УДК 368:51-75

РЕЗЕРВ ПО ДОГОВОРУ СТРАХОВАНИЯ ПОТЕРИ ДОХОДОВ ВСЛЕДСТВИЕ ПОСТОЯННОЙ ПОЛНОЙ УТРАТЫ ТРУДОСПОСОБНОСТИ

Анна Фаизова, *канд. экон. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, ассистент кафедры управления рисками и страхования*

Аннотация. *Рассматрена модель резерва для индивидуального договора страхования на случай постоянной полной утраты трудоспособности. Данная модель построена на основе модели с тремя состояниями и системы дифференциальных уравнений Тиле. Классические модели подобных резервов для долгосрочных видов страхования, среди прочего, основаны на предположении о поведении процентных ставок с течением времени. Прочие факторы, оказывающие влияние на их размер, как правило, игнорируются. Приведено обобщение классического подхода на случай зависимости интенсивности начисления процента от размера инвестируемого резерва, получены и проанализированы формулы, позволяющие вычислить необходимый размер резервов.*

Ключевые слова: *страхование потери доходов вследствие постоянной полной нетрудоспособности, дифференциальные уравнения Тиле, переменная интенсивность начисления (сила) процента.*

Страхование потери доходов вследствие постоянной полной утраты трудоспособности (Total Permanent Disability Insurance, сокращенно TPD) представляет собой страхование от урона, вызванного неспособностью заниматься приносящей доход деятельностью из-за психического или физического ущерба, классифицируемого как постоянный в соответствии с условиями договора страхования. Такие условия могут различаться, но, как правило, предполагается, что нетрудоспособность продолжалась в течение некоторого периода времени (6 месяцев и более).

Это долгосрочный вид страхования, договор должен действовать не менее 5 лет. По данному виду страхования, как правило, предоставляются регулярные выплаты страхового обеспечения при стойкой утрате трудоспособности до смерти застрахованного лица или достижения им оговоренного возраста (например, возраста выхода на пенсию). Чаще всего устанавливаются постоянные или увеличивающиеся страховые выплаты, прочие формы используются редко. Иногда также предусмотрены единовременные выплаты на случай утраты трудоспособности или смерти. Также существуют продукты, предполагающие участие страхователя в прибыли, и паевые продукты.

В России данный вид страхования не распространен. Тем не менее, модели, используемые для соответствующих страховых операций, могут быть применены, например, для обоснования социального обеспечения и операций социального страхования, что делает актуальным их рассмотрение.

Рассмотрим индивидуальный договор страхования на случай постоянной полной потери трудоспособности, заключенный сроком на n лет, по которому предусмотрены:

- премия, непрерывно уплачиваемая с интенсивностью $p_1(t)$, пока застрахованное лицо трудоспособно;
- выплата аннуитета с интенсивностью $b_2(t)$, производимая в случае постоянной полной потери трудоспособности;
- выплата в размере $c_{23}(t)$, осуществляющаяся в случае смерти постоянно полностью нетрудоспособного застрахованного лица.

Такие условия отражают содержание наиболее типичного договора страхования на случай постоянной полной потери трудоспособности, дополнительные разовые выплаты, производимые в случае смерти здорового застрахованного лица и в случае наступления нетрудоспособности, используются в комбинированных страховых продуктах.

Подобный договор страхования описан моделью с тремя состояниями, соответствующими трудоспособности, полной постоянной нетрудоспособности и смерти застрахованного лица (рисунок 1).

Динамика изменение резервов, формируемых для такого договора страхования будет описана системой дифференциальных уравнений Тиле [1]:

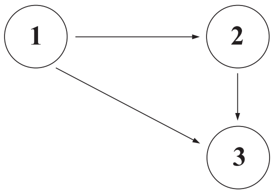

Рисунок 1. Схема для договора страхования потери доходов вследствие полной постоянной нетрудоспособности

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{V}_1(t)}{dt} = p_1(t) + \left(\delta + \mu_{12}(t) + \mu_{13}(t)\right)\cdot \bar{V}_1(t) - \mu_{12}(t)\bar{V}_2(t), \\ \dfrac{d\bar{V}_2(t)}{dt} = \left(\delta + \mu_{23}(t)\right)\cdot \bar{V}_2(t) - b_2(t) - \mu_{23}(t)c_{23}(t), \end{cases}$$

где δ – функция интенсивности начисления (силы) процента, $\mu_{ij}(t)$ – интенсивность перехода из состояния с номером i в состояние с номером j в момент времени t, $\bar{V}_i(t)$ – размер страхового резерва, который необходимо сформировать в момент времени t, если застрахованный риск находится в состоянии с номером i.

