

Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
(СПбГУ)

УДК 532 533 536 538.9

Рег № НИОКТР АААА-А19-119112690069-1

Инв. № 48919991

УТВЕРЖДАЮ
Начальник Управления
научных исследований СПбГУ

_____ Е.В. Лебедева
« » _____ 20__ г.

ОТЧЁТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Ренормализационная группа в стохастических моделях турбулентности,
магнитной гидродинамики и случайного роста поверхностей.

По гранту РФФИ
(№20-32-70139 от 18.11.2019 г.)

Руководитель НИР,
доцент кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц,
кандидат физико-математических наук

Гулицкий Н. М.

Санкт-Петербург
2022

Реферат

Проект направлен на изучение фундаментальной проблемы теоретической физики (теории критического поведения), а именно на исследование равновесного и неравновесного динамического критического поведения ряда квантовых и классических систем многих частиц, а также на исследование явления аномального скейлинга для развитой гидродинамической (в том числе магнитогидродинамической) турбулентности. В частности, в ходе проекта рассматривались:

- некоторые стохастические модели развитой гидродинамической турбулентности, турбулентной конвекции и магнитной гидродинамики. Вычислены соответствующие аномальные показатели и исследована их универсальности, в том числе зависимость от анизотропии, сжимаемости и времени корреляции.
- некоторые сильно неравновесные системы, описывающие случайно растущие границы раздела фаз: модели Кардара-Паризи-Занга, эрозии ландшафтов и самоорганизованной критичности. Было проведено изучение влияния анизотропии, сжимаемости среды и типа случайного шума на критическое поведение.

Введение

Квантовая теория поля является одной из интереснейших областей теоретической физики. Ее предсказания неоднократно подтверждались в ходе различных экспериментов, наиболее важным из которых является открытие бозона Хиггса на Большом адронном коллайдере.

Одним из основных аспектов квантовой теории поля является необходимость вычисления фейнмановских диаграмм, что представляет собой сложную техническую задачу – как в связи с большим количеством вычисляемых диаграмм (уже в первых трех порядках Стандартной модели их более миллиона), так и в связи с резко возрастающей сложностью каждой отдельной диаграммы при переходе к следующему порядку теории возмущений. С другой стороны, применение теоретико-полевых методов ко все более широкому классу задач в статистической физике требует дальнейшего развития самого математического аппарата КТП.

Ежемесячно в ведущих научных журналах (Physical Review E, Journal of Physics A, Journal of Statistical Physics, Physica, European Physical Journal и др.) публикуются десятки теоретических и экспериментальных работ по тематике данного проекта. Это связано с тем, что многочисленные системы обладают очень нетривиальным поведением вблизи своих критических точек. Одной из основных особенностей такого поведения является расходящаяся корреляционная длина, несмотря на то, что лежащие в основе микроскопические взаимодействия являются короткодействующими. Это приводит к тому, что поведение различных по своей физической природе систем (жидкостей, магнетиков,

сверхпроводников) является универсальным – в том смысле, что их термодинамические и корреляционные функции обладают скейлинговым (автомодельным) поведением и зависят только от глобальных характеристик системы, таких как симметрии и размерность пространства. Таким образом, различные физические системы объединяются в классы универсальности с одинаковым критическим поведением.

Наиболее важными измеримыми параметрами, характеризующими поведение критических систем, являются критические индексы. Их вычисление в рамках какой-либо микроскопической модели является сложной нелинейной задачей квантово-полевой теории возмущений, требующей использования как аналитических методов, так и компьютерных ресурсов. В данном проекте предлагается рассмотреть некоторые модели развитой гидродинамической турбулентности и модели сильно неравновесных систем, описывающие случайно растущие границы раздела фаз.

Одной из сложнейших проблем развитой гидродинамической турбулентности является аномальный скейлинг в инерционном интервале турбулентности. Данное явление проявляется в сингулярном (возможно, степенном) поведении различных статистических величин с бесконечным набором аномальных показателей. Вычисление критических показателей в рамках регулярной теории возмущений на основе динамических уравнений типа Навье-Стокса остаётся в большинстве случаев открытой проблемой.

