



Санкт-Петербургский
государственный
университет

Образовательный
ресурсный центр по
направлению физика



Первая физическая лаборатория

Ю.Э. Скобло

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

Учебно-методическое пособие
(описание лабораторной работы)

№ 38

Санкт-Петербург

2013

Экземпляр
Скобло
Юрия Эдуардовича

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор **С.В. Карпов**, д. ф.-м. н., профессор И.Ч. Машек

Рекомендовано к печати Ученым советом физического факультета СПбГУ (выписка из протокола № 11 заседания Ученого совета физического факультета СПбГУ от 15.10.2013 г.)

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов СПбГУ младших курсов естественно-научных направлений обучения. Оно может быть полезно также учащимся и преподавателям средних и средне-специальных учебных заведений.

Лабораторная работа выполняется на оборудовании Образовательного ресурсного центра по направлению физика Санкт-Петербургского государственного университета (<http://erc.spbu.ru>).

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
1.1. Две точки зрения на природу света.....	4
1.2. Принцип Гюйгенса – Френеля и объяснение на его основе явления дифракции	5
2. Дифракция Фраунгофера на диафрагмах различной формы	7
2.1. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера.....	7
2.2. Дифракция Фраунгофера на щели. Распределение интенсивности в дифракционной картине	8
2.3. Дифракция Фраунгофера на узкой полоске. Принцип Бабиня	15
2.4. Двумерная картина дифракции Фраунгофера на круглом и прямоугольном отверстиях	16
2.4.1. Дифракции Фраунгофера на прямоугольной диафрагме в непрозрачном экране.....	17
2.4.2. Дифракции Фраунгофера на круглом отверстии	19
3. Правила техники безопасности при выполнении лабораторной работы	21
4. Содержание работы.....	22
4.1. Цель работы.....	22
4.2. Методика эксперимента	22
4.3. Оборудование.....	23
4.4. Ход работы	24
4.4.1. Юстировка оптической системы	24
4.4.2. Проведение измерений	26
4.4.3. Обработка результатов измерений.....	27
4.4.4. Требования, предъявляемые к отчету.....	29
5. Контрольные вопросы.....	30
Приложение	31
Список рекомендованной литературы и справочные данные	34

1. Введение

1.1. Две точки зрения на природу света

Явление дифракции состоит в том, что при тщательной постановке эксперимента обнаруживается отклонение от простых законов геометрической оптики. Свет как бы огибает препятствие, которым может быть какое-либо тело. Вдоль контура тени от тела, вблизи границы освещенной и затененной областей, формируется окантовка из светлых и темных полос. Дифракция является одним из главных доказательств волновой природы света.

Еще в конце XVII века были сформулированы два подхода к объяснению природы света. Исаак Ньютон был сторонником представлений о свете как о потоке частиц. Доводом в пользу такого понимания природы света был хорошо известный факт прямолинейного распространения света в однородном пространстве. Закон равенства углов падения и отражения мог быть истолкован как следствие абсолютно-упругого отражения «частиц света» от стенки.

Христиан Гюйгенс, современник Ньютона, предложил другой подход к пониманию световых явлений. Он полагал, что свет представляет собой распространение возмущений в особой упругой среде – эфире, который заполняет все пространство. Он проводил аналогию между светом и расходящейся волной на поверхности воды от брошенного камня. В частности, как волны на поверхности воды, так и световые лучи могут беспрепятственно пересекать друг друга. В то время уже были проведены первые измерения скорости света (Рёмер, 1676 г.), и ее значение, около 3×10^8 км/с, представлялось большинству современников настолько большим, что его нельзя было приписать перемещению в пространстве каких-либо материальных тел.

Интересно отметить, что догадки великих физиков XVII века оказались созвучны двойственности свойств света, надежно установленной на качественно более высоком уровне эксперимента. Так, к началу XX века стало известно, что свет в одних экспериментах проявляет корпускулярные свойства (фотоэффект), а в других (интерференция и дифракция) тот же свет проявляет

свойства волн. В 1923 г. Л. де Бройль сформулировал гипотезу, согласно которой подобная двойственность или, как принято говорить, дуализм волна – частица является универсальным свойством всех объектов материального мира. Позднее гениальная догадка де Бройля была подтверждена в опытах Дэвиссона и Джермера (1926 г.) и др. Дуализм волна – частица стал одним из оснований, на которых была построена современная квантовая физика.

1.2. Принцип Гюйгенса – Френеля и объяснение на его основе явления дифракции

В первоначальной формулировке принцип Гюйгенса состоит в следующем: каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, является, в свою очередь, центром вторичных волн; поверхность, огибающая в некоторый момент времени вторичные волны, указывает положение к этому моменту фронта действительно распространяющейся волны [1].

Рисунок 1 иллюстрирует построение волновых фронтов на основе принципа Гюйгенса при прохождении диафрагмы световой волной.

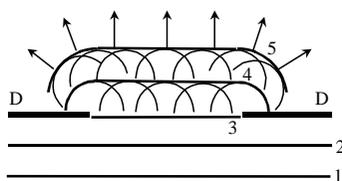


Рис. 1. Дифракция плоской волны на диафрагме. 1, 2, 3 – положение фронта волны при подходе к диафрагме; 4, 5 – фронт волны, прошедшей через диафрагму; D – диафрагма.

Позднее в 1818 г. французский физик Огюстен Жан Френель дополнил принцип Гюйгенса постулатом, согласно которому нужно рассматривать не огибающую, а интерференцию волн, излучаемых вторичными источниками. Разность фаз интерферирующих волн может приводить как к сложению амплитуд колебаний, так и к их взаимной нейтрализации. Таким образом, формируются светлые и темные дифракционные полосы. Математическое

обоснование принципа Гюйгенса – Френеля было дано Кирхгофом на основе анализа волнового уравнения (1882 г.).

Точное вычисление поля дифрагирующей волны означает решение уравнений Максвелла с учетом граничных условий и представляет собой чрезвычайно сложную в математическом отношении задачу, решение которой может быть проведено до конца только для некоторых частных случаев. Для значительно более широкого круга задач оказывается применимым приближенное решение, основанное на принципе Гюйгенса – Френеля и приемлемое в большинстве случаев, встречающихся на практике.

Подробное описание методов построения картины дифракции можно найти в книгах [1–3]. Здесь мы ограничимся изложением вопроса только в объеме, необходимом для выполнения лабораторной работы.