В качестве одной из предпосылок классических моделей резерва для долгосрочного страхования используется предположение об изменении интенсивности начисления процента с течением времени. Однако на практике поведение процентной ставки зависит от гораздо большего количества факторов, например, таких, как состояние экономики страны, срок инвестирования, уровень инфляции и других.

В этой связи возникает необходимость выделения среди прочих такого фактора оценки резерва как зависимость процентной ставки размещения данного резерва от его размера [3]. Наличие такой зависимости можно объяснить разными объемами рынков, на которые можно выходить при различном размере инвестируемых средств, относительным уменьшением удельных транзакционных издержек при росте инвестиций и т.д.

Пусть функция интенсивности начисления процента δ зависит кусочно-постоянно от размера инвестируемого капитала, то есть от размера резерва $\bar{V}_i(t)$, сформированного по договору страхования на случай постоянной полной потери трудоспособности в момент времени t:

$$\left(\bar{V}_i(t)\right) = \begin{cases} \delta_0, \bar{V}_i(t) < V_0, \\ \delta_1, \bar{V}_i(t) \ge V_0, \end{cases}$$

где $V_0 > 0$ – критический уровень резерва (размер инвестируемого капитала, при котором происходит изменение процентной ставки), $0 < \delta_0 < \delta_1$. Выбор подобной формы зависимости объясняется тем, что любая форма зависимости между процентной ставкой и размером инвестируемых средств может быть аппроксимирована с помощью кусочно-постоянных функций.

В каждый момент времени по каждому договору страхования формируется только один из резервов $\bar{V}_i(t)$ и $\bar{V}_2(t)$ Кроме того, если в некий момент времени происходит страховой случай, то резерв $\bar{V}_i(t)$ по такому договору больше никогда не формируется. Значение резерва $\bar{V}_i(t)$ по договору страхования на случай постоянной полной потери трудоспособности всегда неположительное (если застрахованный риск находится в состоянии с номером 1, то страховые выплаты не производятся, а поступление премий происходит). Следовательно, зависимость интенсивности начисления процента от размера резерва $\bar{V}_i(t)$ будет постоянной в течение всего срока страхования, иными словами $\delta(\bar{V}_i(t)) = \delta_0$. Если в некий момент времени застрахованный риск переходит в состояние с номером 2, то по такому договору начинает формироваться резерв $\bar{V}_2(t)$. Его значение всегда неотрицательно (поступления премий не происходит, а выплаты производятся) и не возрастает. Таким образом, сначала функция интенсивности начисления процента принимает значение δ_0, а затем, когда уровень резерва достигнет величины V_0, меняет значение на δ_1.

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений Тиле,

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{V}_1(t)}{dt} = p_1(t) + \left(\delta\left(\bar{V}_1(t)\right) + \mu_{12}(t) + \mu_{13}(t)\right)\cdot \bar{V}_1(t) - \mu_{12}(t)\bar{V}_2(t), \\ \dfrac{d\bar{V}_2(t)}{dt} = \left(\delta\left(\bar{V}_2(t)\right) + \mu_{23}(t)\right)\cdot \bar{V}_2(t) - b_2(t) - \mu_{23}(t)c_{23}(t), \end{cases} \quad (1)$$

с функцией интенсивности начисления процента вида, описанного выше.

Сначала рассмотрим отдельно второе уравнение системы. При $\delta(\bar{V}_2(t)) = \delta_1$, оно является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Данное уравнение имеет решение

$$\bar{V}_2(t) = \left(C_1 - \int_0^t \left(b_2(\tau) + c_{23}(\tau)\mu_{23}(\tau)\right) e^{-\int_0^\tau (\delta_1 + \mu_{23}(s))ds} d\tau\right) \left(e^{\int_0^t (\delta_1 + \mu_{23}(s))ds}\right), \text{ при } t < t_0,$$

где t_0 – момент времени, в который значение резерва уменьшится до величины V_0. В момент времени t_0 функция интенсивности начисления процента изменит свое значение, $\delta(\bar{V}_2(t)) = \delta_0$. При этом второе уравнение системы (1) снова окажется линейным дифференциальным уравнением первого порядка, чье решение, при условии выполнения соотношения $\bar{V}_2(n) = 0$, может быть представлено в виде

$$\bar{V}_2(t) = \int_t^n \left(b_2(\tau) + c_{23}(\tau)\mu_{23}(\tau)\right) e^{\int_\tau (\delta_0 + \mu_{23}(s))ds} d\tau, \text{ при } t < t_0.$$

