptpu@mail.ru*.

Провоторов Вячеслав Васильевич, Жабко Алексей Петрович L_2 -устойчивость операторно-разностной системы в пространстве функций с носителями в сетеподобной области.

Ключевые слова: сетеподобная область, операторно-разностная система, слабые решения, априорные оценки, устойчивость

В работе предложены пути получения априорных оценок норм слабых решений дифференциально-разностной системы в пространстве функций с носителем на сетеподобной области. Эти оценки дают возможность в рассматриваемом пространстве установить не только однозначную разрешимость дифференциально-разностной системы но и получить условия непрерывности слабого решения по исходным данным.

Провоторов Вячеслав Васильевич, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, *e-mail: wwprov@mail.ru*.

Жабко Алексей Петрович, С.-Петербургский государственный университет г. С.-Петербург, Российская Федерация, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления, *e-mail: wwprov@mail.ru*.

Провоторова Елена Николаевна. Оптимальное в смысле быстродействия управление параболической системой.

Ключевые слова: дифференциальная система, распределенные параметры на графе, оптимальное быстродействие

В работе рассматривается задача оптимального быстродействия для линейной дифференциальной системы с распределенными параметрами на графе. Представлены условия существования оптимального управления в пространствах типа С.Л. Соболева.

Провоторова Елена Николаевна, Воронежский государственный технический университет, г.Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, *e-mail: enprov@mail.ru.*

Радина Виктория Рустамовна, Курганский Сергей Иванович. Моделирование спектров ближней тонкой структуры края рентгеновского поглощения монооксида меди.

Ключевые слова: монооксид меди, метод линеаризованных присоединенных плоских волн, суперъячейка, XANES, остовная дырка.

В данной работе представлены результаты теоретического исследования XANES (X-ray absorption near edge spectroscopy) Cu L_3 -спектров соединения CuO в сравнении с экспериментальными данными. XANES спектры монооксида меди были рассчитаны шестью способами. Расчет проведен в рамках метода ЛППВ с использованием обобщенного градиентного приближения (GGA) для обменно-корреляционной энергии. Показано, что использование в расчете целой остовной дыркой приводит к значительному росту интенсивности спектра, не наблюдающемуся в эксперименте. Напротив, отсутствие остовной дырки или использование в расчете частичной остовной дыркой приводит к расчетным спектрам, хорошо согласующимся с экспериментальными.

Радина Виктория Рустамовна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирантка, *e-mail: viminova@inbox.ru.*

Курганский Сергей Иванович, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики твердого тела и наноструктур, *e-mail: kurganskii@phys.vsu.ru.*

Раецкий Кирилл Александрович. Моделирование траектории движения динамической системы с контрольными точками и условиями на управление.

Ключевые слова: динамическая система, моделирование траектории, метод неопределенных коэффициентов.

Для линейной динамической системы моделируется движение с условиями на состояние и управление системы в произвольно заданные моменты времени. Поиск соответствующей траектории осуществляется методом неопределенных коэффициентов, для чего функции состояния и управления системы ищутся в виде линейных комбинаций линейно независимых скалярных функций с векторными коэффициентами. Для нахождения векторных коэффициентов формируется

линейная алгебраическая система, в которой коэффициентами являются лишь матрицы, входящие в описание динамической системы. Доказывается, что выполнения условия Калмана достаточно для разрешимости поставленной задачи.

Раецкий Кирилл Александрович, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры математического анализа математического факультета, *e-mail: kraetsky@mail.ru*.

Разуваев Всеволод Андреевич. Корреляционный анализ заболеваемости COVID-19 и вводимых ограничительных мер.

Ключевые слова: корреляционный анализ, коэффициент корреляции Спирмена, COVID-19.

Проблема пандемии в данный момент является актуальной и в решении данной проблемы нужно сочетать научные подходы не только биологии и химии, но также математические. В основе данной работе лежит попытка найти закономерности между заболеваемостью COVID-19 и различными факторами внешней среды и социальными явлениями, в частности, вводимыми ограничительными мерами, а также построение выводов на основе полученных данных.