Тем не менее, исследование переноса полей примеси турбулентным течением оказывается гораздо проще - как с теоретической точки зрения, так и со стороны численного моделирования. Благодаря этой особенности, как на основании экспериментов, так и в результате численного моделирования были найдены отклонения от классической феноменологической теории Колмогорова-Обухова, которые связывают с явлением перемежаемости турбулентных пульсаций. Таким образом, задачи турбулентного переноса могут рассматриваться как исходная точка при изучении явлений перемежаемости и аномального скейлинга в турбулентности в целом [G. Falkovich, K. Gawedzki and M. Vergassola, *Rev. Mod. Phys.* 73, 913, 2001].

Также в проекте проведено исследование некоторых моделей неравновесного критического поведения. Для описания различных аспектов случайного роста были предложены четыре нелинейных стохастических дифференциальных уравнения: модель Кардара-Паризи-Занга [M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* 56, 889, 1986], модель с бесконечным количеством констант связи [S. I. Pavlik, *JETP* 79, 303, 1994; N. V. Antonov and A. N. Vasil'ev, *JETP* 81, 485, 1995], непрерывная анизотропная модель самоорганизованной критичности (песчаный профиль) [T. Hwa and M. Kardar, *Phys. Rev. A*, 45, 7002, 1992] и анизотропная модель эрозии ландшафтов [R. Pastor-Satorras, D. H. Rothman, *J. Stat. Phys.* 93: 3-4, 477, 1998]. Все эти модели внесли важный вклад в решение задачи роста поверхности при различных условиях среды, тем не менее, полученные ответы не всегда можно считать удовлетворительными. Недавно в работе [C. Duclut, B. Delamotte, *Phys. Rev. E* 96, 012149, 2017] было установлено, что во многих ситуациях выбор случайного шума может играть решающую роль. В частности, добавление «замороженного» (статического) шума вместо стандартного теплового (динамического) позволило получить новые предсказания в рамках модели эрозии ландшафтов. Таким образом, изучение уже существующих моделей роста с замороженным шумом может дать интересные и неожиданные результаты.

Основная часть отчета о НИР

В ходе реализации проекта с помощью методов квантовой теории поля (ренормализационной группы) были исследованы модели неравновесного динамического критического поведения при наличии случайного движения среды. В данном подходе вычисляемыми величинами являются координаты неподвижных инфракрасно-притягивающих (ИК-притягивающих) точек уравнений ренормализационной группы, определяющие классы универсальности (т.е. типы скейлингового поведения системы, наблюдаемые при определенных значениях параметров) и критические размерности полей и параметров системы.

В ходе реализации проекта получены следующие результаты:

- исследована модель самоорганизованной критичности Хуа-Кардара при учете турбулентного движения среды, моделируемого с помощью анизотропного статистического ансамбля Авельянеды и Майда с конечным временем корреляции. В качестве случайного шума в стохастическом уравнении Хуа-Кардара использовался как независимый от времени (замороженный) случайный шум, так и белый шум. Установлено, что тип случайной силы в уравнении Хуа-Кардара играет ключевую роль: в отличие от модели с белым шумом, которая обладает тремя возможными классами универсальности, модель с замороженным шумом обладает четырьмя классами, причем области устойчивости некоторых из них пересекаются. Пересечение областей устойчивости означает, что критическое поведение системы зависит не только от глобальных параметров системы (размерности пространства и т. д.), но также и от начальных данных зарядов (констант связи), которые определяют, какая именно неподвижная точка будет достигнута ренормгрупповым потоком. Как следствие, такое поведение является неуниверсальным. Системы такого типа известны, но встречаются крайне редко.