2. Дифракция Фраунгофера на диафрагмах различной формы

2.1. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера

Экспериментальная установка для наблюдения дифракции содержит источник света Q , препятствие на пути световой волны какой-либо формы (непрозрачный экран с отверстием, непрозрачные полоска, диск, стержень и т. п.) и экран, на котором наблюдается дифракционная картина. Различают две схемы эксперимента. В первом случае (дифракция Френеля) дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия. Лучи, вдоль которых интерферирующие волны распространяются от препятствия, не параллельны (рис. 2а, 2б). Падающий на препятствие волновой фронт может быть при этом как сферическим (точечный источник на конечном расстоянии), так и плоским (точечный источник на бесконечно большом расстоянии). Для формирования плоского фронта необязательно отодвигать источник излучения на бесконечность. Можно поместить точечный источник в фокус собирающей линзы. Лучи, идущие из фокуса, после преломления в линзе станут параллельными. На рис. 2а, 2б изображена схема наблюдения дифракции Френеля с использованием точечного источника света.

Во втором случае (дифракция Фраунгофера) не только на препятствие падают параллельные лучи, но и дифракционная картина формируется в результате интерференции параллельных лучей, для чего экран должен быть расположен на бесконечно большом расстоянии от препятствия. Можно осуществить интерференцию параллельных лучей и на конечном расстоянии, если поместить между диафрагмой и экраном собирающую линзу (лучше исправленный на абберации объектив). Тогда картина интерференции параллельных лучей будет локализована в фокальной плоскости объектива (рис. 2в).

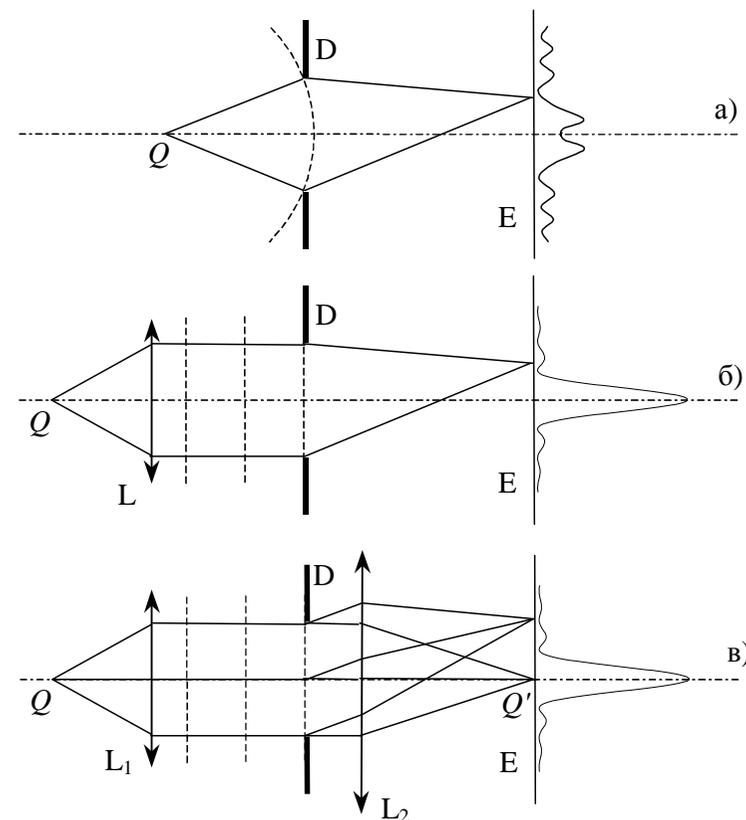


Рис. 2. Оптические схемы наблюдения дифракции Френеля (а, б) и дифракции Фраунгофера (в). Препятствием является диафрагма D.

2.2. Дифракция Фраунгофера на щели. Распределение интенсивности в дифракционной картине

Покажем теперь, как принцип Гюйгенса – Френеля позволяет рассчитать распределение интенсивности в дифрагировавшей волне, то есть в волне, прошедшей препятствие. Пусть плоская волна падает на непрозрачный экран E_1 с диафрагмой в виде узкой длинной щели шириной a (рис.3). Падающие лучи перпендикулярны плоскости экрана. Длинная сторона щели перпендикулярна плоскости рисунка. Ширина щели a много меньше поперечного размера

падающего пучка. Пройдя щель, дифрагировавшая волна попадает на собирающую линзу L. На экране E₂, расположенном в фокальной плоскости линзы L, происходит интерференция лучей, параллельных друг другу в области между экраном E₁ и линзой. Будем обозначать буквой S часть плоского волнового фронта, которая вырезается щелевой диафрагмой. Поверхность S перпендикулярна плоскости рисунка 3, она представлена на рис.3 отрезком AB.

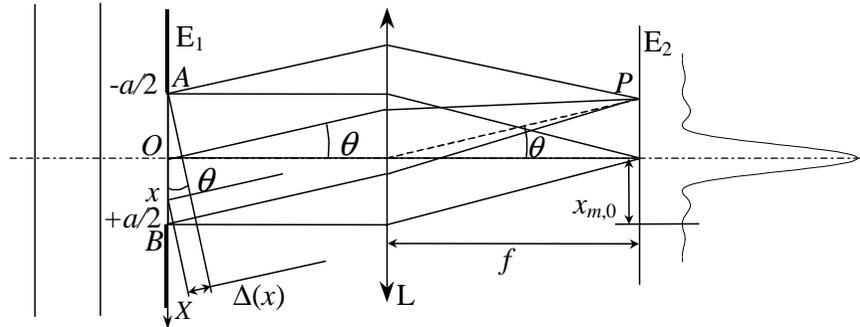


Рис. 3. Формирование распределения освещенности на экране при наблюдении дифракции Фраунгофера.

В соответствие с принципом Гюйгенса – Френеля каждая точка на поверхности S является источником вторичных волн. При этом предполагается также, что вторичные волны излучаются так, как если бы экрана E₁ не было. Кроме этого предполагается, что во всех точках за непрозрачным экраном в непосредственной близости от его поверхности колебания светового поля отсутствуют, и, следовательно, эти точки не являются источниками вторичных волн. Данное предположение означает, что картина дифракции не зависит от материала экрана E₁, от того, в частности, является ли он проводником или изолятором. В общем случае последнее утверждение нельзя считать правильным. Однако, как показывает опыт, картина дифракции получается правильной, если размер отверстия (в нашем случае ширина щели a) существенно превышает длину волны λ : $\lambda \ll a$. Последнее неравенство является условием применимости приближения геометрической оптики. Таким

образом, принцип Гюйгенса – Френеля дает правильную картину дифракции, когда отклонения от законов геометрической оптики незначительны.