Разуваев Всеволод Андреевич, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант математического факультета, *e-mail: razuvaev.v.a@mail.ru*.

Ратыни Анатолий Казимирович. К теории первой нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения. III.

Ключевые слова: аттрактор, нетривиальные решения, однородная краевая задача.

Разрешимость краевой задачи изучается в ситуации, когда отображение, определяющее оператор суперпозиции в граничном условии, имеет аттрактор, состоящий из конечного числа неподвижных точек.

Ратыни Анатолий Казимирович, Ивановский государственный химико-технологический университет, г. Иваново, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, *e-mail: ak.ratyni@yandex.ru*.

Сергеева Ирина Владимировна. Цифровые технологии образовательной среды.

Ключевые слова: образование, технологии, конвергентный, преподавание.

Работа посвящена проблеме внедрения информационных технологий в образовательную среду. Акцент требований учащихся при этом переносится именно на компетенции, связанные с владением все расширяющимися возможностями компьютеров для решения профессиональных задач по самым различным дисциплинам и направлениям обучения. Отражены тенденции к сетевым технологиям, развитие дистанционных методик.

Сергеева Ирина Владимировна, Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Академия машино-

строения имени Ж.Я. Котина», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат технических наук, *e-mail: tiggy33@rambler.ru*.

Словеснов Денис Александрович, Парт Анна Александровна. Комбинированная стратегия получения превосходства.

Ключевые слова: оптимизация, нелинейное программирование, условный экстремум.

В работе рассматривается задача оптимизации использования резервных боевых подразделений при получении боевого превосходства.

Словеснов Денис Александрович, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, курсант, 2 курс.

Парт Анна Александровна, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ст. преподаватель 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств, *e-mail: anna_razinkova@mail.ru*.

Соловьев Александр Владимирович. Модель линейной тенденции временных рядов метеорологических величин с учетом дисконтирования.

Ключевые слова: временной ряд, метеорологическая величина, линейная тенденция, лаг, краткосрочное прогнозирование.

В работе представлена модель линейной тенденции временного ряда с учетом дисконтирования, построенная для краткосрочного прогнозирования атмосферных параметров с заблаговременностью до 3 часов. На основе сформированной модели была разработана схема прогноза метеорологических величин, а также получены выражения для определения интервальных оценок. Опытным путем определена оптимальная длина ряда исходных значений метеорологической величины.

Соловьев Александр Владимирович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, адъюнкт кафедры теоретической гидрометеорологии, *e-mail: av-solovev@mail.ru*.

Стуров Дмитрий Леонидович, Межуев Александр Михайлович, Родионов Денис Владимирович, Локтионов Владислав Михайлович. Использование теории систем массового обслуживания для оценки информационной эффективности сети связи.

Ключевые слова: сеть связи; обобщенный показатель; локальный показатель; полоса пропускания; информационные потери; структура сети.

В работе представлен новый подход к оценке эффективности информационного обмена сети связи с пакетной коммутацией на основе обобщенных показателей с использованием теории систем массового обслуживания.

Межуев Александр Михайлович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: multitenzor@mail.ru*.

Стуров Дмитрий Леонидович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, преподаватель кафедры передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: 777dmitry.sturov777@gmail.ru*.

Родионов Денис Владимирович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС), *e-mail: doc_82@bk.ru*.

Локтионов Владислав Михайлович, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант факультета авиационных средств связи, *e-mail: wolt134@mail.ru*.

Ткачева Светлана Анатольевна, Савченко Галина Борисовна. *Разрешимость нелокальной граничной задачи для систем линейных дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: дифференциальный оператор, «весовые» производные, символ оператора.

Рассматривается задача с нелокальными граничными условиями для системы линейных дифференциальных уравнений с оператором, содержащим «весовые» производные. Исследуется корректность данной задачи в пространствах интегрируемых функций.