Соотношение $\bar{V}_2(t_0) = V_0$ дает возможность вычисления значений постоянной C_1 и момента времени t_0. Тогда выражение для значения резерва $\bar{V}_2(t)$ окончательно может быть представлено в виде

$$\bar{V}_2(t) =$$

$$\begin{cases} V_0 \cdot e^{-\int_t^{t_0} (\delta_1 + \mu_{23}(s))ds} + \int_t^{t_0} \left(b_2(\tau) + c_{23}(\tau)\mu_{23}(\tau)\right) e^{\int_\tau^t (\delta_1 + \mu_{23}(s))ds} d\tau, t < t_0, \\ \int_t^n \left(b_2(\tau) + c_{23}(\tau)\mu_{23}(\tau)\right) e^{\int_\tau^t (\delta_0 + \mu_{23}(s))ds} d\tau, t \ge t_0, \end{cases}$$

где момент времени t_0 определяется соотношением

$$V_0 = \int_{t_0}^n \left(b_2(\tau) + c_{23}(\tau)\mu_{23}(\tau)\right) e^{\int_\tau^{t_0} (\delta_0 + \mu_{23}(s))ds} d\tau.$$

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (1). Как было отмечено выше, для него $\delta(\bar{V}_i(t)) = \delta_0$. Таким образом, указанное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решение, с учетом требования равенства нулю резерва в момент окончания договора, может быть представлено в виде

$$\bar{V}_1(t) = \int_t^n \left(\bar{V}_2(\tau)\mu_{12}(\tau) - p_1(\tau)\right) e^{\int_\tau^t (\delta_0 + \mu_{12}(s) + \mu_{13}(s))ds} d\tau.$$

Для нахождения интенсивности премии $p_1(t)$ необходимо воспользоваться принципом эквивалентности, который в данном случае соответствует требованию о равенстве нулю резерва в начальный момент времени. Построенные формулы для расчета резервов $\bar{V}_i(t)$ и $\bar{V}_2(t)$ дают возможность учесть зависимость интенсивности начисления процента не только от размера инвестируемого капитала, но и от прочих факторов, не входящих в систему (1) в качестве параметров. В этом случае подстановка в систему дифференциальных уравнений Тиле функции δ, зависящей не только от размера резерва, не повлияет на вид решения, а, значит, полученные формулы будут пригодны для использования и в этой ситуации.

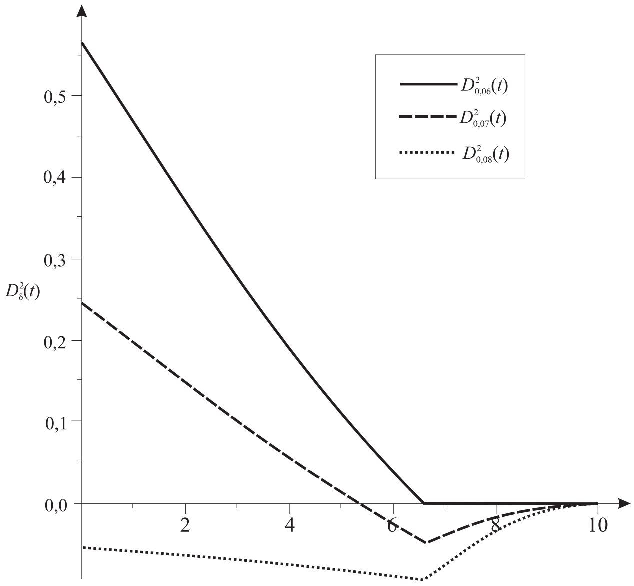

Рисунок 2. Зависимости $D_2^{0,06}(t)$, $D_2^{0,07}(t)$, $D_2^{0,08}(t)$ разности резервов $\overline{V}_2(t)$ для $n=10$

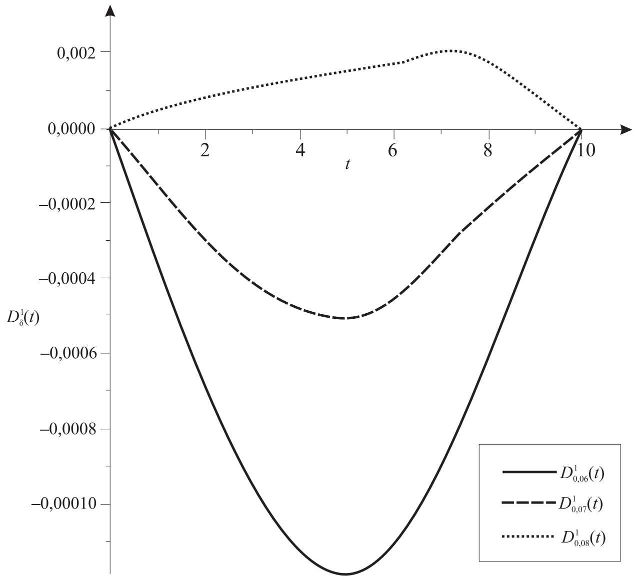

Рисунок 3. Функции $D_1^{0,06}(t)$, $D_1^{0,07}(t)$, $D_1^{0,08}(t)$ разности резервов $\overline{V}_i(t)$ для $n=10$