Поверхность S разобьем на малые площадки dS. Вклад dE_P в напряженность электрического поля в точке P на экране E₂ от элемента поверхности dS дается формулой:

$$dE_P = K(\theta) \cdot E \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot dS. \quad (1)$$

$K(\theta)$ – так называемый коэффициент наклона, который зависит от угла θ между нормалью к dS и волновым вектором \vec{k} ($k \equiv 2\pi/\lambda$), E – напряженность поля на площадке dS, R – оптический путь от dS до точки P. Вектор \vec{k} определяет направление распространения волн, собирающихся в точке P. Величина $K(\theta)$ остается неопределенной в рамках принципа Гюйгенса – Френеля. Выражение для коэффициента $K(\theta)$ было получено позднее в теории Кирхгофа, основанной на анализе волнового уравнения:

$$K(\theta) = \frac{k}{4\pi \cdot i} \cdot (1 + \cos \theta) = \frac{1}{2 \cdot i \cdot \lambda} \cdot (1 + \cos \theta). \quad (2)$$

При малых значениях угла $\theta \ll 1$ можно считать, что $\cos \theta \approx 1$, и тогда имеем:

$$K(\theta) = -\frac{i}{\lambda}. \quad (3)$$

Суммарный вклад от всех элементов поверхности S получаем интегрированием:

$$E_P = \int_S K(\theta) \cdot E \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot dS. \quad (4)$$

Равенство (4) представляет собой математическую формулировку принципа Гюйгенса – Френеля. Отметим, что E_P является амплитудой Фурье – компоненты электрического поля. Это означает, что в разложении напряженности в интеграл Фурье под интегралом должно стоять произведение E_P и экспоненты $e^{-i\omega t}$, где t – время, а $\omega = c \cdot k$ – круговая частота. Монохроматическая волна, очевидно, представляется полусуммой двух комплексно-сопряженных слагаемых: $1/2 \cdot (E_P \cdot e^{-i\omega t} + E_P^* \cdot e^{i\omega t})$.

По нашему предположению S является частью плоского волнового фронта, следовательно, колебания электрического поля на всей поверхности S синфазны. Поэтому разность фаз колебаний электрического поля в волнах, приходящих в точку P от элемента dS , определяется исключительно оптической длиной пути R вдоль луча от элемента dS до точки P на экране E_2 (рис.3).

Теперь учтем, что интерферирующие лучи излучаются вторичными источниками на поверхности S в параллельных направлениях. Максимальная разность хода, соответствующая лучам, идущим от противоположных краев щели, и равная $a \cdot \sin \theta$ (рис.3), пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием R до точки P . Поэтому величина R в знаменателе подынтегрального выражения в равенстве (4) с высокой точностью постоянна в области интегрирования. Будем обозначать буквой R оптическую длину пути от центра щели O до точки P . Кроме того, углы θ малы ($\theta \ll 1$), так что коэффициент $K(\theta)$ можно положить равным постоянной величине: $K(\theta) = -i / \lambda$.

Для того чтобы вычислить интеграл в равенстве (4), расположим ось X в плоскости E_2 в направлении, перпендикулярном краям щели (рис. 3). Начало отсчета поместим в точку O . Тогда координата верхнего края щели равна $x = -a/2$, а координата нижнего края равна $x = +a/2$. Элемент площади dS пропорционален dx : $dS = b \cdot dx$, где b – длина щели. Амплитуда поля в точке P может быть найдена с точностью до постоянного коэффициента:

$$E_P \propto K(\theta) \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{ik \cdot (R+x \cdot \sin \theta)}}{R+x \cdot \sin \theta} \cdot b \cdot dx \cong \frac{K(\theta) \cdot b}{R} \cdot e^{ikR} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik \cdot x \cdot \sin \theta} \cdot dx =$$

$$= \frac{K(\theta) \cdot b}{R} \cdot e^{ikR} \cdot \frac{e^{\frac{ik \cdot a \cdot \sin \theta}{2}} - e^{-\frac{ik \cdot a \cdot \sin \theta}{2}}}{\frac{ik \cdot a \cdot \sin \theta}{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{K(\theta) \cdot b \cdot a}{R} \cdot e^{ikR} \cdot \frac{\sin u}{u}. \quad (5)$$

Здесь введено обозначение: $u \equiv k \cdot a \cdot \sin \theta / 2$. Поскольку интенсивность^a $I(\theta)$ пропорциональна $|E_P|^2$, получим: $I(\theta) \propto (\sin u / u)^2$. Если интенсивность в центре дифракционной картины при $\theta = 0$ обозначить I_0 , получим зависимость $I(\theta)$:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2; \quad u \equiv \frac{k \cdot a \cdot \sin \theta}{2}. \quad (6)$$

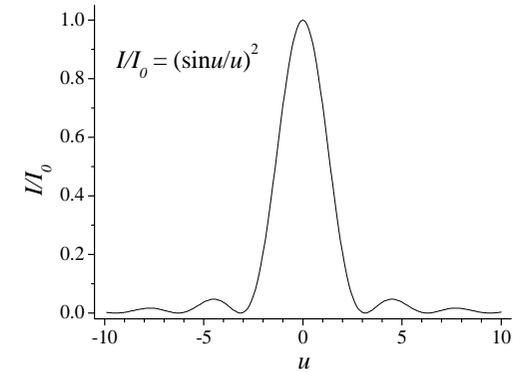


Рис. 4. График функции $(\sin u / u)^2$.

Нули интенсивности (темные полосы дифракционной картины) будут наблюдаться при $u = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ то есть при

$$m \cdot \pi = \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin \theta_m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (7)$$

или:

$$m \cdot \lambda = a \cdot \sin \theta_m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (8)$$

Условие формирования дифракционных минимумов (8) допускает простую интерпретацию. Рассмотрим для примера дифракционный минимум порядка $m = +1$. Ему соответствует угол θ_{+1} , удовлетворяющий равенству:

$$\lambda = a \cdot \sin \theta_{+1}. \quad (9)$$

^a Под интенсивностью понимаем плотность потока энергии электромагнитного поля, равную вектору Пойнтинга $c \cdot [\vec{E} \times \vec{B}] / 4\pi$. В воздухе модуль вектора Пойнтинга равен $I = c \cdot |E|^2 / 4\pi$

Минимум интенсивности сформируется, если волны от вторичных источников на поверхности S «погасят» друг друга на экране E_2 . Известно, что в случае двух точечных когерентных источников, взаимное уничтожение волн происходит, когда разность хода равна нечетному числу полуволн: $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2\dots$. Минимум первого порядка соответствует разности хода $\lambda/2$.

Можно считать, что на поверхности S в пределах щели распределено бесконечное число бесконечно малых источников света. Минимум порядка $m = +1$ сформируется на экране, если каждой точке в верхней половине щели AO (рис.3) соответствует точка в нижней половине щели OB , разность хода для которых равна $\lambda/2$. Если выполняется условие (9) и равносильное ему условие $\lambda/2 = a \cdot \sin \theta_{+1} / 2$, то для всех точек отрезка AB , расстояние между которыми равно $a/2$, разность хода будет равна $\lambda/2$. Тогда волны, излучаемые источниками с верхней половины щели AO , «погасятся» на экране E_2 волнами, излучаемыми источниками с нижней половины щели OB . Если разность хода для точек A и O равна $\lambda/2$, то разность хода для точек A и B равна λ (рис. 3). Другими словами, на экране E_2 сформируется минимум порядка $m = +1$, если разность хода волн, излучаемых в направлении θ_{+1} из точек A и B на противоположных краях щели, равна λ (см. равенство (9)).