Ткачева Светлана Анатольевна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, *e-mail: svtkach@mail.ru*.

Савченко Галина Борисовна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования математического факультета, *e-mail: savchenkogb@mail.ru*.

Тран Зуй. *Аппроксимация дифференциального уравнения переноса конечно-разностными аналогами на графе.*

Ключевые слова: начально-краевая задача переноса, сеть (ориентированный граф), конечномерный аналог дифференциального оператора, разностная схема.

Для дифференциального уравнения переноса на сети (ориентированный граф, состоящий из m ребер) и ему соответствующей начально-краевой задаче, рассматривается разностная схема, аналогичная классической на одномерном континууме, но имеющая отличительную особенность – в узлах сети (точках сочленения линейных фрагментов сети) используются обобщенные условия согласования Кирхгофа. Редукция дифференциальной задачи к ее конечно-разностному аналогу сохраняет свойства исходной задачи. Аппроксимация дифференциального оператора исходной задачи приводит к неявной разностной схеме. Устанавливается погрешность аппроксимации. Для упрощения представления результатов исследования используется звездная сеть (ориентированный граф-звезда).

Тран Зуй, Аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация, *e-mail: tranduysp94@gmail.com*.

Урывская Т.Ю., Пузанков В.И., Лукибанов А.А., Черноусов А.А., Данилов Д.Д. Аналогии проприетарного программного обеспечения при использовании цифровой обработки сигналов.

Ключевые слова: математические системы, проприетарное программное обеспечение, бесплатное программное обеспечение, информационно-образовательная среда, критерии выбора программ.

В статье рассматриваются текущие ограничения обеспечения вузов проприетарными прикладными программными продуктами, необходимыми для реализации соответствующих образовательных программ и организации научной работы, определены наиболее популярные программные решения данной категории, предложены ближайшие аналоги среди бесплатного ПО и критерии для их выбора.

Урывская Татьяна Юрьевна, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств.

Усков Даниил Геннадьевич. Разработка программно-аппаратного комплекса диагностики состояния пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями.

Ключевые слова: микроконтроллер Ваниль; датчик давления MPX5050 GP, метод наименьших квадратов.

Разрабатывается прототип прибора для первичной диагностики состояния пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями и проверяется работоспособность основных аппаратных решений.

Усков Даниил Геннадьевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, магистр первого года обучения факультета ПММ, *e-mail: uskov.dan@mail.ru*.

Ускова Ольга Федоровна, Шашкин Александр Иванович, Каплиева Наталья Алексеевна. Олимпиады по информатике и программированию первокурсников воронежских вузов.

Ключевые слова: информатика и программирование, организация соревнований первокурсников, студенческий оргкомитет.

Организация олимпиад по информатике и программированию для первокурсников вузов г. Воронежа. Активное участие в проведении олимпиад студенческого оргкомитета.

Ускова Ольга Федоровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, профессор кафедры математического обеспечения ЭВМ, *e-mail: sunny.uskova@mail.ru*.

Шашкин Александр Иванович, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук,

заведующий кафедрой математического и прикладного анализа, декан факультета ПММ, *e-mail: dean@amm.vsu.ru*.

Каплиева Наталья Алексеевна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ, *e-mail: kaplieva@amm.vsu.ru*.

Ушков Максим Евгеньевич, Бурковский Виктор Леонидович. Структура нейронной сети в рамках системы информационного обеспечения оператора АЭС.

Ключевые слова: система информационной поддержки оператора, искусственные нейронные сети на базе нечеткой системы вывода, прогнозирование, безопасность, функциональные возможности.