- Исследована модель Кардара-Паризи-Занга, описывающая случайно растущую границу раздела фаз, при учете движения окружающей среды. Движение среды описывалось стохастическим уравнением Навье-Стокса с коррелятором случайной силы, позволяющим в рамках одной модели описывать как турбулентное движение среды, так и жидкость в тепловом равновесии. Установлено, что инфракрасное асимптотическое поведение системы делится на шесть неравновесных классов универсальности, связанных с найденными неподвижными точками уравнений ренормгруппы. Наиболее интересные с физической точки зрения случаи, соответствующие пространству размерностей $d=2$ или $d=3$, отвечают классу универсальности чистого турбулентного переноса, в котором нелинейность исходного уравнения Кардара-Паризи-Занга является несущественной.

- Исследована анизотропная модель самоорганизованной критичности Хуа-Кардара при учете турбулентного движения среды. Движение среды моделировалось изотропным статистическим ансамблем Казанцева-Крейчнана – гауссовым ансамблем с нулевым временем корреляции и корреляционной функцией вида $1/k^{d+x_i}$, где k является волновым числом, d – размерностью пространства, а x_i – произвольным параметром, наиболее реалистичными значениями которого являются $4/3$ (Колмогоровская турбулентность) и 2 (Бэтчелоровский предел). Установлено наличие четырех инфракрасно-

притягивающих неподвижных точек, определяющих соответствующие классы универсальности. Также установлено, что в зависимости от того, какие члены в действии системы (анизотропный, изотропный или оба) являются существенными в конкретном классе универсальности, скейлинговое поведение может быть как обыкновенным, так и обобщенным, что означает, что масштабному преобразованию подвергаются не только временные и пространственные переменные, но также и некоторые параметры.

- Исследована модель Кардара-Паризи-Занга с замороженным случайным шумом при учете воздействия турбулентной среды, описываемой статистическим ансамблем поля скорости Казанцева-Крейчнана. В такой модели из-за нарушения Галлилеевой симметрии индуцируется дополнительный нелинейный вклад, квадратичный по полю скорости и необходимый для ренормируемости модели. Оказывается, что эта индуцированная нелинейность сильно влияет на скейлинговое поведение в некоторых классах универсальности, даже когда турбулентная адвекция представляется несущественной сама по себе. В модифицированной модели найдено 7 неподвижных точек уравнений ренормгруппы, при этом две неподвижные точки отвечают пределу бесконечной константы связи нового вклада. Наиболее интересные с физической точки зрения случаи, соответствующие пространству размерностей $d=2$ или $d=3$, а также положительному значению показателя χ_1 , входящего в коррелятор поля скорости, отвечают классам универсальности, в которых турбулентный перенос и нелинейность уравнения Кардара-Паризи-Занга существенны одновременно. При этом при некоторых значениях χ_1 система описывается режимом с бесконечной константой связи нового вклада. Также установлено, что режим чистого турбулентного переноса не реализуется ни при каких значениях параметров системы.

- Ренормгрупповые функции $O(n)$ -симметричной ϕ^4 модели с тензорным параметром порядка исследованы с помощью двух методов пересуммирования асимптотических рядов: метода Паде-Бореля и метода Борель-Лероя с конформным отображением. В настоящий момент обсуждаемые разложения известны до шестого порядка теории возмущений по константам связи включительно, что предоставляет отличную площадку для изучения стабильности техник пересуммирования, основанных на преобразовании Бореля-Лероя, в случае мультисериальных моделей. С помощью двух упомянутых методов пересуммирования были получены координаты неподвижных точек, а также изучена их инфракрасная устойчивость в рамках ϵ -разложения. Для неподвижной точки, оказавшейся инфракрасно-притягивающей, вычислена критическая размерность парного коррелятора. Результаты, полученные с помощью обоих методов, находятся в качественном согласии друг с другом, однако количественно различаются уже на уровне второй значащей цифры. Кроме того, показано что наиболее стабильные и достоверные результаты получены в случае быстро расходящихся рядов. Также пертурбативные разложения бета-функций в ряд по константам связи пересуммированы напрямую. Показано, что в размерности $d=3$ результаты прямого пересуммирования качественно согласуются с результатами пересуммирования ϵ -разложений, в то время как в размерности $d=2$ отсутствует даже качественное согласие.