Аналогичным образом выглядит условие формирования минимума порядка -1 :

$$a \cdot \sin \theta_{-1} = -\lambda. \quad (10)$$

Распределение минимумов и максимумов дифракционной картины будет симметричным относительно луча, совпадающего с оптической осью. Условие минимума порядка m получено выше (равенство (8)): $a \cdot \sin \theta_m = m \cdot \lambda$.

В оптическом диапазоне ширина щели a как правило много больше длины волны λ . Тогда для не слишком высоких порядков дифракции m синусы углов θ_m много меньше единицы: $\sin \theta_m = m \cdot \lambda / a \ll 1$. В этом случае значение $\sin \theta_m$, а также $\text{tg} \theta_m$ можно заменить величиной θ_m в радианах. Линейные

расстояния $x_{m,0}$ между главным дифракционным максимумом и минимумами порядка m на экране E_2 могут быть вычислены по формуле:

$$x_{m,0} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot f, \quad (11)$$

где f – фокусное расстояние линзы L (рис. 3). Таким образом, дифракционная картина на экране будет представлять собой чередование максимумов и минимумов, распределенных вдоль прямой, перпендикулярной краям щелевой диафрагмы. Расстояние между минимумами порядков $+1$ и -1 равно:

$$x_{1,-1} = x_{1,0} - x_{-1,0} = 2 \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot f. \quad (12)$$

Расстояние между другими соседними минимумами в 2 раза меньше, чем $x_{1,-1}$. Поэтому центральный максимум на дифракционной картине выглядит вдвое более широким, чем остальные максимумы. Если известны длина волны λ и фокусное расстояние f , то по ширине дифракционной картины можно определить размер диафрагмы.

Положение максимумов интенсивности дифракционной картины можно найти, положив равной нулю производную от напряженности поля E по u :

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 0. \quad (13)$$

Отсюда получаем условие формирования максимума напряженности поля или, что равносильно, интенсивности дифрагировавшей волны:

$$\text{tg} u = u. \quad (14)$$

Можно численно найти корни трансцендентного уравнения (14): $u_0 = 0; u_1 = 1.43 \cdot \pi; u_2 = 2.46 \cdot \pi; u_3 = 3.47 \cdot \pi, \dots$ Асимптотическая формула для u_n выглядит следующим образом: $u_n \rightarrow (2n + 1) \cdot \pi / n$. При увеличении порядка дифракции n максимумы интенсивности приближаются к середине интервала между двумя последовательными нулями интенсивности. Приведем отношения максимумов интенсивности младших порядков:

$$I(u_0) : I(u_1) : I(u_2) \approx 1 : \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \approx 1 : 0.047 : 0.017 \quad (15)$$

Заметим, что максимум порядка $n = 1$ дифракции имеет интенсивность, равную менее чем 5% от интенсивности главного максимума при $\theta = 0$.

2.3. Дифракция Фраунгофера на узкой полоске. Принцип Бабинне.

Пусть теперь препятствием для плоской волны является непрозрачная полоска. Это означает, что области прозрачности и непрозрачности экрана E_1 на рис. 2в поменялись местами. Пусть $E'(x)$ – зависимость напряженности поля от координаты x в фокальной плоскости линзы L_2 (поверхность экрана E_2) для волны, дифрагировавшей на полоске; $E(x)$ – зависимость напряженности поля для волны, дифрагировавшей на щели такой же ширины, как полоска. В силу принципа Гюйгенса – Френеля сумма $E'(x) + E(x)$ должна быть равна напряженности поля, если препятствия нет вообще. С другой стороны, если препятствия нет, то на экране E_2 будет сформировано действительное изображение точечного источника – точка Q' (рис. 2в). Только в этой точке интенсивность световой волны отлична от нуля. Во всех остальных точках интенсивность световой волны при отсутствии экрана E_1 должна быть равна нулю. Следовательно, при отсутствии препятствия во всех точках экрана E_2 , кроме центра – точки Q' , должна быть равна нулю и напряженность поля $E'(x) + E(x) = 0$. Отсюда следует, что $E'(x) = -E(x)$ для всех x , кроме точки Q' . Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля напряженности поля, последнее равенство означает, что распределение интенсивностей в дифрагировавшей волне во всех точках кроме Q' должно быть одинаковым для дифракции на узкой щели в непрозрачном экране и для дифракции на узкой непрозрачной полоске той же ширины.

Приведенные здесь рассуждения являются иллюстрацией принципа Бабинне, который можно сформулировать следующим образом [3]. Пусть на пути световой волны между источником света и точкой наблюдения P может быть расположен один из двух дополнительных экранов «1» или «2», непрозрачная часть одного из которых в точности совпадает с прозрачной частью другого. Пусть $U_1(P)$ и $U_2(P)$ – комплексные возмущения, когда

установлен экран «1» или «2» соответственно. Тогда комплексное возмущение, которое получается при отсутствии обоих экранов, равно:

$$U(P) = U_1(P) + U_2(P). \quad (16)$$

2.4. Двумерная картина дифракции Фраунгофера на круглом и прямоугольном отверстиях

Сначала получим выражение для напряженности поля в дифрагировавшей волне в виде, не зависящем от формы отверстия. Будем считать, что плоская монохроматическая волна падает на непрозрачный экран с отверстием S в направлении, перпендикулярном плоскости экрана (рис. 5).

Фазы колебаний поля волны на поверхности S одинаковы, поэтому разности фаз колебаний в дифрагировавшей волне набираются после прохождения поверхности S . Напряженность поля в точке наблюдения P может быть получена с помощью принципа Гюйгенса – Френеля. Для этого как и прежде разобьем поверхность S на элементарные площадки dS и просуммируем вклады в напряженность поля dE_P в точке P , которые создаются волнами, идущими от элементарных площадок dS .

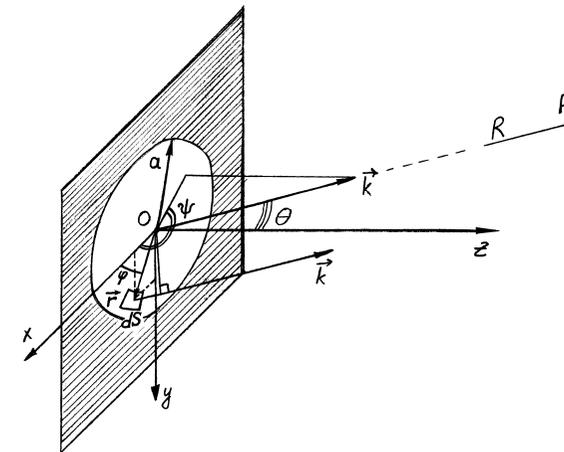


Рис. 5. К расчету двумерной картины дифракции Фраунгофера на отверстии в непрозрачном экране.