Рассматривается структура системы информационной поддержки процессов принятия решений оператором АЭС в оперативных условиях. Анализируются функциональные возможности системы информационной поддержки оператора (СИПО) на примере Нововоронежской атомной электростанции (НВ АЭС). Данная система обеспечивает оператору, управляющему распределенным комплексом технологических объектов АЭС, проводить качественный анализ и обработку больших объемов сложноструктурированной информации и принимать своевременные адекватные решения в темпе реального времени. Кроме того, рассматривается объект управления и его структура, приводятся рекомендации, направленные на увеличение функциональных возможностей СИПО на базе искусственных нейронных сетей. Одной из многочисленных функций СИПО является прогнозирование состояния объекта управления на основе реализации программно-технологического комплекса модели энергоблока (ПТК МЭ). Однако существующая модель не способна учесть все факторы, влияющие на производственный процесс. Альтернативой здесь выступает искусственная нейронная сеть, которая в процессе обучения может сформировать искомые зависимости между большим числом параметров объекта управления и получить более полный и достоверный прогноз. Предложена структура искусственной нейронной сети на базе нечеткой системы вывода, которая реализует возможности нейронных сетей и нечеткой логики.

Ушков Максим Евгеньевич, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, *e-mail: ushkov.maksim@mail.ru*.

Бурковский Виктор Леонидович, Воронежский государственный технический университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой электропривода, автоматики и управления в технических системах, *e-mail: bvl@vorstu.ru*.

Харченко Виктор Викторович, Рудый Сергей Валерьевич, Харченко Данил Викторович, Шишкин Владислав Валерьевич, Воробьев Сергей Сергеевич. Расчет взаимной связи излучателей в многочастотных антенных решетках.

Ключевые слова: взаимная связь излучателей, матрица рассеяния, многочастотные антенны

В работе анализируется возможность применения быстрого метода полного волнового анализа антенных решеток, который позволяет работать с плотно упакованными антеннами, поскольку основан на преобразовании между сферическими и плоскими векторными волнами.

Харченко Виктор Викторович, ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и А.Ю. Гагарина» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры передающих и приемных радиоустройств (средств связи и РТО), *e-mail: street-rud@mail.ru*.

Хвостов Анатолий Анатольевич, Журавлев Алексей Александрович, Никитченко Анатолий Александрович. Неизотермическая диффузионно-гидродинамическая модель смешивания неньютоновских сред в валковом смесителе.

Ключевые слова: модель Карро, валковый зазор, CFD-модель, смешивание, концентрация.

Разработана математическая модель смешивания в валковом смесителе. Результаты вычислительного эксперимента позволяют выбрать конструктивные параметры смесителя и режимы его работы, обеспечивающие высокую однородность распределения компонентов при смешивании.

Хвостов Анатолий Анатольевич, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики, *e-mail: Khvtol1974@yandex.ru*.

Журавлев Алексей Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, *email: zhuraa1@rambler.ru*.

Никитченко Анатолий Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры изыскания аэродромов, *email: nik.to77@mail.ru*.

Хвостов Анатолий Анатольевич, Тихомиров Сергей Германович, Хаустов Игорь Анатольевич, Иванов Андрей Валентинович, Битюкова Елизавета Алексеевна. Динамика сшивки полимера как марковский процесс.

Ключевые слова: скрытые цепи Маркова, молекулярно-массовое распределение, деструкция полимеров.

При исследовании процессов вулканизации полимеров одним из методов математического моделирования являются цепи Маркова. Случайным событием в них является совокупность элементарных актов сшивки, а состояниями - фракции молекулярных масс в молекулярно-массовом распределении (ММР). Для оценки состояния ММР по наблюдаемым переменным энергетических затрат на перемешивание предлагается математическая модель процесса сшивки полимера на основе скрытой марковской цепи. Вычислительный эксперимент показал качественное соответствие с данными натурального эксперимента, заключающегося в сшивке бутилкаучука в течение 120 минут. Ошибка расчет составила порядка 5% в среднем.

Хвостов Анатолий Анатольевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государ-

ственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры информационных и управляющих систем.

Тихомиров Сергей Германович, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры информационных и управляющих систем.

Хаустов Игорь Анатольевич, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор заведующий кафедры информационных и управляющих систем.