- Рассмотрена модель переноса поперечного векторного (магнитного) поля с наиболее общей формой нелинейности (т. н. А-модель) турбулентным течением сильно сжимаемой жидкости. Движение жидкости описывалось стохастическим уравнением Навье-Стокса. Установлено, что полная стохастическая задача эквивалентна некоторой ренормируемой теоретико-полевой модели, обладающей инфракрасно-притягивающей неподвижной точкой. Тем самым установлено (определено) скейлинговое поведение на больших расстояниях и интервалах времени. Однако в силу сокращения нетривиальных вкладов, отвечающих однопетлевому приближению 3-точечной корреляционной функции, вопрос о том, устремляется ли параметр А в некоторое определенное значение в неподвижной точке уравнений ренормгруппы или остается произвольным, не может быть разрешен в рамках рассматриваемого однопетлевого приближения.

- С помощью метода квантовополевой ренормгруппы исследовалась модель самоорганизованной критичности Хуа-Кардара при учете турбулентного движения среды, описываемого стохастическим уравнением Навье-Стокса. При этом коррелятор случайной силы, входящий в уравнение, содержит два вклада: нелокальный вклад, отвечающий турбулентному перемешиванию, и вклад, моделирующий встряхивание всей системы как целого (белый шум). Задача рассматривалась вблизи размерности пространства $d=4$. В результате соединения анизотропной модели Хуа-Кардара с изотропным уравнением Навье-Стокса в действии, эквивалентном полной стохастической задаче, возникло два безразмерных отношения, которые необходимо рассматривать наравне с другими константами взаимодействия. Это привело к возникновению сложной системы бета-функций, в результате анализа которой был обнаружен Гауссов режим, а также режимы турбулентного перемешивания, в которых нелинейность уравнения Хуа-Кардара не существенна и восстанавливается изотропия задачи.

- Исследована модель Кардара-Паризи-Занга с замороженным (не зависящим от времени) случайным шумом при условии турбулентного перемешивания среды, описываемого стохастическим уравнением Навье-Стокса. Коррелятор случайной силы в уравнении Навье-Стокса содержит как нелокальный вклад, так и вклад, моделирующий встряхивание всей системы как целого. Анализ ультрафиолетовых расходимостей 1-неприводимых функций Грина показал, что действие, отвечающее стохастической задаче, не является ренормируемым, что является прямым следствием нарушения симметрии уравнения Кардара-Паризи-Занга замороженным шумом. Включение в действие вклада, квадратичного по полю скорости, модифицирует рассматриваемую модель и делает ее ренормируемой.

Заключение

Для всех рассматриваемых моделей проведен ренормгрупповой анализ, позволяющий установить наличие ИК-притягивающих точек, то есть возможных классов универсальности. Для моделей, связанных с турбулентным движением жидкости, проведено вычисление критических показателей; также установлено наличие аномального

скейлинга, то есть сингулярной степенной зависимости корреляционных либо структурных функций от внешнего масштаба турбулентности внутри инерционного интервала.

Результаты, полученные в данном проекте, могут быть использованы при описании различных процессов в солнечной короне, ионосфере и межзвездном газе. Результаты работы должны стимулировать экспериментальные исследования по аккуратному измерению аномальных показателей в МГД турбулентности. Развитые методы могут быть применены к другим подобным стохастическим задачам, таким как турбулентный перенос тензорных полей, описание турбулентного переноса с помощью стохастического уравнения Навье-Стокса при наличии анизотропии, сжимаемости, нарушенной четности и т. п., а также к исследованию моделей Кардара-Паризи-Занга и Хуа-Кардара при наличии турбулентного движения среды и разными типами случайного шума.