Поместим начало координат O в точку на поверхности S . Ось Z направим по нормали к поверхности S , оси X и Y тогда будут лежать в плоскости экрана. В соответствии с определением дифракции Фраунгофера в точке наблюдения P интерферируют лучи, которые идут от элементарных площадок dS в параллельных направлениях. Выберем в качестве нулевой фазу колебаний волны, приходящей в точку P из начала координат. Вектор $\vec{r}(x, y)$, лежащий на поверхности S , определяет смещение элемента dS относительно начала координат. Разность хода волн, излучающихся в направлении точки P из начала координат ($x=0, y=0$) и с элемента поверхности dS (x, y) равна проекции вектора \vec{r} на направление на точку P :

$$R(O-P) - R(x, y-P) = \Delta(0,0-x, y) = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|}. \quad (17)$$

Здесь \vec{k} - волновой вектор, направленный на удаленную точку P .

Соответствующая разность фаз колебаний равна:

$$k \cdot \Delta(0,0-x, y) = -(\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (18)$$

Суммарное поле в точке P представляется интегралом по поверхности S :

$$E_P \propto \int_S E(x, y) \cdot e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \cdot dS = \int_S E(x, y) \cdot e^{-i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \cdot dx \cdot dy. \quad (19)$$

Здесь опущен множитель $K(\theta)$, который для малых углов, как правило, реализующихся на практике, можно считать постоянным. Видно, что интеграл в равенстве (19) фактически представляет собой Фурье-образ координатной зависимости напряженности поля на поверхности S : $\vec{E}(k_x, k_y)$.

2.4.1. Дифракция Фраунгофера на прямоугольной диафрагме в непрозрачном экране

Рассмотрим дифракцию плоской волны на диафрагме, имеющей форму прямоугольника: $\{-a/2 \leq x \leq +a/2, -b/2 \leq y \leq +b/2\}$ с площадью $a \times b$. Интегрирование по прямоугольнику $\{a \times b\}$ легко провести, если учесть, что напряженность поля в его пределах постоянна.

$$E_P \propto \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-b/2}^{+b/2} dy e^{-i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} = \frac{e^{-i k_x \cdot \frac{a}{2}} - e^{+i k_x \cdot \frac{a}{2}}}{i \cdot k_x} \cdot \frac{e^{-i k_y \cdot \frac{b}{2}} - e^{+i k_y \cdot \frac{b}{2}}}{i \cdot k_y} =$$

$$= a \cdot \frac{\sin \frac{k_x \cdot a}{2}}{\frac{k_x \cdot a}{2}} \cdot b \cdot \frac{\sin \frac{k_y \cdot b}{2}}{\frac{k_y \cdot b}{2}} = a \cdot b \cdot \frac{\sin u_1}{u_1} \cdot \frac{\sin u_2}{u_2}, \quad (20)$$

где введены обозначения: $u_1 \equiv k_x \cdot a/2, u_2 \equiv k_y \cdot b/2$. Проекции волнового вектора выражаются через углы в полярной системе координат (рис. 5):

$$k_x = k \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi, k_y = k \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi, k_z = k \cdot \cos \theta.$$

Распределение интенсивности в дифрагировавшей волне вдоль оси X определяется множителем $(\sin u_1 / u_1)^2$, в котором угол ψ положен равным нулю: $\psi = 0, \cos \psi = 1$, то есть

$$\left(\frac{\sin u_1}{u_1} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{k \cdot a \cdot \sin \theta}{2}}{\frac{k \cdot a \cdot \sin \theta}{2}} \right)^2.$$

Распределение интенсивности вдоль оси Y определяется множителем $(\sin u_2 / u_2)^2$, в котором угол ψ положен равным $\pi/2$: $\psi = \pi/2, \sin \psi = 1$, то есть

$$\left(\frac{\sin u_2}{u_2} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{k \cdot b \cdot \sin \theta}{2}}{\frac{k \cdot b \cdot \sin \theta}{2}} \right)^2.$$

Чем меньше ширина щели, тем шире распределение яркости в дифракционной картине на экране E_2 в фокальной плоскости объектива L (рис. 3). Отметим, что наибольшую яркость имеют дифракционные максимумы, расположенные вдоль осей X и Y , то есть вдоль направлений, перпендикулярных сторонам прямоугольной диафрагмы (рис. 6).

$$= \frac{2\pi}{(k \cdot \sin \theta)^2} \times \int_0^{ka \cdot \sin \theta} \frac{d}{dz} [z \cdot J_1(z)] dz = \pi \cdot a^2 \cdot \frac{2 \cdot J_1(k \cdot a \cdot \sin \theta)}{k \cdot a \cdot \sin \theta}. \quad (23)$$

Зависимость интенсивности дифрагировавшей волны от угла θ дается формулой:

$$I(\theta) = I(0) \cdot \left[\frac{2J_1(ka \cdot \sin \theta)}{ka \cdot \sin \theta} \right]^2. \quad (24)$$

Корни функции Бесселя ($J_1(z_m) = 0$) соответствуют темным кольцам дифракционной картины: $z_1 = 3.832$; $z_2 = 7.016$; $z_3 = 10.174$; $z_4 = 16.471$...

Отсюда легко вычислить значения $\sin \theta_m$:

$$\sin \theta_1 = 0.610 \cdot \frac{\lambda}{a}; \sin \theta_2 = 1.161 \cdot \frac{\lambda}{a}; \sin \theta_3 = 1.619 \cdot \frac{\lambda}{a}; \sin \theta_4 = 2.621 \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (25)$$

Интенсивность в максимумах быстро убывает с ростом порядка дифракции. Световой поток в пределах первого максимума составляет 84% от всего потока, прошедшего через диафрагму. Интенсивность первого светлого кольца составляет приблизительно 2% от интенсивности в центре главного максимума.

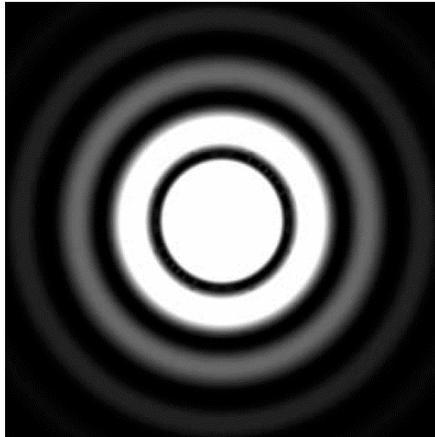


Рис. 7. Картина дифракции Фраунгофера на круглом отверстии. Центральная область сильно переэкспонирована для выявления слабых побочных максимумов. Рисунок скопирован из книги [2].