Иванов Андрей Валентинович, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных и управляющих систем.

Битюкова Елизавета Алексеевна, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант кафедры информационных и управляющих систем, *e-mail: eabityukova@yandex.ru*.

Хвостова Елизавета Анатольевна, Хвостова Мария Анатольевна, Журавлев Алексей Александрович, Никитченко Анатолий Александрович.
Линейно-экспоненциальная модель поступления глюкозы в кровь.

Ключевые слова: математическое моделирование, гликемическая нагрузка.

В статье предлагается математическая модель динамики поступления глюкозы в кровь на основе взвешенной суммы линейно-экспоненциальных элементов. Проведенные вычислительные эксперименты показали качественное соответствие результатов имеющимся данным.

Хвостова Елизавета Анатольевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, студент медико-биологического факультета, *email: lizakhv2002@gmail.com*.

Хвостова Мария Анатольевна, Воронежский государственный медицинский университет г. Воронеж, Российская Федерация, студент лечебного факультета, *email: marykhv.mk@gmail.com*.

Журавлев Алексей Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, *email: zhuraa1@rambler.ru*.

Никитченко Анатолий Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, кандидат технических наук, доцент кафедры изыскания аэродромов, *email: nik.to77@mail.ru*.

Хоанг Ван Нгуен. Приближенное решение дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе.

Ключевые слова: граф, дифференциально-разностное уравнение, приближенное решение, краевая задача.

В работе исследуется вопрос построения приближенного решения дифференциально-разностного уравнения с распределенными параметрами на графев классе суммируемых функций.

Хоанг Ван Нгуен, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, *e-mail: fadded9x@gmail.com*.

Шамолин Максим Владимирович. Многопараметрические семейства фазовых портретов динамических систем маятникового типа.

Ключевые слова: динамическая система маятникового типа, колебания, структурная устойчивость

В различных областях динамики возникают так называемые системы маятникового типа. В данной работе мы приводим методы анализа, позволяющие обобщить традиционные результаты по данному вопросу. При этом затрагиваются некоторые качественные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование классов динамических систем с диссипацией. В результате исследования показано, что системы более общего вида обладают многопараметрическим семейством неэквивалентных между собой фазовых портретов.

Шамолин Максим Владимирович, Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории навигации и управления, *e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru*.

Шарейко Виктория Вадимовна. Соответствие решений периодической задачи для полулинейных дифференциальных уравнений дробного порядка и дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, периодическая задача, дробная производная Капуто, функция Грина.

В работе сравниваются решения периодической задачи для дифференциального уравнения дробного порядка $1 < q < 2$ и дифференциального уравнения второго порядка. Данные задачи решаются на основе метода функции Грина. В функцию Грина, полученную в результате решения дифференциального уравнения дробного порядка вместо q подставлено 2 . В результате преобразования получается функция Грина, которая соответствует решению периодической задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Шарейко Виктория Вадимовна, Воронежский государственный педагогический университет г. Воронеж, Российская Федерация, студент 5 курса физико-математического факультета, профиль «Математика», «Информатика», *e-mail: vika.23.12.1999@gmail.com*.

Научный руководитель – Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, *e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru*.

Шелковой Александр Николаевич. *Спектральные свойства интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром, определяемого нелокальными краевыми условиями.*

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

В работе исследуются спектральные свойства интегро-дифференциального оператора второго порядка с вырожденным ядром. Получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора. Методом исследования является метод подобных операторов.

Шелковой Александр Николаевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, *e-mail: shelkovej.aleksandr@mail.ru.*

Шмелева Анастасия Анатольевна, Гончарова Анастасия Борисовна, Расулова Мадина Магомедаминовна. *Математическое моделирование онкологического заболевания.*

Ключевые слова: новообразование, математическое моделирование, дифференциальные уравнения, раковый регистр, иммунотерапия.