Сравним классический резерв, построенный для постоянной функции интенсивности начисления процента, и резерв, построенный для случая кусочно-постоянной зависимости функции δ от размера резерва. Для этого построим функции $D_1^\delta(t)$ и $D_2^\delta(t)$, которые определим как разности функций резерва, построенного для различных значений постоянной интенсивности начисления процента δ, и функции резерва, построенного в случае наличия кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера инвестируемого капитала. Функции $D_1^\delta(t)$ и $D_2^\delta(t)$ позволяют проанализировать изменения, которые произойдут с внесением в модель кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера резерва.

На рисунке 2 представлены графики $D_2^{0,06}(t)$, $D_2^{0,07}(t)$, $D_2^{0,08}(t)$, соответствующие ситуации постоянной полной нетрудоспособности застрахованного лица для договора страхования, по которому предусмотрена лишь выплата аннуитета с интенсивностью 1, заключенного на 10 лет с лицом в возрасте 40 лет. В качестве кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента была рассмотрена зависимость, при которой $\delta_0 = 0,06$, $\delta_1 = 0,08$, $V_0 = 3$. Предполагалось, что интенсивности переходов подчиняются закону Гомперца-Мейкема [2].

Точке излома графиков соответствует момент времени, при котором резерв достигает критического значения и происходит изменение значения кусочно-постоянного параметра δ (в данном примере $t_0 = 6{,}660106$). Резерв для постоянной интенсивности начисления процента, $\delta = 0{,}06$, совпадает с резервом для кусочно-постоянной δ в конце срока страхования (для моментов времени, больших t_0).

На рисунке 3 представлены функции $D_1^{0,06}(t)$, $D_1^{0,07}(t)$, $D_1^{0,08}(t)$, определяемые для здорового застрахованного лица.

При значениях интенсивности начисления процента, равных 0,06 и 0,07, резерв, сформированный с учетом кусочно-постоянной зависимости δ от его размера, оказывается меньше резерва, сформированного без учета подобной зависимости. При $\delta = 0{,}08$ это соотношение не выполняется, так как в этом случае резерв, формируемый без учета зависимости, всегда будет рассчитываться, по крайней мере, с не меньшим значением интенсивности начисления процента, чем резерв, формируемый с учетом зависимости.

Предложенная модель резервов по страхованию потери доходов вследствие полной постоянной утраты трудоспособности, при наличии кусочно-постоянной зависимости интенсивности начисления процента от размера резерва, позволяет учесть влияние большего количества факторов на размер резервов по данному виду страхования и, как следствие, определить потребность в страховых резервах более адекватно принятым страховым обязательствам. Применение разработанной модели на практике позволит принимать более обоснованные решения в области финансового менеджмента, что будет способствовать повышению финансовой устойчивости страховой организации.

Литература

1. *Haberman S., Pitacco E.* Actuarial Models for Disability Insurance. London: Chapman & Hall / CRC Press, 1999. 280 p.

2. *Ramlau-Hansen H.* Distribution of Surplus in Life Insurance // ASTIN Bulletin. 1991. Vol. 21. P. 57–71.

3. *Фаизова А.А.* Модель резерва по долгосрочному личному страхованию и возможности ее применения // Финансы и кредит. 2015. 17(641). С. 59–66.

A reserve for individual insurance contracts for the case of total permanent disability

Abstract: *A model of a reserve for individual insurance contracts for the case of total permanent disability based on models with three states and a system of Thiele differential equations is considered in this article. Classic models of such reserves for long-term insurance are based, among other things, on the assumption about the behavior of interest rates over time. Other factors influencing their size, are usually ignored. The article provides a generalization of the classical approach to the case of dependence of the force of interest on the amount of the invested reserve. The formula for calculating the required size of reserves is obtained and analyzed.*

Keywords: *total permanent disability insurance, Thiele differential equations, variable force of interest.*

Authors: *Anna A. Faizova, St.Petersburg state university. E-mail: a.faizova@spbu.ru*