Отметим, что изображение звезды в хорошем телескопе не отличается от изображения точечного источника света и представляет собой центральное дифракционное пятно и совокупность чередующихся темных и светлых колец (картина Эйри). Наличие дифракционных колец означает, что все погрешности оптической системы устранены и оставшееся дифракционное размытие связано с волновой природой света. Оно принципиально не может быть преодолено. Размер изображения оказывается неприменим для определения размера звезды. Для измерения диаметра звезды приходится применять другие, более тонкие оптические методы.

3. Правила техники безопасности при выполнении лабораторной работы

В данной лабораторной работе в качестве источника света используется гелий-неоновый лазер. Несмотря на то, что его мощность невелика, излучение этого, как и любого другого лазера, опасно для зрения. Ни в коем случае нельзя допускать попадания прямого лазерного излучения в глаз человеку. Нужно также следить, чтобы не попал в глаз луч лазера, отраженный от зеркала или другой полированной поверхности. Для того, чтобы контролировать наличие луча, нужно использовать матовую поверхность, диффузно рассеивающую излучение: лист белой бумаги, матовое неполированное стекло. Необходимо следить также за тем, чтобы случайно не направить лазерный луч в глаз своему коллеге.

4. Содержание работы

4.1. Цель работы

Цель работы состоит в следующем:

- наблюдение дифракции Фраунгофера на препятствиях различной формы: узкой длинной щели, непрозрачной полоске, круглом отверстии;
- измерение размеров дифракционной картины и сопоставление результатов измерений с расчетами для дифракции Фраунгофера на различных препятствиях;
- проверка зависимости расстояний между дифракционными полосами от порядка дифракции.

4.2. Методика эксперимента

Для наблюдения дифракции Фраунгофера в качестве источника света используется гелий-неоновый лазер, который дает узкий монохроматический пучок света на длине волны $\lambda = 632.8$ нм. В эксперименте значительно удобнее использовать более широкий пучок света, чем тот, который излучается лазером непосредственно. Расширить пучок лучей, оставив их параллельными, можно с помощью телескопической системы – двух собирающих линз (L_1 и L_2) на оптической оси, задний фокус (F_1') первой из которых совпадает с передним фокусом второй (F_2) (рис. 8). Отношение диаметров параллельных пучков света после и до телескопической системы равно отношению фокусных расстояний f_2/f_1 . Расширенный пучок попадает на препятствие E_2 , на котором происходит дифракция. Диаметр пучка нужно увеличить для того, чтобы он был значительно больше размера диафрагмы. Тогда интенсивность световой волны в пределах диафрагмы можно считать почти постоянной, и расстояния между темными и светлыми полосами дифракционной картины будет определяться размерами препятствий согласно полученным выше формулам.

Линза L_3 собирает параллельные лучи в фокальной плоскости, совпадающей с матовым экраном E_2 . Тем самым реализуются условия дифракции Фраунгофера. Дифракционную картину можно визуально наблюдать на экране E_2 с помощью микроскопа.

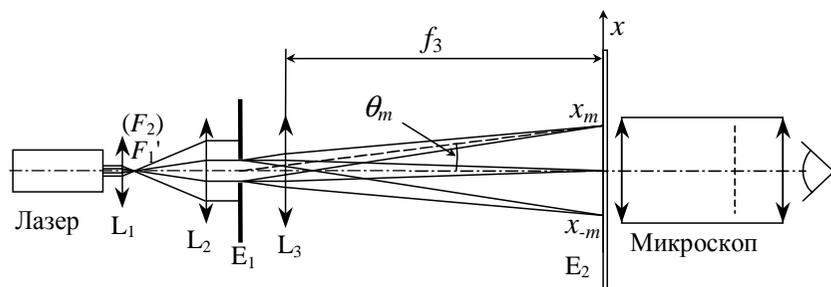


Рис. 8. Оптическая схема установки

Микроскоп – это оптический инструмент, обладающий чрезвычайно малой глубиной резкости. Это означает, что наблюдатель резко видит предмет, который расположен в тонкой области вблизи фокальной плоскости объектива. Действительное перевернутое увеличенное изображение предмета формируется на стеклянной пластинке внутри микроскопа, на которую нанесена шкала. В окуляр наблюдатель рассматривает одновременно мнимое прямое увеличенное изображение шкалы и перевернутое изображение предмета. С помощью шкалы можно определить размер предмета. В нашем случае микроскоп позволяет определить размеры диафрагм и дифракционных картин.

4.3. Оборудование

Для выполнения работы в распоряжении имеется:

- гелий-неоновый лазер;
- 3 объектива L_1 , L_2 , L_3 с фокусными расстояниями $f_1 = +5\text{мм}$, $f_2 = +50\text{мм}$, $f_3 = +500\text{мм}$;
- оправа для крепления слайдов с диафрагмами;
- диафрагмы в непрозрачном экране в виде щелей 3-х размеров;
- диафрагмы в непрозрачном экране в виде кругов трех различных диаметров;

- непрозрачные полоски различной ширины;
- экран из матового стекла для наблюдения на нем дифракционной картины;
- микроскоп с отсчетной шкалой для наблюдения дифракционной картины и измерения линейных размеров;
- оптическая скамья с разметкой расстояний в мм;
- рейтеры для установки элементов оптической системы на оптической скамье.

4.4. Ход работы

4.4.1. Юстировка оптической системы

Все элементы оптической системы должны быть расположены на оптической оси. Для этого нужно установить лазер так, чтобы его луч был параллелен оптической оси (или, что эквивалентно, ребру оптической скамьи). Лазер включается поворотом ключа на задней крышке кожуха. Сначала нужно на глаз установить лазер параллельно оптической скамье, затем следует уточнить установку методом последовательных приближений. Закрепите в оправе экран с круглой диафрагмой. Далее нужно выполнить действия, обозначенные, как *Шаг 1* и *Шаг 2*.

Шаг 1. Переместите рейтер с оправой вплотную к лазеру и сместите диафрагму вправо- влево и вверх-вниз так, чтобы луч лазера попал в центр отверстия.

Шаг 2. Затем переместите рейтер с диафрагмой на противоположный конец оптической скамьи и скорректируйте ориентацию лазера так, чтобы луч попал в центр диафрагмы. Нужно повторять *Шаг 1* и *Шаг 2* до тех пор, пока лазерный луч не перестанет смещаться относительно диафрагмы при перемещении рейтера с диафрагмой на конец оптической скамьи. Теперь лазер ориентирован так, что его луч параллелен ребру оптической скамьи, и изменять положение лазера больше не следует.

На следующем этапе нужно ориентировать линзы в оправках на рейтерах так, чтобы луч лазера попал в центр линзы, а поверхность линзы была бы перпендикулярна лучу. Перпендикулярность лучу удобно контролировать по

отражению от линзы. Отраженные лучи должны возвращаться в выходное окно лазера. Выставить на оптическую ось нужно все три линзы. Линзы установлены в оправы, которые закреплены на стержнях. Стержень зажимается винтом в рейтере. При установке линзы на оптической оси потребуется регулировать поворот и положение стержня по высоте.