Разработана математическая модель роста злокачественного новообразования, модель стадий заболевания и модель лечения. Учитывается реакция иммунной системы, на появления делящихся клеток. В математической постановке задача сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных уравнений. Модель стадий заболевания основывается на случайном распределении основных параметров, определяющих кинетику роста популяции делящихся клеток.

Шмелева Анастасия Анатольевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *bubblegum14031999@gmail.com.*

Гончарова Анастасия Борисовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики-процессов управления, *goncharovaab@yandex.ru.*

Расулова Мадина Магомедаминовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, *madinkaras98@gmail.ru.*

Юрьева Анна Александровна. *О формировании социально-личностного аспекта образования.*

Ключевые слова: образование, общество, личность.

Образование имеет два стратегических ориентира: на личность и на общество. Взаимодействие человека и общества в сфере образования осуществляется через: усвоение и переработка информации, знаний и социального опыта, соблюдение духовно-нравственной преемственности поколений, социализация личности, накопление ею интеллектуального, физического и профессионального потенциала, трудоустройство выпускников учебных заведений, их социальный статус. Описанию упомянутых аспектов посвящена доклад автора.

Юрьева Анна Александровна, Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I, г. Воронеж, Россия, кандидат исторических наук, доцент кафедры истории, философии и русского языка.

Щербатов Данила Сергеевич, Урывская Татьяна Юрьевна. *Фазовая манипуляция сигналов управления воздушным движением радиолокационных станций.*

В статье рассмотрены вопросы использования активной радиолокации посадочного радиолокатора радиолокационной системы посадки (ПРЛ РСП). Представлены отличительные особенности вводимой замены на цифровой шифратор, рассмотрены модели улучшенного запросного и запросно-адресного сигналов аппаратуры активной радиолокации ПРЛ РСП.

Урывская Татьяна Юрьевна, ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент 123 кафедры передающих и приемных радиоустройств.

Мишина Дарья Геннадиевна. *Соответствие решений антипериодической задачи для полулинейных дифференциальных уравнений дробного порядка и дифференциальных уравнений второго порядка.*

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, антипериодическая задача, дробная производная Капуто, функция Грина.

В работе сравниваются решения антипериодической задачи для дифференциального уравнения дробного порядка $1 < q < 2$ и дифференциального уравнения второго порядка. Данные задачи решаются на основе метода функции Грина. В функцию Грина, полученную в результате решения дифференциального уравнения дробного порядка вместо q подставлено 2 . В результате преобразования получается функция Грина, которая соответствует решению антипериодической задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Мишина Дарья Геннадиевна, Воронежский государственный педагогический университет г. Воронеж, Российская Федерация, студент 5 курса физико-математического факультета, профиль «Математика», «Информатика», *e-mail: dgmishina@gmail.com.*

Научный руководитель – Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, *e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru.*

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абдюшев И.Р.....	70	Аникин А.А.....	81
Акимов Д.В.....	3	Антипова Е.С.....	5
Алиев Д.С.....	39	Арапов Д.В.....	45
Алтаев А.С.....	81	Афанасенкова Ю.В.....	8
Андриков К.И.....	84		

Б

Балабан О.Р.....	10, 52	Бочаров В.Ж.....	13
Баталова С.А.....	12, 27	Бурковский В.Л.....	13, 34, 163
Бачурин М.С.....	111	Бучина Д.А.....	25
Битюкова Е.А.....	173		

В

Василенко П.М.....	27	Воробьев С.С.....	169
Виль М.Ю.....	119		

Г

Гладышев Ю.А.....	8	Гончарова А.Б.....	25, 29, 188
-------------------	---	--------------------	-------------

Д

Данилов Д.Д.....	157	Добрынин С.Л.....	13, 34
Дмитриев С.А.....	31, 105	Досмурзаев А.К.....	39
Дмитриев Н.С.....	31		

Е

Евстафьева И.А.....	37	Ерин О.Л.....	39
---------------------	----	---------------	----