После того, как отрегулирована ориентация оправ с линзами в рейтерах, нужно собрать телескопическую систему, расширяющую пучок света. Сначала следует короткофокусную линзу L_1 с фокусным расстоянием 5мм расположить на расстоянии 30-40 мм от выходного окна лазера. Длиннофокусную линзу телескопической системы L_2 ($f_2 = 50$ мм) нужно установить так, чтобы расстояние между линзами было приблизительно 55 мм. Расстояние между рейтерами можно определить по шкале на оптической скамье. После этого следует закрепить в рейтере на оптической скамье экран из матового стекла. Нужно убедиться, что диаметр пятна от лазерного луча после телескопической системы не изменяется по размеру при перемещении рейтера с экраном вдоль оптической скамьи. Если размер пятна изменяется, то нужно скорректировать положение линзы L_2 .

Экран должен быть установлен близко к концу оптической скамьи для того, чтобы за экраном можно было установить микроскоп и наблюдать с его помощью дифракционную картину. Расстояние между рейтером с экраном и концом оптической скамьи достаточно выбрать равным 2-3 см.

Между линзой L_2 и экраном нужно поместить рейтер с длиннофокусным объективом L_3 ($f_3 = +500$ мм). Расстояние между левыми (или правыми) краями рейтеров, в которых закреплены экран и объектив L_3 , следует зафиксировать равным 500мм. После этого нужно (ОБЯЗАТЕЛЬНО!) скорректировать положение линзы L_2 так, чтобы луч лазера на экране фокусировался в точку. Практика выполнения работы показывает, что наиболее «острая» фокусировка достигается, когда расстояние между линзами L_2 и L_1 оказывается равным (57-58)мм, а не 55мм, что реализовалось для бесконечно тонких линз. Добиться максимально «острой» фокусировки лазерного луча на экране важно для того,

чтобы наблюдалось максимальное количество дифракционных колец при дифракции на круглом отверстии. При плохой фокусировке дифракционные кольца могут вообще не наблюдаться.

4.4.2. Проведение измерений

Перед тем, как проводить измерения размеров дифракционных картин, нужно с помощью отсчетного микроскопа определить размеры диафрагм. Микроскоп располагают так, чтобы предмет (в данном случае отверстие, щелевая диафрагма или полоска) был приблизительно в 50 мм перед объективом. Для удобства наблюдения диафрагм лучше за ними на расстоянии 50-100 мм поместить матовый экран. Наблюдение предмета в микроскоп нужно начать с того, что сфокусировать окуляр с учетом своего зрения на шкалу в микроскопе так, чтобы резкость шкалы была бы наилучшей. При перемещении окуляра в обе стороны резкость шкалы должна ухудшаться. После этого нужно, медленно перемещая микроскоп целиком, найти резкое изображение предмета – в данном случае щелевой диафрагмы, круглой диафрагмы, непрозрачной узкой полоски. Глаз резко видит одновременно шкалу и предмет, если действительное изображение предмета фокусируется на стеклянную пластинку со шкалой. Используя шкалу микроскопа (цена деления 0.05мм), нужно измерить размеры диафрагм.

Далее следует установить рейтер с оправой для диафрагм на оптической скамье между рейтерами с линзами L_2 и L_3 . Перемещая диафрагму в оправе, нужно добиться того, чтобы лазерный луч попадал в центр диафрагмы. Далее следует, перемещая микроскоп, найти изображение дифракционной картины и измерить расстояния между дифракционными полосами. Если расстояние между дифракционными полосами больше поля зрения микроскопа (6мм), то для измерения этого расстояния можно использовать обычную линейку. Удобно в рабочей тетради записывать координаты темных полос с указанием порядка дифракции. Измерения нужно провести не менее 3-х раз для каждой из диафрагм.

4.4.3. Обработка результатов измерений

На основании полученных данных, а также значения длины волны лазера 632.8 нм и фокусного расстояния линзы L_3 нужно определить размеры диафрагм, используя следующие формулы:

$$\text{для щелевой диафрагмы шириной } a: \quad m \cdot \frac{\lambda}{a} = \sin \theta_m; \quad (26)$$

$$\text{для круглого отверстия диаметром } d: \quad z_m \cdot \frac{\lambda}{d} = \sin \theta_m, \quad (27)$$

$$\text{где: } z_1 = 1.22, z_2 = 2.322, z_3 = 3.238, z_4 = 5.242. \quad (28)$$

Формулы (26), (27), (28) непосредственно вытекают из полученных выше формул (8), (25). Угол θ_m связан с координатой x_m центра темной полосы порядка дифракции m очевидным равенством (рис.8):

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{x_m - x_0}{f_3} = \frac{x_{m,0}}{f_3}. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что: $\sin \theta_m = \operatorname{tg} \theta_m / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_m}$. Для малых углов $\theta_m \ll 1$ можно пренебречь слагаемым $\operatorname{tg}^2 \theta_m$ в знаменателе: $\sin \theta_m \cong \operatorname{tg} \theta_m$. Относительная ошибка при этом составляет величину $\operatorname{tg}^2 \theta_m / 2 = (x_{m,0} / f_3)^2 / 2$. При малых углах $\theta_m \ll 1$ в формулах (26) и (27) $\sin \theta_m$ можно заменить на $x_{m,0} / f_3$. Связанная с этой заменой относительная погрешность определения ширины щели a и диаметра круглой диафрагмы d может быть оценена величиной:

$$\left(\frac{\Delta a}{a} \right)_{\theta_m} = \left(\frac{\Delta d}{d} \right)_{\theta_m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_{m,0}}{f_3} \right)^2. \quad (30)$$

Таким образом, для малых углов получаем:

$$m \cdot \frac{\lambda \cdot f_3}{a} = x_m - x_0; \quad (31)$$

$$z_m \cdot \frac{\lambda \cdot f_3}{d} = x_m - x_0. \quad (32)$$

Ширину щели a можно найти по расстоянию между минимумами освещенности дифракционной картины порядка $+m$ и $-m$:

$$a = 2m \cdot \frac{\lambda \cdot f_3}{x_m - x_{-m}}; \quad (33)$$

В случае круглой диафрагмы разность $x_m - x_{-m}$ равна диаметру темного дифракционного кольца порядка m :

$$d = 2 \cdot z_m \cdot \frac{\lambda \cdot f_3}{x_m - x_{-m}}. \quad (34)$$

Разброс значений a и d определяется ошибками отсчета координат x_m . Если для нескольких значений порядка дифракции получен ряд величин $\tilde{a}_i, i=1, \dots, N$, то статистически обоснованная оценка ширины щели a дается формулой:

$$\langle a \rangle = \bar{a} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i, \quad (35)$$

а погрешность разброса, обусловленная случайными ошибками отсчета координат x_m , дается формулой:

$$(\Delta a)_{\text{разб}} = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^N (\tilde{a}_i - \bar{a})^2}. \quad (36)$$

Аналогичные формулы справедливы для оценки величины диаметра d и его погрешности, связанной со случайными ошибками отсчета x_m .