Ж

Жабко Н.А.....	42	Жабко А.П.....	125
Жабко И.А.....	42	Журавлев А.А.....	170, 176

З

Зайцева М.А.....	45	Зубова С.П.....	48
------------------	----	-----------------	----

И

Иванков О.Е.....	50	Иванов А.В.....	52, 54, 173
------------------	----	-----------------	-------------

К

Казюлин И.А.....88
Канищева О.И.....58
Каплиева Н.А.....161
Каримов С.И.....59
Катрахова А.А.....79
Кириченко В.В.....62, 64
Князев А.В.....67, 70
Кодиров Э.С.....72

Колпак Е.П.....29, 119, 123
Красавин В.А.....81
Кузина И.А.....121, 123
Кузнецов С.А.....39
Кулманакова М.М.....75
Курганский С.И.....130
Купцов В.С.....79
Куцов С.В.....81

Л

Ларин А.А.....84, 88
Лепихин Т.А.....42
Локтионов В.М.....149

Лошкарева Е.А.....8
Лукибанов А.А.....157

М

Максимов В.П.....96
Майорова С.П.....93
Медведев С. Н.....97
Межуев А.М.....101, 149
Мелякова Е.В.....62, 64

Милохин А.В.....105
Мишина Д.Г.....195
Моисеев И.А.....54
Мохова В.В.....107
Мухсинов Е.М.....109

Н

Невгод Л.С.....81

Никитченко А.А.....170, 176

О

Отставнов А.А.....67

П

Парт А.А.....3, 75, 111, 114, 144
Пегливанова М.М.....116
Пермякова М.А.....119, 121
Полина С.Г.....121, 123

Провоторов В.В.....125
Провоторова Е.Н.....128
Пронина Ю.Г.....116
Пузанков В.И.....157

Р

Радина В.Р.....130
Раецкая Е.В.....48
Раецкий К.А.....132
Разуваев В.А.....134

Ратыни А.К.....136
Расулова М.М.....188
Родионов Д.В.....101, 149
Рудый С.В.....169

С	
Савченко Г.Б.....	152
Сергеева И.В.....	141
Сидоренко Е.В.....	13
Служенко И.Н.....	58
Т	
Тихомиров С.Г.....	173
Ткачева С.А.....	152
У	
Уваров И.А.....	70
Урывская Т.Ю.....	157, 191
Усков Д.Г.....	160
Х	
Харченко В.В.....	169
Харченко Д.В.....	169
Хаустов И.А.....	173
Хвостов А.А.....	170, 173
Ч	
Черноротов П.О.....	114
Черноусов А.А.....	157
Ш	
Шамаев Е.И.....	101
Шамолин М.В.....	182
Шарейко В.В.....	183
Шашкин А.И.....	161
Щ	
Щербатов Д.Ю.....	191
Ю	
Юрьева А.А.....	190
Словеснов Д.А.....	144
Соловьев А.В.....	146
Степанов Д.С.....	67
Стуров Д.Л.....	149
Тран З.....	154
Трибунских О.А.....	93
Ускова О.Ф.....	161
Ушков М.Е.....	163
Хвостова Е.А.....	176
Хвостова М.А.....	176
Хоанг В.Н.....	179
Четвертаков А.Н.....	67, 70
Чумаков Е.А.....	31
Шелковой А.Н.....	186
Шиндин А.Р.....	101
Шишкин В.В.....	169
Шмелева А.А.....	29, 188

Для заметок

Научное издание

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ (ПМТУКТ-2021)**

*Сборник трудов
Всероссийской научной конференции
(Воронеж, 14–16 декабря 2021 г.)*

*В авторской редакции
Изготовление оригинала-макета: Д.В. Астахова*

Подписано в печать 08.12.2021. Формат 60 x 84/16. Печать трафаретная.
Гарнитура «Таймс». Усл.-печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 13,48.

Тираж 30.Заказ 165.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный педагогический университет».

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре ВГПУ.
394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86. Тел. (473) 255-58-32; 255-61-83.