Систематические ошибки обусловлены неопределенностью расстояния f_3 между задней главной плоскостью объектива L_3 и экраном E_2 и ошибками градуировки шкалы микроскопа или линейки. Будем считать, что: $f_3 = (500 \pm 20)$ мм; ошибка градуировки шкалы микроскопа составляет одно маленькое деление на всю шкалу $(\Delta x_m / x_m)_{\text{град}} = 0,05 \text{ мм} / 6 \text{ мм} \approx 0,01$; ошибка градуировки линейки $(\Delta x_m / x_m)_{\text{град}} \approx 0,003$.

Если при наблюдении картины дифракции на щели в поле зрения микроскопа попадает несколько темных полос, то следует построить зависимость координаты центра темной полосы x_m от порядка m . Из равенства (31) следует, что эта зависимость должна быть линейной: $x_m = A + B \cdot m$.

Методом наименьших квадратов можно найти коэффициент B и соответственно ширину щели a :

$$a = \frac{\lambda \cdot f_3}{B}. \quad (37)$$

После проведения расчетов подумайте над следующими вопросами:

- 1) Можно ли наблюдаемые отличия полученных размеров диафрагм считать значимыми?
- 2) На основании чего делается вывод о значимости отличия двух измеренных величин?
- 3) Соответствуют ли интервалы между темными полосами, полученные в эксперименте, интервалам, которые предсказывает теория?
- 4) Если полного соответствия нет, то с чем это может быть связано?

4.4.4. Требования, предъявляемые к отчету

Отчет должен содержать:

- формулировку цели лабораторной работы;
- оптическую схему установки;
- рабочие формулы;
- непосредственные результаты измерений;
- описание метода обработки результатов измерений;
- результаты обработки экспериментальных данных;
- обсуждение результатов измерений;
- выводы.

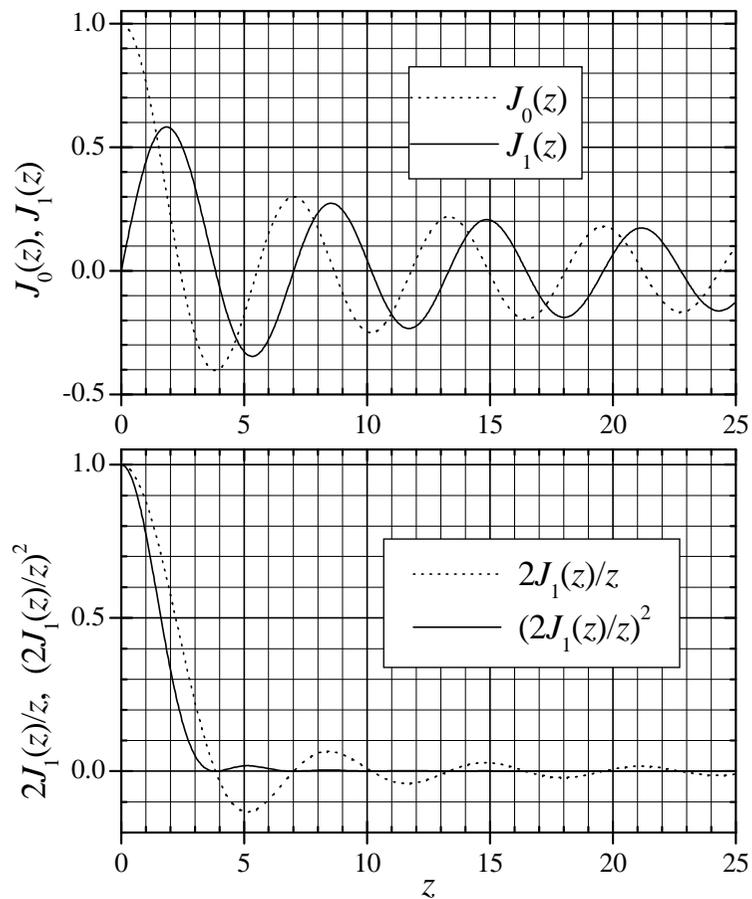
5. Контрольные вопросы

Ниже приведены вопросы, на которые должен уметь отвечать студент для того, чтобы осознанно выполнять лабораторную работу.

1. Как можно определить явление дифракции?
2. Что такое дифракция Френеля и что такое дифракция Фраунгофера?
3. Какая оптическая схема позволяет наблюдать дифракцию Фраунгофера?
4. Как можно сформулировать принцип Гюйгенса – Френеля?
5. В чем состоит дополнение Френеля к принципу Гюйгенса?
6. Каким образом можно получить условие формирования минимума интенсивности в дифракционной волне для дифракции Фраунгофера?
7. Как можно математически сформулировать принцип Гюйгенса – Френеля?
8. Как выглядит картина дифракции Фраунгофера на щели?
9. Как выглядит картина дифракции Фраунгофера на прямоугольнике?
10. Как выглядит картина дифракции Фраунгофера на круглом отверстии?
11. Как выглядит картина дифракции Фраунгофера на непрозрачной полоске?
12. Отличается ли картина дифракции Фраунгофера на щели от картины дифракции Фраунгофера на непрозрачной полоске?
13. Как можно сформулировать принцип Бабиня?
14. Что такое телескопическая система и для чего она используется в данной работе?

Приложение

Рис. П1. Графики функций $J_0(z)$, $J_1(z)$, $\frac{2J_1(z)}{z}$, $\left(\frac{2J_1(z)}{z}\right)^2$



Функция Бесселя $J_p(z)$ первого рода порядка t может быть представлена

степенным рядом: $J_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда следует,

что $J_1(z) = \frac{z}{2} + O(z^3)$, поэтому $\frac{2J_1(z)}{z} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$.

Список рекомендованной литературы и справочные данные

1. Ландсберг Г. С. *Оптика*. Москва: Изд-во «Наука». 1976. 928 с.
2. Бутиков Е. И. *Оптика: Учебное пособие. 3-е изд., доп.* СПб.: Издательство «Лань». 2012. 608 с.
3. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. Москва. Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука». 1973, 720 с.
4. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва. «Наука». 1970, 720 с.

Технический редактор: *В. Н. Васильева*

Корректор: *О. С. Говорухина*

Оператор: *Н. С. Орлов*

Подписано в печать 28.11.13.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Уч.-изд. л. 1,60. Усл.-печ. л. 2,09. Заказ № 1608.38. Тираж 117.

КнигоГрад — издательство, типография.

426034, г. Ижевск, ул. Коммунаров, 244.